# Esercitazione 01: Algebra delle matrici e numeri complessi

26 febbraio 2024 (3h)

**Fondamenti di Automatica**

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University
e successivamente in parte modificate e completate.

# 1 Definizioni di base

**Definizione 1** (Matrice $(m \times n)$)**.** *Tabella di $m$ righe ed $n$ colonne*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

**Definizione 2** (Vettore (colonna) $(m \times 1)$)**.**

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad b_i \in \mathbb{R}$$

Diamo per scontati i concetti di *somma* e *differenza* di matrici, di *prodotto di una matrice per uno scalare*, di *prodotto di matrici* e di *trasposta di una matrice.*

# 2 Traccia di una matrice (quadrata)

La traccia di una matrice quadrata è definita come

$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Proprietà della traccia**

- $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
- $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$, se $A$ e $B$ sono matrici quadrate

# 3 Determinante di una matrice (quadrata)

**Definizione 3** (Complemento algebrico)**.** *Data una matrice $A$ $n \times n$, si dice complemento algebrico (o cofattore) di $a_{ij}$ il determinante $\Delta_{ij}$ della sottomatrice di $A$ ottenuta eliminando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.*

Il calcolo è definito in modo ricorsivo:

1. $\det(a) = a$
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

**Proprietà del determinante**

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, se $A$ e $B$ sono matrici quadrate

Se $\det(A) = 0$, $A$ si dice **matrice singolare** (non invertibile).

# 4 Rango di matrici (rettangolari)

**Definizione 4** (Rango)**.** *Il rango di una matrice (rettangolare) $A$,* $\text{rank}(A)$*, è l'ordine della sottomatrice quadrata di $A$ non singolare di ordine massimo.*

Il rango corrisponde al numero massimo di righe (e colonne) linearmente indipendenti tra loro.

**Definizione 5** (Vettori linearmente indipendenti)**.** *Dati $n$ vettori $v_1$, $v_2$, ..., $v_n$, essi si dicono linearmente indipendenti se e solo se $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ scalari non tutti nulli*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

**Definizione 6** (Vettori linearmente dipendenti)**.** *Dati $n$ vettori $v_1$, $v_2$, ..., $v_n$, essi si dicono linearmente dipendenti se e solo se $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ scalari non tutti nulli, tali che:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

# 5 Matrice inversa (o reciproca)

**Definizione 7** (Matrice inversa)**.** *Data una matrice quadrata $A$ $n \times n$, la sua matrice inversa $A^{-1}$, se esiste, è una matrice $n \times n$ tale che*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

**Teorema 8.** *Condizione Necessaria e Sufficiente (CNS) per l'esistenza della matrice inversa di $A$ è che la matrice $A$ sia non singolare (cioè che il determinante di $A$ sia non nullo):*

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Di seguito indicheremo con $c_{ij}$ l'elemento sulla riga $i$-esima e sulla colonna $j$-esima di una matrice $C$.

## 5.1 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice $A$ $n \times n$ non singolare, l'elemento $b_{ij}$ della sua matrice inversa $B = A^{-1}$ si calcola nel modo seguente

$$b_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det A}$$

dove $\Delta_{ji}$ è il complemento algebrico di $a_{ji}$.

## 5.2 Esempio nel caso di matrice $2 \times 2$

Data una matrice $A$ $2 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

la sua inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

*Dimostrazione.* La matrice inversa di $A$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ha come elementi

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\det A} = (-1)^{1+1}\frac{a_{22}}{\det A} = \frac{a_{22}}{\det A} \\
b_{12} &= \frac{\Delta_{21}}{\det A} = (-1)^{1+2}\frac{a_{12}}{\det A} = -\frac{a_{12}}{\det A} \\
b_{21} &= \frac{\Delta_{12}}{\det A} = (-1)^{2+1}\frac{a_{21}}{\det A} = -\frac{a_{21}}{\det A} \\
b_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\det A} = (-1)^{2+2}\frac{a_{11}}{\det A} = \frac{a_{11}}{\det A}
\end{aligned}$$

dove

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

□

### Esempio

Calcolare la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

#### Soluzione

Basta applicare la formula (9). Quindi si può calcolare

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{0 \cdot 3 - 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

e moltiplicarlo per una matrice ottenuta da $A$ scambiando tra di loro gli elementi sulla diagonale principale e invertendo il segno degli elementi fuori dalla diagonale principale. Si ottiene, quindi

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 5.3 Proprietà della matrice inversa

Date due matrici quadrate $A$ e $B$, valgono le seguenti proprietà:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. se $A$ è una matrice diagonale

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{bmatrix}$$

6. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

## 6 Potenza ed esponenziale di matrice

Data la matrice $A$ $n \times n$, la sua potenza $k$-esima può essere definita ricorsivamente come $A^k = A(A^{k-1}) = (A^{k-1})A$, dove $A^0 = I$, dove $I$ è la matrice identità di dimensione $n \times n$, cioè

$$I = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$$

L'esponenziale della matrice $A$ è definito come

$$e^A := I + A + \frac{1}{2!}(A)^2 + \frac{1}{3!}(A)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}(A)^k + \ldots$$

### Esponenziale di $At$

Dalla definizione di esponenziale di matrice si calcola che

$$e^{At} := I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \ldots + \frac{1}{k!}(At)^k + \ldots$$

Si noti che

$$\begin{aligned}
(At)^2 &= At \cdot At = A \cdot At^2 = A^2 t^2 \\
(At)^3 &= At \cdot At \cdot At = A \cdot A \cdot At^3 = A^3 t^3 \\
&\vdots \\
(At)^k &= A^k t^k
\end{aligned}$$

Inoltre, la derivata rispetto al tempo dell'esponenziale della matrice $A \cdot t$ è

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = A e^{A \cdot t} = e^{A \cdot t} A$$

in analogia con il caso scalare.

**Osservazione 1.** *se $A = [a]$ è scalare*

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \ldots$$

*che è lo sviluppo in serie di Taylor di $e^{at}$ attorno a $t = 0$.*

### Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

determinare $e^{At}$.

### Soluzione

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ 0 & \lambda_2 t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 t)^2 \end{bmatrix} + \ldots \\
&= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}(\lambda_1 t)^2 + \ldots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{1}{2!}(\lambda_2 t)^2 + \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si noti che, se $A$ è diagonale, $e^{At}$ è anch'essa diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono gli esponenziali degli elementi di $A$ moltiplicati per $t$.

### Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare $e^{At}$.

### Soluzione

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots & t\left(1 + \lambda t + \frac{1}{2!}\lambda^2 t^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 t^3 + \dots\right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Esempio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

determinare $e^{At}$.

### Soluzione

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t + \lambda \frac{t^2}{2!} + \lambda^2 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda}\left(-1 + 1 + \lambda t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \lambda^3 \frac{t^3}{3!} \dots\right) \\ 0 & 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \dots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 7 Autovalori e autovettori

**Definizione 10** (Autovalori e autovettori). $\lambda \in \mathbb{C}$ *si dice autovalore di una matrice* $A$ $n \times n$ *se esiste un vettore* $v \in \mathbb{C}^n$ *con* $v \neq 0$ *tale che*

$$Av = \lambda v. \tag{11}$$

$v$ *è detto autovettore di* $A$ *associato a* $\lambda$.

Si noti che l'equazione (11) si riscrive come un'equazione $(\lambda I - A)v = 0$, che ha soluzione non nulla solo se e solo se $\det(\lambda I - A) = 0$.

**Definizione 12** (Polinomio caratteristico). *Il polinomio caratteristico di una matrice* $A$ $n \times n$ *è il polinomio di grado* $n$ *nella variabile complessa* $\lambda$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

**Definizione 13** (Equazione caratteristica)**.** *L'equazione caratteristica è l'equazione*

$$p_A(\lambda) = 0$$

Segue che

1. Gli autovalori di $A$ sono le radici del polinomio caratteristico di $A$.
2. Il numero degli autovalori è $\mu \leq n$, $\mu \in \mathbb{N}$
3. Ogni autovalore compare $n_i$ volte nell'equazione caratteristica, cioè:
$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$
dove $n_i$ è la **molteplicità algebrica** di $\lambda_i$
4. $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$.

### Esempio

Calcolare il polinomio, l'equazione caratteristica e gli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

### Soluzione

Calcoliamo

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

da cui possiamo ricavare il polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

L'equazione caratteristica è quindi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

L'equazione caratteristica di $A$ calcolata consente di determinare gli autovalori di $A$:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

## 7.1 Proprietà degli autovalori

Data una matrice $A$ $n \times n$ con elementi reali, valgono le seguenti proprietà

1. La matrice $A$ ha $\mu$ autovalori, ognuno con molteplicità algebrica $n_i$, $i = 1, \ldots, \mu$
2. $\sum_{i=1}^{\mu} n_i = n$, ossia la matrice $A$ di ordine $n$ ha $n$ autovalori in campo complesso, ognuno contato con la sua molteplicità algebrica
3. Gli autovalori sono reali oppure complessi e coniugati
4. $\det A = \prod_{i=1}^{\mu} (\lambda_i)^{n_i} = \lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} \cdots \lambda_\mu^{n_\mu}$
   - Di conseguenza
   $$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \exists i : \lambda_i = 0$$
5. $A$ triangolare (o diagonale) $\Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$
6. Se $\lambda$ è autovalore di $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ è autovalore di $A^{-1}$
7. La traccia della matrice $A$ è uguale alla somma degli autovalori di $A$
$$\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i \lambda_i$$

### 7.2 Proprietà degli autovettori

- $v_i$ è autovettore o **autospazio** associato a $\lambda_i$
- La dimensione (numero di gradi di libertà) dell'autospazio $v_i$ è $1 \leq g_i \leq n_i$ e si chiama **molteplicità geometrica** dell'autovalore $\lambda_i$
- La molteplità geometrica è data da:

$$g_i := n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$$

**Esempio**

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A$ è:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) &= \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di $A$ sono $\mu = 2$:

1. $\lambda_1 = 1$, con molteplicità algebrica $n_1 = 2$ e molteplicità geometrica

$$g_1 = n - \text{rank}(I - A) = 3 - \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 - 1 = 2$$

2. $\lambda_2 = -1$, con molteplicità algebrica $n_2 = 1$ e molteplicità geometrica

$$g_2 = n - \text{rank}(I - A) = 3 - \text{rank}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 3 - 2 = 1$$

In questo caso la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica dei due autovalori.

## 8 Similitudine e diagonalizzabilità

### 8.1 Similitudine

**Definizione 14** (Similitudine)**.** *Due matrici quadrate $A$ e $B$, entrambe $n \times n$, si dicono simili se esiste una matrice non singolare $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che*

$$B = TAT^{-1} \qquad \textit{(Trasformazione di similutidine)}$$

**Teorema 15.** *Gli autovalori di matrici simili coincidono.*

*Dimostrazione.* Siano $A$ e $B$ due matrici simili. Gli autovalori di $B = TAT^{-1}$ si ottengono come

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - TAT^{-1}) = \det(T\lambda IT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T\,(\lambda I - A)\,T^{-1}) \\ &= [\det(T)]\,[\det(\lambda I - A)]\left[\det\left(T^{-1}\right)\right] \\ &= \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

□

### 8.2 Diagonalizzabilità

**Definizione 16** (Diagonalizzabilità)**.** *Data una matrice $A$ ($n \times n$), essa è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice $T$ non singolare tale che $TAT^{-1}$ sia diagonale.*

Valgono alcune proprietà:

1. $A$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $A$ ammette $n$ autovettori $\{v_1, v_2, \dots, v_\mu\}$ linearmente indipendenti. Inoltre, la matrice $T$ di trasformazione che pone $A$ in forma diagonale ha inversa data da
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_\mu \end{bmatrix}$$
dove il numero di colonne di $v_i$ è pari a $g_i$.

2. $A$ è diagonalizzabile se e solo se $\forall \lambda_i$, $i = 1, \dots, \mu$
$$n_i = g_i, \quad \forall i = 1, \dots, \mu$$

3. Di conseguenza si ha che se $A$ ha $n$ autovalori distinti (ossia $\mu = n$) $\Rightarrow$ $A$ è diagonalizzabile

## Esempio

Verificare che la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
è diagonalizzabile e calcolare la matrice di similitudine per porla in forma diagonale.

### Soluzione

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

da cui
$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) =& (\lambda - 2)^2(\lambda + 1) + 0 + 0 - (0 + 0 + (\lambda + 1)) = \\ =& \left((\lambda - 2)^2 - 1\right)(\lambda + 1) = \left(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right)(\lambda + 1) = \\ =& (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi
$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Dato che gli $\mu = 3$ autovalori calcolati sono distinti, la matrice è diagonalizzabile.

Calcoliamo quindi gli autovettori associati agli autovalori

- $\lambda_1 = 3$
$$Av_1 = 3v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 3\alpha \\ \alpha + 2\beta = 3\beta \\ -\gamma = 3\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha + \alpha = 3\alpha \\ \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$$
Si può quindi scegliere un qualunque valore per $\alpha$ e ottenere un autovettore associato a $\lambda_1$. Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 1$

$$Av_2 = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = \alpha \\ \alpha + 2\beta = \beta \\ -\gamma = \gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha - \alpha = \alpha \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per $\alpha$ e ottenere un autovettore associato a $\lambda_2$. Scegliamo $\alpha = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_3 = -1$

$$Av_3 = -v_3 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -\alpha \\ \alpha + 2\beta = -\beta \\ -\gamma = -\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha - 6\alpha = 3\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \qquad \gamma \end{cases}$$

Si può quindi scegliere un qualunque valore per $\gamma$ e ottenere un autovettore associato a $\lambda_3$. Scegliamo $\gamma = 1$ e otteniamo l'autovettore

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ora possiamo ricavare la matrice di similitudine

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(T^{-1}) = -2, \quad T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e diagonalizzare la matrice $A$

$$A_d = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Osservazione 2.** *Se avessimo scelto altri autovettori il risultato sarebbe stato lo stesso.*

**Osservazione 3.** *L'ordine con cui gli autovettori sono accostati per ottenere la matrice di similitudine, definisce l'ordine con cui appaiono gli autovalori nella matrice diagonalizzata $A_d$.*

## Esercizio

Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio**

Dimostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile.

### 8.3 Diagonalizzabilità dell'esponenziale

Se $A$ è una matrice diagonalizzabile

$$TAT^{-1} = A_d$$

$e^{At}$ si può ottenere come

$$e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T$$

con $e^{A_d t}$ matrice diagonale data da

$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

*Dimostrazione.* Si osservi che $A = T^{-1}A_d T$. Allora

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots \\
&= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}(T^{-1}A_d Tt)^2 + \frac{1}{3!}(T^{-1}A_d Tt)^3 + \dots \\
&= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d TT^{-1}A_d Tt^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d TT^{-1}A_d TT^{-1}A_d Tt^3 + \dots \\
&= T^{-1}T + T^{-1}A_d Tt + \frac{1}{2!}T^{-1}A_d^2 Tt^2 + \frac{1}{3!}T^{-1}A_d^3 Tt^3 + \dots \\
&= T^{-1}\left[I + A_d t + \frac{1}{2!}(A_d t)^2 + \frac{1}{3!}(A_d t)^3 + \dots\right]T \\
&= T^{-1}e^{A_d t}T
\end{aligned}$$

□

## 9 Numeri complessi

**Definizione 17** (Numero complesso)**.** *Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è determinato da due numeri reali $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, detti rispettivamente* parte reale *e* parte immaginaria*. Il numero complesso si esprime nella* forma algebrica*:*

$$z = a + \jmath b,$$

*dove $\jmath$ è l'*unità immaginaria*. Dato $z = a + \jmath b$, si indicano $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$.*

**Definizione 18** (Unità immaginaria)**.** *Il numero complesso $\jmath$ è detto* unità immaginaria*. L'unità immaginaria gode della seguente proprietà:*

$$\jmath^2 = \jmath \cdot \jmath = -1$$

L'insieme dei complessi è indicato con $\mathbb{C}$. Il sottoinsieme dei complessi a parte immaginaria nulla si identifica con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. I numeri complessi con parte reale nulla si dicono **numeri immaginari** o **numeri immaginari puri**.

L'insieme $\mathbb{C}$ non è ordinato: non ha alcun senso scrivere $z_1 < z_2$ o $z_1 > z_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

## Esempio

Si determini la parte reale e immaginaria del numero complesso

$$z = 1 - \jmath 2$$

### Soluzione

La parte reale di $z$ è $\Re(z) = 1$, mentre la parte immaginaria è $\Im(z) = -2$.

**Definizione 19** (Coniugato)**.** *Dato un numero complesso $z = a + \jmath b$, si definisce il numero complesso* coniugato

$$\bar{z} = a - \jmath b$$

Una notazione alternativa per il coniugato è anche $z^*$

## Esempio

Dato il numero complesso $z = 1 - \jmath 2$, determinare il suo coniugato.

### Soluzione

Il coniugato di $z$ è dato da $\bar{z} = 1 + \jmath 2$.

**Definizione 20** (Inverso moltiplicativo di un numero complesso)**.** *Dato un numero complesso $z = a + \jmath b$, con $z \neq 0$, il suo inverso moltiplicativo si ottiene come*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - \jmath b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \jmath \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

**Osservazione 4.** *Si noti che se $z = \jmath$, il suo inverso è*

$$\frac{1}{\jmath} = -\jmath.$$

## 9.1 Rappresentazione polare

Dato che un numero complesso è specificato da due numeri reali è naturale identificare $z = a + \jmath b \in \mathbb{C}$ con la sua rappresentazione cartesiana $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, come mostrato in Figura 1. Il piano diventa allora una rappresentazione dell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. L'asse delle ascisse si dice *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

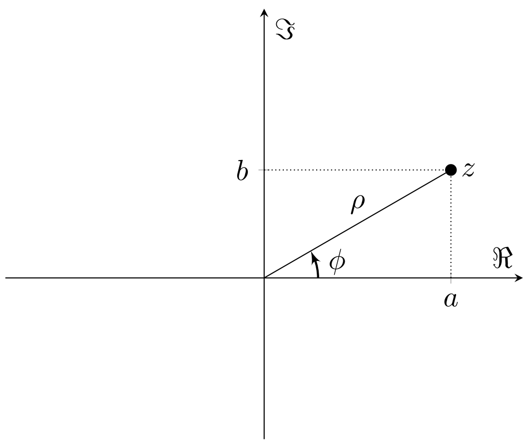


Figura 1: Rappresentazione di un numero complesso $z = a + \jmath b$ sul piano complesso.

Nel piano si può specificare un punto $z$ anche assegnandone le coordinate polari $(\rho, \phi)$, dove $\rho$ è il **modulo** e $\phi$ la **fase** (o argomento) del vettore che ha come origine l'origine del piano complesso, e come estremo il punto $z$. La coppia $(\rho, \phi)$ è la **rappresentazione polare** del numero complesso

$$z = a + \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) + \jmath \sin(\phi)\right).$$

**Definizione 21** (Modulo di un numero complesso). *Il modulo di un numero complesso $z = a + \jmath b$ si denota con $|z| = \rho$ ed è dato da*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Osservazione 5.** *Si noti che $|z|^2 = \rho^2 = z\bar{z}$.*

**Definizione 22** (Fase di un numero complesso). *La fase (o argomento) di un numero complesso $z = a + \jmath b$ si denota con $\measuredangle z = \arg(z) = \phi$ ed è determinata tramite la relazione*

$$\measuredangle z = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right), & se\ a > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & se\ a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & se\ a = 0\ e\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & se\ a = 0\ e\ b < 0 \end{cases}$$

## 9.2 Esponenziale trigonometrico

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Questa definizione è identica a quella che si da nel caso di $z$ reale. Anche nel caso complesso la serie è assolutamente convergente e vale

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

e quindi per $z = a + \jmath b$

$$e^z = e^{a+\jmath b} = e^a e^{\jmath b}.$$

## 9.3 Formula di Eulero

Si consideri il numero complesso $z = \jmath b$. Dalla definizione, si può ricavare che

$$e^{\jmath b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\jmath b)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{(2k)!} + \jmath \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nelle due sommatorie si riconoscono le serie di Taylor delle funzioni $\cos(b)$ e $\sin(b)$. Si può ricavare così, la *formula di Eulero*

$$e^{\jmath b} = \cos(b) + \jmath \sin(b).$$

L'esponenziale di un numero complesso immaginario puro è strettamente legato alla rappresentazione polare dei numeri complessi. Basta osservare che per $z \in \mathbb{C}$

$$z = a + \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) + \jmath \sin(\phi)\right) = \rho e^{\jmath \phi} = |z| e^{\jmath \measuredangle z}$$

Analogamente, si può dimostrare che il coniugato di $z$ è dato da

$$\bar{z} = a - \jmath b = \rho\left(\cos(\phi) - \jmath \sin(\phi)\right) = \rho e^{-\jmath \phi} = |z| e^{-\jmath \measuredangle z}$$

## Esempio

Trovare la rappresentazione polare $\rho e^{\jmath \phi}$ del numero complesso $z = 1 - \jmath$.

### Soluzione

Per ottenere la rappresentazione polare basta calcolare

$$\rho = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Quindi, si ha che $z = \sqrt{2} e^{-\jmath \frac{\pi}{4}}$.

### 9.4 Utili espressioni trigonometriche

Dalla formula di Eulero per $e^{\jmath\alpha}$ e $e^{-\jmath\alpha}$, è possibile ricavare le seguenti relazioni

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}}{2}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}}{2\jmath}$$