پاسخ بخش جست‌وجوی محلی

۱.

الف) اگر گره‌های گراف را از ۱ تا n شماره‌گذاری کنیم، دور همیلتونی دوری است که از یک گره شروع، از همه‌ی راس‌ها گذشته و به همان گره بازگردد. پس یک راس دلخواه (در اینجا راس ۱) را انتخاب کرده و به عنوان مبدا و مقصد انتخاب می‌کنیم و در رشته‌ها به طور ضمنی در نظر می‌گیریم. در این صورت رشته‌ی DNA یک جایگشت n-1 حرفی از رئوس ۲ تا n است که در آن هر راس تنها یک بار آمده‌است. پس اگر رشته‌ی n برابر با ۳ باشد و رشته‌ی DNA انتخاب شده ۲۳ باشد به این معنی است که یک دور همیلتونی به صورت ۱<۲<۳<۱ داریم.

تابع fitness بررسی می‌کند هر راس i به راس i+1 یال دارد یا خیر. پس اگر تابع

```
edge_exist(node1, node2):
        1 if graph[node1][node2] else 0
```

تعریف شود (در صورت وجود یال یک و در غیر این صورت صفر بازمی‌گرداند)، تابع fitness به این صورت تعریف می‌شود:

```
fitness(DNA):
        return edge_exist(1, DNA[0]) +      → به علت وجود ۱ حذف شده در ابتدای رشته
                  sum([edge_exist(DNA[i][i+1]for i in range(n-2)]) +
                 edge_exist(DNA[n-2], 1) → به علت وجود ۱ حذف شده در انتهای رشته
```

ب) ابتدا جمعیت رندومی از جایگشت‌های متفاوت اعداد ۲تا n ایجاد می‌کنیم. این می‌شود جمعیت اولیه. سپس برای سلکشن روی هر عضو جمعیت fitness را محاسبه می‌کنیم و براساس fitness بیشتر نسل برتر را انتخاب می‌کنیم.

در مرحله‌ی cross over باید حواسمان باشد که رشته‌های ایجاد شده نباید راس تکراری داشته‌باشند. برای این کار عدد رندومی به عنوان cutoff بین ۲ و n انتخاب می‌کنیم (در اینجا k). گره‌های ۲ تا k را از والد اول انتخاب می‌کنیم و در index خودشان قرار می‌دهیم. بعد در والد دوم با گره‌های k+1 تا n فضاهای خالی را پر می‌کنیم.

- مثال:

n=7

parent1: 2 4 5 3 6 7

parent2: 3 6 4 7 5 2

cutoff: 4

=> child: _ _ _ _ _ _ → 2 4 _ 3 _ _→ 2 4 6 3 7 5

برای mutation تنها کافی است جای دو گره را در جایگشت عوض کنیم.

پاسخ بخش فضای پیوسته

.۱

الف)

- $$f(\alpha y+(1-\alpha)x)\leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x) \rightarrow f(\alpha(y-x)+x)\leq \alpha(f(y)-f(x))+f(x)$$
$$\rightarrow f(y)-f(x)\geq \lim_{\alpha\rightarrow 0}\frac{f(\alpha(y-x)+x)-f(x)}{\alpha} \rightarrow f(y)\geq f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)$$

- (تیلور)

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2 \quad , \quad f(y)\geq f(x)+f'(x)(y-x)$$

اثبات برای n=1 انجام شد، تعمیمf باید در همه‌ی خطوط محدب باشد.

$$\rightarrow g(\alpha)=f(x_0+\alpha v) \quad \rightarrow \quad g''(\alpha)=v^T\nabla^2 f(x_0+\alpha v)v\geq 0$$

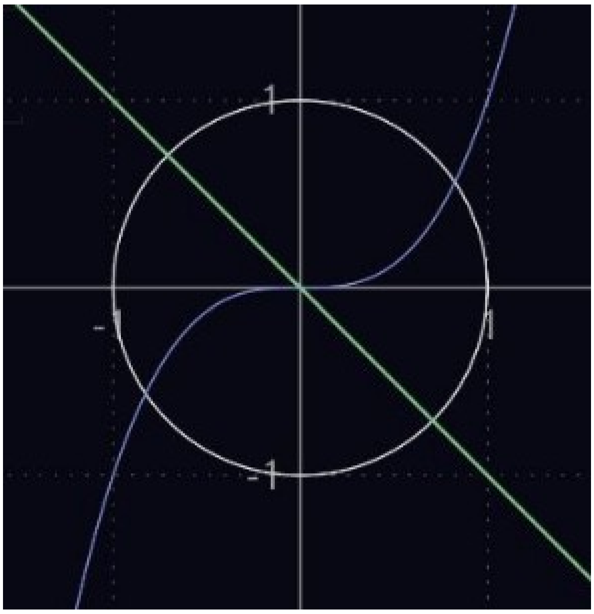
ب)

- می‌توان از مشتق تابع استفاده کرد.

$$f''(x)=e^x>0$$

از آن‌جایی که در همه‌جا مثبت است، تابع محدب است.

- زمانی convex است که با وصل کردن نقاط خطوط ایجاد شده در محیط قرار بگیرد. از لحاظ هندسی این مسأله واضح است:



ج)

$$f(x)=3x^2+6x^2 \quad \rightarrow \quad f''(x)=6x+6 \quad \rightarrow \quad 6x+6>0 \quad \rightarrow \quad x>-1$$

د)

$$\sigma'(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x)) \quad \rightarrow \quad \sigma''(x)=\sigma(x)(1-\sigma(x))^2-\sigma(x)^2(1-\sigma(x))$$
$$\rightarrow =(1-\sigma(x))\sigma(x)[1-2\sigma(x)]=(1-\sigma(x))\sigma(x)\frac{x+e^{-x}-1}{1+e^{-x}}$$
$$e^{-x}-1>0 \quad \rightarrow \quad x\in[-\infty,0]$$