# Informazione e stima – 24/01/2023

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, codice persona, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

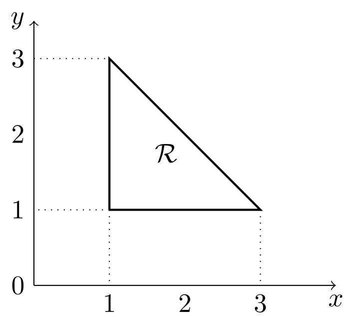
1. Si considerino due dadi a 4 facce all'apparenza indistinguibili. Un dado è ben bilanciato, mentre l'altro dado ha legge di probabilità $\{1/2, 1/6, 1/6, 1/6\}$. Dopo aver scelto un dado a caso, si lancia il dado per due volte. I risultati dei due lanci sono eventi indipendenti? Giustificare la risposta.

2. Due variabili aleatorie $X$ e $Y$ hanno legge di probabilità $f_{X,Y}(x, y) = c$ nella regione $\mathcal{R}$ in figura, e $f_{X,Y}(x, y) = 0$ altrove. Determinare:

   (a) il valore della costante $c$.

   (b) Le leggi marginali di $X$ e $Y$ e graficarle.

   (c) La legge $f_{Y|X}(y|2)$ e graficarla.




3. Sia $X$ una v.a. con legge $f_X(x) = 2(1 - x)$ per $x \in (0, 1)$. Determinare la legge di $Y = X^3$.

4. Al 118 arrivano delle chiamate secondo un processo di Poisson con intensità di $\lambda = 1000$ chiamate al secondo. Sia $T$ il tempo che passa tra la prima chiamata e la millesima chiamata. Quanto valgono $\mathsf{E}[T]$ e $\mathsf{Var}[T]$?

5. Si consideri un processo casuale $\{X_i\}_i$ con $X_0 = 0$ e $X_i = X_{i-1} + N_i$ per $i \geq 1$, dove le v.a. $N_i$ sono iid Gaussiane con media nulla e varianza $\sigma^2$. Proporre un algoritmo (pseudocodice) che permette di stimare $\mathsf{E}[I]$ dove $I$ è il primo istante di tempo tale che $X_I > 3\sigma$.

6. Si consideri il lancio $X$ di una moneta ben bilanciata e il lancio $Y$ di un dado a 6 facce ben bilanciato.

   (a) Quanto vale l'entropia totale generata da questo esperimento casuale?

   (b) Qual è il numero minimo di bit che serve per rappresentare il risultato di questo esperimento?

   (c) Se si ripetesse questo esperimento $n$ volte, con $n$ molto grande, mediamente quale sarebbe il numero minimo di bit che serve per rappresentare il risultato di ognuno degli $n$ esperimenti?

# Soluzioni

## Problema 1

Siccome non si ha conoscenza del tipo di dado che si sta lanciando (se ben bilanciato o meno), i lanci non risultano indipendenti. Infatti, chiamando $L_1$ e $L_2$ i risultati dei due lanci e $D_1$ e $D_2$ il fatto di aver scelto il dado ben bilanciato o meno, si ha che

$$\Pr(L_1 = 1) = \Pr(L_1 = 1|D_1)\Pr(D_1) + \Pr(L_1 = 1|D_2)\Pr(D_2) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \tag{1}$$

$$\Pr(L_2 = 1) = \Pr(L_1 = 1) = \frac{3}{8} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Pr(L_1 = 1, L_2 = 1) &= \Pr(L_1 = 1, L_2 = 1|D_1)\Pr(D_1) + \Pr(L_1 = 1, L_2 = 1|D_2)\Pr(D_2) &(3)\\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{5}{32} &(4)\end{aligned}$$

ma

$$\frac{5}{32} = \Pr(L_1 = 1, L_2 = 1) \neq \Pr(L_1 = 1)\Pr(L_2 = 1) = \frac{9}{64} \tag{5}$$

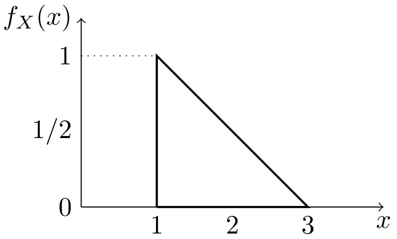
determinando già la dipendenza statistica dei due lanci di dado.

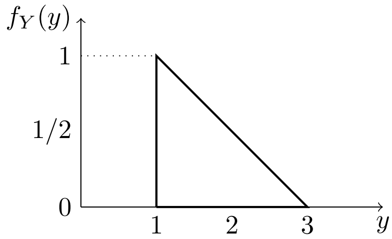
## Problema 2

1. Essendo la distribuzione congiunta uniforme, si ha $c = 1/\mathrm{Area}(\mathcal{R}) = 1/2$.
2. Le distribuzioni marginali sono:

$$f_X(x) = \int_1^3 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_1^{4-x} \frac{1}{2}dy = \frac{3-x}{2}, \qquad x \in (1,3) \tag{6}$$

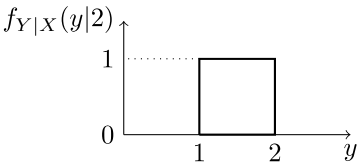
$$f_Y(y) = \int_1^3 f_{X,Y}(x,y)dx = \int_1^{4-y} \frac{1}{2}dy = \frac{3-y}{2}, \qquad y \in (1,3) \tag{7}$$




3. La legge condizionata è

$$f_{Y|X}(y|2) = \frac{f_{X,Y}(2,y)}{f_X(2)} = \begin{cases} 1 & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{8}$$




## Problema 3

Innanzitutto si noti che $Y \in (0,1)$ e che la funzione $y = g(x) = x^3$ è monotona crescente e positiva per $x \in (0,1)$. Utilizzando il metodo della cumulata, si ha:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = \Pr(X^3 \leq y) &(9)\\ &= \Pr\left(X \leq y^{1/3}\right) &(10)\\ &= F_X(y^{1/3}), \qquad y \in (0,1). &(11)\end{aligned}$$

Derivando rispetto a $y$ si ottiene la densità di probabilità:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(y^{1/3}) \frac{1}{3y^{2/3}} = \frac{2(1 - y^{1/3})}{3y^{2/3}}, \qquad y \in (0, 1), \tag{12}$$

e $f_Y(y) = 0$ altrove.

## Problema 4

Si noti che dall'arrivo della prima chiamata all'arrivo della millesima chiamata intercorrono 999 tempi di interarrivo. I tempi di interarrivo $T_i$ sono distribuiti in modo esponenziale iid con parametro $\lambda = 1000$. Dunque si ha

$$\mathsf{E}[T] = 999\mathsf{E}[T_i] = \frac{999}{1000} \tag{13}$$

$$\mathsf{Var}[T] = \mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^{999} T_i\right] = 999\mathsf{Var}[T_i] = \frac{999}{1000^2} \approx \frac{1}{1000}. \tag{14}$$

## Problema 5

L'idea è di stimare $\mathsf{E}[I]$ tramite una media campionaria

$$\mathsf{E}[I] \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{15}$$

dove le v.a. $I_k$ saranno generate dalla simulazione Monte Carlo del processo aleatorio. Un possibile algoritmo è come segue.

1. Per $k = 1, \dots, n$
2. Inizializzo $X_0 = 0$ e $i = 0$
3. Fintanto che $X_i < 3\sigma$
4. Assegno $X_{i+1} \leftarrow X_i + N$ dove $N$ è un campione distribuito come $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
5. Assegno $i \leftarrow i + 1$ e torno al punto 3.
6. Assegno $I_k \leftarrow i$ e torno al punto 1.
7. Calcolo $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I_k$.

## Problema 6

1. Innanzitutto si noti che il lancio di moneta e di dado sono indipendenti, pertanto si ha che l'entropia totale dell'esperimento è
$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) = \log_2(2) + \log_2(6) \approx 3.58 \text{ bits}. \tag{16}$$
2. Se si facesse un solo esperimento di questo tipo, allora saremmo costretti ad usare almeno $\lceil 3.58 \rceil = 4$ bits per rappresentare uno dei possibili risultati.
3. Ripetendo un numero $n$ molto grande di esperimenti di questo tipo, il teorema di codifica di sorgente ci assicura che è possibile trovare un codice che ci permette di usare in media
$$H(X, Y) \approx 3.58 \text{ bits} \tag{17}$$
per descrivere ogni risultato.