Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 02/07/2019

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Un caposquadra deve formare la propria squadra scegliendo da un gruppo di n persone: egli può scegliere un numero k qualsiasi di persone, $k = 0, 1, \ldots, n$. Supponendo che ogni persona sia stata estratta in maniera indipendente dalle altre e in maniera equiprobabile, qual è la probabilità che sia stata scelta una squadra di k persone, per $k = 0, 1, \ldots, n$?

2. I treni della metro arrivano alla stazione vicino casa ogni quarto d'ora a partire dalle 6:00. Entrate in stazione ogni mattina dalle 7:10 alle 7:30, e il vostro istante di arrivo è distribuito uniformemente in questo intervallo di tempo. Qual è la legge di probabilità del tempo di attesa all'arrivo del primo treno?

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[-1/2, 1/2]$ e $Y \sim \mathcal{U}[-1, 1]$, con X e Y indipendenti. Calcolare la legge di probabilità di $Z = X + Y$.

4. Sia $\{X_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ un insieme di v.a. iid con $X_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Dire quali delle seguenti successioni di v.a. converge in probabilità per $n \to \infty$ e a quale valore. Giustificare le risposte.

   (a) $\{S_n\}$ dove $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

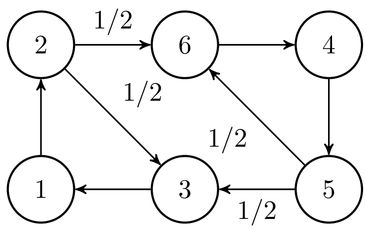
   (b) $\{M_n\}$ dove $M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

5. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 1.

   (a) Determinare la probabilitá di transizione mancanti.

   (b) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.

   (c) La catena è periodica? Giustificare la risposta discutendo la probabilità di trovarsi nello stato 1 dopo un lungo tempo.



6. Sia $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $\{X|\Theta\} \sim \mathcal{N}(0, \Theta)$. Determinare:

   (a) lo stimatore MAP di Θ basato sull'osservazione X. *Suggerimento: fare attenzione al dominio di definizione di Θ.*

   (b) lo stimatore LMS <u>lineare</u> di Θ basato sull'osservazione X. *Suggerimento: è sufficiente calcolare* $\mathsf{Cov}[X, \Theta]$ *per concludere che...*

Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 02/07/2019 – Compito II

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

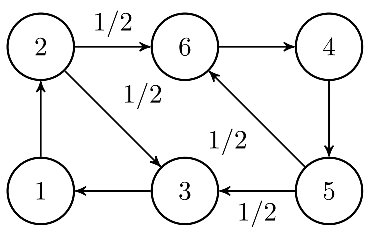
1. Sia $\{X_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ un insieme di v.a. iid con $X_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Dire quali delle seguenti successioni di v.a. converge in probabilità per $n \to \infty$ e a quale valore. Giustificare le risposte.

   (a) $\{S_n\}$ dove $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
   (b) $\{M_n\}$ dove $M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2. In una certa zona del lago si sa che il numero di pesci pescati in un'ora segue una legge di Poisson con media 4. Appena arrivati in zona notate un pescatore che ha già pescato 3 pesci. Nell'istante del vostro arrivo, qual è stato il tempo medio di pesca del pescatore?

3. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 1.

   (a) Determinare la probabilitá di transizione mancanti.
   (b) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.
   (c) La catena è periodica? Giustificare la risposta discutendo la probabilità di trovarsi nello stato 1 dopo un lungo tempo.



4. Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera la sequenza di stati campionati secondo la legge Markoviana illustrata nella figura dell'esercizio 3. Si inizializzi il processo partendo dallo stato '1'.

5. Si consideri la successione degli stati $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ della catena di Markov illustrata nella figura dell'esercizio 3. Qual è la minima lunghezza del messaggio (in bit) necessario a descrivere univocamente la sequenza degli stati?

6. Sia $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $\{X|\Theta\} \sim \mathcal{N}(0, \Theta)$. Determinare:

   (a) lo stimatore MAP di Θ basato sull'osservazione X. *Suggerimento: fare attenzione al dominio di definizione di* Θ*.*
   (b) lo stimatore LMS <u>lineare</u> di Θ basato sull'osservazione X. *Suggerimento: è sufficiente calcolare* $\mathsf{Cov}[X, \Theta]$ *per concludere che...*

Soluzioni compito II

Problema 1

1. La somma S_n non converge in probabilità perché

$$\mathsf{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[X_i] = n\mathsf{Var}[X_1] = \frac{n}{12} \to \infty.$$

2. La v.a. M_n è la media campionaria delle X_i. Siccome le X_i sono iid, la successione $\{M_n\}$ converge in probabilità a $\mathsf{E}[X_1] = 1/2$ per la legge debole dei grandi numeri.

Problema 2

Sia T l'istante di tempo del vostro arrivo misurato dall'inizio del tempo di pesca del pescatore. Siccome sappiamo che ci sono già stati 3 pesci pescati, cioè 3 arrivi di Poisson sull'asse temporale prima del tempo T, sappiamo che

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + X$$

dove $T_i \sim \text{Exp}(4)$ sono i tempi di interarrivo tra gli istanti di pesca, e X è il tempo che intercorre tra il terzo pesce pescato e il vostro arrivo. A cause del fenomeno della perdita di memoria dei processi di Poisson, anche il tempo $X \sim \text{Exp}(4)$, pertanto

$$\mathsf{E}[T] = 4\,\mathsf{E}[T_1] = 1.$$

Problema 3

1. Tutte le probabilità di transizione mancanti sono 1, poiché sono le uniche probabilità uscenti dagli stati.

2. Tutti gli stati sono ricorrenti

3. La catena è periodica, infatti ci sono 3 classi periodiche: la classe $C_1 = \{1, 4\}$, la classe $C_2 = \{2, 5\}$ e la classe $C_3 = \{3, 6\}$. E' facile verificare che nell'istante di tempo n ci si trova nella classe $C_{n \bmod 3}$, dove $n \bmod 3$ è il resto della divisione di n con 3. La probabilità $\pi_1(n)$ di trovarsi nello 1 al tempo $n \to \infty$ è

$$\pi_1(n) = \begin{cases} 1/2 & n \bmod 3 \equiv 1 \\ 0 & \bmod 3 \not\equiv 1 \end{cases}$$

dove il termine $1/2$ è dovuto alla simmetria della catena: con probabilità rimanente $1/2$ ci si troverà nell'altro stato della classe C_1, cioé lo stato 4.

Problema 4

L'algoritmo deve mantenere una memoria che è lo stato della catena Markoviana X_n, e ad istanti di tempo opportuni generare il numero casuale che decide su quale stato della classe C_3 saltare.

1. Inizializza $X_1 = 1$ e $n = 1$.

2. Se $n \bmod 3 \equiv 2$, genera $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Se $U < 1/2$ allora $X_{n+1} = 3$ altrimenti $X_{n+1} = 6$.

3. Se $n \bmod 3 \not\equiv 1$, allora $X_{n+1} = X_n + 1$.

4. Se $n \bmod 3 \not\equiv 0$, allora $X_{n+1} = X_n - 2$.

5. $n \leftarrow n + 1$, e torna al punto 2.

Problema 5

Nei primi 10 passi della catena di Markov dell'esercizio 3 ci sono 3 istanti di tempo in cui viene lanciata una moneta bilanciata per decidere che percorso prendere. Dunque ci sono $2^3 = 8$ possibili sequenze di 10 stati, tutte equiprobabili. Queste 8 sequenze si possono enumerare con solo 3 bit.

Problema 6

1. La distribuzione a posteriori di Θ è

$$f_{\Theta|X}(\theta|x) \propto f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Il massimo della distribuzione a posteriori si può trovare imponendo a zero la derivata di $\log(f_{\Theta|X})$ (essendo il logaritmo una funzione monotona):

$$\frac{d}{d\theta} \log f_{\Theta|X}(\theta|x) = -\frac{2\pi}{2 \cdot 2\pi\theta} + \frac{x^2}{2\theta} \stackrel{!}{=} 0, \qquad 0 < \theta < 1$$

   che ha come soluzione $\theta = x^2$ se $0 < x^2 < 1$, ovvero $|x| < 1$. Per i valori $|x| > 1$ si sceglie $\theta = 1$ come soluzione. Ricapitolando:

$$\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}(X) = \begin{cases} X^2 & |X| < 1 \\ 1 & |X| > 1 \end{cases}$$

2. Innanzitutto si noti che

$$\mathsf{E}[X|\Theta] = 0$$

   e quindi:

$$\mathsf{Cov}[X, \Theta] = \mathsf{E}[X\Theta] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X\Theta|\Theta]] = \mathsf{E}[\Theta \mathsf{E}[X|\Theta]] = 0,$$

   dunque lo stimatore lineare LMS è

$$\widehat{\Theta}_{\text{Lin}}(X) = \mathsf{E}[\Theta] = 1/2.$$

Soluzioni

Problema 1

Lo spazio di probabilità è uniforme, quindi la probabilità cercata P_k si può calcolare come rapporto tra casi favorevoli e casi totali. I casi totali sono tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme di n persone, cioè 2^n sottoinsiemi. I casi favorevoli sono tutti i sottoinsiemi di cardinalità k, cioè $\binom{n}{k}$. In definitiva si ha:

$$P_k = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Problema 2

L'istante di arrivo in stazione X è una v.a. uniforme $\mathcal{U}[10, 30]$. Sia Y il tempo di attesa in stazione. La legge di Y si può ottenere semplificando il problema con una strategia divide et impera: introducendo gli eventi
$A = \{$ Si prende il treno delle 7:15 $\} = \{10 < X < 15\}$
$B = \{$ Si prende il treno delle 7:30 $\} = \{15 < X < 30\}$
si può scrivere che

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \Pr(A) f_{Y|A}(y) + \Pr(B) f_{Y|B}(y) \\ &= \frac{5}{20} f_{\mathcal{U}[0,5]} + \frac{15}{20} f_{\mathcal{U}[0,15]} \\ &= \begin{cases} 1/10 & 0 < y < 5 \\ 1/20 & 5 < y < 15 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 3

Usando la legge di convoluzione si ha

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_X(z-y) dy \\ &= \begin{cases} z/2 + 3/4 & -3/2 < z < -1/2 \\ 1/2 & -1/2 < z < 1/2 \\ -z/2 + 3/4 & 1/2 < z < 3/2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 4

1. La somma S_n non converge in probabilità perché

$$\mathsf{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[X_i] = n\mathsf{Var}[X_1] = \frac{n}{12} \to \infty.$$

2. La v.a. M_n è la media campionaria delle X_i. Siccome le X_i sono iid, la successione $\{M_n\}$ converge in probabilità a $\mathsf{E}[X_1] = 1/2$ per la legge debole dei grandi numeri.

Problema 5

1. Tutte le probabilità di transizione mancanti sono 1, poiché sono le uniche probabilità uscenti dagli stati.

2. Tutti gli stati sono ricorrenti

3. La catena è periodica, infatti ci sono 3 classi periodiche: la classe $C_1 = \{1, 4\}$, la classe $C_2 = \{2, 5\}$ e la classe $C_3 = \{3, 6\}$. E' facile verificare che nell'istante di tempo n ci si trova nella classe $C_{n \bmod 3}$, dove $n \bmod 3$ è il resto della divisione di n con 3. La probabilità $\pi_1(n)$ di trovarsi nello 1 al tempo $n \to \infty$ è

$$\pi_1(n) = \begin{cases} 1/2 & n \bmod 3 \equiv 1 \\ 0 & \bmod 3 \not\equiv 1 \end{cases}$$

dove il termine $1/2$ è dovuto alla simmetria della catena: con probabilità rimanente $1/2$ ci si troverà nell'altro stato della classe C_1, cioé lo stato 4.

Problema 6

1. La distribuzione a posteriori di Θ è

$$f_{\Theta|X}(\theta|x) \propto f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} & 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il massimo della distribuzione a posteriori si può trovare imponendo a zero la derivata di $\log(f_{\Theta|X})$ (essendo il logaritmo una funzione monotona):

$$\frac{d}{d\theta} \log f_{\Theta|X}(\theta|x) = -\frac{2\pi}{2 \cdot 2\pi\theta} + \frac{x^2}{2\theta} \stackrel{!}{=} 0, \qquad 0 < \theta < 1$$

che ha come soluzione $\theta = x^2$ se $0 < x^2 < 1$, ovvero $|x| < 1$. Per i valori $|x| > 1$ si sceglie $\theta = 1$ come soluzione. Ricapitolando:

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{MAP}}(X) = \begin{cases} X^2 & |X| < 1 \\ 1 & |X| > 1 \end{cases}$$

2. Innanzitutto si noti che

$$\mathsf{E}[X|\Theta] = 0$$

e quindi:

$$\mathsf{Cov}[X, \Theta] = \mathsf{E}[X\Theta] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X\Theta|\Theta]] = \mathsf{E}[\Theta\mathsf{E}[X|\Theta]] = 0,$$

dunque lo stimatore lineare LMS è

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{Lin}}(X) = \mathsf{E}[\Theta] = 1/2.$$