



$$1. \vec{g} = - \frac{G m_p}{r_1^2} \vec{r} \quad \vec{r} = \frac{z_0 - z}{r_1}$$

$$g_z = - \frac{G m_p}{r_1^2} \frac{z_0 - z}{r_1} = \frac{G m_p (z - z_0)}{r_1^3} = \boxed{\frac{G m_p (z - z_0)}{(x^2 + z^2)^{3/2}}}$$

$$r_1^2 = x^2 + z^2 \rightarrow r_1 = (x^2 + z^2)^{1/2}$$

2. Graph 1 w/ fixed  $z$  &  $m_p$

$$3. U = \frac{1}{r_1} \quad r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$U = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + (-x) + \frac{3}{2} 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

$$= 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} 2y (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -y (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = (-1) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + (-y) - \frac{3}{2} 2y (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\nabla^2 U = 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$= 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$