## 2025～2026 学年第一学期《微积分Ⅰ》期中考试试卷参考答案

**考试时间：2025 年 12 月 19 日**

一、选择题　1. **D**　2. **B**　3. **A**　4. **C**　5. **B**

二、填空题　6. $y=x+1$　7. **3**　8. $2\theta$　9. $\ln 2$　10. $2\pi$

三、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

**11.** 解: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\frac{1+x}{e^{-x}-1}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x+x^2}{x(e^{-x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x+x^2}{-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1+2x}{-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}+2}{-2}=-\frac{3}{2}.$

解法二: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x+x^2}{-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)+x+x^2}{-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2}{-x^2}=-\frac{3}{2}.$

解法三: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1+x+x^2}{x(e^{-x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1+2x}{(1-x)e^{-x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}+2}{(x-2)e^{-x}}=-\frac{3}{2}$

**12.** 解: $I=\int\frac{1}{(x^2+x)(x^2+x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

**13.** 解: $I=\int_1^6 f(x-1)dx=\int_0^5 f(x)dx=\int_0^4\left(\sqrt{2x+1}-1\right)dx+\int_4^5\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$=\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-4x\right]\Big|_0^4+2\sqrt{x}\Big|_4^5=\frac{26}{3}-4+2\left(\sqrt{5}-2\right)=\frac{2}{3}+2\sqrt{5}.$

**14.** 解: $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,

$I=\int x^3\,df(x)=x^3f(x)-3\int x^2f(x)dx=x^3f(x)-3\int(x\cos x-\sin x)dx$

$=x^2\cos x-x\sin x-3(x\sin x+2\cos x)+C=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$

解法二: $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, $f'(x)=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$,

$I=\int x^3f'(x)dx=\int\left(-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x\right)dx=x^2\cos x-\int(4x\cos x-2\sin x)dx$

$=x^2\cos x-\left(4x\sin x-\int 6\sin x\,dx\right)=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$

**15.** 解: (1) $I_1+I_2=\left[\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}+\frac{\arctan x}{1+x}\right]dx=\arctan x\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2.$

(2) $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\right)\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\ln(1+\tan x)+\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

四、计算题（共 24 分，每小题 8 分）

**16.** 解: $f'(x)=3x^2+2ax+b$, 由 $f'(1)=3+2a+b=0$, 且 $f(1)=1+a+b=-2$,

解得 $a=0$, $b=-3$, 所以 $f(x)=x^3-3x^2$.

令 $f'(x)=3x^2-3=0$, 得 $x=\pm 1$, $f''(x)=6x$.

当 $x<-1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $-1<x<1$ 时, $f'(x)<0$, 故 $f(-1)=2$ 为极大值.

又当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$, 故 $f(1)=-2$ 为极小值.

由于 $f''(0)=0$, 当 $x<0$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f''(x)>0$, 故 $(0,0)$ 为曲线的拐点.

**17.** 解: $f(x)=e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right)$

$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4).$

解法二: $f'(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]$, $f''(x)=e^x\left[\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]$,

继续求 $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, $f'''(0)=2$, $f^{(4)}(0)=0$,

$f(x)=e^x\ln(1+x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4)$

$=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4).$

**18.** 解: (1) $0 \le I_n \le \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，由迫敛准则，$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

法二：由中值定理，$I_n = \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}(\xi\in[0,1])$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

(2) $I_{n+1}-I_{n-1}=\int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{n-1}\left(x^2-1\right)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^n - x^{n-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$，

即 $I_{n+1}=I_{n-1}-\frac{1}{n(n+1)}$.

法二： $I_{n+1}+I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，同理 $I_n + I_{n-1}=\frac{1}{n}$，

两式相减得 $I_{n+1}-I_{n-1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$， 即 $I_{n+1}=I_{n-1}-\frac{1}{n(n+1)}$.

(3) $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 1-\ln(1+x)\Big|_0^1 = 1-\ln 2$，

$I_3 = I_1 - \frac{1}{2\times 3} = \frac{5}{6}-\ln 2$.

**五、证明题（共 11 分，第 19 题 5 分，第 20 题 6 分）**

**19. 证明：** $f$ 在 $[0,1]$ 上连续且可导，由拉格朗日中值定理，$\exists x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 及 $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

使 $f'(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}}=-1$，$f'(x_2)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=1$.

由达布定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,1)$，使 $f'(\xi)=-C$，即 $f'(\xi)+C=0$.

**证法二：** 令 $F(x)=f(x)+Cx$，则 $F$ 在 $[0,1]$ 上连续且可导，$F(0)=1, F(1)=1+C$，

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+C}{2}$，则 $F\left(\frac{1}{2}\right)<F(0)<F(1)$，所以 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值必在区间内

$\xi\in(0,1)$ 处取得，由费马定理，知 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+C=0$.

**证法三：** 令 $F(x)=f(x)+Cx$，则 $F$ 在 $[0,1]$ 上连续且可导，$F(0)=1, F(1)=1+C$，

$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+C}{2}$，则 $F\left(\frac{1}{2}\right)<F(0)<F(1)$，由介值定理，$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $F(\eta)=F(0)$.

再由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+C=0$.

**20. 证明：** 将函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 展成一阶泰勒公式： 存在 $\eta_x$ 介于 $x$ 与 $\frac{a+b}{2}$，

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta_x)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

上式两边积分得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x == f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta_x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最小值 $m$ 与最大值 $M$，则

$$m\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \le \int_a^b f''(\eta_x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \le M\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$\Rightarrow \frac{m}{12}(b-a)^3 \le \int_a^b f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \le \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $\int_a^b f''(\eta_x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x = f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^3}{12}$，

于是，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

**证法二：** 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的三阶导数.

$F(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 展成二阶泰勒公式:

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{f''(\eta)}{3!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3,$$

$$F(a)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_1)\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^3,$$

$$F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2!}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_2)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}\left[f''(\xi_2)+f''(\xi_1)\right].$$

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f''(\xi)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right]$，故有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

**2025～2026 学年第一学期期中考试试卷**

**《微积分 I》A 卷（共 2 页）**

**(考试时间：2025 年 12 月 19 日)**

**一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）**

1. 已知当 $x \to 0$ 时，$e^x - \cos x + 2x$ 与 $Ax^k$ 是等价的无穷小量，则（　　）.

(A) $A=1,\ k=1$　　(B) $A=1,\ k=2$

(C) $A=1,\ k=3$　　(D) $A=3,\ k=1$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x\sin x+\cos x-1, & x>0, \end{cases}$ 则（　　）.

(A) $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $f''(0)=2$　　(B) $f'(0)=0$，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续

(C) $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $f''(0)=1$　　(D) $f'(0)=0$，$f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续

3. 设 $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(\sin x)=x$，　则 $f(x)=$（　　）.

(A) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$　　(B) $x\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}+C$

(C) $x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$　　(D) $x\arcsin x-2\sqrt{1-x^2}+C$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，则（　　）.

(A) 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某一邻域内严格单调增加时，有 $f'(x_0)>0$

(B) 当 $f'(x_0)=0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 必取得极值

(C) 当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 $x_0$ 的某一邻域内严格单调增加

(D) 当 $f''(x_0)=0$ 时，$(x_0, f(x_0))$ 必是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 下列结论中，正确的是（　　）.

(A) $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上可积

(B) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积

(C) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上可积

(D) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1], \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上不可积

**二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）**

6. 曲线 $y=x+x^2\sin\frac{1}{x^2+1}$ 的渐近线方程是________________.

7. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=2x-\frac{x^3}{3}-\sin 2x$ 与 $x^n$ 是同阶无穷小量，则 $n=$__________.

8. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x(\theta)=\int_0^{\theta}\sqrt{1+u^4}\,du, \\ y(\theta)=\int_0^{\theta^2}\sqrt{1+u^2}\,du \end{cases}$ 给出，则 $\frac{dy}{dx}=$__________.

9. 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$ 的值为__________.

10. 定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{\pi-x^2}\right)^2 dx$ 的值为__________.

## 三、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1+x}{e^{-x}-1}\right)$.

12. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\left(x^2+x\right)\left(x^2+x+1\right)}dx$.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x+1}-1, & 0\le x\le 4,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>4,\end{cases}$ 计算定积分 $I=\int_1^6 f(x-1)\,dx$.

14. 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是可微函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\,dx$.

15. 设 $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$，$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx$.

(1) 求 $I_1+I_2$；

(2) 利用已知结论：当 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续时，有

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a\left[f(x)+f(a-x)\right]dx,$$

求定积分 $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt$.

## 四、解答题（共 24 分，每小题 8 分）

16. 确定常数 $a,b$，使函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 $-2$，并求出 $f(x)$ 的所有极值及曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

17. 求函数 $f(x)=e^x\ln(1+x)$ 的带佩亚诺余项的麦克劳林公式（展开到 $x^4$）.

18. $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$；(2) 推导递推公式 $I_{n+1}=I_{n-1}-\dfrac{1}{n(n+1)}$；(3) 求 $I_1,I_3$.

## 五、证明题（共 11 分，第 19 题 5 分，第 20 题 6 分）

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且可导，且 $f(0)=f(1)=1, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

证明：对任意常数 $C\,(0<C<1)$，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)+C=0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$