# Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 02/05/2017

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 4 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato

1. Quanti anagrammi <u>distinti</u> della parola AMICO ci sono? E della parola AMACA? Si scelga un anagramma di AMACA a caso. Supponendo che tutti gli anagrammi distinti siano equiprobabili, qual è la probabilità di scegliere una parola con tre A consecutive?
*Un anagramma è una parola formata dalle stesse lettere della parola originale, ma disposte in ordine diverso.*

2. Siano $A$ e $B$ due eventi tali che $\Pr(A) = 0.5$, $\Pr(B) = 0.4$. Quanto devono valere $\Pr(A \cap B)$, $\Pr(A|B)$, $\Pr(B|A)$, affinché gli eventi siano indipendenti? Sia $C$ un evento tale che $C \cap A = \emptyset$ e $\Pr(C) > 0$. Gli eventi $A$ e $C$ sono indipendenti? Giustificare la risposta.

3. Su un canale di comunicazione possono essere trasmesse solo le sequenze di 4 bit '0000' e '1111', con la stessa probabilità. Il canale riporta correttamente al ricevitore ogni bit '0' con probabilità $p_0 = 0.8$, e ogni bit '1' con probabilità $p_1 = 0.9$, indipendentemente dagli altri bit. Sapendo di aver ricevuto la sequenza '0111', quali sono le probabilità di aver trasmesso '0000' e '1111'?

4. Sia $X$ una v.a. con $f_X(x) = \frac{\gamma}{x^3}$ per $x \geq 1$, e $f_X(x) = 0$ altrimenti. Determinare il valore di $\gamma$. Determinare per quali naturali $n = 1, 2, \ldots$, il momento $\mathsf{E}[X^n]$ esiste, ed eventualmente se ne calcoli il valore.

5. Sia $X \sim \mathcal{U}[-2, 2]$, e si consideri la funzione $g(x) = 1 - x^2$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Sia $Y = g(X)$. Determinare la funzione cumulativa di probabilità $F_Y(y) = \Pr(Y \leq y)$ e rappresentarla graficamente.

6. Una moneta bilanciata viene lanciata $n$ volte. Secondo il teorema fondamentale del limite, qual è il valore minimo di $n$ che garantisce al 95% che il numero di teste osservate non si discosta dal valore atteso per più del 5%?

7. Sia $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ e $Y_n = X^{2n-1}$ per $n = 1, 2, \cdots$. Determinare $\mathsf{Var}[Y_n]$. Mostrare che la sequenza $\{Y_n\}$ converge a 0 in probabilità usando la diseguaglianza di Chebyshev.

8. Si supponga che in questa prova in itinere abbiate risposto correttamente ad ogni esercizio (questo escluso) con probabilità $p = 0.6$, indipendentemente dagli altri esercizi. Qual è la distribuzione della v.a. che conta il numero di esercizi errati? (Determinarne anche i parametri). Sapendo che ogni esercizio corretto vale 4 punti, e che si assegnano o 0 o 4 punti ad ogni esercizio, qual è la probabilità di aver ottenuto almeno 24 punti su 28?

# Soluzioni

## Problema 1

Nella parola AMICO ci sono 5 lettere distinte, quindi ci sono $5! = 120$ anagrammi distinti.

Nella parola AMACA ci sono 3 lettere distinte, ovvero, scambiando di ordine le A non si ottiene un nuovo anagramma. Il numero di anagrammi distinti è quindi $5!/3! = 20$. Tra questi, il numero di quelli che contengono 3 A consecutive è $3 \cdot 2! = 6$, quindi la probabilità di pescarne una a caso è $6/20 = 0.3$.

## Problema 2

Gli eventi $A$ e $B$ sono indipendenti se e solo se $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$. L'indipendenza implica che $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ e $\Pr(B|A) = \Pr(A)$.

Gli eventi $A$ e $C$ non possono essere indipendenti, perché $0 = \Pr(A \cap C) = \Pr(A|C)\Pr(C)$, e dunque $0 = \Pr(A|C) \neq \Pr(A)$.

## Problema 3

Si indichi con Tx e Rx le sequenze di bit trasmessi e ricevuti, rispettivamente. Applicando il teorema di Bayes si ha

$$\begin{aligned}
\Pr(\text{Tx } 0000|\text{Rx } 0111) &= \frac{\Pr(\text{Rx } 0111|\text{Tx } 0000)\Pr(\text{Tx } 0000)}{\Pr(\text{Rx } 0111|\text{Tx } 0000)\Pr(\text{Tx } 0000) + \Pr(\text{Rx } 0111|\text{Tx } 1111)\Pr(\text{Tx } 1111)} \\
&= \frac{p_0(1-p_0)^3 \cdot 1/2}{p_0(1-p_0)^3 \cdot 1/2 + (1-p_1)p_1^3 \cdot 1/2} \\
&= \frac{0.8 \cdot 0.2^3}{0.8 \cdot 0.2^3 + 0.1 \cdot 0.9^3} \\
&= 0.0807 \\
\Pr(\text{Tx } 1111|\text{Rx } 0111) &= 1 - \Pr(\text{Tx } 0000|\text{Rx } 0111) \\
&= 0.9193
\end{aligned}$$

## Problema 4

Il valore di $\gamma$ si ottiene imponendo che l'integrale della densità di probabilità sia 1:

$$1 = \int_1^\infty \frac{\gamma}{x^3} dx = \left| -\frac{\gamma}{2x^2} \right|_1^\infty = \frac{\gamma}{2}$$

quindi $\gamma = 2$.

Il momento di ordine $n$ è

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X^n] &= \int_1^\infty x^n \frac{2}{x^3} dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^{3-n}} dx \\
&= \begin{cases} \left| -\frac{2}{x} \right|_1^\infty = 2 & n = 1 \\ \infty & n \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

quindi esiste solo il momento del primo ordine, ed è $\mathsf{E}[X] = 2$.

## Problema 5

Si ha $f_X(x) = 1/4$ per $-2 \leq x \leq 2$ e $f_X(x) = 0$ altrove. La funzione è

$$Y = \begin{cases} 1 - X^2 & -1 \leq X \leq 1 \\ 0 & |X| \geq 1 \end{cases}$$

dunque si nota subito che $0 \leq Y \leq 1$, cioè $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$, e $F_Y(y) = 1$ per $y \geq 1$. Inoltre per $y = 0$ si ha

$$\Pr(Y = 0) = \Pr(|X| \geq 1) = \Pr(X \leq -1) + \Pr(X \geq 1) = 1/2.$$

Per valori di $0 \leq y \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\
&= \Pr(Y = 0) + \Pr(0 < Y \leq y) \\
&= 1/2 + \Pr(0 < 1 - X^2 \leq y) \\
&= 1/2 + \Pr(1 - y \leq X^2 < 1) \\
&= 1/2 + \Pr(-1 < X \leq -\sqrt{1-y}) + \Pr(+\sqrt{1-y} \leq X < 1) \\
&= 1/2 + \frac{1-\sqrt{1-y}}{2} \\
&= 1 - \frac{\sqrt{1-y}}{2}.
\end{aligned}$$

Ricapitolando, si ha

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{1-y}}{2} & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

## Problema 6

Parafrasando il testo del problema, e indicando con $X$ il numero di teste osservate, si ha $\mathsf{E}[X] = n/2$, $\mathsf{Var}[X] = n/4$, e

$$\Pr(|X - n/2| \geq 0.05\frac{n}{2}) \leq 0.05.$$

Standardizzando la v.a. $X$, si ottiene

$$\Pr(\frac{|X - n/2|}{\sqrt{n/4}} \geq 0.05\sqrt{n}) \leq 0.05$$

e applicando l'approssimazione suggerita dal teorema fondamentale del limite, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, si ha

$$\Pr(|Z| \geq 0.05\sqrt{n}) = 2(1 - \Phi(0.05\sqrt{n})) \leq 0.05$$

ovvero

$$\Phi(0.05\sqrt{n}) \geq 0.975$$

$$0.05\sqrt{n} \geq 1.96$$

$$n \geq (1.96/0.05)^2 = 1536.64$$

quindi il più piccolo valore di $n$ che soddisfa la richiesta è $n = 1537$.

## Problema 7

Innanzitutto si ha $\mathsf{E}[Y_n] = \mathsf{E}[X^{2n-1}] = 0$ considerando la simmetria della distribuzione. La varianza è

$$\mathsf{Var}[Y_n] = \mathsf{E}[X^{2(2n-1)}] = \int_{-1}^{1} x^{2(2n-1)} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4n-1}.$$

Applicando la diseguaglianza di Chebyshev, si ha

$$\Pr(|Y_n - 0| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathsf{Var}[Y_n]}{\epsilon^2} = \frac{1}{(4n-1)\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

per $n \to \infty$ e ogni $\epsilon > 0$. Dunque $\{Y_n\}$ tende a 0 in probabilità.

## Problema 8

Il numero di esercizi errati $X$ è una v.a. Binomiale: $X \sim \mathrm{Bin}(7, 1 - 0.6)$. Il punteggio totale assegnato è quindi $Y = 4(7 - X)$, pertanto la risposta alla seconda domanda è:

$$\Pr(Y \geq 24) = \Pr(X \leq 1) = \binom{7}{0} 0.4^0 0.6^7 + \binom{7}{1} 0.4^1 0.6^6 \approx 0.1586.$$