دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

هوش مصنوعی

پاییز ۱۴۰۰
استاد: محمدحسین رهبان

امتحان میان‌ترم

- زمان در نظر گرفته شده برای نوشتن پاسخ ۱۸۰ دقیقه و برای آپلود آن ۲۰ دقیقه است. بنابراین مهلت پاسخ به سوالات تا ساعت ۲۰ : ۱۷ پنجشنبه ۸ اردیبهشت است. هیچ ارسالی پس از این زمان پذیرفته نخواهد شد.
- هر گونه همفکری ممنوع بوده و پاسخ شما باید کاملا حاصل تفکر و نگارش خودتان باشد.
- امتحان به صورت کتاب و اینترنت باز است، با این حال جواب همه سوالات باید به بیان خودتان بوده و مشاهده مشابهت‌های غیرعادی به عنوان تقلب در نظر گرفته خواهد شد. همچنین منابع استفاده شده برای پاسخ‌دهی به هر یک از سوال‌ها (در صورت وجود) باید مشخصا ذکر شود.
- لطفا تصویری واضح از پاسخ سوالات خود بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.
- توجه کنید که بخشی از ثبت پاسخ سوال آخر در گوگل‌فرم صورت می‌گیرد.

  لینک گوگل فرم

سوالات (۵۰ نمره)

۱. (۹ نمره) سوالات کوتاه پاسخ

(آ) درستی یا نادرستی عبارت «یک معیار ارزیابی [۱]، با ارزیابی دنباله‌ای از وضعیت‌های عامل [۲]، منطقی بودن [۳] عامل را بررسی می‌کند» را با ذکر دلیل مشخص کنید. (۱/۵ نمره)

(ب) درستی یا نادرستی گزاره مقابل را با ذکر دلیل مشخص کنید: اگر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی محدب باشد و a و b عضو دامنه f باشند، به طوری که $a < b$ باشد، نامساوی زیر برقرار است: (۱/۵ نمره)

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

(ج) آیا به ازای هر $k > ۰$ الگوریتم جست‌وجو A^* با تابع اکتشافی [۴] $h(n) = k$ تضمین می‌کند که جواب بهینه را برگرداند؟ توضیح دهید. (۱/۵ نمره)

(د) درستی یا نادرستی گزاره مقابل را با ذکر دلیل مشخص کنید: مقدار اولیه دما در الگوریتم Simulated Annealing تاثیری در همگرایی الگوریتم ندارد. (۱/۵ نمره)

(ه) حداکثر تعداد دفعاتی که الگوریتم جستجوی Backtracking ممکن است در یک CSP با ساختار درختی مجبور به Backtrack شود، در صورتی که از Arc Consistency و ترتیب بهینه‌ای از متغیرها استفاده کند، چقدر است؟ توضیح دهید. (۱/۵ نمره)

(و) آیا استفاده از الگوریتم Minimax و هرس آلفا_بتا [۵] در بازی منچ عملی منطقی است؟ چرا؟ (۱/۵ نمره)

---

[۱] Performance Measure
[۲] Agent
[۳] Rationality
[۴] Heuristic Function
[۵] Alpha-Beta Pruning

حل.

(آ) نادرست. طبق صفحه‌ی ۳۷ کتاب مرجع، معیار ارزیابی باید دنباله‌ای از وضعیت‌های **محیط** را ارزیابی کند. در صورتی که معیار ارزیابی بر روی وضعیت‌های عامل تعریف شود، عامل می‌تواند با فرض این که همه‌ی حرکاتش بهترین حالت است، به رفتار کاملا منطقی از نظر خودش برسد.

(ب) درست است، کافی است در نامساوی $Jensen$ قرار دهید:

$$\theta = \frac{b - x}{b - a}$$

(ج) درست. زیرا ترتیب رأس‌های درون فرینج با اضافه شدن یک k به آن‌ها عوض نمی‌شود.

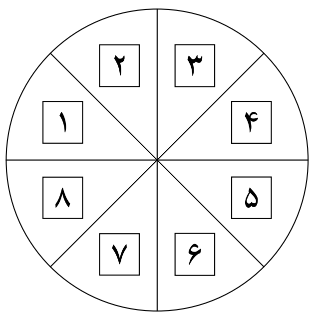
(د) نادرست است، ممکن است به ازای مقدار نامناسب، سرعت افت T سریع‌تر از $\frac{C}{\log n}$ شود.

(ه) صفر، اعمال arc consistency روی یک CSP با ساختار درختی تضمین می‌کند که اگر مقداردهی متغیرها از ریشه شروع شده و به سمت برگ‌ها برود، نیازی به backtrack نیست.

(و) خیر، زیرا بخش زیادی از این بازی با توجه به بخت و با استفاده از تاس پیش می‌رود و در چنین حالاتی مینی‌مکس انتخابی منطقی نیست و چون هرس آلفابتا هم در چارچوب مینی‌مکس بررسی می‌شود، نمی‌توانیم آن را به کار بگیریم.

۲. (۱۲ نمره)

یک بازی به نام مارپیچ داریم که روی یک دایره که به $2n$ قسمت مساوی تقسیم شده است انجام می‌شود. هر قسمت این دایره را از ۱ تا $2n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. در شکل زیر فضای بازی برای n برابر با ۴ را مشاهده می‌کنید:



در این بازی n مهره متمایز داریم که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و هر کدام در ابتدا در یکی از خانه‌های دایره قرار گرفته‌اند. در یک خانه بیش از یک مهره نمی‌تواند قرار بگیرد. برای هر مهره، یک خانه‌ی مقصد متمایز داریم که از ابتدا مشخص شده است و هدف بازی این است که با کم‌ترین هزینه همه‌ی مهره‌ها را در خانه‌ی مقصد خود قرار دهیم.

در هر مرحله هر مهره به طور مستقل از سایر مهره‌ها می‌تواند یکی از حرکات زیر را انجام دهد:

- با یک واحد هزینه به خانه‌ی سمت راست خود برود.
- با یک واحد هزینه به خانه سمت چپ خود برود.
- با دو واحد هزینه به خانه روبروی خود برود.
- بدون صرف هزینه در جای خود بماند.

همچنین اگر دو مهره در مجاورت هم باشند، هر کدام علاوه بر حرکات بالا می‌توانند با صرف یک واحد هزینه، از روی مهره‌ی دیگر بپرند و به خانه‌ی بعد از مهره‌ی دیگر بروند. یعنی اگر مهره اول روی خانه‌ی i ام و مهره‌ی دوم روی خانه‌ی $i+1$ ام باشد، در مرحله‌ی بعد مهره‌ی اول مستقل از این که برای مهره‌ی دوم چه حرکتی انتخاب می‌شود، می‌تواند به خانه‌ی $i+2$ نیز برود.

دقت کنید هزینه‌ی هر کنش برابر مجموع هزینه‌ای که برای جابه‌جا کردن هر مهره در آن کنش صرف شده است، می‌شود. همچنین همه‌ی حرکات به طور هم‌زمان انجام می‌شود. به طور مثال اگر دو مهره در مجاورت هم باشند، در مرحله‌ی بعدی این امکان وجود دارد که هر کدام به جای یک‌دیگر بروند و مشکلی از جهت این که در یک خانه بیش از دو مهره قرار بگیرد به وجود نمی‌آید. اما اگر یکی از آن‌ها بخواهد در مرحله‌ی بعد در جای خود بماند، مهره‌ی دیگر نمی‌تواند به آن خانه برود.

با توجه به توضیحات بالا به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) با استفاده از یک مجموعه، حالت‌های این مسئله را نشان دهید. (۲ نمره)

(ب) تعداد حالت‌های فضای مسئله را به دست آورید و نحوه‌ی به دست آوردن این تعداد را به طور مختصر توضیح دهید. (۲ نمره)

(ج) بهترین کران بالایی را که می‌توانید برای ضریب انشعاب [۶] این مسئله پیدا کنید، بنویسید و به طور مختصر آن را توضیح دهید. (۲ نمره)

(د) فرض کنید برای حل این مسئله تابع اکتشافی h را برابر «مجموع فواصل هر مهره تا جایگاه خود» تعریف کنیم. با ذکر استدلال قابل‌قبول [۷] و همچنین یکنوا [۸] بودن این تابع را بررسی کنید. (۳ نمره)

(ه) یک تابع اکتشافی غیربدیهی، غیر از تابع ذکر شده در قسمت قبل، برای این مسئله تعریف کنید که قابل‌قبول و یکنوا باشد. ذکر استدلال برای قابل‌قبول و یکنوا بودن الزامی است. (۳ نمره)

حل.

(آ) شماره خانه‌ای از دایره که مهره‌ی i ام در آن قرار دارد را با x_i نشان می‌دهیم. در این صورت حالت‌های مسئله به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$\{(x_1, ..., x_n) | \forall i \in \{1, ..., n\} : x_i \in \{1, ..., 2n\} \wedge \nexists i, j \in \{1, ..., n\} : i \neq j \wedge \ x_i = x_j\}$

(ب) با توجه به این که در هر خانه یک مهره می‌تواند قرار بگیرد، برای مهره‌ی اول، $2n$ حالت، برای مهره‌ی دوم، $2n-1$ حالت و به همین ترتیب برای مهره‌ی i ام $2n-(i-1)$ حالت وجود دارد. در نتیجه حالت‌های موجود در فضای مسئله برابر با $\frac{(2n)!}{n!}$ است.

(ج) هر مهره در حالت عادی چهار حرکت دارد. در حالتی که در هر کدام از دو خانه‌ی مجاور یک مهره، مهره‌ی دیگری قرار داشته باشد، آن مهره دو حرکت بیشتر خواهد داشت. پس بیشترین تعداد حرکت قابل انجام برای یک مهره در یک مرحله برابر با ۶ خواهد بود. چون تعداد کل مهره‌ها n تا است و هر کدام به طور مستقل می‌توانند حرکت کنند، پس یک کران‌بالا برای ضریب انشعاب برابر با 6^n خواهد بود.

(د) این تابع اکتشافی قابل‌قبول نیست. برای قابل‌قبول بودن لازم است که مقدار تابع در یک حالت، از هزینه‌ی واقعی آن تا حالت هدف، کم‌تر باشد. اما به طور مثال اگر n را مطابق شکل صورت سوال برابر ۴ در نظر گرفته و حالتی را مد نظر قرار دهیم که چهار مهره به ترتیب در خانه‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ قرار داشته‌باشند و خانه‌ی هدف آن‌ها به ترتیب ۵، ۶، ۷ و ۸ باشد، مقدار تابع اکتشافی در این حالت برابر با $۴ \times ۴ = ۱۶$ خواهد بود در حالی که اگر در یک مرحله همه‌ی مهره‌ها را به خانه‌ی روبروی خود ببریم با هزینه‌ی $۴ \times ۲ = ۸$ می‌توانیم به هدف برسیم. هم چنین این تابع یکنوا نیز نیست چون هر تابع یکنوا حتما قابل‌قبول است.

---
[۶] Branching Factor
[۷] Admissible
[۸] Monotone

(ه) تابع اکتشافی در هر حالت را برابر تعداد مهره‌هایی می‌گیریم که سر جای خود قرار ندارند.

این تابع قابل‌قبول است چرا که هزینه‌ی رساندن هر مهره که در جایگاهش قرار ندارد، به جایگاه خود حداقل برابر یک است. در نتیجه مقدار تابع اکتشافی کم‌تر مساوی هزینه‌ی واقعی است.

هم چنین این تابع یکنوا است چرا که اگر از استیت s به t برویم و k مهره‌ی جدید با این حرکت در جای خود قرار بگیرند، به ازای هر کدام حداقل ۱ واحد هزینه را صرف کرده‌ایم. یعنی اگر هزینه‌ی رفتن از استیت s به t با حرکت a را با $c(s, a, t)$ نشان دهیم، آن گاه:

$k \leq c(s, a, t)$

$h(s) = h(t) + k \leq h(t) + c(s, a, t)$

که همان شرط یکنوایی است.

در واقع این یک راه‌حل برای حالت ریلکس‌شده‌ی مسئله است که در آن هر مهره می‌تواند از هر خانه به هر خانه‌ی دیگر با هزینه‌ی یک برود.

۳. (۶ نمره)

۳ جمعیت زیر از یک الگوریتم ژنتیک را درنظر بگیرید:

(a) 01010000 10000001

(b) 10010000 01000001

(c) 01010000 10100001

جمعیت (b) از روی جمعیت (a) تولید شده‌است؛ توجه کنید که در این بازتولید، فرآیند Crossover پس از رقم دوم رخ داده‌است. جمعیت (c) نیز از جهش بر روی جمعیت (a) حاصل شده‌است؛ توجه کنید که رشته‌ی دوم جهش یافته‌است. حال فرض کنید که تابع ارزیابی این الگوریتم، تعداد ۱ های موجود در رشته باشد. با این فرض به موارد زیر پاسخ دهید.

(آ) بیشینه‌ی Fitness هریک از جمعیت‌ها را بیان کنید. (۳ نمره)

(ب) آیا نقطه‌ی بهتری برای فرآیند Crossover رخداده به منظور تولید جمعیت (b) وجود دارد؟ اگر بله، این نقطه کجاست و چرا بهتر است؟ دقت کنید اگر چند نقطه‌ی بهتر موجود باشد، باید محل همه‌ی آن‌ها را در پاسخ خود ذکر کنید. (۳ نمره)

حل.

(آ) بیشینه‌ی $fitness$ برای جمعیت‌های مختلف به شرح زیر است:

(a) 2

(b) 2

(c) 3

(ب) بله، نقطه‌ی بهتر برای شروع فرآیند $crossover$ بعد از رقم اول، بعد از رقم چهارم، بعد از رقم پنجم، بعد از رقم ششم و بعد از رقم هفتم می‌تواند باشد؛ چون با آغاز فرآیند $crossover$ از این نقاط، بیشینه‌ی $fitness$ برای جمعیت (b) بجای ۲، ۳ خواهد شد.

۴. (۱۲ نمره)
در مورد تحدب توابع به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) تحدب توابع زیر را نشان دهید: (هر مورد ۳ نمره)

i.

$$f(x) = x \ln x$$
$$x \in (۰, \infty)$$

ii.

$$g(x) = ||Ax - b||^۲$$
$$x \in \mathbb{R}^n, A_{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

(ب) در مورد تابع زیر به سوالات داده شده پاسخ دهید.

$$f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \frac{۱}{e^{\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x}}}$$

که در آن $\mathbf{w}$ یک بردار ثابت ۳×۱ است و T نماد ترانهاده است.

i. الگوریتم Gradient Descent را با نقطه شروع $\mathbf{x} = [۴, ۵, ۹]$ و $\mathbf{w} = [۰, ۰/۰۴, ۰/۰۹]$ تا دو مرحله اجرا کنید. پارامتر α را ۱۰ در نظر بگیرید. توجه کنید مقدار $\mathbf{w}$ ثابت است و $\mathbf{x}$ باید آپدیت شود. (۳ نمره)

ii. آیا تابع f محدب است؟ توضیح دهید. (۳ نمره)

حل.

(آ) i. ابتدا توجه می‌کنیم که تابع f بر روی یک دامنه‌ی محدب تعریف شده‌است و از آنجایی که بر روی این دامنه دو بار مشتق‌پذیر نیز هست، پس نامنفی بودنِ مشتق دوم آن را در سراسر دامنه‌اش بررسی می‌کنیم:

$$f^{'}(x) = ۱ + \ln x \to f^{"}(x) = \frac{۱}{x} > ۰ : \forall x > ۰$$

پس این تابع محدب است.

ii. در این قسمت باید ماتریس $Hessian$ تابع g را محاسبه کنیم، داریم:

$$\nabla g(x) = ۲(Ax - b)^T A$$
$$D_{g(x)} = A^T A : \qquad \forall x \in R^n$$

از آنجایی که مشتق دوم تابع g یعنی همان $D_{g(x)}$ مثبت نیمه‌معین است، پس تابع g محدب است.

(ب) i. با مشتق‌گیری در هر جهت داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{-۱}{(۱ + e^{w^T \cdot x})^۲}(e^{w^T \cdot x} \cdot w_i)$$

که منظور از x_i، مولفه iام بردار x است. با دو بار اجرای الگوریتم

$$x = x - \alpha \times \nabla(x)$$

داریم

$$x_1 = [۴, ۵/۰۷۸۳, ۹/۱۷۶۱]$$

$$x_2 = [۴, ۵/۱۵۵۹, ۹/۳۵۰۷]$$

ii. خیر محدب نیست. با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید که تابع محدب است. برای برای هر دو نقطه x, y و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y)$$

از طرفی

$$f(-x) = \frac{۱}{۱+\frac{۱}{e^{w^T \cdot x}}} = ۱ - f(x)$$

در نتیجه چون داریم

$$f(\lambda(-x) + (۱-\lambda)(-y)) \leq \lambda f(-x) + (۱-\lambda)f(-y)$$

نتیجه می‌دهد

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y)$$

یعنی

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y)$$

قرار دهید

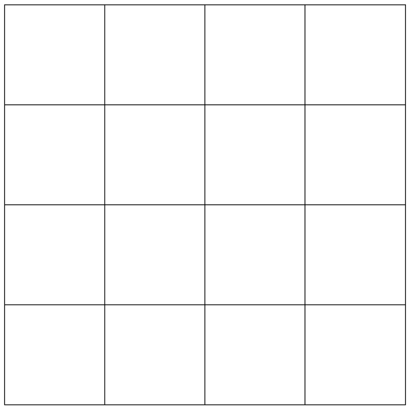
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = f([۰, ۰, x])$$

در این صورت g، یک تابع خطی است و در نتیجه به فرم $zx + b$. اما اگر $z \neq ۰$ در آن صورت g می‌تواند به اندازه دلخواه بزرگ شود در حالی که f همواره بین ۰ و ۱ است (چون e^x همواره مثبت است). در نتیجه $z = ۰$. پس g ثابت است. این هم ممکن نیست زیرا در ۰ مقدارش $\frac{۱}{۲}$ است و با میل دادن x به بی‌نهایت، مقدار g به ۰ میل می‌کند. پس فرض خلف اشتباه است و تابع محدب نیست.

۵. (۵ نمره)

برای بازگشایی کلاس‌های دانشگاه نیاز داریم دستورالعمل‌های بهداشتی را رعایت کنیم. برای این کار باید فاصله‌های بین‌فردی حداقل ۲ متر باشد و هر نفر باید حداقل دو دوز واکسن زده باشد و با ماسک به دانشگاه بیاید. حال فرض کنید بخواهیم n دانشجو را در یک کلاس بنشانیم. این شرایط را به صورت یک Constraint Satisfaction Problem (CSP) مدل‌سازی کنید و متغیرها و دامنه‌هایشان و قیدهای موجود را در حالت کلی مشخص کنید.

با فرض اینکه هر دانشجو در یک نقطه جا می‌گیرد و هر نقطه از کلاس (داخل یا حاشیه شکل) قابل استفاده است، اگر بخواهیم ۸ نفر را در یک کلاس ۴ متر در ۴ متر بنشانیم یک چینش معتبر را برای این حالت روی نقشه‌ی کلاس مشخص کنید.

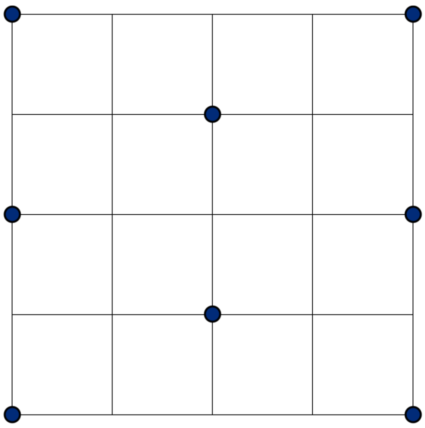


حل.

در حالت کلی می‌توانیم به ازای هر فرد (فرد iام) چهار متغیر X_i و Y_i و M_i و V_i را در نظر بگیریم که به ترتیب نماینده‌ی طول و عرض مکان دانشجو نسبت به یک مبدا، ماسک داشتن دانشجو و تعداد دزهای واکسن دانشجو هستند. دو متغیر اول هر مقدار حقیقی‌ای می‌توانند داشته باشند اما متغیر سوم یک متغیر Boolean است و می‌تواند ۱ یا ۰ باشد. متغیر چهارم هم می‌تواند اعداد طبیعی و صفر را در خود داشته باشد، هر چند مقدار معقول، بین ۰ تا ۳ است. در ادامه قیدها می‌آیند.

$$\forall i, j : \sqrt{(X_i - X_j)^{۲} + (Y_i - Y_j)^{۲}} \geq ۲$$
$$\forall i : M_i = ۱$$
$$\forall i : V_i \geq ۲$$

یک چینش معتبر برای ۸ دانشجو که ماسک زده‌اند و حداقل دو دوز واکسن زده‌اند به صورت زیر است.



۶. (۶ نمره)

درخت بازی رسم شده در صفحه بعد را در نظر بگیرید. راس ریشه از نوع بیشینه‌کننده [۹] است. به کمک روش هرس آلفا_بتا [۱۰] و با بررسی رئوس هر ردیف از چپ به راست، مقادیر آلفا و بتا را در هر راس محاسبه کنید و سپس مقدار نهایی هر راس را هم بدست آورید. همچنین باید یال‌های هرس شده را هم مشخص کنید.

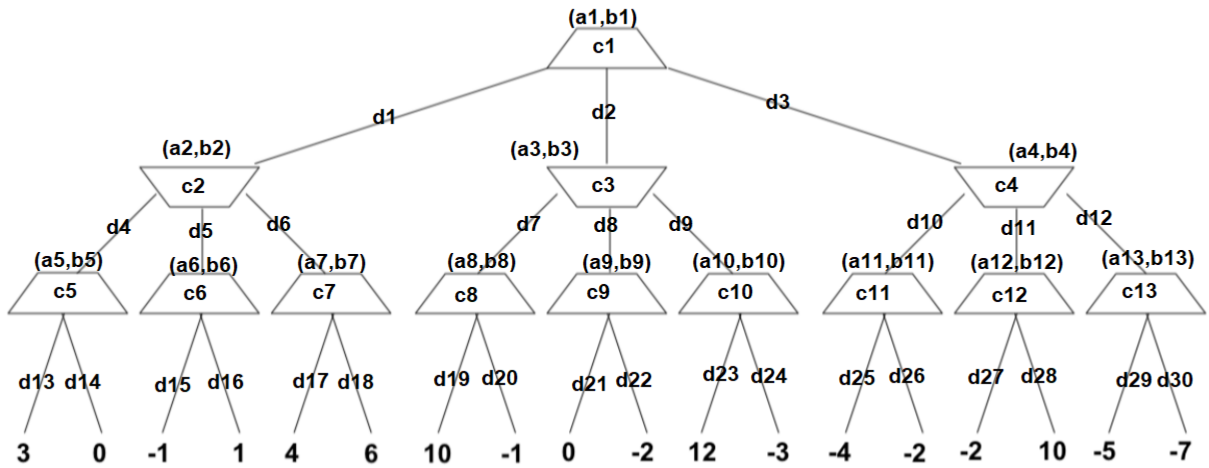
[۹] maximizer
[۱۰] Alpha-Beta Pruning

برای ثبت جواب این سوال، باید از گوگل فرم استفاده کنید. بدین شکل که برای هر راس در گوگل فرم، قسمتی به صورت a_i, b_i, c_i قرار داده شده است. a_i بیانگر مقدار α برای آن راس، b_i بیانگر مقدار β برای آن راس و c_i بیانگر مقدار درون آن راس است. در صورتی که آن راس هرس شده بود، مقادیر را به صورت `x,x,x` وارد کنید. برای وارد کردن بی‌نهایت هم `inf` یا `-inf` بنویسید.

همچنین در نهایت باید یال‌هایی که هرس شده‌اند را هم مشخص کنید. براساس حرف d_i که کنار هر یال نوشته شده، برای یال‌های هرس شده باید گزینه‌های مربوط به آن‌ها را در بخش مشخص شده در فرم علامت بزنید.

لینک گوگل فرم

توجه کنید که همچنان باید راه‌حل خود برای این سوال را به همراه سایر سوالات در کوئرا هم ارسال کنید.



حل.

در شکل زیر مقادیر آلفا و بتای هر راس بالای آن بصورت (alpha،beta) نوشته شده‌است. همچنین مقادیر روی یال‌ها نشان می‌دهند که چه مقادیری از آلفا و بتا بعد از کاوش زیر درخت مربوطه، به راس بعدی انتقال پیدا می‌کنند.