Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 04/07/2017 – Compito A

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato

1. Si hanno delle lampadine e la vita di ognuna é distribuita esponenzialmente con parametro λ, indipendentemente da tutte le altre lampadine. Si accendono 10 lampadine contemporaneamente. Qual é la probabilitá che la prima lampadina si sia spenta prima dell'istante di tempo μ? Qual é la probabilitá che l'intervallo di tempo tra la prima rottura e la seconda rottura sia superiore a μ?

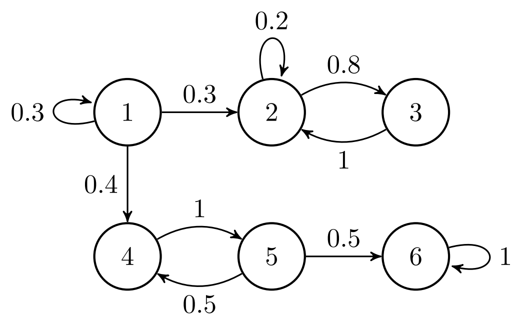
   Suggerimento: si interpretino gli istanti di rottura delle lampadine come istanti di arrivo di opportuni processi di Poisson. Fare attenzione al numero di lampadine accese.

2. Sia X un processo Gaussiano a media nulla, cioé con $\mathsf{E}[X(t)] = 0$ per ogni t. Considerare il processo Y dove $Y(t) = X(t) - X(t-1) + 1$. Il processo Y é Gaussiano? Determinare $\mu_Y(t) = \mathsf{E}[Y(t)]$, $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathsf{E}[X(t_1)Y(t_2)]$, e $R_{YY}(t_1, t_2) = \mathsf{E}[Y(t_1)Y(t_2)]$. Se necessario, esprimere il risultato in funzione di R_{XX}.

   Si assuma ora che il processo X sia stazionario. Il processo Y é stazionario?

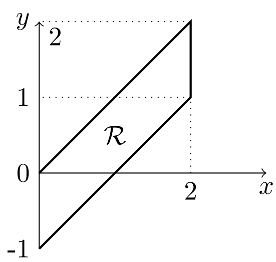
3. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0.

   (a) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.
   (b) Mediamente dopo quante prove si esce dallo stato 1?
   (c) Qual é la probabilitá di essere nello stato 3 dopo 4 prove?
   (d) Dopo un lunghissimo tempo, qual é la probabilitá di essere nello stato 6?



4. Considerare la regione $\mathcal{R}$ in figura delimitata dal parallelogramma. Due v.a. X e Y hanno distribuzione congiunta uniforme nella regione $\mathcal{R}$ e zero altrimenti. Si vuole stimare Y basandosi sull'osservazione X.

   (a) Trovare la stima LMS di Y, $\widehat{Y}_{\text{LMS}} = g(X)$.
   (b) Calcolare l'errore quadratico medio $\mathsf{E}[(Y - g(X))^2]$.
   (c) Trovare il miglior stimatore lineare $\widehat{Y}_{\text{Lin}} = \ell(X)$.
   (d) Calcolare l'errore quadratico medio $\mathsf{E}[(Y - \ell(X))^2]$.



5. Siano date le ipotesi $H_0 : X \sim \text{Exp}(1)$ e $H_1 : X \sim \text{Exp}(2)$. Si costruisca la regione di rifiuto $\mathcal{R}$ dell'ipotesi nulla, tramite il likelihood ratio test basato sull'osservazione di X. Si determini il valore della soglia ξ tale che la probabilitá di falso rifiuto sia pari a 0.05.

6. Usare il metodo acceptance-rejection generando campioni uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ per campionare da una v.a. X con ddp

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

   Scrivere l'algoritmo acceptance-rejection con la miglior efficienza possibile. Mediamente quanti campioni bisogna generare per vederne uno accettato?

Soluzioni

Problema 1

L'istante di rottura di ogni lampadina puó essere interpretato come l'arrivo di un processo di Poisson, quindi si hanno 10 processi indipendenti di Poisson, ognuno a tasso λ.

Per la rottura della prima lampadina si puó considerare il processo unione di tutti i 10 processi di Poisson, avendo cosí un unico processo di Poisson a tasso 10λ. Sia T_1 il tempo del primo interarrivo del processo di Poisson unione, quindi $T_1 \sim \text{Exp}(10\lambda)$. La probabilitá che la prima lampadina si spenga prima del tempo μ é:

$$\Pr(T_1 \leq \mu) = F_{T_1}(\mu) = 1 - e^{-10\lambda\mu}.$$

Sia T_2 il tempo di interarrivo tra la prima rottura e la seconda rottura. Siccome dopo la prima rottura rimangono 9 lampadine accese, $T_2 \sim \text{Exp}(9\lambda)$, e T_1 é indipendente da T_2. La probabilitá che la seconda lampadina si spenga non prima di un tempo μ dalla prima rottura é:

$$\Pr(T_2 \geq \mu) = 1 - \Pr(T_2 \leq \mu) = 1 - F_{T_2}(\mu) = e^{-9\lambda\mu}. \tag{1}$$

Problema 2

Ogni v.a. $Y(t)$ é Gaussiana perché ottenuta come combinazione lineare di v.a. Gaussiane. Quindi Y é Gaussiano.

La media é

$$\mu_Y(t) = \mu_X(t) - \mu_X(t-1) + 1 = 1.$$

La cross-correlazione é

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= \mathsf{E}[X(t_1)(X(t_2) - X(t_2 - 1) + 1)] \\ &= \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2 - 1)] + \mathsf{E}[X(t_1)] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - R_{XX}(t_1, t_2 - 1). \end{aligned}$$

L'autocorrelazione di Y é:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= \mathsf{E}[(X(t_1) - X(t_1 - 1) + 1)(X(t_2) - X(t_2 - 1) + 1)] \\ &= \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2 - 1)] - \mathsf{E}[X(t_1 - 1)X(t_2)] + \mathsf{E}[X(t_1 - 1)X(t_2 - 1)] + 1 \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - R_{XX}(t_1, t_2 - 1) - R_{XX}(t_1 - 1, t_2) + R_{XX}(t_1 - 1, t_2 - 1) + 1. \end{aligned}$$

Assumendo la stazionarietá di X, e in particolare $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2 - t_1) = R_{XX}(\tau)$ si ha

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) - R_{XX}(t_1, t_2 - 1) - R_{XX}(t_1 - 1, t_2) + R_{XX}(t_1 - 1, t_2 - 1) + 1 \\ &= R_{XX}(\tau) - R_{XX}(\tau - 1) - R_{XX}(\tau + 1) + R_{XX}(\tau) + 1 \\ &= 2R_{XX}(\tau) - R_{XX}(\tau - 1) - R_{XX}(\tau + 1) + 1 \end{aligned}$$

dunque Y diventa stazionario in senso lato, e quindi stazionario, grazie alla Gaussianitá di Y.

Problema 3

1. Gli stati transienti sono $1, 4, 5$. Gli stati ricorrenti sono $2, 3, 6$.
2. La probabilitá di uscire dallo stato 1 é 0.7 in ogni prova. Tutte le prove sono indipendenti, quindi la prob. di uscire dopo la prova k-esima é geometrica di parametro 0.7:

   $$\Pr(K = k) = 0.7 \cdot 0.3^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

   La media vale $\mathsf{E}[K] = 1/0.7$.
3. Dopo 4 prove si puó finire nello stato 3 seguendo i percorsi:
   - $1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.0216$
   - $1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.0144$
   - $1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.0096$
   - $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.8 \cdot 1 \cdot 0.8 = 0.192$

   La somma delle prob. precedenti é il risultato cercato.
4. La prob. di trovarsi nello stato 6 dopo un lunghissimo tempo é pari alla prob. di uscire dalla stato 1 verso lo stato 4, quindi:

   $$\frac{0.4}{0.4 + 0.3} = \frac{4}{7}.$$

Problema 4

1. Fissato un particolare $X = x$, la ddp condizionata di Y dato $X = x$ é uniforme in $[x-1, x]$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\widehat{Y}_{\text{LMS}} &= g(x)\\ &= \mathsf{E}[Y|X = x]\\ &= x - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   e, rendendo x casuale, si ha

$$g(X) = X - \frac{1}{2}.$$

2. Fissato un certo $X = x$, l'errore quadratico medio é pari alla varianza della distribuzione condizionata di Y dato $X = x$, ed essendo questa uniforme in un intervallo di ampiezza 1 per ogni $X = x$, si ha

$$\mathsf{E}[(Y - g(X))^2|X = x] = \frac{1}{12}.$$

   Mediando su tutti i valori di x, si ha

$$\mathsf{E}[(Y - g(X))^2] = \frac{1}{12}.$$

3. Lo stimatore LMS é giá lineare, quindi $\ell(X) = g(X)$

4. Dato che $\ell(X) = g(X)$, l'errore quadratico medio rimane 1/12.

Problema 5

Il likelihood ratio test é

$$\frac{f_{X:H_1}(x)}{f_{X:H_0}(x)} = \frac{2e^{-2x}}{e^{-x}} = 2e^{-x}.$$

La regione di rifiuto basata sul LRT é

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{x :\ 2e^{-x} > \xi\}\\ &= \{x :\ x < \log(2/\xi)\}\end{aligned}$$

La prob. di falso rifiuto é

$$\Pr(X \le \log(2/\xi); H_0) \overset{!}{=} 0.05$$

$$F_{X;H_0}(\log(2/\xi)) = 1 - e^{-\log(2/\xi)} = 1 - \xi/2$$

e risolvendo in ξ si ha $\xi = 1.9$.

Problema 6

Il massimo della funzione f_X nell'intervallo $0 \le x \le 1$ si ha per $x = 1/2$. In tal punto la funzione vale $f_X(1/2) = 6/4 = 3/2$. Pertanto si deve scegliere $m = 3/2$ per ottenere la miglior efficienza possibile dell'algoritmo.

L'algoritmo é il seguente:

1. Genero $U \sim \mathrm{U}[0, 1]$ e $U' \sim \mathrm{U}[0, m]$ in maniera indipendente.

2. Accetto e pongo $X = U$ se $U' \le f_X(U)$, altrimenti torno al punto 1.

Il numero di prove medie per avere un campione accettato é pari a $m = 3/2$.