Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 22/01/2019

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si consideri una scacchiera quadrata con $n \times n$ caselle, con $n \geq 2$. Si posizionino n torri in modo casuale sulla scacchiera, dove una casella è occupata al più da una torre. Qual è la probabilità che da questa configurazione nessuna torre possa minacciarne un'altra?

   Una torre può minacciarne un'altra se e solo se si trovano sulla stessa riga o colonna della scacchiera.

2. Si hanno due v.a. discrete X e Y distribuite come in tabella

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 1$	$1/40$	?	$4/40$
$y = 2$	$a/40$	0	$2/40$
$y = 3$	$2/40$	$10/40$	$8/40$

   (a) Determinare la probabilitá mancante $\Pr(X = 2, Y = 1)$.
   (b) Determinare la ddp di X dato $Y = 3$, $\Pr(X = x|Y = 3)$ per ogni x.
   (c) Calcolare $\mathsf{E}[X|Y = 3]$.
   (d) Le v.a. X e Y sono indipendenti?

3. Sia $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Qual è la legge di probabilità di $Z = X^2$?

4. Gli istanti di caduta dei frutti da un albero si possono modellare come un processo di Poisson con tasso $\lambda = 2$ frutti al giorno. Al contatto col terreno i frutti si rompono con probabilità $p = 0.5$, indipendentemente dagli altri frutti. Calcolare la probabilità di trovare più di 2 frutti integri sul terreno in un periodo di 3 giorni.

5. Sia $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, da cui si genera un valore y per ottenere un'osservazione distribuita come $X \sim \text{Exp}(y^2)$. Trovare lo stimatore MAP di Y basato sull'osservazione X.

6. Proporre un algoritmo che, sfruttando un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti uniformemente in $[0, 1)$, generi una stima numerica del numero e^{-1}.

   Suggerimento: il numero e^{-1} va interpretato come la probabilità che si verifichi un determinato evento. Farebbe comodo, ad esempio, usare una v.a. $X \sim Exp(1)$ per costruire un evento la cui probabilità è e^{-1}.

Soluzioni

Problema 1

Tutte le configurazioni delle torri sulla scacchiera sono equiprobabili. Si proceda dando un ordinamento alle torri (ad esempio numerandole da 1 a n) e posizionandole a caso sulla scacchiera. Il numero di configurazioni possibili sulla scacchiera è:

$$N = n^2 \cdot (n^2-1) \cdots (n^2-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1} (n^2-i) = \frac{(n^2)!}{(n^2-n)!}$$

Costruiamo ora le configurazioni che rispettano il criterio chiesto:

- La torre 1 può scegliere n^2 posizioni perché non ha vincoli.
- La torre 2 è vincolata a non scegliere le stesse riga e colonna della torre 1: se dalla scacchiera si eliminano tutte le caselle con stessa riga e colonna della torre 1, rimane una scacchiera quadrata di dimensioni $(n-1) \times (n-1)$. Dunque la torre 2 può scegliere $(n-1)^2$ posizioni.
- Si itera il procedimento finché la torre n-esima può scegliere solo una casella.

Il numero totale di combinazioni che soddisfano il requisito è $\prod_{i=1}^{n} i^2 = (n!)^2$. La risposta finale è

$$p = \frac{(n!)^2}{N} = \frac{n!\, n!\, (n^2-n)!}{(n^2)!} = \frac{n!}{\binom{n^2}{n}}.$$

Problema 2

1. La prob. mancante é
$$\frac{40-27-a}{40} = \frac{13-a}{40}.$$
2. Si ha
$$\Pr(X=x|Y=3) = \frac{\Pr(X=x,Y=3)}{\Pr(Y=3)} = \frac{\Pr(X=x,Y=3)}{\sum_{x'=1}^{3} \Pr(X=x',Y=3)} = \begin{cases} \frac{2/40}{20/40} & x=1 \\ \frac{10/40}{20/40} & x=2 \\ \frac{8/40}{20/40} & x=3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{10} & x=1 \\ \frac{5}{10} & x=2 \\ \frac{4}{10} & x=3 \end{cases}$$
3. Condizionando a $Y=3$ si ha:
$$\mathsf{E}[X|Y=3] = \sum_{x=1}^{3} x \Pr(X=x|Y=3) = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{5}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} = \frac{23}{10}.$$
4. Le v.a. X e Y non possono essere indipendenti, ad esempio $\Pr(X=2, Y=2) = 0$ esclude questa possibilitá.

Problema 3

Di sicuro la v.a. Z è positiva, quindi $f_Z(z) = 0$ per $z < 0$. Per la parte restante si può procedere con il metodo della cumulata:

$$\begin{aligned} \Pr(Z \le z) = \Pr(X^2 \le z) &= \Pr(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) \\ &= 2\Pr(0 \le X \le \sqrt{z}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{z}) - 1. \end{aligned}$$

Calcolando la derivata rispetto a z si ottiene la densità:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \frac{d}{dz}\Pr(Z \le z) = \frac{d}{dz}(2\Phi(\sqrt{z}) - 1) &\\ &= 2 f_X(\sqrt{z}) \frac{d}{dz}\sqrt{z} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} \frac{1}{2\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2}, \qquad z > 0. \end{aligned}$$

Problema 4

I frutti integri sul terreno si possono modellare come arrivi di un processo di Poisson di tasso $\lambda p = 2 \cdot 0.5 = 1$ frutti al giorno. In un dato periodo di tempo τ, dunque, il numero di frutti integri sul terreno è una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda p \tau$. Nel nostro caso $\tau = 3$ giorni, dunque la v.a. cercata è $N \sim \text{Poisson}(\lambda p \tau = 3)$. La probabilità di trovare più di 2 frutti integri è:

$$\Pr(N > 2) = 1 - \Pr(N \leq 2) = 1 - \sum_{i=0}^{2} p_N(i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{3^i}{i!} e^{-3} \approx 0.5768.$$

Problema 5

Seguendo la definizione di stimatore MAP si ha:

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{\text{MAP}}(x) &= \arg\max_{y \in \mathbb{R}} \; f_{Y|X}(y|x) && (1) \\ &= \arg\max_{y \in \mathbb{R}} \; f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) && (2) \\ &= \arg\max_{y \in \mathbb{R}} \; y^2 e^{-y^2 x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} && (3) \end{aligned}$$

dove in (2) abbiamo tralasciato i termini non dipendenti da x. Per trovare il minimo della (3) rispetto a y, poniamone a zero la derivata rispetto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[y^2 e^{-y^2 x - y^2/2} \right] = -y e^{-y^2 x - y^2/2} ((1+2x) y^2 - 2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad y \stackrel{!}{=} 0, \quad y \stackrel{!}{=} \pm \sqrt{\frac{2}{1+2x}}.$$

Ci sono 3 punti estremanti, ma è facile vedere che $y = 0$ è un punto di minimo per la funzione in (3). Pertanto, le due soluzioni sono

$$\widehat{Y}_{\text{MAP}}(X) = \pm \sqrt{\frac{2}{1+2X}}. \tag{4}$$

Problema 6

Si procede col determinare l'evento la cui probabilità è e^{-1}, ad esempio si può impostare:

$$\begin{aligned} \Pr(X > t) &= \int_t^{\infty} f_X(x) dx \\ &= \int_t^{\infty} e^{-x} dx \\ &= \left[-e^{-x} \right]_t^{\infty} = e^{-t} \stackrel{!}{=} e^{-1} \end{aligned}$$

da cui segue che l'evento cercato è $\{X > 1\}$. Tramite il generatore di campioni U_i bisogna simulare la sorgente che genera i campioni distribuiti come X. Dalla teoria si vede che $X_i = -\ln(U_i)$ è distribuito come $X \sim \text{Exp}(1)$. L'algoritmo per la stima numerica di e^{-1} può essere come segue:

1. Genero n campioni $U_i \sim [0, 1)$ e calcolo $X_i = -\ln(U_i)$ per $i = 1, \dots n$.
2. Sia S_n il numero di campioni generati tali che $X_i > 1$. Allora la stima di e^{-1} sarà $\widetilde{e^{-1}} = S_n / n$.