A是对称正定阵，则顺序Gauss消元法能进行；$\rho(M)<1$ 等 $\|M\|<1$

学院________ 专业________ ____班 年级 20 级 学号 30________ 姓名________

2022～2023 学年第二学期期末考试试卷

《数值计算方法与 Matlab》(A 卷 共 4 页)

（考试时间：2023 年 5 月 20 日）

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
得分						

一、判断题：（请在后面的括号内打"√"或"×"，共 20 分，每题 2 分）

得分	

1. 解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代格式 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+f$ 收敛的充分必要条件是 $\rho(M)<1$。（√）

2. 用顺序 Gauss 消去法求解线性代数方程组 $Ax=b$ 时，只要矩阵 A 可逆，其消元过程就能进行到底。（×）
不用作行变换
列主元素消元法可以

3. 设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵对称正定，则求解该方程组的 Jacobi 迭代收敛。（×）
不一定
Seidel 收敛
严格占优的话可以

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有三阶导数，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的三次样条插值函数，则在插值节点处有 $f''(x_k)=S''(x_k), k=0,1,2,\cdots,n$。（×）
$S(x_k)=f(x_k)$
$S(x)\in C[a,b]$
次数至多为3

5. 设 $f(x)=2x^9+3x^6-2x^2+3x-2$，则 $f[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]=2$。（√）
差商与导数的关系
$\frac{f^{(9)}(\xi)}{9!}$
9阶差商

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有任意阶导数，则 n 次 Lagrange 插值多项式的余项为 $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$，其中 $\xi\in(a,\ b)$。（×）
这两个要一致
$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

7. 在 $[a,\ b]$ 上 $n+1$ 点的 Gauss 型求积公式，当 $n\to\infty$ 时收敛于 $\int_a^b f(x)dx$。（√）
稳定、收敛的

8. 偶数个求积节点的 Newton-Cotes 公式的代数精度至少等于节点的个数。（×）
n是偶数：代数精度至少n+1

9. 设 $l_k(x),(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a,\ b]$ 上以互异的 $x_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 为插值节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n}|l_k(x)|=1$。（×）
去掉绝对值
$l_k(x)$可能是负的

10. 对于试验方程 $y'=\lambda y$,(实数 $\lambda<0$)，当 $0<\lambda\le-\frac{2}{\lambda}$ 时，Euler 方法是绝对稳定的。（√）
对R-K来说也是稳定的

二、填空题：（共 26 分，每空 2 分）

得分	

1. 设 $p_3(x)$ 是三次 Legendre 多项式，则 $\int_{-1}^{1}(x^2+3x-2)p_3(x)dx=$ __0__。

2. 对于具有 $n+1$ 个节点的插值型数值积分公式，其代数精度界于 __n__ 和 __2n+1__ 之间。

3. 设 $A_k, k=0,1,2,\cdots,n$ 是区间 $[-1,\ 3]$ 上的插值型数值积分公式的求积系数，则 $\sum_{k=0}^{n}A_k=$ __4__。
$\sum A_k=b-a$
如果含权：$\sum A_k=\int\rho(x)dx$

4. 因为数值积分公式的求积系数 __大于0__，所以任意 $n+1$ 个点的 Gauss 型求积公式是稳定的。

5. 如果函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)|x\in[a,b],y\in R\}$ 上关于 y 满足 __Lipschitz__ 条件，则初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a<x<b\\ y(a)=y_0\end{cases}$ 在 $[a,\ b]$ 上存在惟一解。

6. 为建立常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a<x<b\\ y(a)=y_0\end{cases}$ 的数值求解格式，通常采用的方法有 __数值微分__ 方法、__数值积分__ 方法和 __Taylor展开__ 方法。

学院________ 专业________ ____班 年级 20 级 学号 30________ 姓名________

7. 为了使近似计算结果更加准确，函数式 $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 当 $x=0.001$ 时应该改写为 __$\frac{\sin x}{1+\cos x}$__。
没有减法运算的
$\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}$

8. 设 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$，则 $2\sqrt{2}$ 的近似值 2.828427 具有 __7__ 位有效数字，其绝对误差限是 __$\frac{1}{2}\times10^{-6}$__。
0.12×10^{-6}
$<0.5\times10^{-6}$
误差限

9. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{cond}_1(A)=$ __3__。

三、解下列各题：（共 48 分，每题 8 分）

得分	

1、用顺序 Gauss 消去法解下列线性方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\ x_1+2x_2+x_3=8\\ 3x_1-x_2+2x_3=7\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 8\\ 3 & -1 & 2 & 7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 20 & 60\end{array}\right]\quad\therefore\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$$

2、写出求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代格式，并判断所写格式的收敛性，其中 $Ax=b$ 为 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\ x_1+2x_2+x_3=8\\ 3x_1-x_2+2x_3=7\end{cases}$

$$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-3x_2^{(k)}+x_3^{(k)}+5)$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}+8)$$

$$x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}(-3x_1^{(k)}+x_2^{(k)}+7)$$

$$M=D^{-1}(L+U)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -3 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$\rho(M)=$

3、已知下列插值条件

x	0	0.15	0.3	0.45	0.6
$f(x)$	1	0.97800	0.91743	0.83160	0.73529

(1) 用 3 次 Newton 插值多项式计算 $f(0.2)$ 的近似值(结果保留至小数点后第 5 位)

4个节点

(2) 写出并估计插值余项.（用科学计数法，保留 6 位有效数字）

(1)

x	f(x)	一阶	二阶	三阶
0	1			
0.15	0.978	-0.14667		
0.3	0.91743	-0.4038	-0.85753	
0.45	0.8316	-0.5722	-0.56133	0.65733

$N_3(x) = 1 - 0.14667x - 0.85733x(x-0.15) + 0.65733x(x-0.15)(x-0.3)$

$= 0.96144$

(2) $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x(x-0.15)(x-0.3)(x-0.45)$

$= -0.0000104167 f^{(4)}(\xi),\ \xi \in (0, 0.45)$

4、写出用标准 *Runge – Kutta* 方法解以下初值问题的计算格式.

$$\begin{cases} y'' = 2xy + 3y', & 0 < x < 2 \\ y(0) = 1, & y'(0) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} z' = 2xy + 3z \\ z = y' \\ y(0) = 1,\ z(0) = 0 \end{cases}$

令 $z = y'$

标准R-K: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$

$k_1 = z_n$

$L_1 = 2x_n y_n + 3z_n$

$k_2 = z_n + \frac{h}{2}L_1$

$L_2 = 2(x_n + \frac{h}{2})(y_n + \frac{h}{2}k_1) + 3(z_n + \frac{h}{2}L_1)$

$k_3 = z_n + \frac{h}{2}L_2$

$L_3 = 2(x_n + \frac{h}{2})(y_n + \frac{h}{2}k_2) + 3(z_n + \frac{h}{2}L_2)$

$k_4 = z_n + hL_3$

$L_4 = 2(x_n + h)(y_n + hk_3) + 3(z_n + hL_3)$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0$

工科1班2班

5、用 *Romberg* 算法求积分 $\int_0^4 \frac{1}{2x+1}dx$ 的近似值，并将计算结果列于下表（数据保留至小数点后第 5 位）

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	2.22222			
1	1.51111	1.27407		
2	1.23175	1.13863	1.12960	
3	1.13671	1.10563	1.10279	1.10216

6、利用 Legendre 正交多项式求 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在 $P_1[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $S_1^*(x)$（结果保留至小数点后第 5 位）；并计算平方误差 δ^2。（用科学计数法，保留 6 位有效数字）

令 $x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$，$t \in [-1, 1]$

$f(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}}$

$S_1^*(t) = \frac{1}{2}\langle f, P_0\rangle P_0 + \frac{3}{2}\langle f, P_1\rangle P_1$

$P_0 = 1,\ P_1 = t$

$\begin{cases} \langle f, P_0\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)P_0(t)dt \\ \langle f, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)P_1(t)dt \end{cases}$

$\Rightarrow S_1^*(t) = 1.21895 + 0.20589t \Rightarrow S_1^*(x) = 0.41178x + 1.01306$

$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$ 换回x

平方误差：

$\delta^2 = \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 - \sum_{i=0}^{1}(f, P_i)^2\right)$

$= 2.97693 \times 10^{-3}$

四、证明题：（6 分）

得分	

设 $l_k(x), (k = 0,1,2,\cdots,n)$ 是区间 $[a, b]$ 上以互异的 $x_k (k = 0,1,2,\cdots,n)$ 为插值节点的 Lagrange 插值基函数，试证明

（1）$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) = x^m$，$m = 0,1,2,\ldots,n$.

（2）$\sum_{k=0}^{n} (x_k - x)^m l_k(x) = 0$, $m = 1,2,\cdots,n$.