



## هوش مصنوعی

پاییز ۱۴۰۰

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: -

مهلت ارسال: تئوری ۱۵ و عملی ۲۷ آذر

شبکه‌های بیزی - TPM

تمرین سوم

- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۷ روز و در مجموع ۲۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- همکاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ ارسالی هر کس حتما باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

## سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۲۰ نمره) فرض کنید یک شبکه بیزی با  $n$  راس داریم؛ ثابت کنید بیش‌ترین تعداد یالی که این شبکه می‌تواند داشته‌باشد،  $\frac{n(n-1)}{2}$  می‌باشد.

حل. اول به این نکته دقت می‌کنیم که شبکه بیزی باید یک گراف جهت‌دار و بدون دور باشد؛ حال یک شبکه بیزی با نودهای  $X_1, X_2, \dots, X_n$  در نظر بگیرید که بین تمام  $X_i$  و  $X_j$  های آن با شرط  $j > i$  یال وجود دارد. پس تعداد کل یال‌های این گراف برابر است با:

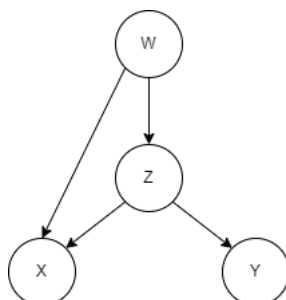
$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

حال برای اینکه نشان دهیم این گراف دور جهت‌دار ندارد از فرض خلف استفاده می‌کنیم:  
فرض کنید دور جهت‌داری به شکل  $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_m}, X_{i_1}$  وجود دارد پس داریم:

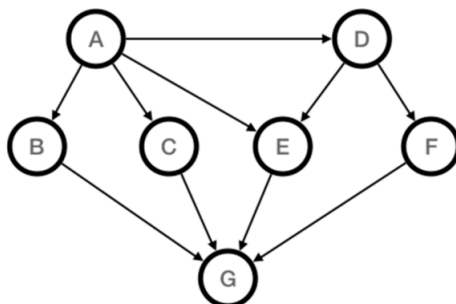
$$i_1 < i_2 < \dots < i_m < i_1 \rightarrow i_1 < i_1$$

پس فرض خلف باطل است و این گراف هیچ دور جهت‌داری ندارد.

۲. (۱۰ نمره) شبکه بیزی با ۴ متغیر  $X, Y, Z, W$  مثال بنزید که در حالت کلی فقط مجموعه‌ی استقلال‌های  $W \perp\!\!\!\perp Y|Z$  و  $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$  در آن برقرار باشد.  
حل. در شبکه بیز زیر، تنها استقلال‌های یادشده برقرارند.



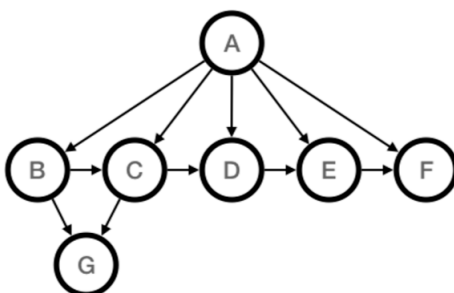
۳. (۱۰ نمره) شبکه زیر چه فاکتورگیری از توزیع توام  $P(A, B, C, D, E, F, G, H)$  را نشان می‌دهد؟



حل.

$$P(A).P(B|A).P(C|A).P(D|A).P(E|A, D).P(F|D).P(G|B, C, E, F)$$

۴. (۱۵ نمره) شبکه زیر را در نظر بگیرید.



فرض کنید الگوریتم variable elimination را برای پاسخ به پرسمان  $P(B|G, E)$  روی این شبکه اعمال کنیم؛ حال به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) با فرض استفاده از ترتیب  $G, E, A, B, C, D, F$ ، تمام عامل‌های تولیدشده و عملیات تولید آن‌ها را بنویسید.

(ب) با فرض استفاده از ترتیب  $G, E, F, D, C, B, A$ ، تمام عامل‌های تولیدشده و عملیات تولید آن‌ها را بنویسید.

(ج) کدام یک از ترتیب‌های داده‌شده برای این پرسمان بهتر است؟ چرا؟

حل.

(آ) ابتدا باید A را حذف کرد، سپس C، بعد D و در نهایت F.

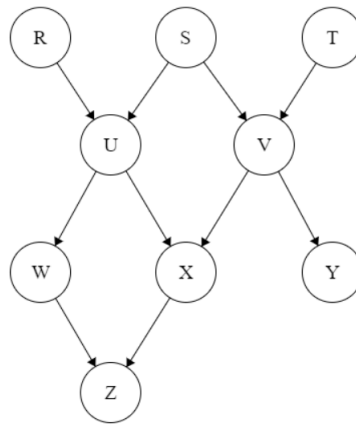
$$\begin{aligned}
 P(B|G, E) &\propto P(B, G, E) \\
 &= \sum_F \sum_D \sum_C \sum_A P(A)P(B|A)P(C|A)P(D|A)P(E|A)P(F|A)P(G|B, C) \\
 &= \sum_F \sum_D \sum_C P(G|B, C) \sum_A P(A)P(B|A)P(C|A)P(D|A)P(E|A)P(F|A) \\
 &= \sum_F \sum_D \sum_C P(G|B, C)m_A(B, C, D, E, F) = \sum_F \sum_D m_C(B, D, E, F, G) \\
 &= \sum_F m_D(B, E, F, G) = m_F(B, E, G) \propto P(B|G, E)
 \end{aligned}$$

(ب) ابتدا باید F را حذف کرد، سپس D، بعد C و در نهایت A.

$$\begin{aligned}
 P(B|G, E) &\propto P(B, G, E) \\
 &= \sum_A \sum_C \sum_D \sum_F P(A)P(B|A)P(C|A)P(D|A)P(E|A)P(F|A)P(G|B, C) \\
 &= \sum_A \sum_C \sum_D P(G|B, C)P(A)P(B|A)P(C|A)P(D|A)P(E|A) \sum_F P(F|A) \\
 &= \sum_A \sum_C \sum_D P(G|B, C)P(A)P(B|A)P(C|A)P(D|A)P(E|A)m_F(A) \\
 &= \sum_A \sum_C P(G|B, C)P(A)P(B|A)P(C|A)P(E|A)m_F(A) \sum_D P(D|A) \\
 &= \sum_A \sum_C P(G|B, C)P(A)P(B|A)P(C|A)P(E|A)m_F(A)m_D(A) \\
 &= \sum_A P(A)P(B|A)P(E|A)m_F(A)m_D(A) \sum_C P(G|B, C)P(C|A) \\
 &= \sum_A P(A)P(B|A)P(E|A)m_F(A)m_D(A)m_C(A, B, G) \\
 &= m_A(B, E, G) \propto P(B|G, E)
 \end{aligned}$$

(ج) در بخش الف سائز بزرگ‌ترین فاکتور، ۵ است ولی در بخش ب سائز بزرگ‌ترین فاکتور، ۳ است؛ پس ترتیب بخش ب بهتر است.

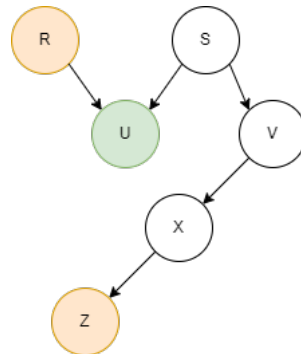
۵. (۲۵ نمره) با توجه به شکل زیر و با استفاده از D-Separation، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. در صورت نادرست بودن، یک مسیر معتبر بین دو متغیر تصادفی بنویسید.



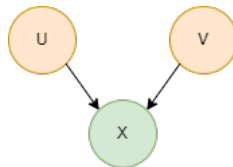
- $R \perp\!\!\!\perp Z|U$  (آ)  
 $U \perp\!\!\!\perp V|S, X$  (ب)  
 $W \perp\!\!\!\perp Y|S$  (ج)  
 $W \perp\!\!\!\perp Y|U, V$  (د)  
 $W \perp\!\!\!\perp T|U, X, Z$  (ه)

حل.

(آ) غلط،

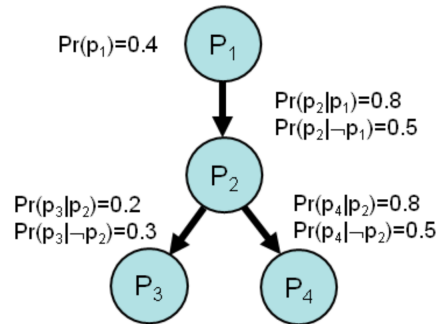


(ب) غلط،



- (ج) درست، زیرا تمامی مسیرهای بین W و Y غیرفعال‌اند.  
 (د) درست، زیرا تمامی مسیرهای بین W و Y غیرفعال‌اند.  
 (ه) درست، زیرا تمامی مسیرهای بین T و W غیرفعال‌اند.

۶. (۲۰ نمره) فرض کنید می‌خواهیم برای محاسبه احتمال شرطی  $Pr(P_1|P_2, \neg P_3)$  در شبکه بی‌ز داده‌شده، از روش تقریبی استفاده کنیم. فرض کنید جدول زیر، خروجی یک uniform random generator در بازه  $(0, 1)$  باشد.



| $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$    |
|-------|-------|-------|-------|----------|
| 0.255 | 0.506 | 0.699 | 0.890 | 0.959    |
| $r_6$ | $r_7$ | $r_8$ | $r_9$ | $r_{10}$ |
| 0.547 | 0.138 | 0.149 | 0.257 | 0.840    |

با فرض استفاده از نمونه‌های بالا، محاسبات را با سه روش Likelihood Weighting، Rejection Sampling و Gibbs Sampling انجام داده و مزایا و معایب هر یک از روش‌ها را بررسی کنید.

حل.

#### • Rejection Sampling

$$r_1 < 0.4 \rightarrow p_1 = T, r_2 < 0.8 \rightarrow p_2 = T, r_3 > 0.2 \rightarrow p_3 = F, r_4 > 0.8 \rightarrow p_4 = F \rightarrow S_1 = TTFF$$

$$r_5 > 0.4 \rightarrow p_1 = F, r_6 > 0.5 \rightarrow p_2 = F \rightarrow \text{Reject}$$

$$r_7 < 0.4 \rightarrow p_1 = T, r_8 < 0.8 \rightarrow p_2 = T, r_9 > 0.2 \rightarrow p_3 = F, r_{10} > 0.8 \rightarrow p_4 = F \rightarrow S_2 = TTFF$$

$$r_{11} < 0.4 \rightarrow p_1 = T, r_{12} > 0.8 \rightarrow p_2 = F \rightarrow \text{Reject}$$

$$r_{13} > 0.4 \rightarrow p_1 = T, r_{14} < 0.5 \rightarrow p_2 = T, r_{15} > 0.2 \rightarrow p_3 = F, r_{16} < 0.8 \rightarrow p_4 = T \rightarrow S_3 = FTFT$$

$$r_{17} > 0.4 \rightarrow p_1 = F, r_{18} > 0.8 \rightarrow p_2 = F \rightarrow \text{Reject}$$

با  $r_{19}, r_{20}$  هم نمی‌توان sample ساخت.

$$P(p_1 = T | p_2 = T, p_3 = F) = \frac{2}{3}$$

$$P(p_1 = F | p_2 = T, p_3 = F) = \frac{1}{3}$$

$$w = 1, r_1 < \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = T, w = 1 \times \cdot/\mathfrak{A} \times \cdot/\mathfrak{A} = \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}, r_2 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = T \rightarrow$$

$$TTFT, w = \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$w = 1, r_2 > \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = F, w = 1 \times \cdot/\mathfrak{D} \times \cdot/\mathfrak{A} = \cdot/\mathfrak{F}, r_3 > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = F \rightarrow$$

$$FTFF, w = \cdot/\mathfrak{F}$$

$$w = 1, r_3 > \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = \mathfrak{F}, w = 1 \times \cdot/\mathfrak{D} \times \cdot/\mathfrak{A} = \cdot/\mathfrak{F}, r_4 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = T \rightarrow$$

$$FTFT, w = \cdot/\mathfrak{F}$$

$$w = 1, r_4 < \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = T, w = 1 \times \cdot/\mathfrak{A} \times \cdot/\mathfrak{A} = \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}, r_5 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = T \rightarrow$$

$$TTFT, w = \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$r_1 < \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = T, r_{1.} > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = FTFF, \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$r_{11} < \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = T, r_{12} > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = FTFF, \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$r_{12} > \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = F, r_{13} < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = TTFT, \cdot/\mathfrak{F}$$

$$r_{13} > \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = F, r_{14} < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = TTFT, \cdot/\mathfrak{F}$$

$$r_{14} > \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = F, r_{15} > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = FTFF, \cdot/\mathfrak{F}$$

$$r_{15} < \cdot/\mathfrak{F} \rightarrow p_1 = T, r_{1.} < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow p_2 = TTFT, \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}$$

$$P(p_1 = T | p_2 = T, p_3 = F) = \frac{\mathfrak{D} \times \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F}}{\mathfrak{D} \times \cdot/\mathfrak{F}\mathfrak{F} + \mathfrak{D} \times \cdot/\mathfrak{F}} = \cdot/\mathfrak{F}1\mathfrak{D}$$

$$P(p_1 = F | p_2 = T, p_3 = F) = \cdot/\mathfrak{F}8\mathfrak{D}$$

$$TTFT \rightarrow \text{resample } P_1 : P(p_1 = T | p_2 = T, p_3 = F, p_4 = T) = \cdot/\mathfrak{D}1$$

$$\rightarrow r_1 < \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : P(p_2 = T | p_1 = T, p_3 = T, p_4 = F) = \cdot/\mathfrak{A}$$

$$\rightarrow r_2 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = T \rightarrow TTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_1 : P(p_1 = T | p_2 = T, p_3 = F, p_4 = T) = \cdot/\mathfrak{D}1$$

$$\rightarrow r_2 > \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = F \rightarrow FTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : P(p_2 = T | p_1 = F, p_3 = T, p_4 = F) = \cdot/\mathfrak{A}$$

$$\rightarrow r_2 > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = F \rightarrow FTFF$$

$$\rightarrow \text{resample } P_1 : \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow r_3 > \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = F \rightarrow FTFF$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow r_4 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = T \rightarrow FTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_1 : \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow r_4 < \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow r_5 < \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = T \rightarrow TTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_1 : \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow r_1 < \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFT$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow r_{1.} > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = F \rightarrow TTFF$$

$$\rightarrow \text{resample } P_1 : \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow r_{11} < \cdot/\mathfrak{D}1 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFF$$

$$\rightarrow \text{resample } P_2 : \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow r_{12} > \cdot/\mathfrak{A} \rightarrow P_2 = F \rightarrow TTFF$$

$\rightarrow \text{resample } P_1 : 0.51 \rightarrow r_{13} > 0.51 \rightarrow P_1 = F \rightarrow FTFF$   
 $\rightarrow \text{resample } P_2 : 0.8 \rightarrow r_{14} < 0.8 \rightarrow P_2 = T \rightarrow FTFT$   
 $\rightarrow \text{resample } P_1 : 0.51 \rightarrow r_{15} > 0.51 \rightarrow P_1 = F \rightarrow FTFT$   
 $\rightarrow \text{resample } P_2 : 0.8 \rightarrow r_{16} < 0.8 \rightarrow P_2 = T \rightarrow FTFT$   
 $\rightarrow \text{resample } P_1 : 0.51 \rightarrow r_{17} < 0.51 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFT$   
 $\rightarrow \text{resample } P_2 : 0.8 \rightarrow r_{18} > 0.8 \rightarrow P_2 = F \rightarrow TTFF$   
 $\rightarrow \text{resample } P_1 : 0.51 \rightarrow r_{19} < 0.51 \rightarrow P_1 = T \rightarrow TTFF$   
 $\rightarrow \text{resample } P_2 : 0.8 \rightarrow r_{20} < 0.8 \rightarrow P_2 = T \rightarrow TTFT$

$$P(p_1 = T | p_2 = T, p_3 = F) = \frac{12}{20} = 0.6$$

$$P(p_1 = F | p_2 = T, p_3 = F) = 0.4$$

مزایا و معایب:

#### • Rejection Sampling

- مزایا: نمونه‌های ناکارآمد ذخیره نمی‌کند همچنین از prior sampling با یک تعداد مشخص ran-dom number می‌تواند نمونه‌های بیشتری تولید کند.
- معایب: تعداد نمونه‌هایی که دور می‌ریزد، نسبتاً زیاد است.

#### • Likelihood Weighting

- مزایا: نمونه‌ای دور ریخته نمی‌شود، همچنین نسبت به rejection sampling به ازای یک تعداد مشخص random number، نمونه‌های بیشتری تولید می‌کند.
- معایب: به روابط و همبستگی میان نمونه‌ها و شواهد فیکس شده، توجهی ندارد.

#### • Gibbs Sampling

- مزایا: نمونه‌برداری متنوع است و در آن روابط بین نمونه‌ها و شواهد لحاظ می‌شود.
- معایب: بصورت کلی که معایب خاصی ندارد ولی می‌توان به بیشتر بودنِ نسبیِ زمان اجرای آن اشاره کرد.