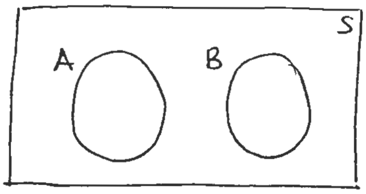
rappresentazione grafica di:

$A \subseteq S$ e $B \subseteq S$



S: un insieme universo (d'ora in avanti scriviamo U come l'insieme universo)

Consideriamo ora gli insiemi numerici che usiamo sono i seguenti:

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali ; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi ; $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali (frazioni) con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero; $\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, è un insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc.

Questi insiemi sono in relazione in questo modo: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

* Dati due insiemi A e B, se accade contemporaneamente che $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, quindi i due insiemi sono uguali, cioè $A = B$.

Lezione 3 – Operazioni tra insiemi

Def 1 (unione di insiemi): Dati due insiemi A e B, si chiama loro unione, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi.

$$A \cup B = \{ \underset{\text{tale che}}{x :} \; x \in A \underset{\text{oppure}}{\vee} x \in B \}$$

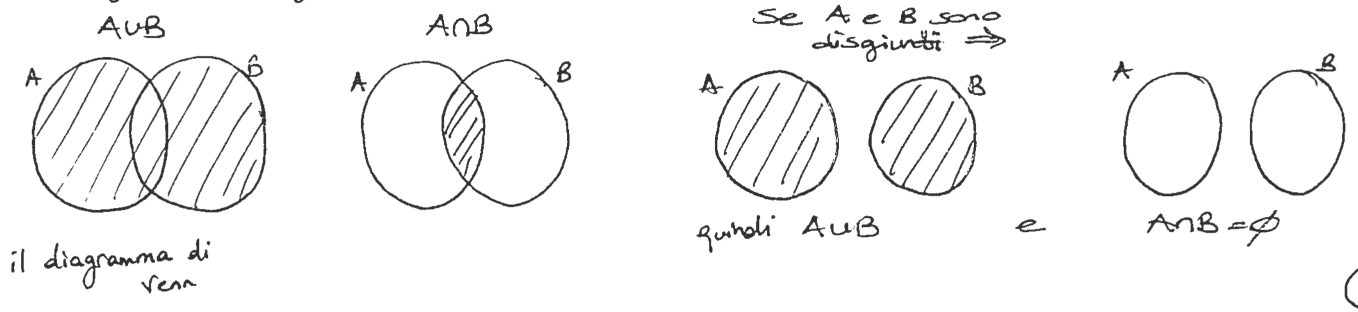
Esempio: Se $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, allora $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Def 2 (Intersezione di insiemi): Dati due insiemi A e B, si chiama loro intersezione, e si indica con $A \cap B$ l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B

$$A \cap B = \{ \underset{\text{tale che}}{x :} \; x \in A \underset{\text{e}}{\wedge} x \in B \}.$$

Esempio: Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{2, 3\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono disgiunti. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.



Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente <u>associative</u> e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C \;, \quad (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione:

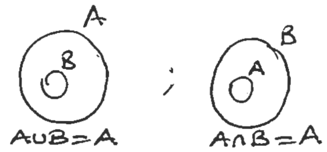
$$A\cup A = A \;; \quad A\cap A = A$$

$$A\cup B = B\cup A \;; \quad A\cap B = B\cap A \quad \text{(commutative)}$$

$$A\cup\emptyset = A \;; \quad A\cap\emptyset = \emptyset$$

$$A\subseteq A\cup B \;; \quad A\cap B\subseteq A$$

$$A\cup B = A \iff B\subseteq A \;; \quad A\cap B = A \iff A\subseteq B \rightarrow$$

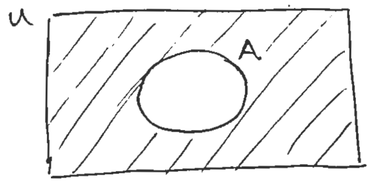


Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

Insieme Complementare: $A^c = \{x : x\notin A\}$ (si chiama <u>(insieme) complementare di A</u>)



Consideriamo l'insieme universo U;

$U^c = \emptyset$

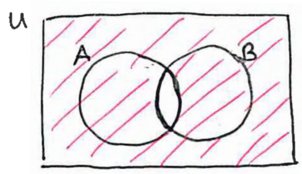
$\emptyset^c = U$

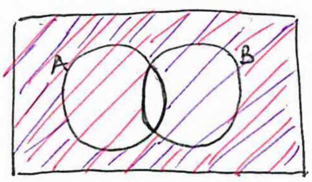
$(A^c)^c = A$ (Si possono usare anche le notazioni: $C(A)$ o $\overline{A}$)

Le Leggi di De Morgan:

1) Il complementare dell'intersezione tra due insiemi è uguale all'unione dei complementari, che scriviamo come:

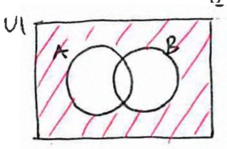
$$(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$$

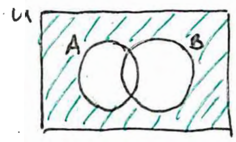




2) Il complementare dell'unione tra due insiemi è uguale all'intersezione dei complementari, che scriviamo come:

$$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$$



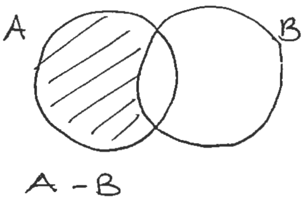


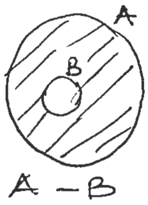
Def 3 (Differenza di insiemi): Dati due insiemi A e B, si chiama loro differenza, e si indica con $A \setminus B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.

$$A - B = \{ x : x \in A \wedge x \notin B \}$$

Esempio: Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, ($A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{2,3,4\}$)

allora $A - B = \{0,1\}$ e $B - A = \{4\}$





Quindi possiamo scrivere $A^C = U - A$

Lezione 4 - OR, AND e NOT (I connettivi logici)

Def: Una proposizione logica è un enunciato (o frase) che può essere vero (V) oppure falso (F).

		Ovviamente
Le frasi	- Sette per otto fa quaranta.	Falsa
	- Il successivo di 5 è 6.	Vera
	- Il triangolo ha 4 lati	Falsa

sono esempi di enunciati per i quali è possibile stabilire un valore di verità.

Comunque non tutte le frasi sono proposizione logiche, per esempio:

- Giallo è il colore più bello
- Forse domani piove

Le proposizioni possono essere legate tra loro con le parole: AND, OR e NOT, che prendono il nome di connettivi logici.

Il connettivo logico "AND":

"AND" permette di costruire proposizioni formate da due o più proposizioni logiche, congiungendo le singole proposizioni. Ad esempio:

- 10 è un multiplo di 2 e (AND) 12 è un numero divisibile per 4;
- La Terra è un pianeta e (AND) gira intorno al Sole.

La congiunzione di due proposizioni logiche tramite il connettivo AND è vera se e solo se entrambe le proposizioni logiche sono vere. Quindi possiamo scrivere: "Prima frase (P) AND Seconda frase (S)":

P	S		P AND S
V	V	sse	V

Il connettivo "OR"

"OR", come il connettivo "AND", permette di costruire una proposizione composta partendo da due proposizioni elementari. Ad esempio:

- 10 è un numero primo OR è un numero pari
- 7 è minore di 2 OR è maggiore di 5.

Una proposizione composta da due proposizioni con il connettivo logico OR è falsa solo se entrambe le proposizioni sono false. In tutti gli altri casi la proposizione composta è vera.

P	S		P OR S
F	F	sse	F

Negazione ("NOT")

La negazione "NOT" agisce su una proposizione logica ed ha l'effetto di trasformare le proposizioni vere in proposizioni false, e quelle false in proposizioni vere. Ad esempio: "7 è un numero primo" è una proposizione vera, la cui negazione è "7 non è un numero primo", che è una proposizione falsa.

Data una proposizione A,

A	NOT A
T	F
F	T

Altri connettivi logici:

$\Rightarrow$ (se ... allora / ... implica ...) ;

$\Leftrightarrow$ (... se e solo se ...)

La negazione di una congiunzione e di una disgiunzione:

Ricordiamo che $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ e

(Leggi di De Morgan) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$c \to$ NOT

$\cap \to$ AND

$\cup \to$ OR

Quindi, date due proposizioni P_1 e P_2 ;

$$\text{NOT}(P_1 \text{ AND } P_2) = (\text{NOT } P_1) \text{ OR } (\text{NOT } P_2)$$

$$\text{NOT}(P_1 \text{ OR } P_2) = (\text{NOT } P_1) \text{ AND } (\text{NOT } P_2)$$

UNITÀ 2 _ Applicazioni

Lezione 1 _ Definizione

Def (funzione) : Dati due insiemi A e B, si dice funzione di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere a ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

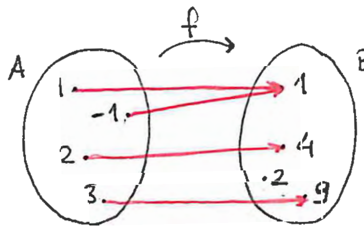
L'insieme A è detto <u>dominio</u> della funzione, l'insieme B è detto <u>codominio</u>.
Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'unico elemento di B che corresponde ad A, si dice che y è funzione di x e si scrive $y = f(x)$.

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f : A \longrightarrow B \quad , \quad x \longmapsto f(x)$$

se gli insiemi A e B sono già stati precisati. Si può anche dire semplicemente $y = f(x)$.
Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce.
(tra insiemi finiti)

Esempio : Dati i due insiemi $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 9\}$ e sia $f : x \longmapsto x^2$ (oppure $y = x^2$), $\forall x \in A$

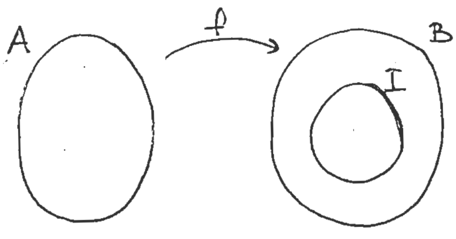


$$f(A) = \{1, 4, 9\} \subset B$$

Def: Il sottoinsieme del codominio costituito da tutti i punti dove arriva almeno una freccia, cioè, formalmente, l'insieme

$$I \subseteq B = \{ y \in B : \exists x \in A ,\ y = f(x) \}$$

o anche, a parole, l'insieme degli y di B tali che esiste almeno un x di A, la cui immagine sia y si chiama <u>insieme immagine</u>. L'insieme immagine si indica anche con $f(A)$.



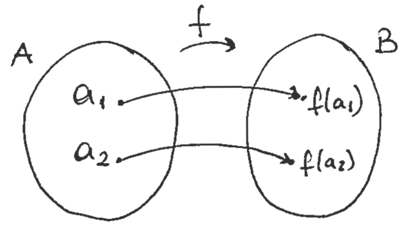
$$f(A) = I \subseteq B$$

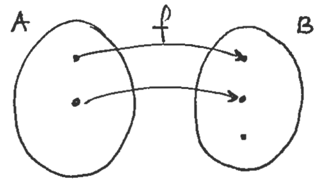
$$f(x) = y \in I \subseteq B$$

Lezione 2 – Caratteristiche

Definizione: Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> se due punti diversi del dominio P_1 e P_2 hanno immagini diverse; una funzione si dice <u>suriettiva</u> se ogni punto del codominio è immagine di almeno un punto del dominio, ovvero se l'insieme immagine coincide con il codominio; una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice <u>biiettiva</u> o <u>biunivoca</u>.

*

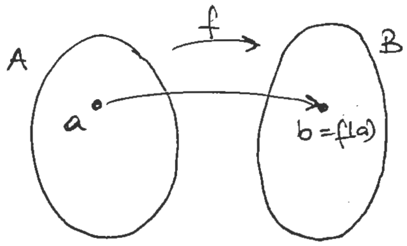


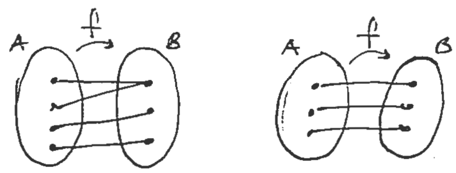


se $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

f é iniettiva

*





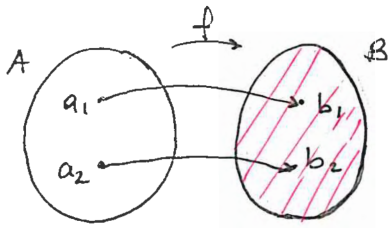
In entrambi casi, $f(A) = I = B$

L'immagine

$\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tale che $f(a) = b$

f é suriettiva

*



$\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ & $f(A) = B$

$b_1 \neq b_2$

f sia suriettiva e iniettiva $\Rightarrow f$ è biiettiva

Come verificare se una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è iniettiva:

Data una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: x \mapsto y$

$\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ tale che $f(x_1) = f(x_2)$ risulta che $x_1 = x_2$.

– $f(x) = e^x$;

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

– $f(x) = \ln x$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

– Consideriamo la funzione

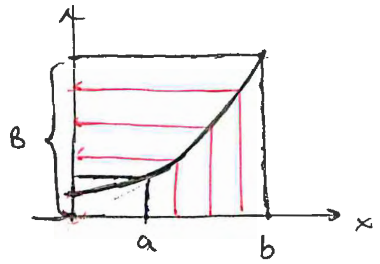
$$f(x) = x^2 - 6$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1^2 - \cancel{6} = x_2^2 - \cancel{6}$$

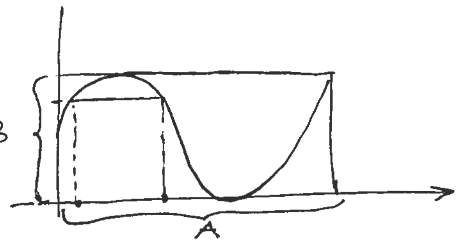
$$x_1 = \left.\begin{matrix} x_2 \\ -x_2 \end{matrix}\right\} f \text{ non è iniettiva}$$

$f: A \to B$ iniettiva



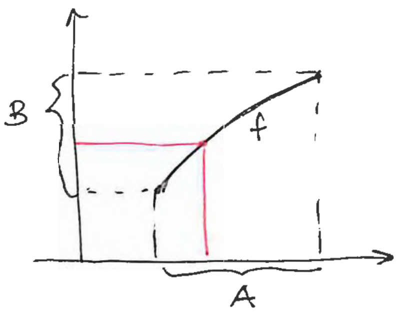
(non è suriettiva)

$f: A \to B$ suriettiva



$f(A) = B$

(non è iniettiva)



$\to$ per $f(x_1) = f(x_2)$ abbiamo $x_1 = x_2$ & $f(A) = B$

$f: A \to B$ biiettiva

Esempi: – Le funzioni e^x, $\ln x$, x^3, $\sqrt{x}$ sono iniettive.

– Le funzioni, aventi come codominio $\mathbb{R}$, $\ln x$ e x^3 sono funzioni suriettive. Anche le funzioni e^x e $\sqrt{x}$ possono diventare suriettive se "restringiamo" il codominio rispettivamente agli $y > 0$ e agli $y \geq 0$.

– La funzione, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, x^3 è iniettiva e suriettiva, dunque biiettiva.

– La funzione x^2 non è iniettiva: i punti -1 e 1, per esempio, anche se sono diversi hanno la stessa immagine.

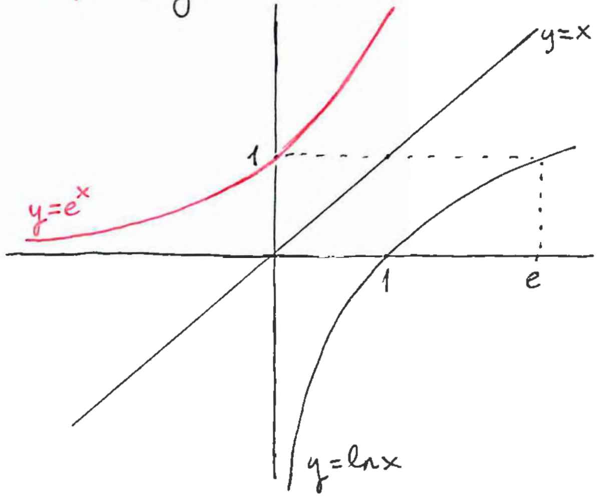
Lezione 3 – Inversa

Data una funzione $\begin{matrix} f: A \to B \\ x \mapsto y \end{matrix}$. La funzione f è <u>invertibile</u> se e solo se è <u>biiettiva</u>.

In altri termini, una funzione $y = f(x)$ si dice invertibile se esiste una funzione f^{-1}, detta <u>l'inversa</u> della funzione f, tale che $x = f^{-1}(y)$.

Quindi se $f: A \to B$ è biiettiva $\Rightarrow \exists\, f^{-1}: B \to A$

Esempi: 1) $y = \ln(x)$ è biiettiva. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$



$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln(x_1) = \ln(x_2)$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ iniettiva

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+$ t.c. $f(x) = y$

$\Rightarrow$ biiettiva

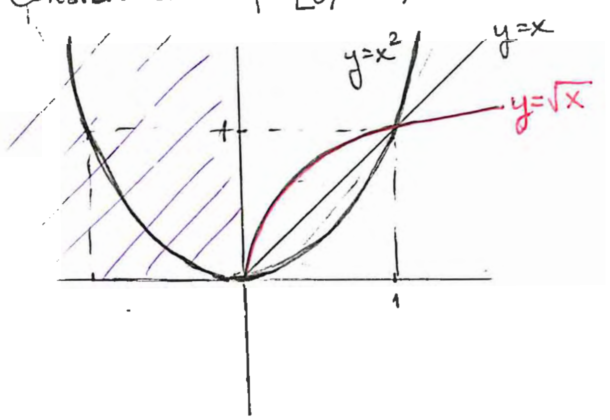
$\Rightarrow \exists f^{-1}, \ x = f^{-1}(y)$

$y = \ln x \Rightarrow x = e^y = f^{-1}(y)$

Per il grafico scambiamo le variabili: $y = e^x$

2) $y = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ non è iniettiva, ma se restringiamo il dominio agli $x \geq$

Consideriamo $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$



$y = x^2$ è biiettiva quando $f: [0, \infty] \to \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \exists f^{-1}, \ x = f^{-1}(y)$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$

Per il grafico scambiamo le variabili: $y = \sqrt{x}$

3) $y = (x+2)^3$ è biiettiva.

$\sqrt[3]{y} = x + 2$

$x = \sqrt[3]{y} - 2 = f^{-1}(y)$

4) $y = e^{x-2} + 2$

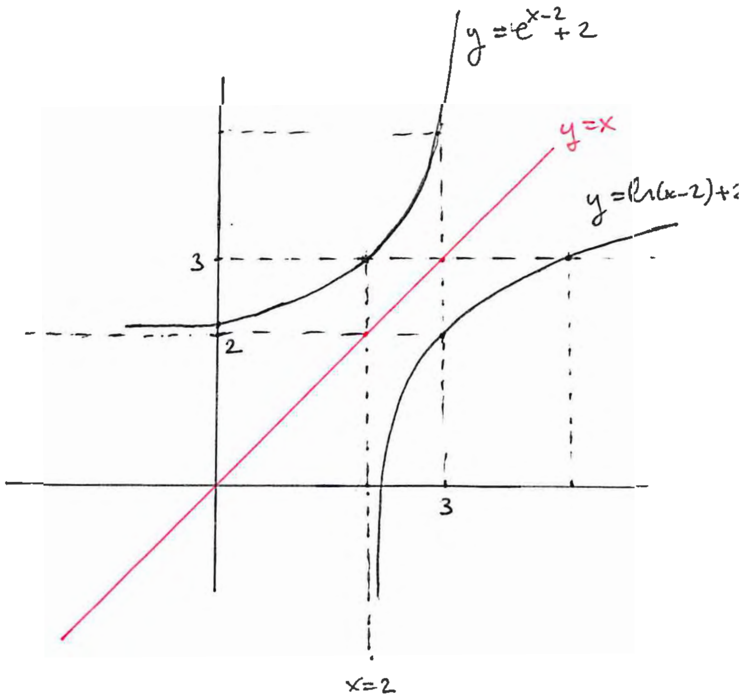
$f: \mathbb{R} \to (2, +\infty)$ é invertibile

$e^{x-2} = y - 2$

$x - 2 = \ln(y-2)$

$x = \ln(y-2) + 2 = f^{-1}(y)$

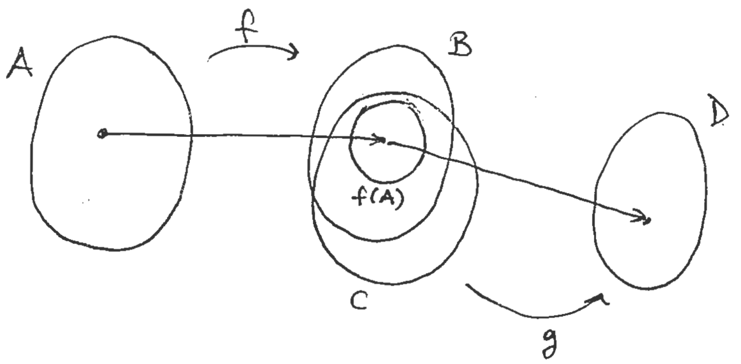
Il grafico: $y = \ln(x-2) + 2$ dove $x > 2$



Lezione 4 _ Composizione

Consideriamo due funzioni

$$f : A \to B \ , \ f : x \mapsto y$$
$$g : C \to D \ , \ g : y \mapsto z$$



$f(A) \subseteq C$, allora si definisce la funzione composta $h : A \to D$ tale che per ogni x in A associa il valore $g(f(x))$. Denotiamo la funzione h anche con il simbolo $g \circ f$ (g composto f).

Esempi di funzioni composte :

1) Consideriamo le funzioni $f(x) = e^x$, $g(y) = y+1$

La funzione composta è data da

$$h(x) = g(f(x)) = g(e^x) = e^x + 1$$

2) $f(x) = x+5$, $g(y) = e^y$

$$h(x) = g(f(x)) = g(x+5) = e^{x+5}$$

3) $f(x) = \sin x$, $g(y) = \dfrac{y + \sqrt{y}}{y^2}$

$$h(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \frac{\sin x + \sqrt{\sin x}}{\sin^2 x}$$

4) $f(x) = \ln x$, $g(y) = \dfrac{1}{y^3 + 2y - 4}$

$$h(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \frac{1}{\ln^3(x) + 2\ln(x) - 4} = \frac{1}{\ln^3(x) + \ln(x^2) - 4}$$

5) $f(x) = \sin x \qquad f: \mathbb{R} \to [-1,1]$

$g(x) = e^x \qquad g: \underset{C}{\mathbb{R}} \to \underset{D}{(0,+\infty)}$

$f(A) = B \subset C$

$h(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = e^{\sin x}$

$\forall\, x \in A \xrightarrow[\text{associa}]{f} \sin x \in B\ (\in C) \xrightarrow{g} e^{\sin x} \in D$

6) $f(x) = \sin x \qquad f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ (A → B)

$g(x) = \log x \qquad g: \underset{C}{\mathbb{R}^+} \to \underset{D}{\mathbb{R}}$

$f(A) = B \not\subset C$

Quindi dobbiamo restringere il codominio di f e considerare la funzione $f: \mathbb{R} \to (0,1]$, così abbiamo $f(A) \subseteq C$, quindi esiste $g \circ f$.

$h(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \log(\sin x)$

(abbiamo ristretto il codominio di f)

UNITÀ 3 _ Relazioni

Lezione 1 _ Generalità

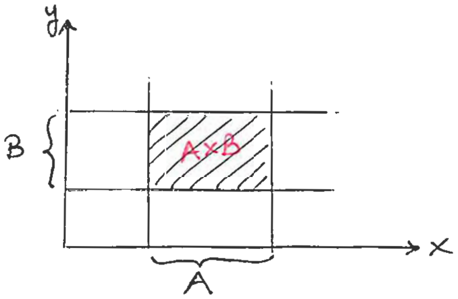
Def (prodotto cartesiano): Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è un insieme i cui elementi sono della forma (a,b) dove $a \in A$ e $b \in B$. In altri termini, il prodotto cartesiano di due insiemi è l'insieme di tutte le possibili <u>coppie ordinate</u> di elementi dei due insiemi.

Quindi consideriamo due insiemi non vuoti A e B, si indica il prodotto cartesiano A per B con $A \times B$, si legge come A cartesiano B e si definisce come:

$$A \times B = \{ (\underset{\text{prima coordinata}}{a}, \underset{\text{seconda coordinata}}{b}) : a \in A \wedge b \in B \}$$

Dato che si considerano le coppie ordinate di elementi dei due insiemi, $A \times B \neq B \times A$.

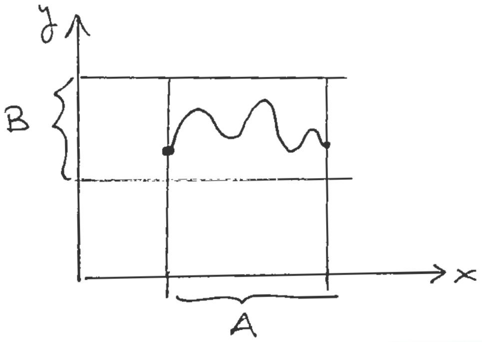
Per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$, le coppie ordinate $(x,y) \in A \times B$



Per esempio: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

Consideriamo la funzione $f : A \to B$, $\forall x \in A \ \exists^{\text{unico}} f(x) \in B$ tale che $(x, f(x)) \in A \times B$



Sia $f : A \to B$. Il sottoinsieme

$$G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$$

"Per ogni $x \in A$ esiste unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$"

Lezione 2 - Relazioni d'ordine

Siano A e B due insiemi, diciamo che l'insieme $\mathcal{R}$ è una <u>relazione</u> (binaria) tra A e B, se $\mathcal{R}$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Nel caso particolare in cui sia $B = A$, un sottoinsieme di $A \times A$ si chiama una <u>relazione binaria su A</u>.

~~Def: Una relazione binaria $\mathcal{R}$ su A si dice una relazione di equivalenza in A se $\mathcal{R}$ verifica le seguenti proprietà:~~

~~i. riflessiva: $(x,x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in A$~~

~~ii. simmetrica: $(x,y) \in \mathcal{R}$ implica $(y,x) \in \mathcal{R}$~~

~~iii. transitiva: $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$ implicano $(x,z) \in \mathcal{R}$~~

Def: Dato un insieme A si dice che una relazione $\mathcal{R}$ su A è una <u>relazione d'ordine</u> su A se $\mathcal{R}$ gode delle proprietà seguenti:

(i) riflessiva: $(x,x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in A$

(iii) transitiva: $(x,y) \in \mathcal{R}$, $(y,z) \in \mathcal{R}$ implicano $(x,z) \in \mathcal{R}$, $\forall x,y,z \in A$

(ii) antisimmetrica: $(x,y) \in \mathcal{R}$ implica $(y,x) \notin \mathcal{R}$, $\forall x,y \in A$
(oppure se $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,x) \in \mathcal{R}$, allora $x = y$)

Invece di scrivere $(x,y) \in \mathcal{R}$, scriviamo $x \preceq y$ (x precede y) oppure $y \succeq x$ (y segue x)

Quindi possiamo riscrivere le propietà:

$\forall x,y,z \in A$

(i) riflessiva: $x \preceq x$

(ii) antisimmetrica: se $x \preceq y$ e $y \preceq x$, allora $x = y$

(iii) transitiva: se $x \preceq y$ e $y \preceq z$, allora $x \preceq z$

Def: Un insieme A, dotato di una relazione d'ordine $\preceq$, si dice un <u>insieme parzialmente ordinato</u> (poset) e si indica con la coppia $(A, \preceq)$.
partially ordered set

Un insieme parzialmente ordinato $(A, \preceq)$ è detto <u>totalmente ordinato</u> se "$\preceq$" ha la seguente proprietà:

$$\forall x, y \in A \; , \; x \preceq y \text{ oppure } y \preceq x \quad \text{(sono confrontabili)}$$

Esempi: 1) $(R, \leq)$ R: l'insieme dei numeri reali
$\leq$: usuale minore o uguale

$(R, \leq)$ è un insieme <u>totalmente ordinato</u> perchè due numeri reali sono sempre confrontabili ($\forall x, y \in \mathbb{R} \; x \leq y$ oppure $y \leq x$)
Vale per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (ad esempio, $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$)

2) $(\mathbb{N}, |)$ $\mathbb{N}$: l'insieme dei numeri naturali
$|$: $m|n$ sse "m divide n"

$(\mathbb{N}, |)$ è un insieme <u>parzialmente ordinato</u> (la relazione "$|$" definita su $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine, ma non è totale).

$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x \preceq y$ se $x|y$ (cioè $y = kx$, $k \in \mathbb{N}$)

1) riflessiva : $x|x$ $(x = 1 \cdot x, \; k = 1 \in \mathbb{N})$

3) transitiva : se $x|y$ e $y|z$ allora $y = k_1 x$ e $z = k_2 y$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$z = k_2(k_1 x) = \underbrace{(k_2 k_1)}_{t \in \mathbb{N}} x$$

Da cui abbiamo $x|z$

2) antisimmetrica : se $x|y$ e $y|x$ allora $y = k_1 x$ e $x = k_2 y$, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$x = k_2(k_1 x) = \underbrace{(k_2 k_1)}_{t \in \mathbb{N}} x$$

$\Rightarrow t = 1$ sse $k_1 = k_2 = 1$
$\Rightarrow x = y$

Non è totale (ad esempio, 2 e 3 non sono confrontabili).

3) Provare usando un controesempio che $(\mathbb{Z}, |)$ non è un insieme parzialmente ordinato. (Da fare a casa!)

La relazione "$|$" non è antisimmetrica su $\mathbb{Z}$:
Ad esempio, consideriamo $(-1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\underset{\text{divide}}{-1 | 1}$ e $1 | -1$ ma $-1 \neq 1$

Ora parliamo dei concetti di massimo, minimo, maggiorante, minorante, estremo superiore, estremo inferiore etc.

Sia A un sottoinsieme di un insieme totalmente ordinato M. ($A \subseteq M$)

Def: Un elemento $m \in A$ si dice <u>massimo</u> di A se, per ogni $x \in A$, risulta $x \preceq m$. (e si denota con $m = \max A$)

Tale elemento massimo se esiste, è unico; infatti se anche $m' \in A$ (primo) è massimo di A deve essere $m' \preceq m$ ed anche $m \preceq m'$ donde $m = m'$.

Un elemento $\bar{m} \in A$ e il <u>minimo</u> di A se, per ogni $x \in A$, risulta $\bar{m} \preceq x$ (e si denota con $\bar{m} = \min A$). Tale elemento se esiste, è unico.

Osserviamo che m è il massimo di A se e solo se:

1) $m \in A$

2) se $m' \in M$ e $m' \succ m$, segue che $m' \notin A$.

Similmente, m è il minimo di A sse:

1) $m \in A$

2) se $m' \in M$ e $m' \prec m$, segue che $m' \notin A$.

Supponendo ancora che M sia un insieme totalmente ordinato ed $A \subseteq M$, diamo le seguenti definizioni:

Def: Un elemento $a \in M$ si chiama un <u>maggiorante</u> di A se $x \preceq a$ per ogni $x \in A$.

Non sempre esiste un elemento maggiorante di A.

Def: Se esiste un maggiorante di A in M, diciamo che A è <u>superiormente limitato</u> in M.

Def: Un elemento y di M si chiama un <u>estremo superiore</u> di A se

i) y è maggiorante di A

ii) per ogni $a \in M$, maggiorante di A, risulta $y \preceq a$.

* Quindi un estremo superiore di A è <u>il minimo dei maggioranti di A</u>.

L'estremo superiore di A, se esiste, è unico, e si indica con $\sup A$.

Def: Un elemento $a' \in M$ si chiama un <u>minorante</u> di A se $x \succeq a'$ per ogni $x \in A$. Un insieme <u>limitato inferiormente</u> è un insieme che ammette un elemento minorante.

L'<u>estremo inferiore</u> di un insieme A è un elemento $y' \in M$ tale che:

i) y' è un elemento minorante di A;

ii) $a' \leq y'$ per ogni elemento a' minorante di A.

* Quindi un estremo inferiore di A è <u>il massimo dei minoranti di A.</u>

L'estremo inferiore di A, se esiste, è unico e si indica con $\inf A$.

Ogni insieme non vuoto e <u>finito</u> A di M ha sempre un estremo superiore ed un estremo inferiore che sono rispettivamente l'elemento massimo e l'elemento minimo di A.

Se A è infinito $\Rightarrow$ non è necessariamente limitato, ed anche se limitato in M non possiede necessariamente un estreme superiore ed inferiore.

Esercizi: 1) $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$

$A = \{1, 2, ..., 9\}$ $\quad$ $\min A = 1$

$\max A = 9$

2) $A \subseteq \mathbb{Z}$, $A = \{x \in \mathbb{Z} ; x < 10\}$

$A = \{..., -1, 0, 1, ... 9\}$ $\quad$ $\nexists \min A$

$\max A = 9$

3) $A \subseteq \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 10\}$

Dato che 10 non é il piu piccolo maggiorante, $\nexists \min A$

$\nexists \max A$

4) $A \subseteq \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$

$\min A = 0$ $\quad$ $\nexists \max A$

5) $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \wedge x^2 \leq 2\}$

$\min A = 0$ $\quad$ $\max A = \sqrt{2}$

Lezione 3 _ Relazioni d'equivalenza

Def: Una relazione binaria $\mathcal{R}$ sull'insieme A si dice una relazione di equivalenza, in A se $\mathcal{R}$ verifica le seguenti proprietà:
(o, semplicemente, un'equivalenza)

(i) riflessiva : $(x,x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in A$

(ii) simmetrica : $(x,y) \in \mathcal{R}$ implica $(y,x) \in \mathcal{R}$, $\forall x,y \in A$

(iii) transitiva : $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$ implicano $(x,z) \in \mathcal{R}$

Le equivalenze vengono indicate in genere con simboli come $\sim$, $\equiv$, $\approx$, eccetera.

Invece di scrivere $(x,y) \in \mathcal{R}$, scriviamo $x \sim y$ o, anche, $x \sim y \,(\underset{\text{modulo}}{\text{mod}}\ \mathcal{R})$.

Esempi 1) Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $\sim$ la seguente relazione definita su $\mathbb{Z}$:

$$\underset{\text{tilda}}{a \sim b} \ (\text{mod } n) \iff a-b = kn \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Provare che $\sim$ è un'equivalenza.

riflessiva : $a \sim a \iff a - a = kn$. Per ipotesi $k \in \mathbb{Z}$, quindi possiamo prendere $k=0$ e dunque riflessiva.

simmetrica:

Dobbiamo dimostrare che $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Per un $k_1 \in \mathbb{Z}$, $a - b = k_1 n$ (moltiplicando entrambe le parti per -1)

$$b - a = \underbrace{-k_1}_{k_2 \in \mathbb{Z} \text{ dato che } k_1 \in \mathbb{Z}} n \quad \text{(risulta che è sufficiente prendere } k_2 = -k_1)$$

Da cui concludiamo che è simmetrica.

transitiva : se $a \sim b$ e $b \sim c$ allora $a \sim c$

Vuol dire che se $a-b = k_1 n$ e $b - c = k_2 n$ allora $a - c = k_3 n$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l} a - \cancel{b} = k_1 n \\ \cancel{b} - c = k_2 n \\ \hline a - c = (k_1 + k_2) n \end{array} \quad , \text{ se } k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \text{ allora } k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$$

È sufficiente prendere $k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$

Con questo abbiamo concluso la dimostrazione.

2) Sia A un insieme qualunque. La relazione di uguaglianza "$=$" sull'insieme A, definita da $a = b$ se a e b coincidono, è ovviamente riflessiva ($a = a$ per ogni $a \in A$), simmetrica (se $a = b$ allora $b = a$) e transitiva (se $a = b$ e $b = c$ allora $a = c$). Quindi $=$ è una relazione di equivalenza sull'insieme A.

Sia A un insieme e $\sim$ un'equivalenza su A. Per ogni $a \in A$ definiamo

$$[a]_\sim = \{x : x \in A, x \sim a\}$$

detta la classe di equivalenza di a modulo $\sim$.

Classi di resto (modulo n)

Sia $n \in \mathbb{Z}$ un numero fissato. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, diciamo che a e b sono congrui modulo n, e scriviamo $a \equiv b \pmod{n}$ oppure $a \equiv_n b$, se n divide $a-b$, cioè se a e b differiscono per un multiplo intero di n.

Esempi: $10 \equiv 100 \pmod 9$ perché $9 \mid (10-100) = -90$

$-1 \equiv 1 \pmod 2$ perché $2 \mid (-1-1) = -2$

$10 \not\equiv -1 \pmod 7$ perché 7 non divide $10-(-1) = 11$

La congruenza $\equiv_n$ è una relazione nell'insieme $\mathbb{Z}$, ed è facile verificare che si tratta di un'equivalenza in $\mathbb{Z}$.

Notare che se $a, b \in \mathbb{Z}$, abbiamo $[a] = [b]$ se e solo se $a \equiv_n b$. (Con $[a]$ si intende $[a]_{\equiv_n}$)

Esempio: Sia $n=5$. Le classi di equivalenza di $\mathbb{Z}$ modulo $\equiv_5$ sono:

$[0] = \{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

$[2] = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$[3] = \ldots$

$[4] = \ldots$

Numeri Complessi

– Introduzione

Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, tutto sembrerebbe funzionare al meglio, però se cerchiamo di trovare le soluzioni dell'equazione di secondo grado $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, non è possibile trovare le soluzioni in $\mathbb{R}$. Non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato dia -1. Quindi abbiamo bisogno di estendere $\mathbb{R}$ a un insieme che chiamiamo l'<u>insieme dei numeri complessi</u> che si indica con $\mathbb{C}$, dove si introduce <u>il valore i</u>, detto <u>unità immaginaria</u>, definito come: $i=\sqrt{-1}$

Possiamo definire $\mathbb{C}$ come l'insieme ottenuto dal prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con se stesso:

$\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$

Ne segue allora che ogni numero complesso è una coppia ordinata dei numeri reali

$z\in\mathbb{C} \Rightarrow z=(a,b)$ con $a,b\in\mathbb{R}$

I numeri complessi del tipo $(a,0) \xrightarrow{\text{coincidono}}$ i numeri reali

$(0,b) \longrightarrow$ gli immaginari puri

$i=(0,1)$

<u>Somma e prodotto di due numeri complessi si definiscono come</u>:

$z=(a,b)$, $w=(c,d)$

$z+w=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$z\circ w=(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

$(0,0)\rightarrow$ l'elemento neutro rispetto alla somma; $(1,0)$ rispetto al prodotto

$(-a,-b)\rightarrow$ l'opposto di (a,b)

$z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$: l'inverso moltiplicativo di z $\left(\text{Perché: } (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)\right)$

Complesso coniugato di z : $\overset{\text{si indica con}}{\bar{z}}=(a,-b)$

$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ e $b=d$.

L'insieme dei numeri complessi è definito come l'insieme di tutti i numeri della forma:

$z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ (forma algebrica)

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=\underbrace{(a,0)}_{a}+\underbrace{(0,1)}_{i}\underbrace{(b,0)}_{b}=a+ib$, $i^2=-1$

i: unità immaginaria

Sia $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)} \in \mathbb{C}$

Re(z): parte reale   Im(z): parte immaginaria

coniugato: $\bar{z} = a - ib$

$(\bar{\bar{z}}) = z$

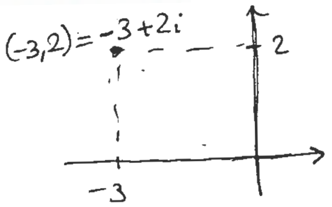
$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$

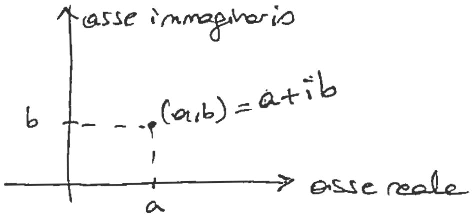
Piano complesso (Piano di Argand-Gauss)

$x \rightarrow$ asse reale

$y \rightarrow$ asse immaginario

Esempio: $z = -3+2i$ $\xleftarrow{\text{dopo}}$ La rappresentazione generale:





Esercizi:

1) $z = \frac{3+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{1^2 - \underbrace{(2i)^2}_{4i^2=-4}} = \frac{(3+6i+i+\overbrace{2i^2}^{-2})}{1+4} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

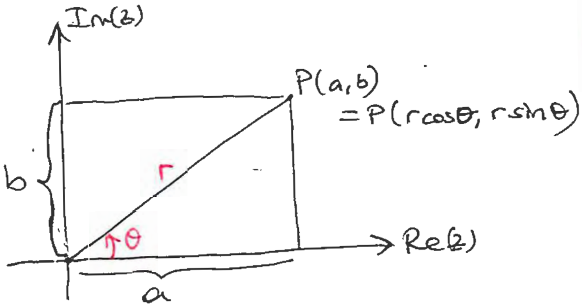
2) $z = \frac{1+i}{1-i}$, $\bar{z} = ?$

$z = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-\underbrace{i^2}_{-1}} = \frac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}}{2} = i \Rightarrow \bar{z} = -i$ $(z = a+ib, \bar{z} = a-ib)$

Forma Trigonometrica

Sia $z \in \mathbb{C}$, la forma trigonometrica di z si presenta nella forma:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < \theta \leq 2\pi$



$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = (a,b) = \underbrace{(a+ib)}_{\text{forma algebrica}} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

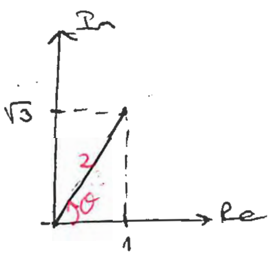
$= \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{forma trigonometrica}}$

misura del segmento

r: norma di z (oppure modulo) , θ: argomento principale di z (arg z)

Esempi: 1) $z = 1 + i\sqrt{3}$

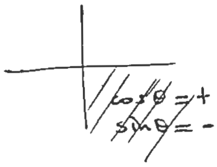
$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$



$\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

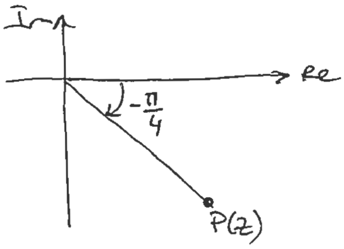
$\underbrace{z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{la forma trig. di } z}$

2) $z = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$$z = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$



$$= \frac{\sqrt{2}}{6} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\right) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{6}, \; b = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$P(z) = P(a,b) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

Formula Di De Moivre

Il prodotto tra due numeri complessi:

Sia $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tale che;

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \overset{-1}{i^2}\sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right)$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\underline{\underline{\theta_1+\theta_2}}) + i\sin(\underline{\underline{\theta_1+\theta_2}})\right)$$

$$\frac{z_1}{\underbrace{z_2}_{\neq 0}} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

Sia $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$

$$z \cdot z = z^2 = r^2(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta))$$

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

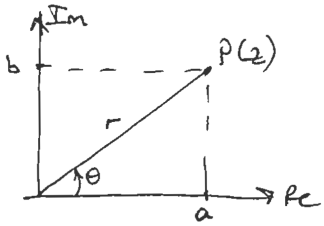
$$\vdots$$

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$ → formula di De Moivre

Forma Esponenziale

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può rappresentare nella forma esponenziale, cioè:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$



$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ l'identità di Eulero

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Le operazioni: Siano $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \in \mathbb{C}$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Sia $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$;

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Esercizio: Scrivere in forma esponenziale $z = \sqrt{5}\left(\cos \pi/5 - i\sin \pi/5\right)$

$$z = \sqrt{5}\left(\cos \pi/5 - \sin\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \sqrt{5}\, e^{-\frac{\pi}{5}i}$$

$$\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}\right]$$

Radici di un numero complesso

Consideriamo $z, \omega \in \mathbb{C}$,

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\omega = t(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ tale che $\omega^n = z$, $z \neq 0$

se $\omega^n = z$ allora $t^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $*$

$\Rightarrow t^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff t^n = r \Rightarrow t = \sqrt[n]{r}$ $(r>0)$

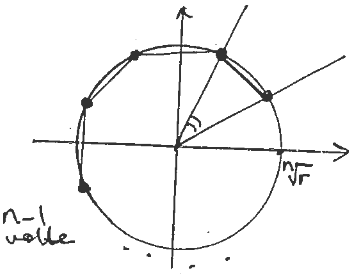
$n\alpha = \theta + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \overset{*}{=} t(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$, dove $k = 0, 1, \dots, n-1$

$\sqrt[n]{z}$ ha n radici distinte perchè



(2π si divide in "n" settori)

Per $k \Rightarrow \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

successivo

Per $k+1 \Rightarrow \dfrac{\theta + 2(k+1)\pi}{n}$

la differenza è $\dfrac{2\pi}{n}$

⋮

La distanza tra due punti rimane sempre uguale ..

dopo n-1 volte si arriva a stesso punto

Logaritmo in $\mathbb{C}$

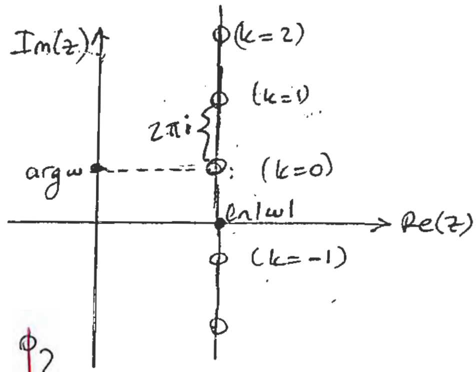
Consideriamo $w = u + iv$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tale che $\ln w = z$, quindi $w = e^z$

cioè, $w = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{|w|} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\cos y + i \sin y}$, $|w| = e^x$, $\arg w = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$u = e^x \cos y$
$v = e^x \sin y$

se $|w| = e^x \Rightarrow x = \ln|w|$

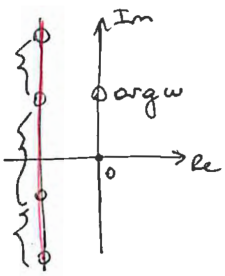
se $\arg w = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow y = \arg w + 2k\pi$ (perché $k \in \mathbb{Z}$)

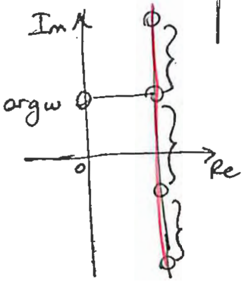


$$\boxed{z = \ln w = \underbrace{\ln|w|}_{Re} + i(\underbrace{\arg w + 2k\pi}_{Im}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Consideriamo i seguenti tre casi:

1) se $0 < |w| < 1 \Rightarrow \ln|w| < 0$

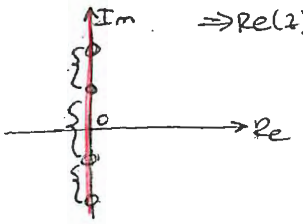




2) se $|w| > 1$
$\ln|w| > 0$

3) invece se $|w| = 1 \Rightarrow \ln|w| = 0$

$\Rightarrow Re(z) = 0$



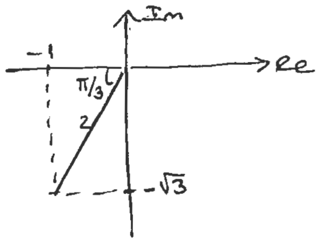
Esercizi su Numeri Complessi

1) Scrivere in forma algebrica $\frac{5+i}{3-i}$

$$\frac{5+i}{3-i} = \frac{(5+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{15+8i+i^2}{9-i^2} = \frac{14+8i}{10} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$$

2) Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale:

a) $z = -1 - \sqrt{3}\,i$



$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

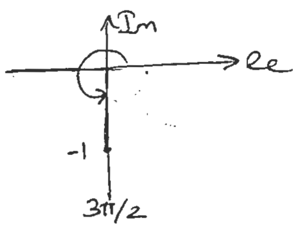
$|z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\arg z = \frac{4\pi}{3}$

$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$z = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$

b) $z = 1/i$

$z = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = -i$, $|z| = \sqrt{0+1} = 1$
$\arg z = 3\pi/2$



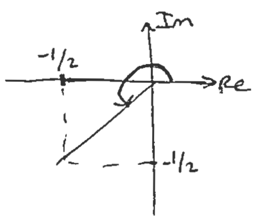
$z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$z = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

c) $z = \frac{1-i}{(1+i)^2}$

$z = \frac{1-i}{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i-i^2}{2i^2} = \frac{1+i}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2}/2$



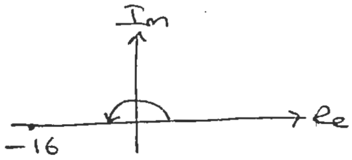
$\arg z = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{4}i}$

3) Calcolare e disegnare le radici seguenti:

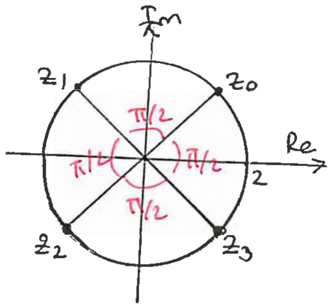
a) $\sqrt[4]{z}$ dove $z=-16$



$r = |z| = 16$

$\arg z = \pi$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right] \qquad k=0,1,2,3$$



$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2 + i\sqrt2$$

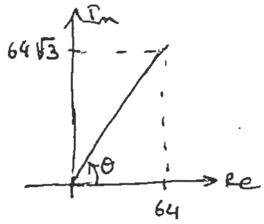
$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right) = -\sqrt2 + i\sqrt2$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right) = -\sqrt2 - i\sqrt2$$

la diff. $\frac{2\pi}{4} = \pi/2$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2 - i\sqrt2$$

b) $\sqrt[6]{z}$ dove $z = 64+64\sqrt3\, i$



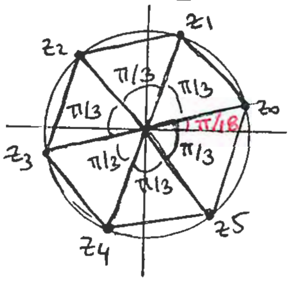
$$\theta = \arctan\left(\frac{64\sqrt3}{64}\right) = \arctan(\sqrt3) = \pi/3$$

$$|z| = \sqrt{\underbrace{64^2+3\cdot64^2}_{4\cdot64^2}} = 2\cdot64 = 128$$

$\arg z = \pi/3$

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{128}\left[\cos\left(\frac{\pi/3+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3+2k\pi}{6}\right)\right], \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$$\sqrt[6]{128} = \sqrt[6]{2^6\cdot2} = 2\sqrt[6]{2}$$



la diff.

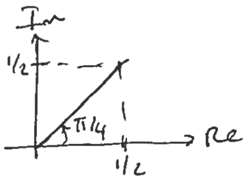
$$z_0 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right) \qquad \arg z_0 = \frac{\pi}{18}, \quad \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right) \qquad \arg z_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{18}$$

$$z_2 = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right) \qquad \arg z_2 = \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{18}$$

⋮

c) $\sqrt[3]{z}$, $z = \frac{i}{1+i}$

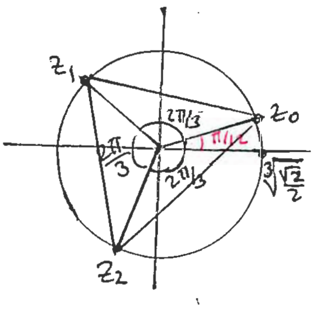


$$|z| = \sqrt{\frac14+\frac14} = \frac{\sqrt2}{2}$$

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{i+1}{2} = \frac12 + \frac12 i$$

$\arg z = \pi/4$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt2}{2}}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$



$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt2}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \qquad \arg z_0 = \frac{\pi}{12}, \text{ la diff: } \frac{2\pi}{3}$$

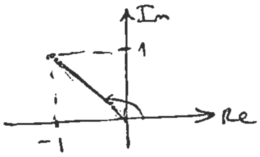
$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt2}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \qquad \arg z_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt2}{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \qquad \arg z_2 = \frac{9\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{12}$$

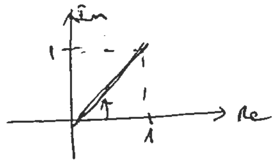
4) Scrivere in forma trigonometrica il risultato di a) $z=\dfrac{(i-1)^{12}}{(i+1)^{10}}$ tipo frazione

$$z=\frac{z_1^{12}}{z_2^{10}}$$

$|z_1|=|i-1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\qquad$ $|z_2|=|i+1|=\sqrt{2}$



$\arg z_1=\dfrac{3\pi}{4}$



$\arg z_2=\pi/4$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $\qquad$ $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_1^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left[\cos\Big(\underbrace{12\cdot\tfrac{3\pi}{4}}_{9\pi}\Big)+i\sin\Big(\underbrace{12\cdot\tfrac{3\pi}{4}}_{9\pi}\Big)\right]$$

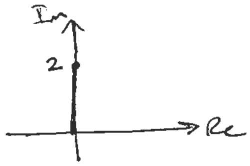
$$z_2^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left[\cos\Big(\underbrace{10\cdot\tfrac{\pi}{4}}_{5\pi/2}\Big)+i\cdot\sin\Big(\underbrace{10\cdot\tfrac{\pi}{4}}_{5\pi/2}\Big)\right]$$

$$z_1^{12}=64\cdot(-1+i\cdot 0)=-64$$

$$z_2^{10}=32\,(0+i\cdot 1)=32i$$

Quindi $\quad z=\dfrac{-64}{32i}=\dfrac{-64i}{-32}=2i$

$|z|=2$

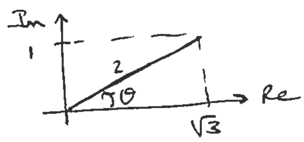


$\arg z=\pi/2$

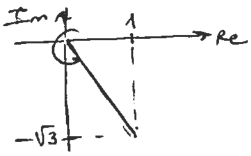
$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

b) $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{18}}{(1-\sqrt{3}i)^{17}}=\dfrac{z_1^{18}}{z_2^{17}}$

$|z_1|=|\sqrt{3}+i|=2$ $\qquad$ $|z_2|=|1-\sqrt{3}i|=2$



$\arg(z_1)=\pi/6$



$3\pi/2+\pi/6$

$\arg z_2=\dfrac{5\pi}{3}$

$\dfrac{85}{3}\pi=28\pi+\dfrac{\pi}{3}$

$$z_1=2\cdot e^{i\pi/6} \qquad\qquad z_2=2\cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

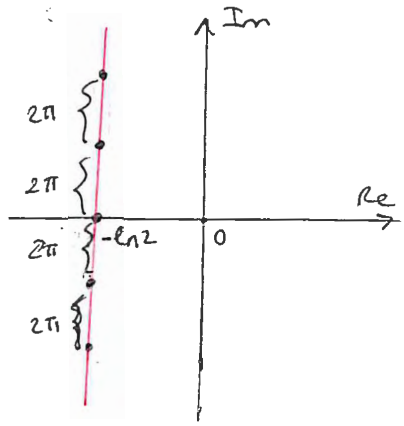
$$z_1^{18}=2^{18}\cdot e^{\frac{18\pi}{6}i}=2^{18}\cdot e^{3\pi i}=2^{18}\cdot e^{\pi i}$$

$$z_2^{17}=2^{17}\cdot e^{\frac{85}{3}\pi i}=2^{17}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$z=\frac{z_1^{18}}{z_2^{17}}=\frac{2^{\cancel{18}}\cdot e^{\pi i}}{\cancel{2^{17}}\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}}=2\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}=\underbrace{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{la forma trig.}}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\underbrace{-1+\sqrt{3}i}_{\text{risultato}}$$

5) Determinare i logaritmi dei seguenti e disegnarli approssimativamente.

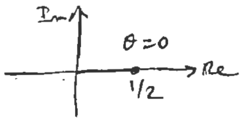
a) 0.5



$$\ln(0.5) = \ln|0.5| + i\left(\arg(0.5) + 2k\pi\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

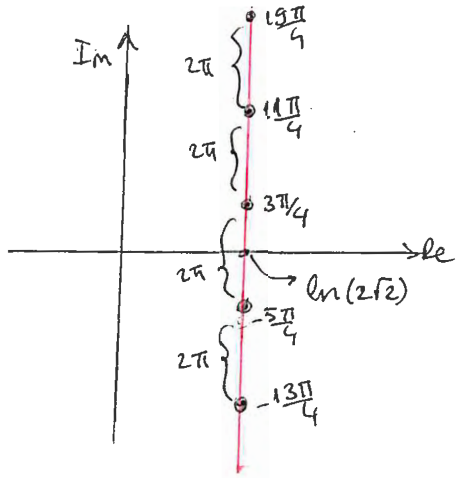
$$\ln|0.5| = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\arg(0.5) = 0$$



$$\Rightarrow \ln(0.5) = -\ln 2 + 2k\pi i \quad , k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

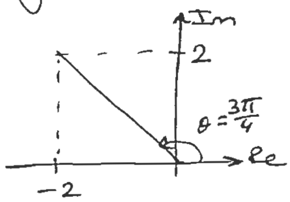
b) $2i-2$



$$\ln(2i-2) = \ln|2i-2| + i\left(\arg(2i-2) + 2k\pi\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

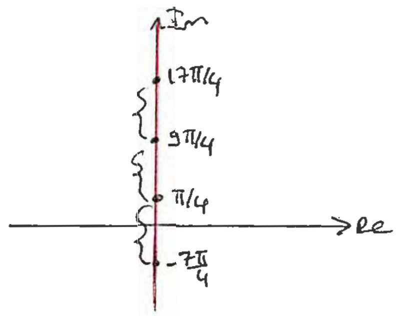
$$|2i-2| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(2i-2) = \frac{3\pi}{4}$$



$$\ln(2i-2) = \ln(2\sqrt{2}) + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad , k = 0, \pm1, \dots$$

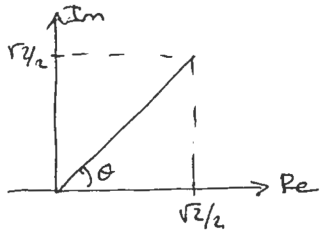
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$



$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| + i\left[\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) + 2k\pi\right] \quad , \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}|1+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1+1} = 1$$

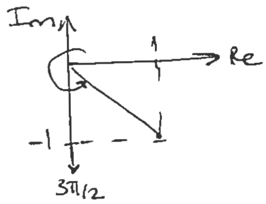
$$\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \pi/4$$



$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \quad , k = 0, \pm1, \dots$$

6) Calcolare z^9 dove $z = (1-i)$

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$\theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\arg z = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$z^9 = \underbrace{\sqrt{2^9}}_{\sqrt{2.2^8}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16 - 16i$$