Reti Logiche
V1.0 2018

Ripasso Algebra di Commutazione

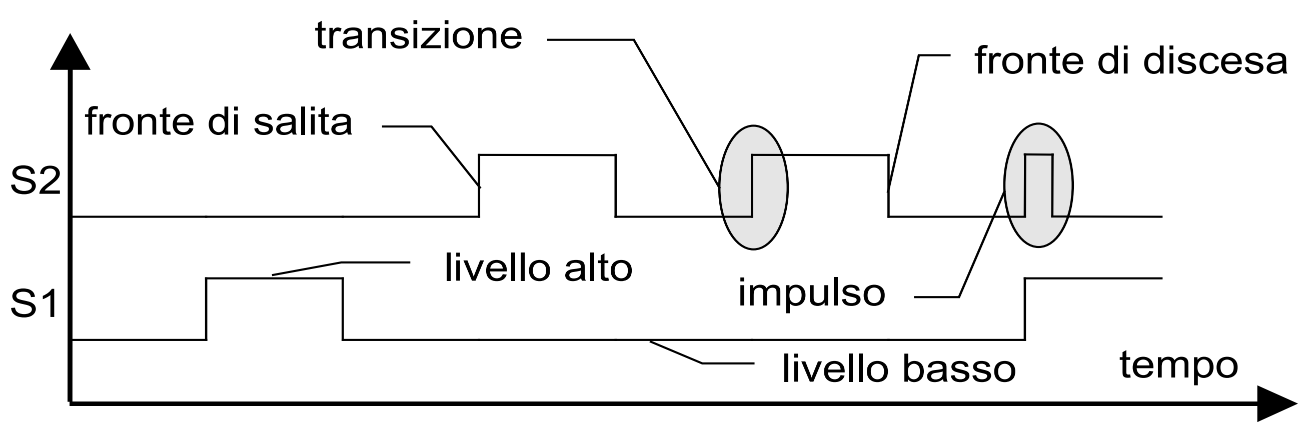
Docente:
prof. William FORNACIARI
William.fornaciari@polimi.it

Introduzione

- Sistemi digitali
  - ottima immunità ai disturbi
  - facilità realizzativa
  - possibilità di creare metodologie di progetto automatizzabili
  - precisione prevedibile a arbitraria
- Tipi di sistemi
  - custom(antifurto, accensione auto, …)
  - specializzati ma di uso generale (aritmetici, decoder, MUX)
  - con memoria (macchine a stati finiti, FSM)
  - senza memoria (circuiti combinatori)

Segnali binari

- Rappresentazione fisica (esempi)
  - tensione elettrica V
  - intensità di corrente I
  - potenza ottica P
- Diagramma temporale
  - trascureremo (quasi) sempre i transitori



Algebra di commutazione

- Algebra Boole
  - insieme di elementi K
  - esistono due funzioni {+, •} che fanno corrispondere a una qualsiasi coppia di elementi di K un elemento di K
  - Una funzione {¯}
- Algebra di commutazione
  - I valori delle variabili di commutazioni possono assumere solo due valori (0,1), (V,F), (H,L), …
  - la variabile logica non è un numero binario, gode di diverse proprietà
  - si è trovata una corrispondenza fra gli operatori fondamentali dell’algebra di commutazione e i circuiti digitali

Assiomi dell'algebra di Boole (1)

- K contiene al minimo due elementi a e b tali che $a \neq b$
- Chiusura
  - per ogni a e b in K: $a+b \subset K$ e $a \bullet b \subset K$
- Proprietà commutativa
  - $a + b = b + a$ e $a \bullet b = b \bullet a$
- Proprietà associativa
  - $(a + b) + c = a + (b+c) = a + b + c$
  - $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$

Assiomi dell'algebra di Boole (2)

- Indentità
  - Esiste un elemento identità rispetto a {+}, tale che $a + 0 = a$ per ogni $a \subset K$
  - Esiste un elemento identità rispetto a {• }, tale che $a \bullet 1 = a$ per ogni $a \subset K$
- Proprietà distributiva
  - $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$
  - $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$
- Complemento

Per ogni $a \subset K$ esiste un elemento $a \subset K$ tale che:

- $(a + a') = 1$ e $(a \bullet a') = 0$

Algebra di commutazione

- L'insieme K è ristretto a solo due elementi K={0, 1}
- Le operazioni logiche fondamentali OR, AND, NOT soddisfano gli assiomi dell'algebra di Boole
- Porte logiche: elementi circuitali corrispondenti

A	$f(A)=\overline{A}$
1	0
0	1

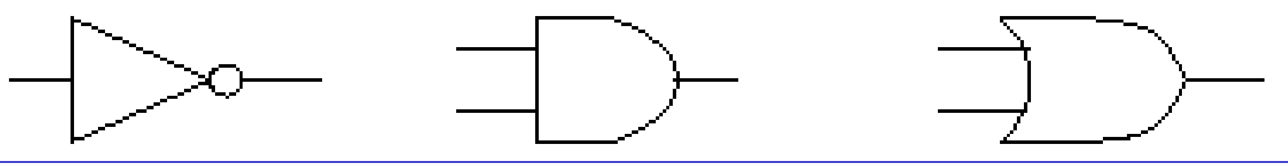
NOT
negazione

A	B	$f(A,B)=A \bullet B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND
prodotto logico

A	B	$f(A,B)=A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR
somma logica



Altri operatori di uso comune

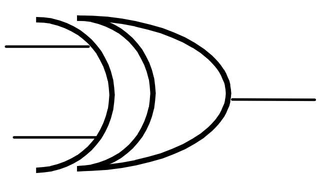
- Esistono 16 funzioni di due variabili, corrispondenti alle combinazioni dei vari ingressi
- Le più interessanti sono: XOR, NAND, NOR

A	B	$f(A,B)=A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

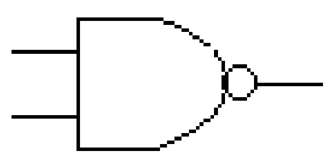
A	B	$f(A,B)=\overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$f(A,B)=\overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

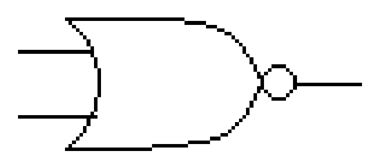
EX-OR



NAND



NOR



Algebra di commutazione: proprietà

- La dimostrazione può avvenire
  - mediante analisi esaustiva
  - usando proprietà già definite
- Principio di dualità
  - se vale un'identità booleana, allora vale anche l'identità duale, ottenuta scambiando + con • (somma con prodotto), rendendo naturali le variabili complementate e complementate quelle naturali

    $0 \leftrightarrow 1$ e $+ \leftrightarrow \bullet$
  - è conseguenza dell'interscambiabilità degli assiomi dell'algebra di Boole

Algebra di commutazione: Riepilogo proprietà

N.	Descrizione	Nome
1	Esistono gli elementi $0,1 \in K$ tali che : $A + 0 = A$ $A \bullet 1 = A$	Esistenza elementi identità
2	$A + B = B + A$ $A \bullet B = B \bullet A$	Proprietà commutativa
3	$A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$ $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$	Proprietà distributiva
4	Per ogni $A \in K$, esiste $\overline{A}$ tale che: $A \bullet \overline{A} = 0$ e $A + \overline{A} = 1$	Esistenza dell'inverso

Algebra di commutazione: Riepilogo proprietà

N.	Descrizione	Nome
5	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A\,(BC) = (AB)\,C$	Proprietà associativa
6	$A + A = A$ $A \bullet A = A$	Proprietà dell'idempotenza
7	$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$ $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$	Legge di DeMorgan
8	$\overline{\overline{A}} = A$	Involuzione

Funzioni logiche vs porte logiche

- Funzione logica a singola uscita $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Legge che associa un valore binario a tutte le combinazioni delle variabili indipendenti
  - Astrazione che non considera la "dinamica" dei segnali
- Qualunque funzione logica può realizzarsi usando un *insieme completo* di operatori elementari
  - NAND, NOR, (AND,NOT), (OR, NOT), (AND, OR, NOT)
  - Combinazioni di porte logiche consentono di realizzare le funzioni logiche
- Vedremo anche come trattare i casi con ingressi non completamente specificati e uscite multiple

Esempio: rilevatore di maggioranza

- Progettare un circuito logico a 3 ingressi *(A,B,C)* e una uscita *U* che assuma valore 1 quando, all'ingresso, il numero degli 1 supera il numero degli 0
- L’attenzione è sugli 1 della tabella di verità

Tabella di verità

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

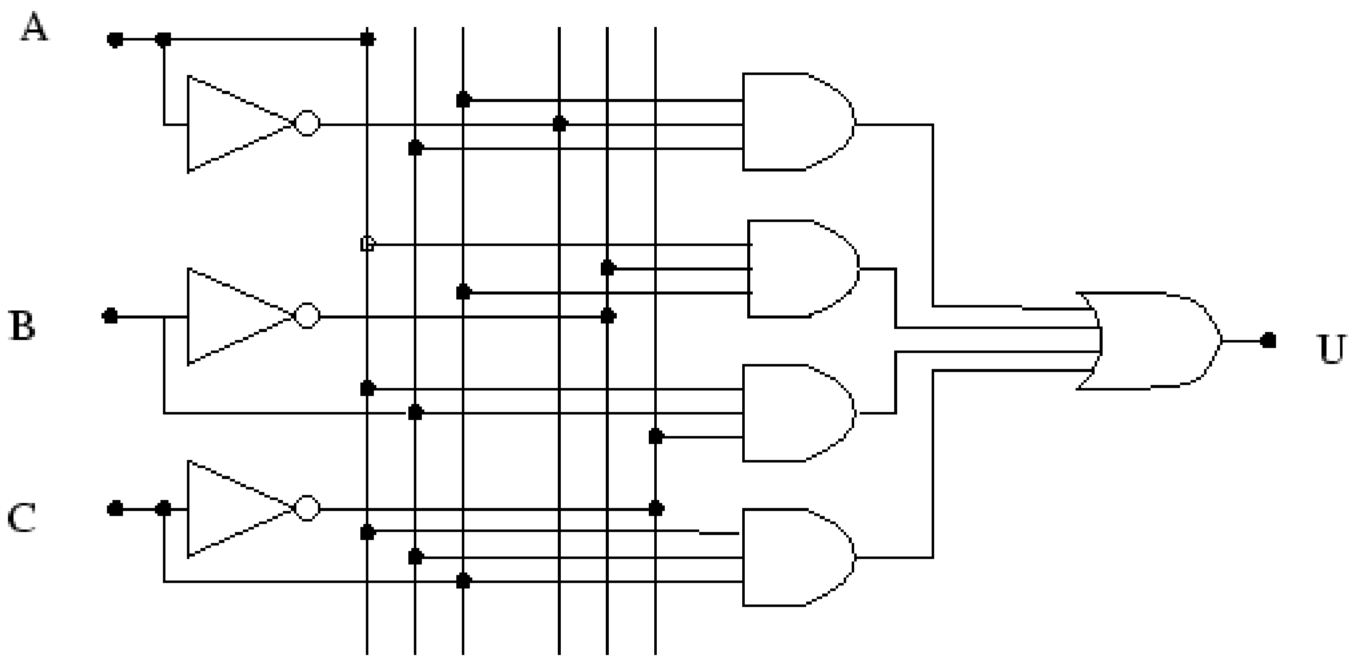
$\overline{A}BC$

$A\overline{B}C$

$AB\overline{C}$

ABC

Rilevatore di maggioranza: Rappresentazione circuitale



$$U = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Rilevatore di magg.: soluzione duale (1)

- L'attenzione è sugli 0 della tabella di verità

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$A+B+C$$

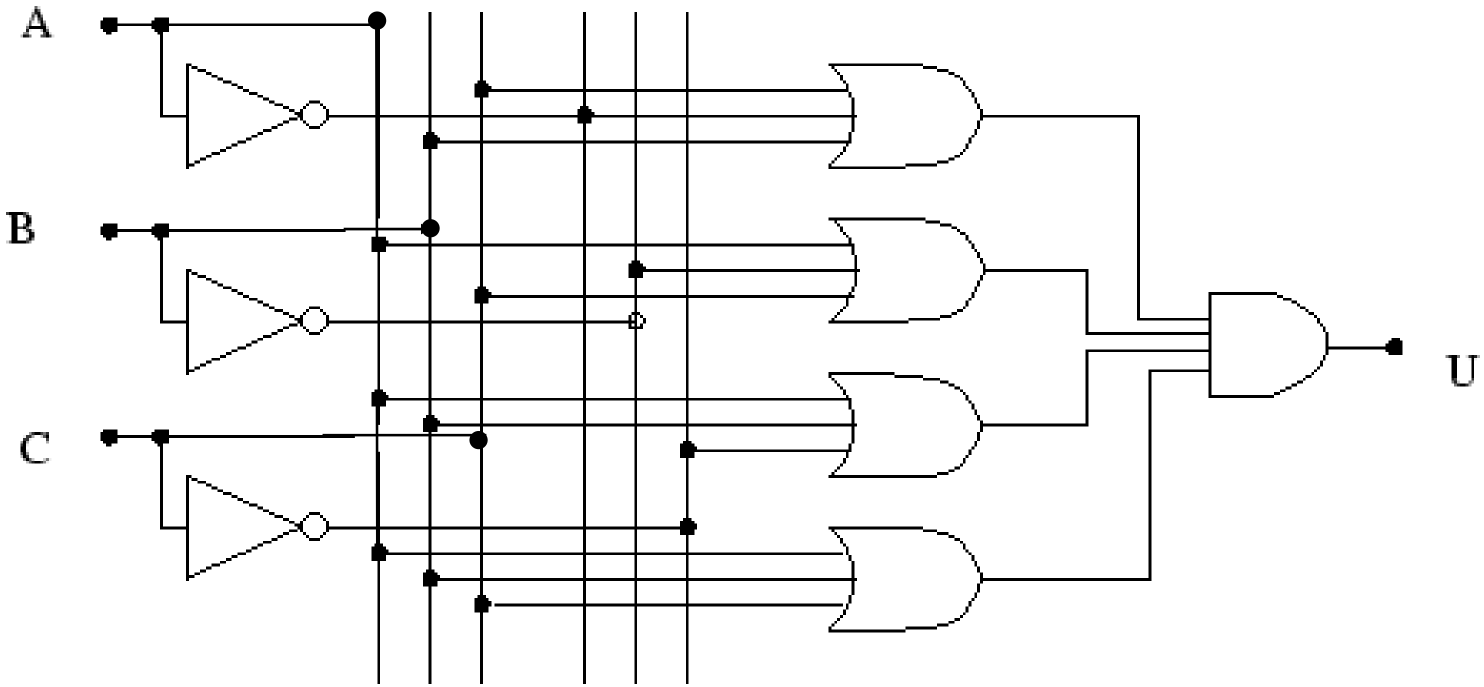
$$A+B+\overline{C}$$

$$A+\overline{B}+C$$

$$\overline{A}+B+C$$

$$U=(\overline{A}+B+C)\bullet(A+\overline{B}+C)\bullet(A+B+\overline{C})\bullet(A+B+C)$$

Rilevatore di magg.: soluzione duale (2)

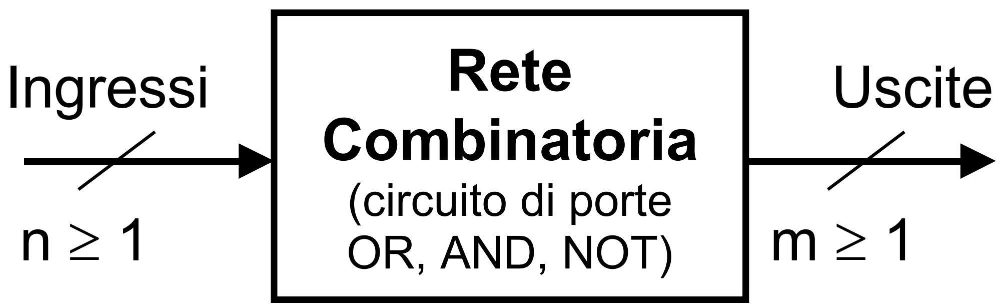


$$U = (\overline{A} + B + C) \bullet (A + \overline{B +}C) \bullet (A + B + \overline{C}) \bullet (A + B + C)$$

Reti Combinatorie: def. generale

- Circuito privo di retroazioni, formato collegando porte logiche OR, AND e NOT

- Se m = 1 la rete combinatoria si dice "a uscita *singola*", altrimenti si dice "a uscite *multiple*"

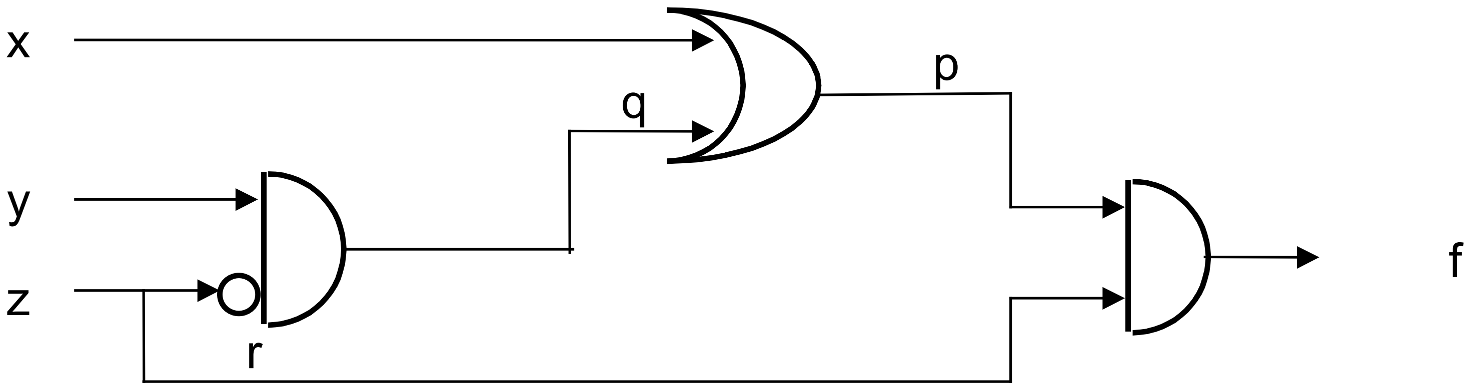


- Simulazione del funzionamento
  - si assegnano valori agli ingressi della rete propagandoli in avanti, fino a determinare il valore logico dell'uscita

Equivalenza fra EB e reti combinatorie

- A ogni $RC(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una uscita e a *n* ingressi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si può sempre assegnare una e una sola espressione booleana $EB(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a *n* variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tale che per qualsiasi assegnamento A tra i 2^n possibili (e viceversa)
  - dato un assegnamento A agli ingressi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ della rete combinatoria RC si ha
    $RC(A) = EB\big|_A$
  - dato un assegnamento A alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dell'espressione booleana EB si ha
    $EB\big|_A = RC(A)$

Costruzione dell’EB a partire da RC



$$\begin{cases} p = x+q \\ q = y \cdot r \\ r = \overline{z} \\ f = p \cdot z \end{cases} \qquad \begin{cases} p = x+q \\ q = y \cdot \left(\overline{z}\right) \\ r = \overline{z} \\ f = p \cdot z \end{cases} \qquad \begin{cases} p = x+\left(y \cdot \left(\overline{z}\right)\right) \\ q = y \cdot \left(\overline{z}\right) \\ r = \overline{z} \\ f = p \cdot z \end{cases} \qquad \begin{cases} p = x+\left(y \cdot \left(\overline{z}\right)\right) \\ q = y \cdot \left(\overline{z}\right) \\ r = \overline{z} \\ f = \left(x+\left(y \cdot \left(\overline{z}\right)\right)\right) \cdot z \end{cases}$$

$$f = (x + y \bullet \bar{z}) \bullet z$$

Livelli di una RC

- Funzione a due livelli
  - contiene solo due livelli di operatori annidati (trascurando la negazione)
- Funzione a più livelli
  - contiene più livelli di operatori annidati (trascurando la negazione)
- Esempi (2 e 3 liv.) $f = x + y \bullet \bar{z}$ $f = x + y \bullet (\bar{z} + u)$
- Il numero di livelli influenza (si vedrà)
  - costo realizzativo
  - velocità circuito

Equivalenze fra funzioni booleane

- Due funzioni booleane $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a $n \geq 1$ variabili, sono *equivalenti* se e solo se ammettono la stessa tabella delle verità
- Esempio

x	**y**	**z**	**f**	**g**
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$f(x, y, z) = x + y \cdot z$$

$$g(x, y, z) = x + \overline{x} \cdot y \cdot z$$

Le due RC sono *funzionalmente* equivalenti ma sono *differenti*, per es. in termini di costo

Esempio di criterio di scelta: #letterali

- Criterio di costo (dei letterali) di una rete combinatoria a due livelli
  - costo = # degli ingressi nel primo livello della rete
  - vale solo per per funzioni booleane a 2 livelli
- Data una funzione booleana, esistono più (infinite) reti combinatorie che la realizzano
- Problema
  - sintetizzare la rete comb. di costo minimo
- Esempio $f(x, y, z) = x + y \cdot z$ $\quad$ $\text{costo}(f) = 1 + 2 = 3$

  $g(x, \overline{y}, z) = x + x \cdot y \cdot z$ $\quad$ $\text{costo}(g) = 1 + 3 = 4$