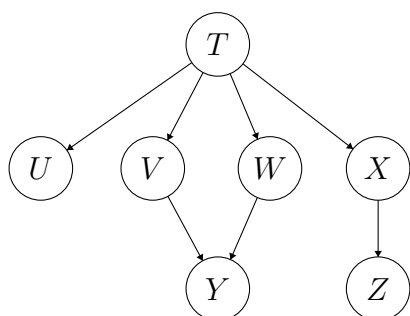




سوالات (۱۰۰ نمره)

۱. (۵۰ نمره) با توجه به شبکه بیزی زیر، بگویید استقلال شرطی در کدام یک از موارد زیر برقرار است و در صورت برقرار نبودن، همه‌ی مسیرهای فعال موجود در گراف را بیان کنید.



$$U \perp\!\!\!\perp X \quad (\text{آ})$$

$$U \perp\!\!\!\perp X \mid T \quad (\text{ب})$$

$$V \perp\!\!\!\perp W \mid Y \quad (\text{ج})$$

$$V \perp\!\!\!\perp W \mid T \quad (\text{د})$$

حل.

(آ) تضمین نمی‌شود. مسیر $U - T - X$ فعال است.

(ب) تضمین می‌شود.

(ج) تضمین نمی‌شود. مسیرهای $V - Y - W$ و $V - T - W$ فعال هستند.

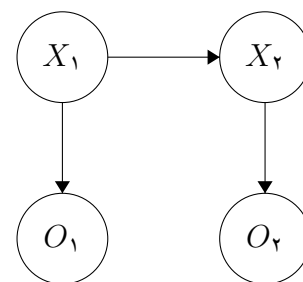
(د) تضمین می‌شود.

۲. (۵۰ نمره) مدل HMM زیر را در نظر بگیرید:

X_1	$P(X_1)$
0	0.3
1	0.7

X_t	X_{t+1}	P
0	0	0.4
0	1	0.6
1	0	0.8
1	1	0.2

X_t	O_t	$P(O_t X_t)$
0	A	0.9
0	B	0.1
1	A	0.5
1	B	0.5



که O_t ها مقادیر مشاهده شده هستند. می‌خواهیم به صورت گام به گام، توزیع $P(X_2|O_1 = A, O_2 = B)$ را به دست بیاوریم.

(آ) توزیع $P(X_1, O_1 = A)$ را به دست بیاورید (یعنی به ازای مقادیر مختلف X_1 مقدار این احتمال را محاسبه کنید).

(ب) از قسمت قبل استفاده کنید و توزیع $P(X_2, O_1 = A)$ را به دست بیاورید.

(ج) از نتیجه‌ی قسمت قبل استفاده کنید و توزیع $P(X_2, O_1 = A, O_2 = B)$ را به دست بیاورید.

(د) در نهایت به کمک قسمت قبل، توزیع مد نظری یعنی $P(X_2|O_1 = A, O_2 = B)$ را محاسبه کنید (نیازی به ساده کردن پاسخ نهایی نیست).

حل.

(آ)

$$\begin{aligned} P(X_1, O_1 = A) &= P(X_1)P(O_1 = A|X_1) \\ P(X_1 = 0, O_1 = A) &= (0.3)(0.9) = 0.27 \\ P(X_1 = 1, O_1 = A) &= (0.7)(0.5) = 0.35 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} P(X_2, O_1 = A) &= \sum_{x_1} P(x_1, O_1 = A)P(X_2|x_1) \\ P(X_2 = 0, O_1 = A) &= (0.27)(0.4) + (0.35)(0.8) = 0.388 \\ P(X_2 = 1, O_1 = A) &= (0.27)(0.6) + (0.35)(0.2) = 0.232 \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} P(X_2, O_1 = A, O_2 = B) &= P(X_2, O_1 = A)P(O_2 = B|X_2) \\ P(X_2 = 0, O_1 = A, O_2 = B) &= (0.388)(0.1) = 0.0388 \\ P(X_2 = 1, O_1 = A, O_2 = B) &= (0.232)(0.5) = 0.116 \end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0|O_1 = A, O_2 = B) &= 0.0388 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.25 \\ P(X_2 = 1|O_1 = A, O_2 = B) &= 0.116 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.75 \end{aligned}$$