Neacşu - 235

Lab AGI 1

A(1,1), B(4,1), C(2,3)

(2) Forma generală a matricei de scalare în jurul unui punct Q:

$$S_Q(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)x_Q \\ 0 & s_y & (1-s_y)\cdot y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

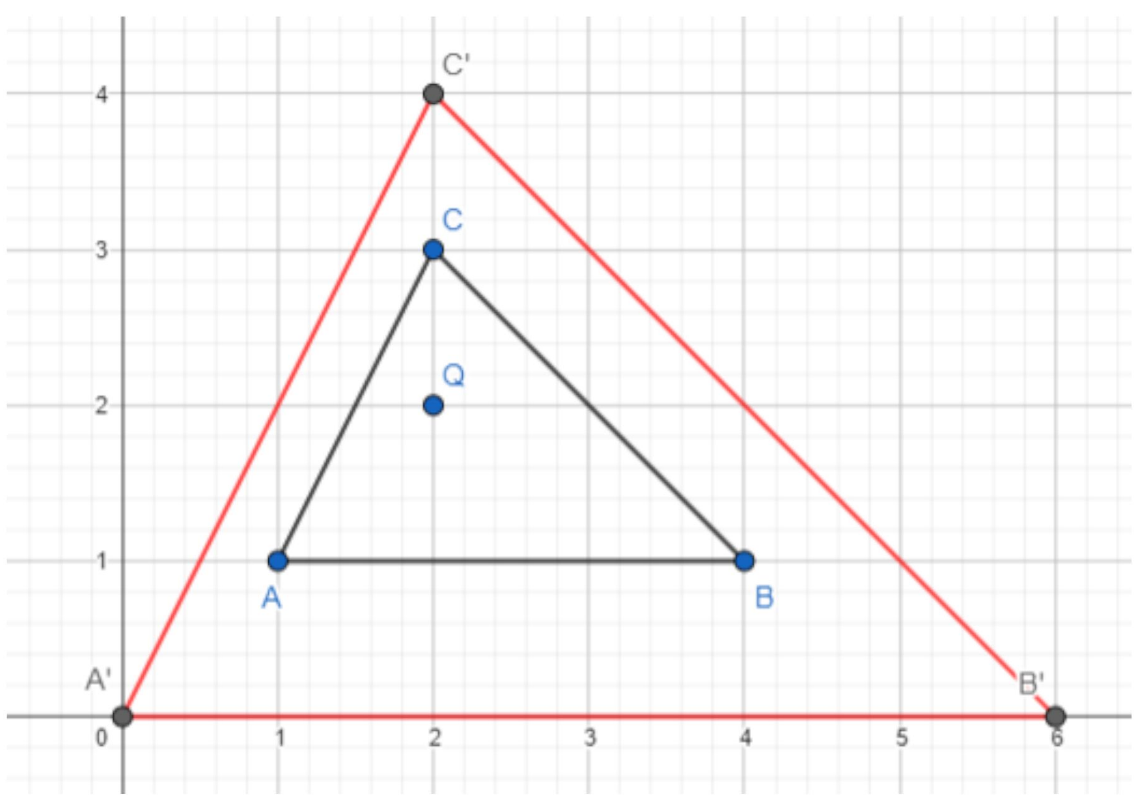
Concret, $Q=(2,2)$, $s_x = s_y = 2$, Matricea transformării este

$$T = S_Q(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Imaginea ΔABC după scalare este

$$[A'\ B'\ C'] = T\cdot[A\ B\ C] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A'(0,0), B'(6,0), C'(2,4).$



"4. Forma generală a matricei de forfecare față de un punct Q, de unghi θ, în direcția vectorului v"

Forma generală a matricei de forfecare față de un punct Q, de unghi θ, în direcția vectorului $\vec{v}$:

$$Shear(Q,\vec{v},\theta) = \begin{pmatrix} 1 - tg\,\theta\, v_1 v_2 & -tg\,\theta\, v_1^2 & -tg\,\theta\, v_1(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ -tg\,\theta\, v_2^2 & 1 + tg\,\theta\, v_1 v_2 & -tg\,\theta\, v_2(v_1 q_2 - v_2 q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

În particular, $Q=(2,2)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)$ versor $\Rightarrow v_1 = \frac{2}{\sqrt5}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt5}$; $\theta = 45^\circ \Rightarrow tg\,\theta = 1$

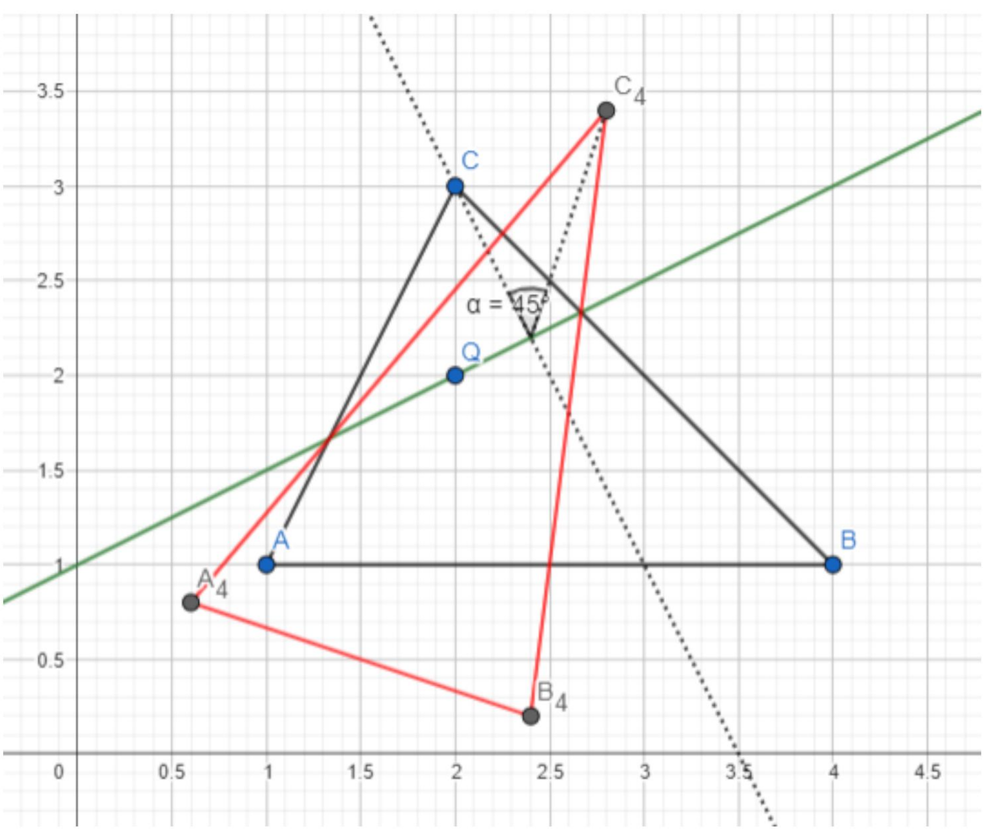
$\Rightarrow$ Matricea transformării este

$$T = Shear(Q,\vec{v},45^\circ) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{5} & +\frac{4}{5} & -\frac{2\cdot 2(2-1)}{\sqrt5^2} \\ -\frac{1}{5} & 1 + \frac{2}{5} & -\frac{1\cdot 2(2-1)}{\sqrt5^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Imaginea ΔABC după forfecare este:

$$[A'\ B'\ C'] = T\cdot[A\ B\ C] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{12}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

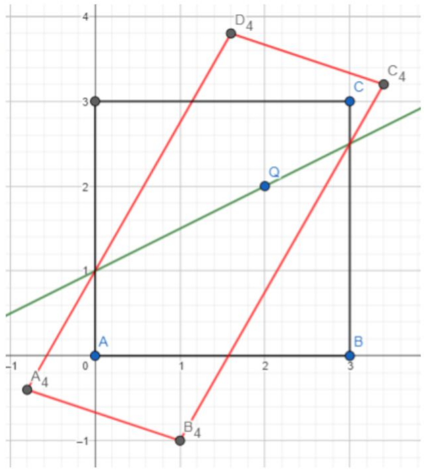
$\Rightarrow A'\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right), B'\left(\frac{12}{5},\frac{1}{5}\right), C'\left(\frac{14}{5},\frac{17}{5}\right).$



(5) Aplicăm transformarea T găsită la pb. 4 vârfurilor pătratului ABCD:

$$[A'B'C'D'] = T\cdot[A\ B\ C\ D] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & \frac{17}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} & -1 & \frac{16}{5} & \frac{19}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A'\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right),\ B'(1,-1),\ C'\left(\frac{17}{5}, \frac{16}{5}\right),\ D'\left(\frac{8}{5}, \frac{19}{5}\right).$$



(7) Forma generală a matricei de reflexie față de o dreaptă $\Delta: ax+by+c=0$:

$$R_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{2ac}{a^2+b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2+b^2} & -\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} & -\frac{2bc}{a^2+b^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b \neq 0$

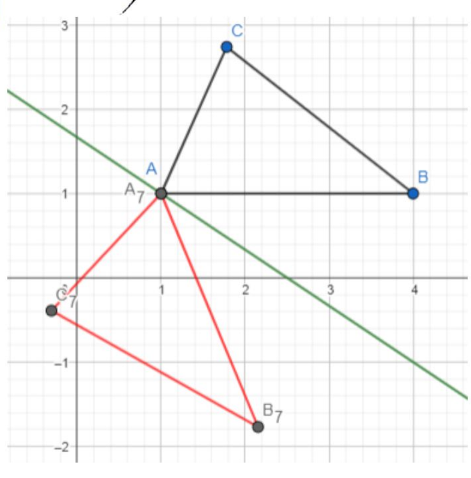
În particular, pentru dreapta $\Delta: 2x+3y-5=0$, matricea transformării este:

$$T = R_\Delta = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar imaginea ΔABC după transformare este

$$[A'B'C'] = T\cdot[A\ B\ C] = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -12 & 20 \\ -12 & -5 & 30 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{28}{13} & -\frac{6}{13} \\ 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{9}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A'(1,1),\ B'\left(\frac{28}{13}, -\frac{23}{13}\right),\ C'\left(-\frac{6}{13}, -\frac{9}{13}\right)$$



10 Forma generală a matricei de rotație în jurul unui punct P cu unghi θ:

$$Rot_P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0(1-\cos\theta) + y_0 \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_0 \sin\theta + y_0(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculăm imaginea ΔABC după rotația cu 90° în jurul lui C:

$$T = Rot_C(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2+3 \\ 1 & 0 & -2+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A'B'C'] = T \cdot [A\,B\,C] = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta A'B'C' \text{ are cf. } \begin{cases} A'(4,2) \\ B'(4,5) \\ C'(2,3) \end{cases}.$$

În continuare, calculăm matricea reflexiei față de dreapta $A'B'$ (AB rotită cu 9

Obs. că $A'B' \in \Delta: x = 4 \parallel Oy$.

Forma generală a matricei de reflexie față de o dreaptă $\Delta: ax + c = 0$ este

$$R_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2\frac{c}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul nostru, $a = 1$, $c = -4 \Rightarrow$ matricea de transformare este

$$T = R_\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Imaginea finală a ΔABC după transformări este

$$[A_{10}\,B_{10}\,C_{10}] = T \cdot [A'B'C'] = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{10}(4,2),\ B_{10}(4,5),\ C_{10}(6,3).$$