



هوش مصنوعی

پاییز ۱۴۰۰

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: آرمان زارعی، آتوسا چگینی

بررسی و بازبینی: افشین کریمی

مهلت ارسال: ۲۵ آذر

Linear and Logistic Regression, Perceptrons

پاسخ تمرین ششم سری اول

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی کامپیوتر

سوالات (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۰۰ نمره) دیتاست خطی جدانپذیر \leftarrow یک w^* ای وجود دارد که هر (x, y) را با درستی دسته‌بندی می‌کند (با اختلاف برابر با δ)

فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

$$\bullet \forall (x, y) \in D : y \times (w^* \cdot x) \geq \delta \quad (\text{طبق فرض سوال})$$

$$\bullet R := \max_{(x, y) \in D} \|x\|$$

$$\bullet w^{(i)} \text{ برابر است با } w \text{ بعد از گام } i \text{ ام (بنابراین } w^{(0)} \text{ برابر است با } 0 \text{)}$$

$$\bullet (x^{(i)}, y^{(i)}) \in D \text{ در گام } i \text{ ام به نادرستی دسته‌بندی شده است و برای آپدیت این مرحله انتخاب شده}$$

$$\text{بنابراین آپدیت الگوریتم perceptron برابر است با } w^{(i+1)} = w^{(i)} + y^{(i)} x^{(i)} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{w^* \cdot (*)} w^* \cdot w^{(i+1)} = w^* \cdot w^{(i)} + y^{(i)} w^* \cdot x^{(i)} \geq w^* \cdot w^{(i)} + \delta \geq \dots \geq i\delta$$

$$\implies \|w^*\| \cdot \|w^{(i+1)}\| \geq i\delta \implies \|w^{(i+1)}\|^2 \geq \frac{i^2 \delta^2}{\|w^*\|^2} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{\|(*)\|^2} \|w^{(i+1)}\|^2 = \|w^{(i)} + y^{(i)} x^{(i)}\|^2 = \|w^{(i)}\|^2 + \|x^{(i)}\|^2 + 2y^{(i)} w^{(i)} \cdot x^{(i)}$$

ترم آخر منفی می‌باشد (به دلیل missclassified شدن آن در آن گام)

$$\implies \|w^{(i+1)}\|^2 \leq \|w^{(i)}\|^2 + R^2 \leq \dots \leq iR^2 \quad (***)$$

$$\xrightarrow{(**), (***)} \frac{i^2 \delta^2}{\|w^*\|^2} \leq iR^2 \implies i \leq \frac{R^2}{\delta^2} \times \|w^*\|^2 \implies i \leq \text{constant} \quad \square$$