# Esercizi di riepilogo:
# Valori attesi condizionati
# Aspettazioni iterate
# Variazione totale
# Successioni di v.a.

# Es1: Aspettazioni iterate

- Siano X, Y, e Z v.a. discrete. Dimostrare le seguenti generalizzazioni della legge delle aspettazioni iterate

a) $\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[Z|X,Y]]$

b) $\mathsf{E}[Z|X] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[Z|X,Y]|X]$

c) $\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[\mathsf{E}[Z|X,Y]|X]]$

# Es2: Gessetto

- Abbiamo un gessetto di lunghezza $\ell$.
- La spezziamo in un punto scelto a caso e teniamo la parte sinistra così ottenuta. Spezziamo il pezzo sinistro del gessetto in un altro punto scelto a caso.
  a) Qual è il valore atteso della lunghezza del pezzo ottenuto dopo aver spezzato due volte?
  b) Qual è la varianza della lunghezza del pezzo ottenuto dopo aver spezzato due volte?

# Es3: Cassa rapida

- In coda ad una cassa rapida ognuno degli N clienti ha un carrello con X prodotti.
- N e X sono variabili aleatorie indipendenti con valore atteso 10 e varianza 16.
- Si calcoli il valore atteso e la varianza di T, dove T è il numero totale di prodotti in coda alla cassa.

# Es4: Moneta con bilanciamento ignoto

- Si lancia $n$ volte una moneta sbilanciata, la cui probabilità di «testa» è ignota. Questa probabilità è il risultato di un esperimento aleatorio descritto da una v.a. $Q$ con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$ note.
- Sia $X_i$ una v.a. di Bernoulli che rappresenta il lancio $i$-esimo ($X_i = 1$ quando esce «testa»). Si assuma l'indipendenza delle $X_i$ dato $Q = q$.
- Sia $X$ il numero di teste ottenute in $n$ lanci.

a) Si usi la legge delle aspettazioni iterate per trovare $\mathsf{E}[X_i],\ \mathsf{E}[X]$

b) Si trovi $\mathsf{Cov}[X_i, X_j]$. Le v.a. $X_i$ sono indipendenti?

c) Si usi la legge della variazione totale per trovare $\mathsf{Var}[X]$. Si verifichi la risposta usando il risultato trovato al punto b)

# Es5: Aspettazioni condizionate

- Mostrare che per una v.a. discreta o continua X, e qualsiasi funzione g(Y) di un’altra v.a. Y, si ha

$$\mathsf{E}[Xg(Y)|Y] = g(Y)\mathsf{E}[X|Y]$$

# Es6: Strategia di Kelly

- Si consideri uno scommettitore che ad ogni scommessa vince o perde con prob. p e 1-p, indipendentemente da quelle passate.
- Quando p>1/2, un sistema di gioco, noto come strategia di Kelly, prevede di puntare sempre una frazione 2p-1 di quanto posseduto.
- Si calcoli il capitale posseduto dopo $n$ scommesse, quando si parte con $x$ unità e impiegando la strategia di Kelly.

# Es7: Convergenza di v.a.

- Sia $X_n \sim \mathrm{Bern}(1/n)$ e $Y_n = nX_n$

a) Trovare i valori attesi e le varianze di $X_n,\ Y_n$

b) Cosa dice la diseguaglianza di Chebyshev sulla convergenza di $X_n,\ Y_n$?

c) La v.a. $Y_n$ converge in probabilità? Se sì, a quale valore?

d) Se una sequenza di v.a. converge in prob. ad $a$, la corrispondente sequenza dei valori attesi converge anch'essa ad $a$ ? Provare o confutare.

- Una sequenza di v.a. converge a $c$ in media quadratica se

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[(X_n - c)^2] = 0$$

e) Si usi la diseguaglianza di Markov per mostrare che la convergenza in media quadratica implica la convergenza in probabilità

f) Si dia un esempio dove la conv. in prob. non implica quella in media quad.

# Es8: Limiti di sequenze

- La v.a. X è uniformemente distribuita tra -1 e 1. Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. con la stessa distribuzione di X. Determinare quali tra le seguenti sequenze (per $i = 1, 2, \ldots$) è convergente in probabilità, e indicare il valore limite

a) $X_i$

b) $Y_i = \frac{X_i}{i}$

c) $Z_i = (X_i)^i$