Informazione e stima – 12/07/2023

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

(1) Avendo a disposizione 26 caratteri alfabetici (26 minuscoli e 26 maiuscoli) e 10 caratteri numerici, e supponendo di scegliere a caso una password di 8 caratteri, qual è la probabilità di ottenere una password con almeno 1 carattere alfabetico maiuscolo e almeno 1 carattere numerico allo stesso tempo?

(2) Un processo di produzione produce bilancieri la cui lunghezza segue una distribuzione Gaussiana con media $\mu = 220$ cm e deviazione standard $\sigma = 0.5$ cm. Qual è la probabilità che la lunghezza media di un campione casuale di 25 bilancieri si trovi tra 219.5 cm e 220.5 cm?
Lasciare il risultato in termini della funzione Φ, qualora la tabella della Gaussiana non dovesse bastare.

(3) Siano $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $V \sim \mathcal{U}[0,1]$ due variabili aleatorie indipendenti. Trovare la legge di $W = U \cdot V$.

(4) I pazienti arrivano al pronto soccorso secondo un processo di Poisson con intensità di 10 pazienti ogni ora. Considerando gli ultimi 6 pazienti arrivati, calcolare la probabilità che siano arrivati almeno a 5 minuti di distanza l'uno dall'altro.

(5) Sia $X = \sqrt{V} \cdot Z$, dove $V \sim \mathrm{Exp}(1)$ e $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ sono due variabili aleatorie indipendenti. Trovare $\hat{V}_{\mathrm{MAP}}(x)$, la stima MAP di V avendo a disposizione un'osservazione $X = x$.

(6) Sia X una variabile aleatoria discreta tale che $\Pr(X = 1) = 0.4$, $\Pr(X = 2) = 0.3$, $\Pr(X = 3) = a$, $\Pr(X = 4) = b$ e probabilità nulla altrimenti. Quali sono i valori di a e b che:

(a) massimizzano l'entropia di X?
(b) minimizzano l'entropia di X?

Dare i corrispondenti valori di entropia.

Soluzioni

Problema 1

Lo spazio di probabilità è uniforme discreto. Sia X l'evento che comprende tutte le password di 8 caratteri con almeno 1 carattere maiuscolo e 1 carattere numerico. Inoltre, sia A l'evento che comprende le password con 0 caratteri maiuscoli, e B l'evento che comprende le password con 0 caratteri numerici. Allora possiamo scrivere che

$$\Pr(X) = 1 - \Pr(A \cup B) = 1 - \Pr(A) - \Pr(B) + \Pr(A \cap B). \tag{1}$$

Le password totali sono $(26+26+10)^8 = 62^8$. Il numero di password senza caratteri maiuscoli è $(26+10)^8 = 36^8$, dunque

$$\Pr(A) = \left(\frac{36}{62}\right)^8 \approx 0.0129. \tag{2}$$

Il numero di password senza caratteri numerici è $(26+26)^8 = 52^8$, dunque

$$\Pr(B) = \left(\frac{52}{62}\right)^8 \approx 0.2448. \tag{3}$$

Il numero di password senza caratteri maiuscoli e senza caratteri numerici è 26^8, dunque

$$\Pr(A \cap B) = \left(\frac{26}{62}\right)^8 \approx 9.56 \cdot 10^{-4}. \tag{4}$$

Il risultato finale è

$$\Pr(X) = 1 - 0.0129 - 0.2448 + 9.56 \cdot 10^{-4} \approx 0.7432. \tag{5}$$

Problema 2

Sia X_i la lunghezza del bilanciere i-esimo, tale che $X_i \sim \mathcal{N}(220, 0.5^2)$ per $i = 1, \ldots, 25$ e le X_i sono tutte indipendenti. La media delle lunghezze del campione è dunque

$$M = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i. \tag{6}$$

Siccome M è una combinazione lineare di v.a. Gaussiane, allora M ha una distribuzione Gaussiana con

$$\mathsf{E}[M] = \mathsf{E}\left[\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i\right] = \mathsf{E}[X_1] = 220, \tag{7}$$

$$\mathsf{Var}[M] = \mathsf{Var}\left[\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i\right] = \frac{1}{25}\mathsf{Var}[X_1] = \frac{0.5^2}{25} = \frac{1}{100}. \tag{8}$$

La probabilità cercata è dunque

$$\begin{aligned}
\Pr(219.5 \le M \le 220.5) &= \Pr\left(\frac{219.5 - 220}{\frac{1}{10}} \le \frac{M - 220}{\frac{1}{10}} \le \frac{220.5 - 220}{\frac{1}{10}}\right) && (9)\\
&= \Pr\left(-5 \le Z \le 5\right) && (10)\\
&= 2\Pr\left(0 \le Z \le 5\right) && (11)\\
&= 2\left(\Phi(5) - \frac{1}{2}\right). && (12)
\end{aligned}$$

Problema 3

Innanzitutto, si noti che

$$F_U(u) = F_V(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ u & 0 \le u \le 1 \\ 1 & u \ge 1 \end{cases} \tag{13}$$

e che $W = U \cdot V \in [0,1]$. Usando il metodo della cumulata, si ha che

$$\begin{aligned}
F_W(w) &= \Pr(U \cdot V \leq w) && (14)\\
&= \int_0^1 \Pr\left(U \leq \frac{w}{v}\right) dv && (15)\\
&= \int_0^1 F_U\left(\frac{w}{v}\right) dv && (16)\\
&= \int_w^1 \frac{w}{v} dv + \int_0^w dv && (17)\\
&= w[\ln(v)]_w^1 + w && (18)\\
&= -w\ln(w) + w, \qquad w \in (0,1). && (19)
\end{aligned}$$

Calcolando la derivata si ottiene la legge

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = -\ln(w), \qquad w \in (0,1) \tag{20}$$

e $f_W(w) = 0$ altrimenti.

Problema 4

Siano T_i, $i = 1,2,3,4,5$, i tempi di interarrivo tra gli ultimi 6 pazienti arrivati. Siccome il processo degli arrivi è di Poisson con intensità $\lambda = 10/60 = 1/6$ pazienti al minuto, allora dalla teoria sappiamo che le v.a. T_i sono iid con $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. Pertanto la probabilità cercata è

$$\begin{aligned}
\Pr(\min T_i \geq 5) &= \Pr(T_1 \geq 5, T_2 \geq 5, T_3 \geq 5, T_4 \geq 5, T_5 \geq 5) && (21)\\
&= (\Pr(T_1 \geq 5))^5 && (22)\\
&= (e^{-\frac{1}{6}\cdot 5})^5 && (23)\\
&= e^{-\frac{25}{6}} && (24)\\
&\approx 0.0155. && (25)
\end{aligned}$$

Problema 5

La stima MAP di V è

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{\text{MAP}}(x) &= \arg\max_{v\in[0,\infty)} f_{V|X}(v|x) && (26)\\
&= \arg\max_{v\in[0,\infty)} f_{X|V}(x|v) f_V(v) && (27)\\
&= \arg\max_{v\in[0,\infty)} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v}} e^{-v} && (28)\\
&= \arg\max_{v\in[0,\infty)} -\frac{1}{2}\ln(2\pi v) - \frac{x^2}{2v} - v && (29)
\end{aligned}$$

dove, in ordine, abbiamo usato la definizione di stima MAP, la regola di Bayes ignorando il denominatore $f_X(x)$ che non dipende da v, usato il fatto che $X|\{V = v\}$ è una v.a. Gaussiana con media nulla e varianza v, e applicato il logaritmo che è una funzione monotona e non cambia il risultato di argmax. Il massimo della funzione in (29) si può trovare imponendo la derivata prima uguale a zero:

$$\frac{d}{dv} - \frac{1}{2}\ln(2\pi v) - \frac{x^2}{2v} - v = -\frac{1}{4\pi v} + \frac{x^2}{2v^2} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{30}$$

$$-\frac{v}{4\pi} + \frac{x^2}{2} - v^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{31}$$

$$v = \frac{-\frac{1}{4\pi} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 + 2x^2}}{2} \tag{32}$$

dove abbiamo scartato la soluzione negativa di v. In conclusione, abbiamo

$$\hat{V}_{\text{MAP}}(x) = \frac{-\frac{1}{4\pi} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 + 2x^2}}{2}. \tag{33}$$

Problema 6

Si noti che $a+b = 1-0.4-0.3 = 0.3$. Una risposta immediata al quesito deriva dall'interpretazione di entropia come la sorpresa media che abbiamo nell'osservare il risultato dell'esperimento aleatorio. Intuitivamente si vede come la sorpresa media è massimizzata quando la probabilità rimanente 0.3 è spalmata uniformemente su a e b, dando $a = b = 0.15$. L'entropia associata è

$$H(X) = -0.4\log_2 0.4 - 0.3\log_2 0.3 - 2\cdot 0.15\log_2 0.15 \approx 1.871. \tag{34}$$

La sorpresa media è minimizzata quando la probabilità rimanente 0.3 è assegnata completamente ad a oppure solo a b, ad esempio $a = 0.3$ e $b = 0$. L'entropia associata è

$$H(X) = -0.4\log_2 0.4 - 2\cdot 0.3\log_2 0.3 \approx 1.571. \tag{35}$$

In alternativa, un approccio puramente matematico impone di risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} a &= \arg\max_{q\in[0,0.3]} -0.4\log_2 0.4 - 0.3\log_2 0.3 - q\log_2 q - (0.3-q)\log_2(0.3-q) && (36) \\ &= \arg\max_{q\in[0,0.3]} -q\log_2 q - (0.3-q)\log_2(0.3-q). && (37) \end{aligned}$$

La funzione in (37) è massimizzata quando la derivata prima è imposta uguale a zero:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq}(-q\log_2 q - (0.3-q)\log_2(0.3-q)) &= \frac{1}{\ln(2)}\left(-\ln(q) - \frac{q}{q} + \ln(0.3-q) + \frac{0.3-q}{0.3-q}\right) && (38) \\ &= \log_2\left(\frac{0.3}{q} - 1\right) \overset{!}{=} 0 && (39) \end{aligned}$$

che risulta in $q = 0.15$ e quindi si ha $a = b = 0.15$.

Per cercare l'entropia minima, si può constatare che la funzione in (37) è minimizzata agli estremi, cioè per $q = 0$ oppure per $q = 0.3$. Ricordando che $x\log_2(x) := 0$ per $x = 0$, agli estremi si ottiene comunque lo stesso valore di entropia scegliendo $a = 0.3$ e $b = 0$, oppure $a = 0$ e $b = 0.3$.