2024～2025 学年第一学期期中考试试卷

《微积分 I》(共 2 页)

(考试时间：2024 年 12 月 6 日)

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则（　　）.

(A)当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$　(B)当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$

(C)当 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$　(D)当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int x f(x)\mathrm{d}x = x^2\cos x + C$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x =$（　　）.

(A) $x\sin x+\cos x+C$　(B) $x\cos x+C$

(C) $x\cos x+\sin x+C$　(D) $x\cos x-\sin x+C$

4. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则（　　）.

(A) $f'(0)=1$，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续　(B) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续

(C) $f'(0)=1$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续　(D) $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续

5. 下列结论中，正确的是（　　）.

(A) 若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积

(B) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ -1, & x\in R\setminus Q\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积

(C) 若 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(D) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

6. 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\tan x - x$ 与 x^n 是同阶的无穷小量，则 $n=$________.

7. 曲线 $y=x+\sqrt{x^2-x+2}$ 的斜渐近线方程是__________.

8. 设点 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=x^3\left(2\ln x+\dfrac{1}{3}\right)$ 的拐点，则 $x_0=$________.

9. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(2+\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ 的值为________.

10. 定积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{x+\arctan|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的值为__________.

三、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

12. 计算定积分 $I=\int_0^1 \dfrac{x+2}{x^2+x+1}dx$.

13. 计算不定积分 $\int 3x^2\arctan x\,dx$.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ \sqrt{2-x^2}, & 1\le x\le\sqrt{2},\end{cases}$ 计算定积分 $I=\int_0^{\sqrt{2}} f(x)\,dx$.

15. 设 $I_1=\int\dfrac{e^x-\sin x}{e^x-\sin x+\cos x}dx,\ I_2=\int\dfrac{\cos x}{e^x-\sin x+\cos x}dx$.

(1) 求 I_1+I_2 与 I_1-I_2，并解出 I_2；

(2) 计算定积分 $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{e^x-\sin x+\cos x}dx$.

四、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

16. 求函数 $f(x)=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的极大值和极小值.

17. 已知 $F(x)=3+\int_0^x\dfrac{1+\sin t}{2+t^2}dt$，求二次多项式 $p(x)$，使得

$$p(0)=F(0),\ p'(0)=F'(0),\ p''(0)=F''(0).$$

18. 已知 $u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，求 u_0,u_1，并推导递推公式

$$u_n=\frac{n-1}{n+2}u_{n-2}\,(n=2,3,\cdots).$$

五、证明题（共 11 分，第 19 题 5 分，第 20 题 6 分）

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $|f'(x)|<M\ (M>0)$，又 $f(a)=f(b)$，

证明：对于 $[a,b]$ 上任意两点 x_1,x_2，恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|<\dfrac{M}{2}(b-a)$.

20. 证明：对于 $\forall x>0$，存在唯一的 $\xi_x>0$，使得 $\int_0^x e^{t^2}dt=x e^{\xi_x^2}$ 成立；并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\xi_x^2}{x^2}$.

2024～2025 学年第一学期期中考试试卷参考答案

《微积分I》（考试时间：2024 年 12 月 6 日）

一、选择题 1-5 **B A C B D**

二、填空题 6. **3** 7. $y=2x-\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{\mathrm{e}}$ 9. **2** 10. $\frac{\pi^2}{16}$ 或 $(\arctan 1)^2$

三、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

11. 解：$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-\mathrm{e}^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\mathrm{e}^x}{2}=-1.$$

解法二：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\left(x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^2}=-1.$

12. 解：$I=\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln3+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

解法二：令 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t, t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，则 $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2t\,\mathrm{d}t$，

$$I=\int_0^1\frac{x+2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}\sec^2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan t+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}t=-\ln\left(\cos t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\ln\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

13. 解：$I=\int3x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\int\arctan x\,\mathrm{d}\left(x^3\right)=x^3\arctan x-\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=x^3\arctan x-\int x\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x^3\arctan x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

14. 解：$I=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{2}{3}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}.$$

15. 解：(1) $I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x}{\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=x+C_1$，

$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{e}^x-\sin x-\cos x}{\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\ln\left|\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x\right|+C_2,$$

$\Rightarrow I_2=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x\right|+C$，其中 C_1, C_2, C 为积分常数.

(2) $J=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x\right|\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1)+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+1).$

四、计算题（共 24 分，每小题 8 分）

16. 解：$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+(x+6)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\frac{(x+2)(x-3)}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，驻点 $x=-2$，$x=3$.

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$；当 $-2<x<0$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(-2)=4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

当 $0<x<3$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(3)=9\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ 为极小值.

17. 解：$F(0)=3, F'(x)=\frac{1+\sin x}{2+x^2}$，$F''(x)=\frac{(2+x^2)\cos x-2x(1+\sin x)}{\left(2+x^2\right)^2}$，

于是，$F'(0)=\frac{1}{2}, F''(0)=\frac{1}{2}$，$p(x)=\frac{F''(0)}{2!}x^2+F'(0)x+F(0)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+3.$

18. 解: $u_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$, $u_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

$$u_n=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{x^{n-1}}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{n-1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1(1-x^2)x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{3}(u_{n-2}-u_n)$$

$$\Rightarrow\ u_n=\frac{n-1}{n+2}u_{n-2}\,(n=2,3,\cdots).$$

解法二: $u_n=\int_0^1 x^n\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{n-1}-x^{n+1}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{n+1}-x^{n-1}\right)\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$

$$=\left(x^{n+1}-x^{n-1}\right)\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\left((n+1)x^n-(n-1)x^{n-2}\right)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-(n+1)u_n+(n-1)u_{n-2}$$

解法三: $u_n=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n+1}u_n+\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n+1}u_n+\frac{1}{n+1}\left(-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{n+1}u_n+\frac{n-1}{n+1}u_{n-2}$$

解法四: $u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cdot\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$,

记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t$, 则$u_n=I_n-I_{n+2}$. 又 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$, $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$,

于是, $u_n=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n$, $u_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{n}{n-1}I_n-I_n=\frac{1}{n-1}I_n$,

$$\Rightarrow\ u_n=\frac{n-1}{n+2}u_{n-2}\,(n=2,3,\cdots).$$

五、证明题（共 11 分，第 19 题 5 分，第 20 题 6 分）

19. **证明:** 对任意两点 $x,y\in[a,b]$, 由拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(x,y)$, 使得

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)|<M|x-y|.$$

(1) 若 $|x_2-x_1|\le\frac{b-a}{2}$, 则 $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{M}{2}(b-a)$.

(2) 若 $|x_1-x_2|>\frac{b-a}{2}$, 不妨设 $a\le x_1<x_2\le b$, 则 $|x_1-a|+|x_2-b|<\frac{b-a}{2}$.

由于 $f(a)=f(b)$,

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(b)+f(a)-f(x_1)|\le|f(x_2)-f(b)|+|f(x_1)-f(a)|$$

$$\le M|x_2-b|+M|x_1-a|<\frac{M}{2}(b-a).$$

20. **证明:** (1) 对 $\forall x>0$, $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 在 $[0,x]$ 上连续, 由积分中值定理可得, $\exists 0<\xi_x<x$, 使得 $\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=x\,\mathrm{e}^{\xi_x^{\,2}}$. 由于函数 $y=\mathrm{e}^{x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增, 所以 ξ_x 是唯一的.

(2) $\xi_x^{\,2}=\ln\frac{\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\ln\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x^{\,2}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+4x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}}{\left(4+4x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}}=1.$$

解法二:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi_x^{\,2}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}-\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{2x^2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2\mathrm{e}^{x^2}}{4x\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{2\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}}{\left(3+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}}=1.$$