Lezione 4

Soluzione di sistemi lineari

Matrice completa di un sistema

- La matrice completa del sistema AX=b è la matrice (A,b).
- Esempio: la matrice completa di $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$

è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemi omogenei: legge di sovrapposizione

- Un sistema $AX = b$ si dice omogeneo se

$$b = \vec{0}$$

- Se X_1, X_2 sono soluzioni di un sistema omogeneo allora anche $X_1 + X_2$ lo è.
- Se X_0 è soluzione di un sistema omogeneo allora anche tX_0 lo è.
- Dimostrazione:

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$A(tX_0) = tAX_0 = t\,\vec{0} = \vec{0}$$

Particolare + omogeneo

- Dato un sistema $AX = b$ l'insieme dei vettori colonna **v** che risolvono il sistema si indica con il simbolo Sol(A,**b**).
- Supponiamo che $AX = b$ abbia soluzione. Fissiamo una soluzione particolare X_{part} del sistema. Allora tutte le soluzioni del sistema sono date da $X_{part} + Y$ al variare di Y in Sol(A,$\vec{0}$). In simboli

$$\mathrm{Sol}(A,\mathbf{b}) = X_{part} + \mathrm{Sol}(A,\vec{0}).$$

Dimostrazione

- Se y è in Sol(A,$\vec{0}$) allora

$$A\left(X_{part}+y\right)=AX_{part}+Ay=b+\vec{0}=b$$

- Se X' è in Sol(A,**b**) sia $y = X' - X_{part}$ cosicchè

$$X' = X_{part} + y$$

Si ha che $Ay=A\left(X'-X_{part}\right)=AX'-AX_{part}=b-b=\vec{0}$
quindi $X' = X_{part} + y$ con y in Sol(A,$\vec{0}$)

Esercizio

- Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$$

- Soluzione: usiamo la prima equazione per eliminare la x dalla seconda e terza equazione

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3z=2 \\ x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=0 \\ -2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases}$$

Continuazione soluzione

- $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases}$ è di una forma particolare detta a gradini. Le variabili in testa a ogni equazione sono dette variabili vincolate. Le altre sono dette variabili libere.

- Risolvendo all'indietro si ricavano le variabili vincolate in termini di quelle libere:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=z/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ y=z/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-z/2-z \\ y=z/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\frac{3}{2}z \\ y=z/2 \end{cases}$$

Fine soluzione

- Tutte le soluzioni sono quindi i vettori $\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}z \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix}$

al variare del parametro z.

- Le soluzioni possono essere riscritte come

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. In questo caso $X_{part} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $y = z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

dà, al variare di z, le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Eliminazione e matrice completa

- Invece di usare le equazioni per eliminare variabili si possono equivalentemente utilizzare le righe della matrice completa.
- In questo modo le operazioni che trasformano il sistema in un sistema a gradini diventano operazioni sulle righe della matrice completa.
- Queste operazioni sono dette operazioni elementari di riga

Operazioni elementari di riga

- Le operazioni elementari sulle righe di una matrice sono:
  - Scambiare due righe
  - Moltiplicare una riga per un numero diverso da zero
  - Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.
  - Scriviamo $A \sim B$ se B si ottiene da A mediante una sequenza di operazioni elementari di riga

Soluzione di un sistema lineare: metodo di eliminazione

- Come abbiamo visto nell'esercizio si possono usare le operazioni elementari di riga per ridurre un sistema ad un sistema equivalente che è più semplice da risolvere.
- Questa idea è la base del metodo di eliminazione di Gauss-Jordan: mediante operazioni elementari di riga in modo algoritmico si riduce la matrice del sistema ad una forma particolare detta “a gradini”.

Matrici a gradini

- In una matrice qualsiasi il primo elemento non nullo di una riga viene chiamato pivot della riga
- Una matrice si dice a gradini se il pivot di ogni riga è in una colonna successiva a quella del pivot della riga precedente.
- In particolare, in una matrice a gradini, se una riga è nulla allora tutte le righe successive devono essere nulle

Esempi

- Matrici a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrici non a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduzione a gradini

- Ogni matrice può essere trasformata mediante una sequenza di operazioni elementari di riga in una matrice a gradini.

Esempi

- Riduciamo a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Riduzione a gradini: I esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduzione a gradini: II esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemi a gradini

- Un sistema si dice a gradini se la sua matrice completa lo è.
- Ogni sistema è equivalente ad un sistema a gradini: basta ridurre la sua matrice a gradini.
- In un sistema a gradini le variabili che corrispondono ai pivot sono dette variabili vincolate, mentre le altre variabili sono dette variabili libere.

Soluzione di un sistema a gradini

- Un sistema a gradini è facile da risolvere: se l'ultimo pivot è nell'ultima colonna della matrice completa allora il sistema non ha soluzione, altrimenti si risolvono all'indietro le variabili vincolate in termini di quella libere.

Esempi

- Risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}, \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Soluzione esempio 1

- Scriviamo la matrice completa e la riduciamo a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Scriviamo il sistema ridotto a gradini e risolviamo all'indietro:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+2z=0 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y+z=2-y \\ -2y=-2z=-2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

- Soluzione: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione esempio 2

- Scriviamo la matrice completa e la riduciamo a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- z è variabile libera. Scriviamo il sistema ridotto a gradini e risolviamo all'indietro:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z=1-z \\ y=0 \end{cases}$$

- Soluzioni: $\begin{pmatrix} 1-z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soluzione esempio 3

- Scriviamo la matrice completa e la riduciamo a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

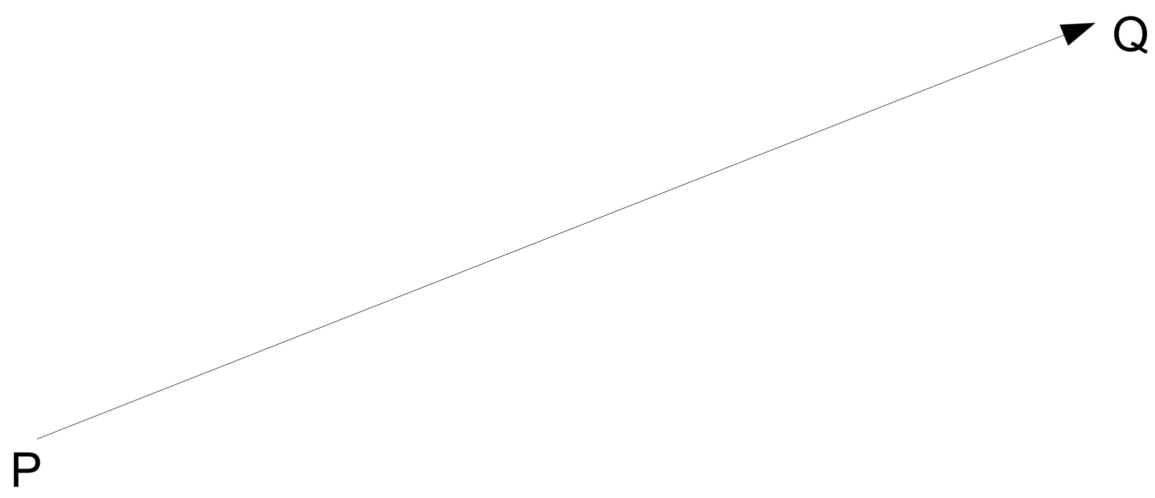
- L'ultimo pivot è in ultima colonna: non ci sono soluzioni.

Vettori fisici

- I vettori fisici, quali forza e velocità, sono quantità caratterizzate da
  - Una grandezza numerica: intensità o **norma** del vettore
  - Una direzione
  - Un verso

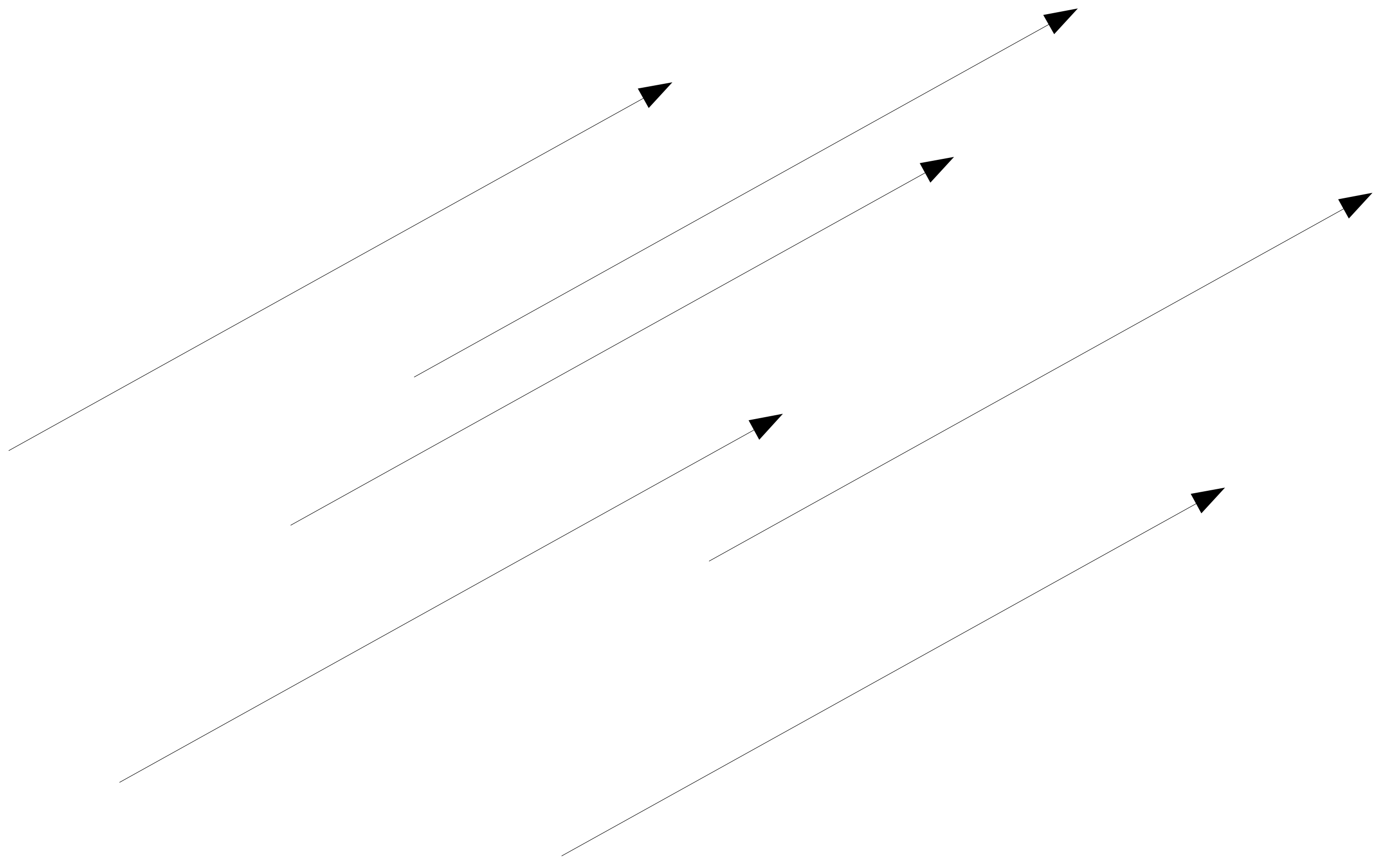
Segmento orientato

- Un modello geometrico per rappresentare i vettori fisici è dato dai segmenti orientati.



- Il segmento orientato PQ rappresenta il vettore
  - la cui norma è la lunghezza del segmento
  - la cui direzione è quella della retta individuata dalla retta passante per P e Q
  - Il verso è quello che va dal punto P al punto Q (P è il punto iniziale e Q è il punto finale)
- Il segmento orientato PP rappresenta il **vettore nullo** che è il vettore di intensità nulla e che non ha né direzione né verso.

- Un vettore è rappresentato da infiniti segmenti orientati:

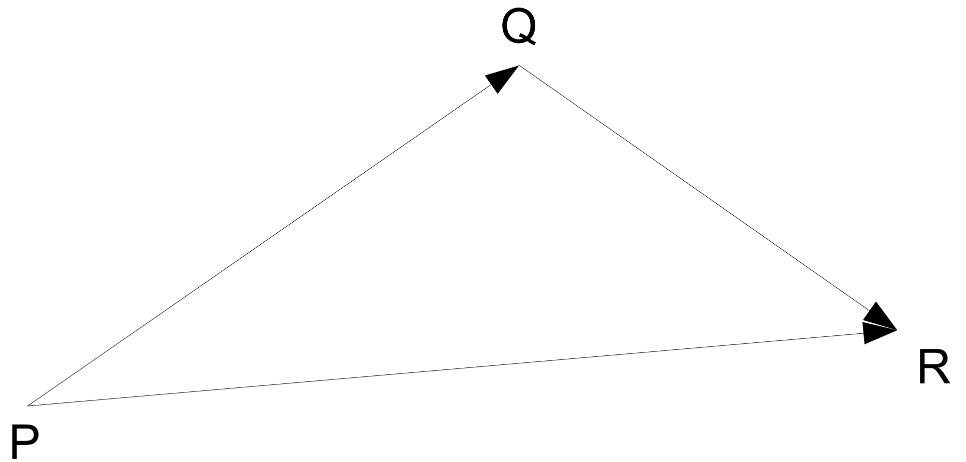


Definizione formale di vettore libero

- Due segmenti orientati si dicono **equipollenti** se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.
- Un vettore libero nel piano (o nello spazio) è la **classe di equipollenza** di un segmento orientato (cioè l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti ad un segmento dato).
- Il vettore libero rappresentato dal segmento PQ si indica con $\vec{PQ}$. Il vettore nullo si indica con $\vec{0}$

Legge di Galileo

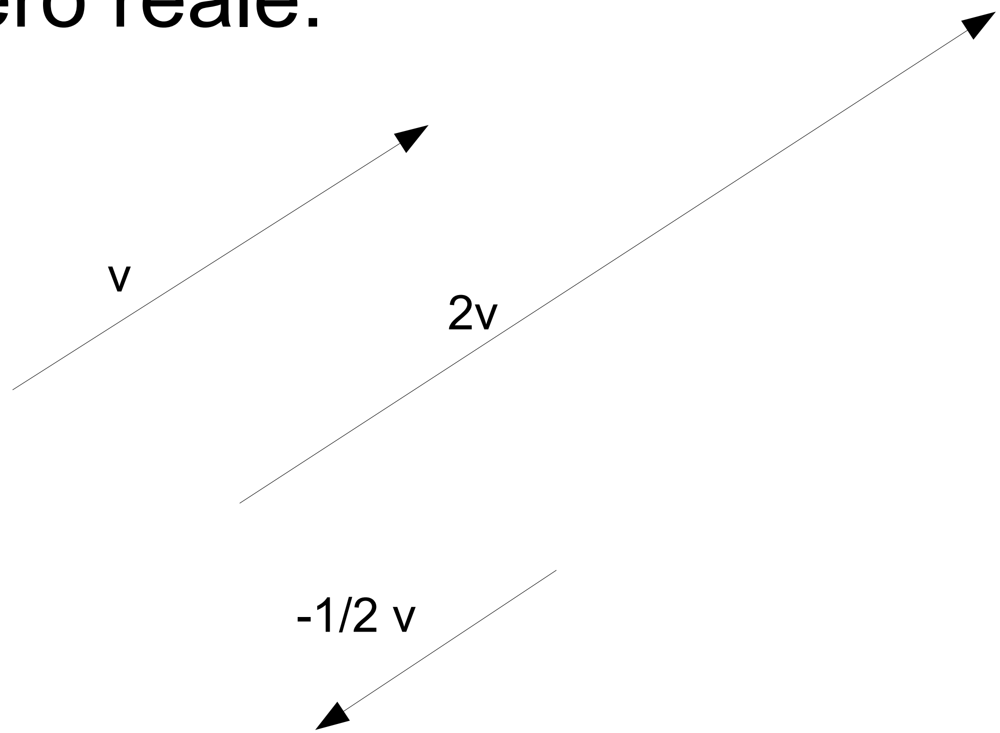
- I vettori liberi possono essere sommati utilizzando la cosiddetta legge di Galileo.



- In simboli $\vec{PQ}+\vec{QR}=\vec{PR}$

Prodotto per uno scalare

- I vettori possono essere anche moltiplicati per un numero reale:



Prodotto per uno scalare

- Se indichiamo con $\|\vec{PQ}\|$ la lunghezza del vettore $\vec{PQ}$ allora il prodotto di $\vec{PQ}$ per uno scalare t è il vettore $t\,\vec{PQ}$ tale che
  - $\|t\,\vec{PQ}\| = |t|\,\|\vec{PQ}\|$
  - La direzione di $t\,\vec{PQ}$ è la stessa di quella di $\vec{PQ}$
  - Il verso di $t\,\vec{PQ}$ è lo stesso di quello di $\vec{PQ}$ se t>0, mentre è il verso opposto se t<0.
  - Se t=0 allora $t\,\vec{PQ} = \vec{0}$

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità