

Nome e Cognome: \_\_\_\_\_  
(IN STAMPATELLO MAIUSCOLO)

Codice Persona o Matricola: \_\_\_\_\_



**POLITECNICO  
MILANO 1863**

## **RETI LOGICHE**

☐ Prof. William Fornaciari

☐ Prof. Gianluca Palermo

☐ Prof. Fabio Salice

Appello del 26 Giugno 2024

**!!! CON BOZZA DI SOLUZIONI !!!**

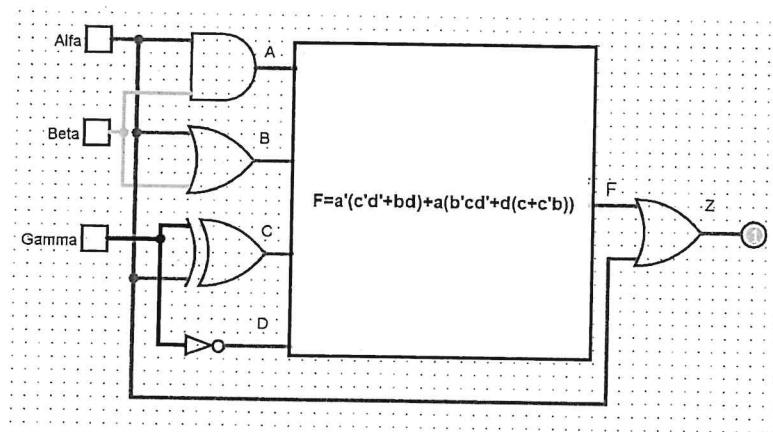
Prima di iniziare la prova si prega di leggere con attenzione i seguenti punti:

- Il tempo massimo a disposizione per svolgere la prova é di 1h:45min
- Non è permessa la consultazione di alcun materiale didattico durante lo svolgimento della prova. È severamente vietato colloquiare durante l'esame con i compagni di corso o utilizzare telefoni, PC, libri e appunti.
- In caso di necessità, il docente potrà richiedere lo svolgimento di una prova orale.
- Tutte le risposte devono essere riportate su questi fogli. Non saranno considerate valide le risposte fornite su fogli diversi da quelli contenuti in questo plico.
- Si segnali chiaramente sulla prima pagina il docente di riferimento
- Il punteggio degli esercizi è da considerarsi INDICATIVO
- LE PARTI SCRITTE IN FORMATO NON LEGGIBILE DAL DOCENTE SARANNO CONSIDERATE ERRATE IN FASE DI CORREZIONE

NOTA: Per un voto sufficiente sarà necessario avere almeno **7 punti** sul totale degli **Esercizi 1 e 2** e almeno **7 punti** sul totale degli **Esercizi 4 e 5**

## ESERCIZIO 1 – Algebra di Boole

Facendo riferimento all'architettura riportata nella figura qui di seguito, si chiede di:



- Minimizzare  $F(a,b,c,d)$  (funzione riportata nel rettangolo) utilizzando il metodo della mappa Karnaugh; si scrivano tutti gli implicant primari e si indichi quali tra questi sono anche essenziali. Nel caso ci sia più di una soluzione ottima, se ne scelga una e se ne calcoli il costo in termini di letterali e il fattore di riduzione del costo ( $\text{Riduzione} = (\text{CostoIniziale} - \text{CostoFinale}) / \text{CostoIniziale}$ );
- Ricavare le condizioni di indifferenza dovute alla controllabilità ( $a, b, c, d$  rispetto a Alfa, Beta e Gamma)
- Ricavare le condizioni di indifferenza dovute alla osservabilità di  $F$  rispetto a  $Z$  (riferito ad  $a, b, c, d$ )
- Sintetizzare  $F$  utilizzando tutte le condizioni di indifferenza ( $CD = CDC \cup ODC$ ) mediante il metodo delle mappe di Karnaugh (si disegni e usi una nuova mappa di Karnaugh). Si ricavi il costo finale in termini di letterali e il guadagno rispetto alla funzione di partenza (quella riportata nel rettangolo).

NOTA: Per garantire la validità di ogni risposta e dell'esercizio nel suo insieme, è essenziale che ogni richiesta sia soddisfatta in modo chiaro e esaustivo. Svolgere l'esercizio per punti evidenziando la soluzione per ogni punto.

## SOLUZIONE

- $$F1 = a'c'd' + a'bd + ab'cd' + acd + abd$$

oppure

$$F2 = a'c'd' + a'bd + ab'cd' + acd + abc'd$$

$$\text{Costo iniziale} = 16 \quad \text{Costo finale} = 8 \quad \text{riduzione} = (16-8)/16 = 8/16 = 0,5 - 50\%$$

- $CDC : \{m0, m3, m8, m9, m10, m11, m13, m14\}$
- quando  $\text{Alfa} = 1$ ,  $F$  non è osservabile su  $Z$ .  
Quindi

$$ODC: \{m4, m7, m12, m15\}$$

cd\ab	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11		1	1	1
10				1

F1

cd\ab	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11		1	1	1
10				1

F2

cd\ab	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11		1	1	1
10				1

Essenziali

Non Essenziali

$$F = a'c'd' + bd + ab'c$$

alfa	beta	gamma
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

a	b	c	d	
0	0	0	1	m1
0	0	1	0	m2
0	1	0	1	m5
0	1	1	0	m6
0	1	1	1	m7
0	1	0	0	m4
1	1	1	1	m15
1	1	0	0	m12

Table 1: CDC (a, b, c, d rispetto a Alfa, Beta e Gamma)

alfa	beta	gamma	F	
0	0	0	osservabile	m1
0	0	1	osservabile	m2
0	1	0	osservabile	m5
0	1	1	osservabile	m6
1	0	0	non osservabile	m7
1	0	1	non osservabile	m4
1	1	0	non osservabile	m15
1	1	1	non osservabile	m12

Table 2:

$$d. DC = CDC \cup ODC : \{m0, m3, m4, m7, m8, m9, m10, m11, m12, m13, m14, m15\}$$

cd\ab	00	01	11	10
00	x	x	x	x
01		1	x	x
11	x	x	x	x
10			x	x

$$F' = bc' \text{ oppure } bd$$

F2:  $ON2_{set} = \{\}$  -  $DC2_{set} = \{m4, m7, m12, m13, m14, m15\}$

- NOTA: Per garantire la validità delle risposte, è necessario mostrare tutti i passaggi fatti. Per la fase di generazione degli impicanti primi, si usino le tabelle qui sotto riportate. Evidenziare chiaramente la separazione tra le diverse sotto-parti delle tabelle.

[illegible]

**SOLUZIONE**

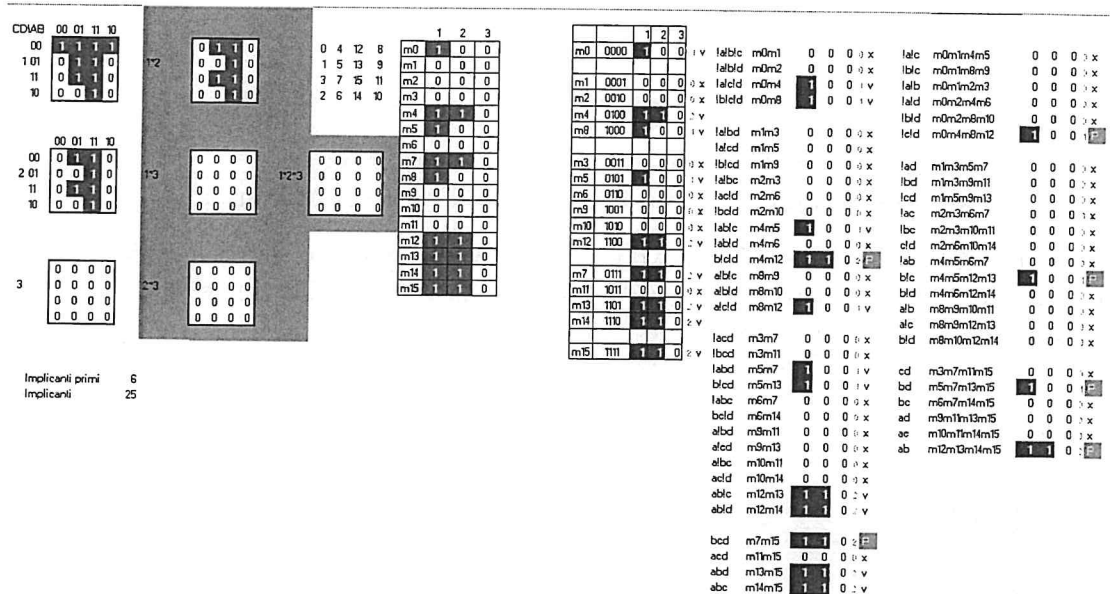


Figure 1: se si risolvono senza considerare che una funzione è 1 o 0

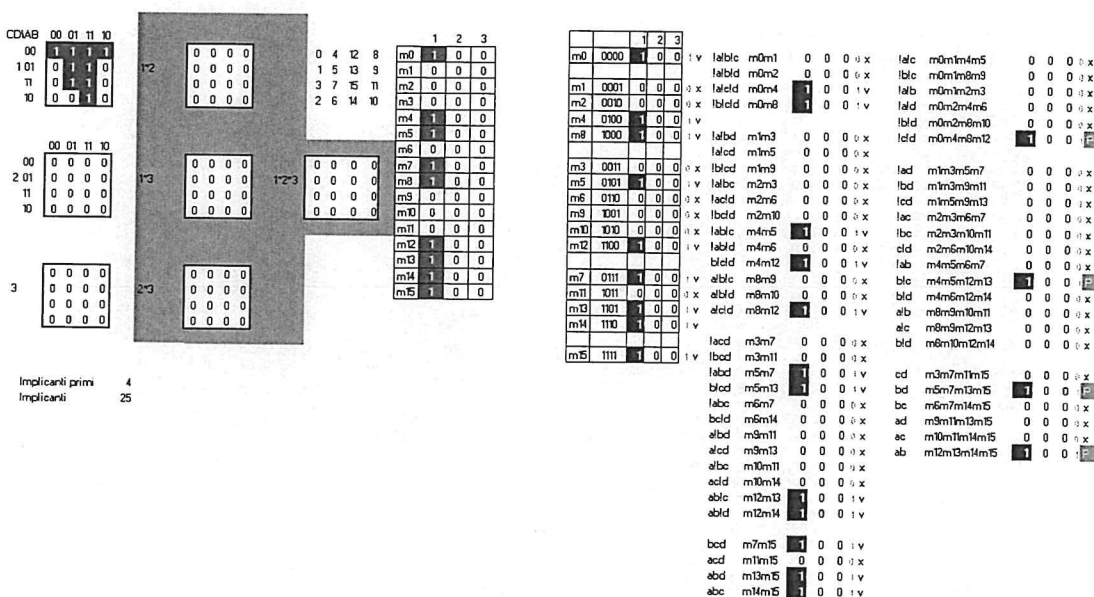
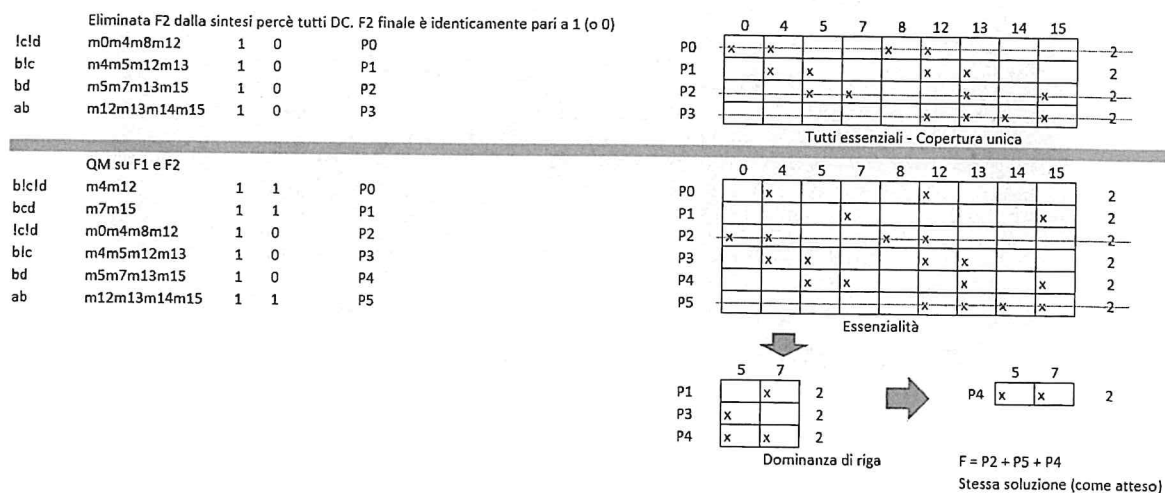


Figure 2: se si risolvono considerando che una funzione è 1 o 0 e non serve applicare QM



### ESERCIZIO 3 – Fattorizzazione

Data la seguente espressione logica,

$$F(a, b, c, d, e) = a(b(c+de) + b'(cd+e)) + b(ace' + c'd)$$

- Riportare  $F$  in una SoP applicare la sola proprietà distributiva.  
Non applicare semplificazioni. Sia  $G(a,b,c,d,e)$  il risultato ottenuto;
- Applicare la fattorizzazione a  $G(a,b,c,d,e)$  utilizzando l'algoritmo iterativo noto, mostrando per ogni passo le tabelle utilizzate e le scelte fatte per le variabili da raccogliere. Anche in questo caso, non si applichino semplificazioni.  
Nota: a parità di peso, l'ordine è quello lessico grafico  $(a,b,c,d,e)$ .

SOLUZIONE

$$a(b(c+de) + b'(cd+e)) + b(ace' + c'd)$$

$$abc + abde + ab'cd + ab'e + bace' + bc'd$$

	$a$	$a'$	$b$	$b'$	$c$	$c'$	$d$	$d'$	$e$	$e'$
* $abc$	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
* $abde$	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
* $ab'cd$	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
* $ab'e$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
* $bace'$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
* $bc'd$	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
	5	0	4	2	3	1	3	0	2	1

$$a * \left( \begin{matrix} b(c+de) + b'(cd+e) \end{matrix} \right) + bc'd$$

	$b$	$b'$	$c$	$c'$	$d$	$d'$	$e$	$e'$
* $bc$	1	0	1	0	0	0	0	0
* $bde$	1	0	0	0	1	0	0	0
* $b'cd$	0	1	1	0	1	0	0	0
* $b'e$	0	1	0	0	0	0	1	0
* $bce'$	0	1	1	0	0	0	0	1
	3	2	3	0	2	0	2	1

$$b * \left( \begin{matrix} c(1+e') + de \end{matrix} \right) + b'(cd+e)$$

	$c$	$c'$	$d$	$d'$	$e$	$e'$
* $c$	1	0	0	0	0	0
* $de$	0	0	1	0	1	0
* $ce'$	1	0	0	0	0	1
	2	0	1	0	1	1

$$b'(cd+e)$$

$$1 \quad a * \left( b * \left( c(1+e') + de \right) + b'(cd+e) \right) + bc'd$$

Figure 3:



## ESERCIZIO 4 – Progetto FSM

Si richiede di progettare una macchina a stati finiti, **tipo MEALY**, dotata di 1 (uno) ingresso X da 1 (uno) bit e di 1 (una) uscita Z, sempre da 1 (uno) bit, il cui comportamento è di seguito descritto.

- la macchina riconosce (uscita  $Z=1$  per un ciclo di clock) un numero pari di “0” consecutivi seguito esattamente da “10” (si veda l’esempio).
- La macchina inizialmente (stato di reset) ha una uscita  $Z=0$ .
- Le sequenze possono essere sovrapposte, ovvero lo “0” contenuto in “10” potrebbe essere quello di inizio di una nuova sequenza utile.
- L’uscita  $Z=0$  in tutti gli altri casi

Alcuni esempi di comportamento sono riportati di seguito (X ingresso, Z uscita)

Esempio:

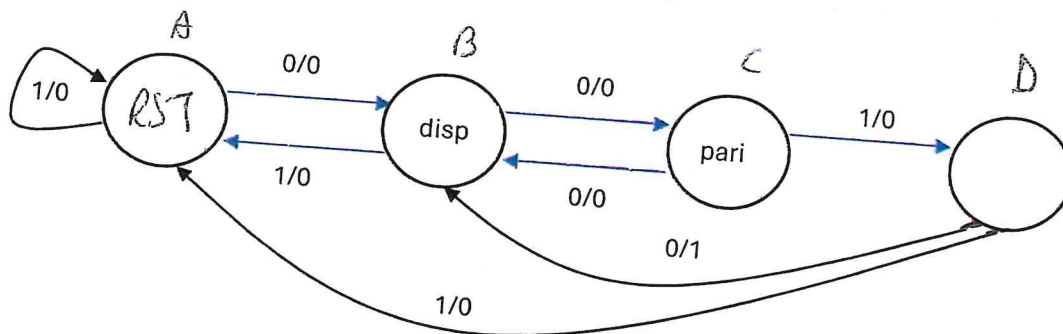
X: 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 ...  
Y: 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 ...

Si svolgano ordinatamente i seguenti passi:

- disegnare il diagramma degli stati e si scriva la relativa tabella degli stati;
- Minimizzare la macchina (si scriva obbligatoriamente la tabella delle implicazioni). Si indichi se la macchina identificata è minima o meno;
- sintetizzare la macchina minima ottenuta utilizzando FFD;
- disegnare il circuito (vedere la nota 2);

NOTA: Per garantire la validità della risposta è essenziale fornire una descrizione chiara, pulita ed esplicita del risultato e di averne verificato la funzionalità almeno sull’esempio fornito.

NOTA: Per il punto (c) si disegni il circuito mostrando con chiarezza i punti di connessione, le connessioni con i segnali di clock e reset e ogni altro elemento necessario.





## ESERCIZIO 5 – Minimizzazione FSM non completamente specificate

Data la seguente macchina a stati non completamente specificata

Stato\Ingresso	0	1	Z
S0	S3	-	1
S1	S0	-	0
S2	S5	-	-
S3	S5	-	-
S4	S6	S3	1
S5	S1	S2	-
S6	S4	S1	1

- (A) partendo dallo stato di reset  $S_0$ , analizzare la raggiungibilità. Si utilizzi il metodo che si ritiene più efficiente e rapido;
- (B) eliminare gli eventuali stati irraggiungibili a partire dallo stato di reset  $S_0$  e riscrivere la tabella ridotta degli stati, senza modificare il nome originale degli stati;
- (C) analizzare la compatibilità;
- (D) identificare le classi di massima compatibilità utilizzando l'algoritmo da albero (NOTA: si suggerisce di utilizzare anche un metodo grafico per VERIFICARE la correttezza della soluzione identificata) ;
- (E) scrivere la tabella degli stati della macchina minima ottenuta mediante le classi di massima compatibilità.

NOTA: Per garantire la validità di ogni risposta e dell'esercizio nel suo insieme, è essenziale che ogni richiesta sia soddisfatta in modo chiaro e esaustivo e che i simboli utilizzati siano i simboli corretti.

A Raggiungibilità:

Stato iniziale:  $S_0$

$0 \{ 3 \} \rightarrow 0 \{ 3 \}$

$0 \{ 3 \{ 5 \} \} \rightarrow 0 \{ 3 \{ 5 \} \}$

$0 \{ 3 \{ 5 \{ 1; 2 \} \} \} \rightarrow 0 \{ 3 \{ 5 \{ 1; 2 \} \} \}$

$0 \{ 3 \{ 5 \{ 1 \{ 0 \} 2 \} \} \} \rightarrow 0 \{ 3 \{ 5 \{ 1 \{ \} 2 \} \} \}$

$0 \{ 3 \{ 5 \{ 1 \{ \} 2 \{ 5 \} \} \} \} \rightarrow 0 \{ 3 \{ 5 \{ 1 \{ \} 2 \{ \} \} \} \}$

Stati 4,6 irraggiungibili.

B Tabella Ridotta

Stato — ingresso	0	1	OUT
S0	S3	-	1
S1	S0	-	0
S2	S5	-	-
S3	S5	-	-
S5	S1	S2	-

C Iniziale:

S1	X			
S2	{3-5}	{0-5}		
S3	{3-5}	{0-5}	V	
S5	{3-1}	{0-1}	{5-1}	{5-1}
	S0	S1	S2	S3

S1	X			
S2	{3-5}	{0-5}		
S3	{3-5}	{0-5}	V	
S5	{3-1}	X	X	X
	S0	S1	S2	S3

D Identificazione delle classi di massima compatibilità:

Insieme degli stati: 0,1,2,3,5

Analizzo S0: incompatibile con 1,2,3 -> {0,5} {1,2,3,5},

Analizzo S1: incompatibile con 5 -> {0,5}, {1,2,3} {2,3,5},

Analizzo S2: incompatibile con 5 -> {0,5}, {1,2,3}, {2,3} {3,5},

Analizzo S3: incompatibile con 5 -> {0,5}, {1,2,3}, {2,3}, {3} {5},

Classi: A: {0,5} B: {1,2,3}

E Macchina Minima

S1	X			
S2	X	{0-5}		
S3	X	{0-5}	V	
S5	{3-1}	X	X	X
	S0	S1	S2	S3

Stato — ingresso	0	1	OUT
A	B	B	1
B	A	-	0