Esercizi di riepilogo
Regola di Bayes per v.a. continue
Trasformazioni di v.a.
Coefficiente di correlazione

Es1: Canale con rumore Laplaciano

- Si vuole trasmettere un valore X che vale 1 (con prob. p) oppure -1.
- Il canale di comunicazione introduce rumore additivo Y distribuito come una v.a. Laplaciana

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|y|}$$

  generando un output $Z = X + Y$.
- Trovare $\Pr(X = 1|Z = z)$
- Controllare che l'espressione trovata abbia senso nei limiti

$$p \to 0^+, \quad p \to 1^-, \quad \lambda \to 0^+, \quad \lambda \to \infty$$

Es2: Lancio di moneta non bilanciata

- Si consideri il lancio di una moneta con bilanciamento ignoto pari a q, vale a dire

$$\Pr(X = 1 | Q = q) = q$$

- La conoscenza a priori del bilanciamento Q viene modellato con una v.a. continua con densità di probabilità

$$f_Q(q) = \begin{cases} 6q(1-q) & \text{se } 0 \leq q \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Trovare la densità a posteriori di Q dopo aver osservato il lancio della monetà

$$f_{Q|X}(q|x) \text{ per } x \in \{0, 1\}$$

Es3: Trasformazione di una Gaussiana

- Sia X una v.a. Gaussiana standard, e sia Y = g(X) dove

$$g(t) = \begin{cases} -t & \text{se } t \leq 0, \\ \sqrt{t} & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

- Trovare la densità di probabilità di Y

Es4: Trasformazione quadratica

- Sia $Y = g(X) = X^2$, dove X è una variabile aleatoria con densità di probabilità nota.
- Trovare la legge di probabilità di Y.

Es5: Correlazione lineare

- Mostrare che $\rho[aX + b, Y] = \frac{a}{|a|}\rho[X, Y]$

Es6: Treni in ritardo

- Due treni dovrebbero arrivare in stazione Centrale alle ore 12
- I treni saranno in ritardo rispettivamente di un tempo X e Y. I ritardi sono indipendenti e distribuiti esponenzialmente con parametro λ
- Trovare la distribuzione di $Z = X - Y$
  - trovando prima la cumulata e poi differenziando
  - Applicando il teorema delle probabilità totali

Es7: Gaussiane in coordinate polari

- Siano X e Y due variabili Gaussiane standard indipendenti. La coordinata (X,Y) può essere espressa in coordinate polari (R, Θ)
- Le coordinate polari sono tali che $R \geq 0 \text{ e } \Theta \in [0, 2\pi]$ con

$$X = R\cos\Theta, \qquad Y = R\sin\Theta$$

- Mostrare che $R \text{ e } \Theta$ sono indipendenti (cioè $f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta)$) calcolando in ordine:
  a) $f_R(r)$
  b) $f_\Theta(\theta)$
  c) $f_{R,\Theta}(r,\theta)$

Es8: Correlazione di somme e differenze

- Si assuma che X e Y siano v.a. con la stessa varianza σ^2
- Dimostrare che T=X-Y e U=X+Y sono incorrelate

Es9: Coefficiente di correlazione

- Una v.a. X è tale che

$$\mathsf{E}[X] = 0,\ \mathsf{E}[X^2] = 1,\ \mathsf{E}[X^3] = 0 \text{ e } \mathsf{E}[X^4] = 3$$

- Sia $Y = a + bX + cX^2$. Calcolare il coefficiente di correlazione lineare tra X e Y.