Verhalten einer Funktion im Unendlichen

Der Begriff des Limes und horizontale Asymptoten

Manchmal möchte man wissen, wohin eine Funktion geht, wenn x ganz gross wird. Denken Sie z.B. an die Funktion $y = \frac{1}{x}$. Diese Funktion schmiegt sich für grosse x immer mehr an die x-Achse an. Das gilt auch für negative x, aber dort schmiegt sich der Graph der Funktion von „unten“ an die x-Achse an.

Man sagt, die x-Achse sei eine *horizontale Asymptote*.

Aber wir können wir wissen, dass die Funktion bei z.B. 100 Millionen nicht plötzlich wieder zu wachsen beginnt und sich von der x-Achse entfernt? Natürlich ist es bei diesem Beispiel klar: Je grösser der Nenner, desto kleiner der Wert des Bruchs $\frac{1}{x}$.

Die Verhältnisse sind aber nicht immer so klar. Nehmen wir das Beispiel $y = \frac{x}{1+x^2}$. Was passiert hier genau, wenn x sehr gross oder sehr negativ wird?

Trick: Zunächst erweitere ich den Bruch mit dem reziproken Wert der höchsten vorkommenden x-Potenz, hier x^2. Beim Erweitern verändert man ja den Wert eines Bruchs nicht. Ich dividiere also den Zähler und den Nenner je mit x^2 und erhalte:

$$y = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}.$$

Wir haben uns oben schon überlegt, dass $\frac{1}{x}$ und erst recht $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$, usw. immer kleiner werden , je grösser x wird. Man sagt, diese Ausdrücke gehen gegen 0, wenn x gegen Unendlich geht und schreibt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

oder auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Gemeint ist jeweils, dass wenn x eine Folge durchläuft, die gegen Unendlich geht – z.B. $x_n = n -$, dass dann der Ausdruck $\frac{1}{x}$ gegen 0 geht. D.h. für einen beliebig kleinen Abstand ε zur 0 gibt es eine natürliche Zahl N, so dass $\frac{1}{x_N}$ noch näher an der 0 ist, als ε. Und das muss für jede solche Folge gelten.

Somit ist also $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{0+1} = 0$. Das bedeutet, dass auch die Funktion $y = \frac{x}{1+x^2}$ für grosse x sich an die x-Achse anschmiegt.

Auch hier kann man sich fragen, von welcher Seite sich der Graph der x-Achse nähert. Entsprechend schreibt man

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0^+$ und $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0^-$. Beachten Sie das Minuszeichen unter dem lim im zweiten

Ausdruck. „0^+“ z.B. heisst, dass sich der Graph von „oben“ her der x-Achse nähert.

Natürlich gibt es auch andere horizontale Asymptoten. Betrachten Sie z.B. die Funktion $y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.

Hier ist es leicht, den Limes für $x \to \pm\infty$ anzugeben, denn erstens sind Zähler und Nenner als Quadrate sowieso stets positiv, so dass man sich nicht um irgendwelche Vorzeichen kümmern muss und zweitens unterscheiden sich Zähler und Nenner immer weniger voneinander, wenn x sehr, sehr gross ist.

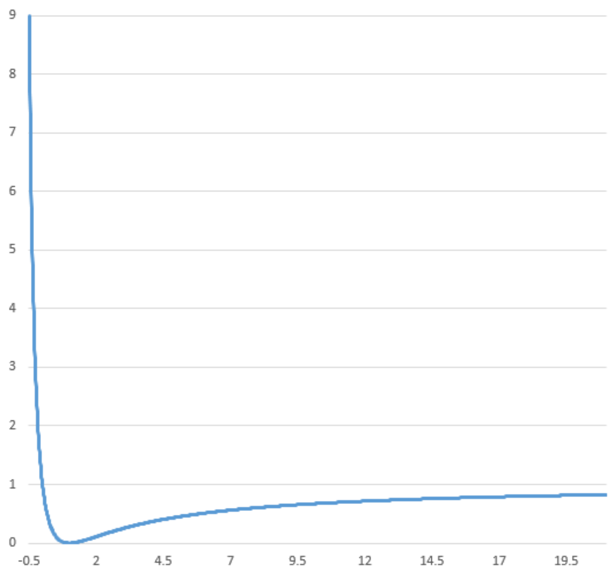
Wenn z.B. x=1000 ist, dann hat man $\frac{999^2}{1001^2}$. Das ist fast wie $\frac{1000^2}{1000^2} = 1$, und tatsächlich ist

$$\frac{999^2}{1001^2} = 0.996$$

Also ist $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = 1$.

Beachten Sie aber, dass auch bei $x = 0$ der Funktionswert 1 ist: $f(0) = \frac{(0-1)^2}{(0+1)^2} = 1$, wohingegen er bei $x = 1$ verschwindet: $f(1) = \frac{(1-1)^2}{(1+1)^2} = 0$.

Die Funktion sieht für $-0.5 < x < 21$ etwa so aus. Sie fällt steil auf 0 herunter, um dann sanft wieder auf 1 anzusteigen und dort für immer zu verweilen.



Hebbare Unstetigkeitsstellen

Grenzwertbetrachtungen werden zwar meistens für das Verhalten einer Funktion im Unendlichen angestellt. Aber man kann natürlich auch fragen, was die Funktion macht, wenn x einen bestimmten Wert annimmt. Z.B.

$$\lim_{x \to 1} x = 1$$

Diesen Limes berechnet man, indem man einfach den Wert für x in die Funktionsgleichung einsetzt. Manchmal gibt es tatsächlich Fälle, wo eine Grenzwertbetrachtung bereits im Endlichen Sinn macht. Betrachten Sie die Funktion $y = \frac{x}{x}$. Sie würden sicher sofort kürzen und sagen, dass sei die Funktion $y = 1$, also die horizontale Gerade auf der Höhe 1. Aber die beiden Funktionen sind nicht identisch. Die erste Funktion ist im Punkt $x = 0$ nicht definiert, wohingegen die zweite schon.

Es gilt zwar $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$, aber $f(0) \neq 1$. Die Funktion hat bei $x = 0$ „ein Loch", das man „flicken" kann, indem man definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Etwas weniger trivial ist die Funktion $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Diese Funktion ist bei $x = 0$ nicht definiert und man kann nach

$$\lim_{x \to 0} x = \frac{e^x - 1}{x}$$

fragen. Wie soll man da vorgehen? Setzt man für x einfach 0 ein, erhält man den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$.

Natürlich kann man den Ausdruck für z.B. $x = -0.01$ und für $x = +0.01$ auswerten. Es ist $f(-0.01) = 0.99501663$ und $f(+0.01) = 1.00501671$. Das legt die Vermutung nahe, dass

$$\lim_{x \to 0} x = \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

gilt. Aber wie kann man wissen, dass die Funktion zwischen 0 und 0.01 nicht „ausbricht und abhaut"?

Für solche unbestimmten Ausdrücke gibt es eine einfache und elegante Methode, die jedoch Differentialrechnung erfordert. Man leitet einfach Zähler und Nenner für sich ab und versucht dann, den Limes nochmals anzusetzen. In unserem Beispiel:

Die Ableitung des Zählers ist: e^x. Die Ableitung des Nenners ist 1.

Kann jetzt $\lim_{x \to 0} x = \frac{e^x}{1}$ ausgerechnet werden? Ja, er gibt 1, was wir erwartet haben.

Diese Methode heisst „Regel von de l'Hospital“ und lautet:

$$\lim_{x\to 0} x = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

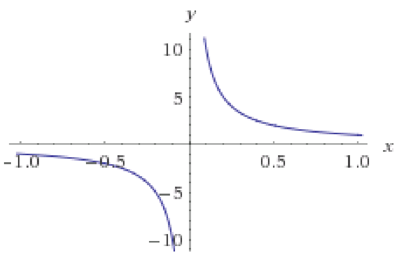
Vertikale und schiefe Asymptoten

Funktionen können aber nicht nur im Unendlichen unendlich grosse Werte annehmen, sondern schon im Endlichen, wie ja das Beispiel $y = \frac{1}{x}$ zeigt. Hier ist

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{1}{x} = +\infty$$

und

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{1}{x} = -\infty$$

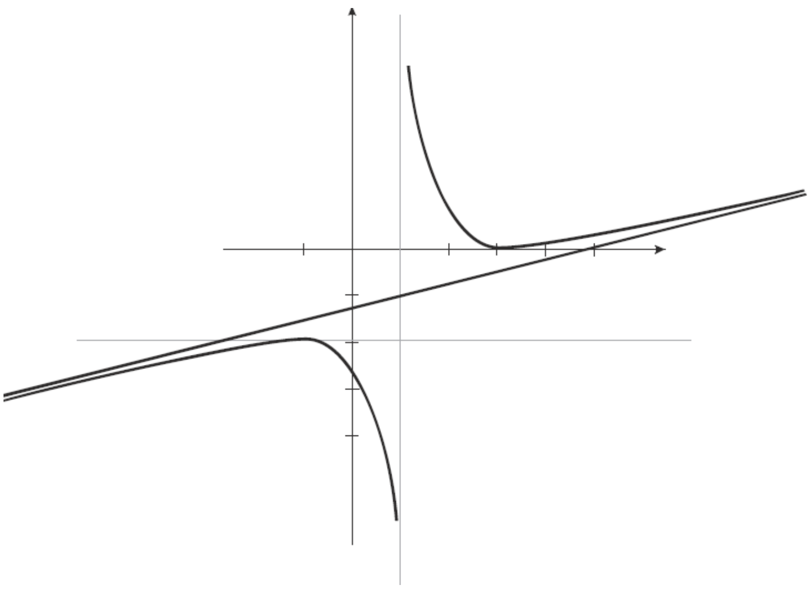


Der Unterschied der beiden Formeln ist, dass in der ersten x von positiven Werten aus gegen Null geht, also beispielsweise die Folge $\frac{1}{2^n}$ durchläuft, während in der zweiten Formel x sich von negativen Werten her der Null nähert, z.B. mit der Folge $\frac{-1}{2^n}$.

Man nennt hier die y-Achse, an die sich die Funktion anschmiegt, *vertikale Asymptote* oder *Pol*.

Natürlich muss ein Pol nicht immer mit der y-Achse zusammenfallen, wie das Beispiel $y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ zeigt. Man sieht schnell ein, dass die Funktion bei $x = 1$ einen Pol hat, da dort der Nenner verschwindet, ohne dass gleichzeitig der Zähler Null wird.

Wenn wir den Funktionsgraph betrachten, fällt auf, dass sich die Funktion immer mehr einer Geraden annähert, je grösser x wird (bzw. je negativer x wird).



Aus der Zeichnung kann man grob herauslesen, dass die Gerade ungefähr die Funktionsgleichung

$y = 0.25x - 1.25$ haben muss.

Eine solche Gerade wird *schiefe Asymptote* genannt. Doch, wie findet man sie?

Die Funktion gehört zur Familie der gebrochen rationalen Funktionen. Ein Bruchstrich deutet immer auf eine Division hin. Also dividieren wir doch einmal das Zählerpolynom durch das Nennerpolynom! Zu diesem Zweck rechne ich die beiden Polynome vollständig aus. Den Viertel stelle ich vorne hin und berücksichtige ihn nach der Rechnung:

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x - 5 \\
\underline{-x^2 + x} \\
\qquad -5x + 9 \\
\underline{\qquad\quad 5x - 5} \\
\qquad\qquad\quad 4
\end{array}
$$

D.h. $\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}\left((x-5) + \frac{4}{x-1}\right) = 0.25x - 1.25 + \frac{1}{x-1}$

Wenn x gross wird, wird der Ausdruck $\frac{1}{x-1}$ immer kleiner, so dass die Funktion immer näher an die Gerade $y = 0.25x - 1.25$ heran rückt, wie wir vermutet haben.

Peter Addor/17. September 2014