2020～2021 学年第二学期期末考试试卷

《数值计算方法与 Matlab》（A 卷 共 4 页）

（考试时间：2021 年 5 月 28 日）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

一．填空题：（共 42 分，每空 3 分）

1、设 $\pi = 3.1415926\ldots$，则 2π 的近似值 6.283185 具有__7__位有效数字，其相对误差限是__0.5×10^{-6}__.

2、为了使近似计算结果更加准确，函数式 $\frac{1-\cos 2x}{x}$ 当 $x = 0.001$ 时应该改写为__$\frac{2\sin^2 x}{x}$__。

3、设 $S(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上以 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为互异节点的三次样条插值函数，则求解 $S(x)$ 共需有__$(n+3)$__个定解条件。若三次样条插值函数 $S(x)=\begin{cases} x^3+2x, x\in[0,1] \\ 3x^2+cx+d, x\in[1,2] \end{cases}$，则系数 $c=$__-1__和 $d=$__1__。

4、设 A_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[0,3]$ 上的插值型数值积分公式的求积系数，则 $\sum_{k=0}^{n} A_k =$__3__。

5、设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，用迭代法 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} - b)$，$k=0,1,2,\cdots$，进行求解，则迭代法收敛的充分必要条件是 $\alpha \in$__$(-0.5, 0)$__区间。

6、矩阵 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ 的条件数 $cond_\infty(A)=$__5__。

7、设 $p_4(x)$ 是 4 阶 Legendre 多项式，则 $\int_{-1}^{1}(2x^3+3x^2+4x+1)p_4(x)dx =$__0__。

8、设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵对称正定，则求解该方程组的__Gauss-Seidel__迭代法收敛。

9、Gauss 求积公式 $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，具有__$2n+1$__次代数精度，相应的求积节点 x_k $(k=0,1,\ldots,n)$ 是__关于 $\rho(x)$ 的 $(n+1)$ 次正交__多项式的零点。

10、求解常微分方程初值问题的两种一阶格式是__Euler 格式，后退的 Euler 格式__

二．解下列各题：（共 48 分，每题 8 分）

1、 在 $[1, e]$ 上，求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $span\{1, x\}$ 中的最佳平方逼近多项式 $S_1^*(x)$，并计算 $\|f(x)-S_1^*(x)\|_2^2$。（计算过程及结果应为准确解，或保留 5 位小数）。

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_1^e 1\,dx = e-1 = 1.71828$

$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}(e^2-1) = 3.19453$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_1^e x^2\,dx = \frac{1}{3}(e^3-1) = 6.36185$

$(f,\varphi_0)=\int_1^e \ln x\,dx = 1$

$(f,\varphi_1)=\int_1^e x\ln x\,dx = 2.09726$

$$\begin{bmatrix} 1.71828 & 3.19453 \\ 3.19453 & 2.09726 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.09726 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69721 \\ -0.06198 \end{bmatrix}$$

$S_1^*(x) = -0.06198x + 0.69721$

$\|f(x)-S_1^*(x)\|_2^2 = \int_1^e \ln^2 x\,dx - a_0(f,\varphi_0) - a_1(f,\varphi_1)$

$= 0.71828 - 0.69721 + 0.12999$

$= 0.15106$

2、 利用列主元素法求解方程组 $Ax=b$

$$\begin{cases} x_1+6x_2+3x_3=10 \\ 3x_1+3x_2+5x_3=12 \\ 2x_1-4x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

计算过程及结果应为准确解，或保留 4 位小数。

增广矩阵: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 10 \\ 3 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 5 & \frac{4}{3} & 6 \\ 0 & -6 & -\frac{1}{3} & -6 \end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{5}{3} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{18} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{18} & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow [x_1, x_2, x_3]^T = [1.4737,\ 0.9474,\ 0.9474]^T$

3、若用复化梯形公式计算积分 $\int_0^2 \frac{5x}{1+x^2}\,dx$，问：至少需要取多少个节点处的函数值，才能保证计算结果的绝对误差不超过 10^{-3}？

$T_n = \frac{1}{2n}\left[0+2+\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right]$, $x_k = \frac{2}{n}\cdot k$

4、 写出用 Gauss-Seidel 迭代法求解线性代数方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ x_1+4x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2+2x_3=4 \end{cases}$ 的迭代格式，并判断它的敛散性。

$D=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ $L=\begin{bmatrix} 0 & & \\ -1 & 0 & \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$M=(D-L)^{-1}\cdot U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ & 0 & -1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{11}{16} \end{bmatrix}$

令 $|M|=0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0.726$

$\lambda_3 = 0.086$

$\rho(M) = \lambda_{max} = 0.726 < 1$

$\therefore$ Gauss-Seidel 收敛

5、写出用标准 Runge-Kutta 方法求解下列二阶初值问题的计算格式

$$\begin{cases} y'' = 3x + yy', & x \in (0, 1) \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

$z' = 3x + yz$

令 $y' = z$

$$\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
k_1 = z_n, \quad l_1 = 3x_n + y_n z_n, \\
k_2 = z_n + \frac{h}{2} l_1, \\
l_2 = 3(x_n + \frac{h}{2}) + (y_n + \frac{h}{2}k_1)(z_n + \frac{h}{2}l_1), \\
k_3 = z_n + \frac{h}{2} l_2, \\
l_3 = 3(x_n + \frac{h}{2}) + (y_n + \frac{h}{2}k_2)(z_n + \frac{h}{2}l_2), \\
k_4 = z_n + h l_3 \\
l_4 = 3(x_n + h) + (y_n + h k_3)(z_n + h l_3)
\end{cases}$$

6、已知一组数据如下：

x_i	1.0	1.5	2.0	3.0	4.40
y_i	0.9785	1.0696	1.2530	3.4691	5.3521

试选取适当的点，利用三次 Newton 插值多项式，近似计算 $x = 1.60$ 时的 y 值，并估计此时的误差（结果保留 4 位小数）。

差商表：

x_i	$f(x_i)$	一阶	二阶	三阶
1.0	0.9785			
1.5	1.0696	0.1822		
2.0	1.2530	0.3688	0.1866	
3.0	3.4691	2.2161	1.2315	0.5225

$N_3(x) = 0.9785 + 0.1822(x-1) + 0.1866(x-1)(x-1.5)$

$+ 0.5225(x-1)(x-1.5)(x-2)$

$N_3(1.60) = 1.0865$

$R(1.60) = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x](x-1)(x-1.5)(x-2)(x-3)$

$= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{24} \times 0.0336 = 1.4 \times 10^{-3} \times f^{(4)}(\xi_x), \quad \xi_x \in (a, b)$

三. 证明题：（共 10 分，每题 5 分）

1、设 $l_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是以互异的 $x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 为插值节点的 Lagrange 插值基函数，试证明：

（1）$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)x_k^m = x^m,(0\le m\le n)$；

（2）$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)(x_k-x)^m = 0,(1\le m\le n)$。

(1) $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$ $\because m\le n$

$\therefore f^{(n+1)}(x^m)=0$ $\therefore R_n(x)=0$

$\therefore L_n(x)=f(x)$, 即 $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)x_k^m = x^m$, $(0\le m\le n)$ □

(2) $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\sum_{i=0}^{m} C_m^i x_k^i(-x)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i(-x)^{m-i}\sum_{k=0}^{n} l_k(x)x_k^i$

$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i(-x)^{m-i}x^m = (x-x)^m = 0$ □

2、证明用单步法

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n))$$

解方程 $y'=-2ax$ 的初值问题时，可以给出准确解。