Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 08/07/2020

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Nominare il file da caricare con il proprio codice persona.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

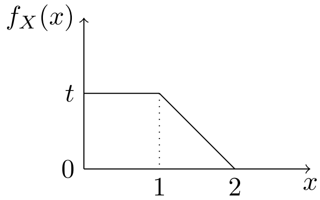
1. Una moneta di raggio r viene lanciata su un foglio quadrettato con quadretti di lato $d > 2r$. Assunte equiprobabili le posizioni del centro della moneta, qual è la probabilità che la moneta cada ricoprendo un vertice dei quadretti?

2. Si consideri una variabile aleatoria continua con la legge di probabilità come in figura.

   (a) Determinare il valore di t.

   (b) Sia Y la v.a. tale che $Y = 0$ se $X \in [0, 1]$, e $Y = 1$ altrimenti. Determinare la legge di probabilità di $\mathsf{E}[X|Y]$.

   (c) Determinare $\mathsf{E}[X]$.



3. Siano $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $Y \sim \text{Exp}(1)$ con X indipendente da Y. Calcolare la legge di probabilità di $Z = X/Y$.

4. Due trasmettitori emettono successioni indipendenti di bit $\{X_n\}_n$ e $\{Y_n\}_n$, con $\Pr(X_n = 1) = p$ e $\Pr(Y_n = 1) = q$, per ogni n. Il ricevitore osserva $R_n = (X_n \vee Y_n) \wedge Z_n$, dove $\{Z_n\}$ è una sequenza binaria di errori introdotti dal canale di comunicazione, con $\Pr(Z_n = 1) = z$ per ogni n, indipendentemente dalle sequenze trasmesse. I simboli $\vee$ e $\wedge$ rappresentano gli operatori logici *or* e *and*, rispettivamente. Determinare la legge di probabilità del numero di bit 1 ricevuti in $n = 1000$ usi di canale.

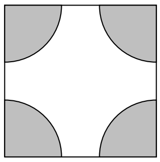
5. Osservando un processo di Poisson per un periodo di $\tau = 5$ minuti, si contano $X = 10$ arrivi. Determinare la stima MAP dell'intensità incognita θ del processo di Poisson basata sull'osservazione X, supponendo che la distribuzione a priori di θ sia $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 10]$.

6. Partendo da un generatore casuale di numeri distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, scrivere un algoritmo che permetta di stimare il valore dell'integrale $I = \int_0^\pi \cos(x^2)dx$. Quale risultato del calcolo delle probabilità bisogna usare per dimostrare che la stima numerica converge al valore vero di I?

Soluzioni

Problema 1

Poiché i risultati consistono nella caduta del centro della moneta in un quadretto, possiamo assumere come spazio campionario Ω l'insieme dei punti di un quadrato di lato d. La probabilità cercata è la probabilità che un punto casualmente scelto in Ω cada in uno dei quattro settori circolari rappresentati in figura. Siccome lo spazio di probabilità è uniforme la probabilità cercata è il rapporto tra le aree: $P = \frac{\pi r^2}{d^2}$.



Problema 2

1. Il valore di t si ottiene imponendo che l'area della figura sia unitaria: $t \cdot 1 + t \cdot 1/2 \overset{!}{=} 1$, la cui soluzione è $t = 2/3$.

2. Una volta fissato il valore $Y = y$, il valore atteso $\mathsf{E}[X|Y = y]$ rappresenta il baricentro della figura corrispondente al rettangolo (se $y = 0$) o al triangolo (se $y = 1$). Dunque $\mathsf{E}[X|Y]$ è una variabile aleatoria che assume solo 2 valori:

$$\mathsf{E}[X|Y = 0] = \mathsf{E}[\mathcal{U}[0, 1]] = 1/2 \tag{1}$$
$$\mathsf{E}[X|Y = 1] = \int_1^2 x f_{X|Y}(x|1)dx \tag{2}$$
$$= \int_1^2 x \frac{t(2 - x)}{\Pr(Y = 1)} dx \tag{3}$$
$$= 2 \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{x=1}^{2} \tag{4}$$
$$= 2 \left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \tag{5}$$

   con probabilità rispettivamente $\Pr(Y = 0) = 2/3$ e $\Pr(Y = 1) = 1/3$.

3. Per calcolare il valore atteso di X si può sfruttare il risultato del punto precedente:

$$\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X|Y]] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}. \tag{6}$$

Problema 3

Innanzitutto notiamo che Z è una variabile aleatoria positiva. Procediamo con il calcolo della legge cumulata di Z per $z > 0$:

$$F_Z(z) = \Pr(Z \le z) = \Pr(X/Y \le z) \tag{7}$$
$$= \Pr\left(Y \ge \frac{X}{z} \right) \tag{8}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - F_Y\left(\frac{x}{z}\right) \right) f_X(x)dx \tag{9}$$
$$= \int_0^1 e^{-x/z} dx \tag{10}$$
$$= \left[-ze^{-x/z} \right]_{x=0}^{1} \tag{11}$$
$$= z(1 - e^{-1/z}), \qquad z > 0. \tag{12}$$

La legge di probabilità di Z è:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-1/z} - \frac{e^{-1/z}}{z} & z > 0 \\ 0 & z \le 0. \end{cases} \tag{13}$$

Problema 4

Le successioni $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$, e $\{Z_n\}$ sono tre processi di Bernoulli, indipendenti tra loro. L'operatore *or* tra processi di Bernoulli indipendenti crea un merging di processi di Bernoulli, mentre l'operatore *and* tra due processi di Bernoulli indipendenti crea uno splitting. Unendo queste due osservazioni, si può concludere che $\{R_n\}$ è un processo di Bernoulli con parametro $r = z(p+q-pq)$. Osservando $n = 1000$ usi di canali, il numero di bit 1 ricevuti è distribuito secondo una $\text{Bin}(1000, r)$.

Problema 5

Applichiamo la regola di Bayes per la ricerca della stima MAP di Θ basata sull'osservazione di X:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}(X=10) &= \text{argmax}_{\theta\in[0,10]} \quad f_{\Theta|X}(\theta|10) && (14)\\
&= \text{argmax}_{\theta\in[0,10]} \quad p_{X|\Theta}(10|\theta) f_\Theta(\theta) && (15)\\
&= \text{argmax}_{\theta\in[0,10]} \quad \frac{(5\theta)^{10}}{10!} e^{-5\theta} \frac{1}{10} && (16)\\
&= \text{argmax}_{\theta\in[0,10]} \quad \theta^{10} e^{-5\theta} && (17)
\end{aligned}$$

dove abbiamo ignorato le costanti moltiplicative indipendenti da θ. Per trovare il massimo, poniamo la derivata a zero e risolviamo in θ:

$$10\theta^9 e^{-5\theta} - 5\theta^{10} e^{-5\theta} \overset{!}{=} 0 \tag{18}$$

le cui soluzioni sono $\theta = 0$ e $\theta = 2$. Siccome $f_{\Theta|X}(2|10) > f_{\Theta|X}(0|10)$, allora la stima MAP è $\widehat{\Theta}(10) = 2$.

Problema 6

Sia $U' = \pi U \sim \mathcal{U}[0, \pi]$. L'integrale si può reinterpretare come

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos(x^2)}{f_{U'}(x)} f_{U'}(x) dx = \mathsf{E}\left[\frac{\cos((U')^2)}{f_{U'}(U')}\right] = \pi \mathsf{E}[\cos(\pi^2 U^2)]. \tag{19}$$

Grazie alla legge debole dei grandi numeri, possiamo affermare che la media campionaria

$$\widehat{I}_n = \pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\pi^2 U_i^2) \tag{20}$$

converge al proprio valore atteso I, dove le v.a. U_i sono i.i.d. e distribuite come U.