# Informazione e Stima: Esercitazione 1

davide.scazzoli@polimi.it

2023

## 1 Coincidenze

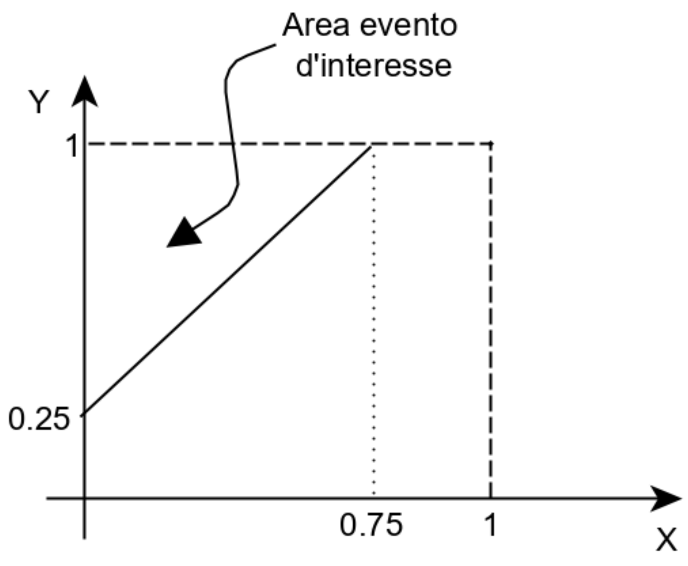
Definiamo:

X = Ritardo Treno 1 ($T_1$)
Y = Ritardo Treno 2 ($T_2$)

Spazio uniforme (X,Y) contenuto in $[0 \leq X \leq 1$ ora$]$ e $[0 \leq Y \leq 1$ ora$]$.

Per prendere la coincidenza $T_1$ deve arrivare almeno 15 minuti prima quindi deve essere soddisfatta la diseguaglianza:

$$Y > X + 0.25 \tag{1}$$




Calcoliamo la probabilità che ciò accada col rapporto tra le aree:

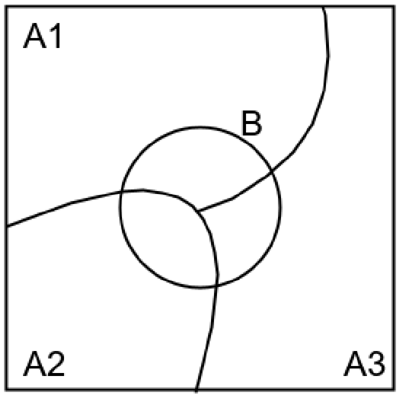
$$\mathbb{P}(Y > X + 0.25) = \frac{\text{Area evento desiderato}}{\text{Area dello spazio eventi possibili}} = \frac{1/2 * (3/4)^2}{1} = \frac{9}{32} \tag{2}$$

## 2 Torneo di calcetto

Definisco gli eventi:
$A_i = \{\text{Gioco contro squadra di tipo } i\}, \quad i = 1, 2, 3$
$B = \{\text{Vinco la partita}\}$
I dati del problema sono quindi:

$\mathbb{P}(A_1) = 0.5$, $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = 0.25$

$\mathbb{P}(B|A_1) = 0.3$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 0.4$, $\mathbb{P}(B|A_3) = 0.5$




### 2.1 a)

Applicando il teorema delle probabilità totali:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i) = 0.375 = 3/8 \tag{3}$$

### 2.2 b)

Applicando la regola di Bayes:

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)}{\mathbb{P}(B)} = 0.4 \tag{4}$$

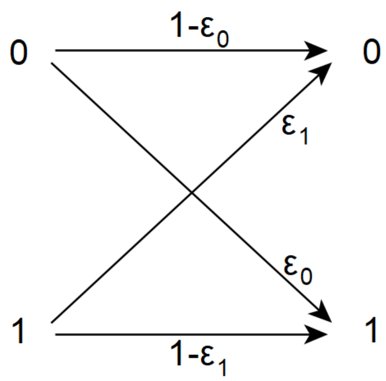
# 3 Trasmissione su un canale rumoroso

Definisco gli eventi:

$M_0 = \{\text{Mando zero al TX}\}$, $M_1 = \{\text{Mando uno al TX}\}$
$R_0 = \{\text{Ricevo zero al RX}\}$, $R_1 = \{\text{Ricevo uno al RX}\}$

I dati del problema si possono scrivere come:

$\mathbb{P}(R_0|M_0) = 1 - \epsilon_0, \quad \mathbb{P}(R_1|M_0) = \epsilon_0, \quad \mathbb{P}(R_1|M_1) = 1 - \epsilon_1, \quad \mathbb{P}(R_0|M_1) = \epsilon_1$




Per risolvere il problema devo ipotizzare:

$\mathbb{P}(M_0) = \mathbb{P}(M_1) = 0.5$

## 3.1 a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\text{Comunicazione corretta}\}) &= \mathbb{P}(\{R_0 \cap M_0\} \cup \{R_1 \cap M_1\}) \\
&= \mathbb{P}(R_0 \cap M_0) + \mathbb{P}(R_1 \cap M_1) \\
&= \mathbb{P}(R_0|M_0)\mathbb{P}(M_0) + \mathbb{P}(R_1|M_1)\mathbb{P}(M_1) \\
&= (1 - \epsilon_0) * 0.5 + (1 - \epsilon_1) * 0.5 = 1 - \frac{\epsilon_0 + \epsilon_1}{2}
\end{aligned} \tag{5}$$

## 3.2 b)

Devo fare ulteriori ipotesi:

- il canale si comporta nella stessa maniera per ogni bit trasmesso
- gli errori sono indipendenti

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{RX_{1011}\}|\{TX_{1011}\}) &= \mathbb{P}(R_{1,1}|T_{1,1})\mathbb{P}(R_{0,2}|T_{0,2})\mathbb{P}(R_{1,3}|T_{1,3})\mathbb{P}(R_{1,4}|T_{1,4}) \\
&= \mathbb{P}(R_1|M_1)\mathbb{P}(R_0|M_0)\mathbb{P}(R_1|M_1)\mathbb{P}(R_1|M_1) = (1 - \epsilon_1)^3(1 - \epsilon_0)
\end{aligned} \tag{6}$$

### 3.3 c)

$\mathbb{P}(\{\text{Decisione zero}\}|M_0) =?$

Devo ricevere almeno due zeri dal canale per decidere zero.
Questo si verifica in quando ricevo le seguenti combinazioni: [000, 001, 010, 100].
Le probabilità sono:

$\mathbb{P}(RX_{000}) = (1-\epsilon_0)^3$
$\mathbb{P}(RX_{001}) = \mathbb{P}(RX_{010}) = \mathbb{P}(RX_{100}) = (1-\epsilon_0)^2\epsilon_0$

Basta che si verifica uno di questi eventi per soddisfare la condizione quindi la probabilità è la somma:
$\mathbb{P}(\{\text{Decisione zero}\}|M_0) = (1-\epsilon_0)^3 + 3(1-\epsilon_0)^2\epsilon_0$

Si può anche risolvere usando il coefficiente binomiale, considerando
$\mathbb{P}(\text{Successo}) = 1-\epsilon_0$, $\mathbb{P}(\text{Insuccesso}) = \epsilon_0$
La probabilità si può quindi calcolare come:

$$\mathbb{P}(\{\text{Decisione zero}\}|M_0) = \binom{3}{2}(1-\epsilon_0)^2\epsilon_0 + \binom{3}{3}(1-\epsilon_0)^3 \tag{7}$$

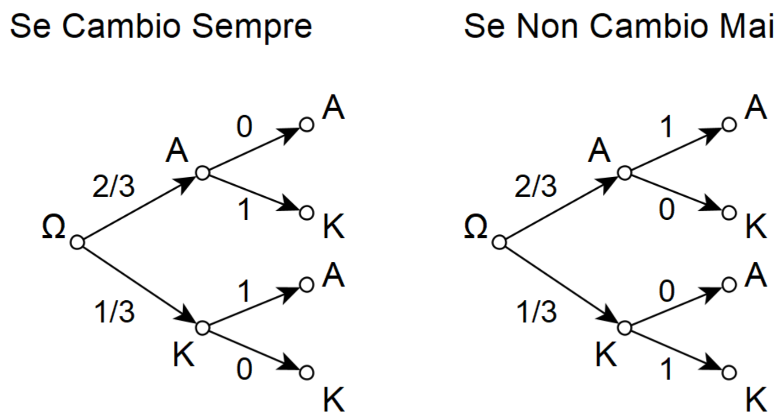
### 3.4 d)

Utilizzando Bayes abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_0|\{RX_{101}\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{RX_{101}\}|M_0)\mathbb{P}(M_0)}{\mathbb{P}(\{RX_{101}\})} \\
(\text{Teorema Prob. Totali}) &= \frac{\mathbb{P}(R_1|M_0)\mathbb{P}(R_0|M_0)\mathbb{P}(R_1|M_0)\mathbb{P}(M_0)}{\mathbb{P}(\{RX_{101}\}|M_0)\mathbb{P}(M_0) + \mathbb{P}(\{RX_{101}\}|M_1)\mathbb{P}(M_1)} \\
&= \frac{\epsilon_0^2(1-\epsilon_0) * 0.5}{\epsilon_0^2(1-\epsilon_0) * 0.5 + \epsilon_1(1-\epsilon_1)^2 * 0.5}
\end{aligned} \tag{8}$$

# 4 Il gioco delle tre carte (Problema di Monty Hall)

Soluzione con albero di probabilità:




Essendoci due carte A ed una carta K la probabilità di scegliere una carta A è $\mathbb{P}(Q) = 2/3$ mentre scegliamo la carta K con probabilità $\mathbb{P}(K) = 1/3$. Se abbiamo scelto una carta A e decidiamo di cambiare allora con probabilità 1 cambiamo in un K, perchè rimane una sola altra carta ed è certamente K poichè la carta scoperta è sempre un asso. Vice versa se scegliamo K e decidiamo di cambiare sicuramente cambiamo con una carta A.
Se invece non cambiamo rimaniamo sulle probabilità iniziali. Siccome nel primo caso $\mathbb{P}(K) = 2/3$ mentre nel secondo $\mathbb{P}(K) = 1/3$ conviene sempre cambiare.

Alternativamente si può risolvere applicando Bayes:

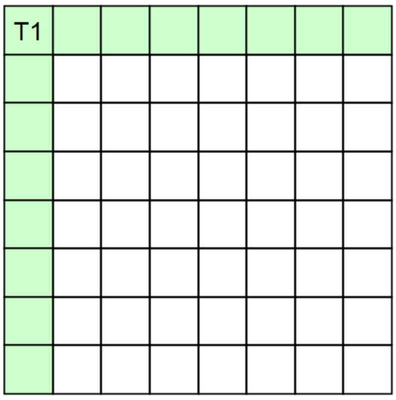
$R_i$ = Il re si trova nella carta $i$, $i = 1, 2, 3$ e $\mathbb{P}(R_i) = 1/3$
Scegliamo la carta 1 ed il giocatore ci scopre una delle due altre carte, ipotizziamo che scopra la carta 3:
$A_3$ ={il giocatore scopre la carta 3} $\mathbb{P}(A_3) = 1/2$
Possiamo quindi trovare le probabilità:
$\mathbb{P}(R_3|A_3) = 0$, perchè il giocatore non può scoprire la carta K
$\mathbb{P}(A_3|R_1) = 1/2$ Se abbiamo scelto la carta K il giocatore può scoprire sia la carta 2 che la carta 3.
$\mathbb{P}(A_3|R_2) = 1$ Se il re è nella posizione 2 allora sicuramente il giocatore scoprirà la carta 3.
Applicando Bayes ho:

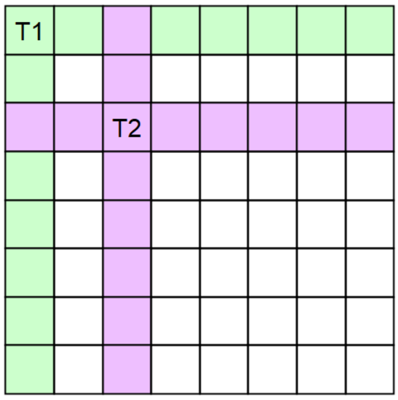
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1|A_3) &= \frac{P(R_1)P(A_3|R_1)}{P(A_3)} = 1/3 \\ \mathbb{P}(R_2|A_3) &= \frac{P(R_2)P(A_3|R_2)}{P(A_3)} = 2/3 \end{aligned} \tag{9}$$

# 5 Le 8 torri

Si può procedere con l'approccio casi favorevoli su casi totali.
I casi totali sono il numero di possibili combinazioni in cui possiamo mettere 8 torri in 64 posizioni, per cui sono dati da $\binom{64}{8}$.

Per contare i casi favorevoli inizio a contare in quante posizioni posso disporre le torri una ad una:



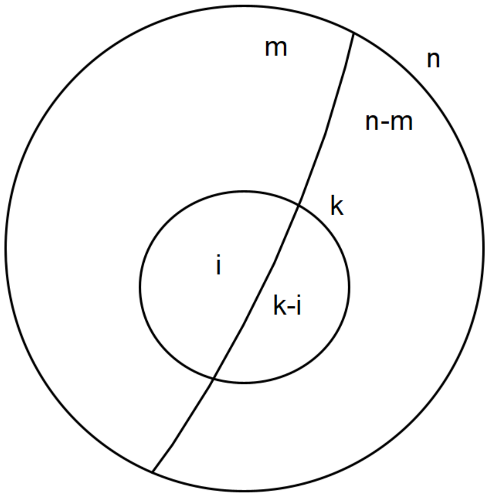

seguendo questo approccio la prima torre può essere posizionata in 8*8 posizioni, la seconda in 7*7 etc... di conseguenza il totale è $(8!)^2$.

Tuttavia questo considera più volte la stessa combinazione di torri, poichè nelle stesse 8 posizioni possiamo disporre le torri con ordine diverso, ma sono sempre la stessa combinazione di posizioni.
Per calcolare il numero effettivo di casi favorevoli dobbiamo quindi dividere per il numero di possibili combinazioni:

$$\text{N. Casi Favorevoli} = \frac{(8!)^2}{8!} = 8! \tag{10}$$

# 6 Urna

Dati del problema:
$n =$ numero totale di biglie nell'urna
$m =$ numero di biglie rosse nell'urna
Estrazione **senza** reinserimento
L'esperimento è estrarre k biglie di cui i devono essere rosse e k-i devono essere non rosse.




Si tratta di una distribuzione ipergeometrica, quindi la probabilità di soddisfare la condizione è:

$$\mathbb{P}(i \text{ Biglie Rosse}) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}}{\binom{n}{k}} \tag{11}$$

Se invece avessi avuto un'estrazione **con** reinserimento la distribuzione sarebbe invece binomiale:

$$\mathbb{P}(i \text{ Biglie Rosse}) = \binom{k}{i}\left(\frac{m}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{k-i} \tag{12}$$

# 7 Urna 2

Dati:
La probabilità di estrarre una biglia di tipo $i$ è $\mathbb{P}_i$ con $i = 1, 2, ..., r$.
Ho reinserimento delle biglie di conseguenza $\mathbb{P}_i$ non cambia.
Ipotesi: Le estrazioni sono indipendenti

Iniziamo calcolando la probabilità di estrarre una particolare sequenza con $n_i$ biglie di tipo $i$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Sequenza Particolare}) &= \mathbb{P}(n_1(\text{tipo }1))\mathbb{P}(n_2(\text{tipo }2))\cdots\mathbb{P}(n_r(\text{tipo }r)) \\ &= \mathbb{P}_1^{n_1}\mathbb{P}_2^{n_2}\cdots\mathbb{P}_r^{n_r} \end{aligned} \tag{13}$$

Per calcolare quante di queste sequenze che soddisfano il requisito è possibile estrarre si può usare il **coefficiente multinomiale**.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Tutte le sequenze}) &= \mathbb{P}_1^{n_1}\mathbb{P}_2^{n_2}\cdots\mathbb{P}_r^{n_r}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \\ &= \mathbb{P}_1^{n_1}\mathbb{P}_2^{n_2}\cdots\mathbb{P}_r^{n_r}\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} \end{aligned} \tag{14}$$