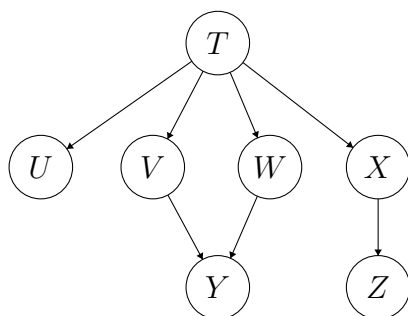




سوالات (۱۰۰ نمره)

۱. (۵۰ نمره) با توجه به شبکه بیزی زیر، بگویید استقلال شرطی در کدام یک از موارد زیر برقرار است و در صورت برقرار نبودن، همه ی مسیرهای فعال موجود در گراف را بیان کنید.



(آ)  $U \perp\!\!\!\perp X$

(ب)  $U \perp\!\!\!\perp X \mid T$

(ج)  $V \perp\!\!\!\perp W \mid Y$

(د)  $V \perp\!\!\!\perp W \mid T$

حل.

(آ) تضمین نمی شود. مسیر  $U - T - X$  فعال است.

(ب) تضمین می شود.

(ج) تضمین نمی شود. مسیرهای  $V - Y - W$  و  $V - T - W$  فعال هستند.

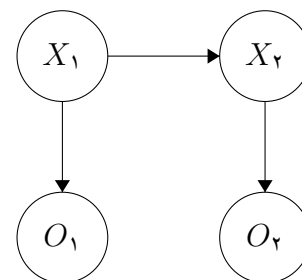
(د) تضمین می شود.

۲. (۵۰ نمره) مدل HMM زیر را در نظر بگیرید:

$X_1$	$P(X_1)$
0	0.3
1	0.7

$X_t$	$X_{t+1}$	$P$
0	0	0.4
0	1	0.6
1	0	0.8
1	1	0.2

$X_t$	$O_t$	$P(O_t X_t)$
0	A	0.9
0	B	0.1
1	A	0.5
1	B	0.5



که  $O_t$  ها مقادیر مشاهده شده هستند. می خواهیم به صورت گام به گام، توزیع  $P(X_2|O_1 = A, O_2 = B)$  را به دست بیاوریم.

(آ) توزیع  $P(X_1, O_1 = A)$  را به دست بیاورید (یعنی به ازای مقادیر مختلف  $X_1$  مقدار این احتمال را محاسبه کنید).

(ب) از قسمت قبل استفاده کنید و توزیع  $P(X_2, O_1 = A)$  را به دست بیاورید.

(ج) از نتیجه ی قسمت قبل استفاده کنید و توزیع  $P(X_2, O_1 = A, O_2 = B)$  را به دست بیاورید.

(د) در نهایت به کمک قسمت قبل، توزیع مد نظر یعنی  $P(X_2|O_1 = A, O_2 = B)$  را محاسبه کنید (نیازی به ساده کردن پاسخ نهایی نیست).

حل.

(أ)

$$\begin{aligned}P(X_1, O_1 = A) &= P(X_1)P(O_1 = A|X_1) \\P(X_1 = 0, O_1 = A) &= (0.3)(0.9) = 0.27 \\P(X_1 = 1, O_1 = A) &= (0.7)(0.5) = 0.35\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}P(X_2, O_1 = A) &= \sum_{x_1} P(x_1, O_1 = A)P(X_2|x_1) \\P(X_2 = 0, O_1 = A) &= (0.27)(0.4) + (0.35)(0.8) = 0.388 \\P(X_2 = 1, O_1 = A) &= (0.27)(0.6) + (0.35)(0.2) = 0.232\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}P(X_2, O_1 = A, O_2 = B) &= P(X_2, O_1 = A)P(O_2 = B|X_2) \\P(X_2 = 0, O_1 = A, O_2 = B) &= (0.388)(0.1) = 0.0388 \\P(X_2 = 1, O_1 = A, O_2 = B) &= (0.232)(0.5) = 0.116\end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned}P(X_2 = 0|O_1 = A, O_2 = B) &= 0.0388 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.25 \\P(X_2 = 1|O_1 = A, O_2 = B) &= 0.116 / (0.0388 + 0.116) \approx 0.75\end{aligned}$$