



هوش مصنوعی

پاییز ۱۴۰۱

استاد: محمدحسین رهبان

گردآورندگان: سروش جهان زاد

مهلت ارسال: ۱۶ دی

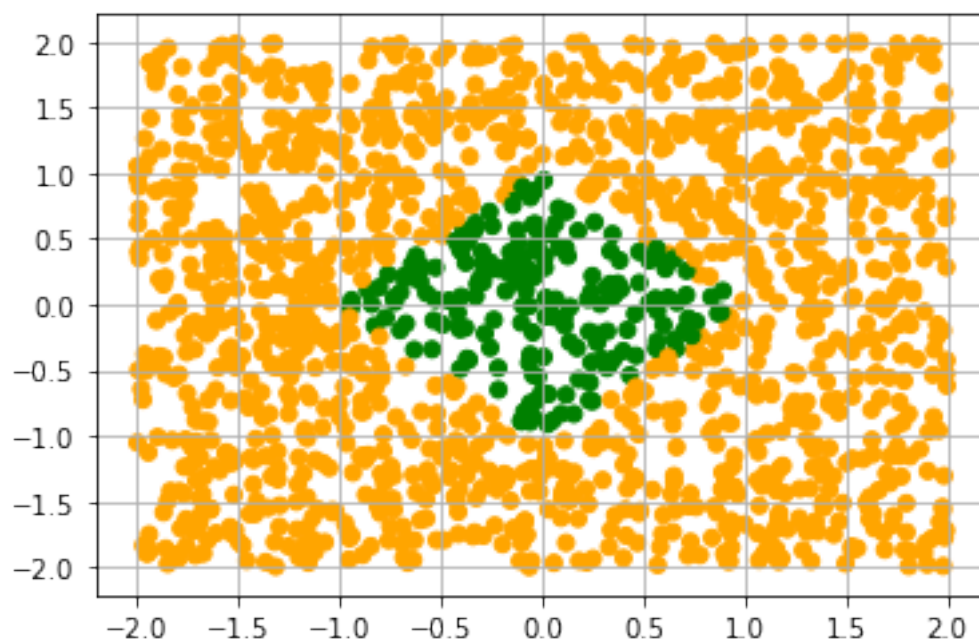
شبکه‌های عصبی

پاسخ تمرین پنجم

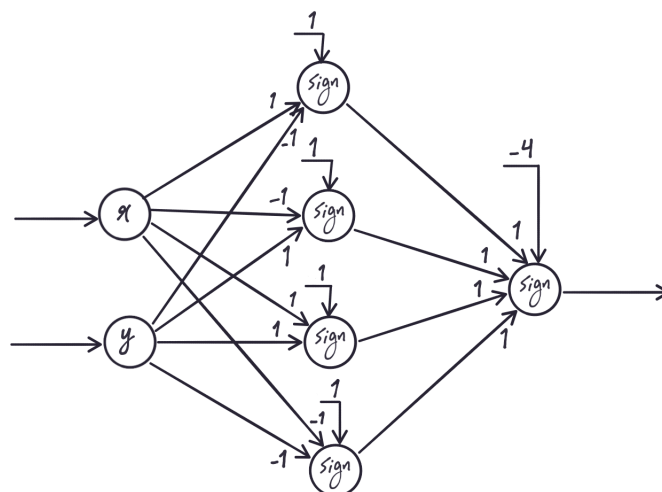
- مهلت ارسال پاسخ تا ساعت ۲۳:۵۹ روز مشخص شده است.
- در طول ترم امکان ارسال با تاخیر پاسخ همه‌ی تمارین تا سقف ۱۰ روز و در مجموع ۲۰ روز، وجود دارد. پس از گذشت این مدت، پاسخ‌های ارسال شده پذیرفته نخواهند بود. همچنین، به ازای هر روز تأخیر غیر مجاز ۱۰ درصد از نمره تمرین به صورت ساعتی کسر خواهد شد.
- هم‌کاری و هم‌فکری شما در انجام تمرین مانعی ندارد اما پاسخ‌های ارسال هر کس حتماً باید توسط خود او نوشته شده باشد.
- در صورت هم‌فکری و یا استفاده از هر منابع خارج درسی، نام هم‌فکران و آدرس منابع مورد استفاده برای حل سوال مورد نظر را ذکر کنید.
- لطفاً تصویری واضح از پاسخ سوالات نظری بارگذاری کنید. در غیر این صورت پاسخ شما تصحیح نخواهد شد.

سوالات نظری (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۶ نمره) چرا در شبکه‌های عصبی از تابع‌های اکتیویشن غیرخطی استفاده می‌کنیم؟ (به طور خاص اهمیت این موضوع برای شبکه‌های عصبی چند لایه چیست؟)
حل. توابع اکتیویشن غیرخطی به مدل اجازه می‌دهند بتواند شرایط پیچیده‌تر را هم یاد بگیرد و به حالت‌های خطی محدود نشود. اگر در شبکه‌ای چندلایه تنها از توابع خطی برای اکتیویشن استفاده کنیم در نهایت می‌توانیم آن‌ها را با یک پرسپترون تک‌لایه معادل جایگزین کنیم و پیچیدگی آن در همان حد خواهد بود.
۲. (۲۱ نمره) برای تشخیص داده‌های سبز از نارنجی در شکل زیر یک شبکه‌ی عصبی طراحی کنید.

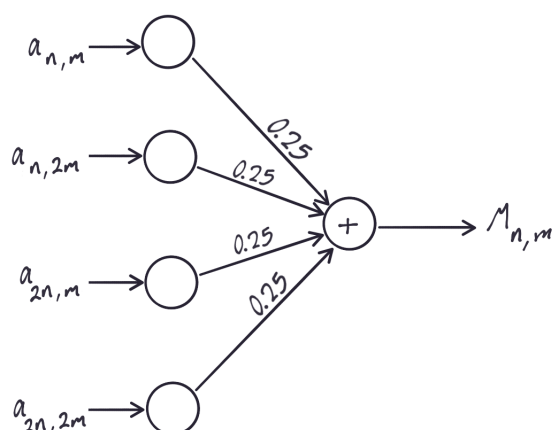


حل. در تصویر مشاهده می‌کنیم که اگر خط‌های $y = x + 1$ و $y = x - 1$ و $y = -x - 1$ و $y = -x + 1$ را در نظر بگیریم، داده‌هایی که در محدوده‌ی محصور بین این چهار خط قرار دارند باید سبز و بقیه‌ی داده‌ها باید نارنجی تشخیص داده شوند. بنابراین کافی‌است شبکه‌ای طراحی کنیم که با دریافت x و y برای هر نقطه ابتدا تشخیص دهد که آن نقطه کدام سمت هر کدام از این چهار خط قرار دارد و سپس اگر در سمت درست از تمام خط‌ها قرار داشت عدد ۱ به معنی سبز و در غیر این صورت عدد ۰ به معنی نارنجی را خروجی دهد. برای این کار می‌توانیم شبکه‌ی زیر را در نظر بگیریم. (ورودی‌ها پس از جمع شدن با یکدیگر به تابع اکتیویشن داده می‌شوند).

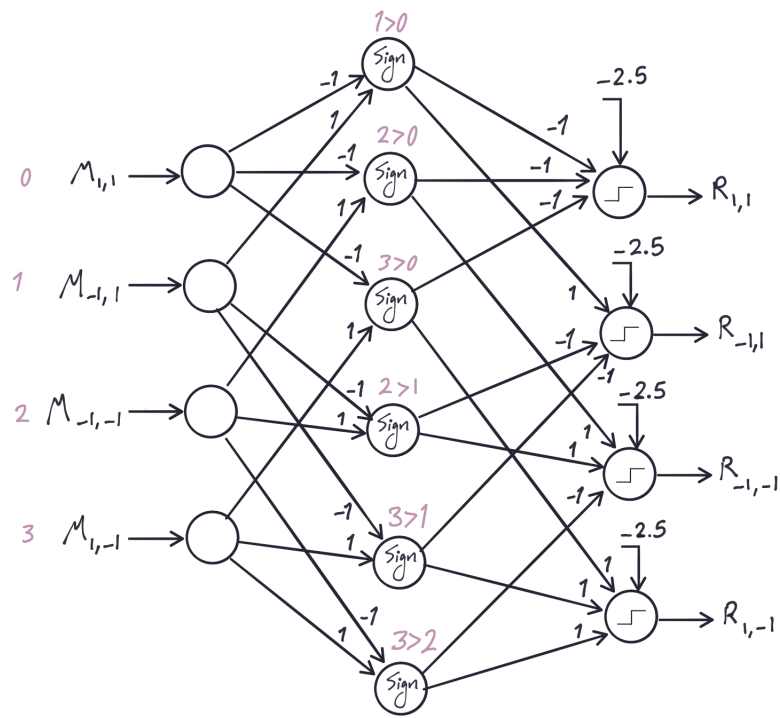


۳. (۲۱ نمره) یک نمایشگر با ابعاد ۴ پیکسل در ۴ پیکسل را در نظر بگیرید. فرض کنید مبدا مختصات را در وسط این نمایشگر قرار دهیم و آن را به چهار محدوده‌ی چهار پیکسلی تقسیم کنیم. مقدار روشنایی هر پیکسل می‌تواند بین ۰ و ۱ داشته باشد. یک شبکه‌ی عصبی طراحی کنید که محدوده‌ی با بیشترین میانگین روشنایی پیکسل‌ها را مشخص کند (نیازی به در نظر گرفتن حالتی که تساوی پیش بیاید نیست).

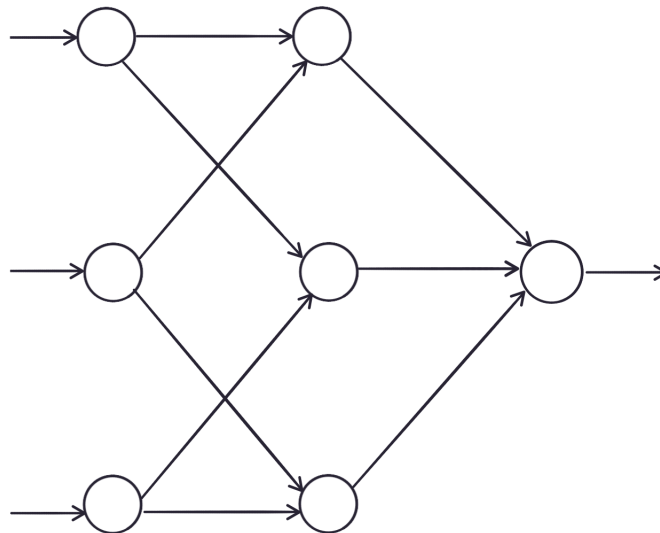
حل. فرض کنید مقدار مربوط به پیکسل سطر i ام و ستون j ام را با $a_{i,j}$ نمایش دهیم. می‌توانیم میانگین هر محدوده را با ساختاری مانند شکل زیر به دست بیاوریم.



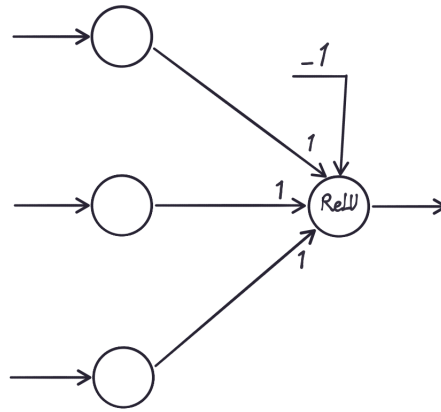
حال می‌توانیم با ساختار زیر به یک بردار one-hot برسیم که محدوده‌ی مدنظر را مشخص می‌کند. توجه کنید که تابع اکتیویشن طبقه‌ی میانی و نهایی به ترتیب تابع $sign$ و پله (Heaviside) هستند. (ورودی‌ها پس از جمع شدن با یکدیگر به تابع اکتیویشن داده می‌شوند).



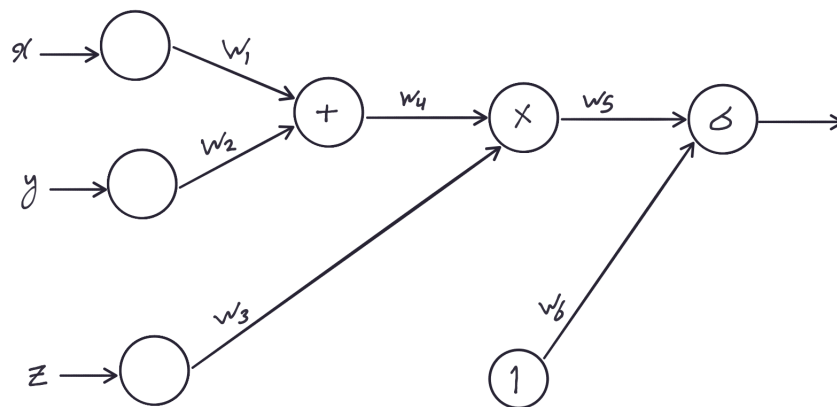
۴. (۲۱ نمره) شبکه‌ی زیر یک تابع بولین را (که هر ورودی آن می‌تواند مقدار ۰ یا ۱ را داشته باشد) شبیه‌سازی کرده است. تمامی وزن‌ها برابر ۱ هستند. خروجی نورون‌های لایه‌ی میانی و پایانی به ترتیب از اعمال تابع‌های $f(x) = \lfloor \frac{x}{4} \rfloor$ و $g(x) = \lceil \frac{x}{4} \rceil$ روی مجموع ورودی‌ها به دست می‌آید. تابع بولین پیاده‌سازی شده را به دست بیاورید و در صورت امکان شبکه‌ی ساده‌تری برای آن ارائه کنید.



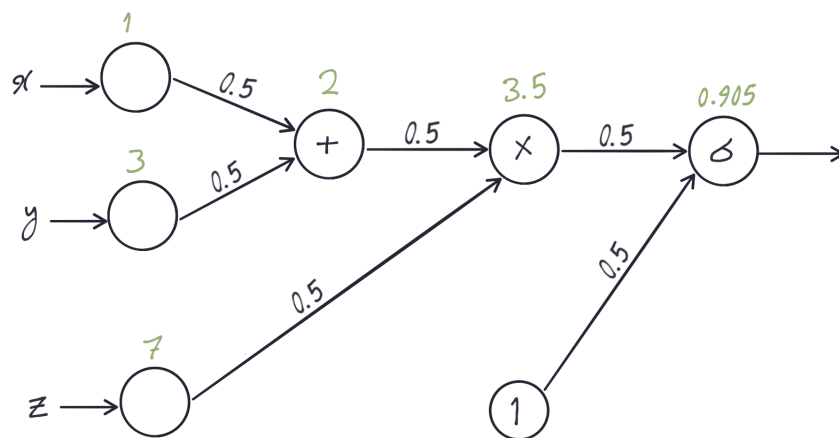
حل. این شبکه تابع اکثریت را پیاده‌سازی می‌کند. تصویر زیر یک شبکه‌ی ساده‌تر برای این تابع ارائه می‌دهد. (ورودی‌ها پس از جمع شدن با یکدیگر به تابع اکتیویشن داده می‌شوند.)



۵. (۲۱ نمره) یک دور از محاسبات رو به جلو (feed forward) و رو به عقب (backpropagation) را برای شبکه‌ی زیر انجام دهید. در ابتدا همه‌ی وزن‌ها برابر $\frac{1}{4}$ هستند و داریم $x = 1, y = 3, z = 7$. تابع موجود در نورون نهایی تابع سیگموئید است. (پیشنهاد می‌شود درباره‌ی مشتق تابع سیگموئید جست‌وجو کنید.)



حل. اعداد حاصل پس از محاسبات رو به جلو مطابق تصویر زیر خواهند بود.



محاسبات رو به عقب به صورت زیر هستند. فرض کنید ورودی نهایی تابع سیگموئید که از جمع دو ورودی

شکل به دست می‌آید را با a نمایش بدهیم. همچنین فرض کنید خروجی نوروں‌ها را با حرف z_i نمایش دهیم که i متناظر با w_i ای است که در آن ضرب می‌شوند.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a} = \sigma(1 - \sigma) = 0.086$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\varphi}} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_{\varphi}} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} = 0.086$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\delta}} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial w_{\delta}} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} \times 3/5 = 0.301$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z_{\delta}} = \frac{\partial \sigma}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial z_{\delta}} = 0.086 \times 0.5 = 0.043$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\varphi}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_{\delta}} \frac{\partial z_{\delta}}{\partial w_{\varphi}} = 0.043 \times z_{\varphi} \times z \times w_{\varphi} = 0.301$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\varphi}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_{\delta}} \frac{\partial z_{\delta}}{\partial w_{\varphi}} = 0.043 \times z_{\varphi} \times z \times w_{\varphi} = 0.301$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z_{\varphi}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_{\delta}} \frac{\partial z_{\delta}}{\partial z_{\varphi}} = 0.043 \times w_{\varphi} \times w_{\varphi} \times z = 0.043 \times 3/5 \times 0.5$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\gamma}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_{\varphi}} \frac{\partial z_{\varphi}}{\partial w_{\gamma}} = 0.043 \times 3/5 \times 0.5 \times y = 0.226$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w_{\gamma}} = \frac{\partial \sigma}{\partial z_{\varphi}} \frac{\partial z_{\varphi}}{\partial w_{\gamma}} = 0.043 \times 3/5 \times 0.5 \times x = 0.075$$