Politecnico di Milano

FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Triennale in Informatica

Formulario
Fondamenti di Automatica

A cura di: @sup3rgiu

Anno Accademico 2018–2019

FORMULARIO FdA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & u, y \in \mathbb{R} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{SD a TC SISO}$$

ordine del sistema

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(k) = f(x(k-1), u(k-1), k-1) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \quad \text{SD a TD SISO}$$

- SD LINEARE: f e g lineari in x e u
- SD TEMPO-INVARIANTE: $f = f(x,u)$ e $g = g(x,u)$ (non dipendono direttamente da t o k)
- SD STRETTAMENTE PROPRIO: $g = g(x,t)$ o $g = g(x,k)$ (non dipende da u)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad c = [c_1, \dots, c_n]$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t) \\ y(t) = c \cdot x(t) + d \cdot u(t) \end{cases} \quad \text{SD } \underline{\text{LTI}} \text{ SISO a TC}$$

$$\begin{cases} x(k) = A \cdot x(k-1) + b \cdot u(k-1) \\ y(k) = c \cdot x(k) + d \cdot u(k) \end{cases} \quad \text{SD } \underline{\text{LTI}} \text{ SISO a TD}$$

stati di equilibrio

EQUILIBRIO: con $u = \bar{u}$ costante, $\exists \bar{x}$ costante t.c. $x(0) = \bar{x}$ implica $x = \bar{x}$?

- TC TI: $x(t)$ costante $\Rightarrow \dot{x} = 0 \longrightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$
- TD TI: x costante $\Rightarrow x(k) = x(k-1)\ \forall k \longrightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}$
- TC LTI: $A\bar{x} + b\bar{u} = 0 \longrightarrow$ se A è non singolare $\exists! \ \bar{x} = -A^{-1} b \bar{u}$, altrimenti o $\nexists \bar{x}$ o $\exists \infty$ equilibri
- TD LTI: $A\bar{x} + b\bar{u} = \bar{x} \Longrightarrow (I - A)\bar{x} = b\bar{u} \Rightarrow$ se A non ha autovalori in 1 (ovvero $I - A$ non singolare) allora $\exists! \ \bar{x} = (I - A)^{-1} b\bar{u}$, altrimenti o $\nexists \bar{x}$ o $\exists \infty$ equilibri

Uscita di equilibrio: se $\exists \bar{x}$, in generale $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$. Nel caso LTI $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$

MOVIMENTO

ML: movimento libero
MF: movimento forzato

- LTI a TD: Formula di Lagrange a TD:
  - per lo stato: $$x(k) = \underbrace{A^k \cdot x(0)}_{ML} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} \cdot b \cdot u(\ell)}_{MF}$$
  - per l'uscita: $$y(k) = c \cdot x(k) + d \cdot u(k) = \underbrace{c \cdot A^k \cdot x(0)}_{ML} + \underbrace{c \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} \cdot b \cdot u(\ell) + d \cdot u(k)}_{MF}$$

  OSS: • ML dipende linearmente da $x(0)$ e non da $u(k)$
  • MF dipende linearmente da $u(k)$ e non da $x(0)$

- LTI a TC: Formula di Lagrange a TC:
  - per lo stato: $$x(t) = \overbrace{e^{At} x(0)}^{ML} + \overbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau}^{MF}$$
  - per l'uscita: $$y(t) = \underbrace{c \cdot e^{At} x(0)}_{ML} + \underbrace{c \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b \cdot u(\tau)\, d\tau + d \cdot u(t)}_{MF}$$

$$e^{At} = \underbrace{T}_{\text{matrice di autovettori}} \cdot \mathrm{diag}\{e^{\overbrace{\lambda_i}^{\text{autovalori di } A} \cdot t}\} \cdot T^{-1}$$

se A è diagonalizzabile

LINEARIZZAZIONE

$$S: \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$ e un suo equilibrio $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$.

Il comportamento di S nell'intorno dell'equilibrio può essere approssimato dal SD LTI

$$S^{\delta}: \begin{cases} \delta\dot{x} = f_x|_{\bar{x},\bar{u}} \cdot \delta x + f_u|_{\bar{x},\bar{u}} \cdot \delta u \\ \delta y = g_x|_{\bar{x},\bar{u}} \cdot \delta x + g_u|_{\bar{x},\bar{u}} \cdot \delta u \end{cases}$$ dove $$\begin{aligned} \delta x &= x - \bar{x} \\ \delta u &= u - \bar{u} \\ \delta y &= y - \bar{y} \end{aligned}$$

- Sistema linearizzato AS $\Rightarrow$ equilibrio AS
- Sistema linearizzato I $\Rightarrow$ equilibrio I
- Sistema linearizzato S $\Rightarrow$ nulla si può dire sulla stabilità dell'equilibrio

STABILITÀ

Nei sistemi lineari (TI) la stabilità è una proprietà del sistema!

- **TC:**
  - tutti gli autovalori λ_i di A hanno $Re < 0$ $\Longleftrightarrow$ sistema AS
  - almeno un autovalore λ_i di A ha $Re > 0$ $\Longrightarrow$ sistema I
  - tutti gli autovalori λ_i di A hanno $Re \leq 0$ e ne esiste almeno uno con $Re = 0$ $\Longrightarrow$ sistema I / sistema S (in base alla forma di Jordan)
- **TD:**
  - $|\lambda_i| < 1 \;\; \forall i$ $\Longleftrightarrow$ sistema AS
  - $\exists i$ t.c. $|\lambda_i| > 1$ $\Longrightarrow$ sistema I
  - $|\lambda_i| \leq 1 \;\; \forall i$ e $\exists i$ t.c. $|\lambda_i| = 1$ $\Longrightarrow$ sistema I / sistema S

CRITERI DI STABILITÀ PER SD LTI a TC:

Sia A la matrice del sistema e $\pi(s) = \det(sI - A)$ il suo polinomio caratteristico. s_i i suoi autovalori.

1) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} s_i$, quindi se $\det(A) = 0$ allora $\exists s_i = 0$ $\Longrightarrow$ sistema **non AS**
2) $Tr(A) = \sum s_i = \sum Re(s_i)$, quindi se $Tr(A) > 0$ allora $\exists s_i$ t.c. $Re(s_i) > 0$ $\longrightarrow$ sistema I
3) se il sistema è AS (cioè $Re(s_i) < 0$) $\forall i$, allora i coefficienti di $\pi(s)$ sono tutti concordi e non nulli.
4) Criterio di **Routh**: Fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un SD LTI a **TC**.

Tabella di Routh:

$$\pi(s) = a_0 \cdot s^n + a_1 \cdot s^{n-1} + a_2 \cdot s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot s + a_n$$

n+1 righe

a_0	a_2	a_4	...	a_{n-1}	oppure a_n
a_1	a_3	...	...	a_n	0
h_1	h_2	...	...	...	
q_1	q_2	...	...		
w_1	w_2	...	...		

$\rightarrow$ a seconda di n pari o dispari

Ogni riga dalla terza inclusa in poi dipende dalle due precedenti come $w_i = -\frac{1}{q_1} \cdot \det\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ q_1 & q_{i+1} \end{bmatrix}$

<u>Criterio:</u> il SD con polinomio caratteristico $\pi(s)$ è AS se e solo se tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono concordi (e non nulli).

TRASFORMATE

- **FOURIER** (TDF):
  - Trasformata: $V(j\omega) = \mathcal{F}(v(t)) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$ $\quad v(t) \in \mathbb{R}$
  - Antitrasformata: $v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(j\omega)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega$

- **LAPLACE** (TDL):
  - Trasformata: $V(s) = \mathcal{L}[v(t)] := \int_{0}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-st} \, dt \quad s \in \mathbb{C}$
  - Antitrasformata: $v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} V(s) \, e^{st} \, ds$ $\quad$ con $v(t) \begin{cases} \text{definito} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

  → con $\alpha > \sigma_c$ dove σ_c è l'ascissa di convergenza

- Proprietà della TDL:

  1) Linearità: $\mathcal{L}[\alpha v_1(t) + \beta v_2(t)] = \alpha \cdot \mathcal{L}[v_1(t)] + \beta \cdot \mathcal{L}[v_2(t)] \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
  2) TDL della derivata: $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} v(t)\right] = s \cdot \mathcal{L}[v(t)] - v(0)$ → $v(0^-)$ se occorre (quando v è discontinua in 0)
  3) TDL dell'integrale: $\mathcal{L}\left[\int_0^t v(x)\,dx\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[v(t)]$
  4) TDL del segnale ritardato: $\mathcal{L}[v(t-\tau)] = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}[v(t)] \quad \tau > 0$

- Teorema del valore iniziale (TVI): Hp: $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$

  Ts: $v(0) = \lim_{s \to +\infty} s \cdot V(s)$ oppure $v(0^+) = \lim_{s \to +\infty} s \cdot V(s)$ (se v è discontinua in 0)

- Teorema del valore finale (TVF): Hp: $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ e $\exists \lim_{t \to +\infty} v(t)$ o equivalentemente $V(s)$ ha solo poli con $\mathrm{Re} < 0$ o nell'origine

  Ts: $\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot V(s)$

- TDL notevoli:

$v(t)$	$V(s)$
$K \cdot \mathrm{imp}(t)$	1
$K \cdot \mathrm{sca}(t)$	$1/s$
$K \cdot \mathrm{ram}(t) = t\,\mathrm{sca}(t)$	$1/s^2$
...	
$K \cdot e^{\alpha t} \cdot \mathrm{sca}(t)$	$K \cdot 1/(s-\alpha)$
$K t^n e^{\alpha t} \cdot \mathrm{sca}(t)$	$K \cdot n!/(s-\alpha)^{n+1}$

segnali canonici: $\mathrm{TDL} = \frac{1}{s^n}$ $\left(\frac{K}{s^n}\right)$ → sono tutti una l'integrale di quello prima

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{(s-\alpha)^n}\right] = K \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\alpha t}$

POLI di una TDL: valori di s per cui $|V(s)| = +\infty$
ZERI di una TDL: valori di s per cui $V(s) = 0$

Nel caso di TDL razionale fratta $V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$: $\{\text{POLI}\} = \{\text{radici di } D(s)\}$, $\{\text{ZERI}\} = \{\text{radici di } N(s)\}$

- Antitrasformazione secondo Heaviside: si applica alle TDL razionali fratte, ovvero $V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con N e D polinomi in s e $\mathrm{gr}(N) < \mathrm{gr}(D)$

  1) Fattorizzo $D(s)$, che sarà quindi espresso come prodotto di termini del tipo:
     - $(s-p)$ → polo semplice
     - $(s-p)^m$ → polo multiplo
     - casi $\mathbb{C}$
  2)
     - Caso polo $\mathbb{R}$ semplice: $\frac{N(s)}{\ldots \cdot (s-p) \cdot \ldots} = \ldots + \frac{\alpha}{(s-p)} + \ldots$
     - Caso polo $\mathbb{R}$ multiplo: $\frac{N(s)}{\ldots \cdot (s-p)^m \cdot \ldots} = \ldots + \frac{\alpha_1}{(s-p)} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{(s-p)^m} + \ldots$
  3) Calcolo i vari coefficienti $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta, \gamma, \ldots$ e quindi scrivo $V(s)$ come somma di fratti semplici
  4) Calcolo l'antitrasformata $\mathcal{L}^{-1}[V(s)]$ usando le TDL notevoli

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (SD LTI SISO a TC)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \overbrace{(sI-A)^{-1}\cdot x(0)}^{\text{TDL del ML di } x} + \overbrace{(sI-A)^{-1}\cdot b\cdot U(s)}^{\text{TDL del MF di } x}$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \overbrace{c(sI-A)^{-1}\cdot x(0)}^{\text{TDL del ML di } y} + \overbrace{[c(sI-A)^{-1}\cdot b + d]\cdot U(s)}^{\text{TDL del MF di } y}$$

$\forall s \notin \{$autovalori di $A\}$ (ovvero $(sI-A)$ non singolare)

FdT: $G(s) = c(sI-A)^{-1}b + d$

- Proprietà delle FdT:

! $D(s)$ è il polinomio caratteristico di A

1) $G(s)$ è razionale fratta $\left(G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)} + d = \frac{\tilde{N}(s) + d\cdot D(s)}{D(s)} \right.$ dove $gr(\tilde{N}) \le n-1$ e $\left. gr(D) = n \right)$

2) i suoi POLI sono autovalori di A (non necessariamente tutti perché alcuni potrebbero essersi semplificati con $N(s)$)

3) $gr(N) = gr(D) \iff d \neq 0$, altrimenti $(d = 0)$ $gr(N) < gr(D)$ (quindi $\frac{3s^2}{s+1}$ non può essere una FdT)

RAGGIUNGIBILITÀ E OSSERVABILITÀ

DeF: uno stato $\tilde{x}$ del sistema si dice raggiungibile (da zero) se $\exists \tilde{u}(t)$ tale che

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ u(t) = \tilde{u}(t) \quad t \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(\tilde{t}) = \tilde{x},\ \tilde{t} < \infty$$

guardo solo il MF di x quindi

Criterio di raggiungibilità: un sistema dinamico è completamente raggiungibile (ovvero ogni suo stato è raggiungibile) se e solo se la matrice di raggiungibilità $M_R = [b \ Ab \ A^2b \ \dots \ A^{n-1}b]$ ha rango massimo (pari a n). Se il sistema ha solo un ingresso, la condizione diventa $\det(M_R) \neq 0$

DeF: uno stato $\tilde{x} \neq 0$ è non osservabile se

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = \tilde{x} \\ u(t) = 0 \quad t \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y(t) = 0 \quad t \ge 0$$

solo ML di y quindi

Criterio di osservabilità: un sistema dinamico è completamente osservabile (ovvero è privo di stati non osservabili) se e solo se la matrice di osservabilità $M_O = [c^T \ A^Tc^T \ (A^2)^Tc^T \dots (A^{n-1})^Tc^T] = [c \ cA \ cA^2 \dots cA^{n-1}]^T$ ha rango massimo (uguale a n). Se il sistema ha solo un ingresso, tale condizione equivale a $\det(M_O) \neq 0$

OSS: gli autovalori delle parti NR e/o NO del sistema, nel calcolo della FdT, si cancellano. Pertanto, la FdT rappresenta solo la parte R&O del sistema

DeF: una cancellazione è critica se avviene al di fuori della regione di AS (ovvero $Re(\lambda_i) \ge 0$ a TC e $|\lambda_i| \ge 1$ a TD)

Quindi:
1) la rappresentazione di stato (A, b, c, d) e la FdT $G(s)$ sono rappresentazione equivalenti di un SD, a meno di una trasformazione di similarità, se nel calcolo della FdT non si hanno cancellazioni (o equivalentemente se il sistema è R&O)

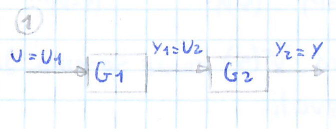
2) poiché i POLI di $G(s)$ sono gli autovalori della parte R&O del sistema (gli altri si sono cancellati), perché si possa studiare la stabilità (asintotica) del sistema usando la FdT $G(s)$ non vi devono essere cancellazioni critiche

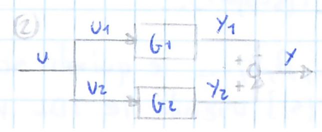
SISTEMI INTERCONNESSI

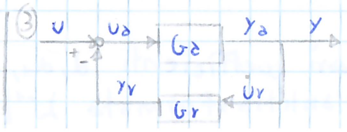
1) Blocchi in serie: $\frac{Y}{U} = G_2 \cdot G_1 = \frac{N_2 N_1}{D_2 D_1} \Longrightarrow G_1$ e G_2 AS $\iff$ sistema complessivo AS

2) Blocchi in parallelo: $\frac{Y}{U} = G_1 + G_2 = \frac{N_2 D_1 + N_1 D_2}{D_1 D_2} \Longrightarrow G_1$ e G_2 AS $\iff$ sistema complessivo AS

3) Blocchi in retroazione: $\frac{Y}{U} = \frac{G_a}{1 + G_a \cdot G_r} = \frac{\text{"andata"}}{1 + \text{"anello"}} = \frac{N_a D_r}{D_a D_r + N_a N_r} \Rightarrow G_a$ e G_r AS non occorre né basta per l'AS del sistema complessivo







RISPOSTA ESPONENZIALE

$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ numerici

$u(t) = U e^{\lambda t} \quad t \geq 0$

$\lambda \notin \{\text{autovalori di } A\}$

$\Longrightarrow$ con $x(0) = (\lambda I - A)^{-1} b \cdot U$ si ottiene $y(t) = G(\lambda) U e^{\lambda t} \quad t \geq 0$

- Se $G(\lambda) = 0$, allora con lo stesso $x(0)$ $y(t) = 0$ $t \geq 0$ (proprietà bloccante degli zeri)
- se il sistema è AS, allora $\forall x(0)$ $y(t) \longrightarrow G(\lambda) U e^{\lambda t}$ $t \to +\infty$

RISPOSTA SINUSOIDALE

Teorema Fondamentale della risposta in frequenza:

Dato il SD LTI a TC (SISO) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ e considerato l'ingresso $u(t) = U \operatorname{sen}(\omega t)$ $t \geq 0$ e detta $G(s)$ la FdT del sistema,

allora: 1) se $\pm j\omega$ non sono autovalori di A, allora $\exists!\, x(0)$ tale che

$$y(t) = |G(j\omega)| \cdot U \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \measuredangle G(j\omega)) \quad t \geq 0$$

2) se inoltre il sistema è AS, allora $\forall x(0)$ $y(t) \to |G(j\omega)| \cdot U \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$ $t \to +\infty$

__Def__: data una FdT $G(s)$, la sua restrizione all'asse immaginario positivo, J^+, cioè $G(j\omega)$ $\omega \geq 0$, si dice risposta in frequenza (RF) di $G(s)$

DIAGRAMMI DI BODE

Riscrivo la FdT $G(s)$ nella forma $G(s) = \dfrac{\mu}{s^g} \cdot \dfrac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots} \cdot \dfrac{\left(1 + 2\frac{\zeta_1}{\omega_{n1}} s + \frac{1}{\omega_{n1}^2} s^2\right)\cdots}{\left(1 + 2\frac{\xi_1}{\omega_{n1}} s + \frac{1}{\omega_{n1}^2} s^2\right)\cdots}$

tipo ($\in \mathbb{Z}$) — guadagno ($\in \mathbb{R}$) — τ_i e T_i costanti di tempo (scalari $\neq 0$) — ω_{ni}, ω_{ni}: pulsazioni naturali

- DBM: 1) Traccio DBM di $\frac{\mu}{s^g}$ (pendenza $-g$ e taglia l'asse 0dB in $\bar{\omega}$ t.c. $\left|\frac{\mu}{(j\bar{\omega})^g}\right| = 1 = 0\,dB$)

  e $g=0$, retta orizzontale di ordinata $|\mu|_{dB}$

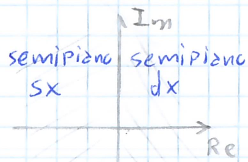
  2) Segno le frequenze dei poli/zeri non nell'origine ($s \neq 0$), ovvero $1/\tau_i$ e $1/T_i$ (ed eventuali pulsazioni naturali se ci sono zeri/poli complessi)

  In caso di: - zero $\longrightarrow$ pendenza aumenta di 1
  - polo $\longrightarrow$ pendenza diminuisce di 1

- DBF: 1) il grafico parte al valore di $\measuredangle^\circ \frac{\mu}{(j\omega)^g} = \begin{cases} -90^\circ g & \text{se } \mu > 0 \\ -180^\circ - 90^\circ g & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$

  2) Segno le frequenze dei poli/zeri non nell'origine.

  In caso di: - zero sx $\longrightarrow$ fase aumenta di 90°
  - zero dx $\longrightarrow$ fase diminuisce di 90°
  - polo sx $\longrightarrow$ fase diminuisce di 90°
  - polo dx $\longrightarrow$ fase aumenta di 90°

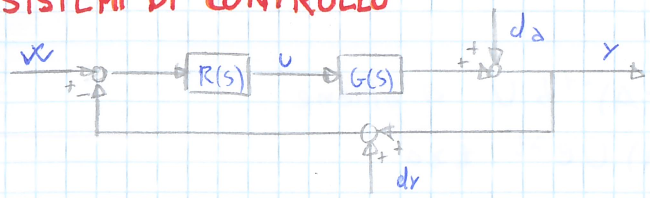


sx $\Leftrightarrow$ Re < 0

dx $\Leftrightarrow$ Re > 0

es: $(1-s) = 0$ sse $s = 1$ $Re(s) > 0 \Rightarrow dx$

SISTEMI DI CONTROLLO



w = segnale di riferimento (o set-point)
u = variabile di controllo
y = variabile controllata
d_a = disturbo in andata
d_r = disturbo in retroazione

$\left.\begin{array}{l} R(s) = \text{regolatore} \\ G(s) = \text{processo} \end{array}\right\}$ FdT

$L(s) := R(s) \cdot G(s) \longrightarrow$ FdT d'anello aperto

$T(s) := \dfrac{L(s)}{1+L(s)} = \dfrac{Y}{W} = -\dfrac{Y}{D_r} \rightarrow$ Funzione di sensitività complementare

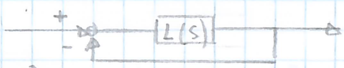
$S(s) := \dfrac{1}{1+L(s)} = 1 - T(s) = \dfrac{Y}{D_a} \longrightarrow$ Funzione di sensitività

$S + T = 1$

$Q(s) := \dfrac{R(s)}{1+L(s)} = \dfrac{U}{W} \quad -\dfrac{U}{D_a} = -\dfrac{U}{D_r} \longrightarrow$ Funzione di sensitività del controllo

$e(t) =: w(t) - y(t) \longrightarrow$ errore

Criterio di Nyquist:



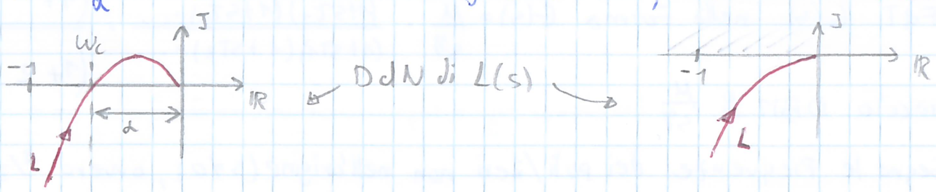
Si tracci il diagramma (DdN) di Nyquist di $L(s)$ (suo diagramma polare più lo speculare)
Sia P_D il numero di poli di $L(s)$ con $Re > 0$
Sia N il numero di giri antiorari del diagramma di Nyquist di $L(s)$ attorno al punto -1 dell'asse reale; se il diagramma passa per il punto -1 si dirà che N non è ben definito

Criterio: il sistema in anello chiuso è AS $\Longleftrightarrow$ N è ben definito e $N = P_D$

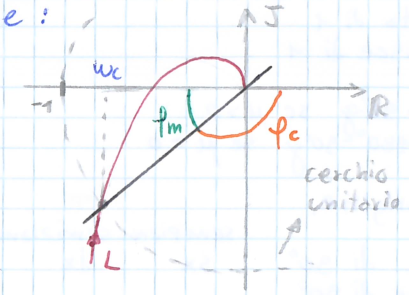
MARGINI DI STABILITÀ ($P_D = 0$)

1) Margine di modulo: $M_m := \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$

2) Margine di guadagno: $K_m := \dfrac{1}{\alpha}$ se $\exists\, \omega_c$ finito t.c. $\angle^\circ(j\omega_c) \leq -180^\circ$, $K_m = +\infty$ se $\nexists\, \omega_c$



3) Margine di fase:



ω_c: Frequenza t.c. $|L| = 1$ (Freq. alla quale avviene il taglio)

$\varphi_c := \arg^\circ(L(j\omega_c))$

$\varphi_m := 180^\circ - |\varphi_c|$

OSS: se $L(j\omega)$ è tutta entro il cerchio unitario: $\varphi_m = +\infty$ (o non definito)

Criterio di Bode:

Si supponga: 1) $P_D = 0$ ($L(s)$ non ha poli con $Re > 0$)
2) Il DBM di $L(s)$ taglia l'asse 0dB una e una sola volta dall'alto verso il basso

Allora, detto μ_L il guadagno di $L(s)$ e φ_m il margine di fase,

ANELLO CHIUSO AS $\Longleftrightarrow$ $\mu_L > 0$ e $\varphi_m > 0^\circ$

Effetto di un ritardo: $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} \cdot e^{-s\tau} = G_R(s) \cdot e^{-s\tau}$

$\Downarrow$

$G(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot e^{-s\tau}$

$|G(j\omega)| = |G_R(j\omega)|$

$\angle^\circ G(j\omega) = \angle^\circ G_R(j\omega) - \omega \cdot \tau$

Quindi:
- DBM di G = DBM di G_R
- DBF di G = DBF di $G_R - \omega\tau$ (esponenziale in scala log $\Rightarrow$)

PROGETTO DEL CONTROLLORE (nelle ipotesi di Bode)

① Progetto statico:

- Considero le sole componenti canoniche (TDL del tipo K/s^n) di w e d_a e assumo che il sistema in AC sia AS (quindi poli con $Re<0$)
- Esprimo l'errore a transitorio esaurito $e_\infty := \lim_{t\to\infty} e(t)$ con $e(t) := w(t) - y(t)$ usando il teorema del valore finale (TVF)
- Impongo i vincoli $e_\infty = 0$ o $|e_\infty| < tot$ e determino condizioni su tipo (g_L) e/o guadagno (μ_L) di $L(s)$.

<u>OSS:</u> per il criterio di Bode deve essere $\mu_L > 0$. Scelgo g_L minimo indispensabile

② Progetto dinamico:

- Vincolo sulla velocità di risposta: $\omega_{c_{min}} < \omega_c \ (< \omega_{c_{max}})$
- Vincolo sul grado di stabilità: $\varphi_m > tot$ (si verifica con il regolo delle fasi)
- Vincolo sulla reiezione di un disturbo in andata:

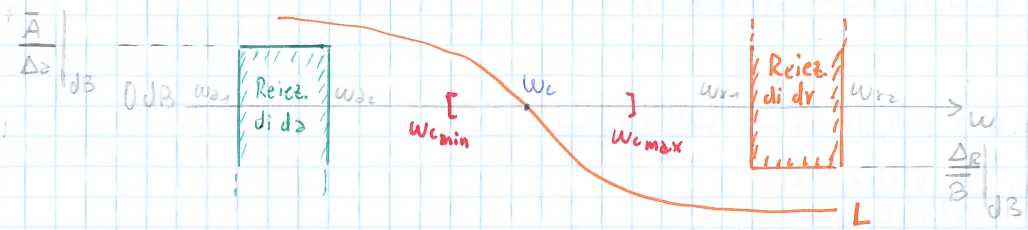
  voglio che $d_a(t) = A \cdot sen(\omega_a \cdot t)$ con $|A| < \bar{A}$ e $0 \leq \omega_{a_1} \leq \omega_a \leq \omega_{a_2} \leq \omega_c$ produca asintoticamente $(t \to +\infty)$ su y un effetto di ampiezza non superiore a Δ_a

  Condizione: $|L(j\omega)| > \dfrac{\bar{A}}{\Delta_a}$ per $\omega_{a_1} \leq \omega \leq \omega_{a_2}$

- Vincolo sulla reiezione di un disturbo in retroazione:

  voglio che $d_r(t) = B \cdot sen(\omega_r \cdot t)$ con $|B| < \bar{B}$ e $\omega_c < \omega_{r_1} \leq \omega_r \leq \omega_{r_2} \leq \infty$ produca asintoticamente $(t \to +\infty)$ su y un effetto di ampiezza non superiore a Δ_R

  Condizione: $|L(j\omega)| < \dfrac{\Delta_R}{B}$ per $\omega_{r_1} \leq \omega \leq \omega_{r_2}$



In conclusione, occorre trovare una FdT $L(s)$ che:

1. rispetti i vincoli del progetto statico
2. rispetti i vincoli del progetto dinamico come tracciati sul foglio logaritmico
3. contenga eventuali zeri di $P(s)$ nel semipiano dx affinché $R(s)$ non li cancelli
4. produca un margine di fase φ_m adeguato
5. abbia un grado relativo almeno pari a quello di $P(s)$ (altrimenti $R(s)$ avrà più zeri che poli)
6. abbia meno zero e poli possibili.

Fatto ciò, calcolo $R(s) = \dfrac{L(s)}{P(s)}$

REGOLATORI PID ("proporzionale, integrale, derivativo)

Legge di controllo ideale: $u(t) = \underbrace{K_P \cdot e(t)}_{P} + \underbrace{K_I \int_0^t e(\tau)\,d\tau}_{I} + \underbrace{K_D \cdot \frac{d\,e(t)}{dt}}_{D}$ dove $e(t)$ = errore

AZIONI: P, I, D

Ruolo azione P: garantire una reiezione pronta all'errore
Ruolo azione I: garantire errore nullo a regime ($e_\infty = 0$ per $w, d_a = cost$)
Ruolo azione D: "anticipare" l'errore

· Forme alternative della legge di controllo PID

1) Facendo la TDL di u(t) ideale (vedi sopra) si ottiene

vedo che è ideale perché ha 2 zeri e 1 polo (irrealizzabile)

$$U = \left(K_P + \underbrace{\frac{K_I}{S}}_{\frac{1}{s}=\text{integrale}} + K_D \cdot \underbrace{S}_{s=\text{derivata}}\right)\cdot E = \underbrace{K}_{\text{GUADAGNO}}\left(1 + \frac{1}{s\cdot \underbrace{T_i}_{\text{TEMPO INTEGRALE}}} + s\cdot \underbrace{T_d}_{\text{TEMPO DERIVATIVO}}\right)\cdot E = K\left(\frac{s\cdot T_i + 1 + s^2 T_i T_d}{s\cdot T_i}\right)$$

2) Forma ISA reale a 1 gdl

$$U = K\left(\underbrace{1 + \frac{1}{s\cdot T_i}}_{PI} + \underbrace{\frac{s\cdot T_d}{1+s\cdot\frac{T_d}{N}}}_{D\ \text{reale}}\right)\cdot E$$

Parametri: K, T_i, T_d, N

3) Forma ISA reale a 2 gdl

$$U = K\left(\underbrace{b}_{P} W - Y + \underbrace{\frac{1}{s\cdot T_i}(W - Y)}_{\text{nessun peso nell'azione I perché voglio } W-Y=0 \text{ a regime}} + \frac{s\cdot T_d}{1+s\cdot\frac{T_d}{N}}\left(\underbrace{c}_{D} W - Y\right)\right)$$

Parametri: K, T_i, T_d, N, b, c

PESI DEL SET-POINT NELLE AZIONI

- N: N alto implica derivatore più ideale, ma il controllo u diventa più sensibile al rumore in alta frequenza
- b: può ridurre la sollecitazione agli attuatori a fronte di variazioni brusche di W
- c: riduce l'effetto dei "quasi impulsi" sugli attuatori

Riassumendo:

- PID: regolatore con 2 zeri e 2 poli, di cui uno nell'origine

  esempio: $\mu \cdot \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s(1+s\tau)}$

- PI: regolatore con 1 zero e 1 polo nell'origine

  esempio: $\mu \cdot \frac{1+sT}{s} = \mu\left(\frac{1}{s} + T\right)$

SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE

TRASFORMATA ZETA (analogo della TDL per i segnali a TD)

Trasformata Zeta (TZ): $V(z) = \mathcal{Z}[v(k)] := \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \cdot z^{-k}$ $\quad z, V(z) \in \mathbb{C}$; $v(k)$ $k = 0,1,2,\dots$ segnale a TD

- Proprietà della TZ:
  1) Linearità: $\mathcal{Z}[\alpha v_1(k) + \beta v_2(k)] = \alpha \mathcal{Z}[v_1(k)] + \beta \mathcal{Z}[v_2(k)]$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  2) TZ del segnale anticipato di un passo: $\mathcal{Z}[v(k+1)] = z \cdot \mathcal{Z}[v(k)] - z v(0)$
- TZ notevoli:

$v(k)$	$V(z)$		
$imp(k)$	1		
$sca(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$	
a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$	(esponenziale discreto)

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (SD LTI SISO a TD)

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + b u(k) \\ y(k) = c x(k) + d u(k) \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}[x(k)] = X(z) = \overbrace{(zI-A)^{-1} z \cdot x(0)}^{\text{TZ del ML di } x} + \overbrace{(zI-A)^{-1} \cdot b \cdot V(z)}^{\text{TZ del MF di } x}$$

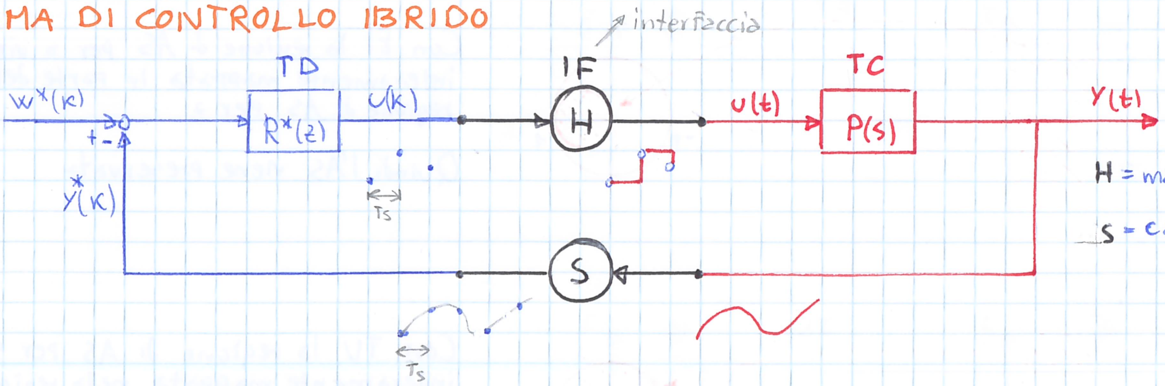
$$\mathcal{Z}[y(k)] = Y(z) = \overbrace{c(zI-A)^{-1} z \cdot x(0)}^{\text{TZ del ML di } y} + \overbrace{\underline{[c(zI-A)^{-1} b + d]}\, V(z)}^{\text{TZ del MF di } y}$$

FdT: $G(z) = c(zI-A)^{-1} b + d$

Poiché noto che è uguale a quella nel caso di SD a TC, posso fare le stesse considerazioni

Stabilità, poli, autovalori, parti nascoste, raggiungibilità, osservabilità, schemi a blocchi (serie, parallelo, ...) tutto come a TC.

SCHEMA DI CONTROLLO IBRIDO



TD → TC

H = mantenitore (HOLDER)

S = campionatore (SAMPLER)

TC → TD

Nostre ipotesi:
- campionatore ideale: $y^*(k) = y(k \cdot T_s)$
- mantenitore di ordine zero (ZOH): $u(t) = u^*(k)$ per $k \cdot T_s \leq t \leq (k+1) T_s$

Noi progetteremo il regolatore $R(s)$ come se fosse tutto a TC e poi dovremo ottenere $R^*(z)$ e implementare lo schema S&H, dovendo anche scegliere il tempo di campionamento T_s.

Quindi:
1) $\{R(s), T_s\} \longrightarrow R^*(z) \longrightarrow$ DISCRETIZZAZIONE
2) Scelta di T_s
3) Effetti dinamici dovuti alla presenza di S&H

DISCRETIZZAZIONE

1) Discretizzazione esatta: si supponga di avere una realizzazione in forma di stato della FdT $R(s)$ da approssimare, ovvero $R(s) \longrightarrow (A, b, c, d)$

$$\begin{cases} x^*(k) = A^* \cdot x^*(k-1) + b^* \cdot u(k-1) \\ y^*(k) = c \cdot x^*(k) + d \cdot u(k) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} A^* &= e^{AT_s} \\ b^* &= \int_0^{T_s} e^{A(T_s - \tau)} \, b \, d\tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; R^*(z) = c(zI - A^*)^{-1} b^* + d$$

2) Discretizzazione approssimata:

1. Metodo di Eulero esplicito (EE): $R^*(z) = R\left(\frac{z-1}{T_s}\right)$
   (o delle differenze in avanti)
2. Metodo di Eulero implicito (EI): $R^*(z) = R\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right) = R\left(\frac{z-1}{z \cdot T_s}\right)$
   (o delle differenze all'indietro)
3. Metodo di Tustin (TU): $R^*(z) = R\left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)$

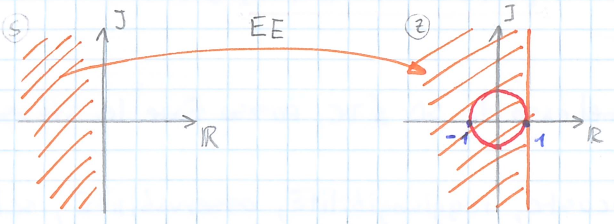
Stabilità: se $R(s)$ è AS $\xrightarrow{\text{DISCRETIZZAZIONE}}$ $R^*(z)$ è AS? $\forall T_s$?

1. Discretizzazione esatta: Poiché $A^* = e^{AT_s}$, se λ è autovalore di A, allora $\mu = e^{\lambda T_s}$ è un autovalore di A^*.

   Quindi: $\mathrm{Re}(\lambda) \lessgtr 0 \iff |\mu| \lessgtr 1 \Longrightarrow$ l'AS si preserva

2. Eulero esplicito:

   $s \longrightarrow \frac{z-1}{T_s}$

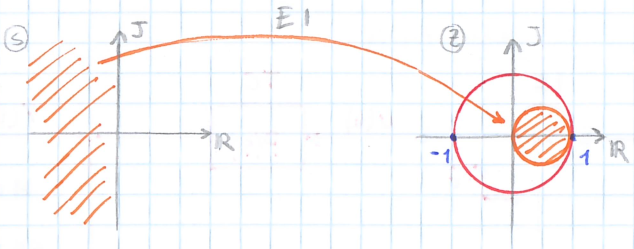


Con EE la regione di AS per s viene mappata anche al di fuori della RAS per z (cerchio rosso unitario)

Quindi l'AS non è detto che venga preservata

3. Eulero implicito:

   $s \longrightarrow \frac{z-1}{zT_s}$

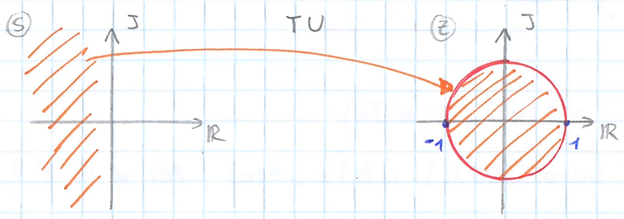


Con EI la regione di AS per s viene interamente mappata in parte della regione di AS per z

Quindi l'AS viene preservata

4. Tustin:

   $s \longrightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}$



Con TU la regione di AS per s viene interamente mappata nella regione di AS per z.

Quindi l'AS viene preservata

SCELTA DI $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$

- Criterio 1: $\omega_s = K \cdot \omega_c$ $\quad K \sim 10 \div 50$, ω_c: Frequenza critica
- Criterio 2: $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$ $\quad$ Pulsazione di Nyquist: massima pulsazione rappresentabile senza aliasing con un campionamento a frequenza ω_s
- Criterio 3: Riduzione di φ_m dovuta a S&H e all'effetto ritardo di calcolo
  - Effetto S&H: $\varphi_m -= \omega_c \cdot \frac{T_s}{2}$
  - Effetto ritardo di calcolo: $\varphi_m -= \omega_c \cdot T_s$

  diminuisce di

  Considerandoli entrambi (S&H c'è sempre): $\varphi_m -= \frac{3}{2}\, \omega_c \cdot T_s$
- Criterio 4: $T_s \ll$ (diciamo almeno 1/5) della più piccola costante di tempo nel regolatore

EFFETTI DINAMICI:
- limiti di saturazione del segnale di controllo $\longrightarrow$ WINDUP
- necessità di mettere il loop in manuale $\longrightarrow$ TRACKING

DA $R^*(z)$ ALLA LEGGE DI CONTROLLO A TD

Esempio:

$$R^*(z) = \frac{2z^2 - 3z + 4}{z^2 - z}$$

SEMPRE

$$\boxed{\#N \leq \#D}$$

$$e(k) \longrightarrow \boxed{R^*(z)} \longrightarrow u(k) \quad \Longrightarrow \quad R^*(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\frac{2z^2 - 3z + 4}{z^2 - z} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

1) "Tolgo" i denominatori:

$$(2z^2 - 3z + 4)E(z) = (z^2 - z)U(z)$$

2) Svolgo i prodotti:

$$2z^2 E(z) - 3zE(z) + 4E(z) = z^2 U(z) - zU(z)$$

3) Antitrasformo con condizioni iniziali nulle:

$$2e(k+2) - 3e(k+1) + 4e(k) = u(k+2) - u(k+1)$$

4) Risolvo rispetto all'uscita più recente:

$$u(k+2) = u(k+1) + 2e(k+2) - 3e(k+1) + 4e(k)$$

TI (tempo invariante posso scalare di quanto voglio - 2 in questo caso -)

$$u(k) = u(k-1) + 2e(k) - 3e(k-1) + 4e(k-2)$$