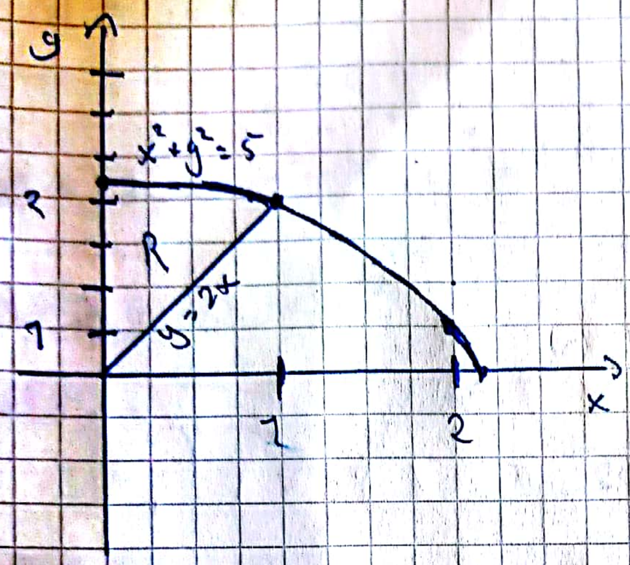
Innlevering 3 TMA4100 Sander Lindberg

Oppgave 1:



$f(x) = \sqrt{5-x^2}$

$g(x) = 2x$

$$T = 2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{5-x^2} - 2x\right) dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{5-x^2} - 2x^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x\sqrt{5-x^2}\, dx - 2\pi \int_0^1 2x^2 dx \quad , \quad \text{Setter } u = 5-x^2$$

$$= -2\pi \int_5^4 x\sqrt{u} \frac{du}{-2x} - 4\pi \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \pi \int_4^5 \sqrt{u}\, du - 4\pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_4^5 - 4\pi \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3} 5^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}}\right) - 4\pi\left(\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{10}{3}\pi\left(\sqrt{5}-2\right)}} \approx \underline{\underline{2,472}}$$

Oppgave 2

a) $\arctan(x) = x^2$

Ser hva som skjer i $x=0$

$\arctan(0) = 0^2$

$0 = 0$

Siden vi vet at begge funksjonene har samme verdi for $x=0$ kan vi se på de deriverte for å avgjøre hvem som vokser raskest for nærmeste x i positiv retning

Ser også at begge funksjonene er én-til-én.

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(x^2)' = 2x$

Setter inn $x=0$

$1 > 0$ Derfor må det finnes et punkt er de krysses i intervallet $0 < x^2 < \arctan(x)$

Vet at verdimengden til $\arctan(x)$ er $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ og $x^2 = [0, \infty)$

Dette forteller at det må finnes et intervall der $\arctan(x) \leq x^2$

Siden $(\arctan(x))'$ er avtagende og $(x^2)'$ stigende, for alle $x > 0$, og begge funksjonene er én-til-én, må de krysse hverandre nøyaktig én gang.

b)

$f(x) = \arctan(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$f''(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$P_3(x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(x-0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-0)^3$

$\cancel{P_3(x) = \arctan(0) + \frac{2\cdot 0}{(0^2+1)^2}}$

$P_3(x) = \arctan(0) + \frac{1}{0^2+1}x - \frac{\frac{2\cdot 0}{(0^2+1)^2}}{2}x^2 + \frac{\frac{6\cdot 0^2-2}{(0^2+1)^3}}{6}x^3$

$P_3(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} = \underline{\underline{x - \frac{x^3}{3}}}$

$x - \frac{x^3}{3} = x^2$

$\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x = 0$

$x\left(\frac{1}{3}x^2 + x - 1\right) = 0$

$x\left(\left(x - \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\right) = 0$

$x = 0, \quad x = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \quad x = -\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

Skulle ha den positive løsningen:

$\underline{\underline{x = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}}}$

$\arctan(x) = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{x \approx \frac{-3+\sqrt{21}}{2}}}$

Oppgave 3

$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$

Skal vise at den er begrenset og voksende:

Viser voksende ved at $a_{n+1} \geq a_n$:

Viser for $N=1$: $a_2 \geq a_1$

$a_1 = 1 \quad a_2 = \sqrt{1+2a_1} = \sqrt{1+2\cdot 1} = \underline{\sqrt{3} \geq 1}$ ok!

Viser for $N+1$:

$a_{n+1+1} \geq a_{n+1}$:

$a_{n+2} = \sqrt{1+2a_{n+1}} \geq \sqrt{1+2a_n} \Rightarrow \sqrt{1+2\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}$ q.E.D.

Følgen er voksende

Skal så vise at den er begrenset ovenifra:

$a_n \leq 3$

$a_n = 1 \leq 3$ ok!

Viser for $N+1$:

$a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$

$a_{n+1} = \sqrt{1+2\cdot 3} = \underline{\sqrt{7} \leq 3}$ q.E.D

Følgen er Begrenset.

Siden følgen er begrenset, er den også konvergent.

~~Følgen~~ Skal finne grenseverdien til følgen:

Setter $s = \sqrt{1+2s}$ og løser denne

$s^2 = 1 + 2s$

$s^2 - 2s - 1 = 0$

$s: \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$

Dette er de to kandidatene til grense verdi.

Siden $a_1 = 1 > 1-\sqrt{2}$ og følgen er voksende

Vil grenseverdien være $\underline{\underline{1+\sqrt{2}}}$

Oppgave 4:

a) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

i) Siden jeg har at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

er $\lim_{n\to\infty} (a_n)^2$ også lik $\underline{\underline{0}}$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ konvergerer.

ii) Siden a_n konvergerer vil jeg få:

$\lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \Rightarrow$ konvergens.

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ konvergerer.

b)

i) Bruker integraltesten: Siden den er kontinuerlig, positiv og avtagende.

$\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,dx$, Setter $u = \arctan(x)$ og nye integralgrenser. (arctan(∞) og arctan(1)):

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}\,du = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{\frac{\pi}{4}}^{b} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3\pi^2}{32}}}$$

Integralet konvergerer, og dermed konvergerer også summen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$

Oppgave 4b

ii) For $N \geq 1$ er $\sin(\frac{1}{n}) > 0$. Dermed vet jeg at det enten er konvergens eller divergens.

$\cancel{\lim_{n\to\infty}}$ ~~lim~~ $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n}) \neq 0 \Rightarrow$ Divergens.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ Divergerer.