# 1 Assiomi

**Assiomi di kolmogorov:**

1. Non negatività: $P(A) > 0$
2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti $A$ e $B$: $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## 1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: $A_1, A_2, A_3$...

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

## 1.2 Leggi di probabilità uniformi

**Legge uniforme discreta**
$P(A) = \frac{\#\text{casi favorevoli ad} A}{\#\text{casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$
**Legge uniforme continua**
$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)}\ \forall A \subseteq \Omega$

# 2 Probabilità condizionate

**Definizione di probabilità condizionata:** $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

**Regola moltiplicativa:** $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

## 2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho $A_1, A_2, A_3$ disgiunti che formano una partizione di $\Omega$:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

## 2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A))}{P(B)}$$

**Indipendenza**
Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

# 3 Calcolo combinatorio

## 3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?
casi tot $= n(n-1)(n-2)... = n!$

## 3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con $k$ elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti. $0 \leq k \leq n$
#sequenze ordinate di $k$ elementi $= \frac{n!}{(n-k)!k!}$
$C_{n,k} = \binom{n}{k}$

**Probabilità binomiale**
Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

## 3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo $n$ prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con $k_i$ estrazioni di tipo $i$ ci sono.
#totale di scelte $= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$

# 4 Variabili aleatorie discrete

## 4.1 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.
**Legge dello statistico inconsapevole**
Data v.a. $Y = g(X)$, $Y$ è una v.a.
$E[Y] = E[g(x)]$

Nel caso lineare:
$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$
**Valore atteso condizionato**
$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$
**Legge dell'aspettativa totale**
Con $A_1, A_2, ..., A_n$ partizioni di $\Omega$
$E[X] = \sum_{i_1}^{n} P(A_1) \cdot E[X|A_i]$

## 4.2 Varianza

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.
**Proprietà varianza**
$Var[X] \geq 0 \qquad \forall$ v.a. $X$
$Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot Var[X]$
**Scarto quadratico medio**
$\sigma = \sqrt{Var[X]}$

# 5 V.a. discrete multiple

## 5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a. $X$ e $Y$, $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di X: $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
**Legge di probabilità condizionata**
$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\sum_t p_{X,Y}(t,y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
**Regola moltiplicativa**
$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$

## 5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a. $X$ e $Y$ sono dette indipendenti $(X \perp Y)$ $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

## 5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di $X$ e $Y$.
$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$
Caso lineare: $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$
Se $X \perp Y$ allora $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

## 5.4 Varianza per v.a. multiple

$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$
Se $X \perp Y$ allora $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$

# 6 Variabili aleatorie continue

**Valore atteso e varianza**
$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_x(x)dx$
Legge dello statistico inconsapevole: $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_x(x)dx$
$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

## 6.1 Funzione cumulativa di probabilità

$P(X \leq x) = F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$
**Proprietà**

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- $F_x$ è una funzione non decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} F_x(x) = f_x(x)$, $F_x$ è la funzione integrale di $f_x$

# 7 V.a. continue multiple

**Densità di probabilità congiunta**
$P((X, Y) \in S) = \iint_{(x,y) \in S} f_{X,Y}(x, y)dxdy$
$f_{X,Y}$ è la densità di probabilità congiunta.
**Valore atteso**
$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y)dxdy$
Con g funzione deterministica nota.
**Legge di probabilità marginale**
$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y)dy$
Densità marginale di X.
**Indipendenza tra due v.a. continue**
$X$ e $Y$ sono dette indipendenti $\iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
**Densità di probabilità condizionata**
$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,t)dt}$

# 8 Regola di bayes e funzioni di v.a.

**Regola di bayes nel continuo**
$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$
Per le v.a. discrete basta cambiare la funzione continua con la probabilità.

## 8.1 Calcolo della funzione di una v.a. continua

Ho $X$ v.a. con legge nota $f_x$ e $Y = g(X)$ con $g$ deterministica e nota, voglio trovare $f_y$.
**Approccio tramite la cumulata**
1- Calcolo la cumulata di $Y$.
$F_Y(y) = P(Y \leq y)$
2. Calcolo $f_Y$
$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

**Trasformazioni lineari di v.a.**
$X$ è una v.a. con legge $f_X$ nota e $Y = aX + b$ con costanti note.
$f_Y(y) = f_x(\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{|a|})$, se $a = 0$ allora $Y = b$
**Trasformazione monotona di v.a.**
$Y = g(X)$ con $g$ deterministica nota e strettamente monotona.
$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|\frac{dg}{dx}(x)|} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|\frac{dg}{dx}(g^{-1}(y))|}$
Con $y = g(x)$ e $x = g^{-1}(y)$
Nota: se $g$ non è strettamente monotona (ad es. $g(x) = x^2$) la $f_Y(y)$ sarà: "formula diretta con $g$ decrescente" + "formula diretta con $g$ crescente".

# 9 Statistiche congiunte

**Legge della somma di v.a.**
Date $X$ e $Y$ due v.a. discrete e $X \perp Y$ e $W = X + Y$
$P_W(w) = P(W = w) = P(X + Y = w) = \sum_x p_X(x) \cdot p_Y(w - x), \qquad y = w - x$
La legge della somma di due v.a. **indipendenti** è la convoluzione delle leggi di probabilità.
**Calcolo della somma di convoluzione con il metodo grafico**
- Sovrapporre graficamente le 2 leggi di prob
- "Ribaltare" una delle 2 leggi (ad es. $P_Y$)
- Traslare di $w$ posizioni la legge che ho ribaltato (traslazione a destra se $w > 0$)
- Moltiplicare le prob. e sommare

**Caso v.a. continue**
$W = X + Y, \quad X \perp Y, \quad X$ e $Y$ sono v.a. continue.
$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(w - x)dx$
Integrale di convoluzione
**Somma di due gaussiane indipendenti**
$W = X + Y, \quad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2), \quad X \perp Y$
La forma di $W$ è sempre gaussiana.
$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$
$Var[W] = Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot e^{\frac{w^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$
(questa se $\mu = 0$)

## 9.1 Covarianza

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

**Note:**
- $Cov[X, X] = Var[X]$
- Se $E[X] = 0$o $E[Y] = 0$ allora $Cov[X, Y] = E[XY]$
- Se $X \perp Y$ allora $Cov[X, Y] = 0$

- Se $Cov[X,Y] = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$

**Coefficiente di correlazione lineare**

Versione adimensionale della covarianza.

$\rho[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y} = E[\frac{(X-E[X])}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y-E[Y])}{\sigma_y}]$

Proprietà:

- $0 \leq |\rho[X,Y]| \leq 1$

In particolare se $|\rho[X,Y]| = 1$ allora $Y = aX + b$

- $X \perp Y \implies \rho[X,Y] = 0$

# 10 Valore atteso e varianza condizionati

**Legge delle aspettazioni iterate**

$E[Y] = E[E[Y|X]]$

**Legge della variazione totale**

$Var[x] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$

# 11 Successioni variabili aleatorie

## 11.1 Disuguaglianza di Markov

Se $X > 0$ allora $E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \qquad \forall a \geq 0$

$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

## 11.2 Disuguaglianza di chebyshev

$Var[X] \geq a \cdot P((X - E[X])^2 \geq a) \qquad \forall a \geq 0$

Con $k = a^2, \qquad P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}$

## 11.3 Convergenza in probabilità

Data una successione di v.a. $\{A_n\}$ e un numero $a$, Si dice che $\{A_n\}$ converge ad $a$ se:

$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0$

**Test generale**

$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) =$

$\lim_{n\to\infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} f_{A_n}(x)dx$

Se questo valore fa 0, c'è convergenza.

**Uso markov(o chebyshev nello stesso modo) per provare la convergenza in probabilità**

Esempio com markov.

$\lim_{n\to\infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E[X_n]}{a}$

Se $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0$ allora per forza converge ad a.

## 11.4 Media campionaria e legge dei grandi numeri

Date $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. i.i.d.

Media campionaria: $M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$

è una v.a.

Dato che le varie v.a. sono i.i.d.

$E[M_n] = E[X_1] = E[X]$

$Var[M_n] = \frac{Var[X_1]}{n}$

che con $n \to \infty \qquad Var[M_n] \to 0$

**Legge (debole) dei grandi numeri**

$M_n \longrightarrow^P E[M_n] = E[X]$

# 12 Variabili aleatorie note

## 12.1 V.a. uniforme continua

$X \sim \mathbb{U}[a,b]$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

## 12.2 V.a. gaussiana

$X \sim Norm[E[x], Var[X]] = Norm[\mu, \sigma^2]$

$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

**Combinazioni lineari di gaussiane**

Se $X_1, X_2, ... X_n$ sono $n$ v.a. gaussiane tra loro indipendenti con ciascuna valore atteso $\mu_i$ e varianza $\sigma_i^2$ allora la v.a. $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$ è una gaussiana con valore atteso $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n$ e varianza $\sigma^2 = \alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + ... + \alpha_n\sigma_n$

## 12.3 V.A. esponenziale

$X \sim Exp[\lambda], \lambda > 0$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \forall x > 0$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \forall x > 0$

$E[X] = \frac{1}{\lambda}, Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

## 12.4 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Geom(p)$ Dove $p$ è la probabilità di successo nella singola prova.

$E[X] = \frac{1}{p}, Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$

**Legge di perdita di memoria**

$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \implies E[X-t|X>t] = E[X]$

(Vale solo per v.a. $Geom$ e $Exp$)

## 12.5 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bin(n,p)$ Dove $p$ è la probabilità di successo nella singola prova ed n è il numero di prove.

$E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$

$Var[X] < \frac{n}{4}$

## 12.6 Variabile aleatoria ipergeometrica

La probabilità ipergeometrica descrive l'estrazione senza reinserimento delle palline, perdenti o vincenti, da un urna.

$X \sim Ipergeom(n,h,r)$, data un'urna contenente $h$ palline bianche e $n-h$ palline nere, il numero di palline bianche che vengono ottenute estraendo senza reinserimento $r$ palline.

$P_k = \frac{\binom{k}{h}\binom{r-h}{n-k}}{\binom{n}{r}}$

$E[X] = \frac{rh}{n}$, $Var[X] = \frac{r(n-r)h(n-h)}{n^2(n-1)}$

## 12.7 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$ Dove $p$ è la probabilità di successo.

$E[X] = p$, $Var[X] = p(1-p)$

| |
|---|
| $\int 0 \cdot dx = c$ |
| $\int dx = x + c$ |
| $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$ |
| $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$ |
| $\int sin x\, dx = -\cos x + c$ |
| $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + c$ |
| $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -ctg x + c$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin x + c$ |
| $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + c$ |
| $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| $\int (x+a)^m dx = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + c$ |
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + c$ |
| $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c$ |
| $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\| + c$ |

| |
|---|
| $\int k \cdot f(x) = k \cdot \int f(x) dx$ |
| $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + c$ |
| $\int \text{sen}\, f(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$ |
| $\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen}\, f(x) + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg\, f(x) + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -ctg\, f(x) + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = arcsin\, f(x) + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \text{arctg}\, f(x) + c$ |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + c$ |
| $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$ |
| $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$ |
| $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + c$ |
| $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + c$ |
| $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + c$ |
| $\int \frac{1}{1+\cos x} = tg \frac{x}{2} + c$ |