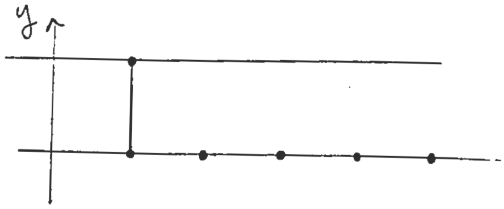
3) La funzione di Dirichlet

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q} \quad (\text{numeri razionali})\\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad (\text{numeri irrazionali})\end{cases} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$



È una funzione discontinua in ogni punto, perchè ci sono sempre dei salti quindi ha una discontinuità di prima specie.

Teoremi sulle funzioni continue

1) La somma (differenza) di due funzioni continue è una funzione continua.

Date $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in Dom(f)\cap Dom(g)$ un punto in cui entrambe le funzioni sono continue. Allora la somma $f+g$ (differenza $f-g$) è continua in x_0.

2) Il prodotto (o il quoziente) di due funzioni continue è una funzione continua

Date $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che sono continue in $x_0\in Dom(f)\cap Dom(g)$

$\Rightarrow f\cdot g \ \left(\frac{f}{g}\right)$ è continua in x_0.

3) La composizione di funzioni continue è una funziona continua.

Date $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che f è continua in $x_0\in Dom(f)$ e g è continua in $y_0=f(x_0)$. Allora $g\circ f$ è continua in x_0.

4) Teorema della permanenza del segno per le funzioni continue

Consideriamo una funzione $f:X\to\mathbb{R}$ continua in $x_0\in X$ e $f(x_0)>0$, allora esiste un intorno di x_0, $I(x_0)\subset X$, tale che $f(x)>0$ per ogni $x\in I(x_0)$.

Se $f(x_0)<0$, allora esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, t.c. $f(x)<0$, $\forall x\in I(x_0)$.

In altre parole, se una funzione f è continua in un punto $x_0\in Dom(f)$, allora esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$, in cui $f(x)$ assume lo stesso segno di $f(x_0)$. per $\forall x\in I(x_0)$.

Dim: Dalla definizione di continuità segue che $\forall\varepsilon>0$ esiste un intorno $I(x_0)$ t.c. se $x\in I(x_0)$ risulta,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

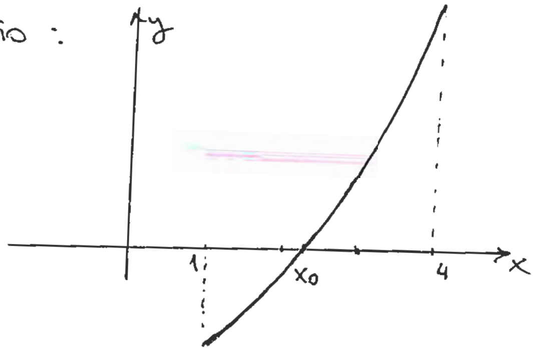
Se $f(x_0) > 0$, basta scegliere $\varepsilon = f(x_0)/2$ e la parte sinistra della doppia disuguaglianza fornisce $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \forall x \in I(x_0)$.

Se $f(x_0) < 0$, scegliendo $\varepsilon = -f(x_0)/2$, la parte destra della doppia disuguaglianza fornisce $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0, \ \forall x \in I(x_0)$.

5) Teorema degli zeri

Sia $y = f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ tale che assuma valori opposti negli estremi di tale intervallo, cioè, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Ad esempio:



Sia f continua in $[a,b]$

dove $a=1$ e $b=4$

$f(a) \cdot f(b) < 0$

$\exists x_0 \in (1,4), \ f(x_0) = 0$

(esiste un punto in cui il grafico di $f(x)$ attraversa l'asse delle ascisse)

In formule:

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ continua in } [a,b] \\ f(a) > 0 \ \wedge \ f(b) < 0, \\ \text{oppure} \\ f(a) < 0 \ \wedge \ f(b) > 0 \end{array}\right\} \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$$

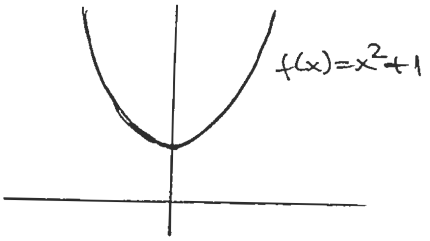
(∃ solo un punto x_0)

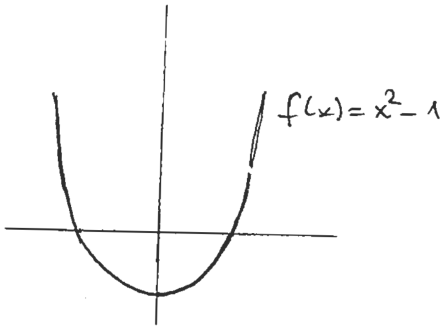
Osservazioni 1) Se la funzione $f(x)$ è monotona in $[a,b]$, lo zero è unico. Invece se non è monotona in $[a,b]$, x_0 non è necessariamente unico. Infatti, se $f(x)$ ha comportamento oscillante in $[a,b]$ nelle stesse ipotesi del teorema, $f(x)$ si può annullare più di una volta.

2) Il teorema non dice quante volte f si annulla in $[a,b]$, dice solo che ciò accade almeno una volta. Ad esempio, la funzione $f(x) = \cos(x)$ si annulla una sola volta in $(0, \pi)$, ma tre volte in $(0, 3\pi)$.

3) Nel caso $f(a) \cdot f(b) > 0$, non è possibile affermare nulla sugli eventuali zeri di f. Ad esempio, all'intervallo $[-2, 2]$, $f(x) = x^2 + 1$ soddisfa

$f(-2)\,f(2) = 25 > 0$, ed f non si annulla mai; invece, allo stesso intervallo, $f(x) = x^2 - 1$ soddisfa $f(-2)(2) = 9 > 0$ ma f si annulla due volte.

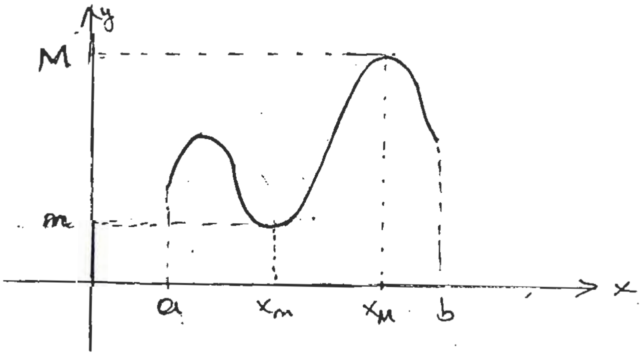


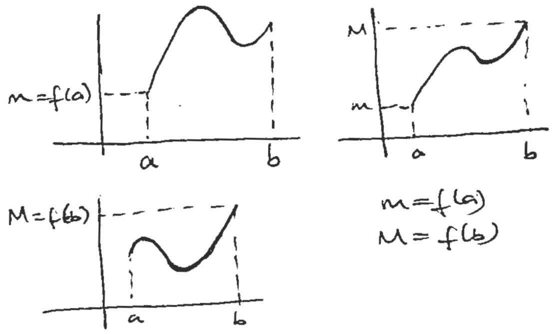


Concludiamo che se le ipotesi sono soddisfatte, allora la funzione ammette certamente almeno uno zero, però se le ipotesi non sono soddisfatte, non è detto che la funzione non ammetta comunque uno zero interno all'intervallo.

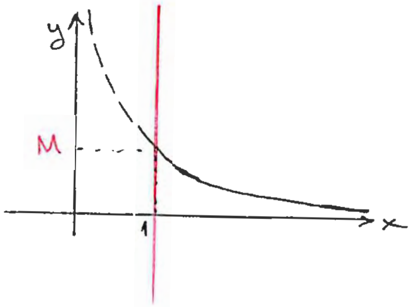
6) Teorema di Weierstrass

Sia $y=f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo (assoluti) in $[a,b]$, ossia, esistono $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $m=f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)=M$, $\forall x \in [a,b]$.





Osservazione: Affinché il teorema sia valido è fondamentale che l'intervallo $[a,b]$ sia chiuso e limitato. Infatti la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ in $[1,+\infty)$, che è chiuso ma non limitato, ammette massimo $M=1$, ma non ammette minimo.



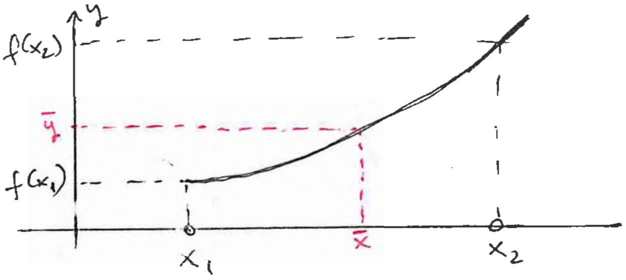
Altri esempi:

→ limitato ma non chiuso

1. $f(x)=x$ è continua in $(0,1]$, ma non assume minimo.
2. $f(x)=\frac{1}{x}$ è continua in $(0,1]$, ma non assume massimo

7) Teorema dei valori intermedi

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$ e siano $x_1 < x_2$ due punti di $[a,b]$, allora per ogni valore $\bar{y}$ tale che $f(x_1) < \bar{y} < f(x_2)$, esiste un punto $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$.

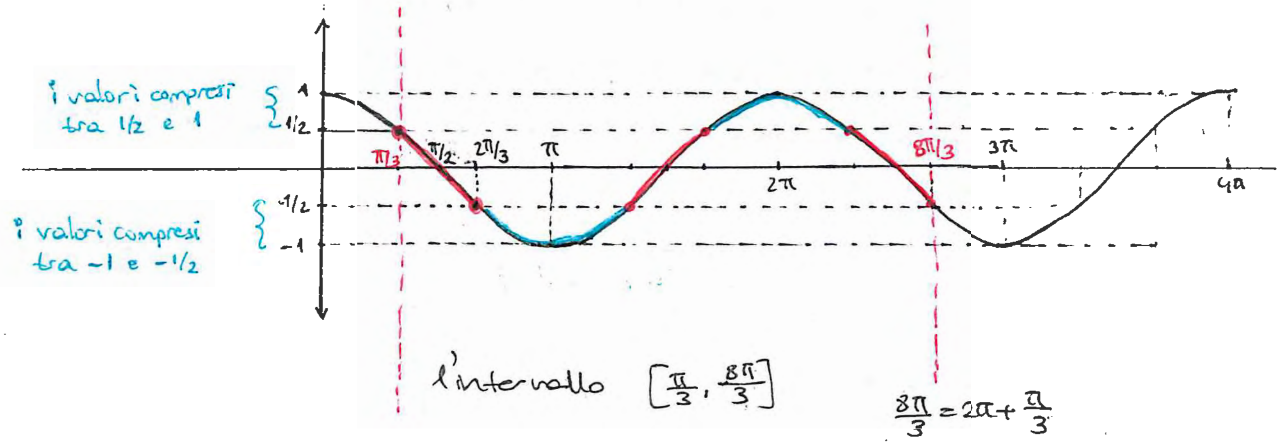


II° modo: $\forall \bar{y} \in (m, M)$, $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$

Osservazioni 1) Non si sostiene che f assume solo i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ (oppure $f(a)$ e $f(b)$), ma che almeno una volta tutti quei valori vengono assunti. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \cos(x)$ e l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, e quindi il teorema garantisce che tutti i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ vengono assunti da f quando x percorre l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.

Vale la pena osservare che in questo intervallo f assume tre volte i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ed assume anche tutti i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1 e tutti quelli compresi tra -1 e $-\frac{1}{2}$.

2) Dato che il teorema afferma che una funzione continua assume esattamente tutti i numeri compresi tra due valori assunti, possiamo dedurre che l'immagine di un intervallo $[a,b]$ è a sua volta un intervallo. In altri termini, una funzione continua manda intervalli in intervalli.



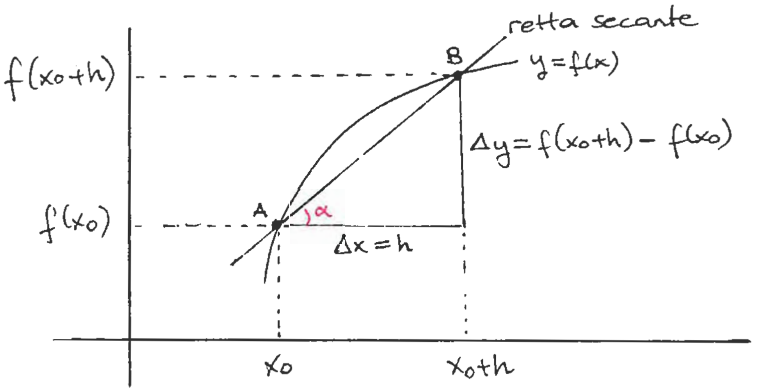
– CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE –

Derivata di Una Funzione

Significato geometrico della derivata

Per capire il significato geometrico della derivata bisogna sapere il concetto di retta tangente al grafico di una funzione f in un punto (x_0, y_0) dove $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $f(x_0) = y_0$.

Consideriamo x_0 e x_0+h (h si chiama incremento) due punti di I.
Quando x passa da x_0 a x_0+h, la funzione f passa da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$.



Δx : incremento orizzontale nella variabile x.

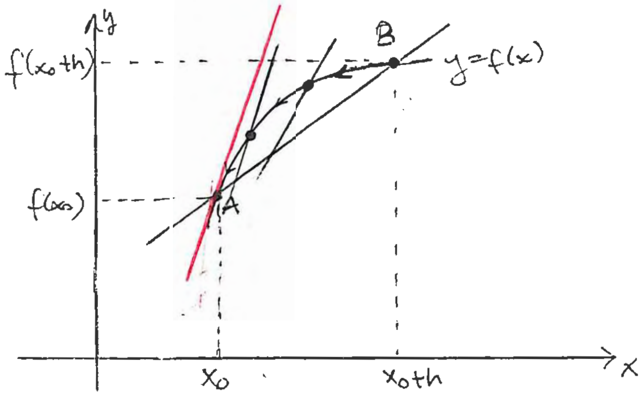
Δy : incremento verticale nella variabile y

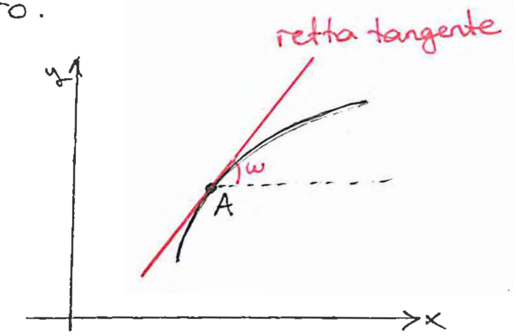
Rapporto incrementale : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Il rapporto incrementale ha come significato geometrico quello di coefficiente angolare della retta AB (retta secante)

$$m_{secante} = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Per andare verso il concetto di derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 consideriamo il limite del rapporto incrementale quando l'incremento h tende a zero. I due punti che definiscono la retta secante si avvicinano sempre più, finchè coincidono quando l'incremento diventa zero.





In altre parole, il punto A, di coordinate $(x_0, f(x_0))$ rimane fisso, mentre il punto B, di coordinate $(x_0+h, f(x_0+h))$ si muove verso A, mantenendosi sul grafico di f.

Nel passaggio al limite i due punti si sovrappongono e la retta secante va a coincidere con la retta limite che prende il nome di retta tangente al grafico di f. Invece il suo coefficiente angolare è data da $\tan\omega$ e prende il nome di derivata prima (o semplicemente derivata) di f nel punto x_0, cioè, la derivata di una funzione in un punto è uguale al coefficiente angolare della retta tangendente alla funzione in quel punto.

Definizione di derivata: Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Si dice che la funzione f è derivabile nel punto $x_0 \in I$, se esiste finito il limite del rapporto incrementale in x_0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Tale limite è la derivata di f in x_0 e si indica con una delle seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \;,\; \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \;,\; Df(x_0) \;,\; y' \;,\; \frac{dy}{dx} \;,\; Dy.$$

f primo di x_0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

e l'equazione della retta tangente alla funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

(l'equazione di una retta:
$y = mx + q$
$y - y_0 = m.(x-x_0)$)

se $f(x_0) = y_0$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + y_0}$$ l'equazione della retta tangente

$$y - y_0 = \underbrace{f'(x_0)}_{m_t}(x-x_0)$$

Se la funzione f è derivabile in ogni punto di un intervallo aperto (a,b), si dice che f è derivabile nell'intervallo (a,b).

Se f è derivabile in (a,b), è definita la funzione $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$. In questo caso, se la funzione $f'(x)$ è a sua volta derivabile (in un punto o in tutto l'intervallo), chiamiamo derivata seconda di f la derivata di f' e la indichiamo con una delle seguenti notazioni:

$$f''(x_0) \,,\quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \,,\quad D^2 f(x_0) \,,\quad y'' \,,\quad \frac{d^2y}{dx^2} \,,\quad D^2 y .$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \nearrow$$

In modo del tutto analogo si definirà la derivata di ordine n, o derivata n-esima, indicata con le notazioni:

$$f^{(n)}(x_0) \,,\quad \left.\frac{d^nf}{dx^n}\right|_{x=x_0} \,,\quad D^n f(x_0) \,,\quad y^{(n)} \,,\quad \frac{d^ny}{dx^n} \,,\quad D^n y$$

In alcuni casi (ad esempio nel caso non esiste il limite in x_0 per $h \to 0$) è utile considerare il limite destro per $h \to 0^+$, oppure il limite sinistro per $h \to 0^-$. Nel primo caso si parla di derivata destra, nel secondo caso si parla di derivata sinistra nel punto x_0, e si indicano con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, rispettivamente.

Derivate di funzioni elementari

Consideriamo la funzione $y = f(x)$. La tabella delle derivate delle principali funzioni elementari:

$y = c$ (costante)	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$, $n \in \mathbb{R}, x > 0$	$y' = n x^{n-1}$ Ad esempio: $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$ $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$
$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$y' = -n \cdot x^{-n-1} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$ Es: $\boxed{y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}}$ $(y = x^{-1} \Rightarrow y' = -x^{-2})$
$y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ $(x \geq 0)$	$y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$ Es: $\boxed{y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $x>0$ $(y = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}})$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

$y=\tan x$, $x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$, $x\neq k\pi$	$y'=-(1+\cot^2 x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$	$y'=nx^{n-1}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\ln(x)$, $x>0$	$y'=\frac{1}{x}$, $x>0$
$y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$	$y'=\frac{1}{x\log_e a}=\frac{1}{x\ln a}$
$y=a^x$, $a>0$	$y'=a^x\cdot\log_e a=a^x\cdot\ln a$
$y=\arcsin x$, $-1\leq x\leq 1$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$, $-1\leq x\leq 1$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\lvert x\rvert$, $x\neq 0$	$y'=\mathrm{sgn}(x)=\frac{x}{\lvert x\rvert}$, $x\neq 0$

Usando la definizione, dimostriamo ad esempio:

1) $f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$

Si ha,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}}=2x=f'(x)$$

2) $f(x)=\sin(x)$, $f'(x)=\cos(x)$

Si ha,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}$$

$$=\sin x\Bigg(\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\sim -\frac{h}{2}\to 0 \text{ per } h\to 0}\Bigg)+\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1 \text{ per } h\to 0}\cdot\cos(x)$$

$1-\cos(h)\sim\frac{h^2}{2}$ per $h\to 0$

$\frac{\cos(h)-1}{h}\sim-\frac{h}{2}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \cos x$$

Punti angolosi, cuspidi, flessi a tangente verticale

Se una funzione f è derivabile in un punto x_0, nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ il grafico ha una retta tangente ben definita. Che cosa succede quando f non è derivabile in un punto?

Punti angolosi: Sia $f(x)=|x| = \begin{cases} x & \text{per } x>0 \\ -x & \text{per } x<0 \end{cases}$

Abbiamo $f'(x)= \begin{cases} +1 & \text{per } x>0 \\ -1 & \text{per } x<0 \end{cases}$

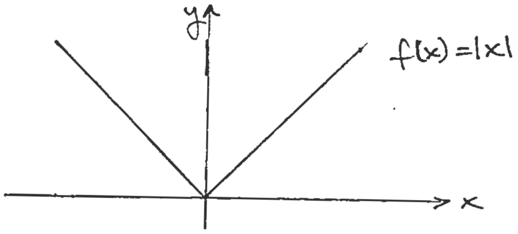
Nell'origine $x=0$, occorre usare la definizione:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

se $h\to 0^+ \Rightarrow |h|=h \Rightarrow$ il limite è 1

se $h\to 0^- \Rightarrow |h|=-h \Rightarrow$ il limite è -1

Si conclude che, non esistendo il limite, f non è derivabile in $x=0$.



Nel punto (0,0) il grafico presenta "un angolo"

Nel caso in cui f sia continua da destra e da sinistra, e derivabile da destra e da sinistra (ma non derivabile) in x_0, si dice che f ha <u>un punto angoloso</u> in $x=x_0$. Dunque, $|x|$ ha un punto angoloso in $x=0$.

Flessi a tangente verticale e cuspidi.

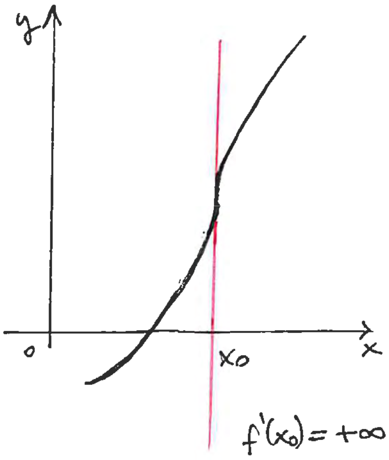
Se f è continua in un punto x_0 e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty \text{ oppure } -\infty$$

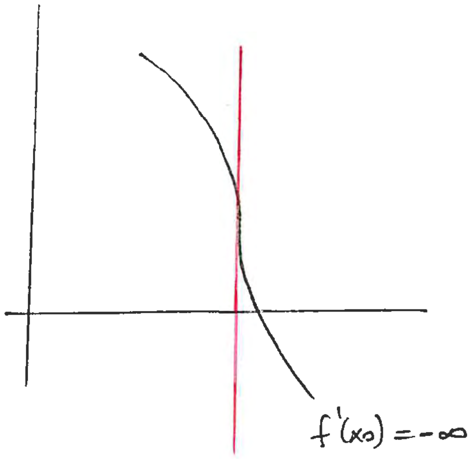
f non è derivabile in x_0, ma il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle ordinate. Quindi se nel caso abbiamo $f'(x_0)=+\infty$, $f'(x_0)=-\infty$ parliamo di <u>flesso a tangente verticale</u>.

Ad esempio, la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ha un punto a tangente verticale in $x=0$.

Flessi a tangente verticale

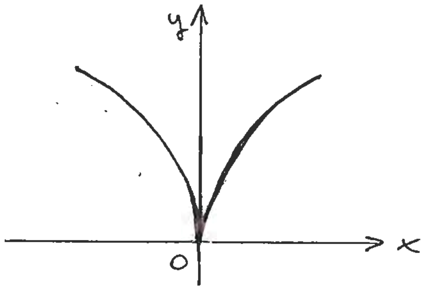


rapporto incrementale è positivo



rapporto incrementale è negativo

Consideriamo ora la funzione $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$



In questo caso abbiamo

$$f'_+(0)=+\infty$$

$$f'_-(0)=-\infty$$

e si dice che in $x=0$, f ha una cuspide.

Definizione: Se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0)=\pm\infty$, $f'_-(x_0)=\mp\infty$ si dice che f ha in x_0 una <u>cuspide</u>.

Continuità e derivabilità

Teorema: Se f è derivabile in un punto x_0, allora f è continua in x_0.

Dimostrazione: Scriviamo

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h \sim f'(x_0)\cdot h \quad \text{per } h\to 0$$

Perciò $\lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]=0$ da cui $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$, che è la continuità di f in x_0. $\left(\begin{matrix} x=x_0+h \\ \text{per } h\to 0 \quad x\to x_0\end{matrix} ;\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\right)$

* Come conseguenza, se una funzione discontinua in x_0, non può essere derivabile in x_0.

Invece, se f è continua in x_0, non necessariamente f è derivabile in x_0 come mostra $f(x)=|x|$ che è continua in $x=0$ ma non è derivabile!

Regole di Calcolo delle Derivate

Operazioni Algebriche

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in I$. Allora

$$\left.\begin{array}{ll} \text{la somma} & f+g \\ \text{la differenza} & f-g \\ \text{il prodotto} & f \cdot g \\ \text{il quoziente} & f/g \ (g \neq 0) \end{array}\right\} \text{sono derivabili in } x_0$$

e valgono le seguenti formule:

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'} \qquad (1)$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \qquad (2)$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \qquad (3)$$

In particolare, dalla (2) si deduce;

$$\boxed{(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad , k \text{ costante}} \qquad (4)$$

essendo la derivata di una costante uguale a zero, e dalla (3) si deduce per $f = 1$;

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}} \qquad (5)$$

Dimostrazione di (2); Si ha, fissato $x \in I$.

$$f(x+h)\,g(x+h) - f(x)g(x) = \underbrace{\underline{\underline{f(x+h)}}}_{2^\circ} g(x+h) \overbrace{- \underbrace{\underline{\underline{f(x+h)}}}_{2^\circ} g(x) + f(x+h)\,\underbrace{\underline{\underline{g(x)}}}_{1^\circ}}^{\pm} - f(x)\underbrace{\underline{\underline{g(x)}}}_{1^\circ}$$

e quindi

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + \underline{\underline{f(x+h)}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

poiché $f(x+h) \to f(x)$ per $h \to 0$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Esercizi da fare a casa: Dimostrazioni di (1), (4) e (5), usando la definizione.

Derivata di una funzione composta

Teorema (Regola della Catena): Sia $g \circ f$ la composta di due funzioni f e g. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y=f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$ regola della catena

Esempio: 1) $y=(x^3+x)^4$

$$y' = 4(x^3+x)^3 \cdot (3x^2+1)$$

2) $f(x)= \sin(\cos x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\left[\sin(\cos x)\right]}{dx} = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$$

La regola della catena usando le notazioni $\frac{df}{dx}$ e $\frac{dg}{dx}$ per le derivate di f e g e posto $w=g(y)$, scriviamo una forma più significativa:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Per tre funzioni si scrive:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \left(f(g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x) \right)$$

Ad esempio,

$$w(x) = (\sin 2x)^3$$

Posto $h(x)=2x$, $g(y)=\sin(y)$, $f(t)=t^3$

abbiamo allora $w(x)=f(g(h(x)))$. Pertanto:

$$w'(x) = 3(\sin(2x))^2 \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

Oppure si può scrivere come $y=2x$, $t=\sin(y)$, $w=t^3$ e quindi

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3(\sin(2x))^2 \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

Derivate di funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$

I passaggi per il calcolo di $(a^x)'$ si basano su un "trucco" di uso comune:

riscrivere una funzione $f(x)^{g(x)}$ con $f(x)>0$ nella forma seguente:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

A questo modo si può calcolare la derivata di una funzione di questo tipo:

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \\ \ln(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\end{array}}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left[e^{g(x)\ln f(x)}\right]' =$$

$$= e^{g(x)\ln f(x)} \cdot \left[g(x) \cdot \ln f(x)\right]'$$

$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Esempio: $y = x^x$

$$y' = (x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Derivata del valore assoluto di una funzione: Consideriamo una funzione del tipo $|f(x)|$. Sappiamo che il valore assoluto non è derivabile là dove il suo argomento si annulla. Tuttavia, nei punti in cui $f(x) \neq 0$, la derivazione di funzione composta dà:

$$|f(x)|' = \mathrm{sgn}(f(x)) \cdot f'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{per } f(x)>0 \\ -f'(x) & \text{per } f(x)<0 \end{cases}$$

In generale, ci aspettiamo che la funzione $|f(x)|$ presenti punti angolosi nei punti in cui $f(x)$ si annulla. Ad esempio, la funzione

$e^{|x+1|}$ ha un punto angoloso in $x=-1$.

Esercizi sulle derivate

1) $y = \underset{1°}{\ln}(\overset{2°}{x^3+x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^3+x} \cdot (3x+1)$

2) $y = \ln^5(x^4+2x) = [\underset{2°}{\ln}(\underset{3°}{x^4+2x})]^{5 \to 1°} \Rightarrow y' = 5(\ln(x^4+2x))^4 \cdot \frac{1}{x^4+2x} \cdot (4x^3+2)$

3) $y = e^{x^2+3x} \Rightarrow y' = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$

4) $y = \sin\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)$

$$y' = \cos\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)'$$

$$y' = \cos\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)\left[\frac{(x^2+1)'(x^3-x)-(x^2+1)(x^3-x)}{(x^3-x)^2}\right]$$

$$y' = \cos\left(\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)\cdot\frac{2x(x^3-x)-(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2}$$

5) $y = \sin^3(x^2+2x)^2 = \Big[\underset{2^\circ}{\sin}(\underset{4^\circ}{x^2+2x})^{\overset{3^\circ}{2}}\Big]^{3 \to 1^\circ}$

$$y' = 3\left[\sin(x^2+2x)^2\right]^2 \cdot \cos(x^2+2x)^2 \cdot 2\overbrace{(x^2+2x)}^{x(x+2)}\overbrace{(2x+2)}^{2(x+1)}$$

$$y' = 12x(x+2)(x+1).\sin^2(x^2+2x)^2.\cos(x^2+2x)^2$$

6) $y = \cos(e^x - \ln(x))$

$$y' = -\sin(e^x - \ln(x)).\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$$

7) $y = \sin\left(x + \frac{e^x}{\ln^3 x}\right)$

$$y' = \cos\left(x + \frac{e^x}{\ln^3 x}\right)\cdot\left(1 + \frac{e^x.\ln^3 x - e^x.3\ln^2 x.\frac{1}{x}}{\ln^6 x}\right) = \dots$$

8) $y = \dfrac{\sin^2(3x^2+x).e^x}{\ln^3(\sin x) + e^{\cos x}}$ $\qquad \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$; $f' = a'b + ab'$

$$y' = \frac{1}{\left(\ln^3(\sin x) + e^{\cos x}\right)^2}\cdot\Big[\Big(\underbrace{2\sin(3x^2+x).\cos(3x^2+x).(6x+1)}_{a'}.\underbrace{e^x}_{b} + \underbrace{\sin^2(3x^2+x)}_{a}.\underbrace{e^x}_{b'}\Big)\cdot$$

$$\left(\ln^3(\sin x) + e^{\cos x}\right) - \sin^2(3x^2+x).e^x.\left(3\ln^2(\sin x).\frac{1}{\sin x}.\cos x + e^{\cos x}.(-\sin x)\right)\Big]$$

9) $y = (\sin(x^2-x))^{\ln(3x+\frac{1}{x})}$ $\qquad \left(y = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}\right)$

$$y' = \left[e^{\overbrace{\ln(3x+\frac{1}{x})\ln(\sin(x^2-x))}^{f(x)}}\right]'$$

$(e^{f(x)})' = e^{f(x)}.f'(x)$; $f' = a'b + ab'$

$$y' = e^{\ln(3x+\frac{1}{x})\ln(\sin(x^2-x))}\cdot\left[\frac{1}{3x+\frac{1}{x}}.\left(3 - \frac{1}{x^2}\right).\ln(\sin(x^2-x)) + \ln\left(3x+\frac{1}{x}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sin(x^2-x)}.\cos(x^2-x).(2x-1)\right]$$

10) $y = x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$

$$y' = e^{\sin x \ln x}.\left(\cos x \ln x + \sin x.\frac{1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x.\ln x + \frac{1}{x}\sin x\right)$$

11) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y=f(x)=x^3 \cdot e^{2x-2}$ in $x_0=1$.

$$\boxed{y=f'(x_0) \cdot (x-x_0)+y_0}$$

$y_0=f(x_0)=f(1)=1 \cdot e^0=1 \Rightarrow P(1,1)$

$f'(x)=3x^2 \cdot e^{2x-2}+x^3 \cdot e^{2x-2} \cdot 2 = x^2 e^{2x-2}(3+2x)$

$f'(1)=5$

L'equazione della retta tangente passante per il punto $(1,1)$ con coefficiente angolare $f'(1)=5$,

$$y=5(x-1)+1 \Rightarrow y=5x-4$$

12) Determinare la retta tangente al grafico della curva $f(x)=x^2+x-5$ (parabola) nel punto $x_0=4$.

$y_0=f(x_0)=f(4)=16+4-5=15$, quindi $P(4,15)$

$f'(x)=2x+1 \Rightarrow f'(4)=9$

L'equazione della retta tangente: $y=9(x-4)+15$

$\Rightarrow y=9x-21$

13) Determinare le coordinate dei punti nei quali la retta tangente al grafico della funzione $f(x)=x^3+2x+3$ ha coefficiente angolare $m=5$.

$f'(x)=3x^2+2$

Sappiamo che $m=f'(x_0)$

$$5=3x_0^2+2 \Rightarrow 3x_0^2=3$$
$$x_0^2=1$$
$$x_0=\pm 1$$

Quindi le coordinate dei punti di tangenza sono:

$T_1(1,f(1))=T_1(1,6)$

$T_2(-1,f(-1))=T_2(-1,0)$

Derivata di funzione inversa

Teorema: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile in I e $g=f^{-1}$ la sua inversa, definita in $f(I)$. Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in I$. Allora g è derivabile in $y_0=f(x_0)$ e

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Esempio: $f(x)=\ln(x)$

$$y=\ln x \Rightarrow x=e^{y}=g(y)$$

$$y_0=\ln x_0 \Rightarrow x_0=e^{y_0} \Rightarrow g(y_0)=e^{y_0} \Rightarrow g'(y_0)=e^{y_0}=x_0$$

$$f(x_0)=\ln(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\frac{1}{x_0}}=x_0 \quad =$$

Punti stazionari, massimi e minimi assoluti e locali.

Definizione: Consideriamo la funzione $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ Si dice che M è massimo di f in (a,b) e $x_0 \in (a,b)$ è punto di massimo se

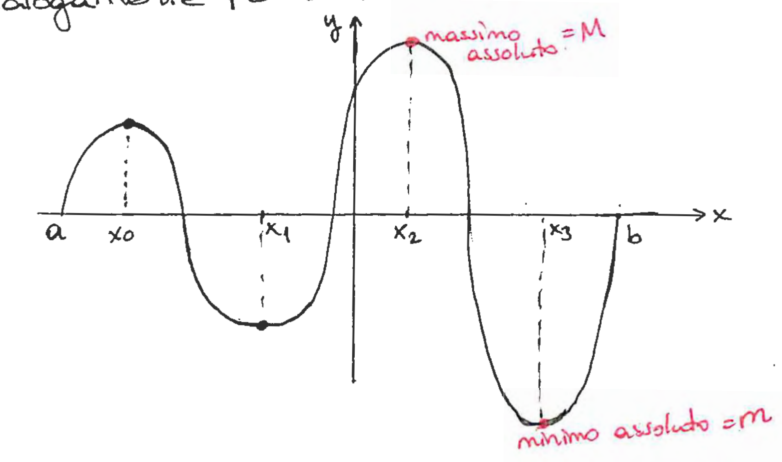
$$f(x_0)=M \geqslant f(x), \text{ per ogni } x\in(a,b)$$

Analoga definizione per il minimo.

Definizione: Si dice che M è massimo locale (o relativo) per f e che x_0 è un punto di massimo locale se:

esiste un intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ tale che $M=f(x_0)\geqslant f(x)$ per ogni $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(a,b)$

Analogamente per un minimo locale.



- massimo assoluto $M=f(x_2)$
  x_2 unico punto di mas.ass.
- minimo assoluto $m=f(x_3)$
  x_3 unico punto di min.ass.
- un massimo locale in $x=x_0$.
- un minimo locale in $x=x_1$

Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 che sia di massimo o minimo locale e che sia diverso da a e da b, allora in x_0 la derivata si annulla, ossia la tangente al grafico in $(x_0,f(x_0))$ è orizzontale. Precisamente:

Teorema (di Fermat): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile in $x_0\in(a,b)$. Se x_0 è un punto di estremo locale allora $f'(x_0)=0$.

Dim: Possiamo suppore che x_0 sia un punto di massimo (è naturalmente possibile ragionare anche nel caso in cui x_0 sia un punto di minimo).

Allora se x_0 è un punto di massimo, abbiamo $f(x_0+h)\le f(x_0)$ per un h sufficientemente piccolo (in modo di restare abbastanza vicino a x_0), quindi possiamo scrivere:

$$f(x_0+h)-f(x_0)\le 0$$

- se $h>0$, il punto x_0+h è spostato verso destra rispetto a x_0. Ora dividiamo per h, ottenendo:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ \underset{\downarrow}{\le}\ 0$$

(non cambia per il fatto che $h>0$)

Passiamo al limite da entrambe le parti:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0 \quad\Longrightarrow\quad f'_+(x_0)\le 0$$

- se $h<0$, il punto x_0+h è spostato verso sinistra rispetto a x_0. Dividendo per h si ottiene:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ \underset{\downarrow}{\geq}\ 0$$

(è cambiato perchè $h<0$)

Passando al limite da entrambe le parti:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad f'_-(x_0)\geq 0$$

Dato che per l'ipotesi f è derivabile in x_0: questo vuol dire che $f'(x_0)$ esiste ed è uguale a derivata sinistra e a derivata destra in x_0. In particolare, otteniamo che derivata sinistra = derivata destra, quindi l'unica possibilità è che sia

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$$

Dunque,

$$f'(x_0)=0$$

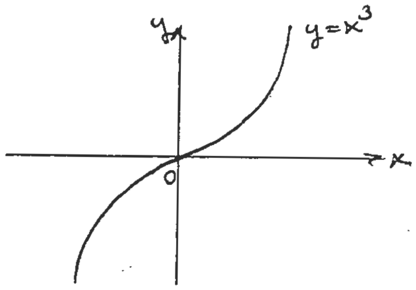
☒

Def: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. I punti in cui f' si annulla, cioè $f'(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$, si dicono punti stazionari o punti critici per f.

Quindi se f è derivabile:

$$x_0 \text{ di estremo locale } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} x_0 \text{ critico}$$

Però un punto critico non necessariamente è un punto estremo. Ad esempio, la funzione $f(x)=x^3$ ha $f'(x)=3x^2$ che si annulla nell'origine, ma $x=0$ non è un punto di estremo.



In questo caso parliamo di un punto di **flesso** (o di inflessione) a tangente orizzontale.

$y=x^3$ ha un punto di flesso in $x=0$ (un punto critico)

Esercizi: Trovare i punti critici delle funzioni seguenti:

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

C.E.: $x^2-3x+2\neq 0$
$(x-2)(x-1)\neq 0$
$x\neq 2$, $x\neq 1$

$f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-3x+2)-(x+1)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$N=0 \Rightarrow x^2-\cancel{3x}+2-2x^2+\cancel{3x}-2x+3=0$$

$$-x^2-2x+5=0$$

$$x^2+2x-5=0 \qquad \nearrow\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

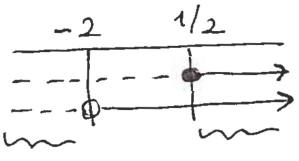
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(-5)}}{2}=-1\pm\sqrt{6}$$

Quindi in $x_1=-1-\sqrt{6}$ e $x_2=-1+\sqrt{6}$, si ha $f'=0$, cioè, sono i punti critici per f.

2) $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}$

C.E.: $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$

$\dfrac{2x-1}{x+2}\geq 0 \Rightarrow 2x-1\geq 0$; $x+2>0$
$x\geq 1/2$ $\qquad$ $x>-2$



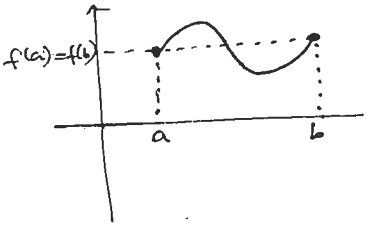
$x<-2 \vee x\geq 1/2$

$$y=\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^{1/2} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\overbrace{2(x+2)-(2x-1).1}^{\cancel{2x}+4-\cancel{2x}+1}}{(x+2)^2}\right)$$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{(2x-1)^{1/2}}{(x+2)^{1/2}}}\cdot\frac{5}{(x+2)^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} \quad ; \nexists x \text{ t.c. } y'=0$$

Quindi la funzione non ha punti a tangente orizzontale (non ha punti critici)

Teorema di Rolle: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se la funzione assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo, ossia, $f(a)=f(b)$, allora esiste almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=0$.



In simboli: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua in } [a,b] \\ f \text{ derivabile in } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) : f'(c)=0$$

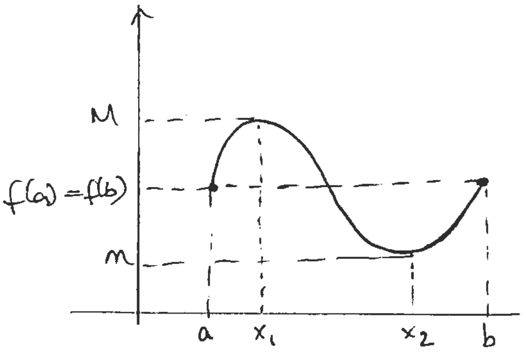
Significa che esiste almeno un punto interno in cui la retta tangente al grafico della funzione f è orizzontale.

Dimostrazione: Per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo (perché f è continua in $[a,b]$), detti rispettivamente M e m. Siano x_1 e x_2 le ascisse di questi punti, ovvero

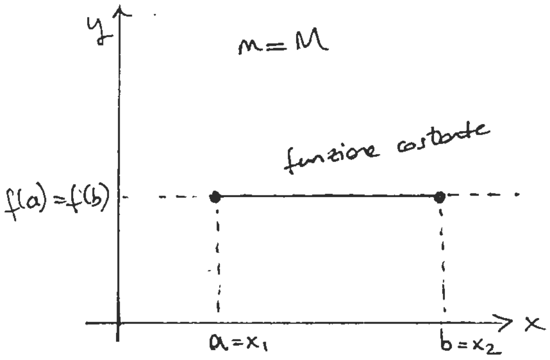
$$f(x_1)=M \quad e \quad f(x_2)=m$$

si hanno due casi; o almeno una tra x_1 e $x_2\in(a,b)$ o nessun dei due.

- Se almeno una tra x_1 e $x_2\in(a,b) \Rightarrow f'(x_1)=0$ per il teorema di Fermat.
  (Th di Fermat: f è derivabile in $x_0\in(a,b)$ e x_0 un punto di estremo $\Rightarrow f'(x_0)=0$)
  e dunque in questo caso $c=x_1$
- Se $x_1,x_2\notin(a,b) \Rightarrow$ o $x_1=a$ e $x_2=b$ oppure $x_1=b$ e $x_2=a$.
  Dall'ipotesi $f(a)=f(b)$ segue allora che $f(x_1)=f(x_2)$ e $M=m$, e la funzione risulta essere costante in tutto l'intervallo. Dunque ha derivata nulla in tutti i punti dell'intervallo, e questo conclude la dimostrazione.



Esiste almeno un punto di estremo in (a,b)

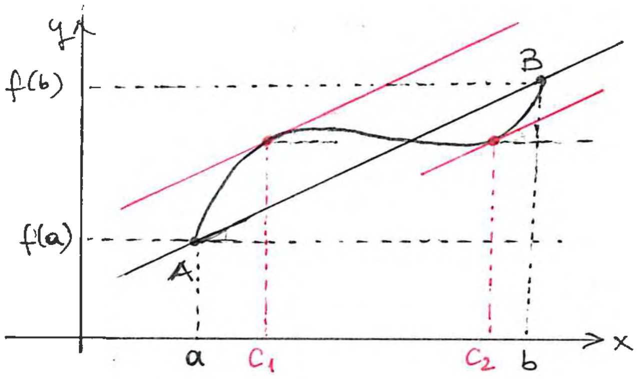


oppure $x_1,x_2\in(a,b)$

$$\Big\}\ f'(c)=0$$

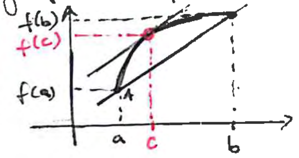
Teorema di Lagrange (o di Valor Medio): Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

Questo teorema è un caso particolare del teorema di Cauchy!



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = pendenza della retta AB

$f'(c)$ = pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(c,f(c))$



Dimostrazione: La retta AB ha equazione

$$y=\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{(coefficiente angolare)}}\cdot(x-a)+f(a)$$

Consideriamo la funzione $F(x)=\overbrace{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}^{\text{retta secante}}-\overset{\text{funz.}}{f(x)}$

$F(x)$ è definita in $[a,b]$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

$$F(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)-f(a)=0$$

$$F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}+f(a)-f(b)=0$$

$\Rightarrow F(a)=F(b)$ allora per il teorema di Rolle $\exists\, c\in(a,b)$ t.c. $F'(c)=0$

$$F'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)\quad ;\quad F'(c)=0$$

$$F'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(c)=0\quad\Rightarrow\quad\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Esempio: Sia $f(x)=x^2$. Allora $f'(x)=2x$ e il teorema afferma che in ogni intervallo $[a,b]$ esiste un numero c tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=2c$$

$$\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{b-a}}=2c$$

$\rightarrow c=\dfrac{a+b}{2}$ (media aritmetica di a e b)

Teorema di Cauchy: Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Supponiamo che $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad , \quad g(b) \neq g(a)$$

$$\Downarrow$$

Nel caso $\left.\begin{matrix} g(x) = x \\ g'(x) = 1 \end{matrix}\right\} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ (Teorema di Lagrange)

Segno della Derivata

$f \underset{\text{in } [a,b]}{\text{crescente}} \Leftrightarrow x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \ , \forall x,y \in [a,b]$

Teorema (Test di Monotonia): Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, derivabile in (a,b). Allora,

$$\left.\begin{matrix} f \text{ crescente} \Longleftrightarrow f'(x) > 0 \\ f \text{ decrescente} \Longleftrightarrow f'(x) < 0 \end{matrix}\right. \quad \forall x \in (a,b)$$

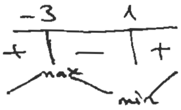
Esempi 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x > 0$ per $x > 0$

Quindi $f(x)$ è decrescente per $x<0$ ed è crescente per $x>0$

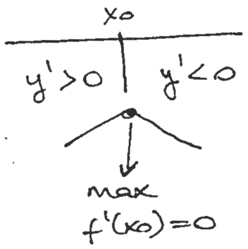
2) $y = (x^2-3)e^x$, $y' = 2xe^x + (x^2-3)e^x = e^x(x^2+2x-3) > 0$

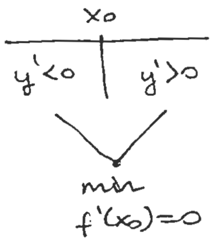
$e^x(x+3)(x-1) > 0$

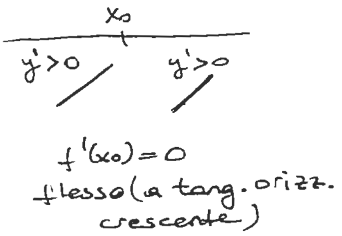
$x < -3 \ \vee \ x > 1$

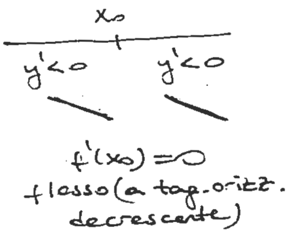


Quindi y è decrescente per $(-3,1)$ ed è crescente per $(-\infty,-3)$ e per $(1,+\infty)$.









In tutti questi punti (max, min, flessi a tang orizz) la funzione presenta una tangente orizzontale.

Il teorema di De L'Hôpital

Una notevole applicazione del calcolo differenziale si ha nel calcolo dei limiti che si presentano nelle forme di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ e $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Precisamente:

Teorema di De L'Hôpital: Siano f e g funzioni derivabili in (a,b) con $g, g' \neq 0$ in (a,b). Se

$$\left.\begin{matrix} \text{(i)} \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ \text{oppure} \ \pm\infty \\ \text{(ii)} \ \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \begin{matrix} \nearrow \in \mathbb{R} \\ \searrow \pm\infty \end{matrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \to b^-$, con $b \leq +\infty$, o il limite per $x \to x_0 \in (a,b)$.

L'applicazione tipica del teorema di de L'Hôpital è il calcolo di limiti che coinvolgono forme di indecisione non risolubili mediante i limiti notevoli.

Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ $\quad \left[\frac{0}{0}\right]$

La stima $\sin x \sim x$ non è sufficiente a risolvere tale forma di indecisione:

$$\frac{x - x}{x^3} \to \frac{0}{0} \quad \text{per } x \to 0$$

Applichiamo il teorema di de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

Ora usiamo la stima $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{6x^2} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \text{il limite di partenza vale } 1/6 .$$

Osservazioni: 1) Il teorema si usa per quozienti che siano effettive forme di indecisione

2) Se il limite di f'/g' non esiste, nulla si può affermare sul limite di f/g.

$$\nexists \lim \frac{f'}{g'} \Rightarrow \lim \frac{f}{g} = \begin{cases} \text{se } \exists \Rightarrow \text{finito oppure infinito} \\ \nexists \end{cases}$$

Esercizi 1) $\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad [\infty \cdot 0]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Applichiamo il teorema di L'Hôpital:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 0}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Calcoliamo il limite col teorema di L'Hôpital:

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \quad ; \quad \text{il limite non esiste!}$$

Invece senza utilizzando il teorema di L'Hôpital possiamo trovare il valore del limite:

$$\frac{x-\sin x}{x+\sin x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

$$\left(\nexists \lim \frac{f'}{g'} \quad \text{ma} \quad \exists \lim \frac{f}{g} = 1 \right)$$

3) $$\lim_{x\to 0} \boxed{\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln(\cos x)}} = y \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{\cancel{x}}}\cdot\left(\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^{\cancel{2}}}\right)}{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\cos^2 x+\sin x\cos x}{x\sin^2 x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{-(\cos^2 x + x\cdot 2\cos x(-\sin x))}^{-\cancel{\cos^2 x}+2x\cos x\sin x} + \cancel{\cos^2 x} - \sin^2 x}{\sin^2 x + x\cdot 2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sin x}(2x\cos x-\sin x)}{\cancel{\sin x}(\sin x+2x\cos x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos x-2x\sin x)-\cos x}{\cos x+(2\cos x-2x\sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\overset{\to 0}{2x\sin x}}{3\cos x-\underset{\to 0}{2x\sin x}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = \frac{1}{3}$$

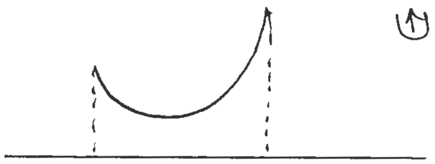
4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{1+\sin^2 x} = \nexists$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos x\sin x}{2\sin x\cos x} = 1$$

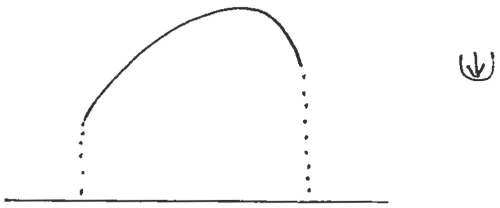
Derivata Seconda, Convessità e concavità

Il significato geometrico della derivata seconda è legato al concetto di <u>curvatura</u> della curva grafico della funzione. Quindi lo studio della derivata seconda permette di studiare la convessità e i punti di flesso di una funzione assegnata.

Definizione: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Si dice f è **convessa (concava)** in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ si ha che il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (sopra) il grafico di f.



funzione convessa



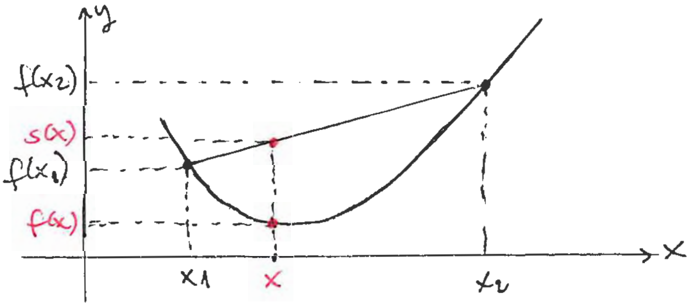
funzione concava

Quindi se $s(x)$ è il segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ passiamo scrivere

$$s(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e diciamo che:

f è <u>convessa</u> in $I \iff f(x) \leq s(x)$, $\forall x_1 < x_2$ in I e
f è <u>concava</u> in $I \iff f(x) \geq s(x)$ $\quad \forall x \in (x_1, x_2)$



Se nella disuguaglianza vale sempre "<" la funzione si dice strettamente convessa. (Invece per ">" : strettamente concava)

Teorema: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

a) Se f è derivabile in (a,b), allora f è convessa (concava) in (a,b) se e solo se f' è crescente (decrescente) in (a,b).

$$f \text{ è derivabile in } (a,b) \begin{cases} f \text{ convessa} \iff f' \text{ crescente} \\ f \text{ concava} \iff f' \text{ decrescente} \end{cases} \text{in } (a,b)$$

b) Se f è derivabile due volte in (a,b), allora f è convessa (concava) in (a,b) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (≤ 0) per ogni $x \in (a,b)$

$$f \text{ è derivabile 2 volte in } (a,b) \begin{cases} f \text{ convessa} \iff f''(x) \geq 0 \\ f \text{ concava} \iff f''(x) \leq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (a,b)$$

Punti di flesso:

Il verso della concavità di una funzione (sia convessa o concava) può cambiare nel suo C.E.; questo ci conduce al concetto di punto di flesso:

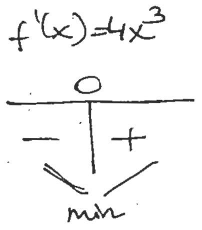
Definizione: Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a,b)$ sia un punto di derivabilità per f (cioè, esiste la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$). Il punto x_0 si dice punto di flesso per f se esiste un intorno destro (x_0, x_0+h), $h>0$, in cui f è convessa (concava), e un intorno sinistro (x_0-h, x_0) in cui f è concava (convessa). Se $f'(x_0) = +\infty$ oppure $-\infty$, si parla di punto di flesso a tangente verticale.

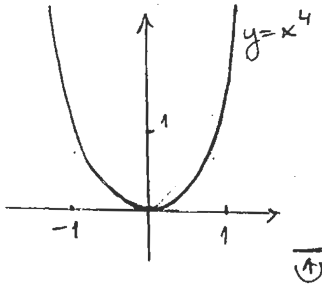
Attraversando un punto di flesso, la derivata seconda di f (se esiste) cambia segno. In questo punto f'' si annulli.

Teorema: Sia x_0 un punto di flesso per f; se esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0)=0$.

L'annullarsi della derivata seconda in un punto x_0 è condizione solo necessaria, e non sufficiente, affinché x_0 sia punto di flesso.

Esempio 1) Sia $f(x)=x^4$. Poiché $f'(x)=4x^3 \geq 0$ per $x>0$, la funzione è crescente per $x>0$, decrescente per $x<0$ e ha un punto di minimo in $x=$

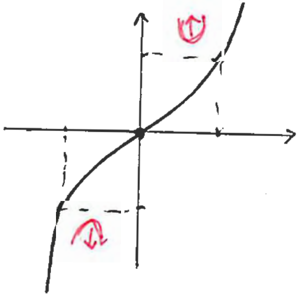


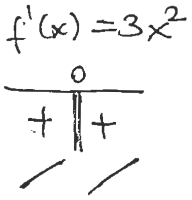


$f''(x)=12x^2 \geq 0$ per $\forall x$

quindi la funzione è convessa in tutto $\mathbb{R}$. Perciò il punto $x=0$, in cui f'' si annulla, non è un punto di flesso.

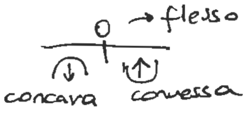
Esempio 2) Sia $f(x)=x^3$. Poiché $f'(x)=3x^2 \geq 0$, la funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Ha un punto critico per $x=0$, che non sarà però punto di mass. o min., perché la funzione è sempre crescente.





$f''(x)=6x \geq 0$ per $x \geq 0$. Dunque f è convessa per $x>0$, concava per $x<0$ e ha un punto di flesso in $x=0$

$f''(0)=0$.



Calcolo Differenziale e Approssimazioni

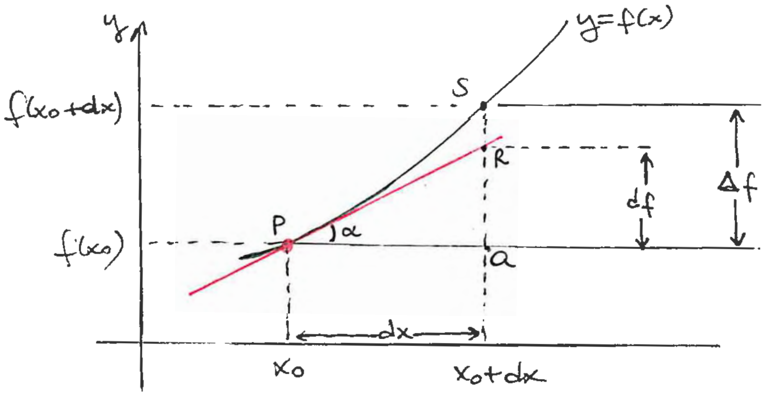
Differenziale e approssimazione lineare

Un esempio elementare di linearizzazione (approssimare linearmente), consiste nell'approssimare l'incremento subito da una data funzione f, in conseguenza di una variazione del suo argomento da x_0 a x_0+dx, sostituendo alla funzione stessa la retta tangente nel punto x_0.

Precisamente, sia $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ derivabile in x_0 e diamo a x_0 un incremento dx (che pensiamo molto piccolo in valore assoluto, cioè $|dx| \ll 1$). In conseguenza, f subisce un incremento

$$\Delta f = f(x_0+dx) - f(x_0)$$

che, in generale, pensando x_0 fissato, non è proporzionale a dx ossia non è lineare rispetto a dx.



$P(x_0, f(x_0))$

$df = \tan\alpha . dx$

L'incremento valutato lungo la retta tangente è uguale alla lunghezza del segmento QR e cioè uguale a $\tan\alpha . dx$, ovvero a $f'(x_0)dx$, ricordando che $f'(x_0)=\tan\alpha$ Tale incremento, proporzionale a dx, prende il nome di differenziale di f nel punto x_0 e si indica con il simbolo $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx$$

Che cosa si può dire sulla differenza tra Δf e $df(x_0)$?

È sufficiente ricorrere alla definizione di derivata;

$$\lim_{dx\rightarrow 0} \frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

si può scrivere

$$\frac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0) + \varepsilon(dx)$$ dove $\varepsilon(dx)$ indica una quantità che tende a zero se $dx\rightarrow 0$; è cioè un infinitesimo per $dx\rightarrow 0$.

Definizione : Date due funzioni $f(x), g(x)$, definite in un intorno di x_0, si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$ (si legge "$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$")

se

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0 .$$

Se $g(x)$ è un infinitesimo, dire che $f(x) = o(g(x))$ significa che $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$. Ad esempio, per $x \to 0$

$$x^2 = o(x)$$

$$e^{-1/x^2} = o(x^4)$$

Con questa simbologia, si scrive :

$$f(x_0+dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx + o(dx) \quad \text{per } dx \to 0$$

Questa formula si chiama un'approssimazione di Δf al prim'ordine.

Limiti notevoli e o piccolo :

Il processo di linearizzazione permette di approssimare una funzione derivabile, localmente, mediante la sua retta tangente, ossia una funzione lineare. Anche i limiti notevoli permettono di scrivere simili risultati di approssimazione, per certe funzion particolari. Ad esempio, per la funzione $y = \sin x$, il processo di linearizzazione, in $x=0$ porta a scrivere :

$$\sin x = x + o(x) \qquad (\sin x \sim x \text{ per } x \to 0)$$

Teorema (Relazione tra "o piccolo" e "asintotico") : Vale la seguente equivalenza :

Per $x \to x_0$, $f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$

Un altro esempio : $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ oppure ;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Il simbolo di "o piccolo" ha i vantaggi rispetto a quello di asintotico: un'uguaglianza si può riscrivere in vari modi, è più facile da usare senza erro rispetto ad una stima asintotica.

Altri esempi : $\ln(1+x) = x + o(x)$

$$e^x - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + o(x) \Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

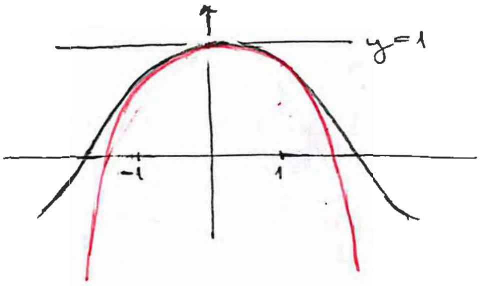
Sviluppi di Taylor e di MacLaurin

Vogliamo ora generalizzare il procedimento di "approssimazione per linearizzazione" a quello di "approssimazione polinomiale". In altre parole, ci chiediamo: data una funzione, derivabile tutte le volte che sarà necessario, esiste un polinomio che, nell'intorno di un punto fissato, approssima la funzione meglio della sua retta tangente?

Esempio: La funzione $y=\cos x$ è approssimata dalla parabola $y=1-\frac{1}{2}x^2$ meglio che della retta tangente $y=1$, per $x\to 0$: infatti, lo scarto tra la funzione e questo polinomio di secondo grado è $o(x^2)$, cioè tende a zero più rapidamente di x^2, in simboli:

$$\cos(x)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)=o(x^2)$$

$$\frac{\cos(x)-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}\to 0$$



Presentiamo un metodo per descrivere l'andamento della funzione nell'intorno di un punto interno al dominio:

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile in x_0, allora

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \quad \text{per } x\to x_0$$

$\frac{1}{2}x^2=1$

$x^2=2$

$x=\pm 1.4$

In altre parole, i polinomi

$$T_0(x)=f(x_0) \quad \text{e}$$
$$T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

sono le migliori approssimazioni, rispettivamente costante e lineare, di $f(x)$ per $x\to x_0$. In effetti, per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste un unico polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$.

Definizione: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$, si dice polinomio di Taylor di ordine n di f di centro x_0 il polinomio seguente:

$$\boxed{T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

ossia,

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Teorema (Formula di Taylor all'ordine n, con resto di Peano): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0\in(a,b)$. Allora

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x\to x_0$$

funzione da approssimare = polinomio approssimante + errore di approssimazione, dove l'errore di approssimazione è il termine $o((x-x_0)^n)$, detto resto di Peano.

Esempi: Approssimazione all'ordine n (per $x_0=0$)

Sia $f(x)=e^x$, essendo $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ per ogni n, si ha:

$$e^x=T_n(x)+o(x^n)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \quad \text{per } x\to 0$$

Il termine $o((x-x_0)^n)$ individua una funzione qualsiasi che nell'intorno di x_0 tende a zero più velocemente di $(x-x_0)^n$.

Polinomio di MacLaurin:

$$\boxed{T_n(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n}\text{, ossia}$$

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$$

Teorema (Formula di MacLaurin, all'ordine n, con resto di Peano): Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in $0\in(a,b)$. Allora

$$f(x)=T_n(x)+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

funzione da approssimare = polinomio approssimante + errore di approssimazione, dove l'errore di approssimazione è il termine $o(x^n)$, detto <u>resto di Peano</u>

Gli sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari, con il resto di Peano:

<u>FORMA COMPATTA</u>

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ ; \qquad e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot x^k+o(x^n)$$

$e^x-1\sim x$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+o(x^n)\ ; \qquad \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot x^k+o(x^n)$$

$\sim x$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})\ ; \quad \sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}+o(x^{2n+1})$$

$\sim x$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\ ; \qquad \cos(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}+o(x^{2n}$$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+o(x^n)\ ; \quad (1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\cdot x^k+o(x^n$$

$\sim 1+\alpha x$

dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

(il coefficiente binomiale generalizzato)

In particolare per $\alpha=-1$ e $\alpha=\frac{1}{2}$, si ottiene che per $x\to 0$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n\cdot x^n + o(x^n) \quad \text{e}$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\dots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\dots(2n-3)}{n!\,2^n}\cdot x^n + o(x^n)$$

Esempi: $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$ (serie geometrica)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^n\cdot x^{2n}+o(x^{2n})$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}+o(x^n)$$

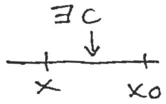
Formula di Taylor_MacLaurin con resto di Lagrange

Il resto di Lagrange, a differenza di quello di Peano, fornisce informazioni quantitative sul resto. Anche in questo caso non sappiamo né ci interessa capire quale sia il punto c per qui vale l'affermazione. È sufficiente sapere che c'è e che la valutazione della derivata n-esima in tale punto conduce ad una rappresentazione esatta.

Nella formula di Taylor con resto di Peano, l'informazione che abbiamo sull'errore commesso nell'approssimare f con il suo polinomio di Taylor è utile ad esempio nel calcolo dei limiti. Però, per un valore fissato dell'incremento $(x-x_0)$ la formula di Taylor con resto di Lagrange dà un modo alternativo di quantificare l'errore di approssimazione commesso:

Teorema (Formula di Taylor all'ordine n, con resto di Lagrange): Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$, e sia $x_0\in[a,b]$. Allora esiste un punto c compreso tra x_0 e x tale che

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{resto di Lagrange}}$$



dove l'errore di approssimazione è il termine $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, detto resto di Lagrange.

Si dice Formula di MacLaurin all'ordine n, con resto di Lagrange se $x_0 = 0$.

Per $n=0$, abbiamo

$$f(x) = T_0(x) + \frac{f'(c)}{1}(x-x_0) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{(il teorema di Lagrange)}$$

Consideriamo il resto di Lagrange: $\exists\, M > 0$, $|f^{(n+1)}(t)| < M$ per ogni t compreso tra x_0 e x,

$$\Rightarrow \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(t) \right| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M$$

Esercizio: Calcolare $\sin x$ per un angolo di ampiezza 10° con un errore minore di 10^{-4}.

Consideriamo lo sviluppo di MacLaurin per $f(x) = \sin x$ (quindi $x_0 = 0$)

$f(x) = \sin x$; $f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x$; $f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x$; $f''(0) = -\sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x$; $f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{0} + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + R_n$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + R_{2n+1}$$

$$|R_n| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M$$ dove $M =$ il massimo di $f^{(n+1)}(x) = \max\{ \sin^{(n+1)}(x) \,\|\, x \in \mathbb{R} \}$

Dato che il valore massimo di $\sin^{(n+1)}(x) = 1$, possiamo scrivere:

$$|R_{2n+1}| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

per $n = ?$ ↓

$$x = 10 \cdot \frac{\pi}{180} \overset{\text{in radianti}}{=} \frac{\pi}{18} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < 10^{-4}$$

Proviamo $n=1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}_{8{,}8 \cdot 10^{-4}} \overset{?}{<} 10^{-4}$ → NO!

per $n=2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}_{1{,}3 \cdot 10^{-6}} \overset{?}{<} 10^{-4}$ → ok!

$\sin\frac{\pi}{18} \cong \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \simeq 0,17364$ con $err < 10^{-4}$.

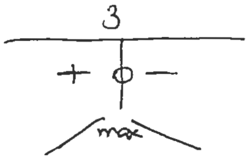
Theorema : Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Se esiste $f''(x_0) \neq 0$ e se $f'(x_0)=0$ allora ;

se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ min relativo

se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ max. relativo

Esempio: $y = \frac{x-2}{e^x}$, C.E : $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{e^x - e^x(x-2)}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(1-x+2)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{3-x}{e^x}$$



$y'=0 \Rightarrow x=3$; $y'>0$ per $x<3$

$y'<0$ per $x>3$

$$y'' = \frac{-e^x - e^x(3-x)}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(-1-3+x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{x-4}{e^x}$$

$y''(3) = \frac{-1}{e^x} < 0 \Rightarrow x_0 = 3$ max. relativo

ESERCIZI

1) Limite e sviluppi di MacLaurin

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)(e^{2x}-1)}{\ln^2(1-x)(\cos 3x - 1)}$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

$x - \sin x = \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + \dots \sim \frac{x^3}{6}$

$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dots$

$e^{2x} - 1 = \cancel{1} + 2x + 2x^2 + \dots \cancel{-1} \sim 2x$

NUM $\sim \frac{x^3}{6} \cdot 2x = \frac{x^4}{3}$

$\ln^2(1-x) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots\right)^2 \sim x^2$

$\cos 3x - 1 = \cancel{1} - \frac{9x^2}{2} + \dots \cancel{-1} \sim -\frac{9}{2}x^2$

DENUM $\sim -\frac{9}{2}x^4$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cancel{x^4}}{3}}{-\frac{9}{2}\cancel{x^4}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{2}{27}$$

Scrivere lo sviluppo di Taylor centrato nel punto xo delle seguenti funzioni :

2) $y = \cos \frac{\pi x}{3}$ $\qquad x_0 = 1$

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$y(x) = \cos \frac{\pi x}{3}$ $\qquad y(1) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$y'(x) = -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi x}{3}$ $\qquad y'(1) = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

$y''(x) = -\frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi x}{3}$ $\qquad y''(1) = -\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi^2}{18}$

$\vdots$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}(x-1) - \frac{\pi^2}{36}(x-1)^2 + \dots$$

3) $y = (x-1)\ln(3+4x)$, $x_0 = 0$ $\quad ; \quad y(0) = -\ln 3$

$y' = \ln(3+4x) + \frac{\overbrace{4(x-1)}^{4x-4}}{3+4x}$ $\qquad y'(0) = \ln 3 - \frac{4}{3}$

$y'' = \frac{4}{3+4x} + \frac{4(3+4x) - 4(4x-4)}{(3+4x)^2}$ $\qquad y''(0) = \frac{40}{9}$

$(3+4x)$

$= \frac{12 + 16x + 12 + \cancel{16x} - \cancel{16x} + 16}{(3+4x)^2}$

$= \frac{40+16x}{(3+4x)^2}$

$\vdots$

$$(x-1)\ln(3+4x) = -\ln 3 + \left(\ln 3 - \frac{4}{3}\right)x + \frac{\overset{20}{\cancel{40}}}{\underset{9}{\cancel{18}}}x^2 + \dots$$

4) $y = e^{2x+3}$, $x_0 = 0$

per $x_0 = 0$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$e^{2x+3} = e^3 \cdot e^{2x} = e^3\left(1 + 2x + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x^2}{\cancel{2}} + \dots\right)$$

$$= e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + \dots$$

oppure

$$= e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + o(x^2)$$

II metodo :

$y = e^{2x+3}$ $\qquad y(0) = e^3$

$y' = 2e^{2x+3}$ $\qquad y'(0) = 2e^3$

$y'' = 4e^{2x+3}$ $\qquad y''(0) = 4e^3$

$\vdots$

$$e^{2x+3} = e^3 + 2e^3 x + \frac{4e^3}{2!} \cdot x^2 + \dots$$

$$= e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + \dots$$

Scrivere lo sviluppo di Maclaurin all'ordine n delle seguenti funzioni:

5) $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+e}\right)$, $n=4$

Sappiamo che;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$y = \ln(1+x^2) - \ln(e+x)$$

$$y = \ln(1+x^2) - \ln\left[e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right] = \ln(1+x^2) - \left(\overset{-1}{\widetilde{\ln e}} + \ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)$$

$$y = -1 + \ln(1+x^2) - \ln\left(1+\frac{x}{e}\right)$$

$$y = -1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots - \left(\frac{x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} + \frac{x^3}{3e^3} - \frac{x^4}{4e^4} + \ldots\right)$$

$$y = -1 - \frac{1}{e}x + \left(1 + \frac{1}{2e^2}\right)x^2 - \frac{x^3}{3e^3} + \left(\frac{1}{4e^4} - \frac{1}{2}\right)x^4 + \ldots$$

Altrimenti;

$$y = y(0) + y'(0)x + y''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!} + y^{(4)}(0)\cdot\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

6) $y = e^x \cos x + x^3 + \log(1+x)$, $n=4$

$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right) + x^3 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

$$= 1 + \underline{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \underline{\underline{\frac{x^3}{6}}} + \frac{x^4}{24} + \ldots - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \underline{\underline{\frac{x^3}{2}}} - \frac{x^4}{4} - \ldots + \frac{x^4}{24} + \ldots + \underline{\underline{x^3}} + \underline{x} - \frac{x^2}{2} + \underline{\underline{\frac{x^3}{3}}} - x$$
$$+ \ldots$$

$$= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} + x^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \ldots$$

7) Quanto vale all'incirca $\ln(0.97)$?

$$\ln(0.97) = \ln(1 - 0.03)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \Rightarrow \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$\ln(1-0.03) = -0.03 - \frac{1}{2}\underbrace{(0.03)^2}_{0.0009} - \frac{1}{3}\underbrace{(0{,}03)^3}_{0{,}000027} + \ldots \quad \cong -0.030459$$

$$(\ln 0.97 = -0.0304592)$$

Studio del grafico di una funzione

Passaggi da effettuare nello studio di funzione

1) Determinare l'insieme di definizione della funzione, cioè C.E, il dominio.
2) Osservare (se c'è) l'eventuale simmetria della funzione (pari o dispari) e ristringere quindi lo studio a $x \geq 0$.
3) Determinare il segno della funzione
4) Intersezioni con gli assi
5) Calcolare i limiti (limiti destri, sinistri) agli estremi del dominio (compresi $\pm\infty$). Determinare gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
6) Studiare la derivata prima, se esiste, per
   a) punti critici (massimo, minimo, flesso a tangente orizzontale) $(f'(x_0)=0, x_0 \in C.E)$
   b) i punti in cui la funzione è continua ma <u>non derivabile</u> (punti angolosi, flessi a tangente verticale, cuspidi)
   c) il segno ; per ottenere le informazioni sulla monotonia della funzione

f crescente $\Leftrightarrow f'(x)>0$ per $\forall x \in C.E.$
f decrescente $\Leftrightarrow f'(x)<0$

7) Studiare la derivata seconda, se esiste, per
   a) punti di flesso $(f''(x_0)=0, x_0 \in C.E)$
   a tangente orizzontale
   b) il segno (la concavità) ; f convessa $\Leftrightarrow f''>0$
   f concava $\Leftrightarrow f''<0$

Esempio :

$$y = x^3 - 3x$$

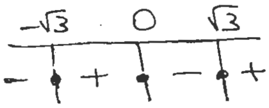
1) C.E : $\mathbb{R}$
2) Simmetrie : $f(-x) = -x^3+3x = -(x^3-3x) = -f(x)$

La funzione è dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

3) Studio del segno :

$$x^3 - 3x = x(x^2-3) \geq 0$$

$x=0$ $x=\pm\sqrt{3}$



$y>0$ per $-\sqrt{3}<x<0 \vee x>\sqrt{3}$
$y<0$ per $x<-\sqrt{3} \vee 0<x<\sqrt{3}$

4) Intersezioni con gli assi :

per $x=0 \Rightarrow y=0$; $(0,0)$
per $y=0 \Rightarrow x(x^2-3)=0$; $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},0)$

$x=0$ $x=\pm\sqrt{3}$

5) Limiti agli estremi del C.E.

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3-3x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2-3 = +\infty$$ Non esistono asintoti obliqui.

6) Derivata prima e monotonia

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2-1) = 0 \iff x^2-1=0$

$x = \pm 1$ (punti critici)

Segno:

$f'(x) = 3(x^2-1) > 0 \iff x<-1 \ \vee \ x>1$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 1 \\ + & - & + \\ \nearrow & \searrow & \nearrow \end{array}$$

$f'(x) < 0 \iff -1 < x < 1$

$x=-1$ massimo relativo $f(-1) = -1-3(-1) = 2$

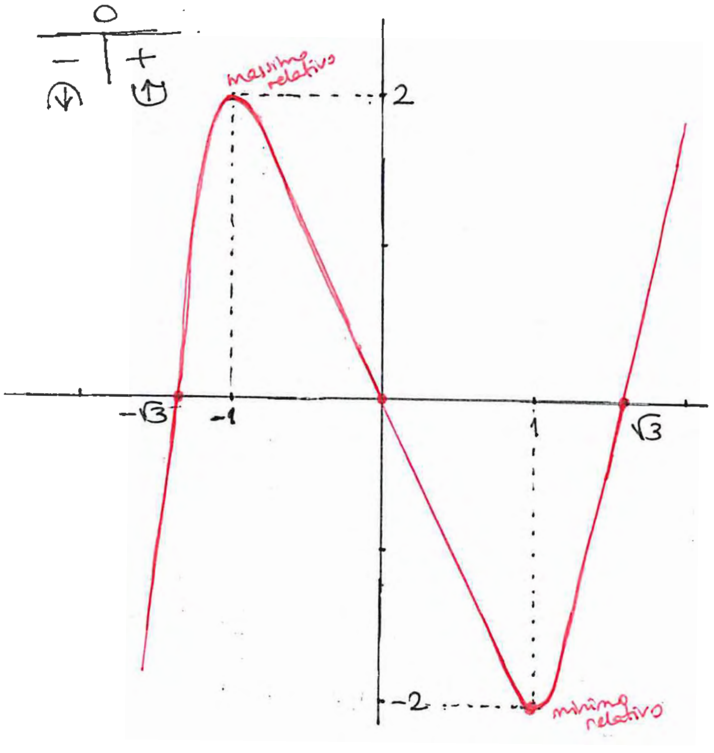
$x = 1$ minimo relativo $f(1) = 1-3 = -2$

7) Derivata seconda

$f''(x) = 6x = 0 \iff x = 0$ (un punto di flesso)

Segno: $f''(x) = 6x > 0 \iff x > 0$; $f''(x) < 0 \iff x < 0$

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ - & + \\ \Downarrow & \Uparrow \end{array}$$



∄ max, min

Esercizi

1) Trovare i valori dei parametri a e b in modo tale che la funzione sia continua e derivabile.

$$y = \begin{cases} y_1 = -x^2+ax+b & x<0 \\ y_2 = e^x & x \geq 0 \end{cases}$$

- y è continua $\iff \lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^+} y = y(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} -x^2+ax+b = b \\ \lim_{x\to 0^+} e^x = y(0) = 1 \end{array}\right\} b=1$$

- y è derivabile $\iff \lim_{x\to 0^-} y' = \lim_{x\to 0^+} y'$ (oppure $y'_-(0) = y'_+(0)$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} y_1' = \lim_{x\to 0^-} (-2x+a) = a \\ \lim_{x\to 0^+} y_2' = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \end{array}\right\} a=1$$

Si deduce che f è continua e derivabile in $x=0$ se e solo se $a=1$ e $b=1$.

2) Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = 3x + |x-1|$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1 & x>1 \\ 3 & x=1 \\ 2x+1 & x<1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} 2x+1 = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} 4x-1 = 3 \end{array}\right\} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 3$$

senza calcolare sappiamo che la somma di due funzione continue è una funz. continua

Quindi f è continua in $x=1$

Affinchè f sia derivabile in $x=1$, deve essere $f'_-(1) = f'_+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & x>1 \\ 2 & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'_-(1) = 2 \neq 4 = f'_+(1)$$

Allora f non è derivabile in $x=1$ (è un punto angoloso)

3) $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot\ln(x)$, $\alpha>0$

Applichiamo il teorema di L'Hôpital ;

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\ln(x)}^{f(x)}}{\underbrace{x^{-\alpha}}_{g(x)}}$$

dove $g(x)\neq 0$ e $g'(x)\neq 0$ per $x\to 0^+$, infatti ;

Per $\alpha>0$, $g'(x) = -\alpha\, x^{-\alpha-1} = -\alpha\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}} \neq 0$ per $x\to 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}\cdot x^{\alpha+\cancel{1}-\cancel{1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}\cdot x^{\alpha} = 0$$

(essendo $\alpha>0$)

Si conclude che

$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot\ln(x) = 0$ per $\alpha>0$.

4)a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

Sappiamo che $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

$$\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2} = \frac{x^2-2+2\cos x}{x^2(1-\cos x)}$$

NUM $\sim x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right) = \cancel{x^2}\cancel{-2}\cancel{+2}\cancel{-x^2}+\frac{x^4}{12} = \frac{x^4}{12}$

DENUM $\sim x^2\left(\cancel{1}\cancel{-1}+\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^4}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^4}}{12}}{\frac{\cancel{x^4}}{2}} = \frac{1}{12}\cdot 2 = \frac{1}{6}$$

b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$; Sappiamo che $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\dots$

NUM $\sim \cancel{x}-\frac{x^2}{2}\cancel{-x} = -\frac{x^2}{2}$

DENUM $\sim x^2$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}$

Sappiamo che

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$\tan x \sim x$ per $x \to 0$

Dato che c'è la somma nel numeratore bisogna usare la formula di MacLaurin

$\sin x - x\cos x$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \dots - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} \text{NUM} &\sim \frac{x^3}{3} \\ \text{DENUM} &\sim x^3 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$$

6) Dopo aver scritto lo sviluppo di MacLaurin all'ottavo ordine di $f(x) = (1-2x^2)\cdot e^{-x^2}$, determinare $f^{(7)}(0)$ e $f^{(8)}(0)$.

Sappiamo che $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Quindi $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{6} + \frac{(-x^2)^4}{24} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)$

$\Rightarrow f(x) = (1-2x^2)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)$, ossia, riordinando le potenze e trascurando quelle con esponente maggiore di 8,

$$f(x) = 1 - 3x^2 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{7}{6}x^6 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$$

Sappiamo che il generico termine di grado n del polinomio di MacLaurin è formato da $\dfrac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$, osserviamo allora che:

- poiché nel polinomio di $f(x)$ non compare x^7, concludiamo che $f^{(7)}(0) = 0$
- $\dfrac{f^{(8)}(0)\cdot x^8}{8!} = \dfrac{3}{8}x^8 \Rightarrow f^{(8)}(0) = \dfrac{3}{8}\cdot 8! = 3\cdot 7!$

7) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ \cos x & 0 \le x < \frac{3\pi}{2} \\ 3\pi - 2x & x \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

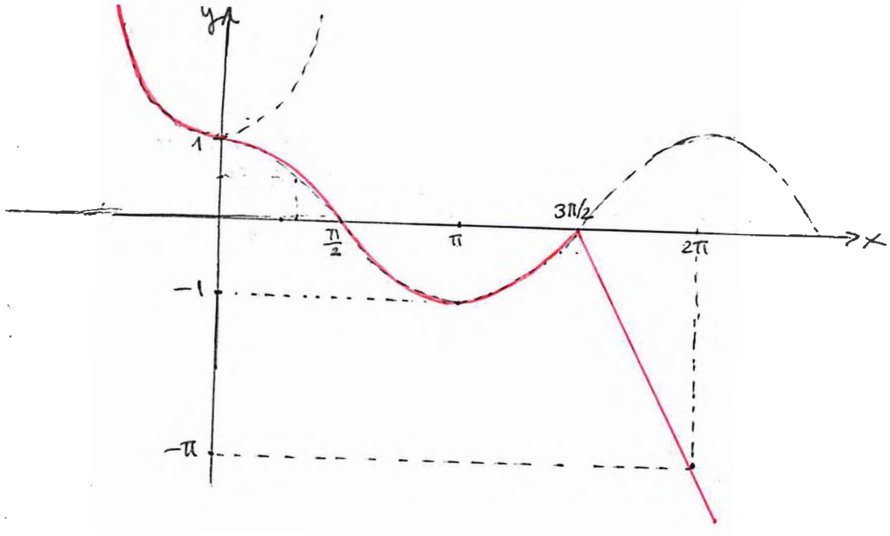
dopo averne disegnato il grafico, determinare gli eventuali punti

(a) di massimo o minimo locale;

(b) di flesso;

(c) stazionari, cioè in cui $f'(x) = 0$

(d) in cui $f''(x) = 0$



$$\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ \cos x & 0 \leq x < 3\pi/2 \\ 3\pi - 2x & x \geqslant 3\pi/2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x = \frac{3\pi}{2} \quad y=0$

$x = 2\pi \quad y = -\pi$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x<0 \\ -\sin x & 0<x<\frac{3\pi}{2} \\ -2 & x>3\pi/2 \end{cases}$$

Osserviamo i punti $x=0$ e $x=3\pi/2$

$f'_-(0) = f'_+(0)$, f è derivabile in $x=0$ e $f'(0)=0$, mentre dato che il grafico presenta un punto angoloso in $x=\frac{3\pi}{2}$, f non è derivabile in $x=\frac{3\pi}{2}$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x<0 \\ -\cos x & 0<x<3\pi/2 \\ 0 & x>3\pi/2 \end{cases}$$

$f''_-(0) = 2 \neq -1 = f''_+(0)$

f'' non è definita in $x=0$ e in $x=\frac{3\pi}{2}$ (perchè $x=\frac{3\pi}{2}$ è un punto angoloso quindi f già non può essere derivabile in quel punto)

(a) min locale: $x=\pi$

max. locale: $x=\frac{3\pi}{2}$

(b) flesso a tangente orizzontale: $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$

(c) f' si annulla in $x=0$ (punto di flesso) e in $x=\pi$ (minimo locale)

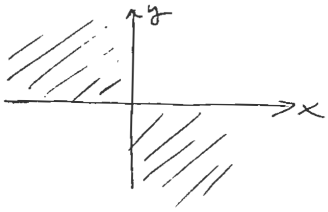
(d) f'' si annulla in $x=\frac{\pi}{2}$ e per $x>\frac{3\pi}{2}$

8) Studiare la funzione $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

1) C.E.: $\mathbb{R}$

2) Il segno: $y = \frac{x^3}{e^x} > 0$ se $x>0$

$y<0$ se $x<0$



3) Intersezioni con gli assi:

$x=0 \Rightarrow y=0 \qquad (0,0)$

4) Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot e^{-x} = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty_{POT}}{\infty_{ESP}} = 0^+ \quad (e^x >> x^3)$

$y=0$ asintoto orizzontale

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0^+ \qquad (e^x >> x^2)$$

ma $m \neq 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty \qquad (m \in \mathbb{R})$$

non può esistere asintoto obliquo

5) Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x}(-1) = x^2 \overset{\text{sempre positivo}}{e^{-x}} (3-x)$$

zeri:

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

segno:

	0		3	
+	‖	+	|	−
↗		↗		↘

$x = 0$ → flesso a tangente orizzontale

$x = 3$ → massimo relativo ; $f(3) = \frac{27}{e^3} \cong 1.34$

6) derivata seconda:

$$f'(x) = \underbrace{x^2}_{1°} \cdot \underbrace{e^{-x}(3-x)}_{2°}$$

$$f''(x) = 2xe^{-x}(3-x) + x^2\left(-e^{-x}(3-x) + e^{-x}(-1)\right)$$

$$= 2xe^{-x}(3-x) + x^2e^{-x}(\underbrace{x-3-1}_{x-4})$$

$$= xe^{-x}(6 - 2x + x^2 - 4x) = x\underset{\text{↳ sempre positivo}}{e^{-x}}(x^2 - 6x + 6)$$

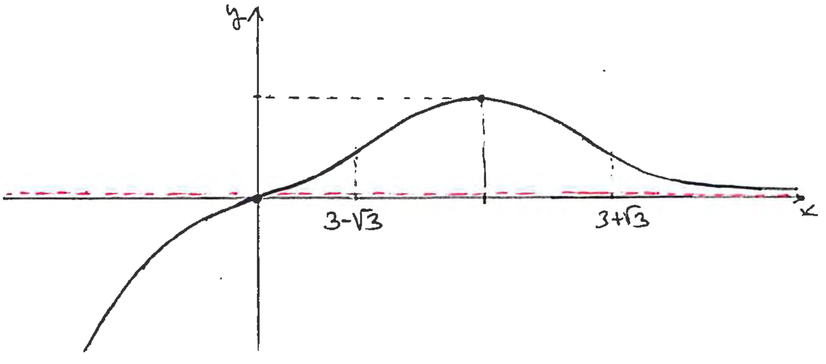
zeri: $x = 0$.

$x^2 - 6x + 6 = 0$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.6}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 3+\sqrt{3} \\ 3-\sqrt{3} \end{cases}$$

			1.3		4.7	
	0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
−	|	+	|	−	|	+
↓		↑		↓		↑

tre flessi : $x = 0$ e $x = 3 \pm \sqrt{3}$

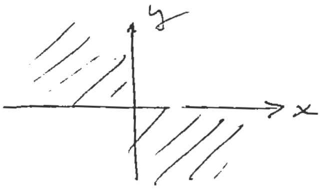


9) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$

1) C.E : $x \neq -1$

2) Il segno : $y > 0$ per $x > 0$

$y < 0$ per $x < 0$



3) Intersezioni con gli assi :

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (0,0)$

4) Limiti :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+2x+1} = 0^- \quad \Rightarrow y=0 \text{ asintoto orizzontale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+2x+1} = 0^+$$

∄ asintoto obliquo

$$\lim_{x\to-1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty \quad \Rightarrow x=-1 \text{ asintoto verticale}$$

5) Derivata prima :

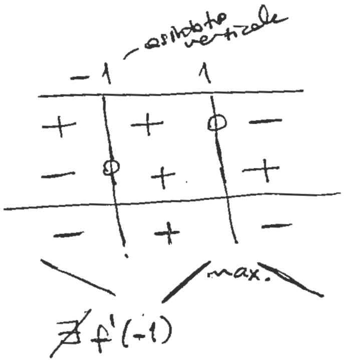
$$y' = \frac{(x+1)^2 - x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{\cancel{(x+1)}\left[(x+1)-2x\right]}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

zeri : $1 - x = 0$

$x = 1$

segno : NUM DENUM

$x = 1$ $x = -1$



$x = 1$ massimo relativo

$f(1) = \frac{1}{4}$

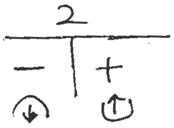
6) Derivata seconda :

$$y'' = \frac{-(x+1)^3 - (1-x).3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{\cancel{(x+1)^2}(-x-1-3+3x)}{(x+1)^{\cancel{6}4}} = \frac{2x-4}{(x+1)^4} \rightarrow \text{sempre positivo}$$

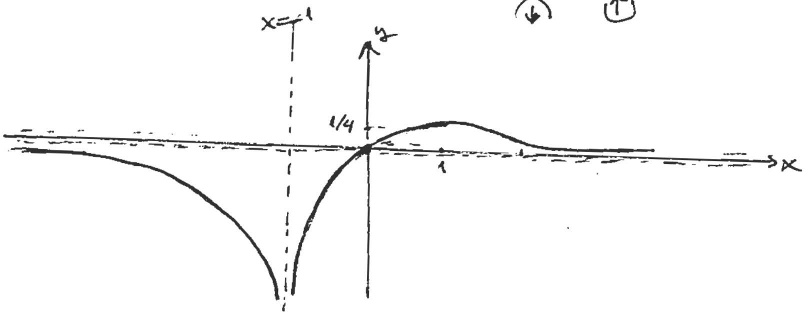
zeri : $2x - 4 = 0$

$x = 2$

segno :



$x = 2 \rightarrow$ flesso



10) $y = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

1) C.E : $x > 0$

2) Il segno: $y > 0$ per $x > 1$

$y < 0$ per $0 < x < 1$

3) Intersezioni con gli assi :

$x \neq 0 \Rightarrow$ Non c'é intersezione con l'asse y

$y = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad (1, 0)$

4) Limiti :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(0^+)}{\sqrt{0^+}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.\infty = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty_{\text{LOG}}}{+\infty_{\text{POT}}} = 0^+ \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale}$$

LOG << POT

5) $$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\ln x}{2}\right) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2 - \ln x = 0$$
$$\ln x = 2$$
$$x = e^2$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{e^2} \\ \hline + & - \\ \nearrow & \searrow \\ \multicolumn{2}{c}{\text{mass.}} \end{array}$$

$y(e^2) = \frac{2}{e}$

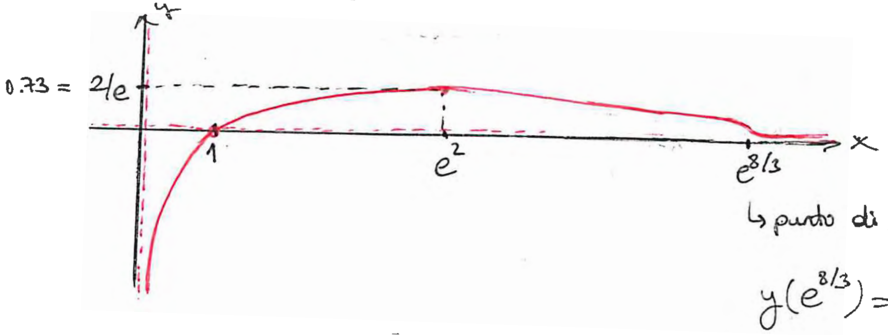
6) $$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x^{3/2}}\, x^{1/2} - (2 - \ln x) \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}}{x^3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1/2}\left(-1 - 3 + \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-4 + \frac{3}{2}\ln x}{x^{5/2}}\right)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow -4 + \frac{3}{2}\ln x = 0$$
$$\frac{3}{2}\ln x = 4 \Rightarrow \ln x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = e^{8/3}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{e^{8/3}} \\ \hline - & + \\ (\downarrow) & (\uparrow) \end{array}$$



↳ punto di flesso

$y(e^{8/3}) = 0.7$

11) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x.\sin x^3}$$

Sappiamo che

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots \qquad e^{x^2} = 1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad 2\cos x = 2-x^2+\cancel{2}\frac{x^4}{4.3.\cancel{2}}+\ldots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\ldots$$

NUM :

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{1}+\cancel{x^2}+\frac{x^4}{2}+\ldots \\ +\cancel{2}-\cancel{x^2}+\frac{x^4}{12}+\ldots \\ \cancel{-3} \end{array}\right\} \sim \frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{12}=\frac{7x^4}{12}$$

DENUM :

$$x\sin x^3 \sim x.x^3 = x^4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x.\sin x^3} = \frac{7\cancel{x^4}}{12}\cdot\frac{1}{\cancel{x^4}} = \frac{7}{12}$$

12) Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ 2\cos x & x\geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2+2 = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\cos x = 2 \end{array}\right\} = f(0)$$

f è continua in $x=0$

Poiché f è continua, per stabilire la derivabilità in $x=0$, calcoliamo i limiti sinistro e destro di f' in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -2\sin x = 0$$

Quindi possiamo dedurre che f è derivabile in $x=0$.