2022-2023

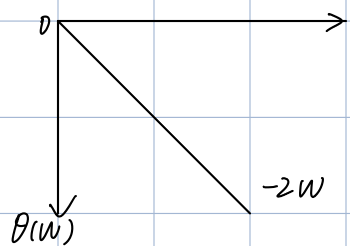
1.(1) $h(n)=h(N-n-1),\ N=5$　第一类

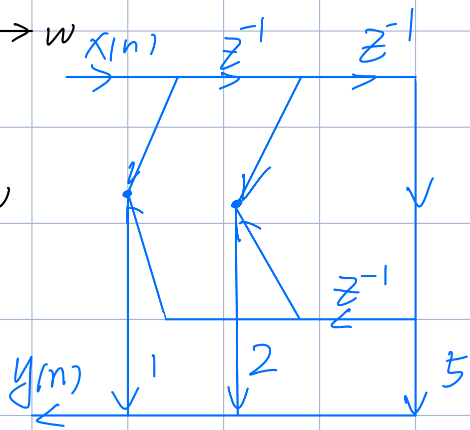
$$H(w)=\sum_{n=0}^{4} h(n)\cdot\cos[(2-n)w]$$

$$H(w)=\sum_{n=0}^{2} a(n)\cos(nw),\quad a(0)=h(4),\ a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right)$$

$$\theta(w)=-\frac{N-1}{2}w=-2w$$

线性相位：





(2) $y(n)=x(n)*h(n)$

$x(n)=(-1)^n=\{1,-1,1,-1,1\}$

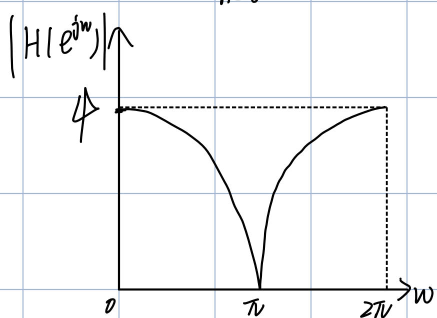
$y(n)=\{1,1,4,-2,3,-2,4,1,1\}$

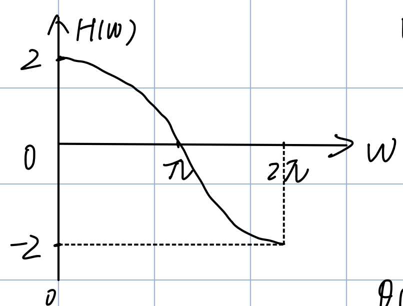
2. $H(e^{jw})=\sum_{n=0}^{1} h(n)e^{-jwn}=1+e^{-jw}$　$|H(e^{jw})|=(1+\cos w)^2+\sin^2 w=1+2\cos w+1=2(1+\cos w)=4\cos^2\frac{w}{2}$

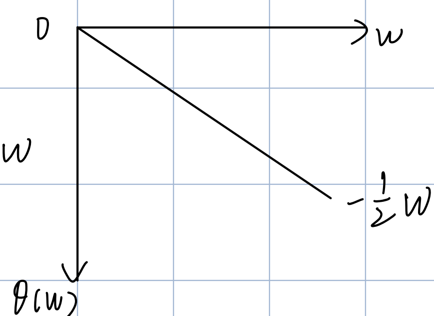
$\because h(n)=h(N-1-n)$　$\therefore \theta(w)=-\frac{N-1}{2}w=-\frac{1}{2}w$

$\because N$为偶数　$\therefore$是第二类滤波器

$$H(w)=\sum_{n=0}^{1} h(n)\cos\left[\left(\frac{1}{2}-n\right)w\right]=b(n)\cos\left[w\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=2h(1)\cos\left[w\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=2\cos\left[w\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$







3. $\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t)\,\delta(t-nN)$

$x_a(n)=X_a(nN)$　} 周期为N

4、线性：$aT[x(n)]+bT[y(n)]$ 等不等于 $T[ax(n)+by(n)]$

{ 等：线性
{ 不等：非线性

时不变：$T[x(n-n_0)]$ 等不等于 $y(n-n_0)$

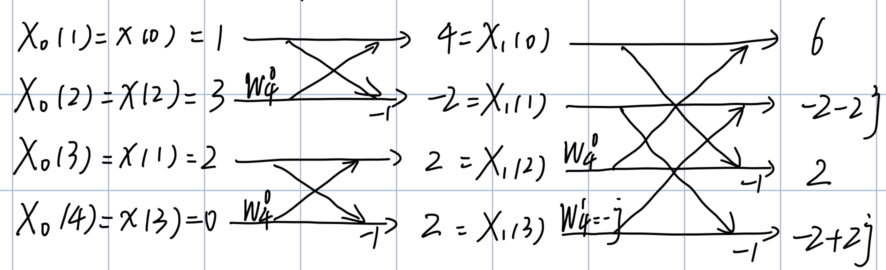
{ 等：时不变
{ 不等：时变

5、 $4+4-1=7$

$$y(n)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&4&3&2\\2&1&0&0&0&4&3\\3&2&1&0&0&0&4\\4&3&2&1&0&0&0\\0&4&3&2&1&0&0\\0&0&4&3&2&1&0\\0&0&0&4&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\7\\16\\30\\34\\31\\20\end{bmatrix}$$

$\therefore y(n)=\{2,7,16,30,34,31,20\}$

6、(1) $x(n)=\{1,2,3,0\}$



$X(k)=\{6,-2-2j,2,-2+2j\}$

(2) 构造 $g(n)=x(n)+jy(n)$，$x(n)$，$y(n)$ 均为实序列，$x(n)=h(2n)$，$y(n)=h(2n+1)$

$$G(k)=X(k)+jY(k)=X_{Re}(k)-Y_{Im}(k)+j[X_{Im}(k)+Y_{Re}(k)]$$

$$G^*(N-k)=X_{Re}(N-k)-Y_{Im}(N-k)-j[X_{Im}(N-k)+Y_{Re}(N-k)]$$

$$X(k)=DFT\{Re[g(n)]\}=\frac{1}{2}[G(k)+G^*(N-k)]$$

$$Y(k)=DFT\{-j\,Im[g(n)]\}=-\frac{j}{2}[G(k)-G^*(N-k)]$$

$$H(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}h(n)W_{2N}^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}h(2n)W_{2N}^{2nk}+\sum_{n=0}^{N-1}h(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}+$$

$$W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1}y(n)\cdot W_N^{nk}=X(k)+W_{2N}^{k}Y(k)$$

$$H(k+N)=X_1(k)+W_{2N}^{k+N}Y(k) = X_1(k)-W_{2N}^{k}Y(k)$$

综上，对于给定的长度为2N的序列h(n)，按奇偶拆分成x(n)、y(n)，再构造长度为N的序列$g(n)=x(n)+jy(n)$，对g(n)做N点FFT得到G(k)。对G(k)进行一系列加减运算分解出X(k)、Y(k)，再将X(k)、Y(k)按照上述拼凑回G(k)。从而实现N点FFT计算2N点实序列

7、 $$DFT[R_6(n)]=\sum_{n=0}^{5}W_8^{nk}=\sum_{n=0}^{5}e^{-j\frac{2\pi}{8}k\cdot n}=e^{-j\frac{5}{8}\pi k}\cdot\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi k)}{\sin(\frac{1}{8}\pi k)}$$

$$DTFT[R_6(n)]=\sum_{n=0}^{5}e^{-j\omega n}=e^{-j\frac{5}{2}\omega}\cdot\frac{\sin(3\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$$

$$IDFT[DFT[R_6(n)]]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}R_6(n-8r)\cdot R_8(n)$$

8、 $f_p=2kHz$，$f_{st}=4kHz$，$f_s=20kHz$

由描述知为低通滤波器

$\Omega_p=2\pi f_p=4000\pi\ rad/s$ $\omega_p=\frac{\Omega_p}{f_s}=0.2\pi\ rad$

$\Omega_{st}=2\pi f_{st}=8000\pi\ rad/s$ $\omega_{st}=\frac{\Omega_{st}}{f_s}=0.4\pi\ rad$

$\Delta\omega=0.2\pi$，$\omega_c=\frac{1}{2}(\omega_p+\omega_{st})=0.3\pi\ rad$

$N\geqslant\frac{6.2\pi}{0.2\pi}=31$ ∵ N为奇数，偶数（第一、二类）均可设计低通 ∴ $N=31$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)},\ \alpha=\frac{N-1}{2}=15$$

$$\therefore h_d(n)=\frac{\sin[0.3\pi(n-15)]}{\pi(n-15)}$$

汉宁窗 $w(n)=0.5[1-\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]=0.5[1-\cos(\frac{n\pi}{15})]$

$$\therefore h(n)=h_d(n)w(n)=\frac{\sin[0.3\pi(n-15)]}{\pi(n-15)}\cdot0.5(1-\cos\frac{n\pi}{15})$$

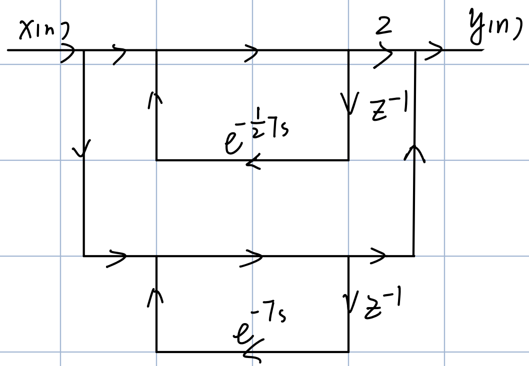
9、

10、 $H(s)=\frac{1}{(2s+1)(s+1)}$　　极点 $-\frac{1}{2}, -1$　　都在左半平面，∴因果？

(1) $H(s)=\frac{2}{2s+1}-\frac{1}{s+1}$

$$H(z)=\frac{2}{1-e^{-\frac{1}{2}T_s}\cdot z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-T_s}\cdot z^{-1}}$$

(2)



(3) 优点：① s平面 → z平面单值变换

② 避免了混叠

③ 直接由公式计算，方便简洁

缺点：① 除w=0附近外，w与Ω非线性映射

② 频幅响应存在畸变