

# **Esercitazione 08: Analisi di stabilità dei sistemi di controllo**

06 maggio 2024 (3h)

**Fondamenti di Automatica**

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

## Richiami di teoria

Si consideri lo schema classico di controllo in retroazione in Figura 1 dove  $R(s)$  è la funzione di trasferimento del controllore e  $G(s)$  quella del processo da controllare.

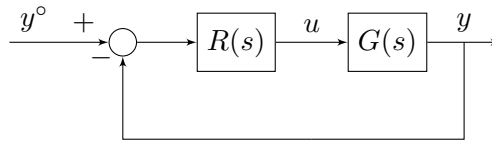


Figura 1: Schema classico di controllo in retroazione.

Indichiamo con  $L(s)$  la funzione di trasferimento ad anello aperto  $L(s) = R(s)G(s)$ . Si supponga che gli eventuali autovalori nascosti del sistema con funzione di trasferimento  $L(s)$  siano tutti a parte reale strettamente negativa, cioè che non vi siano cancellazioni non lecite tra  $R(s)$  e  $G(s)$ .

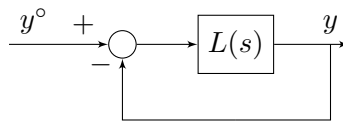


Figura 2: Schema di riferimento per l'analisi di stabilità di uno schema classico di controllo in retroazione

### Criterio di Nyquist

Dato il sistema retroazionato in Figura 2.

Definiamo le seguenti quantità:

$P$ : numero di poli a parte reale strettamente positiva di  $L(s)$ ;

$N$ : numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto  $-1$  dell'asse reale, contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se in senso orario.  $N$  non è ben definito se il diagramma passa per il punto  $-1$ .

Allora il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se  $N$  è ben definito e risulta:

$$N = P.$$

### Criterio di Bode

Si consideri il sistema retroazionato in Figura 2.

Le condizioni di applicabilità del criterio sono le seguenti:

1.  $L(s)$  è strettamente propria;
2.  $L(s)$  non ha poli a parte reale strettamente positiva;
3. il diagramma di Bode del modulo di  $L(s)$  attraversa una sola volta l'asse a 0 dB, nel punto  $\omega_c$ , dove pertanto risulta che  $|L(j\omega_c)| = 1$ .

Definiamo le seguenti quantità:

$\mu_L$ : guadagno di  $L(s)$ ;

$\varphi_m$ : margine di fase ottenuto come  $\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$ , dove  $\varphi_c = \angle L(j\omega_c)$  è detta fase critica.

Se tali condizioni sono verificate, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se  $\mu_L > 0$  e  $\varphi_m > 0^\circ$ .

# 1 Cruise control

Il cruise control è un esempio eccellente di controllo in retroazione che si può trovare in molte automobili moderne. Lo scopo del cruise control è quello di mantenere la velocità del veicolo costante anche a fronte di disturbi esterni, come ad esempio il vento o la pendenza della strada. Questo è ottenuto misurando la velocità del veicolo, comparandola con la velocità desiderata e aggiustando automaticamente l'accelerazione secondo una legge di controllo.

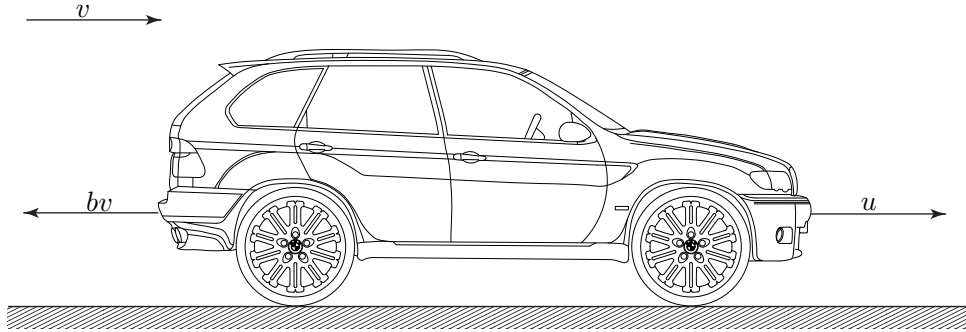


Figura 3: Diagramma di corpo libero.

Consideriamo un modello semplice della dinamica del veicolo, mostrato in Figura 3. Il veicolo, di massa  $m$ , è azionato tramite una forza di controllo  $u$ . La forza  $u$  rappresenta la forza generata dall'interfaccia strada/pneumatico. Per questo modello semplificato assumiamo che si controlla la forza direttamente, ignorando la dinamica del motore, delle ruote, etc., che sono coinvolte nella generazione della forza. Assumiamo che le forze che si oppongono al moto,  $bv(t)$ , dovute all'attrito volvente e all'effetto della resistenza dell'aria, dipendano linearmente con la velocità del veicolo  $v(t)$ , e agiscono nella direzione opposta al movimento del veicolo. Si consideri che la massa del veicolo è pari a  $m = 1000\text{kg}$ , e che il coefficiente d'attrito è  $b = 10\text{Ns/m}$ . Le equazioni del sistema possono essere scritte come:

$$\begin{cases} m\dot{v}(t) + bv(t) = u(t) \\ y(t) = v(t) \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di trasferimento  $P(s)$  del sistema con ingresso  $u(t)$  e uscita  $v(t)$ .
2. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase di  $P(s)$ .
3. Si consideri lo schema di controllo mostrato in Figura 4.

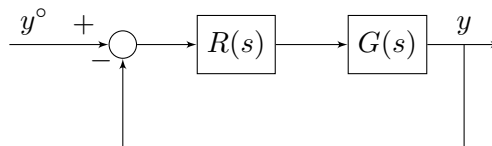


Figura 4: Schema di controllo.

Determinare la stabilità del sistema in anello chiuso quando  $R(s) = \frac{k}{s}$ , con  $k \in \mathbb{R}_{>0}$ , e  $G(s) = P(s)$ .

4. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+s}.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di  $k$  il sistema di controllo di Figura 5 che include il controllore  $R(s) = \frac{k}{s}$  e l'attuatore con funzione di trasferimento  $A(s)$ , è ancora asintoticamente stabile.

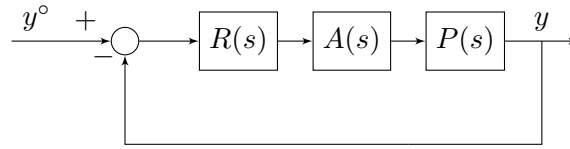


Figura 5: Schema di controllo.

5. Si supponga che l'attuatore, non considerato in fase di progetto abbia funzione di trasferimento:

$$A(s) = e^{-\tau s}, \quad \tau > 0.$$

Dire, motivando la risposta, per quali valori di  $\tau$  il sistema di controllo di Figura 5 che include il controllore  $R(s) = \frac{1}{s}$  e l'attuatore con funzione di trasferimento  $A(s)$ , è ancora asintoticamente stabile.

## 2 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{100(1-s)}{(1+5s)(1+s/3)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 6.

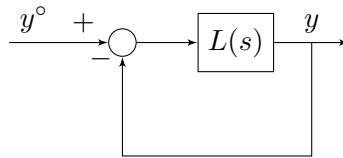


Figura 6: Schema di controllo.

## 3 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{10s}{(1-s)^2(1+0.1s)}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 7.

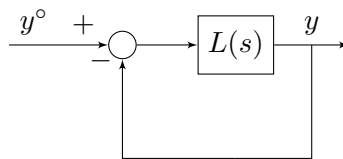


Figura 7: Schema di controllo.

3. Si supponga di connettere il sistema come mostrato in Figura 8. Dire per quali valori del parametro  $k > 0$  il sistema rimane asintoticamente stabile.

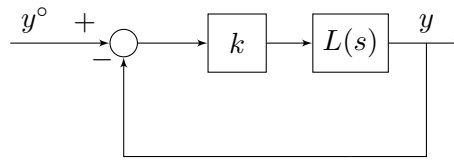


Figura 8: Schema di controllo.

## 4 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{400(1 - 2s)}{s^3 + 9s^2 + 8s}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 9.

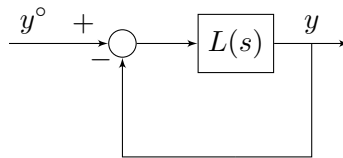


Figura 9: Schema di controllo.

## 5 Analisi di stabilità

Si consideri un sistema dinamico di ordine 3 con funzione di trasferimento:

$$L(s) = \frac{1000(s + 10)}{(s - 5)(s + 20)^2}$$

1. Si traccino i diagrammi di Bode asintotici e reali del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .
2. Si valuti la stabilità del sistema in retroazione mostrato in Figura 10.

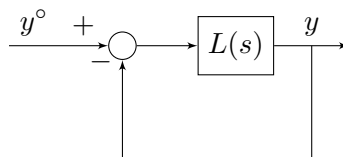


Figura 10: Schema di controllo.