1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

1. Non negatività: $P(A) > 0$
2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti A e B: $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: $A_1, A_2, A_3 ...$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

1.2 Leggi di probabilità uniformi

Legge uniforme discreta
$P(A) = \frac{\#\text{casi favorevoli ad} A}{\#\text{casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Legge uniforme continua
$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)}\ \forall A \subseteq \Omega$

2 Probabilità condizionate

Definizione di probabilità condizionata:
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Regola moltiplicativa: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho A_1, A_2, A_3 disgiunti che formano una partizione di Ω:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A))}{P(B)}$$

Indipendenza
Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?
casi tot $= n(n-1)(n-2)... = n!$

3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con k elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti. $0 \leq k \leq n$
#sequenze ordinate di k elementi $= \frac{n!}{(n-k)!k!}$
$C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Probabilità binomiale
Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo n prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con k_i estrazioni di tipo i ci sono.
#totale di scelte $= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$

4 Variabili aleatorie discrete

4.1 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.
Legge dello statistico inconsapevole
Data v.a. $Y = g(X)$, Y è una v.a.
$E[Y] = E[g(x)]$

Nel caso lineare:
$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$
Valore atteso condizionato
$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$
Legge dell'aspettativa totale
Con $A_1, A_2, ..., A_n$ partizioni di Ω
$E[X] = \sum_{i_1}^{n} P(A_1) \cdot E[X|A_i]$

4.2 Varianza

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.
Proprietà varianza
$Var[X] \geq 0 \qquad \forall$ v.a. X
$Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot Var[X]$
Scarto quadratico medio
$\sigma = \sqrt{Var[X]}$

5 V.a. discrete multiple

5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a. X e Y, $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di X: $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
Legge di probabilità condizionata
$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\sum_t p_{X,Y}(t,y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
Regola moltiplicativa
$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$

5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a. X e Y sono dette indipendenti ($X \perp Y$) $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di X e Y.
$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$
Caso lineare: $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$
Se $X \perp Y$ allora $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

5.4 Varianza per v.a. multiple

$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$
Se $X \perp Y$ allora $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$

6 Variabili aleatorie continue

Valore atteso e varianza
$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_x(x)dx$
Legge dello statistico inconsapevole: $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_x(x)dx$
$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

6.1 Funzione cumulativa di probabilità

$P(X \leq x) = F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$
Proprietà

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- F_x è una funzione non decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} F_x(x) = f_x(x)$, F_x è la funzione integrale di f_x

7 V.a. continue multiple

Densità di probabilità congiunta
$P((X, Y) \in S) = \iint_{(x,y) \in S} f_{X,Y}(x, y)dxdy$
$f_{X,Y}$ è la densità di probabilità congiunta.
Valore atteso
$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y)dxdy$
Con g funzione deterministica nota.
Legge di probabilità marginale
$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy$
Densità marginale di X.
Indipendenza tra due v.a. continue
X e Y sono dette indipendenti $\iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
Densità di probabilità condizionata
$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,t)dt}$

8 Regola di bayes e funzioni di v.a.

Regola di bayes nel continuo
$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$
Per le v.a. discrete basta cambiare la funzione continua con la probabilità.

8.1 Calcolo della funzione di una v.a. continua

Ho X v.a. con legge nota f_x e $Y = g(X)$ con g deterministica e nota, voglio trovare f_y.
Approccio tramite la cumulata
1- Calcolo la cumulata di Y.
$F_Y(y) = P(Y \leq y)$
2. Calcolo f_Y
$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

Trasformazioni lineari di v.a.
X è una v.a. con legge f_X nota e $Y = aX + b$ con costanti note.
$f_Y(y) = f_x(\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{|a|})$, se $a = 0$ allora $Y = b$
Trasformazione monotona di v.a.
$Y = g(X)$ con g deterministica nota e strettamente monotona.
$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|\frac{dg}{dx}(x)|} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|\frac{dg}{dx}(g^{-1}(y))|}$
Con $y = g(x)$ e $x = g^{-1}(y)$
Nota: se g non è strettamente monotona (ad es. $g(x) = x^2$) la $f_Y(y)$ sarà: "formula diretta con g decrescente" + "formula diretta con g crescente".

9 Statistiche congiunte

Legge della somma di v.a.
Date X e Y due v.a. discrete e $X \perp Y$ e $W = X + Y$
$P_W(w) = P(W = w) = P(X + Y = w) = \sum_x p_X(x) \cdot p_Y(w - x), \qquad y = w - x$
La legge della somma di due v.a. **indipendenti** è la convoluzione delle leggi di probabilità.
Calcolo della somma di convoluzione con il metodo grafico
- Sovrapporre graficamente le 2 leggi di prob
- "Ribaltare" una delle 2 leggi (ad es. P_Y)
- Traslare di w posizioni la legge che ho ribaltato (traslazione a destra se $w > 0$)
- Moltiplicare le prob. e sommare
Caso v.a. continue
$W = X + Y, \quad X \perp Y, \quad X$ e Y sono v.a. continue.
$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(w - x)dx$
Integrale di convoluzione
Somma di due gaussiane indipendenti
$W = X + Y, \quad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2), \quad X \perp Y$
La forma di W è sempre gaussiana.
$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$
$Var[W] = Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot e^{\frac{w^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$
(questa se $\mu = 0$)

9.1 Covarianza

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

Note:
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- Se $E[X] = 0$o $E[Y] = 0$ allora $Cov[X, Y] = E[XY]$
- Se $X \perp Y$ allora $Cov[X, Y] = 0$

- Se $Cov[X,Y] = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$

Coefficiente di correlazione lineare
Versione adimensionale della covarianza.
$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y} = E[\frac{(X-E[X])}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y-E[Y])}{\sigma_y}]$
Proprietà:
- $0 \leq |\rho[X,Y]| \leq 1$
In particolare se $|\rho[X,Y]| = 1$ allora $Y = aX + b$
- $X \perp Y \implies \rho[X,Y] = 0$

10 Valore atteso e varianza condizionati

Legge delle aspettazioni iterate
$E[Y] = E[E[Y|X]]$
Legge della variazione totale
$Var[x] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$

11 Successioni variabili aleatorie

11.1 Disuguaglianza di Markov

Se $X > 0$ allora $E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \qquad \forall a \geq 0$

$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

11.2 Disuguaglianza di chebyshev

$Var[X] \geq a \cdot P((X - E[X])^2 \geq a) \qquad \forall a \geq 0$

Con $k = a^2, \qquad P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}$

11.3 Convergenza in probabilità

Data una successione di v.a. $\{A_n\}$ e un numero a,
Si dice che $\{A_n\}$ converge ad a se:
$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0$

Test generale
$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) =$
$\lim_{n\to\infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} f_{A_n}(x)dx$
Se questo valore fa 0, c'è convergenza.

Uso markov(o chebyshev nello stesso modo) per provare la convergenza in probabilità
Esempio com markov.
$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E[X_n]}{a}$

Se $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0$ allora per forza converge ad a.

11.4 Media campionaria e legge dei grandi numeri

Date $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. i.i.d.
Media campionaria: $M_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
è una v.a.
Dato che le varie v.a. sono i.i.d.
$E[M_n] = E[X_1] = E[X]$
$Var[M_n] = \frac{Var[X_1]}{n}$
che con $n \to \infty \qquad Var[M_n] \to 0$

Legge (debole) dei grandi numeri
$M_n \longrightarrow^P E[M_n] = E[X]$

12 Teorema centrale del limite

CLT: Siano X_i v.a. i.i.d. con varianza finita σ^2 sia $Z_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ e sia $Z \sim N(0,1)$, allora $F_{Z_n}(c) \to^{n\to\infty} F_Z(c) = \Phi(c)$ per ogni c $\in \mathbb{R}$

13 Processi di bernoulli

Def: una sequenza di prove (v.a.) di bernoulli i.i.d.
$X_i \sim Bern(p)$, ogni X_i è i.i.d.
Numero di successi S in n istanti temporali
S = numero di successi in n istanti
$S \sim Bin(n,p)$
Tempi di interarrivo
T_1 = numero di prove fino al primo arrivo
$T_1 \sim Geom(p)$
T_1 gode di perdita di memoria
Tempo al k-esimo arrivo
$P(Y_k = t) \sim$
$$\begin{cases} p^k \cdot (1-p)^{t-k} \cdot \binom{t-1}{k-1} & k = 1,2,3,... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E[Y_k] = \frac{k}{p}$, $Var[Y_k] = k\frac{(1-p)}{p^2}$
Splitting di un processo di bernoulli
Con q la prob che un arrivo vada nel processo P_1
$P_1 \sim BP(p \cdot q)$
$P_1 \sim BP(p \cdot (1-q))$
Merging di un processo di bernoulli
Con p e q le probabilità dei due BP
$P \sim BP(p + q - p \cdot q)$

14 Processi di poisson

-Processo a tempo continuo (mantiene le stesse proprietà del processo di Bernoulli es. perdita di memoria)
Intensità media degli arrivi (per unità di tempo τ)
$P(k,\tau)$ =costante
Distribuzione del numero di arrivi in un intervallo di tempo finito
$$P(N_{[0,\tau]} = k) = \begin{cases} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} & k = 1,2,3,... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Legge di Poisson: $N_{[0,\tau]} \sim Poisson(\lambda \cdot \tau)$
$E[N_{[0,\tau]}] = \lambda\tau \qquad Var[N_{[0,\tau]}] = \lambda\tau$
Distribuzione del tempo al k-esimo arrivo
Y_k: tempo al k-esimo arrivo
$$f_{Y_k} = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}\lambda & t \geq 0, k > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Legge di Erlang, $Y_k \sim Erlang - k(\lambda)$
$E[Y_k] = \frac{k}{\lambda}$

	Poisson	Bernoulli
Tempo di arrivo	Continui	Discreti
Ritmo degli arrivi	λ /unità di tempo	p /per prova
Legge #arrivi	Poisson$(\lambda \cdot \tau)$	Bin(n, p)
Legge tempo di interarrivo	Exp(λ)	Geom(p)
Legge tempo al k-esimo arrivo	Erlang-k(λ)	Pascal-k(p)

Splitting e merging di un processo di Poisson
- Il processo generato dal merging di due PP indipendenti è un PP con itensità $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- Il processo generato dallo split di un PP (Le "decisioni" di split devono essere tutte $\perp$) è $PP_1(\lambda p)$ dove p è la probabilità di finire nel PP_1

Incidenza casuale per processi di Poisson
Con un PP iniziato da molto tempo la distribuzione della lunghezza dell'intervallo tra due arrivi è $\sim Erlang - 2(\lambda)$
(approssimazione della binomiale con poissoniana?)

15 Variabili aleatorie note

15.1 V.a. uniforme continua

$X \sim \mathbb{U}[a,b]$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

15.2 V.a. gaussiana

$X \sim Norm[E[x], Var[X]] = Norm[\mu, \sigma^2]$
$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
Combinazioni lineari di gaussiane
Se $X_1, X_2, ...X_n$ sono n v.a. gaussiane tra loro indipendenti con ciascuna valore atteso μ_i e varianza σ_i^2 allora la v.a. $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$ è una gaussiana con valore atteso $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n$ e varianza $\sigma^2 = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + ... + \alpha_n\sigma_n$

15.3 V.A. esponenziale

$X \sim Exp[\lambda], \lambda > 0$
$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \forall x > 0$
$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \forall x > 0$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}, Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

15.4 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1,2,3,... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Geom(p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova.
$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

Legge di perdita di memoria
$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \implies E[X-t|X > t] = E[X]$
(Vale solo per v.a. $Geom$ e Exp)

15.5 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1,2,3,... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bin(n,p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova ed n è il numero di prove.
$E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$
$Var[X] < \frac{n}{4}$

15.6 Variabile aleatoria ipergeometrica

La probabilità ipergeometrica descrive l'estrazione senza reinserimento delle palline, perdenti o vincenti, da un urna.
$X \sim Ipergeom(n,h,r)$, data un'urna contenente h palline bianche e $n-h$ palline nere, il numero di palline bianche che vengono ottenute estraendo senza reinserimento r palline.
$P_k = \frac{\binom{k}{h}\binom{r-h}{n-k}}{\binom{n}{r}}$
$E[X] = \frac{rh}{n}, Var[X] = \frac{r(n-r)h(n-h)}{n^2(n-1)}$

15.7 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$ Dove p è la probabilità di successo.
$E[X] = p$, $Var[X] = p(1-p)$