Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
Sprawozdanie 1 - Algebra liniowa
Jakub Synowiec

31.03.2015r.

Cele ćwiczenia:

Implementacja algorytmu rozwiązującego układ równań zapisany przy pomocy macierzy trójdiagonalnej metodą dekompozycji LU. Porównanie wydajnościowe czasu pracy zaimplementowanego algorytmu z funkcją gsl_linalg_solve_tridiag z biblioteki Gnu Scientific Library. Badanie czasu obliczenia operacji BLAS poziomu 1, 2 I 3.

Wstęp:

Algorytmy zostały zaimplementowane w języku C, kompilowane przy użyciu GCC w wersji 4.8.2, użyta została biblioteka Gnu Scientific Library. Testy zostały przeprowadzone na komputerze z systemem operacyjnym Ubuntu Linux 64 bit. Procesor w tym komputerze taktowany jest na 2.4 GHz. Do utworzenia wykresów użyty został proram gnuplot.

Przebieg ćwiczenia:

1. Funkcja generująca testowe macierze NxN oraz macierze trójdiagonalne o rozmiarze N.

W programie macierze reprezentowane są przez tablice danych o rozmiarze N*N. Element o pozycji i, j został zapisany na miejscu i*N + j. Generowanie liczby losowej zostało zaimplementowane przy pomocy funkcji rand() jako podzielenie przez siebie zmiennoprzecinkowo dwóch liczb całkowitych. Do reprezentacji macierzy trójdiagonalnej użyta została tablica o rozmiarze 3*N, gdzie odpowiednio miejsca i * N, 1 + i * N, 2 + i * N reprezentują dane w macierzy znajdujące się na lewo od przekątnej, na przekątnej i na prawo od przekątnej w i-tym wierszu.
Przy wykonywaniu funkcji z biblioteki GSL użyte zostały odpowiedno zawarte w tej bibliotece wektory gsl_vector oraz macierze gsl_matrix, wypełnione w taki sam sposób losowymi danymi.

2. Program rozwiązujący układ równań metodą dekompozycji LU oraz przy użyciu funkcji z biblioteki GSL.

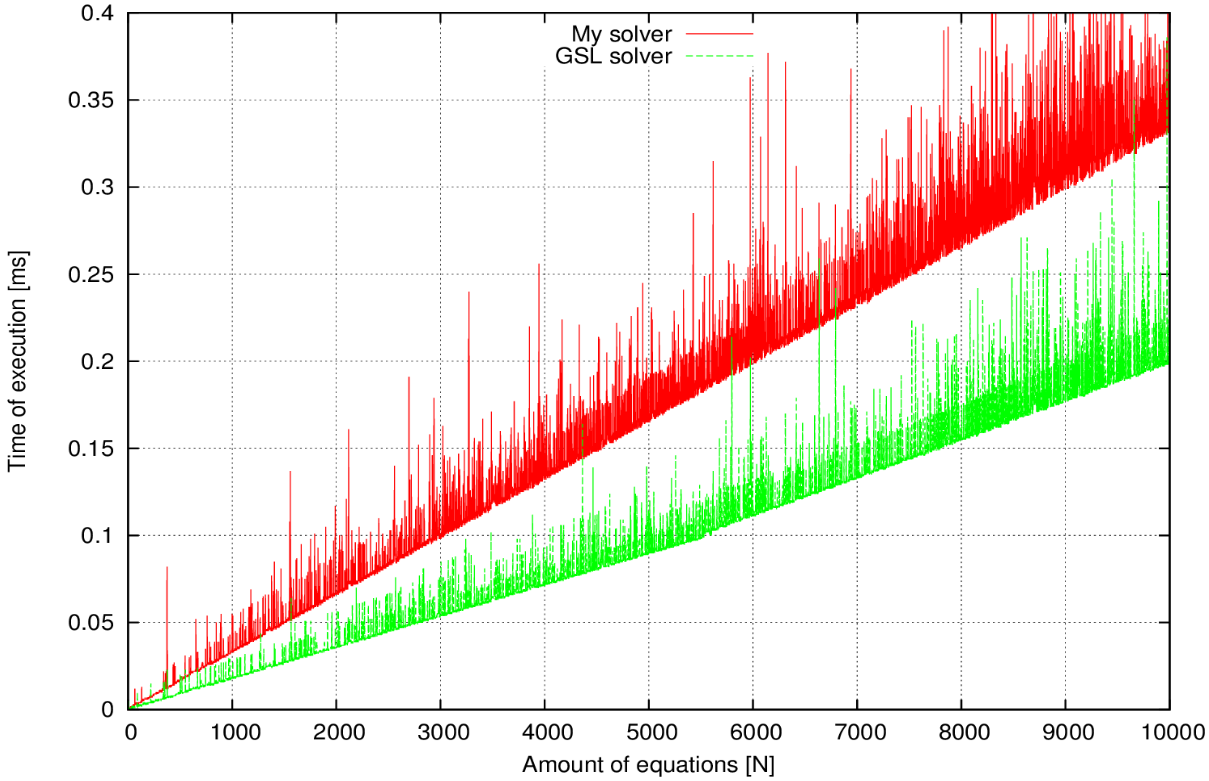
Algorytm rozwiązania układu równań trójdiagonalnych został zaimplementowany w dwóch krokach:

- Dekompozycja macierzy A układu równań na macierze L oraz U.
- Uzyskanie wektora wynikowego X przez operacje na macierzy L, a później U.

Zaimplementowany algorytm dla serii losowych danych zwracał identyczne rezultaty jak funkcja gsl_lialg_solve. Przed użyciem funkcji dane zostały wygenerowane, a później skopiowane, aby obydwie metody mogły działać na identycznym zestawie danych.

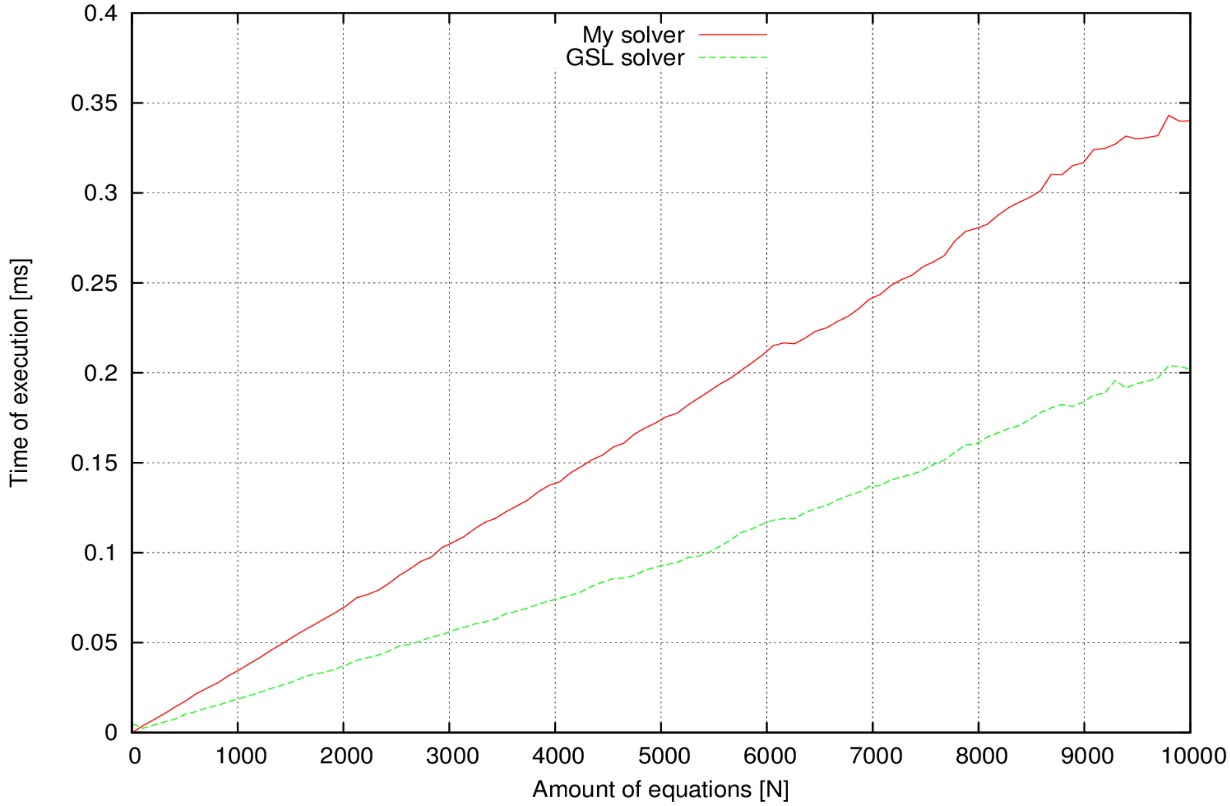
3. Porównanie wydajności powyższych rozwiązań.

Zmierzone zostały czasy wykonywania algorytmów, nie włączając w to alokację pamięci, ani generację danych. Pomiar został wykonany dla obydwóch metod liczących układy od 3 do 10000 równań. Czasy zaprezentowano na rys 1:



rys 1.

Według legendy: My solver - algorytm implementowany, GSL solver - funkcja gsl_linalg_solve. Na wykresie widać pojedyńcze “szpice”, najczęściej zdarzające się zarówno przy algorytmie implementowanym jak i funkcji z biblioteki. Wskazuje to na powstanie wyjątkowo “trudnego” dla obu algorytmu wygenerowanego zestawu danych. Jednak w większości przypadków widać tendencje do liniowego czasu wynonania. Po zastosowaniu operacji wygładzenia wykresu, którą umożliwia program gnuplot uzyskany został efekt pokazany na rys 2.

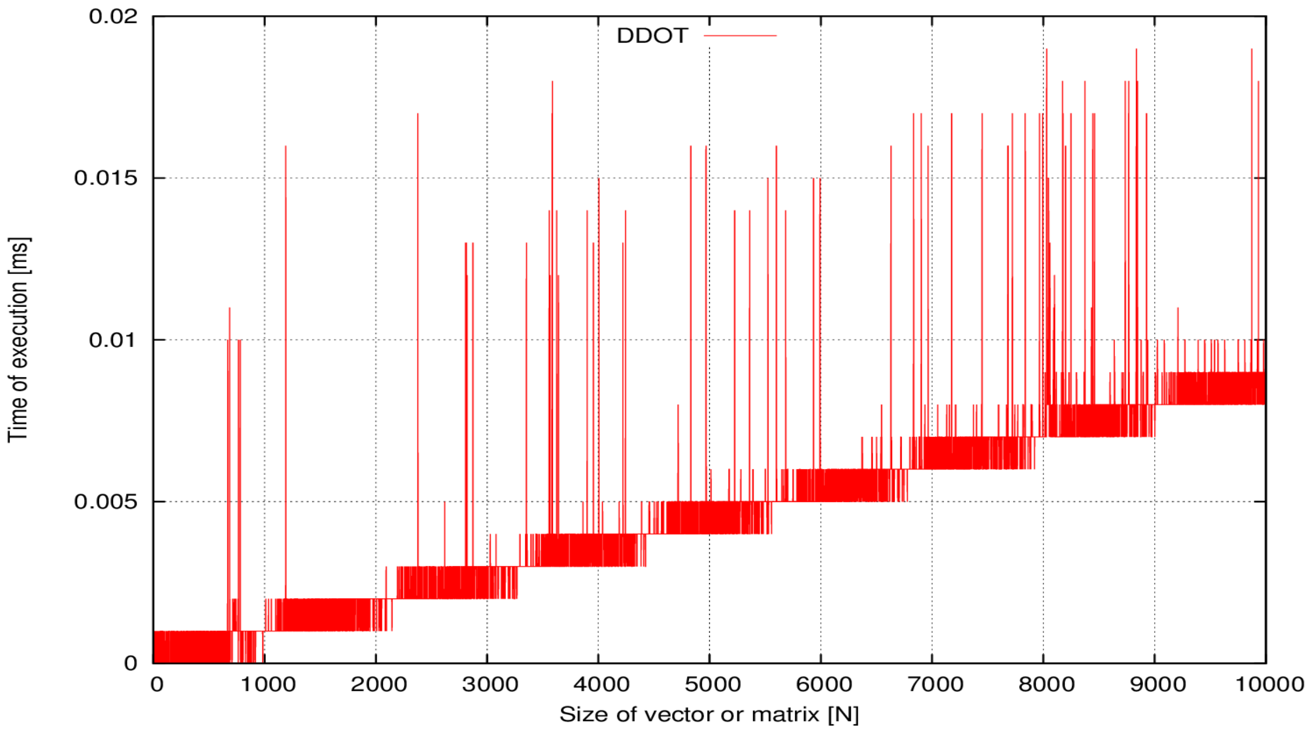


rys 2.

Na powyższym wykresie widać tendencje do liniowego przyrostu czasu wraz z większą ilością danych. Dwukrotny przyrost ilości danych powoduje dwukrotnie dłuższy czas wykonywania tej operacji zarówno dla algorytmu implementowanego jak i algorytmu bibliotecznego.

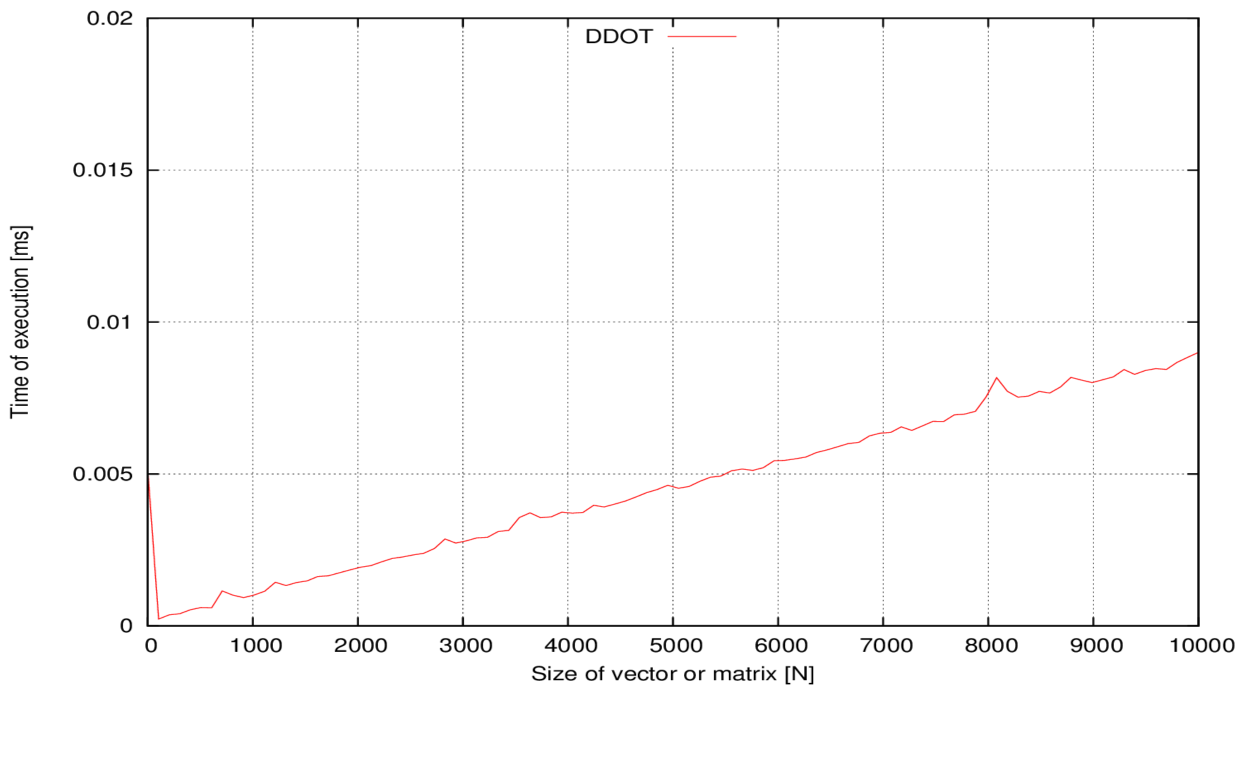
4. Wykresy i analiza czasu obliczenia operacji BLAS poziomu 1,2,3.

- Operacje poziomu pierwszego:Wykonana została funkcja gsl_blas_ddot obliczająca iloczyn skalarny dwóch wektorów. Otrzymany wykres czasu zamieszczono na rys 3.



rys 3.

Tutaj również widać wspomniane w poprzednim punkcie “szpice”. Interpretacja ich powstania jest dokładnie analogiczna. Po “wygładzeniu” wykresu uzyskujemy zależność liniowa pokazaną na rys 4

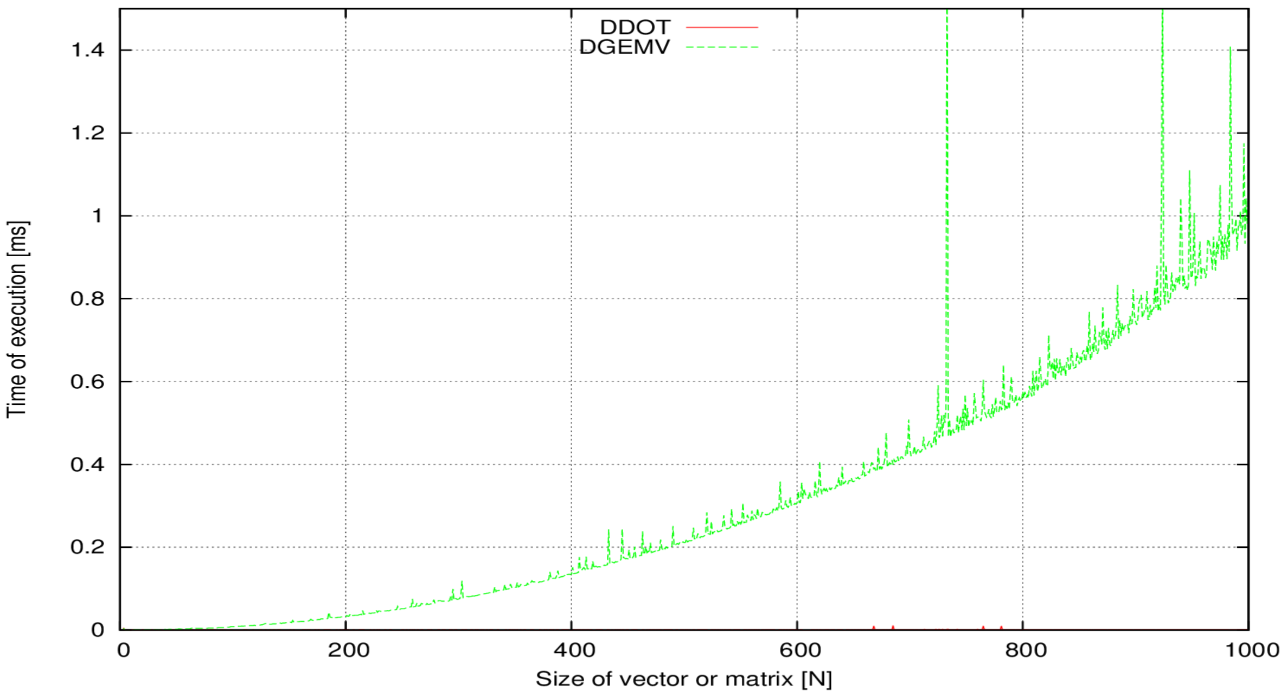


rys 4.

Wnioskując z dwóch powyższych wykresów można stwierdzić, że złożoność czasowa algorytmu jest stała.

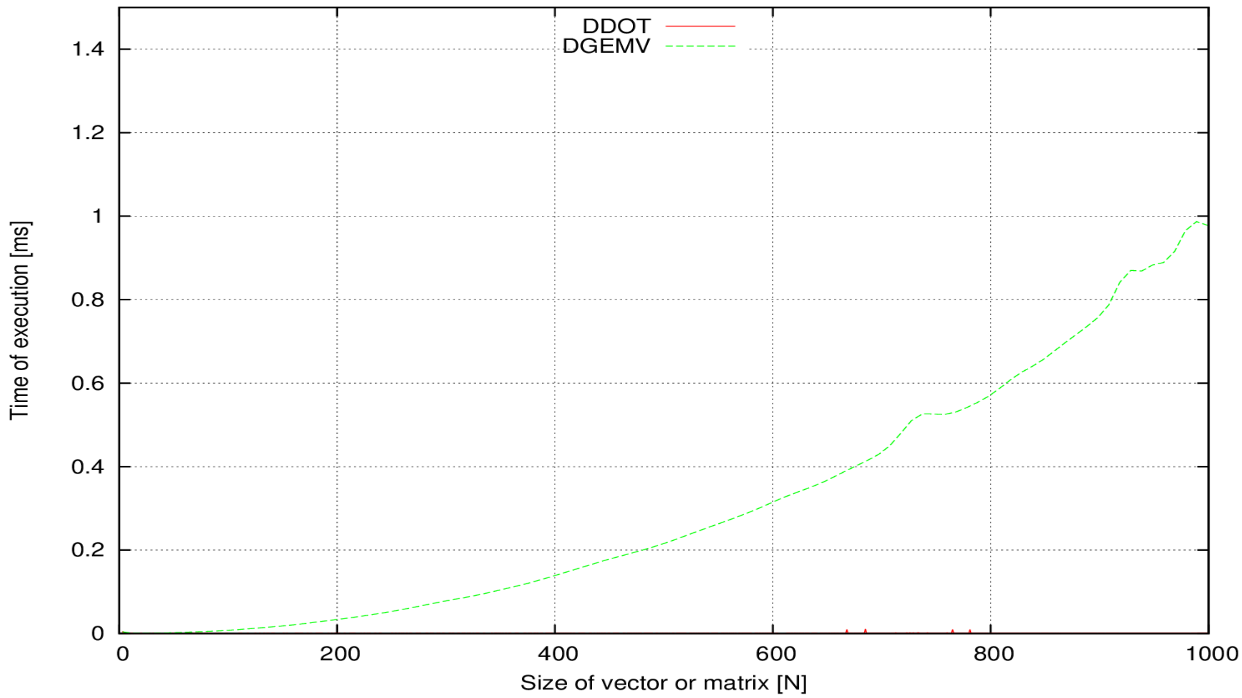
- Operacje poziomu drugiego:

Do operacji poziomu drugiego została wybrana funkcja gsl_blas_dgemv wykonująca operacje:
y = alfa * A * x + beta * y,
gdzie: y, x - wektory długości N; A - macierz NxN, alfa, beta - stałe rzeczywiste
Poniższy wykres reprezentuje złożoność czasową tej funkcji, dodatkowo na rys 5 umieszczono wcześniejszą funkcje poziomu 1:



rys 5.

Przeprowadzając analogiczny tok myślenia odnośnie wyglądu wykresu, oraz po wygładzeniu otrzymujemy wykres zamieszczony na rys 6.

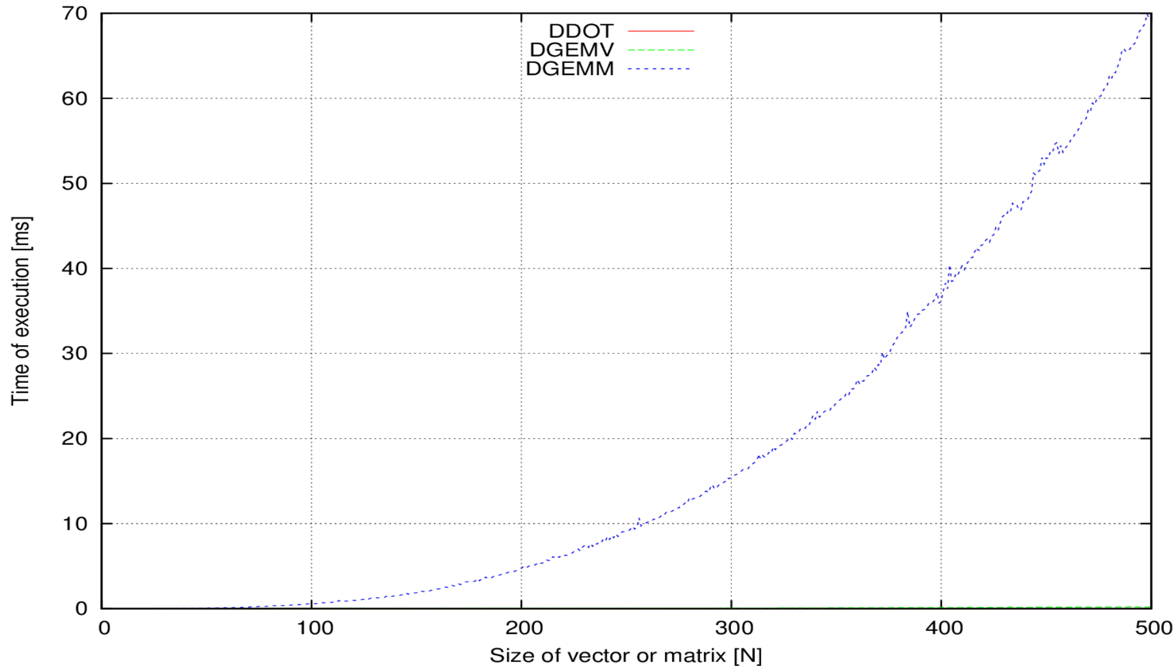


rys 6.

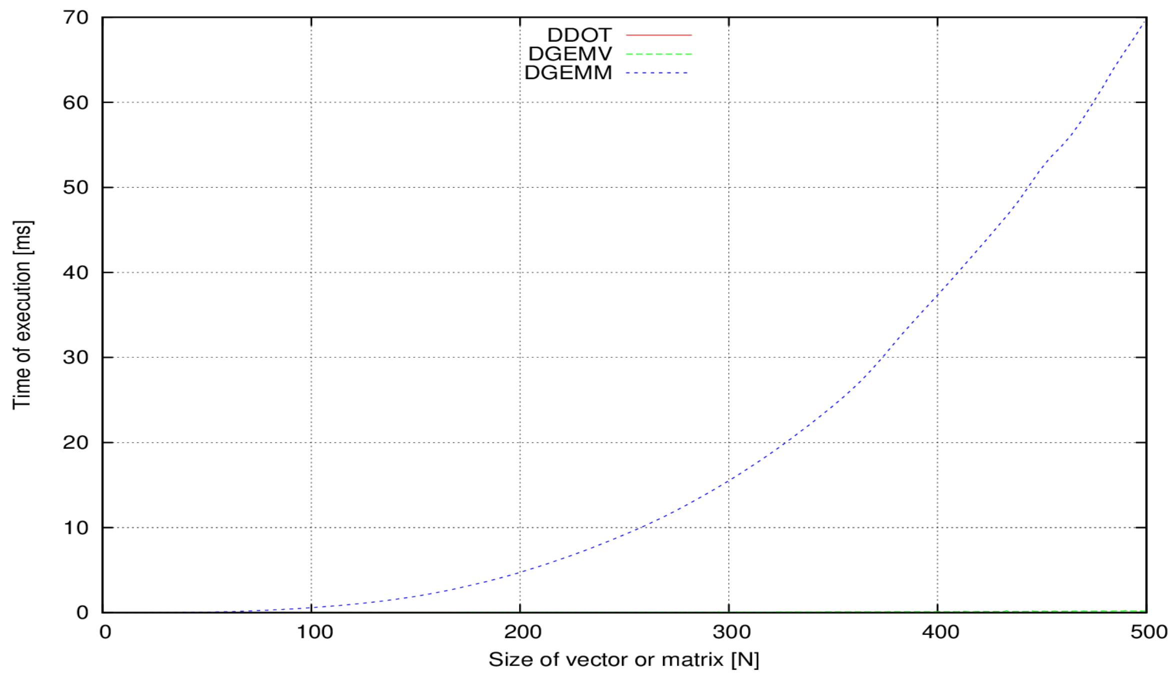
W tym przypadku nie mamy już do czynienia z liniowym wzrostem czasu. Przy dwukrotnie większej ilości N czas wzrasta czterokrotnie. Mamy więc do czynienia ze złożonością kwadratową. Funkcja poziomu 1 którą analizowaliśmy w poprzednim podpunkcie znajduje się bardzo blisko osi X.

- Operacje poziomu trzeciego:

Funkcja użyta w ćwiczeniu to gsl_blas_dgemm, która wykonuje następującą operacje:
C = alfa * A * B + beta * C, gdzie A, B, C - macierze kwadratowe o rozmiarze NxN, alfa, beta - stałe rzeczywiste. Wykres złożoności czasowej w zależności od ilości operacji pokazano na rys 7, a po wygładzeniu na rys 8.



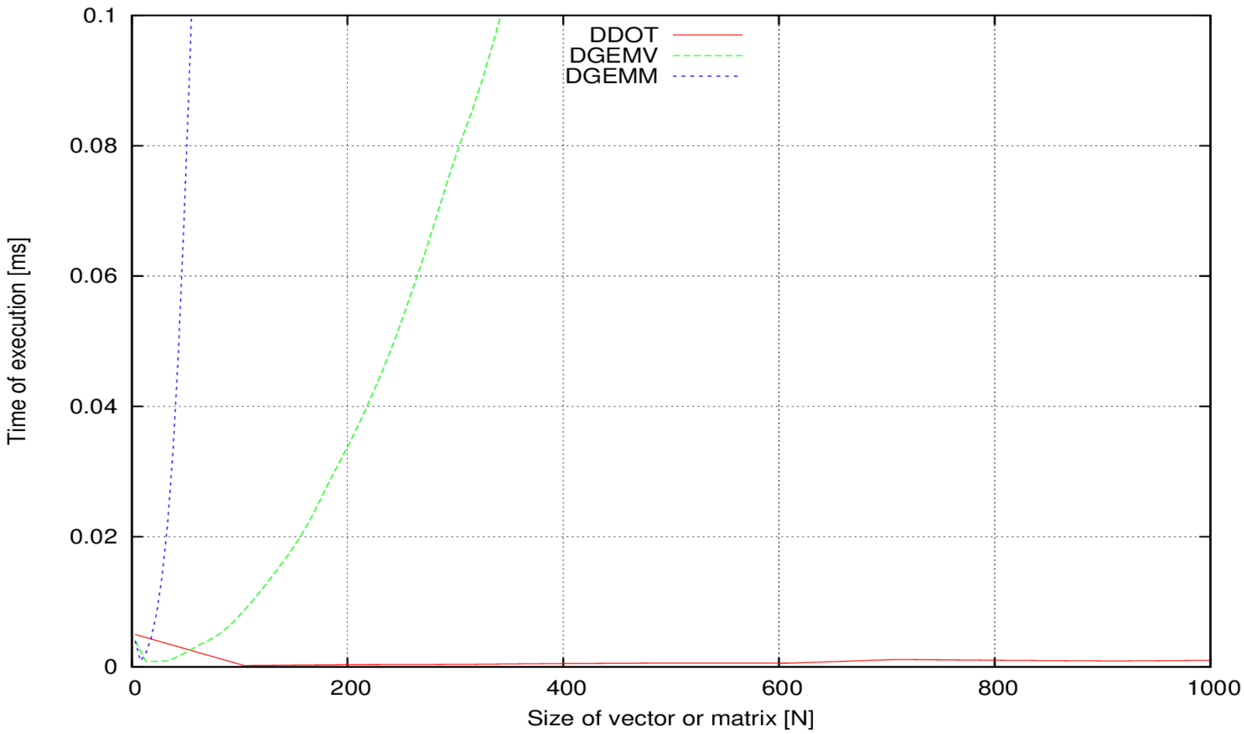
rys 7.



rys 8.

Na wykresach zostały zawarte wcześniejsze funkcje, poziomu 1 i 2, jednak ich czas wykonywania w porównaniu do funkcji z poziomu 3 jest na tyle mały, że wykresy tych funkcji znajdują się przy osi X.

Patrząc na przytost czasu dla ilości operacji wynoszących 200 i 400 można stwierdzić wzrost czasu z ok 5 do 35, co oznacza w przybliżeniu trzykrotne wydłużenie czasu algorytmu przy dwukrotnie większych danych. Tak więc algorytm ma złożoność N^3.
Na rys 8. na jednym wykresie z ustawieniem odpowiedniej skali operacje BLAS poziomu 1 , 2 oraz 3.



rys 9:

5. Wnioski z ćwiczeń:

- Czas mierzenia algorytmów dla losowo wygenerowanych danych posiada charakterystyczne “szpice”, ponieważ od czasu do czasu powstaje taki zestaw danych, że komputer potrzebuje większej ilości operacji, na przykład w celu zachowania stabilności numerycznej, bądź trudności wykonania operacji elementarnych aby uzyskać prawidłowy wynik.
- Algorytm rozwiązywania układu równań dla macierzy trójdiagonalnych ma złożoność liniową.
- Implementacja tego algorytmu jest wolniejsza od algorytmu z biblioteki o stałą. Jest to spowodowane zapewne mniejszą optymalizacją tego algorytmu.
- Po obserwacji wybranych przykładów z zestawu operacji BLAS zawartych w bibliotece GSL można się domyślać, że algorytmy BLAS poziomu 1, 2 i 3 posiadają odpowiednio złośoności: liniową, kwadratową i sześcienną.