

《数值计算方法与 Matlab》复习题

第一章 引论

一. 填空题:

1. 设 $\pi = 3.14159265358979\dots$, 则 4π 的近似值 12.566370 具有 7 位有效数字, 其绝对误差限 0.5×10^{-5} .

2. 在科学与工程计算中, 不可避免地要遇到各种误差中, 其中数值计算方法可以处理的误差是 舍入误差和截断误差。

3. 为了使近似计算结果更加准确, 函数式 $\frac{1 - \cos 2x}{x}$ 当 $x = 0.001$ 时应该改写为 $\frac{2 \sin^2 x}{x}$ 。

第二章 线性方程组的数值解法

一. 填空题:

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $M =$
 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

2. 已知求解三阶线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4} (-3x_2^{(k)} + 24), \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4} (-3x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 30), \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} (x_2^{(k)} - 24), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则求解此方程组的 Seidel 迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4} (-3x_2^{(k+1)} + 24) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4} (-3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 30) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} (x_2^{(k+1)} - 24) \end{cases}$

3. 若将 $Ax = b$ 的系数矩阵分裂为 $A = D - L - U$ (其中 D, L, U 如教材所规定), 则 Seidel 迭代矩阵 $M = (D - L)^{-1} \cdot U$ $k = 0, 1, 2, \dots$

4. 若对于线性方程组 $Ax = b$, Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式都收敛, 则一般说来 Seidel 迭代格式要比 Jacobi 迭代格式收敛得快。

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\text{cond}_1 A = \underline{1.5}$.

6. $A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, 则 A 的 Doolittle 分解为 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.7 & 1 & \\ 0.8 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 \\ 0.1 & 0.4 & \\ 2 & & \end{bmatrix}$

7. 设 SOR 迭代法收敛, 则松弛因子 $\omega \in \underline{(0, 2)}$ 。

8. 线性方程组 $Ax = b$ ($b \neq 0$) 中的 b 的扰动 δb 引起的解 x 的相对误差 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underline{\text{cond}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

9. 用 Gauss 消去法解线性方程组 $Ax = b$ 的演算, 分为 ~~列主元素~~ 消元和 ~~行主元素~~ 回代两个过程。

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $\text{cond}_\infty(A) = \underline{3}$ 。当 b 有误差 $\delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ 时,

其中 $0 < \varepsilon < 1$, 引起解向量 x 的误差 δx , 则 $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ 的上界为 3ε。

11. 设线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 用迭代法

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(Ax^{(k)} - b)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 进行求解, 则迭代法收敛的充分必要条件是 $\alpha \in \underline{(0, 1)}$ 区间。

12. 设矩阵 A 的 Doolittle 分解为 $A = LU$, 则矩阵 L 的对角线元素

$l_{ii} = \underline{1}$ 。

13. 设线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵对称正定, 则求解该方程组的 Gauss-Seidel 迭代法收敛。

二. 判断题:

1. 求解 n 阶线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛的充要条件是 $\rho(M) < 1$. (X)

2. 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 严格对角占优, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式和 Seidel 迭代格式都收敛. (✓)

3. 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称正定, 则求解 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式一定收敛. (X)

4. 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代格式收敛, 则其 Seidel 迭代格式也收敛. (X) X

5. 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Seidel 迭代格式收敛, 则其 Jacobi 迭代格式也收敛. eg: 对称正定 (X)

6. 设 M 是求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Seidel 迭代矩阵, 则 Seidel 迭代格式收敛的充要条件是 $\|M\|_\infty < 1$. $\rho(M) < 1$ (X) X

7. 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Seidel 迭代格式收敛, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = 0$. (X) X

8. 若求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代格式收敛, M 是迭代矩阵, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|_2 = 0$. (✓)

9. 改变方程组中方程的排列顺序, 不可能改变迭代格式的收敛性. (X)

10. 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是非奇异矩阵, 则 $\text{cond } A \geq 1$. $|A| \neq 0$ $\|A\| \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = 1$ (✓)

11. 若 SOR 迭代格式收敛, 则松弛因子 $\omega \in (0, 2)$. (✓)

12. 设 M 是求解线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代矩阵, 若 A 严格列对角占优, 则 $\|M\|_1 < 1$. (X)

13. A 的 Doolittle 分解中, 矩阵 L 的对角线元素一定是 1. (✓)

14. 设求解线性方程组 $Ax = b$ 的迭代格式为 $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), x^* 是 $Ax = b$ 的解, 则对任意初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 当 $\|M\|_\infty < 1$ 时, 有误差估计式

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{\|M\|_\infty}{1 - \|M\|_\infty} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty. (X) \checkmark$$

15. 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是非奇异矩阵, 则 A 存在唯一的 Doolittle 分解的充要条件是: A 的各阶顺序主子式均大于零. 不为 0 (X) X

16. 用顺序 Gauss 消去法解线性方程组 $Ax = b$ 时, 只要 A 非奇异, 其消元过程就能进行到底. (X)

17. 用列主元素 Gauss 消去法解线性方程组 $Ax = b$ 时, 只要 A 非奇异, 其消元过程就能进行到底. (✓)

第三章 函数的插值

一. 填空题:

1. 设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$ 是区间 $[a, b]$ 上以 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数, 则 $\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1$, $\sum_{k=0}^n l_k(x_k) = n+1$.

2. 填写下表:

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
4	8			
5	12	4		
6	18	6	1	
8	28	5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

3. 利用第 2 题的差商表, 选节点 $x_0 = 4, x_1 = 5, x_2 = 6$, 求得 $f(5.8) \approx N_2(5.8) = 16.640$, 则

$$f(5.8) \approx N_3(5.8) = 16.640 + 0.096 = 16.736.$$

4. 满足插值条件

$$p(0) = f(0) = 1, p(1) = f(1) = 2, p(2) = f(2) = 1,$$

$$p'(1) = f'(1) = 0, p'(2) = f'(2) = -1$$

的四次插值多项式 $p(x) = 1.5x^4 - 6x^3 + 5x^2 - x + 1$ $\frac{1}{2}x(x-1)^2(x-2) - x^2 + 2x + 1$

5. 三次样条插值的第三种边界条件为

$$S(x_0) = S(x_n), \quad S'(x_0+0) = S'(x_n-0), \quad S''(x_0+0) = S''(x_n+0),$$

$$f(x^3), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

6. 根据样条函数的定义, 区间 $[a, b]$ 上的 m 次样条函数 $S(x)$ 除了满足在每一

$$S \in C^{m-1}[a, b]$$

子区间 $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 上是次数不超过 m 的多项式外, $S(x)$ 还满足: $\begin{cases} S(x_k) = f(x_k) \\ S(x) \in C^2[a, b] \end{cases}$

7. 已知函数 $y = f(x)$ 的三对数据 $(0, 1)$, $(-1, 5)$ $(2, -1)$, 则其关于这三点的二阶差商 $f[0, -1, 2] = \underline{1}$, 过此三点的 Lagrange 插值多项式为

$$\underline{L_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2) + \frac{5}{3}x(x-2) - \frac{1}{6}x(x+1)}$$

8. 在科学与工程计算中, 常常使用分段低次插值, 这是为了避免 Runge 现象

9. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 阶导数存在, $H_{2n+1}(x)$ 为 $f(x)$ 在互异节点 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 上的 $2n+1$ 次 Hermite 插值公式, 则对任意的 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi \in \underline{(a, b)}$, 使得插值余项 $R(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$

10. 设 $S(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上以 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为互异节点的三次样条插值函数, 则求解 $S(x)$ 共有 ~~4n~~ $n+3$ 个定解条件。若三次样条插值函数

$$S(x) = \begin{cases} x^3 + 2x, & x \in [0, 1] \\ 3x^2 + cx + d, & x \in [1, 2] \end{cases}, \text{ 则系数 } c = \underline{-1} \text{ 和 } d = \underline{1}.$$

二. 判断题:

1. 设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$ 是区间 $[a, b]$ 上以 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数, 则 $\sum_{k=0}^n |l_k(x)| = 1$. (X)

2. 设 $L_n(x)$ 和 $N_n(x)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上以 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 为节点的 n 次 Lagrange 插值多项式和 Newton 插值多项式, 则 $L_n(x) \equiv N_n(x)$. $R=0$ (✓)

3. 设 $f(x)$ 是 n 次 多项式, x_0, x_1, \dots, x_n 是 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个互异的点, 则 $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0$. (X)

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有任意阶导数, 则 n 次 插值公式的余项为

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \omega_n(x), \xi \in (a, b) \text{ 且与 } x \text{ 有关. (X)}$$

$n+1$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有三阶导数, $S(x)$ 是 $f(x)$ 的三次样条插值函数, 则在插值节点处有 $S'' \in C^2[a, b]$

$$S''(x_k) = f''(x_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \quad (\times)$$

6. 设 $\{l_k(x)\}_{k=0}^n$ 是区间 $[a, b]$ 上以 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 为节点的 Lagrange 插值基函数, 则

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

$$\sum_{k=0}^n l_k(x)(x_k^m - 1) = x^m - 1 \quad (m \in \mathbb{N} \text{ 且 } m \leq n). \quad (\checkmark)$$

7. 设 $f \in C^{2n+1}[a, b]$ 且 $f^{(2n+2)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, $H_{2n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的以 x_0, x_1, \dots, x_n 为节点的 Hermite 插值多项式,

$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, 则插值余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega^2(x),$$

其中 $\xi \in (a, b)$ 且与 x 有关.

(X)

第四章 函数的数值逼近

一. 填空题:

1. 设 $p_4(x)$ 是 4 阶 Legendre 多项式, 则 $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2 + 4x + 1)p_4(x)dx = 0$.

2. 设 $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ 是区间 $[0, 1]$ 上权 $\rho(x) = e^{-x}$ 的最高次项系数为 1 的正交多项式序列, 则 $g_1(x) = x + \frac{1-2e^{-1}}{e^{-1}-1}$, $\int_0^1 e^{-x} \cdot g_k(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1-e^{-1}, & k=0 \end{cases}$.

3. 若 $S_n^*(x)$ 为 $f \in C[a, b]$ 在子空间 $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 中的最佳平方逼近, 则从几何角度上看, $S_n^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 Φ 中的正交投影。

4. 若用线性最小二乘法拟合数学模型 $y = \frac{t}{at+b}$, 其中 a, b 是待定参数, 那么如何将其线性化: $\frac{t}{y} = at + b$ $y^{-1} = a + b \cdot t^{-1}$.

5. 只要作变换 $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$ 也可利用 Legendre 多项式系求出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 n 次最佳平方逼近 $s_n(x)$ 。

第五章 数值积分与数值微分

一. 填空题:

1. 设 $C_k^{(n)}$ 是 Cotes 系数, 则 $\sum_{k=0}^n C_k^{(n)} = \underline{1}$.

2. 已知 Newton-Cotes 公式 $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^3 C_k^{(3)} f(x_k)$ 中的 $C_0^{(3)} = \frac{1}{8}$, 则 $C_1^{(3)} = \underline{\frac{3}{8}}$, $C_2^{(3)} = \underline{\frac{3}{8}}$, $C_3^{(3)} = \underline{\frac{1}{8}}$.

3. 数值积分的复化梯形公式和复化 Cotes 公式的收敛阶分别是

2, 4

Simpson: 4

4. 已知 Gauss 型求积公式 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 的 $n+1$ 个系数 A_k ($k=0, 1, \dots, n$) 均相等, 则 $A_k = \underline{\frac{\pi}{n+1}}$. Chebyshev

5. Gauss 型求积公式是稳定的, 是因为其求积系数 大于 0.

6. 当我们使用 Romberg 算法计算积分 $\int_1^3 g(x) dx$ 时, 得到变步长梯形序列 T_{2^k} (见下表), 请继续使用算法, 填写下表对角线上的空格 (保留 4 位小数).

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	5.1218	*****	*****	*****
1	9.2798	<u>10.6658</u>	*****	*****
2	10.5206	<u>10.9302</u>	<u>10.9521</u>	*****
3	10.8420	<u>10.9491</u>	<u>10.9501</u>	<u>10.9501</u>

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2.5, 2.7$ 和 2.9 处的函数值分别为 12.1825, 14.8797 和 18.1741. 若用三点数值微分公式计算, 则在 $x=2.7$ 处的函数一阶和二阶导数的近似值分别为 14.979 和 14.930 (保留 5 位有效数字).

8. 利用三点 Gauss-Legendre 求积公式计算积分 $\int_1^2 x e^{-x} dx$ 的数值计算公式为 $\frac{5}{9} (\frac{1}{2} \sqrt{0.6} + \frac{3}{2}) e^{-(\frac{1}{2} \sqrt{0.6} + \frac{3}{2})} + \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{3}{2}} + \frac{5}{9} (\frac{1}{2} \sqrt{0.6} + \frac{3}{2}) e^{-(\frac{1}{2} \sqrt{0.6} + \frac{3}{2})}$

$$\sum A_k = b - a \quad (f(x) \equiv 1)$$

9. 设 A_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 是区间 $[0, 3]$ 上的插值型数值积分公式的求积系数, 则 $\sum_{k=0}^n A_k = \underline{3}$ 。

10. Gauss 求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, 具有 $\underline{2n+1}$ 次代数精度, 相应的求积节点 x_k ($k = 0, 1, \dots, n$) 是 关于 $\rho(x)$ 正交多项式中 $(n+1)$ 次 多项式的零点。

(a, b) 区间上 $n+1$ 次正交多项式零点

二. 判断题:

1. $n+1$ 个求积节点的插值型求积公式的代数精度 m 满足不等式 $n \leq m \leq 2n+1$. (✓)

2. 设 A_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 是区间 $[a, b]$ 上的插值型求积公式的求积系数, 则

$$\sum_{k=0}^n A_k = \underline{1} \quad b-a \quad (\times)$$

3. 因为求积公式 $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 对于 $f(x) = \underline{x}$ 精确成立, 故其代数精度至少是 3. (✓)

4. 奇数 个求积节点的 Newton-Cotes 公式的代数精度至少等于节点的个数. (✓)

5. Cotes 系数 $C_k^{(n)}$ 只与求积节点的个数有关, 而与被积函数和积分区间均无关. (✓)

6. $n+1$ 个求积节点的 Gauss 型求积公式的代数精度为 $2n+1$. (✓)

7. Gauss 型求积公式的求积系数均大于零. (✓)

8. 设 $\cancel{p_n(x)}$ 是 n 阶 Legendre 多项式, 则 Gauss-Legendre 公式 $\int_{-1}^1 \cancel{p(x)} dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 中的求积节点 x_k 满足 $\cancel{p_{n+1}}(x_k) = 0$. (✓) \times

9. 利用 Gauss-Hermite 求积公式可以计算形如 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$ 的广义积分近似值, 且代数精度能达到最高. (✓)

10. 设 $f^{(4)} \in C[a, b]$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的满足边界条件 I 或 II 的三次样条插值函数, h 是步长, 则 $S''(x) \approx f''(x)$ 的截断误差为 $O(h^3)$. (X)

第六章 常微分方程的数值解法

一. 填空题:

1. 对于初值问题 $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = y_0, y'(a) = y_0^{(1)} \end{cases}$, 若令 $z = y'$, 则可

将其化为一阶方程组初值问题 $\begin{cases} z' = f(x, y, z) \\ y(a) = y_0, z(a) = y_0^{(1)} \end{cases}$ $a < x \leq b$

2. 求解第 1 题中的初值问题的标准 Runge-Kutta 格式为

3. 常微分方程离散化为差分方程的基本方法有 Euler, Runge-Kutta

4. 用改进 Euler 方法解 $\begin{cases} y' = -8y + 7z \\ z' = x^2 + yz \end{cases}$, $x \in (0, 1]$ 的计算格式 y_0
 $y_{n+1} = y_n + h(-8y_n + 7z_n)$
 $z_{n+1} = z_n + h(x_n^2 + y_n z_n)$
 $y(0) = 1, z(0) = 0$
 $z_0 = y_0^{(1)}$

为 $\bar{z}_{n+1} = z_n + h(x_n^2 + y_n z_n)$

5. 当步长 $h \in (0, \frac{2}{27})$ 时, 标准 Runge-Kutta 法是绝对稳定的.

6. 建立常微分方程初值问题 $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ 的改进 Euler 公式

为 $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

方法. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

7. 求解常微分方程初值问题的两种一阶格式是 Euler 方法和改进 Euler 公式

二. 判断题:

1. 设 $f(x, y)$ 在域 $D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 在区间 $[a, b]$ 上存在唯一解. (✓)

2. 若求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的某种数值方法的局部截断误差 $e_n = O(h^{p+1})$ ($n = 1, 2, \dots, N$), 其中 h 为步长, $p \in \mathbb{N}$, 则该数值方法是 p 阶方法. (X)

局部 $e = O(h^{p+1})$
 整体 $e = O(h^p)$

3. 若 $f(x, y)$ 在域 $D = \{(x, y) | x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ 上连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件, 则解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y), a < x \leq b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的二阶和四阶 Runge-Kutta 方法是收敛的. (~~X~~) ✓

4. 对于实验方程 $y' = \lambda y$ ($\lambda < 0$ 为常数), 对任意步长 $h > 0$, Euler 方法都是绝对稳定的. (~~X~~)

$$[0, -\frac{2}{\lambda}]$$