

Esercizi di riepilogo
Teoremi limite
Processi di Bernoulli

Es1: Qualità di produzione

- Il manager di una ditta vi chiede di stimare la qualità della produzione, cioè di stimare la probabilità p che un oggetto prodotto sia difettoso.
- Tutti gli oggetti sono difettosi con la stessa probabilità, in maniera indipendente
- a) Assumendo di testare n oggetti scelti a caso, qual è una buona stima Z_n di p tale che Z_n converga in probabilità a p ?
- b) Se si testano 50 oggetti, qual è la prob. che la stima sia nel range $p \pm 0.1$?
- c) Il manager chiede che la stima cada nell'intervallo $p \pm 0.1$ con prob. 0.95. Quanti oggetti bisogna testare per soddisfare la richiesta?

Es2: Approssimazioni di probabilità

- Siano X_1, \dots, X_{10} v.a. i.i.d. uniformemente distribuite in $[0,1]$.
- Stimare $P(X_1 + \dots + X_{10} \geq 7)$ usando:
 - a) La disuguaglianza di Markov
 - b) La disuguaglianza di Chebyshev
 - c) Il teorema fondamentale del limite

Es3: Fabbrica

- Una fabbrica produce X_n oggetti nel giorno n , dove le v.a. X_n sono i.i.d. con media 5 e varianza 9.
- a) Trova un'approssimazione alla probabilità che il numero totale di oggetti prodotti in 100 giorni sia minore di 440
- b) Si trovi (approssimativamente) il più grande valore di n tale che
$$P(X_1 + \cdots + X_n \geq 200 + 5n) \leq 0.05$$
- c) Sia N il primo giorno in cui il numero totale di oggetti supera 1000. Si calcoli un'approssimazione alla probabilità che $N \geq 220$

Es4: Moneta truccata

- Prima di giocare a «testa o croce», volete capire se la moneta è ben bilanciata. Dunque osservate 100 lanci: se il conto delle teste è superiore a 55 decidete che la moneta non è bilanciata.
- Assumendo che la moneta sia bilanciata, si trovi un'approssimazione alla probabilità che si prenda la decisione sbagliata

Es5: Download dati da Access Point

- Si consideri un'aula servita da un access point (AP).
- Ad ogni secondo, uno studente si connette all'AP con prob. 0.5
Una volta che si è connesso, scarica un file con prob. 0.2, indipendentemente dagli altri studenti.
- a) Dal punto di vista dell'AP, qual è il valore atteso del tempo tra due richieste di download consecutive? E la varianza?
- b) Inoltre, un professore si connette all'AP con prob. 0.1 e, una volta che si è connesso, scarica un file con prob. 0.7, indipendentemente da tutti gli altri utenti. Dal punto di vista dell'AP, qual è il valore atteso del tempo tra due richieste di download consecutive degli utenti (prof e studenti)? E la varianza?

Es6: Lanci di 3 monete

- Fate un esperimento che consiste di prove indipendenti. In ogni prova lanciate simultaneamente 3 monete bilanciate.
 - a) Dato che si è avuta una prova con 3 teste, qual è la prob. che entrambe le successive 2 prove abbiano 3 teste ciascuna?
 - b) Si chiami «successo» una prova dove tutte le monete mostrano lo stesso lato. Si trovi la ddp di K , il numero di prove fino al secondo successo (questo escluso). Si trovi valore atteso e varianza di M , il numero di teste che si osservano prima del primo successo.
 - c) Si modifichi l'esperimento come segue: si lanciano 4 monete nella prima prova e si rimuove permanentemente una moneta dall'esperimento ogni volta che tutte le monete mostrano lo stesso lato. Si continua con le prove fino alla rimozione totale di 3 monete, poi ci si ferma. Trovare il valore atteso del numero totale di prove.

Es7: Correzione dei compiti

- Ci sono n compiti da correggere nella pila.
- Si estrae un compito a caso e lo si corregge. Invece di metterlo in una nuova pila di compiti corretti, lo si reinserisce nella pila originale.
- Si estrae a caso un compito dalla pila, e si procede alla correzione se non è già stato corretto.
- Qual è il valore atteso del numero di estrazioni dalla pila prima di aver corretto tutti gli n compiti? (si può lasciare la risposta sotto forma di somma di termini)