Esercitazione 05: Trasformata di Laplace e funzione di trasferimento

25 marzo 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

Richiami di teoria

Le trasformate di alcuni segnali detti *canonici* sono riportate in Tabella 1.

Trasformata di segnali canonici	
$f(t)$	$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$
$\text{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^k\text{sca}(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$\cos(\omega t)\text{sca}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\text{sca}(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\text{sca}(t)$	$\frac{1}{s-a}$
$e^{at}t^k\text{sca}(t)$	$\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$
$e^{at}\cos(\omega t)\text{sca}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin(\omega t)\text{sca}(t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabella 1: Trasformata di Laplace di alcuni segnali canonici.

Due delle proprietà fondamentali della trasformata di Laplace sono la linearità e la proprietà di derivazione nel tempo:

- Linearità:

$$\mathcal{L}\left[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\right](s) = \alpha_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right](s) + \alpha_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right](s)$$

- Derivazione nel tempo:

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right](s) = s\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - f(0)$$

Esse consentono di ricondurre legami differenziali lineari nel dominio del tempo a legami algebrici nel dominio delle trasformate.

Teorema del valore iniziale Se il grado del denominatore di $F(s)$ è strettamente maggiore del grado del suo numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Teorema del valore finale

Se il grado del denominatore di $F(s)$ è maggiore o uguale del grado del suo numeratore, e se le radici del denominatore di $F(s)$ (i suoi poli) sono pari a 0 oppure hanno parte reale strettamente negativa, allora

$$f_\infty := \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s).$$

1 Stabilità e funzione di trasferimento

Dato il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

1. Si calcoli la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$.
2. Si dica se il sistema è asintoticamente stabile.

Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &:= G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \alpha_{31} & \star & \star \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in cui:

$$\begin{aligned} &\det(sI - A) = (s-1)s(s+2) - (s - (s-1)) = s^3 + s^2 - 2s - 1 \\ &\alpha_{31} = \Delta_{13} = (-1)^{1+3} s = s, \end{aligned}$$

da cui si ottiene che:

$$G(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 - 2s - 1}.$$

2. Poiché il denominatore non ha coefficienti tutti concordi in segno, è violata la condizione necessaria per l'asintotica stabilità: il sistema non è asintoticamente stabile. Inoltre, dato che i coefficienti del denominatore cambiano di segno una sola volta, si sa che esiste un autovalore con parte reale strettamente positiva.

2 Risposta all'esponenziale

Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t) \\ y(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

con $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 0$.

1. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.
2. Si valuti la stabilità del sistema.
3. Si calcoli l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso $u(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$.
4. Si calcoli l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso $u(t) = e^{t}$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. Le matrici del sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

   Per calcolare la funzione di trasferimento (F.d.T.) dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$, si può applicare la definizione di F.d.T.:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} := G(s) &= C\,(sI - A)^{-1}\,B + D \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

2. Il denominatore della F.d.T. è dello stesso ordine della matrice A del sistema, per cui esso coincide con il polinomio caratteristico di A. Dato che le radici del denominatore della F.d.T. sono $s = -2$ ed $s = -3$, il sistema è asintoticamente stabile per il criterio degli autovalori.

3. L'ingresso $u(t) = e^{2t}$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{2t}\right](s) = \frac{1}{s-2}.$$

   Si può quindi calcolare l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

   Si può ottenere l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)(s-2)} \end{aligned}$$

Quindi deve valere che:

$$s - 1 = \alpha_1(s+3)(s-2) + \alpha_2(s+2)(s-2) + \alpha_3(s+2)(s+3)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa s, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di s per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri α_1, α_2 e α_3:

- Sostituendo $s = -2$:

$$-2 - 1 = \alpha_1(-2+3)(-2-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{3}{4}$$

- Sostituendo $s = -3$:

$$-3 - 1 = \alpha_2(-3+2)(-3-2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{4}{5}$$

- Sostituendo $s = 2$:

$$2 - 1 = \alpha_3(2+2)(2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{1}{20}$$

Per cui l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s+2)(s+3)(s-2)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{s-2}\right](t) \\ &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} + \alpha_3 e^{2t} \\ &= \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{20}e^{2t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il grafico del movimento forzato dell'uscita è riportato in Figura 1.

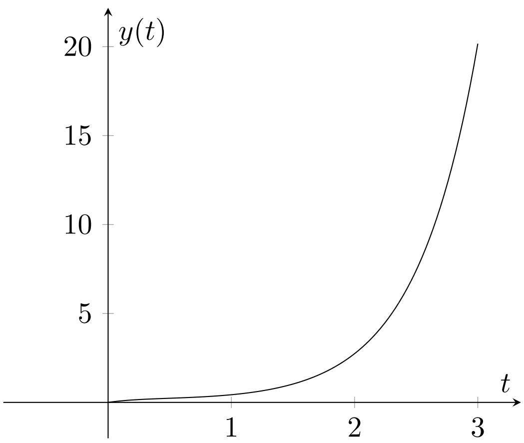

Figura 1: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^{2t}$.

4. L'ingresso $u(t) = e^t$ ha trasformata di Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^t\right](s) = \frac{1}{s-1}.$$

Si può quindi calcolare l'espressione del movimento forzato dell'uscita nel dominio delle trasformate come:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}.$$

Si può ottenere l'espressione del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ antitrasformando $Y(s)$, scomponendola in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} &= \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} \\ &= \frac{\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

Quindi deve valere che:

$$1 = \alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni valore della variabile complessa s, si possono sostituire in maniera opportuna dei valori di s per ottenere le equazioni necessarie per trovare i parametri α_1 e α_2:

- Sostituendo $s = -2$:
$$1 = \alpha_1(-2+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 1$$
- Sostituendo $s = -3$:
$$1 = \alpha_2(-3+2), \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -1$$

Per cui l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s+2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+3}\right](t) \\ &= \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-3t} \\ &= e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il grafico del movimento forzato dell'uscita è riportato in Figura 2.

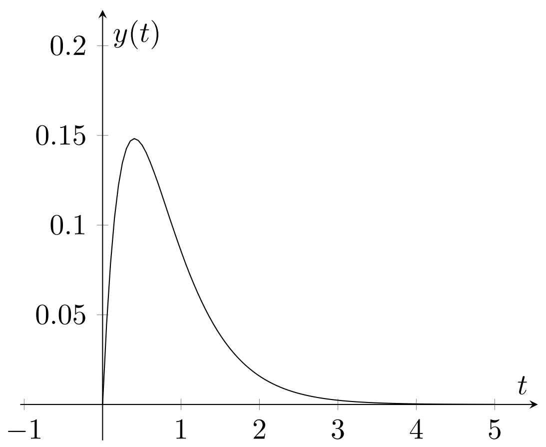

Figura 2: Risposta del sistema all'ingresso $u(t) = e^t$.

Osservazione 1. *Si noti che nonostante si applichi un ingresso esponenziale che tende a infinito per $t \to \infty$, l'uscita non diverge. Ciò è legato al fatto che il contributo dell'ingresso è* bloccato *dallo zero della F.d.T.. Questa proprietà è detta anche* ***proprietà bloccante degli zeri****.*

3 Movimento del sistema

Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 9u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ e valutare la stabilità del sistema.
2. Determinare l'espressione analitica $y(t)$ della risposta a $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.
3. Verificare la correttezza dell'espressione applicando, se possibile, i teoremi del valore iniziale e finale.
4. Determinare il movimento dell'uscita associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u(t) = e^{-3t}, t \geq 0.$$

Soluzione

1. Si può calcolare la F.d.T. utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{10}{s+1}$$

   Il sistema ha un autovalore nascosto. Infatti

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

   Il sistema è asintoticamente stabile dato che entrambi gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa.

2. L'espressione dell'uscita del sistema in trasformata di Laplace è:

$$Y(s) = \frac{10}{s+1} \cdot \frac{1}{s+3} = \frac{10}{(s+1)(s+3)} = \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\beta}{s+3} = \frac{\alpha(s+3) + \beta(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

   Deve quindi valere che:

$$10 = \alpha(s+3) + \beta(s+1)$$

   - Sostituendo $s = -1$:

$$10 = \alpha(-1+3), \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5$$

   - Sostituendo $s = -3$:

$$10 = \beta(-3+1), \quad \Rightarrow \quad \beta = -5$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 5^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

3. Nel punto precedente abbiamo trovato che:

$$y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$$

da cui si può verificare facilmente che

$$y(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$$

Verifichiamo questi risultati con il teorema del valore iniziale (TVI) e con il teorema del valore finale (TVF)

- TVI:

$$y(0) = \lim_{s \to +\infty} sY(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

Osservazione 2. *Accade sempre che $y(0) = 0$ se $G(s)$ è strettamente propria.*

- TVF: Dato che $Y(s)$ è strettamente propria e ha radici del denominatore in $s = -1$ e $s = -3$, si può applicare il TVF. Il valore di regime dell'uscita è quindi:

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} \frac{10s}{(s+1)(s+3)} = 0$$

4. Per il principio di sovrapposizione degli effetti vale che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

in cui il movimento forzato dell'uscita è dato dall'espressione $y_F(t) = 5e^{-t} - 5e^{-3t}$.

Per calcolare il movimento libero possiamo fare la combinazione lineare dei modi del sistema. Calcoliamo, quindi gli autovalori del sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Dato che A è diagonale, la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore coincidono. Si ha quindi un solo modo del sistema e^{-t}. Quindi $y_L(t)$ è dato da

$$\begin{cases} y_L(t) = \gamma e^{-t}, t \geq 0 \\ y_L(0) = x_1(0) + x_2(0) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 3$$

Da cui

$$y_L(t) = 3e^{-t}, t \geq 0.$$

Componendo i risultati precedentemente ottenuti, otteniamo che

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t) = 3e^{-t} + 5e^{-t} - 5e^{-3t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.$$

Alternativamente si poteva trasformare il sistema utilizzando le condizioni iniziali date:

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) = -X_2(s) + 9U(s) \\ Y(s) = X_1(s) + X_2(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) + \dfrac{1}{s+1} \\ X_2(s) = \dfrac{9}{s+1}U(s) + \dfrac{2}{s+1} \\ Y(s) = \dfrac{10}{s+1}U(s) + \dfrac{3}{s+1} \end{cases}$$

in cui

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \underbrace{\frac{10}{s+1}U(s)}_{M.F.} + \underbrace{\frac{3}{s+1}}_{M.L.} \\
&= \frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)} + \frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)(s+3)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right](t) \\
&= 5e^{-t} - 5e^{-3t} + 3e^{-t} = 8e^{-t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

4 Poli multipli

Dato un sistema lineare di ordine 3 avente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

1. Valutare la stabilità del sistema.
2. Determinare l'espressione analitica del movimento forzato dell'uscita $y(t)$ in risposta al segnale di ingresso a scalino $u(t) = \text{sca}(t)$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. I poli del sistema sono $s_1 = -1$ con molteplicità $n_1 = 2$ e $s_2 = -2$ con molteplicità $n_2 = 1$. Dato che il sistema di partenza è di ordine 3 e ci sono 3 poli nella funzione di trasferimento, non ci sono autovalori nascosti e i poli sono tutti e soli gli autovalori di A. Si può concludere per il criterio degli autovalori che il sistema è asintoticamente stabile.

2. Per determinare l'espressione analitica della risposta allo scalino passiamo dal dominio delle trasformate:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$$

Per poter antitrasformare, si può scomporre $Y(s)$ in fratti semplici:

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s+2)} &= \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2} \\ &= \frac{\alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2)} \end{aligned}$$

Deve quindi valere per ogni valore di s:

$$1 = \alpha_1(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) + \alpha_3 s(s+2) + \alpha_4 s(s+1)^2$$

- Valutando in $s = 0$:

$$1 = \alpha_1(1)^2(2), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

- Valutando in $s = -1$:

$$1 = \alpha_3(-1)(-1+2), \quad \alpha_3 = -1$$

- Valutando in $s = -2$:

$$1 = \alpha_4(-2)(-2+1)^2, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}$$

- Per ottenere il valore del parametro α_2 (associato all'autovalore con $s_1 = -1$), si può sfruttare il valore dei parametri trovati, e valutare l'uguaglianza in un altro punto. Quindi l'uguaglianza diventa:

$$1 = \frac{1}{2}(s+1)^2(s+2) + \alpha_2 s(s+1)(s+2) - s(s+2) - \frac{1}{2}s(s+1)^2$$

che, valutata in $s = -3$ da:

$$\begin{aligned} &1 = \frac{1}{2}(-3+1)^2(-3+2) + \alpha_2(-3)(-3+1)(-3+2) - (-3)(-3+2) - \frac{1}{2}(-3)(-3+1)^2 \\ &1 = \frac{1}{2}(-2)^2(-1) + \alpha_2(-3)(-2)(-1) - (-3)(-1) - \frac{1}{2}(-3)(-2)^2 \\ &1 = -2 - 6\alpha_2 - 3 + 6 \\ &\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

La risposta del sistema è quindi data da:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_2}{s+1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_3}{(s+1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha_4}{s+2}\right](t) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 t e^{-t} + \alpha_4 e^{-2t}, \quad t \geq 0 \\
&= \frac{1}{2} - t e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$