Geometria e Algebra Lineare
III Esercitazione

PROBLEMA **1.** Dato l'insieme di vettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^4$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(1) calcolare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\mathcal{B}$;
(2) esprimere $span(\mathcal{B})$ come spazio delle soluzioni di un sistema lineare.

.
PROBLEMA **2.** Calcolare una base e la dimensione dello spazio generato dai seguenti vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i tre vettori dati.

Calcolare una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene una base dello spazio generato dai tre vettori.

PROBLEMA **3.** Verificare se $V = \{(x, y, z, w) \mid x + y - w = z\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Verificare inoltre se l'insieme

$$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1)\}$$

è una base di V.

PROBLEMA **4.** Calcolare la dimensione dello spazio riga di A, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Estrarre dalle righe di A una base dello spazio riga di A.

PROBLEMA **5.** Calcolare la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare se le colonne di A sono linearmente indipendenti.

PROBLEMA **6.** Verificare che

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 2}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Trovare una base per V e la sua dimensione.

PROBLEMA **7.** Dimostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

PROBLEMA **8.** Calcolare una base $\mathcal{B}$ e la dimensione dello spazio generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene $\mathcal{B}$.

PROBLEMA **9.** Siano:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $U = span(u_1, u_2)$ e $W = span(w_1, w_2, w_3)$. Determinare la dimensione e una base di U, W, $U + W$, $U \cap W$.

PROBLEMA **10.** Siano

$$U = L((1,1,1,0,0,0),(0,-1,1,1,-1,0),(0,0,1,1,1,1)),$$

$$V = L((1,1,2,1,1,1),(0,-1,2,2,0,1),(0,1,1,1,1,0)).$$

Calcolare la dimensione e una base di U, V, $U+V$ e $U \cap V$.