Esercizi su processi di Poisson

Es1: Lampadine

- Iniziando da t=0, si usano delle lampadine per illuminare una stanza, una lampadina alla volta. Quando una lampadina si fulmina, si sostituisce immediatamente. La nuova lampadina è scelta a caso tra un tipo A e un tipo B. Il tempo di vita delle lampadine è distribuito come

$$X_A \sim \mathrm{Exp}(1),\ X_B \sim \mathrm{Exp}(3)$$

  e ogni lampadina è indipendente dalle altre.

a) Si trovi il valore atteso del tempo al primo cambio

b) Si trovi la prob. che non ci siano cambi prima del tempo t

c) Dato che non ci sono cambi fino al tempo t, si determini la prob. condizionata che la prima lampadina usata sia di tipo A

d) Dato che non ci sono cambi fino al tempo t, trovare il valore atteso del tempo fino al primo cambio.

Es1: Lampadine

e) Si calcoli la prob. che il tempo di vita totale delle prime 2 lampadine di tipo B usate è più lungo di quello delle prima lampadina di tipo A
f) Si supponga che il processo di sostituzione di lampadine si fermi quando 12 lampadine si sono fulminate. Determinare il valore atteso e la varianza del periodo totale di illuminazione fornito dalle lampadine di tipo B.

Es2: Stazione di servizio

- Una stazione di servizio offre servizi di tipo A e tipo B. (Richieste multiple possono essere servite simultaneamente). Gli arrivi dei due tipi di servizi sono processi di Poisson indipendenti con $\lambda_A = 3,\ \lambda_B = 4$ per minuto, rispettivamente.
- Il servizio di tipo A richiede un minuto, e quello di tipo B un numero intero di minuti distribuito geometricamente con media 2, indipendentemente da tutti gli altri servizi.
- La stazione di servizio ha iniziato da un tempo lunghissimo.

a) Qual è il valore atteso, la varianza, e la ddp del numero totale di richieste che arrivano in un dato intervallo di 3 minuti?

b) Sappiamo che in 10 minuti arrivano esattamente 10 richieste. Qual è la prob che esattamente 3 siano di tipo A?

c) Al tempo 0 non ci sono servizi in corso. Qual è la ddp del numero di servizi di tipo B che arrivano nell'immediato futuro, prima del primo arrivo di tipo A?

Es3: Ordinamento

- Siano X, Y, e Z v.a. indipendenti esponenzialmente distribuite con parametri $\lambda, \mu, \nu.$
- Trovare $\Pr(X < Y < Z)$

Es4: Servizio di pattuglia

- Un poliziotto pattuglia da incrocio a incrocio in tempi che sono indipendenti ed esponenzialmente distribuiti con parametro λ
- Ad ogni incrocio osserva e segnala un incidente con prob. p
- Indipendentemente dal resto, il poliziotto riceve delle brevi chiamate dalla centrale distribuite come un processo di Poisson con media μ chiamate per ora

a) Si determini la ddp di N, il numero di incroci visitati fino al primo incidente

b) Determinare la ddp di Q, il tempo di guida tra due incidenti

c) Qual è la ddp di M, il numero di incidenti osservati in 2 ore

d) Qual è la ddp di K, il numero di incidenti osservati tra la ricezione di 2 chiamate consecutive dalla centrale

e) Osserviamo il poliziotto in un istante di tempo casuale dopo che ha iniziato il turno da molto tempo. Sia W il tempo totale dall'ultima chiamata ricevuta alla prossima chiamata. Qual è la ddp di W?

Es5: Incidenza casuale, processo di Erlang

- Si consideri un processo di arrivi dove i tempi di interarrivo sono v.a. indipendenti di Erlang di ordine k=2 e media $2/\lambda$
- Si assuma che il processo sia iniziato da lungo tempo
- Un osservatore esterno arriva ad un dato tempo t
- Trovare la ddp della lunghezza dell’intervallo di tempo tra due arrivi consecutivi che contiene l’istante di tempo t