

天津大学

数字信号处理实验报告

实验1：用FFT对信号做频谱分析

学院名称 精仪学院
专业 测控技术与仪器
学生姓名 卢雨萌
学号 3022202283
年级 2022级
班级 4班
时间 2024年11月4日

实验 1：用 FFT 对信号做频谱分析

1 实验目的

学习用快速傅里叶变换 (FFT) 对信号进行频谱分析的方法，了解可能出现的分析误差及误差出现的原因，掌握用 FFT 对信号进行频谱分析的方法。

2 实验原理

用 FFT 对连续信号进行频谱分析是数字信号处理的重要内容。需要经过采样、截短、频域离散化等过程，在这个过程中信号在时域和频域上会发生变化，出现混叠、频谱泄漏、栅栏效应等。频率分辨率是一个重要的概念。

3 实验内容（附MATLAB代码）

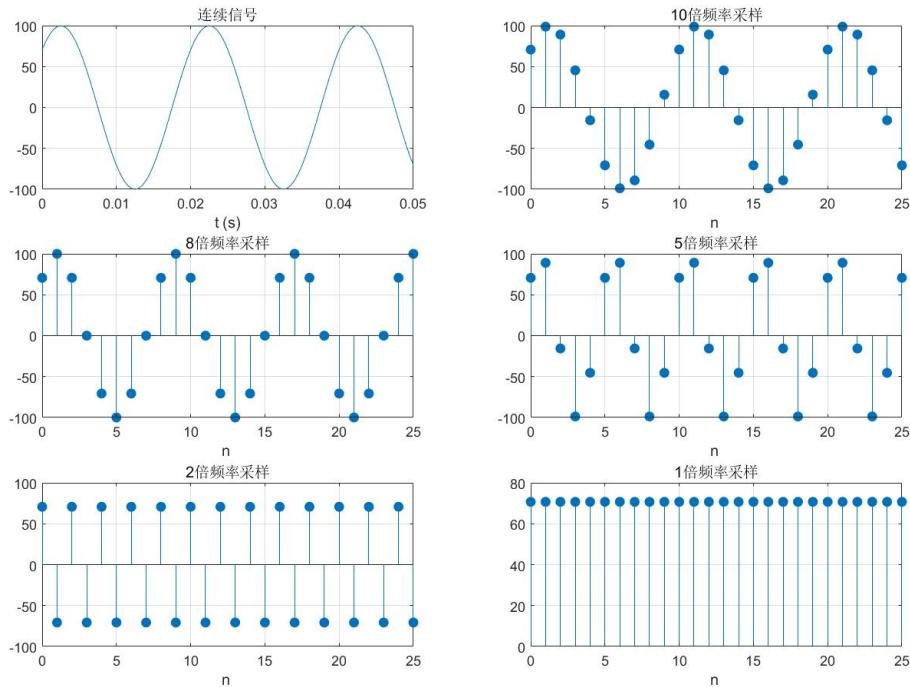
3.1 用不同的采样频率对连续信号进行采样

把连续时间信号 $x(t)$ 转换成离散时间信号 $x(nT_s)$ ，在计算机上绘出 $x(t)$ 和 $x(nT_s)$ 的图形。 $f_s = 1/T_s$ 为抽样频率，依次选取不同的抽样频率，如 $10f_0$, $8f_0$, $5f_0$, $2f_0$, f_0 等。

(1) 工频信号： $x_1(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$, $A = 100$, $f_0 = 50$, $\phi = \pi/4$

(2) 谐波信号： $x_2(t) = \sum_{m=1}^3 A_m \sin(2\pi f_0 m t)$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0.5$, $A_3 = 0.25$, $f_0 = 5\text{Hz}$

解： (1)

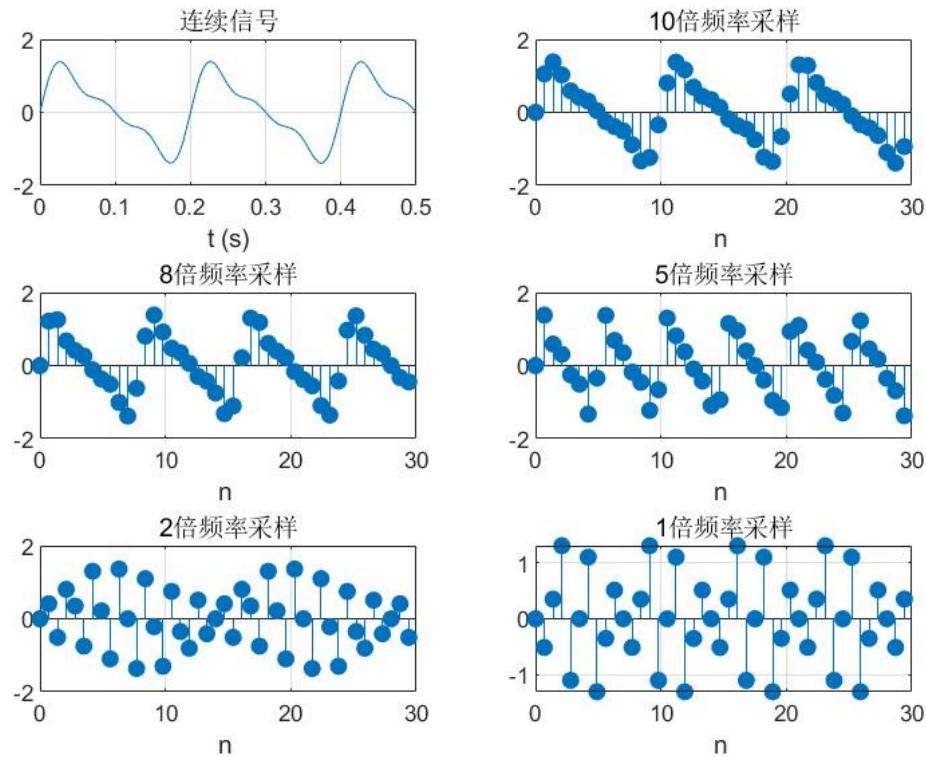


```

% 实验3.1(1) 工频信号采样
figure;
A=100;
fo=50;
n=0:1:25;
subplot(3,2,1);
t=0:0.0005:0.05;
x=A*sin(2*pi*fo*t+pi/4);
plot(t,x);
title('连续信号');
xlabel('t (s)');
grid on;
%10倍fo采样
subplot(3,2,2);
fs=10*fo;
x=A*sin(2*pi*fo*n/fs+pi/4);
stem(n,x,'fill');
title('10倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%8倍fo采样
subplot(3,2,3);
fs=8*fo;
x=A*sin(2*pi*fo*n/fs+pi/4);
stem(n,x,'fill');
title('8倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%5倍fo采样
subplot(3,2,4);
fs=5*fo;
x=A*sin(2*pi*fo*n/fs+pi/4);
stem(n,x,'fill');
title('5倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%2fo采样
subplot(3,2,5);
fs=2*fo;
x=A*sin(2*pi*fo*n/fs+pi/4);
stem(n,x,'fill');
title('2倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%fo采样
subplot(3,2,6);
fs=fo;
x=A*sin(2*pi*fo*n/fs+pi/4);
stem(n,x,'fill');
title('1倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;

```

(2)



% 实验3.1(2) 谐波信号采样

```
figure;
A=[1, 0.5, 0.25];
fo=5;
n=0:0.7:30;
subplot(3,2,1);
x=0;
t=0:0.0005:0.5;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*t);
end
plot(t,x);
title('连续信号');
xlabel('t (s)');
grid on;
%10倍fo采样
subplot(3,2,2);
x=0;
fs=10*fo;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*n/fs);
end
stem(n,x,'fill');
title('10倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
```

```

%8倍fo采样
subplot(3,2,3);
x=0;
fs=8*fo;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*n/fs);
end
stem(n,x,'fill');
title('8倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%5倍fo采样
subplot(3,2,4);
x=0;
fs=5*fo;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*n/fs);
end
stem(n,x,'fill');
title('5倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%2fo采样
subplot(3,2,5);
x=0;
fs=2*fo;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*n/fs);
end
stem(n,x,'fill');
title('2倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;
%fo采样
subplot(3,2,6);
x=0;
fs=fo;
for m=1:3
x=x+A(m)*sin(2*pi*fo*m*n/fs);
end
stem(n,x,'fill');
title('1倍频率采样');
xlabel('n ');
grid on;

```

3.2 周期序列的谱分析

(1) 对下列周期序列进行谱分析

$$x_3(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

$$x_4(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + 0.5\cos\left(\frac{\pi}{8}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_5(n) = e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

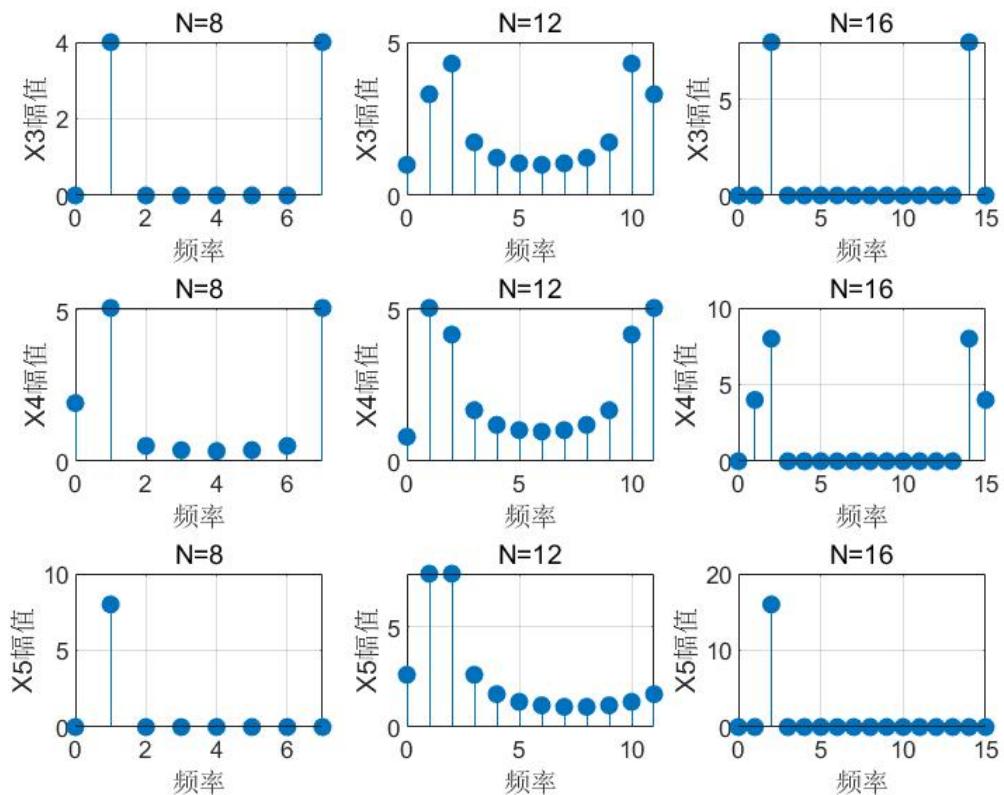
选择 FFT 的点数 N 为 8、12 和 16 的三种情况进行谱分析，分别画出其幅频特性曲线，并进行对比分析讨论。

(2) 对模拟周期信号进行谱分析：

$$x_5(t) = 2\cos(8\pi t) + 4\cos(16\pi t) + \cos(20\pi t)$$

选择采样频率为 $f_s = 64\text{Hz}$ ，采样点数 $N = 16$, $N = 32$, $N = 64$ ，三种情况进行谱分析，画出其幅频特性，并进行对比分析讨论。

解： (1)



```
% 3.2(1)
n=0:25;
x3=cos(pi/4*n);
x4=cos(pi/4*n)+0.5*cos(pi/8*n+pi/3);
x5=exp(1j*pi*n/4);
N_values=[8, 12, 16];
figure;
for i=1:3
N=N_values(i);
X3=fft(x3, N);
magnitude_spectrum=abs(X3);
```

```

% Axis
k=0:N-1;
% Plot
subplot(3, 3, i);
stem(k, magnitude_spectrum, 'fill');
title(['N=' num2str(N)]);
xlabel('频率');
ylabel('X3幅值');
grid on;
end
for i=1:3
N=N_values(i);
X4=fft(x4, N);
magnitude_spectrum=abs(X4);
% Axis
k=0:N-1;
% Plot
subplot(3, 3, i+3);
stem(k, magnitude_spectrum, 'fill');
title(['N=' num2str(N)]);
xlabel('频率');
ylabel('X4幅值');
grid on;
end
for i=1:3
N=N_values(i);
X3=fft(x5, N);
magnitude_spectrum=abs(X3);
% Axis
k=0:N-1;
% Plot
subplot(3, 3, i+6);
stem(k, magnitude_spectrum, 'fill');
title(['N=' num2str(N)]);
xlabel('频率');
ylabel('X5幅值');
grid on;
end

```

对比分析讨论：图像横轴为抽样点数N，纵轴为做FFT后的频谱幅值。下以 $x_3(n)$ 为例验证图像的正确性。

由DFT的定义式可得：

$$\begin{aligned}
DFT\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] &= DFT\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{8}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{8}n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left(e^{j\left(\frac{N}{8}-k\right)\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\left(\frac{N}{8}+k\right)\frac{2\pi}{N}n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\left(\frac{N}{8}-k\right)\frac{2\pi}{N}\bullet N}}{1 - e^{j\left(\frac{N}{8}-k\right)\frac{2\pi}{N}}} + \frac{1 - e^{-j\left(\frac{N}{8}+k\right)\frac{2\pi}{N}\bullet N}}{1 - e^{-j\left(\frac{N}{8}+k\right)\frac{2\pi}{N}}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\left(\frac{N}{8}-k\right)\bullet 2\pi}}{1 - e^{j\left(\frac{N}{8}-k\right)\frac{2\pi}{N}}} + \frac{1 - e^{-j\left(\frac{N}{8}+k\right)\bullet 2\pi}}{1 - e^{-j\left(\frac{N}{8}+k\right)\frac{2\pi}{N}}} \right]
\end{aligned}$$

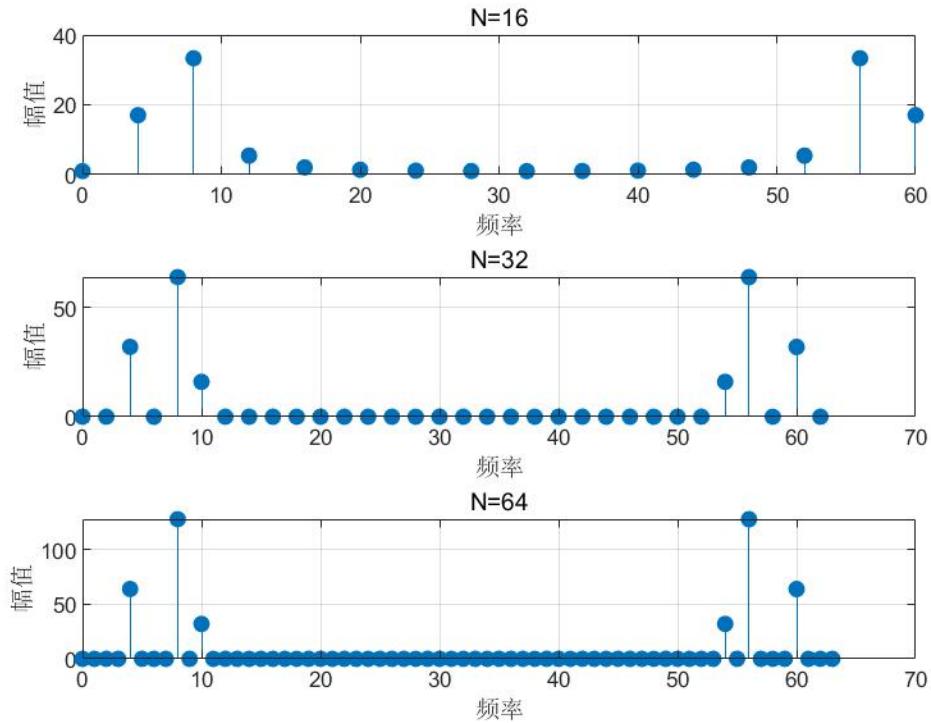
由此可知，当且仅当 $k = \pm \frac{N}{8}$ 时，DFT可能不为0，其余情况均为0，即

$$DFT\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] = C \left[\delta\left(k - \frac{N}{8}\right) + \delta\left(k + \frac{N}{8}\right) \right], \quad C \text{可由 L'Hospital 求出}$$

对于基2-FFT来说， $N=8$ 时， $k=\pm 1$ ； $N=16$ 时， $k=\pm 2$ 。由图像可知，均正确。但对于12点运算，12并非2的次幂，因此通常情况下补0至2的次幂（如16），如直接进行计算，将会出现错误，如上图中间列所示。

不难发现，采样点数越多，对DTFT的还原程度越高，越接近真实的连续频谱。 $x_4(n)$ 、 $x_5(n)$ 同理可得，再次不做赘述。

(2)



```
% 3.2(2)
fs=64;
t=0:1/fs:1-1/fs;
signal=@(t) 2*cos(8*pi*t) + 4*cos(16*pi*t) + cos(20*pi*t);
N_values=[16, 32, 64];
figure;
for i=1:3
N=N_values(i);
t_sampled=0:1/fs:(N-1)/fs;
x=signal(t_sampled);
Y=fft(x, N);
f=fs*(0:(N-1))/N;
subplot(3, 1, i);
stem(f, abs(Y), 'fill');
title(['N=' num2str(N)]);
xlabel('频率');
ylabel('幅值');
grid on;
end
```

对比分析讨论：图像横轴为采样频率 f_s ，纵轴为做FFT后的频谱幅值。由（1）证明可知， $x_5(t)$ 的频谱应存在6个冲激函数（左3右3），幅值比应为2:4:1，可验证图像正确。有图像可以发现，采样点数越多，对DTFT的还原程度越高，越接近真实的连续频谱。该结论与（1）一致。

3.3 补零与增加采样点数对谱分析的影响

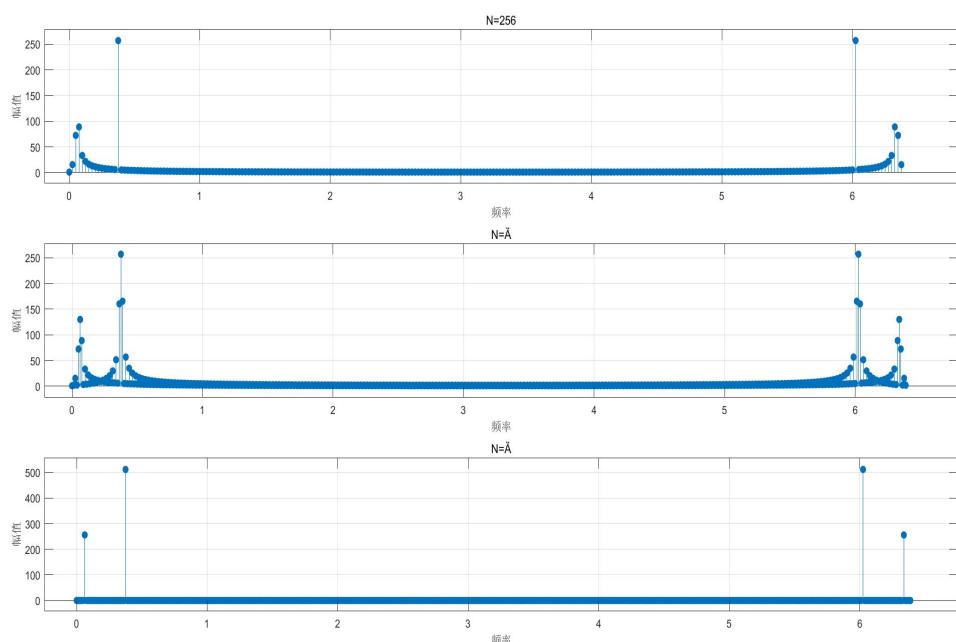
选择采样频率为 $f_s = 6.4\text{Hz}$, 对模拟周期信号进行谱分析:

$$x_6(t) = \cos(\pi t/8) + 2\cos(3\pi t/4)$$

- (1) 采样点数 $N = 256$, 计算 256 点 FFT;
- (2) 采样点数 $N = 256$, 补 256 个零后计算 512 点 FFT;
- (3) 采样点数 $N = 512$, 计算 512 点 FFT

三种情况分别画出幅频曲线。并进行对比分析讨论。

解: (1) (2) (3) 用 subplot 合成一张图



```
%3.3
% Do 256-point FFT
fs=6.4;
N=256;
t=0:1/fs:1-1/fs;
signal=@(t) cos(pi*t/8)+2*cos(3*pi*t/4);
t_sampled=0:1/fs:(N-1)/fs;
x=signal(t_sampled);
Y=fft(x, N);
f=fs*(0:(N-1))/N;
figure;
subplot(3,1,1);
stem(f, abs(Y), 'fill');
title(['N=' num2str(N)]);
xlabel('频率');
ylabel('幅值');
grid on;
```

```

% Fill 256 0 in x_sample, then do 512-point FFT
z=zeros(256);
x1=[x, z(256,:)];
Y1=fft(x1, 512);
f1=fs*(0:511)/512;
subplot(3,1,2);
stem(f1, abs(Y1), 'fill');
title(['N=' 512]);
xlabel('频率');
ylabel('幅值');
grid on;
% Do 512-point FFT
t_sampled1=0:1/fs:511/fs;
x2=signal(t_sampled1);
Y2=fft(x2, 512);
f2=fs*(0:511)/512;
subplot(3,1,3);
stem(f2, abs(Y2), 'fill');
title(['N=' 512]);
xlabel('频率');
ylabel('幅值');
grid on;

```

对比分析讨论：由计算分析可知，两个主频应为0.075Hz和0.375Hz，与上图相符。

- (1) 幅频曲线可以显示出成分的两个峰值，但由于采样点不足，分辨率较低，可能会导致一些细节的丢失。
- (2) 通过补0得到512长度序列，再做512点FFT只能增加细节，但不能提高分辨率，因为DTFT不变，仅仅是计算上更加精细。
- (3) 直接进行512点采样的FFT可增加信号的细节并提高频域上的分辨率，得到的频谱更清晰。

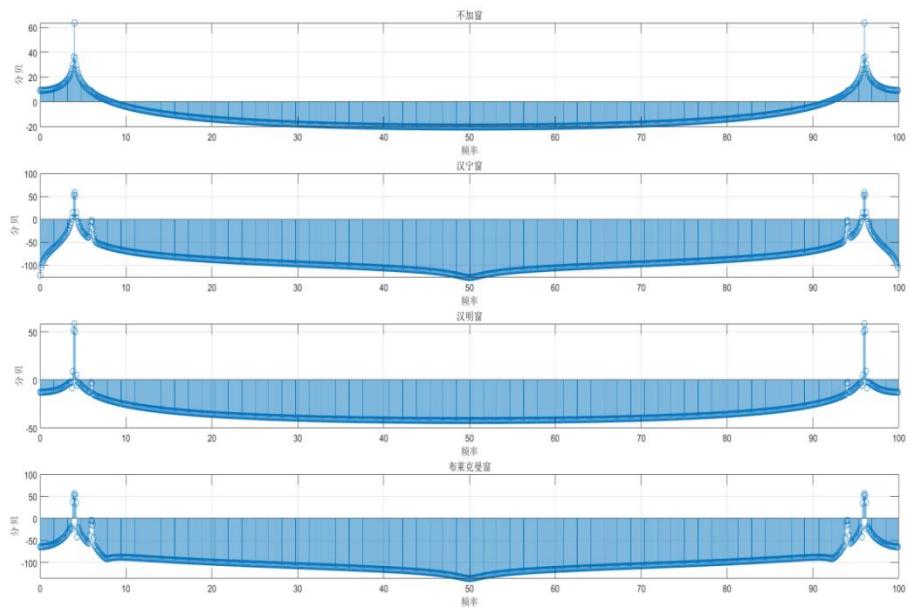
3.4 用不同的窗函数进行谱分析

对模拟信号进行谱分析：

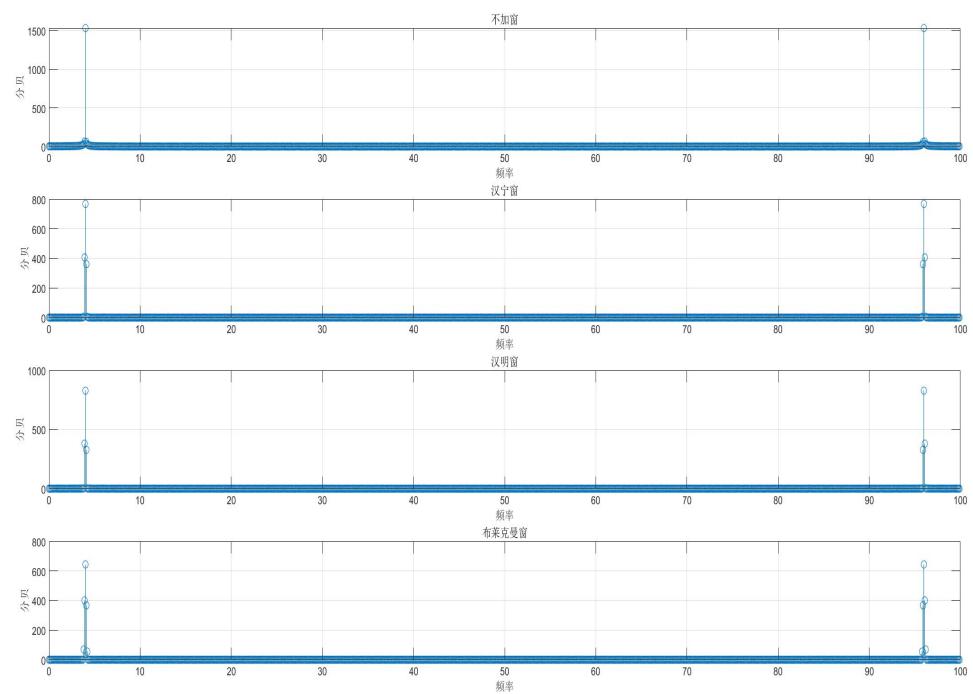
$$x_7(t) = 3\cos(8\pi t) + 0.003\cos(12\pi t)$$

选择采样频率 $f_s = 100\text{Hz}$ 采样点数为 $N = 1024$ ，对信号加窗进行 DFT 计算，对比加汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗等与加不加窗的区别。（幅度用对数坐标）

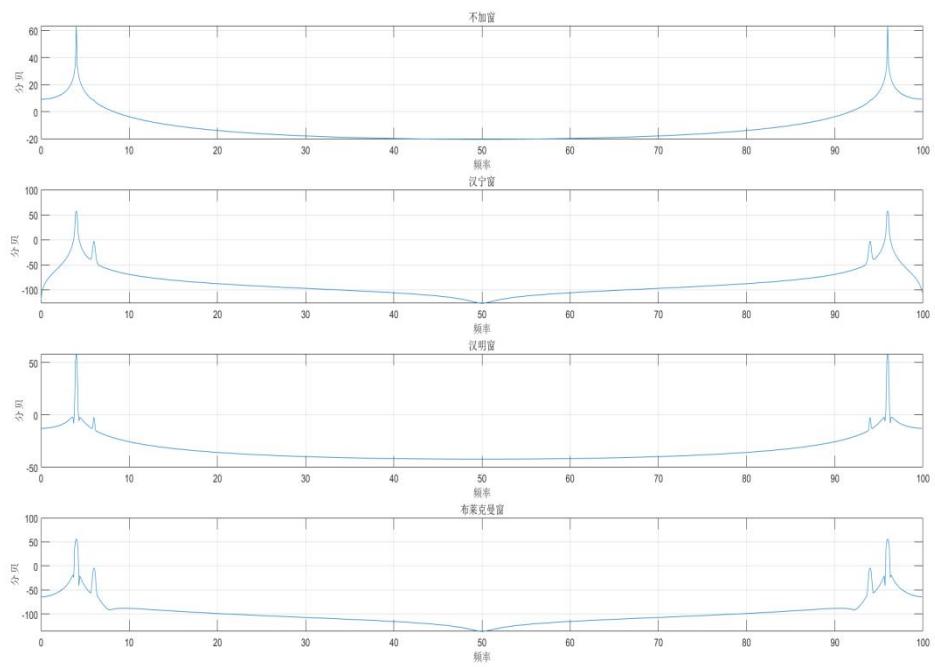
解：



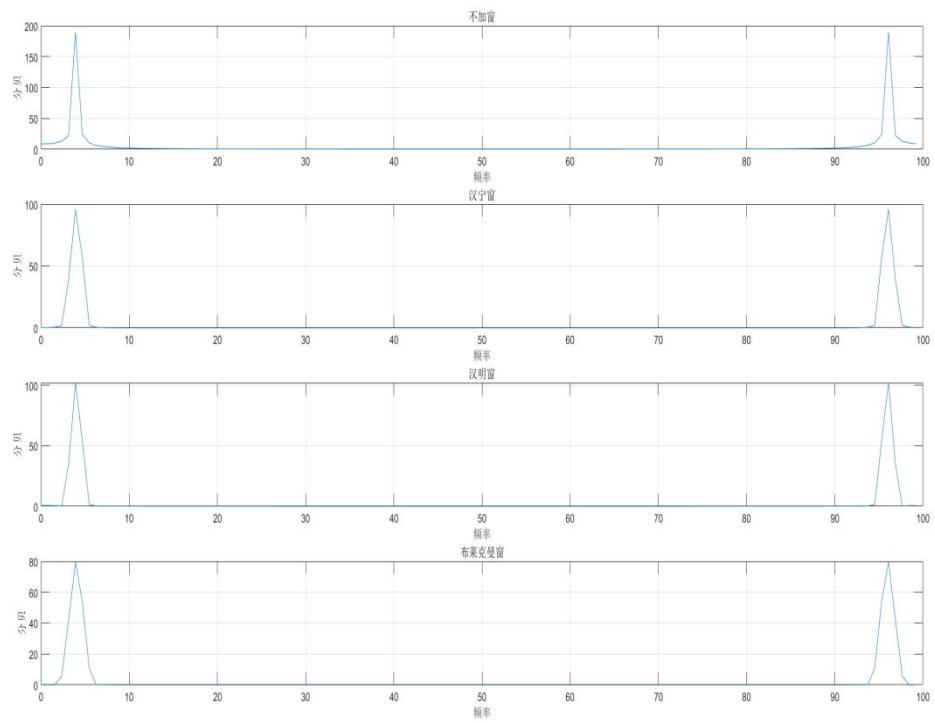
a. 以dB为单位表示的1024点stem谱



b. 以幅度为单位表示的1024点stem谱



c. 以分贝为单位表示的1024点plot谱



d. 以幅度为单位表示的1024点plot谱

```

%3.4
fs=100;
N=1024;
t=(0:N-1)/fs;
x=3*cos(8*pi*t)+0.003*cos(12*pi*t);
f=(0:N-1)*(fs/N);
% No window FFT
X_no_window=fft(x);
X_magnitude_no_window=abs(X_no_window);
% 汉宁窗
hanning_window=hanning(N)';
x_hanning=x.*hanning_window;
X_hanning=fft(x_hanning);
X_magnitude_hanning = abs(X_hanning);
% 海明窗
hamming_window=hamming(N)';
x_hamming=x.*hamming_window;
X_hamming=fft(x_hamming);
X_magnitude_hamming=abs(X_hamming);
% 布莱克曼窗
blackman_window=blackman(N)';
x_blackman=x.*blackman_window;
X_blackman=fft(x_blackman);
X_magnitude_blackman=abs(X_blackman);
figure;
% No window
subplot(4, 1, 1);
stem(f, 20*log10(X_magnitude_no_window));
title('不加窗');
xlabel('频率');
ylabel('分贝');
grid on;
% 汉宁窗
subplot(4, 1, 2);
stem(f, 20*log10(X_magnitude_hanning));
title('汉宁窗');
xlabel('频率');
ylabel('分贝');
grid on;
% 海明窗
subplot(4, 1, 3);
stem(f, 20*log10(X_magnitude_hamming));
title('海明窗');
xlabel('频率');
ylabel('分贝');
grid on;
% 布莱克曼窗
subplot(4, 1, 4);
stem(f, 20*log10(X_magnitude_blackman));
title('布莱克曼窗');
xlabel('频率');
ylabel('分贝');
grid on;

```

对比分析讨论：如图a所示为题目要求的对数表示幅度的1024点谱线，上附MATLAB代码为图a代码。图bcd代码仅为分析方便对图a代码进行了相应的修改，在此不做赘述。

使用stem函数反应了抽样序列位置以及其FFT的幅度，但由于取点过密，很难看出趋势，因此使用plot函数反应幅度变化趋势，由此进行分节编译，可以得到bcd三图。

(1) 工程测量中不可能对无限长信号进行测量和运算,因此需通过加窗将其截短,但由此也会产生能量泄露的问题,如图d可以很清晰看到泄露现象。MATLAB“不加窗”时直接调用fft函数得到的频谱隐含了加一矩形窗,由图b可以看出,为理想的cos频谱(即进包含4个抽样点,左2右2,幅值比为1000:1),但图acd反映出的“不加窗”频谱存在较严重的旁瓣和泄漏现象。

(2) 汉宁窗：可减少旁瓣效应，幅频曲线更加平滑，但可能会降低主瓣的高度，从而使信号的某些细节可能会被掩盖。

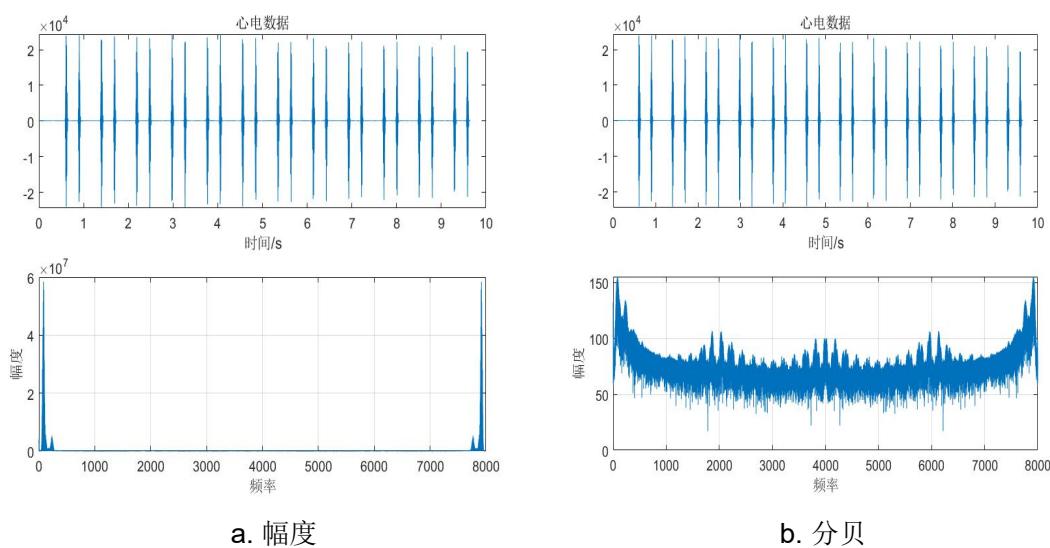
(3) 海明窗：在减少旁瓣方面更为有效，能够进一步抑制泄漏，但主瓣变宽，可能会影响频率分辨率。

(4) 布莱克曼窗：提供了更好的旁瓣抑制，但主瓣宽度最大。

3.5 心电信号的谱分析

用 8000Hz 的采样频率测得某心电图数据，用 xin_dian_tu.m 可以画出其时域图，计算其频谱，并进行分析讨论。

解：



```
%心电信号采样频率为8000Hz
%从'xindian.txt'中读取数据
fs=8000;
y=load('xindian.txt');
N=length(y);
x=0:1/fs:(N-1)/fs;
figure;
subplot(2,1,1);
plot(x,y)
title('心电数据')
xlabel('时间/s')
%Do FFT
FFT=fft(y);
subplot(2,1,2);
f=(0:N-1)*fs/N;
%plot(f,20*log10(abs(FFT)));
plot(f,abs(FFT));
xlabel('频率');
ylabel('幅度');
grid on
```

对比分析讨论：图a为纵轴FFT幅度，图b纵轴为分贝。频谱尖峰出现在两端，但由于是关于4000Hz的对称图像，可知尖峰主要出现在60-80Hz。根据所查的知识，尖峰出现的位置通常反映心电信号的主要频率成分。

4 思考题

- (1)、采样时如何选择采样频率？采样点数有什么影响？实数序列与复数序列的 FFT 有什么不同？
- (2)、窗函数对频谱分析有什么影响？
- (3)、补零和增加采样点数对做频谱分析有什么影响？
- (4)、如何从心电信号的频谱图中分析出心电信号的频率？

解：

- (1) 若已知信号的最高频率 f_{max} 为防止混叠，采样频率应至少满足 $f_s \geq 2f_{max}$ ；
根据实际需要，选定分辨率 Δf ，确定DFT长度 $N = f_s / \Delta f$
确定相应模拟信号的时间长度 $\tau = N / f_s = NT_s$
- (2) 余弦信号与窗函数时域相乘，频域相卷，会造成频谱泄露。
- (3) 都可以增加频谱的细节，但补0不能提高分辨率（因为DTFT没变），增加采样点可以提高分辨率。
- (4) 预处理信号-FFT-绘制频谱图-识别频率成分-计算心率。