# Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 13/04/2019

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

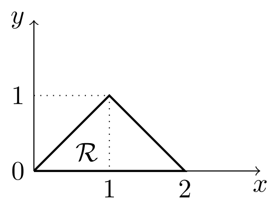
1. Si consideri l'insieme di numeri $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Qual è la probabilità che, pescando a caso un sottoinsieme di 5 numeri di $A$, ci sia almeno un numero pari?

2. Si supponga di svolgere 5 esercizi in ogni prova scritta, e per ogni esercizio di vedersi assegnati o 0 o 6 punti, rispettivamente con probabilità $1 - p$ e $p = 1/2$, indipendentemente da tutti gli altri esercizi. In ordine cronologico ci sono 2 prove in itinere e 1 appello completo. Supponendo di partecipare a tutti gli appelli se necessario, e che l'accesso alla seconda prova in itinere è condizionata ad aver ottenuto un punteggio di almeno 18 nella prima prova in itinere, calcolare la probabilità di non aver sostenuto l'appello sapendo di aver superato l'esame.
*Il punteggio finale è la media delle prove in itinere o, in alternativa, il punteggio della prova di appello.*

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 2]$ e $Y = \min\{1, X^2\}$. La v.a. $Y$ è discreta, continua o mista? Trovare la legge cumulata di probabilità di $Y$ e rappresentarla graficamente.

4. Considerare la regione $\mathcal{R}$ in figura delimitata dal triangolo. Due v.a. $X$ e $Y$ hanno distribuzione congiunta uniforme nella regione $\mathcal{R}$ e zero altrimenti.

   (a) Determinare l'espressione della $f_{X,Y}$, della $f_X$, e della $f_{X|Y}$.
   (b) Le variabili $X$ e $Y$ sono indipendenti? Perché?
   (c) Calcolare $\mathsf{E}[X]$ e $\mathsf{E}[X|Y = y]$ per ogni $y \in \mathbb{R}$




5. Sia $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(2, 4)$, con $\rho[X, Y] = 0.5$. Trovare

   (a) il valore atteso $\mathsf{E}[X + Y]$
   (b) la varianza $\mathsf{Var}[X + Y]$
   (c) la probabilità $\Pr(X + Y > 1)$

6. Si consideri un dado ben bilanciato a 6 facce. Si lancia il dado fino ad osservare la faccia 1 per la prima volta. Qual è il valore atteso della somma dei risultati dei lanci?

# Soluzioni

## Problema 1

Lo spazio di probabilità è uniforme. Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $B^c = \{\text{pescare nessun numero pari}\}$. Bisogna estrarre, senza reinserimento, 5 numeri su 10. Siccome tra i 10 numeri solamente 5 sono dispari, l'evento $B^c$ rimane soddisfatto solamente in un modo. Il numero di cinquine possibili sono $\binom{10}{5}$, quindi la probabilità è:

$$\Pr(B) = 1 - \Pr(B^c) = 1 - \frac{1}{\binom{10}{5}} \approx 0,996.$$

## Problema 2

Sia $A = \{\text{Appello sostenuto}\}$, $X$ la v.a. che conta il punteggio totale, e $X_1$ e $X_2$ le v.a. che contano i punteggi delle due prove in itinere. Dal testo del problema si sa che $X_1 \perp X_2$ e che $X_1/6 \sim \text{Bin}(n = 5, p = 1/2)$ e $X_2 \sim X_1$. La probabilità richiesta è

$$\Pr(A^c | X \geq 18) = \frac{\Pr(X \geq 18 | A^c) \Pr(A^c)}{\Pr(X \geq 18)}. \tag{1}$$

Siccome non aver sostenuto l'appello significa che la media delle due prove in itinere è $\geq 18$, si ha che $\Pr(X \geq 18 | A^c) = 1$. Inoltre:

$$\Pr(A^c) = \Pr(X_1 + X_2 \geq 36, X_1 \geq 18) = \sum_{i=3}^{5} \Pr(X_1 = 6i) \sum_{j=6-i}^{5} \Pr(X_2 = 6j) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2^{10}} \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} \sum_{j=6-i}^{5} \binom{5}{j} = \frac{1}{2^{10}} \left(10(10 + 5 + 1) + 5(10 + 10 + 5 + 1) + (5 + 10 + 10 + 5 + 1)\right) = \frac{321}{1024} \tag{3}$$

dove abbiamo usato le leggi di probabilità binomiali con probabilità di successo 1/2.

Infine, grazie alle probabilità totali si calcola

$$\Pr(X \geq 18) = \Pr(X \geq 18 | A^c) \Pr(A^c) + \Pr(X \geq 18 | A) \Pr(A) = 1 \cdot \frac{321}{1024} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1024 - 321}{1024} \approx 0.6567$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\{X|A\} \sim \text{Bin}(5, 1/2)$. Il risultato finale è:

$$\Pr(A^c | X \geq 18) \approx 0.4773. \tag{4}$$

## Problema 3

Da come è definita $Y$ si vede subito che $0 < Y \leq 1$. Tutti i valori di $X$ compresi tra 1 e 2 vengono mappati in $Y = 1$ formando così una massa di probabilità, quindi la v.a. $Y$ è mista e $\Pr(Y = 1) = \Pr(1 \leq X \leq 2) = 1/2$. Per i valori $0 < y < 1$ si ha

$$\Pr(Y \leq y) = \Pr(X^2 \leq y) \tag{5}$$

$$= \Pr(0 \leq X \leq \sqrt{y}) \tag{6}$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{2}. \tag{7}$$

La funzione cumulata di $Y$ è

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases} \tag{8}$$

Da notare la discontinuità della $F_Y$ in corrispondenza del punto $y = 1$, a causa della massa di probabilità.

## Problema 4

1. Siccome $\text{area}(\mathcal{R}) = 1$ si ha che

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \mathcal{R} \\ 0 & (x,y) \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

Per la marginale in $X$ si ha

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy & 0 \le x \le 1 \\ \int_0^{2-x} f_{X,Y}(x,y)dy & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per la condizionata si vede subito che condizionando a $Y = y$, la distribuzione è $\{X|Y = y\} \sim \mathcal{U}[y, 2-y]$, cioè

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{2-2y} \qquad y < x < 2-y,\ 0 < y < 1.$$

2. Le variabili $X$ e $Y$ non sono indipendenti, ad esempio perché condizionando ad un particolare $Y = y$, il supporto di $f_{X|Y}$ cambia.

3. Siccome le distribuzioni $f_{X|Y}(x|y)$ sono simmetriche rispetto al punto $x = 1$ per ogni $y$, allora $\mathsf{E}[X|Y = y] = 1$ per ogni $y$. Lo stesso si può dire per $f_X$, quindi $\mathsf{E}[X] = 1$.

## Problema 5

1. Il valore atteso è

$$\mathsf{E}[X+Y] = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y] = 0 + 2 = 2$$

2. La varianza è

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}[X+Y] &= \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[Y] + 2\mathsf{Cov}[X,Y] && (9) \\ &= \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[Y] + 2\rho[X,Y]\sqrt{\mathsf{Var}[X]\mathsf{Var}[Y]} && (10) \\ &= 1 + 4 + 2 \cdot 0.5 \cdot 2 = 7 && (11) \end{aligned}$$

3. Siccome la somma di v.a. Gaussiane è Gaussiana, si ha $X + Y \sim \mathcal{N}(2, 7)$, e quindi

$$\begin{aligned} \Pr(X+Y > 1) &= \Pr\left(\frac{X+Y-2}{\sqrt{7}} > \frac{1-2}{\sqrt{7}}\right) && (12) \\ &= \Pr\left(Z > \frac{1-2}{\sqrt{7}}\right) && (13) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 0.6473 && (14) \end{aligned}$$

## Problema 6

Sia $N$ la v.a. che conta il numero di lanci di dado fino ad osservare la faccia 1 per la prima volta, e $X_i$ la v.a. che registra il risultato del lancio $i$-esimo. Dal testo del problema sappiamo che $N \sim \text{Geom}(1/6)$, e che $\{X_i|N = n\} \sim \mathcal{U}\{2, 3, 4, 5, 6\}$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e $\{X_n|N = n\} = 1$. La somma totale dei risultati dei lanci di dado è

$$X = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} X_i.$$

Usando la legge dell'aspettazione totale, il valore atteso è

$$\mathsf{E}[X] = 1 + \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{N-1} X_i \,\middle|\, N\right]\right] = 1 + \mathsf{E}[4(N-1)] = 1 + 4\mathsf{E}[N] - 4 = 21. \qquad (15)$$