Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 31/01/2018

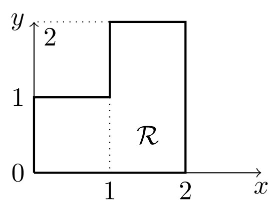
- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

1. Si considerino le cifre da 1 a 5 e tutti i numeri interi x di 5 cifre, con $10000 < x < 100000$, che si possono formare con queste cifre. Si chiami $\mathcal{A}$ l'insieme di questi numeri.
   (a) Quanti numeri contiene $\mathcal{A}$?
   (b) Quanti numeri in $\mathcal{A}$ sono formati da cifre tutte distinte? Si chiami $\mathcal{B}$ questo sottoinsieme.
   (c) Si estrae un numero a caso X, in maniera uniforme, dall'insieme $\mathcal{A}$. Qual é la probabilitá che $X \in \mathcal{B}$ sapendo che $X > 30000$?

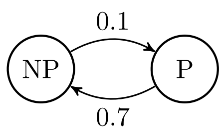
2. Una v.a. continua X ha ddp $f_X(x) = \alpha(1 - x^2)$ per $-1 < x < 1$ e $f_X(x) = 0$ altrove. Determinare:
   (a) Il valore di α.
   (b) I momenti $\mathsf{E}[X^n]$ per ogni $n = 1, 2, \cdots$.

3. Un segnale ha un'ampiezza casuale X distribuita uniformemente nell'intervallo $[-A, A]$, dove $A > 0$ é una costante nota. Si determini la ddp f_Y della potenza del segnale $Y = \beta X^2$, dove $\beta > 0$ é una costante nota. *Suggerimento: si usi il metodo della cumulata.*

4. Considerare la regione $\mathcal{R}$ in figura delimitata dal poligono di 6 lati. Due v.a. X e Y hanno distribuzione congiunta uniforme nella regione $\mathcal{R}$ e zero altrimenti. Si vuole stimare Y basandosi sull'osservazione X.
   (a) Trovare la stima LMS di Y, $\widehat{Y}_{\text{LMS}} = g(X)$.
   (b) Calcolare l'errore quadratico medio $\mathsf{E}[(Y - g(X))^2]$.
   (c) Esiste uno stimatore lineare con lo stesso errore quadratico medio dello stimatore LMS?



5. L'evoluzione del meteo giornaliero in una data regione geografica é descritta stocasticamente dalla catena di Markov tempo-discreta in figura (gli stati sono *Precipitazioni* P e *Non Precipitazioni* NP). La catena si trova nello stato NP al giorno 0.
   (a) Qual é la probabilitá di osservare la prima precipitazione al giorno n, con $n = 1, 2, \cdots$?
   (b) Quanti giorni dura mediamente il primo periodo senza precipitazioni?
   (c) Qual é la probabilitá di osservare un giorno di precipitazioni dopo un numero molto grande di giorni?



6. Si supponga di avere una moneta bilanciata con $\Pr(\text{Testa}) = 1/2$. Descrivere un algoritmo che permette di simulare i risultati del lancio di una moneta con $\Pr(\text{Testa}) = 1/4$. Secondo il vostro algoritmo, mediamente quanti lanci di moneta onesta servono per ottenere un risultato del lancio della moneta sbilanciata?

Soluzioni

Problema 1

1. Ogni cifra da 1 a 5 puó essere scelta piú volte, pertanto i numeri che si possono formare sono 5^5.
2. Siccome ogni cifra puó essere scelta una volta soltanto, i numeri che si possono formare sono $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.
3. Dato che lo spazio di probabilitá é uniforme, si ha:

$$\begin{aligned} \Pr(X \in \mathcal{B} | X > 30000, X \in \mathcal{A}) &= \frac{\Pr(X \in \mathcal{B}, X > 30000, X \in \mathcal{A})}{\Pr(X > 30000, X \in \mathcal{A})} \\ &= \frac{|\{X \in \mathcal{B} : X > 30000\}|}{|\{X \in \mathcal{A} : X > 30000\}|} \\ &= \frac{3 \cdot 4!}{3 \cdot 5^4} \end{aligned} \tag{1}$$

Problema 2

1. Il valore di α si ottiene imponendo l'integrale della ddp a 1:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \alpha(1-x^2)dx &= 2\int_0^1 \alpha(1-x^2)dx \\ &= 2\alpha \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{1} \\ &= \frac{4}{3}\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

da cui segue che $\alpha = 3/4$.

2. Siccome f_X é una funzione pari, i momenti di ordine dispari sono zero. Se n é pari, cioé $n = 2k$, $k = 1, 2, \cdots$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X^{2k}] &= \int_{-1}^{1} \alpha x^{2k}(1-x^2)dx \\ &= 2\alpha \int_0^1 x^{2k}(1-x^2)dx \\ &= 2\alpha \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+3}}{2k+3} \right]_{x=0}^{1} \\ &= 2\alpha \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{4\alpha}{(2k+1)(2k+3)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Problema 3

Innanzitutto, si ha $f_X(x) = 1/(2A)$ per $-A \leq x \leq A$ e $f_X(x) = 0$ altrove. Usando il metodo della cumulata si ha:

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq y) = \Pr(\beta X^2 \leq y) &= \Pr\left(-\sqrt{\frac{y}{\beta}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y}{\beta}} \right) \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{2A} \cdot 2\sqrt{\frac{y}{\beta}} & 0 < y \leq \beta A^2 \\ 1 & y > \beta A^2 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

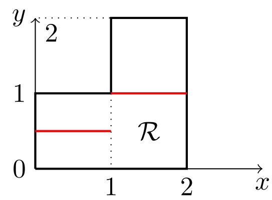
La f_Y si ottiene derivando:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Pr(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \text{ oppure } y > \beta A^2 \\ \frac{1}{2A\sqrt{\beta y}} & 0 < y \leq \beta A^2 \end{cases} \tag{5}$$

Problema 4

1. Lo stimatore LMS si puó determinare in maniera grafica data la simmetria del problema, ed é dato dalla curva rossa in figura.

$$\widehat{Y}_{\text{LMS}} = g(X) = \begin{cases} 0.5 & 0 < X < 1 \\ 1 & 1 < X < 2 \end{cases} \tag{6}$$



2. L'errore quadratico medio si pu ottenere come media dei due casi $0 < X < 1$ e $1 < X < 2$. In particolare:
   - assumendo $0 < X < 1$, la distribuzione condizionata di Y é uniforme in $[0, 1]$, dunque l'errore quadratico medio non é altro che la varianza di una v.a. uniforme in $[0, 1]$:
$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(Y - g(X))^2 \,|\, 0 < X < 1] &= \mathsf{E}[(Y - 0.5)^2 \,|\, 0 < X < 1] \\ &= \mathsf{Var}[Y|0 < X < 1] = \frac{1}{12} \end{aligned} \tag{7}$$
   - assumendo $1 < X < 2$, la distribuzione condizionata di Y é uniforme in $[0, 2]$, dunque l'errore quadratico medio non é altro che la varianza di una v.a. uniforme in $[0, 2]$:
$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(Y - g(X))^2 \,|\, 1 < X < 2] &= \mathsf{E}[(Y - 1)^2 \,|\, 0 < X < 1] \\ &= \mathsf{Var}[Y|0 < X < 1] = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{8}$$

   Mediando i due risultati si ottiene:
$$\begin{aligned} \mathsf{E}[(Y - g(X))^2] &= \mathsf{E}[(Y - g(X))^2 \,|\, 0 < X < 1] \Pr(0 < X < 1) + \mathsf{E}[(Y - g(X))^2 \,|\, 1 < X < 2] \Pr(1 < X < 2) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Lo stimatore LMS é non-lineare, come mostrato in figura. Siccome lo stimatore LMS é quello con il minor errore quadratico medio, qualsiasi stimatore lineare avrá un errore maggiore di $1/4$.

Problema 5

1. La probabablitá di osservare la prima precipitazione al giorno n é pari alla probabilitá di osservare $n - 1$ giorni NP e un giorno P:
$$\Pr(X_n = \text{P}|X_{n-1} = \ldots = X_0 = \text{NP}) = 0.9^{n-1} 0.1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

2. Se la prima precipitazione capita al giorno n (vedi punto precedente), allora si hanno n giorni consecutivi senza precipitazioni (dal giorno 0 al giorno $n - 1$). La media di questo periodo é:
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \Pr(X_n = \text{P}|X_{n-1} = \ldots = X_0 = \text{NP}) = \sum_{n=1}^{\infty} n 0.9^{n-1} 0.1 = \frac{1}{0.1} = 10 \tag{11}$$
   dove per il calcolo della sommatoria abbiamo riconosciuto la media di una v.a. Geometrica con parametro 0.1.

3. Dopo un numero grande di giorni la probabilitá di stare nello stato P é uguale alla probabilitá asintotica dello stato P, che é
$$\lim_{n \to \infty} \Pr(X_n = \text{P}) = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8} \tag{12}$$

Problema 6

La domanda puó essere reinterpretata come segue: dato un generatore di eventi elementari di probabilitá $1/2$ ciascuno, é possibile generare degli eventi con probabilitá $1/4$ e $3/4$?

La risposta é sí: con due lanci consecutivi di moneta bilanciata, basta considerare l'evento $\{TT\}$, che ha probabilitá $1/4$, e il suo complementare. In questo modo, ogni 2 lanci di moneta bilanciata si simula 1 lancio di moneta sbilanciata.