



آزمون میان‌ترم

- زمان در نظر گرفته شده برای آزمون ۱۵۰ دقیقه است.
- لطفاً پاسخ‌های خود را خوانا و خوش‌خط بنویسید.
- پاسخ هر سوال باید در یک برگه‌ی جداگانه نوشته شود. بالای هر برگه‌ی پاسخ‌نامه، نام و شماره دانشجویی خود را به صورت واضح بنویسید. دقت کنید که برگه‌های هر سوال برای تصحیح از سایر برگه‌ها جدا خواهند شد؛ در نتیجه مسئولیت عدم دریافت نمره در اثر نوشتن پاسخ یک سوال در کنار سوال دیگر و یا نبود مشخصات بر روی برگه بر عهده‌ی خودتان خواهد بود.

سوالات (۱۰۰ نمره)

۱. (۱۶ نمره) به سوالات زیر به طور مختصر پاسخ دهید:

- (آ) درستی یا نادرستی عبارت روبرو را با ذکر دلیل مشخص کنید: «می‌توان انتظار داشت نتیجه‌ی اجرای جستجوی Local Beam با پارامتر $k = 8$ تفاوت چندانی با نتیجه‌ی اجرای ۸ اجرای موازی الگوریتم Hill Climbing نداشته باشد.»
- (ب) اگر در الگوریتم Simulated Annealing به جای انتخاب یک فرزند بدتر به احتمال $e^{-\frac{\Delta E}{T}}$ که در آن ΔE تفاوت ارزش فرزند و حالت کنونی و T دما است، از یک تابع مستقل از ΔE مثل $e^{-\frac{1}{T}}$ استفاده کنیم، و دما را مثل قبل کاهش دهیم، عملکرد الگوریتم بهتر می‌شود یا بدتر؟ با ذکر دلیل توضیح دهید.
- (ج) درستی یا نادرستی عبارات روبرو را با ذکر دلیل مشخص کنید: «اگر در گراف محدودیت‌هایمان در مسئله CSP فقط یک دور وجود داشته باشد می‌توانیم مسئله را در زمان چندجمله‌ای حل کنیم.»
- (د) درستی یا نادرستی عبارت روبرو را با ذکر دلیل مشخص کنید: «هرس آلفا بتا همیشه همان مقدار minimax را برای ریشه درخت به‌دست می‌آورد.»

حل.

- (آ) نادرست؛ در جستجوی local-beam در هر مرحله غربال میان تمام اطرافیان در یک مرحله انجام می‌شود. این به این معنی است که اگر یکی از نمونه‌ها وضعیت بهتری از بقیه داشته باشد، بقیه‌ی نمونه‌ها هم به همان سمت می‌روند، در حالی که در اجرای موازی، نتیجه‌ی جستجوها به هم وابسته نیست. به طور مثال، این مسئله می‌تواند در فضاهایی با مقادیر اپتیمال محلی زیاد منجر به متمرکز شدن نتایج در یک ناحیه در جستجوی local-beam شود.
- (ب) الگوریتم حالا تفاوتی بین یک افت کوچک و یک افت بزرگ قائل نمی‌شود. این مسئله در دماهای نسبتاً پایین که انتظار داریم الگوریتم بین چاله‌های کوچک جابجا شود مشکل‌ساز می‌شود و می‌تواند باعث شود الگوریتم از چاله‌های بزرگ هم خارج شود و به این ترتیب عملکرد کاهش دما با کیفیت کمتری انجام می‌شود.
- (ج) درست؛ کافی است به یک راس در دور را در نظر بگیریم. اگر به این راس یک مقدار مجاز بدهیم مسئله به درخت تبدیل می‌شود که می‌توانیم آن را در زمان چندجمله‌ای حل کنیم. کافیت مسئله را به ازای تمام مقادیر مجاز راس بدین شکل حل کنیم تا به جواب برسیم و یا بفهمیم جواب وجود ندارد.

(د) درست؛ زیرا هرس آلفا بتا تمام راس‌هایی که بر مقدار نهایی تأثیر نمی‌گذارند را حذف می‌کند تا سرعت الگوریتم افزایش یابد. بنابراین، مقدار نهایی ریشه تغییری نخواهد کرد.

۲. (۱۵ نمره) رومئو تلاش دارد تا $K > 0$ نامه از ژولیت را در یک باغ بزرگ پیدا کند. باغ را می‌توان به صورت یک مستطیل $M \times N$ در نظر گرفت. رومئو در یکی از خانه‌های این مستطیل قرار دارد و در هر گام می‌تواند به یکی از چهار جهت شمال، جنوب، شرق و غرب حرکت کند. مکان این نامه‌ها ثابت است و رومئو در صورت قرار گرفتن در خانه‌ای که در آن نامه قرار دارد، آن نامه را دریافت می‌کند. متأسفانه به علت باد شدیدی که از سمت شمال می‌وزد، رومئو نهایتاً می‌تواند دو بار به سمت شمال حرکت کند.

(آ) کران بالایی مناسبی برای اندازه فضای مسئله برحسب N و M و K بدست بیاورید. کران شما باید تا حد ممکن کوچک باشد.

(ب) حال فرض کنید رومئو برای پیدا کردن نامه‌ها از T تا از دوستانش کمک گرفته است. همه‌ی دوستان رومئو مانند وی می‌توانند در هر گام به یکی از چهار جهت شمال، جنوب، شرق و غرب حرکت کنند و به علت باد شدید نمی‌توانند بیشتر از دو حرکت به سمت شمال داشته باشند. در این حالت کوچک‌ترین کران بالایی مناسب برای اندازه فضای مسئله برحسب N و M و K و T چیست؟

(ج) کوچک‌ترین کران بالایی ضریب انشعاب^۱ فضای مسئله در حالتی که رومئو از دوستانش کمک گرفته است را به دست آورید.

حل.

$$(I) \quad MN \times 2^K \times 3$$

MN حالت برای جای رومئو، 2^K حالت برای یک آرایه دودویی که نشان‌گر دریافت شدن آن‌ها توسط رومئو است و 3 حالت که مشخص می‌کند رومئو از چند حرکت مجاز خود رو به شمال استفاده کرده است. (صفر، یک یا دو)

توجه کنید با توجه به صورت سوال مکان نامه‌ها ثابت است و نیازی به در نظر گرفتن آن‌ها در فضای مسئله وجود ندارد.

$$(B) \quad (MN)^{T+1} \times 2^K \times 3^{T+1}$$

هر کدام از رومئو و دوستانش در هر کدام از MN خانه‌ی جدول می‌توانند قرار داشته باشند. برای هر کدام 3 حالت داریم که چند حرکت رو به شمال داشته‌اند. هم‌چنین باز هم نیاز به یک آرایه دودویی برای مشخص کردن نامه‌های دریافت شده داریم.

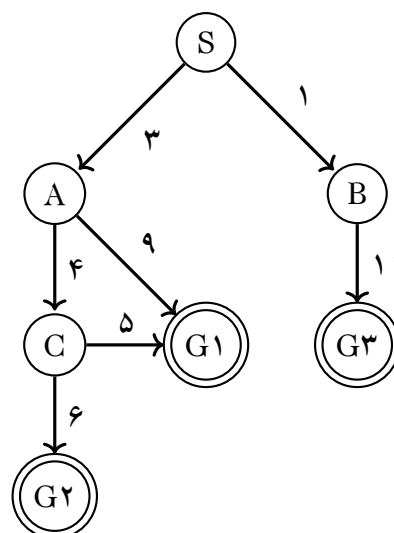
(ج) 4^{T+1} هر کدام از رومئو و دوستانش ما کسیم می‌توانند به چهار جهت حرکت کنند.

۳. (۱۵ نمره) گراف جست‌وجو و توابع اکتشافی^۲ زیر را در نظر بگیرید:

- فرض کنید الگوریتم A^* با تابع اکتشافی $H1$ برای رسیدن به هدف استفاده کنیم. فرض کنید اگر در هنگام جست‌وجو چند راس شرایط یکسان داشته باشند، یکی از آن‌ها به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. مشخص کنید کدامین حالت‌های هدف ممکن است توسط این الگوریتم پیدا شوند. توجه کنید مقدار تابع اکتشافی در رئوس هدف برابر صفر است.
- برای هر کدام از توابع اکتشافی $H1$ و $H2$ بررسی کنید که قابل قبول^۳ هستند یا خیر.

^۱ Branching Factor
^۲ Heuristic functions
^۳ Admissibility

C	B	A	S	
۱	۷	۷	۶	H1
۱	۷	۴	۱۳	H2



حل.

لیست باز	مسیر گسترش یافته
S-A (10), S-B (8)	S
S-A (10), S-B-G3 (12)	S-B
S-A-C (8), S-A-G1(12), S-B-G3 (12)	S-A
S-A-C-G2 (13), S-A-G1(12), S-B-G3 (12)	S-A-C

در این مرحله هر کدام از G1 و G3 ممکن است انتخاب شوند.

H1 •

این تابع قابل قبول است زیرا مقدار تابع برای همه‌ی رئوس نامنفی بوده و مقدار هیچ راسی از هزینه واقعی آن بیشتر نیست.

H2 •

این تابع قابل قبول نیست چون به ازای راس S مقدار تابع برابر ۱۳ است که از مقدار واقعی هزینه از این راس تا هدف که برابر ۱۲ است بیشتر می‌باشد.

۴. (۱۴ نمره) تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2} \quad \text{on} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$$

می‌خواهیم با استفاده از الگوریتم Gradient Descent کمینه‌ی این تابع را به دست آوریم. آیا با استفاده از این الگوریتم لزوماً به کمینه‌ی سراسری می‌رسیم؟ با ذکر استدلال پاسخ خود را توضیح دهید.

حل. محدب بودن تابع را بررسی می‌کنیم. برای این کار می‌توانیم از ماتریس هسین^۴ استفاده کنیم:

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = H = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

^۴Hessian matrix

این ماتریس را می‌توان به فرم $A^T A$ نوشت که در آن:

$$A = \sqrt{\frac{2}{x_2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-x_1}{x_2} \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$x^T H x = x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) \geq 0$$

پس این ماتریس نیمه معین مثبت^۵ می‌باشد. در نتیجه تابع محدب است و با استفاده از الگوریتم Gradient Descent همواره به کمینه‌ی سراسری می‌رسیم.

۵. (۱۵ نمره) در این سوال یک دور الگوریتم ژنتیک را بر روی ورودی‌های داده شده اعمال می‌کنیم. ورودی‌های ما رشته‌های ۶ بیتی از ۰ و ۱ هستند و تابع fitness به صورت زیر تعریف می‌شود.
(خروجی‌های توابع منطقی به صورت صفر و یک است.)

$$f(v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5) = \sum_{i=0}^5 v_i + AND(v_0, v_1) + OR(v_2, v_3) + XOR(v_4, v_5)$$

(آ) در این قسمت ابتدا fitness چهار نمونه زیر را به دست آورده و سپس احتمال انتخاب آن‌ها برای دور بعد را به دست آورده و دو موردی که بیش‌ترین احتمال را دارند، انتخاب کنید.

نمونه	fitness	احتمال انتخاب شدن
۰۰۱۰۱۱		
۱۰۱۱۱۰		
۱۱۱۰۱۱		
۱۱۰۰۱۱		

(ب) حال عمل crossover را بر روی دو نمونه منتخب بالا اجرا می‌کنیم. نقطه انجام crossover را بین بیت دوم و سوم فرض کنید و جدول زیر را کامل کنید.
(دقت کنید سطر اول نمونه با بیش‌ترین احتمال انتخاب و سطر بعد نمونه با دومین احتمال انتخاب بالا است و هم‌چنین قسمت راست بین سطرها جابه‌جا می‌شود.)

قبل از crossover	بعد از crossover

(ج) حال نوبت mutation است. فرض کنید احتمال mutation برابر ۰/۱ است و اعداد تصادفی زیر برای اندیس و احتمال mutation به دست آمده است. با توجه به این اعداد جدول زیر را کامل کنید. (دقت کنید که ترتیب سطرها مانند نتیجه قسمت (ب) است.)

نمونه اول:

احتمال: ۰/۰۵ و اندیس: ۳

نمونه دوم:

احتمال: ۰/۱۵ و اندیس: ۴

قبل از mutation	بعد از mutation

^۵Positive Semi-definite

حل. داریم:

$$f(v_0v_1v_2v_3v_4v_5) = \sum_{i=0}^5 v_i + AND(v_0, v_1) + OR(v_2, v_3) + XOR(v_4, v_5)$$

نمونه	fitness	احتمال انتخاب شدن
۰۰۱۰۱۱	۴	$\frac{4}{22}$
۱۰۱۱۱۰	۶	$\frac{6}{22}$
۱۱۱۰۱۱	۷	$\frac{7}{22}$
۱۱۰۰۱۱	۵	$\frac{5}{22}$

(آ)

در نتیجه دو مورد به صورت زیر خواهند بود.

۱۱۱۰۱۱
۱۰۱۱۱۰

(ب) داریم:

قبل از crossover	بعد از crossover
۱۱ ۱۰۱۱	۱۱ ۱۱۱۰
۱۰ ۱۱۱۰	۱۰ ۱۰۱۱

(ج) با توجه به اعداد داده شده، نمونه اول تغییر می‌کند زیرا عدد تولید شده آن بین صفر و احتمال mutate شدن است و نمونه دوم mutate نمی‌شود. داریم:

قبل از mutation	بعد از mutation
۱۱۱۱۱۰	۱۱۱۰۱۰
۱۰۱۰۱۱	۱۰۱۰۱۱

در نتیجه بعد از انجام این کارها دو نمونه نهایی به صورت زیر خواهند بود:

۱۱۱۰۱۰
۱۰۱۰۱۱

نکته: اگر در این قسمت اندیس‌ها با شروع از یک در نظر گرفته شده باشند، پاسخ به صورت زیر می‌شود:

۱۱۰۱۱۰
۱۰۱۰۱۱

۶. (۱۰ نمره) درخت minimax زیر را در نظر بگیرید.

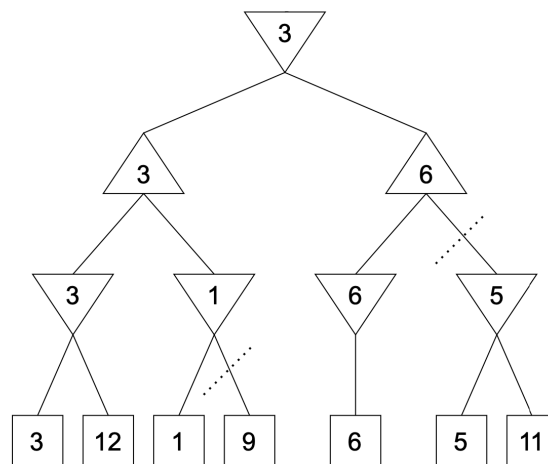
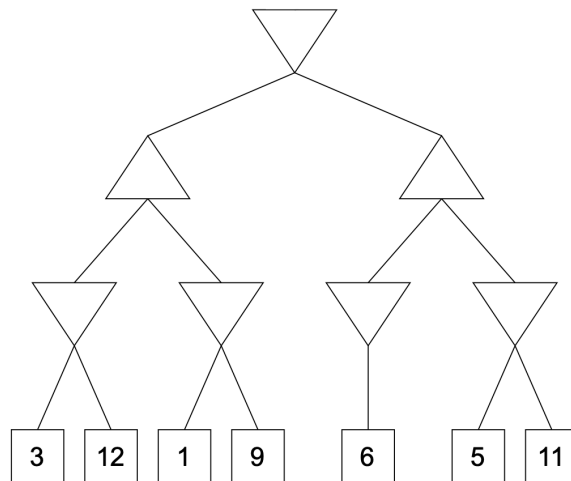
(آ) مقدار minimax ریشه را به دست آورید.

(ب) هرس آلفا بتا را اجرا کنید. فرض کنید که گره‌ها از چپ به راست بررسی می‌شوند.

حل.

(آ) مقدار ریشه با جایگذاری مقادیر و اعمال minimax برابر با ۳ خواهد بود.

(ب) مطابق شکل مقدار ۹ باید هرس شود چون در این نقطه $\alpha = 3$ و $1 < 3$ هست. شاخه نود مینیمم بین ۵ و ۱۱ هم باید هرس شود چون $\beta = 3$ و در این نقطه $6 > 3$ هست. راس ۵ دومی هم باید هرس شود چون در راس ریشه $\alpha = 3$ و $1 < 3$ است. در نهایت، ۸ می‌تواند هرس شود چون در این نقطه $\alpha = 3$ و $2 < 3$ است.



۷. (۱۵ نمره) دکتر آدام از شما برای درست کردن برنامه‌ی دروس ترم بعد کمک خواسته است. پنج کلاس و سه استاد داریم که هر کدام می‌توانند تعدادی از این دروس را ارائه دهند. زمان کلاس‌ها از قبل تعیین شده است و یک استاد نمی‌تواند در یک زمان دو کلاس را ارائه دهد. لیست کلاس‌ها عبارتند از:

- کلاس ۱ از ساعت ۸ تا ۹ صبح
- کلاس ۲ از ساعت ۸:۳۰ تا ۹:۳۰ صبح
- کلاس ۳ از ۹ تا ۱۰ صبح
- کلاس ۴ از ۹ تا ۱۰ صبح
- کلاس ۵ از ۹:۳۰ تا ۱۰:۳۰ صبح

همچنین شرایط اساتید برای ارائه دادن کلاس‌ها به صورت زیر است:

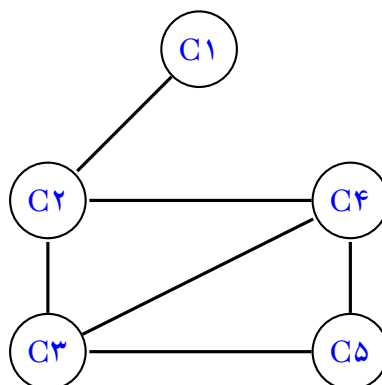
- استاد ۱ می‌تواند کلاس ۳ و ۴ را ارائه دهد.
- استاد ۲ می‌تواند کلاس ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را ارائه دهد
- استاد ۳ می‌تواند همه‌ی کلاس‌ها را ارائه دهد.

الف) مسئله را به عنوان یک csp مدل کنید. فرض کنید کلاس‌ها متغیرهای شما هستند.
 ب) گراف شرطها را برای مسئله بکشید.
 ج) آیا با مقداردهی به یکی از متغیرها می‌توان گراف شرطها را به یک درخت تبدیل کرد؟
 د) در صورتی که پاسخ شما به قسمت قبل مثبت بود بعد از تبدیل مسئله به درخت آن را با روش مخصوص حل CSPهای درخت مانند حل کنید. در غیر این صورت با اعمال Arc Consistency مسئله را حل کنید.

حل. الف) کلاس‌ها را به عنوان متغیر و اساتید را به عنوان دامنه متغیرها در نظر بگیرید. کافیت دامنه و شرطها را نیز مشخص کنیم.

$domain\ C1 = P3$
 $domain\ C2 = P2, P3$
 $domain\ C3 = P1, P2, P3$
 $domain\ C4 = P1, P2, P3$
 $domain\ C5 = P2, P3$
 $C1 \neq C2$
 $C2 \neq C3$
 $C2 \neq C4$
 $C3 \neq C4$
 $C3 \neq C5$
 $C4 \neq C5$

ب)



ج) بله با مقداردهی به کلاس ۳ یا ۴ مسئله به درخت تبدیل می‌شود.
 د) باید یکی از راس‌های ۳ و ۴ انتخاب شوند برای مثال راس ۴ را انتخاب می‌کنیم و استاد ۱ را به آن اساین می‌کنیم. سپس مسئله به درخت تبدیل می‌شود و جواب معتبر آن برابر است با:

$C1 = P3$
 $C2 = P2$
 $C3 = P3$
 $C4 = P1$
 $C5 = P2$

مسئله یک جواب معتبر دیگر به فرم

$C1 = P3$
 $C2 = P2$
 $C3 = P1$
 $C4 = P3$

$$C_5 = P_2$$

نیز دارد.