Ejercicio 1

Celda Sallen-Key

En esta sección, se implementarán dos filtros pasabajos haciendo uso de celdas Sallen-Key en cascada. Sobre los mismos, se analizará su respuesta en frecuencia, impedancia de entrada e impedancia de salida, y la sensibilidad de los parámetros característicos del filtro a desviaciones en los valores de los componentes que lo integran respecto de su valor nominal.

Para esto, haremos en primer lugar un análisis teórico de las celdas Sallen-Key.

1.1 Introducción: la celda Sallen-Key

La Sallen-Key es una celda que permite realizar un filtro de segundo orden utilizando sólo *op amps*, resistencias y capacitores. Si bien normalmente con estos dos tipos de componentes pasivos sólo podrían obtenerse polos reales, es decir $Q \leq 1/2$, el *feedback* positivo introducido por el operacional permite obtener polos complejos conjugados, y por lo tanto una mayor selectividad. Como en este tipo de celdas existe un único *feedback* positivo, en general la sensibilidad del filtro a la dispersión de los parámetros del operacional es menor, y a los valores de los componentes pasivos es mayor, respecto de otro tipo de celdas.

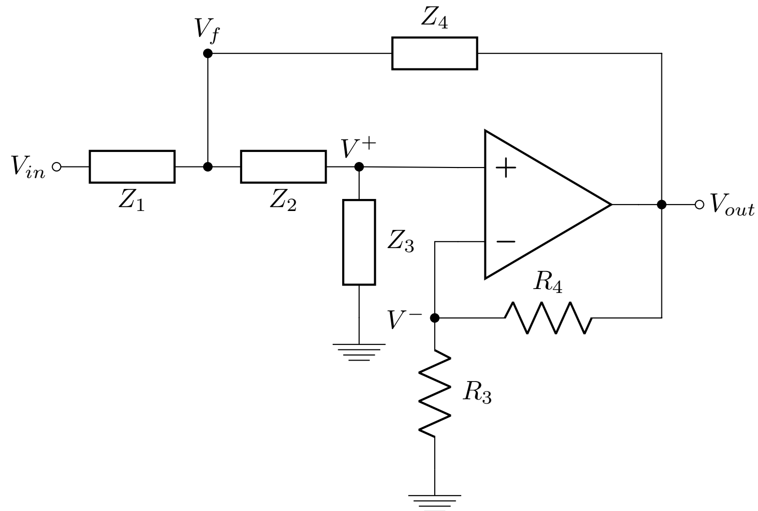

Figura 1.1: Celda Sallen-Key genérica

En esta configuración, las resistencias R_3 y R_4 determinan la ganancia de la celda, puesto que forman un circuito no inversor en el camino del *feedback* negativo. Las demás impedancias, por otro lado, sólo tienen injerecia en la ubicación de los polos y los ceros del circuito, si bien la misma tembién se ve afectada por las resistencias del no inversor.

Las ecuaciones que describen a este circuito son:

$$\begin{cases} V_{out} = A_{vol} \cdot (V^{+} - V^{-}) \\ V^{+} = \dfrac{Z_2}{Z_2 + Z_3} V_f \\ V^{-} = \dfrac{R_3}{R_3 + R_4} V_{out} \\ \dfrac{V_{in} - V_f}{Z_1} = \dfrac{V_f - V^{+}}{Z_2} + \dfrac{V_f - V_{out}}{Z_4} \end{cases} \tag{1.1}$$

De esta última ecuación y expresando V_f como función de V^{+} se puede obtener que:

$$V^{+} = \left[\left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4}\right) - \frac{1}{Z_2} \right] \cdot \left(\frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{out}}{Z_4} \right) = \frac{d}{Z_1} V_{in} + \frac{\gamma}{Z_4} V_{out} \tag{1.2}$$

Por simplicidad, se efectuó la sustitución $\gamma = \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4}\right) - \frac{1}{Z_2}$. Si llamamos además $K = 1 + {}^{R_4}/_{R_3}$ a la ganancia del no inversor, esto se puede expresar mediante el siguiente diagrama de flujo de señal:

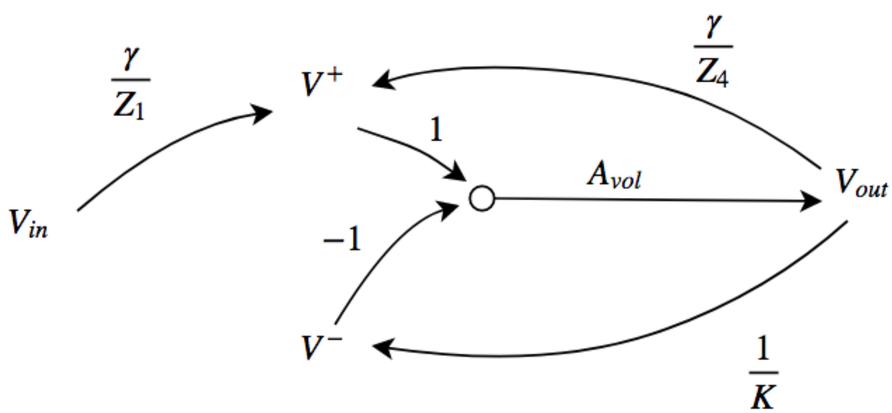

Figura 1.2: Diagrama de flujo de señal del circuito

Sucesivas simplificaciones permiten llevar el diagrama anterior a una forma que nos permita ver claramente los *loops* de *feedback* del circuito

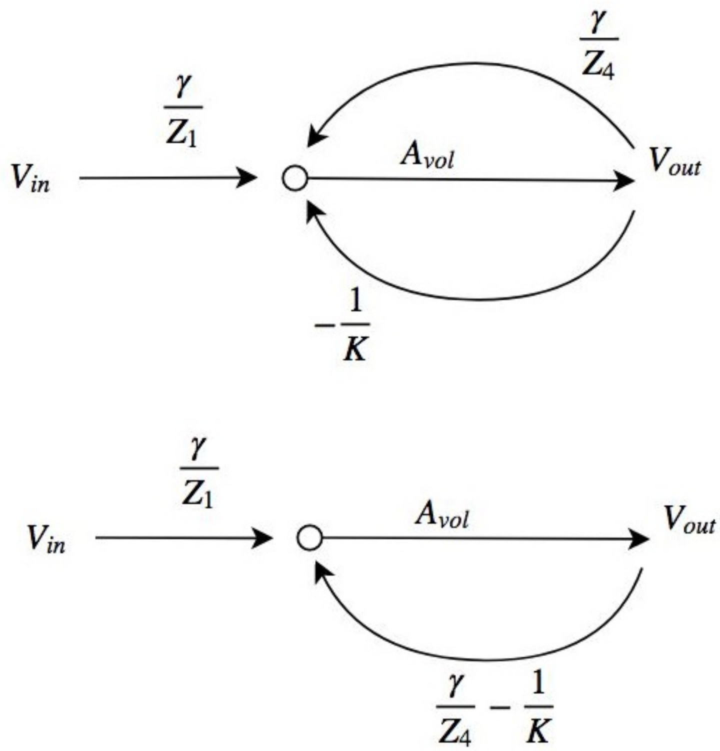

Figura 1.3: Simplificaciones del diagrama de flujo de señal

Partiendo de la figura 1.3, se puede obtener trivialmente la transferencia como:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\gamma}{Z_1} \cdot \left(\frac{A_{vol}}{1 + A_{vol} \cdot \left(\frac{\gamma}{Z_4} - \frac{1}{K} \right)} \right) \tag{1.3}$$

Si consideramos el caso ideal $A_{vol} \to \infty$, volviendo a reemplazar por el valor original de γ obtenemos que:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{K}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{Z_1 \cdot (1-K)}{Z_4} + 1} \tag{1.4}$$

En el caso particular de la celda Sallen-Key pasabajos, las sustituciones que se realizan son:

$$\begin{cases} Z_1 = R_1 & Z_3 = \dfrac{1}{sC_2} \\ Z_2 = R_2 & Z_4 = \dfrac{1}{sC_1} \end{cases}$$

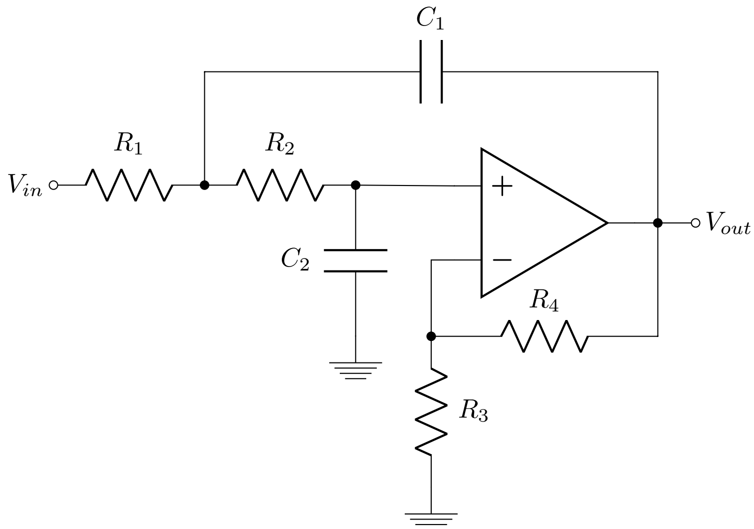

Figura 1.4: Celda Sallen-Key pasabajos

Reemplazando en la ecuación 1.4, se obtiene que:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{K}{s^2 \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 + s \cdot [R_1(1-K)C_1 + (R_1 + R_2)C_2] + 1} \tag{1.5}$$

Efectivamente, esta ecuación corresponde a un filtro pasabajos de segundo orden, cuyos parámetros característicos son:

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(R_1(1-K)C_1 + (R_1 + R_2)C_2} \\ G = 1 + \dfrac{R_4}{R_3} \end{cases} \tag{1.6}$$

Como se verá más adelante, los dos filtros implementados con estas celdas tienen ganancia unitaria. Si bien podrían utilizarse ganancias distintas de 1 en cada etapa, y si fuese necesario compensarlo con una etapa inversora o no inversora, por simplicidad sólo se considerará el caso K = 1. Un posible problema de utilizar este criterio es que obtener un valor elevado de Q puede tornarse más difícil, o simplemente imposible, dadas las restricciones prácticas a la hora de determinar los valores de los componentes. Sin embargo cabe destacar también que si $K > 1$, se debe prestar particular atención a no llegar a valores negativos para el coeficiente lineal del denominador de la transferencia, puesto que esto haría que el sistema pierda su estabilidad, y por lo tanto así nos desentendemos de este problema.

Para obtener ganancia unitaria, entonces, se reemplaza la resistencia R_4 por un cable y se deja un circuito abierto donde estaría R_3, de forma tal que $G = 1 + \frac{R_4}{R_3} = 1$.

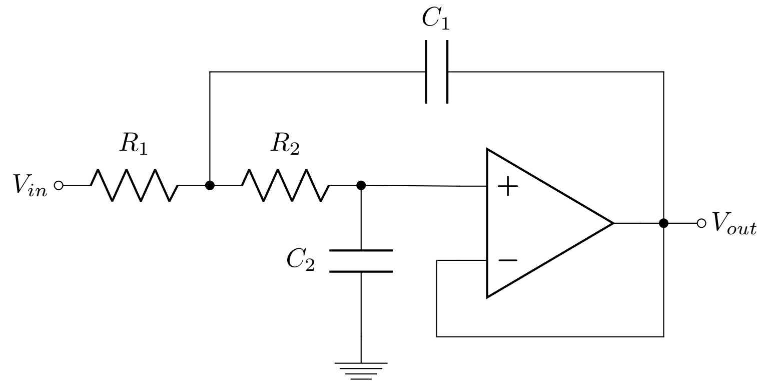

Figura 1.5: Celda Sallen-Key pasabajos con ganancia unitaria

«««< HEAD Con esta configuración, las expresiones finales de Q y f_0 son:

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{R_1 R_2 C_1}}{(R_1 + R_2)\sqrt{C_2}} \\ G = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

1.1.1 Análisis de sensibilidades

Antes de determinar los valores de los componentes que se utilizarán para cada filtro, estudiaremos a qué componentes es más sensible cada parámetro del circuito. A partir de las expresiones obtenidas en 1.7, utilizando la fórmula $S_x^y = \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, se calcularon las sensibilidades relativas de f_0 y Q a pequeñas variaciones en los valores de los componentes que las integran.

	R_1	R_2	C_1	C_2
f_0	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$
Q	$-\frac{R_1-R_2}{2\cdot(R_1+R_2)}$	$\frac{R_1-R_2}{2\cdot(R_1+R_2)}$	$1/2$	$1/2$

Tabla 1.1: Sensibilidades de f_0 y Q a los valores de los componentes

Según estos resultados, la frecuencia del polo de una celda Sallen-Key de ganancia unitaria tiene la misma sensibilidad respecto de cada componente. En cuanto al factor de calidad, por otro lado, la sensibilidad a los capacitores es siempre $\pm 1/2$, pero a las resistencias depende de los valores de las mismas. Al igual que ocurría antes, Q será siempre igual de sensible a ambas resistencias, aunque en este caso con signo opuesto, pero ahora si $R_1 = R_2$, esta sensibilidad es 0. Cuanto más cercanos sean los valores de R_1 y R_2 entre sí, y más grandes sean estos valores, menos sensible será Q a estos parámetros.

Por lo tanto, se tomará el criterio de trabajar con resistencias iguales o cercanas entre sí, y siempre en el orden de los $k\Omega$. De esta manera, la sensibilidad de Q a las resistencias no debería ser demasiado elevado. Por ejemplo, si se tomase en una celda $R_1 = 1k\Omega$ y $R_3 = 3k\Omega$, se tendría que $S_R^Q = \pm 0.5$, es decir que sería idéntica a S_C^Q.

Por otro lado, como todas las sensibilidades de $f_0$son -0.5 y no se contó con la posibilidad de utilizar capacitores de tolerancias inferiores al 10% para todos los valores, sabemos a priori que cada capacitor podría introducir un cambio de $-0.5 \cdot (\pm 10\%) = \mp 5\%$ en el valor de f_0. Como hay dos capacitores por celda, esta dispersión asciende a 10%. Por lo tanto, se determinó utilizar resistencias de tolerancia 1%, ya que de usar 5% los cambios en los parámetros característicos del circuito podrían ascender al 15%, mientras que de esta manera se logra limitar este valor a 11%.

1.2 Filtro 1: Legendre

En primer lugar, se busca implementar un filtro pasabajos que cumpla la siguiente plantilla:

Orden	f_p	A_p	$\|Z_{in}(f)\|$
5	$33kHz$	$3dB$	$\geq 50k\Omega\,\forall f$

Tabla 1.2: Plantilla del filtro pasabajos con Legendre

Como no se tiene restricciones de A_a, se determinó utilizar $A'_p = 1$ a la hora de calcular la transferencia, de forma tal que la tolerancia de los valores de los componentes no provoque que no se cumpla la plantilla.

Habiendo obtenido la función transferencia de este filtro mediante la aproximación de Legendre, poniendo además la condición de que todas las etapas deben tener ganancia unitaria, las etapas que se deben diseñar son las siguientes:

Etapa	Orden	$f_0\,(kHz)$	Q
1	1	29.5	-
2	2	34.2	0.72
3	2	40.3	2.23

Tabla 1.3: Etapas del filtro 1

1.3 Filtro 2: Bessel

=======

http://www.ti.com/lit/an/sloa024b/sloa024b.pdf »»»> parent of 266f140... codigo para histogramas pasabajos