FONDAMENTI DI AUTOMATICA

PROF. MARCELLO FARINA

PARTE 6: FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Le presenti note non sono da intendersi come sostitutive di libri di testo o degli appunti personali.

1) DEFINIZIONE DI FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

SI CONSIDERA LA FORMA DI STATO DI UN SISTEMA (RAPPRESENTAZIONE INTERNA)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\exists\, U(s) = \mathcal{L}(u(t)) \Rightarrow \begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}(x(t)) \\ Y(s) &= \mathcal{L}(y(t)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = \mathcal{L}(Ax + Bu) \Leftrightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(Cx + Du)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(s) = \underbrace{(sI-A)^{-1}x(0)}_{\mathcal{L}(x_L(t))} + \underbrace{(sI-A)^{-1}BU(s)}_{\mathcal{L}(x_F(t))}}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + \underbrace{\left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)}_{G(s)} U(s)$$

$G(s)$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (FDT)

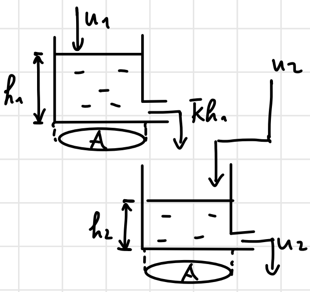
$\Downarrow$

SE $m = p = 1$ (SISTEMA SISO) $G(s)$ È UNA FUNZIONE SCALARE

$$\begin{tikzcd}
u(t), x(0) \arrow[r, "\mathcal{L}(\cdot)", "\text{TR. DI LAPLACE}"'] \arrow[d, "\text{EQ. DI LAGRANGE}"'] & U(s), x(0) \arrow[d, "Y(s) = G(s)U(s) + C(sI-A)^{-1}x(0)"] \\
y(t) & Y(s) \arrow[l, "\mathcal{L}^{-1}(\cdot)"', "\text{ANTITR. DI LAPLACE}"]
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ La funzione di trasferimento fornisce un metodo alternativo per il calcolo dei movimenti

ESEMPIO: DUE SERBATOI



$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A} u_1 - \frac{K}{A} h_1 \\ \dot{h}_2 = \frac{K}{A} h_1 + \frac{1}{A} u_2 - \frac{K}{A} h_2 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{K}{A} & 0 \\ \frac{K}{A} & -\frac{K}{A} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$u_1(t) = sca(t)$
$u_2(t) = 0 \quad \forall t$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}\left(x_0 + BU(s)\right), \qquad U(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{K}{A} & 0 \\ -\frac{K}{A} & s + \frac{K}{A} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(s + \frac{K}{A}\right)^2} \begin{bmatrix} s + \frac{K}{A} & 0 \\ \frac{K}{A} & s + \frac{K}{A} \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\left(s + \frac{K}{A}\right)^2} \begin{bmatrix} s + \frac{K}{A} & 0 \\ \frac{K}{A} & s + \frac{K}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(0) + \frac{1}{As} \\ h_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(s + \frac{K}{A}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{K}{A} & s + \frac{K}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(0) + \frac{1}{As} \\ h_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(s + \frac{K}{A}\right)^2} \left(\frac{K}{A} h_1(0) + \frac{K}{A} \cdot \frac{1}{sA} + \left(s + K/A\right) h_2(0) \right)$$

$$= \underbrace{\frac{K/A}{\left(s + \frac{K}{A}\right)^2} h_1(0) + \frac{s + K/A}{\left(s + K/A\right)^2} h_2(0)}_{\mathcal{L}(y_L(t))} + \underbrace{\boxed{\frac{K/A^2}{s\left(s + \frac{K}{A}\right)^2}}}_{\mathcal{L}(y_F(t))}$$

$$y_L(t) = \frac{K}{A} h_1(0)\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\right) + h_2(0)\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)$$

$$= \left(\frac{K}{A} h_1(0)\, t e^{-\frac{K}{A}t} + h_2(0)\, e^{-\frac{K}{A}t}\right) \mathrm{sca}(t)$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\boxed{\frac{K/A^2}{s(s+\frac{K}{A})^2}}\right) \longrightarrow F(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{(s+\frac{K}{A})^2} + \frac{\alpha_3}{s+\frac{K}{A}}$$

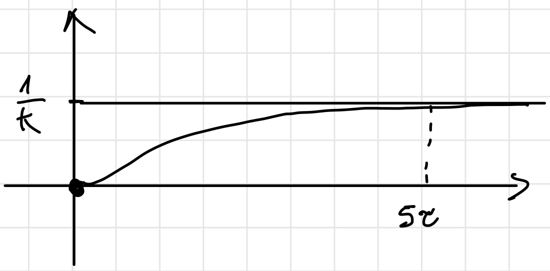
$$\alpha_1 = F(s)s\Big|_{s=0} = \frac{K/A^2\, \cancel{s}}{(s+\frac{K}{A})^2 \cancel{s}}\Bigg|_{s=0} = \frac{K/A^2}{K^2/A^2} = \frac{1}{K}$$

$$\alpha_2 = F(s)\left(s+\frac{K}{A}\right)^2\Bigg|_{s=-\frac{K}{A}} = \frac{K/A^2}{s}\Bigg|_{s=-\frac{K}{A}} = \frac{K/A^2}{-\frac{K}{A}} = -\frac{1}{A}$$

$$F(s) = \frac{1/K}{s} - \frac{1/A}{(s+\frac{K}{A})^2} + \frac{\alpha_3}{s+\frac{K}{A}} = \frac{\frac{1}{K}(s+K/A)^2 - \frac{1}{A}s + \alpha_3(s+K/A)s}{s(s+\frac{K}{A})^2}$$

$$= \frac{s^2(1/K + \alpha_3) + s(\dots) + \dots}{s(s+K/A)^2} \Rightarrow \alpha_3 + \frac{1}{K} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = -\frac{1}{K}}$$

$$\Rightarrow y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{K}\mathrm{sca}(t) - \frac{1}{A} t e^{-\frac{K}{A}t}\mathrm{sca}(t) - \frac{1}{K} e^{-\frac{K}{A}t}\mathrm{sca}(t)$$



$$\tau = \frac{1}{|Re(\lambda)|} = \frac{A}{K}$$

2) FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI SISTEMI EQUIVALENTI

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \boxed{\tilde{x} = Qx}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{S}} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u \end{cases} \qquad \tilde{A} = QAQ^{-1}, \ \tilde{B} = QB \qquad \tilde{C} = CQ^{-1} \qquad \tilde{D} = D$$

$$\tilde{x}(0) = 0$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s) \Rightarrow \tilde{X}(s) = Q X(s) \overset{!}{=} Q(sI-A)^{-1} B U(s)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(\tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}u) = CQ^{-1}\tilde{X}(s) + DU(s) \overset{!}{=} CQ^{-1}Q(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s) \overset{!}{=} \underbrace{(C(sI-A)^{-1}B + D)}_{\tilde{G}(s) = G(s)} U(s)$$

3) STRUTTURA DELLA FDT

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)}\,\mathrm{adj}(sI-A)$$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

matrice di determinanti di sottomatrici di sI−A

⇒ Contiene polinomi in s di ordine al massimo n−1

$p_A(s)$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{p_A(s)}\underbrace{C\,\mathrm{adj}(sI-A)B}_{N_1(s)} + D = \frac{N_1(s)}{p_A(s)} + D$$

$N_1(s)$: POLINOMIO DI ORDINE $\leq n-1$

Se $D \neq 0$ $\quad G(s) = \dfrac{N_0(s)}{p_A(s)}$ → POLINOMIO DI ORDINE n

⇒ FDT PROPRIA NON STRETT.

Se $D = 0$ $\quad G(s) = \dfrac{N_1(s)}{p_A(s)}$ → POLINOMIO DI ORDINE $n-1$

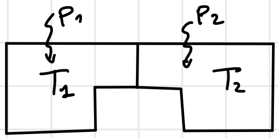
⇒ FDT PROPRIA STRETTAMENTE

- SE NON AVVENGONO CANCELLAZIONI TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:
  $D(s) = p_A(s)$ ⇒ POLI DI $G(s)$ = ZERI DI $D(s)$
  = AUTOVALORI DI A

- SE AVVENGONO CANCELLAZIONI TRA NUMERATORE E DENOMINATORE:
  $D(s) \neq p_A(s)$ ⇒ I POLI SONO AUTOVALORI DI A
  MA
  NON TUTTI GLI AUTOVALORI SONO POLI DI $G(s)$

PER CAPIRE MEGLIO DA DOVE NASCONO LE "CANCELLAZIONI" SI INTRODUCE L'ESEMPIO SEGUENTE.

ESEMPIO: SISTEMA TERMICO SENZA PIASTRINA (TRANSISTOR SI TOCCANO)



$T_a = 0$

MODELLO:
$$\begin{cases} c\dot{T}_1 = P_1 - \gamma_T(T_1 - T_2) - \gamma_a(T_1 - T_a) \\ c\dot{T}_2 = P_2 - \gamma_T(T_2 - T_1) - \gamma_a(T_2 - T_a) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} & \frac{\gamma_T}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} & -\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} & -\frac{\gamma_T}{c} \\ -\frac{\gamma_T}{c} & \lambda + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c}\lambda + \frac{\cancel{\gamma_T^2} + \gamma_a^2 + 2\gamma_T\gamma_a - \cancel{\gamma_T^2}}{c^2}$$

$$= \lambda^2 + 2\frac{\gamma_T + \gamma_a}{c}\lambda + \frac{\gamma_a(\gamma_a + 2\gamma_T)}{c^2}$$

$$= \left(\lambda + \frac{\gamma_a}{c}\right)\left(\lambda + \frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}\right)$$

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma_a}{c}, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}$$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\begin{cases} P_1 = P_2 = u \\ y = T_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(c\dot{T}_1) = \mathcal{L}(u - \gamma_T(T_1 - T_2) - \gamma_a T_1) \\ \mathcal{L}(c\dot{T}_2) = \mathcal{L}(u - \gamma_T(T_2 - T_1) - \gamma_a T_2) \\ y = T_1 \end{cases}$$

METODO DIRETTO $(T_1(0) = T_2(0) = 0)$

$$sT_1(s) = \frac{1}{c}U(s) - \frac{\gamma_T}{c}T_1(s) + \frac{\gamma_T}{c}T_2(s) - \frac{\gamma_a}{c}T_1(s)$$

$$sT_2(s) = \frac{1}{c}U(s) - \frac{\gamma_T}{c}T_2(s) + \frac{\gamma_T}{c}T_1(s) - \frac{\gamma_a}{c}T_2(s)$$

$$\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)T_2(s)=\frac{1}{c}\mathcal{V}(s)+\frac{\gamma_T}{c}T_1(s) \quad \sigma$$

$$\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)T_1(s)=\frac{1}{c}\mathcal{V}(s)+\frac{\gamma_T}{c}T_2(s)$$

$$T_2(s)=\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)^{-1}\left(\frac{1}{c}\mathcal{V}(s)+\frac{\gamma_T}{c}T_1(s)\right)$$

$$\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)T_1(s)=\frac{1}{c}\mathcal{V}(s)+\frac{\gamma_T}{c}\,\frac{\frac{1}{c}\mathcal{V}(s)+\frac{\gamma_T}{c}T_1(s)}{s+\frac{\gamma_T+\gamma_a}{c}}$$

$$\left[\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_a}{c}\right)^2-\frac{\gamma_T^2}{c^2}\right]T_1(s)=\left[\left(s+\frac{\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\frac{\gamma_T}{c}\right]\mathcal{V}(s)$$

$$\underbrace{\left[s^2+\frac{2\gamma_T+\gamma_e}{c}s+\frac{\gamma_a(\gamma_e+2\gamma_T)}{c^2}\right]}_{\left(s+\frac{\gamma_a}{c}\right)\left(s+\frac{\gamma_a+2\gamma_T}{c}\right)}T_1(s)=\frac{1}{c}\left(s+\frac{2\gamma_T+\gamma_a}{c}\right)\mathcal{V}(s)$$

$$\Rightarrow T_1(s)=\frac{\frac{1}{c}\cancel{\left(s+\frac{2\gamma_T+\gamma_e}{c}\right)}}{\left(s+\frac{\gamma_e}{c}\right)\cancel{\left(s+\frac{\gamma_a+2\gamma_T}{c}\right)}}\mathcal{V}(s)=\frac{1/c}{s+\frac{\gamma_e}{c}}\mathcal{V}(s)$$

PER CAPIRE INTRODUCO DUE NUOVE VARIABILI

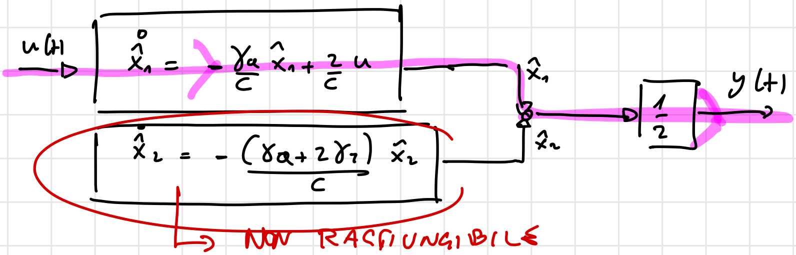
$$\hat{x}_1=T_1+T_2$$
$$\hat{x}_2=T_1-T_2$$

$$\begin{cases} c\dot{T}_1=u-\gamma_T(T_1-T_2)-\gamma_a T_1 \\ c\dot{T}_2=u-\gamma_T(T_2-T_1)-\gamma_a T_2 \\ y=T_1=\dfrac{\hat{x}_1+\hat{x}_2}{2} \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}}_1=\dot{T}_1=\dot{T}_2=\frac{1}{c}\left\{2u-\gamma_T\cancel{(T_1-T_2)}+\gamma_T\cancel{(T_1-T_2)}-\gamma_a T_1-\gamma_a T_2\right\}$$
$$=\frac{1}{c}\left\{2u-\gamma_a(T_1+T_2)\right\}=-\frac{\gamma_a}{c}\hat{x}_1+\frac{2}{c}u$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \dot{T}_1 - \dot{T}_2 = \frac{1}{c}\left\{ \cancel{u} - \cancel{u} - \gamma_T (T_1 - T_2) - \gamma_T (T_1 - T_2) - \gamma_a T_1 + \gamma_a T_2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{c}(2\gamma_T + \gamma_a)(T_1 - T_2) = -\frac{1}{c}(2\gamma_T + \gamma_e)\hat{x}_2$$



CASO 2

$$P_1 = u \qquad P_2 = 0 \qquad y = T_1 - T_2$$

$$\begin{cases} c\,\dot{T}_1 = u - \gamma_T (T_1 - T_2) - \gamma_a T_1 \\ c\,\dot{T}_2 = - \gamma_T (T_2 - T_1) - \gamma_a T_2 \\ y = T_1 - T_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma_T + \gamma_e}{c} & \frac{\gamma_T}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} & -\frac{\gamma_T + \gamma_e}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} & -\frac{\gamma_T}{c} \\ -\frac{\gamma_T}{c} & s + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\left(s + \frac{\gamma_a}{c}\right)\left(s + \frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}\right)} \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} & \frac{\gamma_T}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} & s + \frac{\gamma_T + \gamma_a}{c} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{\left(s + \frac{\gamma_a}{c}\right)\left(s + \frac{\gamma_a + 2\gamma_T}{c}\right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma_T + \gamma_e}{c} & \frac{\gamma_T}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} & s + \frac{\gamma_T + \gamma_e}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1/c}{P_A(s)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma_T+\gamma_a}{c} \\ \frac{\gamma_T}{c} \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{c}\left(\cancel{s+\frac{\gamma_a}{c}}\right)}{\left(\cancel{s+\frac{\gamma_a}{c}}\right)\left(s+\frac{2\gamma_T+\gamma_a}{c}\right)}$$

$$\hat{x}_1 = T_1 + T_2 \qquad \dot{\hat{x}}_1 = \frac{1}{c}\left\{u - \gamma_a \hat{x}_1\right\}$$

$$\hat{x}_2 = T_1 - T_2 \qquad \dot{\hat{x}}_2 = \frac{1}{c}\left\{u - (\gamma_a + 2\gamma_T)\hat{x}_2\right\}$$

$$y = \hat{x}_2$$

$\leadsto \hat{x}_1$ NON VISIBILE DALL'USCITA

$\Rightarrow$ NON OSSERVABILE

$$u(t) \rightarrow \boxed{\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{\gamma_a}{c}\hat{x}_1 + \frac{1}{c}u}$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{\dot{\hat{x}}_2 = -\frac{(\gamma_a + 2\gamma_T)}{c}\hat{x}_2 + \frac{u}{c}} \rightarrow y(t)$$

CONCLUSIONI

- IL GRADO DEL DENOMINATORE È $\nu \leq n$
- $\nu < n$ QUANDO:
  - ESISTONO STATI (O COMB. LIN. DI STATI) NON RAGGIUNGIBILI
  - " " " " NON OSSERVABILI
  - " " " " NON RAGG./NON OSS.

$\hookrightarrow$ in questo caso $\exists$ autovalori che non sono poli della fdt

TEOREMA

CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ASINTOTICA STABILITÀ È CHE I POLI DI $G(s)$ ABBIANO PARTE REALE < 0.

Questa condizione è anche sufficiente se $\nu = n$.

4. Fattorizzazione delle funzioni di trasferimento

La funzione di trasferimento generale

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Forma di Bode

può essere scritta in una delle seguenti **forme fattorizzate (canoniche)**:

GUADAGNO GENERALIZZATO

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1+2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1+2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

TIPO

$$= \frac{\rho \prod_i (s+z_i) \prod_i (s^2+2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s+p_i) \prod_i (s^2+2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Forma di Nyquist

costante di trasferimento

Soluzioni solo c/c solo se $\xi \in (-1, 1)$

ESEMPI

1) $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \dfrac{3s^2+6s+3}{s^3+2s^2+2s}$

$$= \underbrace{\frac{3(s^2+2s+1)}{s(s^2+2s+2)}}_{\text{Forma di Nyquist}} = \frac{3(1+s)^2}{s\,2\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)} = \underbrace{\frac{3/2\,(1+s)^2}{s\left(1+s+\frac{s^2}{2}\right)}}_{\text{Bode}}$$

$\tau = 1$ costante di tempo

$$1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

ζ: smorzamento delle singolarità (poli/zeri) complessi coniugati

ω_n: pulsazione naturale delle singolarità

$\omega_n = \sqrt{2}$

$\dfrac{2\zeta}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \zeta = \dfrac{1}{2}\omega_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$g = 1$

2) $G(s) = 3\dfrac{s+2}{(s+3)(s+1)} = \dfrac{3\cdot 2\left(1+\frac{s}{2}\right)}{3\left(1+\frac{s}{3}\right)(1+s)} = \dfrac{2\left(1+s/2\right)}{\left(1+s/3\right)(1+s)} \nearrow g = 0$

3) $G(s) = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{s}\,\dfrac{(1+s)^2}{1+s+\frac{s^2}{2}} = \dfrac{3/2\,(s+1)^2}{s\,\frac{1}{2}(s^2+2s+2)} = \dfrac{3(s+1)^2}{s(s^2+2s+2)} \nearrow g = 1$

4) $G(s) = 2s\dfrac{(s+2)}{s+3} = \dfrac{2(s+2)}{s^{-1}(s+3)} = \dfrac{2\cdot 2\left(1+\frac{s}{2}\right)}{s^{-1}\,3\left(1+\frac{s}{3}\right)} = \dfrac{4/3\left(1+\frac{s}{2}\right)}{s^{-1}\left(1+\frac{s}{3}\right)}$

$g = -1$

N.B. : GUADAGNO GENERALIZZATO

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i \left(1+2\frac{\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\cancel{s^g} \prod_i (1+T_i s) \prod_i \left(1+2\frac{\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Se $g=0 \Rightarrow G(0)=\mu$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$\Rightarrow G(0) = -CA^{-1}B + D$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad u = \bar{u} \quad \forall t$$

$$\dot{x} = 0 = A\bar{x} + B\bar{u} \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}$$

$$= \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\text{Guadagno statico del sistema}}\bar{u}$$

$-CA^{-1}B + D$ ben definito solo se $\det(A) = \prod \lambda_i \neq 0$

$-CA^{-1}B + D = \mu$ se non ci sono poli $(g=0)$ o zeri in $s=0$

Se $\exists$ zero in $s=0$ $\quad -CA^{-1}B + D = 0$

$$\Downarrow$$

$$G(0)$$

$\mu \neq 0$

- **Poli** reali: $s = -p_i = -\frac{1}{T_i}$

- **Zeri** reali: $s = -z_i = -\frac{1}{\tau_i}$

- μ: **guadagno generalizzato** del sistema (oss: μ=G(0) solo se g=0-> guadagno statico)

- ρ: **costante di trasferimento**

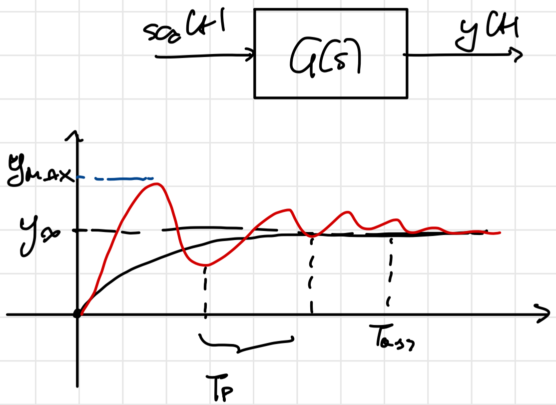
- g: **tipo** del sistema (intero positivo o negativo) – rappresentano poli (se g>0) o zeri (se g<0) nell'origine.

se $\xi_i > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\text{polo}) < 0 \Rightarrow$ as. stabile

- **Poli** complessi coniugati: $\boxed{s = -\xi_i\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i{}^2}}$, dove ω_{ni} è la **pulsazione naturale** e ξ_i è lo **smorzamento** della coppia di poli

- **Zeri** complessi coniugati: $s = -\zeta_i\alpha_{ni} \pm j\alpha_{ni}\sqrt{1-\zeta_i{}^2}$, dove α_{ni} è la **pulsazione naturale** e ζ_i è lo **smorzamento** della coppia di zeri

5. RISPOSTA DI FDT ALLO SCALINO

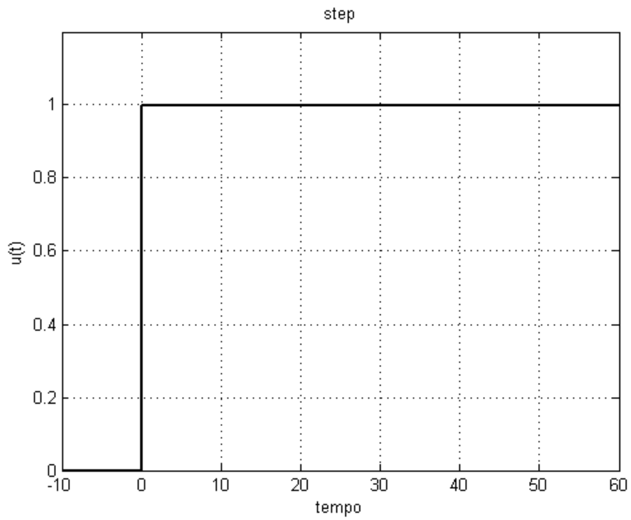


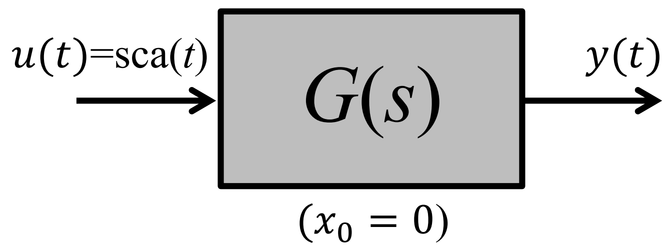
Tp ⇝ periodo oscillazione

Sovraelongazione %

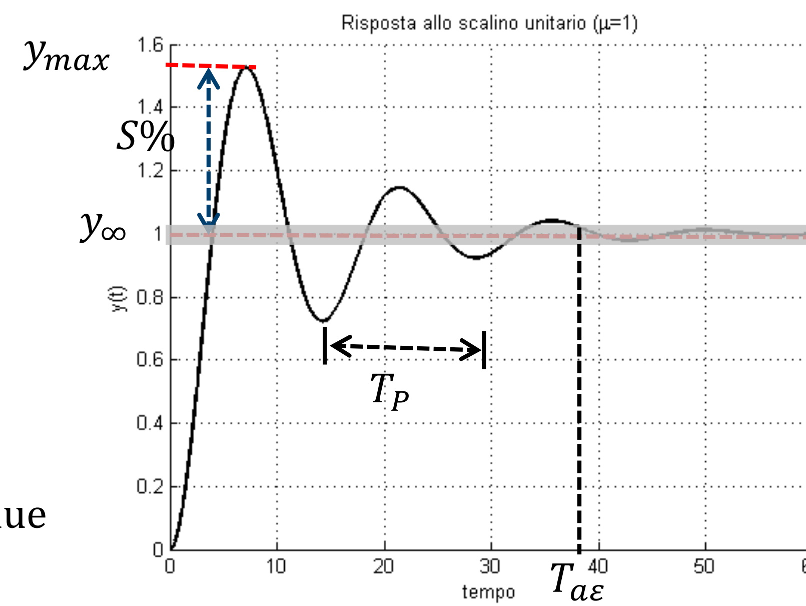
$$S\% = 100 \, \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

Caratteristiche di interesse della risposta allo scalino





- **Valore di regime** y_∞: $y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t)$
- **Valore massimo**: $y_{max} = \max_{t \geq 0} y(t)$
- **Sovraelongazione massima percentuale**: $S\% = 100\,\frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$
- **Tempo di assestamento**: tempo necessario affinchè $|y(t) - y_\infty| < \varepsilon y_\infty \; \forall t \geq T_{a\varepsilon}$
  100
- **Periodo di oscillazione** T_P: distanza temporale tra due massimi dell'uscita

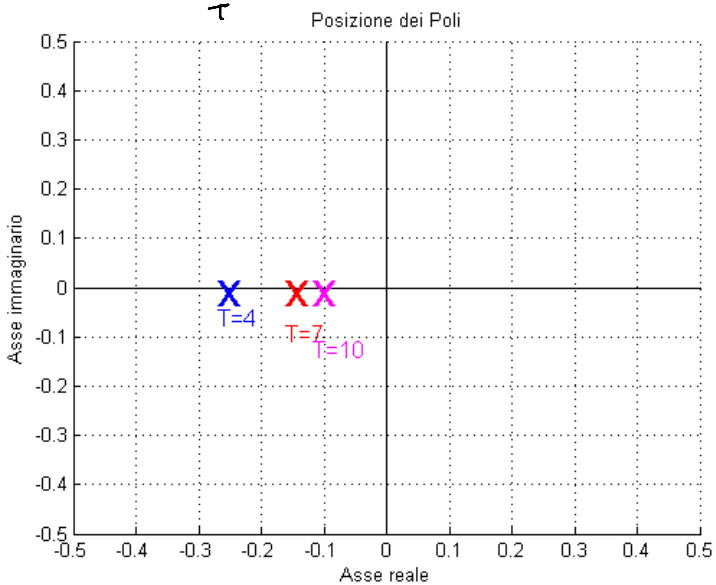


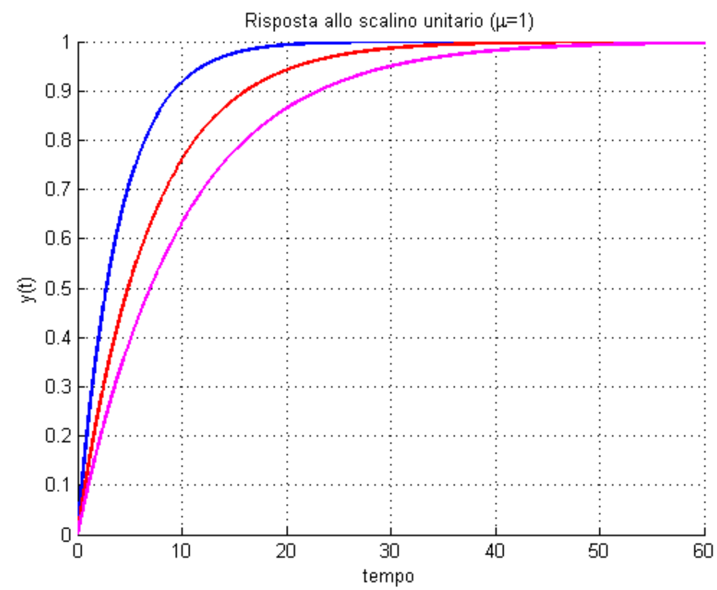
a) Sistemi del I ordine

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + Ts)} \rightarrow y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}})sca(t)$$

$-\frac{1}{\tau}$





- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \dot{y}(0) = \frac{\mu}{T}$
- Più diminuisce T (il polo si sposta a sinistra) più diminuisce il tempo di salita
- Il tempo di assestamento è $T_{a\varepsilon} = T|\log(0.01\varepsilon)|$, per esempio $T_{a5} \cong 3T$, $T_{a1} \cong 4.6T$

$s = -\frac{1}{\tau} \rightarrow$ autovalore del sistema

$\Rightarrow$ modo $e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$G(s) = \frac{\mu}{1+s\tau}$$

$$u(t) = sca(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{s(1+s\tau)} = \frac{\mu/\tau}{s(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+\frac{1}{\tau}}$$

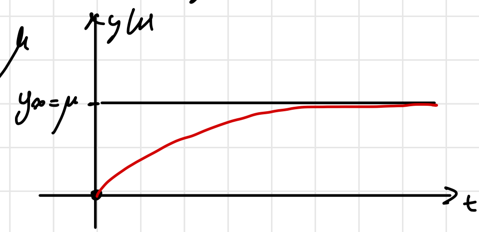
$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \alpha_1 \, sca(t) + \alpha_2 \, e^{-\frac{1}{\tau}t} sca(t)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu/\tau \; \cancel{s}}{\cancel{s}(s+\frac{1}{\tau})}\Bigg|_{s=0} = \frac{\mu/\tau}{1/\tau} = \mu$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) sca(t)$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu/\tau \,\cancel{(s+1/\tau)}}{s\cancel{(s+1/\tau)}}\Bigg|_{s=-\frac{1}{\tau}} = \frac{\mu/\tau}{-\frac{1}{\tau}} = -\mu$$



$$T_{ass} \simeq \frac{5}{|Re(\lambda)|} = \frac{5}{\left|-\frac{1}{\tau}\right|} = 5\tau$$

b) Sistemi del II ordine – due poli reali ($T_1 > T_2 > 0$)

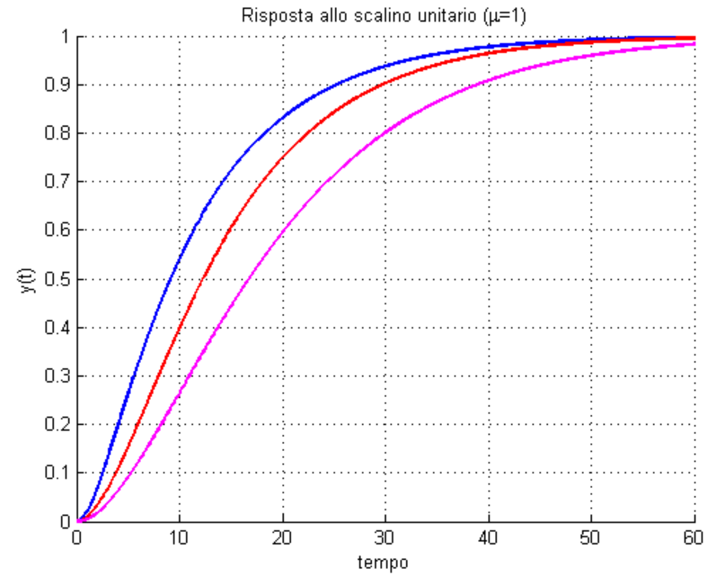
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$s = -\frac{1}{T_1}$

$s = -\frac{1}{T_2}$

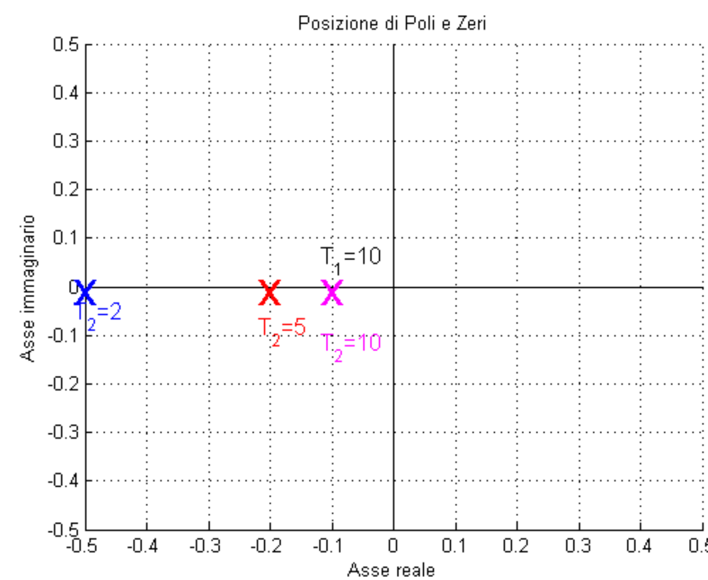
$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) sca(t)$$



- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \ \ \forall t$
- $\dot{y}(0) = 0$
- Più diminuiscono T_1 e T_2 (i poli si spostano a sinistra) più diminuiscono il tempo di salita e il tempo di assestamento $T_{a\varepsilon}$ (la relazione non è immediata)
- Se $T_2 \ll T_1$ l'esponenziale più lenta (avente costante di tempo T_1) domina la forma della risposta, e si ottiene (per $t \geq 4 \div 5\ T_2$) che

$$y(t) \cong \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) sca(t)$$

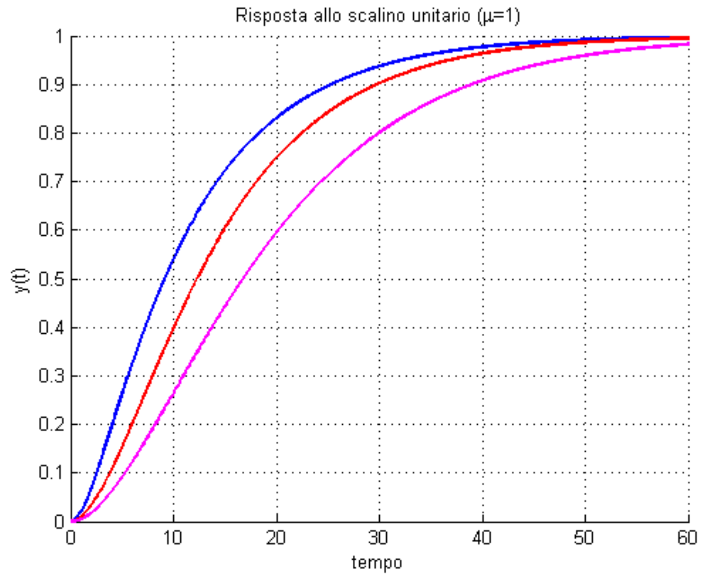


c) Sistemi del II ordine – due poli reali coincidenti ($T_1 = T_2 = T > 0$)

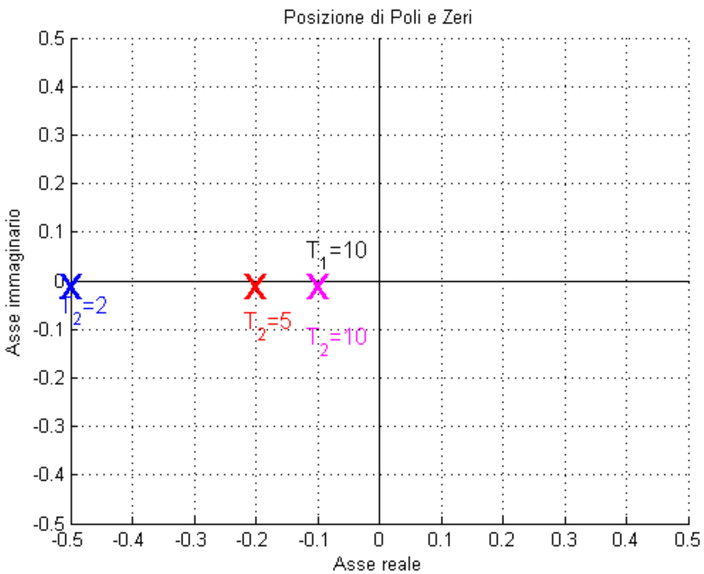
$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + T\ \ s)^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu}{s(1 + T\ \ s)^2}$$

$$y(t) = \mu(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}) sca(t)$$



- L'andamento qualitativo è simile al caso precedente (per $T_2 \cong T_1$)
- In questo caso è possibile valutare il tempo di assestamento:
    - $T_{a5} \cong 4.74T$,
    - $T_{a1} \cong 6.64T$



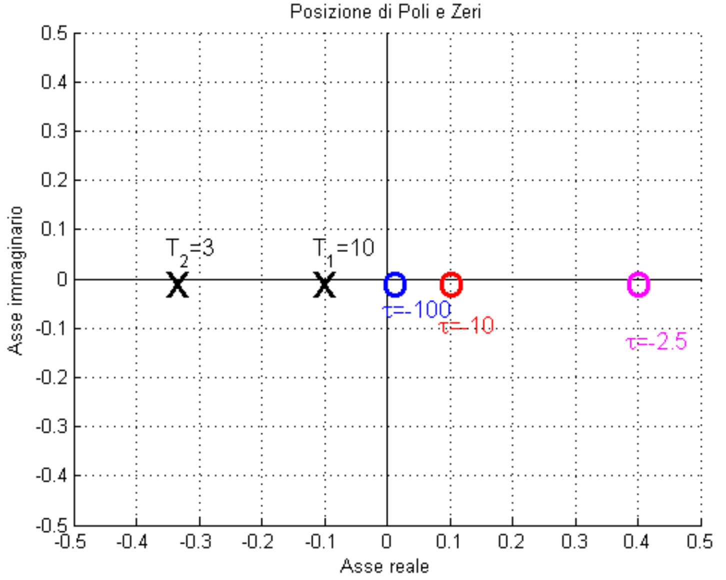
d) Sistemi del II ordine – Poli reali distinti ($T_1 > T_2 > 0$) e uno zero ($\tau \neq T_1, \tau \neq T_2$)

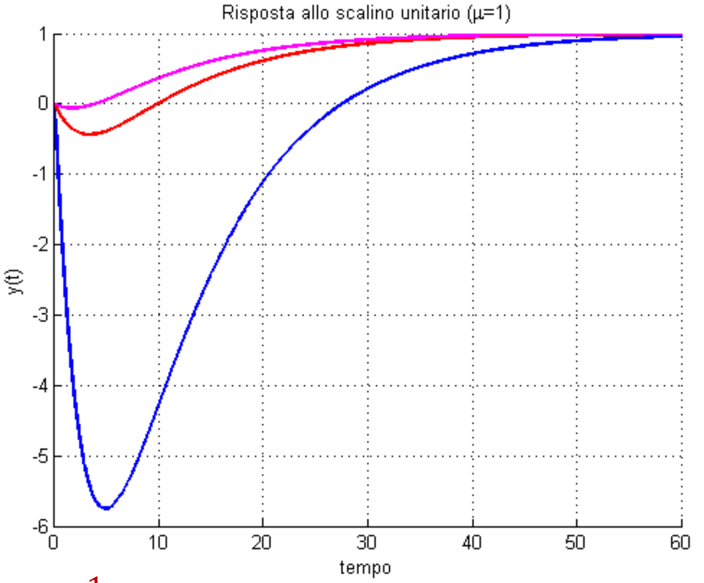
$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mu\left(1 - \frac{T_1-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2-\tau}{T_1-T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) sca(t)$$

- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1-T_2}\left(\frac{T_1-\tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2-\tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \rightarrow \quad \dot{y}(0) = \frac{\mu\tau}{T_1 T_2} \rightarrow$ dipende dal segno di τ!

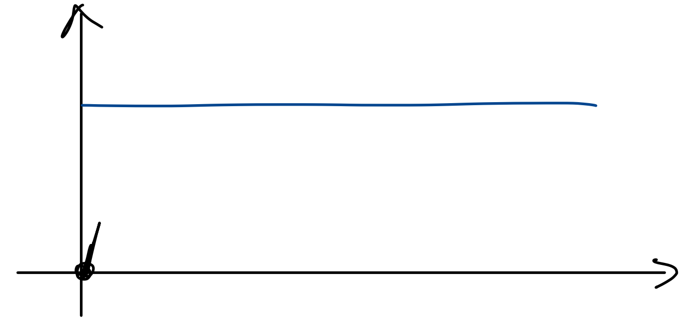
CASO I: $\boldsymbol{\tau < 0}$: $\dot{y}(0) < 0$: c'è «sottoelongazione» (RISPOSTA INVERSA), che è tanto più pronunciata tanto più $|\tau|$ assume valori elevati (lo zero si avvicina all'origine)





In generale, quando ci sono zeri con parte reale positiva ($s = -\frac{1}{\tau} > 0$) si verifica il fenomeno della **risposta inversa**.

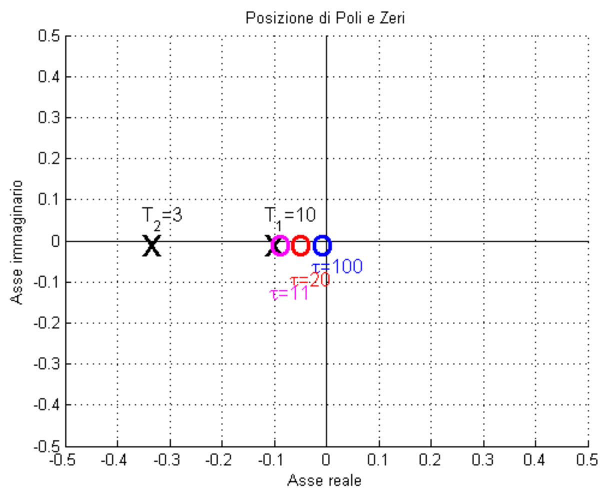
CASO II: $\tau > T_1$

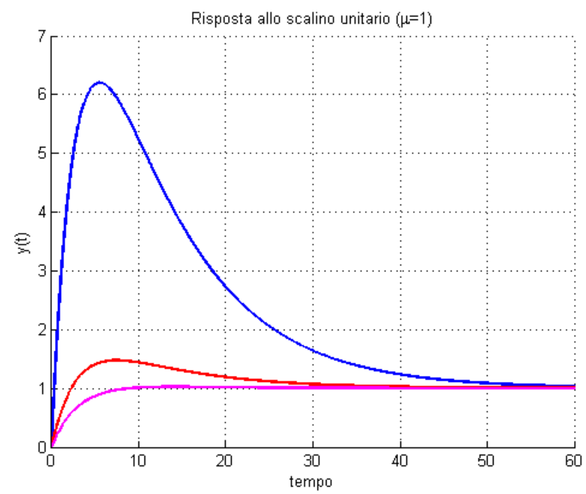


- $\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$
- $\dot{y}(0) > 0$ (crescente al tempo $t = 0$)
- Esiste istante $\bar{t} > 0$ in cui derivata cambia segno:

$$\bar{t} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \left|\log\left(\frac{T_1 - \tau}{T_2 - \tau}\frac{T_2}{T_1}\right)\right|$$

cioè una sovraelongazione, che è tanto più marcata tanto il valore di τ aumenta (lo zero si avvicina all'origine)

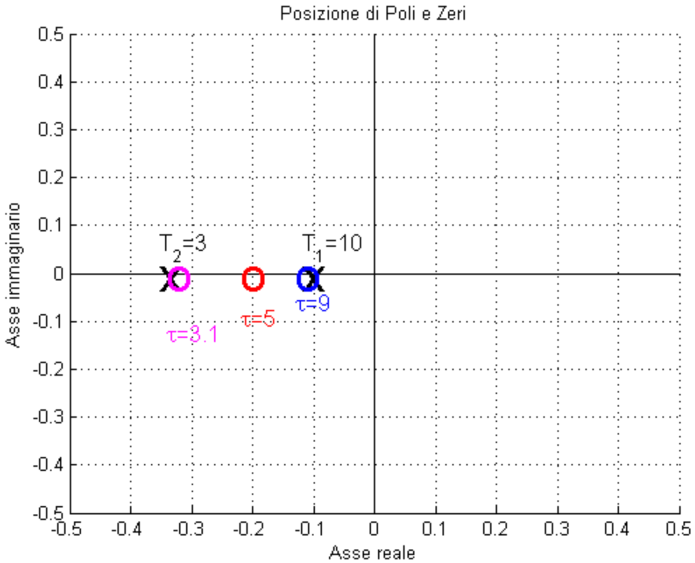


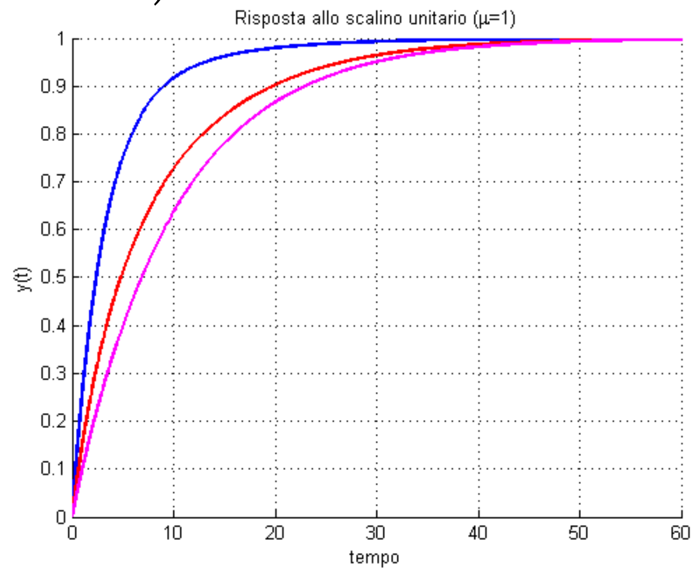


In generale, quando ci sono zeri con parte reale negativa e modulo minore di quello dei poli (reali) si verifica il fenomeno delle **sovraelongazioni** (senza oscillazioni).

CASO III: $T_1 > \tau > T_2$

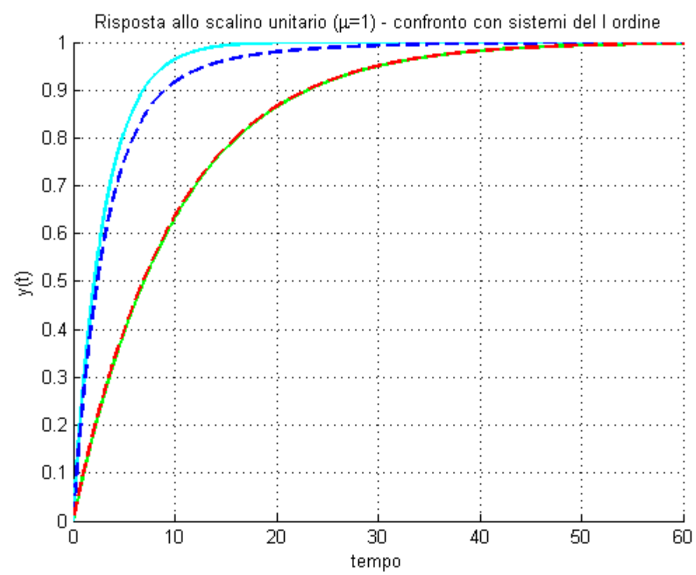
$$\dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1 - \tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2 - \tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \ \forall t$$



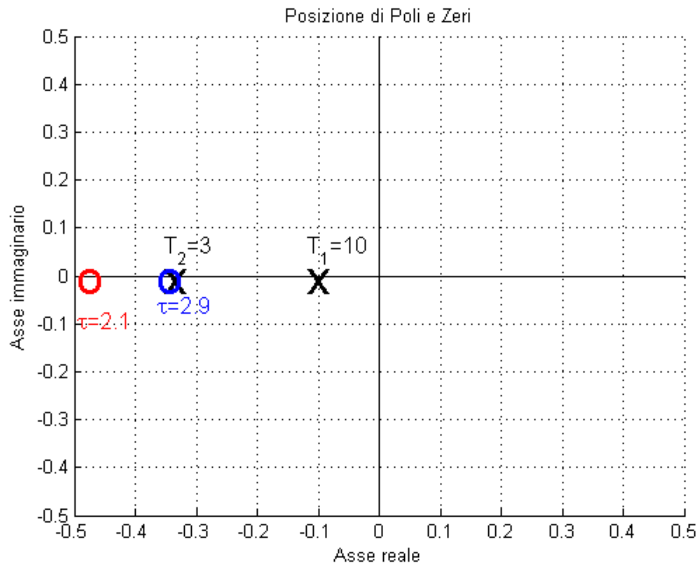


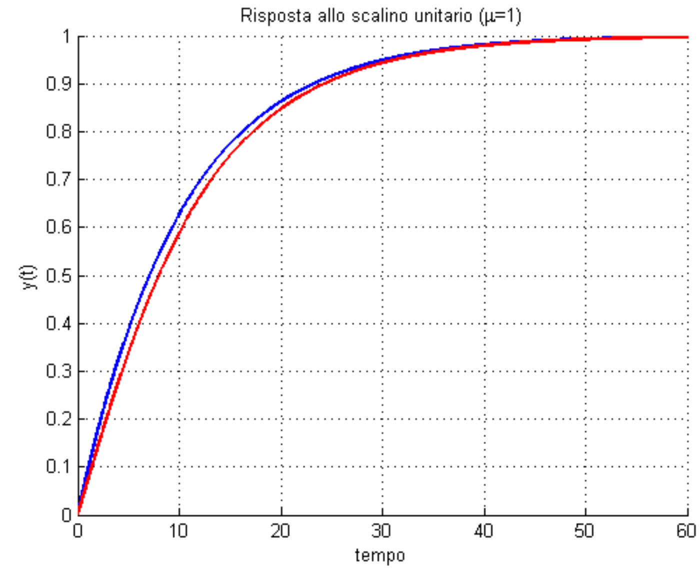
- Se $\tau \cong T_1$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con
$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_2}})$$
Anche se le risposte sono leggermente diverse (coppia polo/zero trascurata ha dinamiche lente)

- Se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con
$$y(t) \cong \mu(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$
e in questo caso non si verifica il fenomeno della **deriva lenta** perché il polo trascurato ha dinamiche veloci

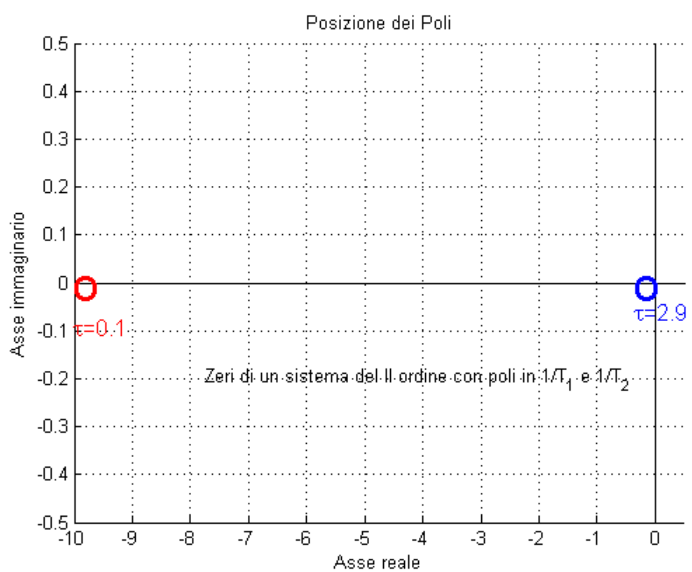


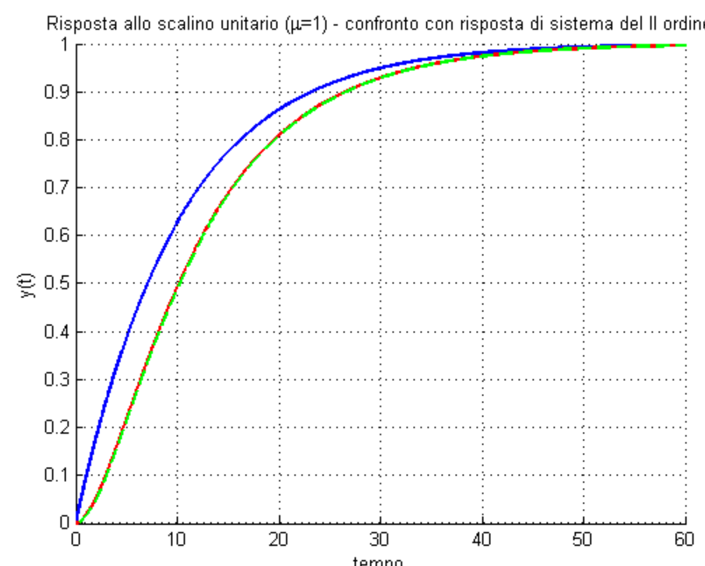
CASO IV: $T_1 > T_2 > \tau$ $\qquad \dot{y}(t) = \frac{\mu}{T_1 - T_2}\left(\frac{T_1-\tau}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2-\tau}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}\right) \geq 0 \ \forall t$





- Se $\tau \cong T_2$ l'andamento dell'uscita può essere approssimato con $y(t) \cong \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$
- Più τ diminuisce (lo zero si «allontana» a sinistra) più la risposta tende a quella del sistema del II ordine privo di zeri (caso II).





e) Sistemi del II ordine – poli complessi coniugati

$(s+\alpha)^2+\omega^2$

$$G(s) = \frac{\mu}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

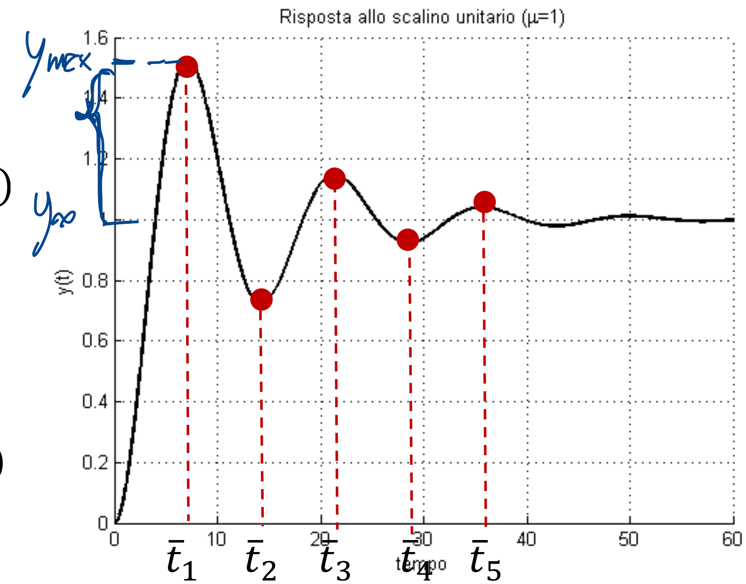
$$G(s) = \frac{\mu\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2} \rightarrow \text{poli in } s = -\xi_i\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\xi_i{}^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = \frac{\mu\omega_n{}^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2)}$$

$$y(t) = \mu\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{\boxed{-\xi\omega_n t}}\sin\left(\boxed{\sqrt{1-\xi^2}}\omega_n t + \arccos(\xi)\right)\right)sca(t)$$

Parte reale dei poli

Parte immaginaria dei poli



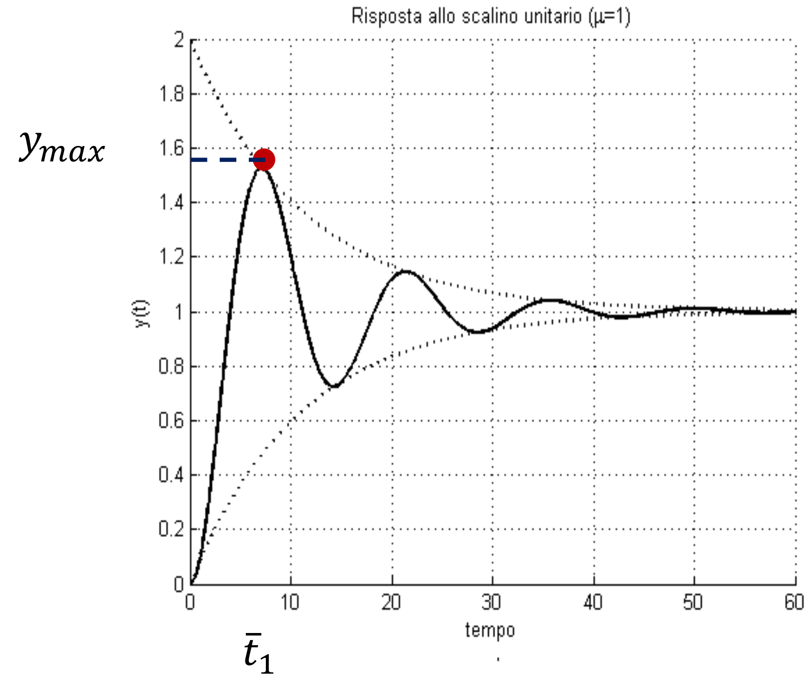
- Se $\xi > 0$ il sistema è asintoticamente stabile
- Se $\xi = 0$ il sistema è semplicemente stabile e la risposta è
$$y(t) = \mu(1-\cos(\omega_n t))sca(t)$$
- I punti di stazionarietà ($\dot{y}(\bar{t}_k) = 0$) di $y(t)$ sono
$$\bar{t}_k = \frac{k\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$
e i valori di $y(t)$ assunti in questi punti sono
$$y(\bar{t}_k)=\mu\left(1-(-1)^k e^{-\xi\frac{k\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$$
- $y_\infty = \mu$
- $y(0) = 0$
- $y_{max} = y(\bar{t}_1) = \mu\left(1+e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$
- $S\%=100e^{-\xi\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ sovraelongazione massima percentuale
- $T_P = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ periodo di oscillazione

- E’ facile fornire un’approssimazione del tempo di assestamento: i massimi e i minimi (punti stazionari) di $y(t)$ giacciono sulle funzioni:

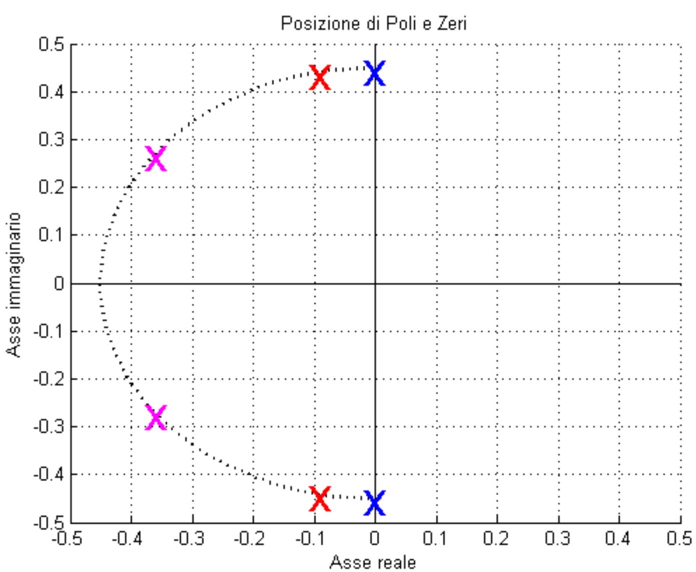
$$y_M(t) = \mu(1 + e^{-\xi\omega_n t})$$
$$y_m(t) = \mu(1 - e^{-\xi\omega_n t})$$

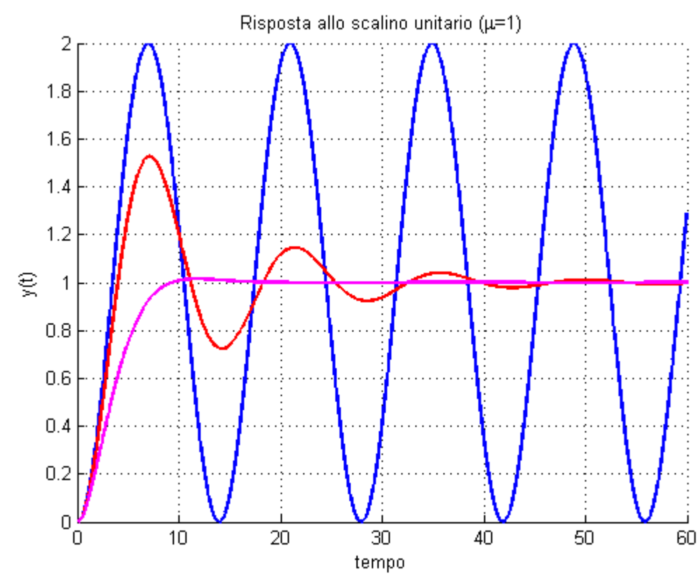
per calcolare $T_{a\varepsilon}$ si calcolano gli istanti in cui queste funzioni «modulanti» entrano nella fascia $[\mu(1-0.01\varepsilon), \mu(1+0.01\varepsilon)]$, e si trova:

$$T_{a\varepsilon} = \frac{1}{\xi\omega_n}|\log(0.01\varepsilon)|$$

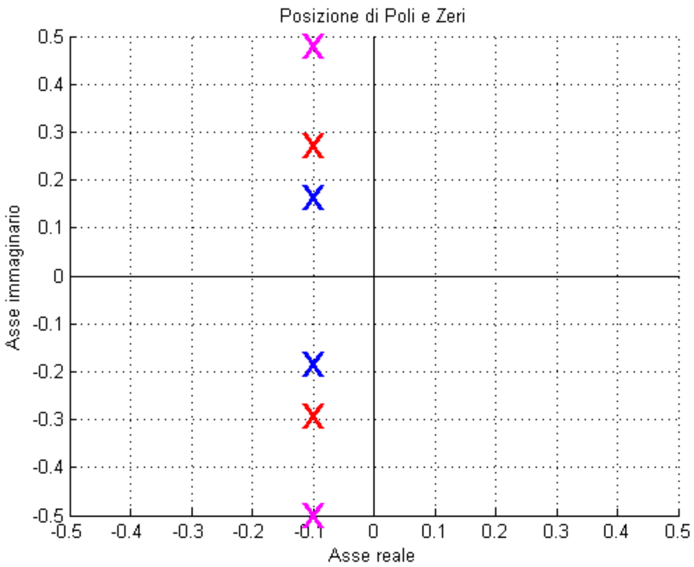


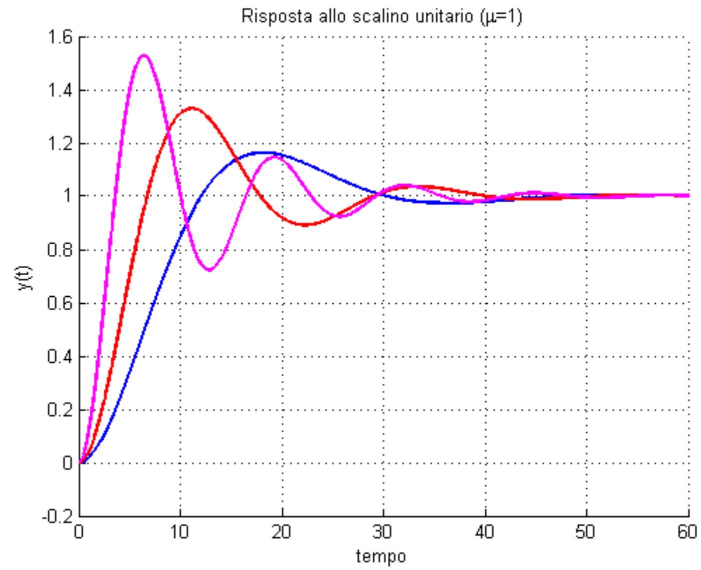
CASO I: ω_n costante, ξ variabile



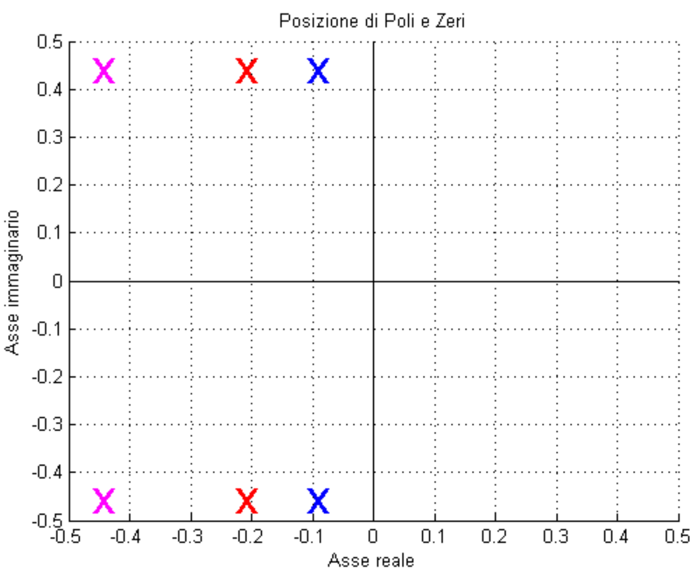


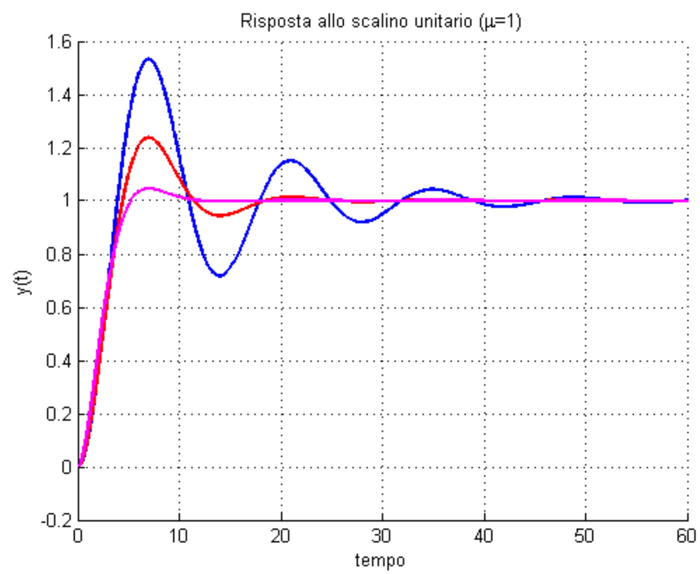
CASO II: parte reale costante, parte immaginaria variabile



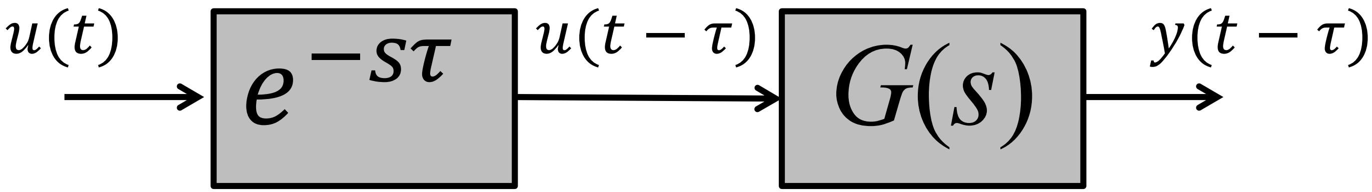


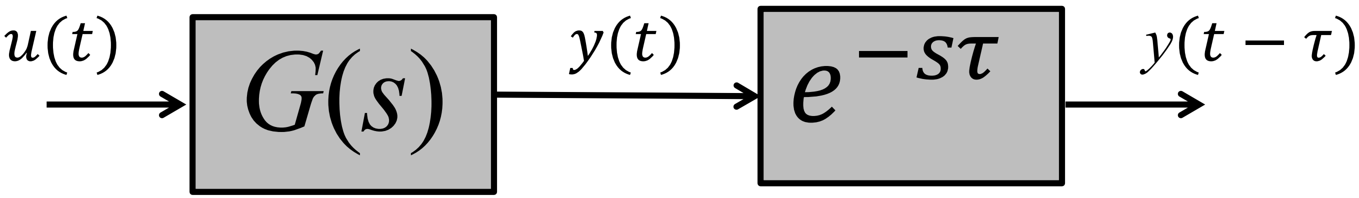
CASO III: parte reale variabile, parte immaginaria costante



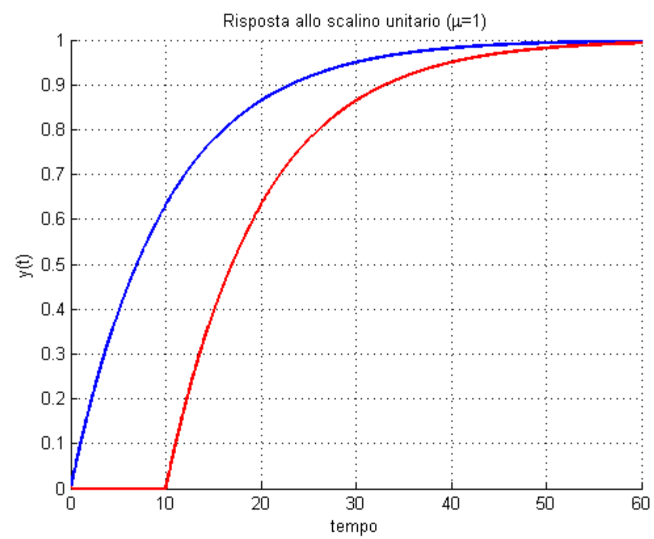


f) Ritardo di tempo





La risposta è identica al caso in cui il ritardo è assente, tranne che l'istante iniziale della risposta è $t = \tau$ (invece di $t = 0$)



$$f(t) \rightsquigarrow F(s)$$

$$f(t-\tau) \rightsquigarrow F(s)\, e^{-\tau s}$$

$$u(t) = \mathrm{sca}(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{e^{-s\tau}} \xrightarrow{y(t)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} e^{-s\tau}$$

$$\downarrow$$

$$y(t) = \mathrm{sca}(t-\tau)$$

6. Approssimazione delle funzioni di trasferimento

a) Approssimazione ai poli dominanti

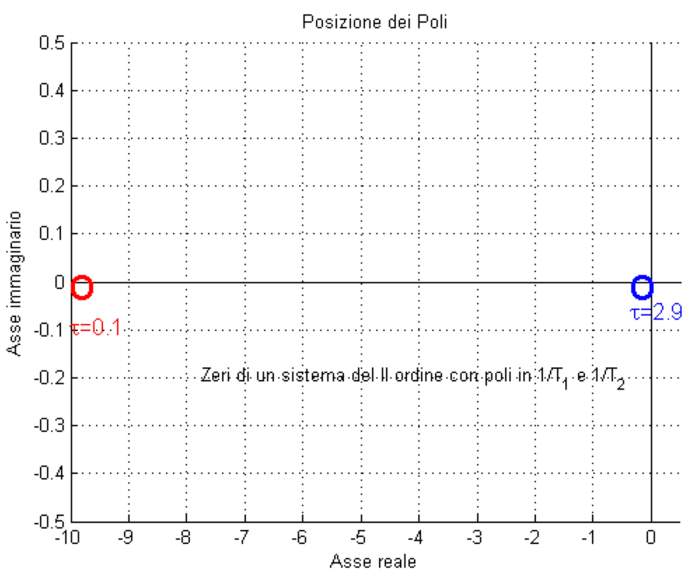
ESEMPIO 1

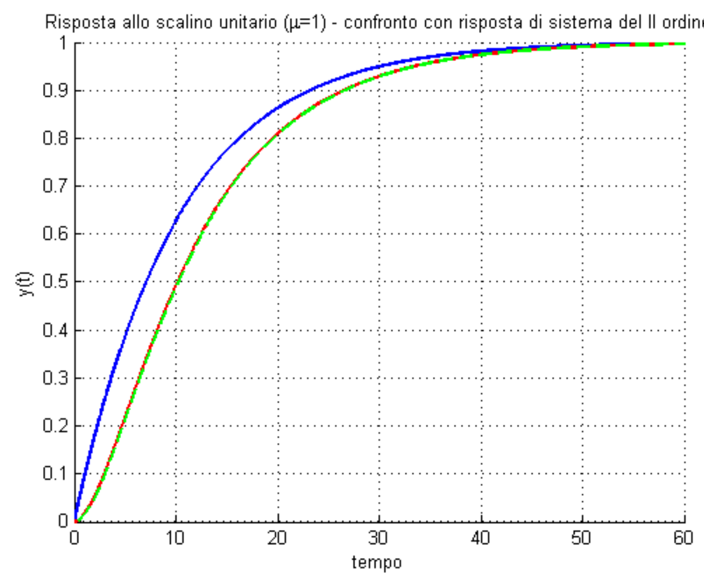
Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \simeq \frac{\mu(1+0s)}{(1+T_1 s)(1+T_2)}$$

che, se $\tau \ll T_2$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$





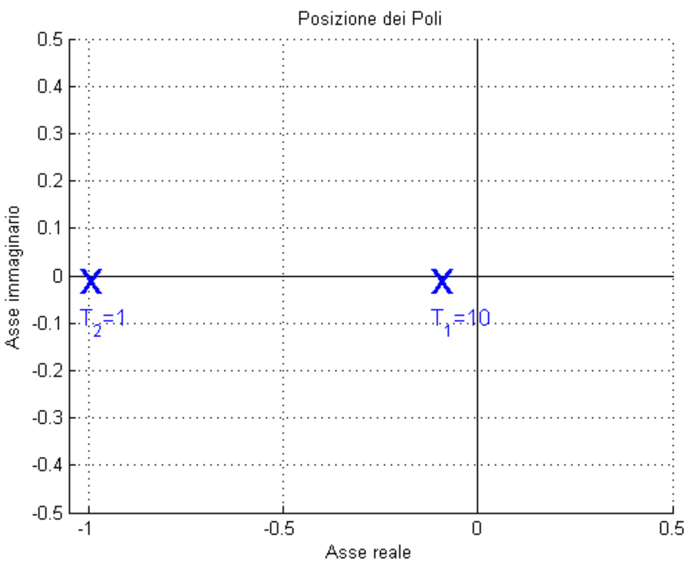
ESEMPIO 2

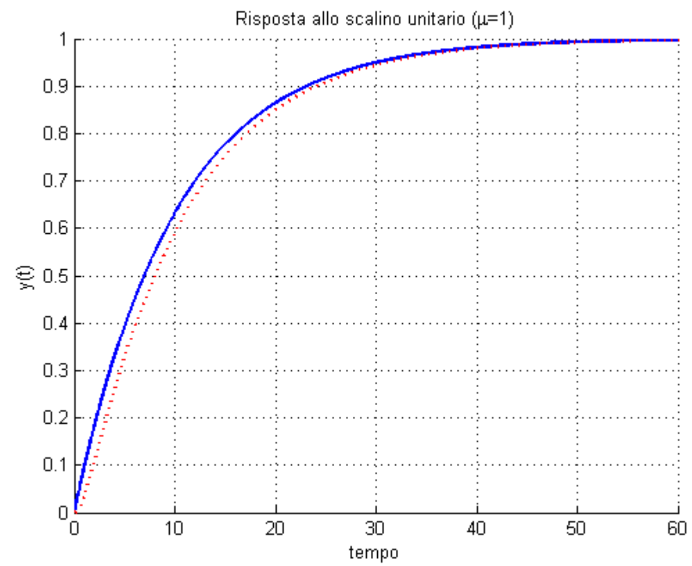
Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \simeq \frac{\mu}{(1+T_1 s)(1+0\cdot s)}$$

che, se $T_2 \ll T_1$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1 s)}$$





Data $G(s)$ (dopo aver svolto le opportune cancellazioni polo-zero), **i poli dominanti sono i poli ($\in \mathbb{C}$) nettamente più vicini all'asse immaginario rispetto agli altri**.

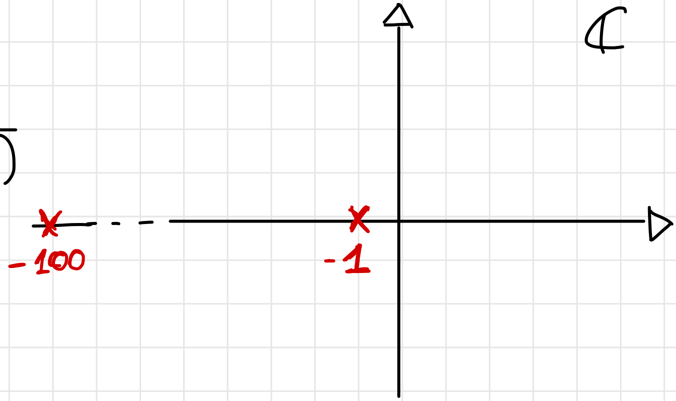
REGOLA: la risposta allo scalino di un sistema con poli dominanti può essere approssimata con quella di un sistema con funzione di trasferimento avente soltanto il polo dominante e il guadagno pari a quello di partenza.

E' opportuno tener conto di zeri:

- che abbiano distanza dall'asse immaginario confrontabile o minore con quella dei poli dominanti
- che abbiano parte reale positiva

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)}$$



POLI : $s = -1, -100$

GUADAGNO : $\mu = \frac{1}{100} = G(0)$

Metodo sbagliato : $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+\cancel{100})} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow G(0) = 1$!!

Metodo corretto : Portare il sistema in forma di Bode

$$G(s) = \frac{1/100}{(1+s)\cancel{(1+s/100)}} = \frac{1/100}{1+s}$$

b) Cancellazione polo/zero

ESEMPIO

Si è visto, per funzioni di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{\mu(1+\tau s)}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

che, se $\tau \cong T_1$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

$$G(s) = \frac{\mu}{1+T_2 s}$$

e che, se $\tau \cong T_2$, la risposta è approssimabile a quella del sistema

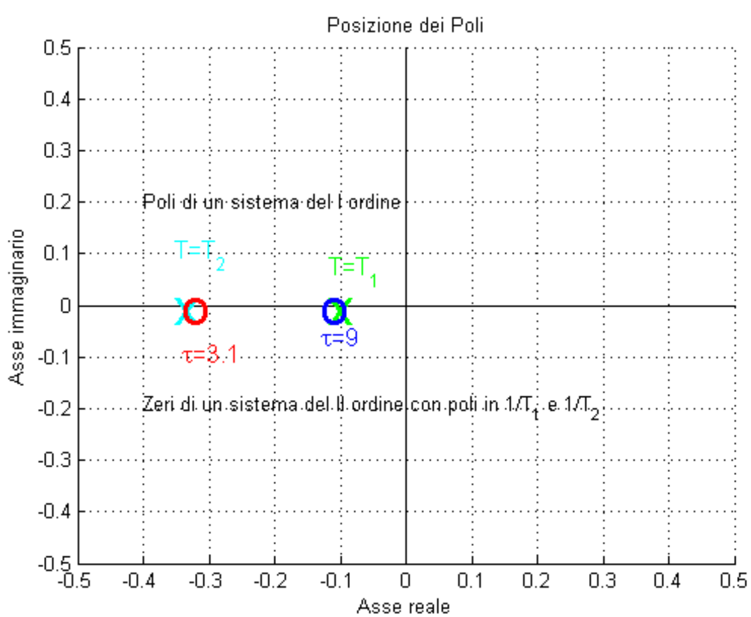
$$G(s) = \frac{\mu}{1+T_1 s}$$

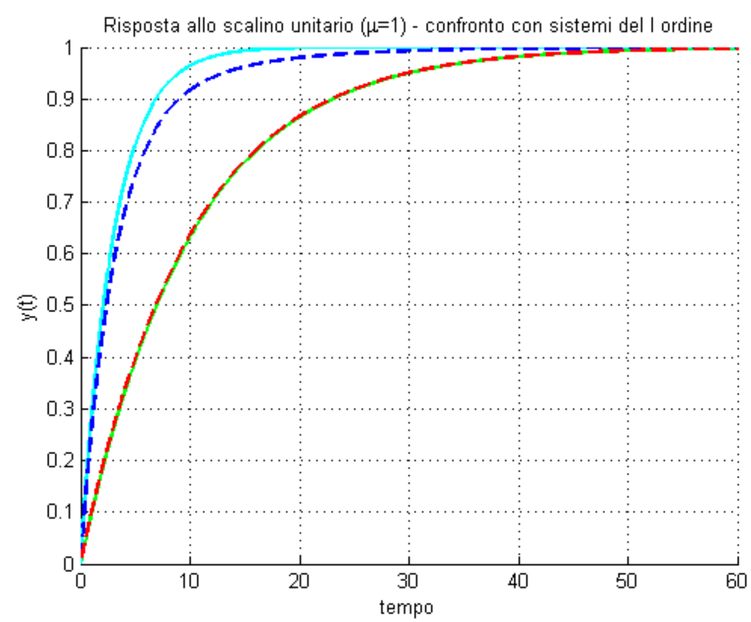
$\tau \cong T_2 \rightarrow 1+s\tau \simeq 1+sT_2 \rightarrow \simeq \frac{\mu}{1+T_1 s}$

$\simeq$

$\rightarrow \tau \simeq T_1 \rightarrow 1+s\tau \simeq 1+sT_1$

$\Rightarrow G(s) \simeq \frac{\mu}{1+T_2 s}$





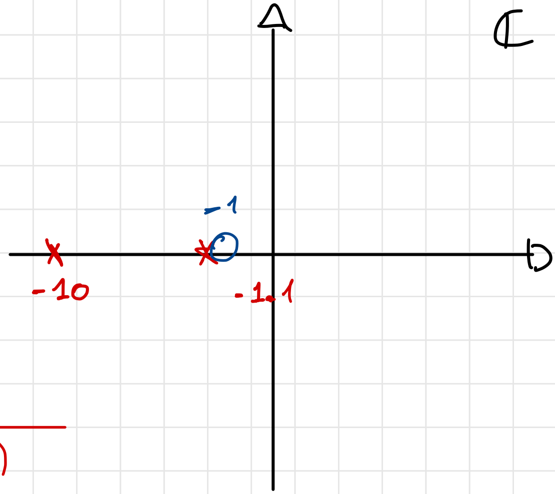
- E’ stata svolta un’**approssimazione** consistente nella **cancellazione di uno zero e un polo con parte reale negativa** avente valori simili.

- Benchè sia un’approssimazione, l’effetto è trascurabile ai fini della risposta allo scalino (specialmente nel secondo caso)

REGOLA: qualora ci siano coppie polo-zero vicini tra loro nel piano complesso con parte reale negativa, è possibile forzare la cancellazione mantenendo invariati gli altri parametri (tra i quali il GUADAGNO) per ottenere un modello approssimato di ordine ridotto ma con caratteristiche simili a quello di partenza (almeno per quanto riguarda la risposta allo scalino).

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+1.1)(s+10)}$$



Metodo sbagliato: $G(s) = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{(s+1.1)}(s+10)} = \frac{1}{s+10}$

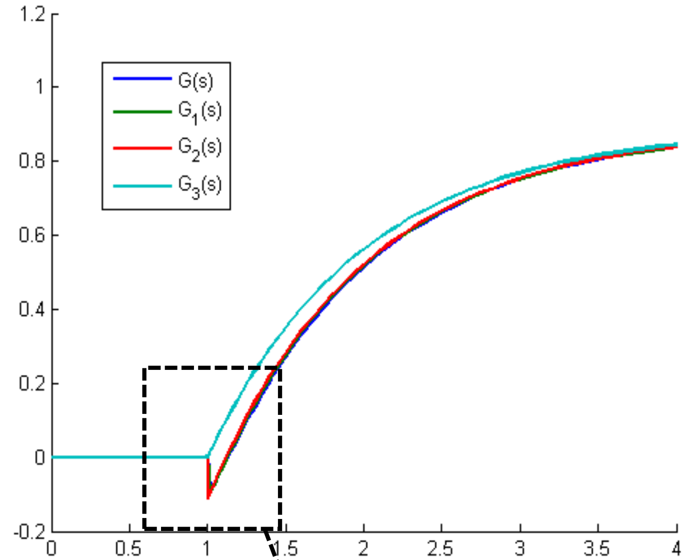
Metodo corretto: $G(s) = \frac{\cancel{(1+s)}\,\frac{1}{1.1}}{\cancel{\left(1+\frac{s}{1.1}\right)}\left(1+\frac{s}{10}\right)} = \frac{1/1.1}{1+s/10}$

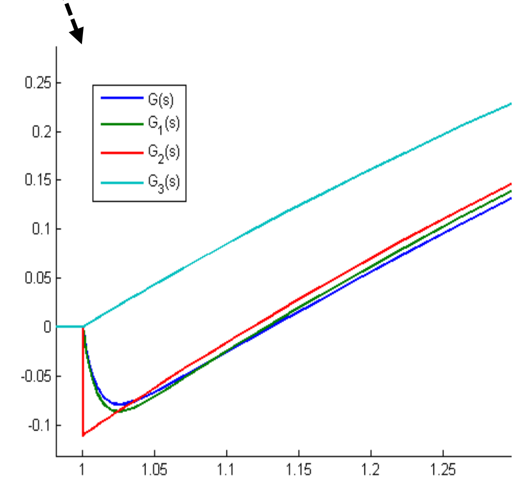
FORMA DI BODE

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{-10(s+10)(s-8)}{(s+1)(s+100)(s+9)} = \frac{8}{9}\frac{(1+s/10)(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)(1+s/9)}$$

- **Poli**: $s = -1, -100, -9$ (sistema as stabile!); costanti di tempo dei poli $T_i = 1, \frac{1}{100}, \frac{1}{9}$
- **Zeri**: $s = -10, 8$ (parte reale positiva!); costanti di tempo degli zeri: $\tau_i = \frac{1}{10}, -\frac{1}{8}$
- $\mu = \frac{8}{9}$: **guadagno** del sistema
- $\rho = -10$: **costante di trasferimento**
- g=0: **tipo** del sistema.





- cancellazioni polo/zero:

$$G_1(s) = \frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)(1+s/100)}$$

- polo dominante:

$$G_2(s) = \frac{8}{9}\frac{(1-s/8)}{(1+s)}$$

- cancellazione non consigliata dello zero con parte reale positiva:

$$G_3(s) = \frac{8}{9}\frac{1}{(1+s)}$$

PROCEDURA ERRATA

$$G(s) = \frac{-10\,(s+\cancel{10})(s\cancel{-8})}{(s+1)(s+\cancel{100})(s\cancel{+9})} \simeq \frac{-10}{s+1}$$

PROCEDURA CORRETTA

$$G(s) = \frac{-10 \cdot 10\left(1+\frac{s}{10}\right)(-8)\left(1-\frac{s}{8}\right)}{(1+s)\,100\left(1+\frac{s}{100}\right)9\left(1+\frac{s}{9}\right)}$$

$$= \frac{-10 \cdot 10\,(-8)}{100 \cdot 9} \cdot \frac{\cancel{\left(1+\frac{s}{10}\right)}\cancel{\left(1-\frac{s}{8}\right)}}{(1+s)\cancel{\left(1+\frac{s}{100}\right)}\cancel{\left(1+\frac{s}{9}\right)}} \simeq \frac{8}{9}\,\frac{1}{1+s}$$

$$\downarrow$$

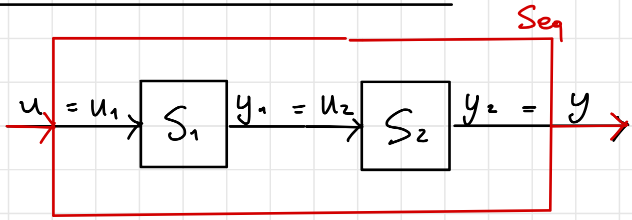
$$\frac{8}{9} > 0 \;!$$

7) SCHEMI A BLOCCHI

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \Rightarrow G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \Rightarrow G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

a) CONFIGURAZIONE IN SERIE



I) FORMA DI STATO

- $u_1 = u$
- $u_2 = y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 = C_1 x_1 + D_1 u$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 (C_1 x_1 + D_1 u) \\ y = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u) \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 D_1 & A_2 \end{bmatrix}}_{A_{eq}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix}}_{B_{eq}} u \quad , \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix}}_{C_{eq}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} D_2 D_1 \end{bmatrix}}_{D_{eq}} u$$

PROPRIETÀ

- $n = n_1 + n_2$ (ORDINI DEI SISTEMI)
- A_{eq} È TRIANGOLARE A BLOCCHI, CIOÈ

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ B_2 D_1 & \boxed{A_2} \end{bmatrix}$$

Autovalori di A_{eq} =

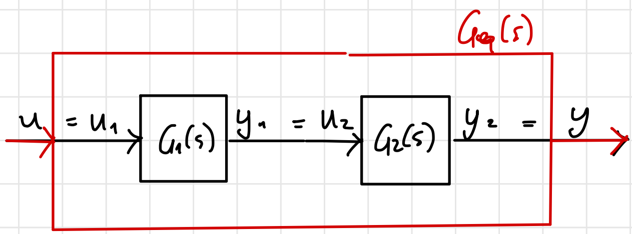
. Autovalori di A_1

e

. Autovalori di A_2

- S_{eq} È AS. STABILE $\iff$ S_1 E S_2 SONO AS. STABILI

II) FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)\, U_2(s) = G_2(s)\, Y_1(s)$$

$$\overset{!}{=} G_2(s)\left(G_1(s)\, U_1(s)\right)$$

$$\overset{!}{=} G_2(s)\, G_1(s)\, U(s)$$

$$\Rightarrow \quad G_{eq}(s) = G_1(s)\, G_2(s) = \frac{N_1(s)\, N_2(s)}{\underbrace{D_1(s)\, D_2(s)}_{D_{eq}(s) \text{ in generale}}}$$

ESEMPIO

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases} \Rightarrow \quad sX_1(s) = -2X_1(s) - U_1(s)$$

$$\downarrow$$

$$X_1(s) = \frac{-1}{s+2} U_1(s) \Rightarrow Y_1(s) = X_1(s) + U_1(s) = \left(\frac{-1}{s+2} + 1\right) U_1(s) = \boxed{\frac{s+1}{s+2}} U_1(s)$$

$$\frac{s+1}{s+2} \to G_1(s)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad sX_2(s) = -X_2(s) + U_2(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y_2(s) = X_2(s) = \boxed{\frac{1}{s+1}} U_2(s)$$

$$\frac{1}{s+1} \to G_2(s)$$

$$u = u_1 \longrightarrow \boxed{G_1} \xrightarrow{y_1 = u_2} \boxed{G_2} \longrightarrow y$$

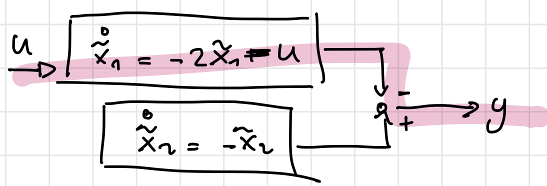
$$G_{eq}(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$u_1 = u$$

$$u_2 = y_1 = x_1 + u_1 = x_1 + u$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 + u \\ y = y_2 = x_2 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 \\ \tilde{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$



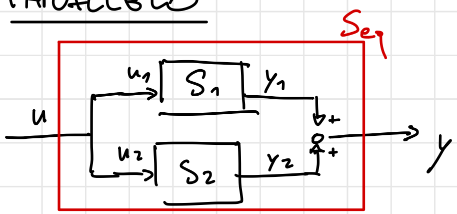
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2\tilde{x}_1 - u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -2x_1 \cancel{-u} - x_2 + x_1 \cancel{+u} = -(x_1 + x_2) = -\tilde{x}_2 \end{cases}$$

$$y = x_2 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$$

ANCHE SE $G_1(s)$ E $G_2(s)$ SONO IN **FORMA MINIMA** POSSONO AVVENIRE CANCELLAZIONI NEL CALCOLO DI $G_{eq}(s)$ SE $N_1(s)$ E $D_2(s)$ (E/O SE $N_2(s)$ E $D_1(s)$) HANNO FATTORI IN COMUNE.

!
- SE LE SINGOLARITÀ CHE SI CANCELLANO HANNO $\mathrm{Re}(\cdot) < 0$
  $\Rightarrow$ CANCELLAZIONI "LECITE"
- SE LE SINGOLARITÀ CHE SI CANCELLANO HANNO $\mathrm{Re}(\cdot) \geq 0$
  $\Rightarrow$ CANCELLAZIONI "NON LECITE"

b) PARALLELO



A) IN SPAZIO DI STATO

- $u_1 = u_2 = u$
- $y = y_1 + y_2 = C_1 x_1 + D_1 u + C_2 x_2 + D_2 u$
  $= C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u$

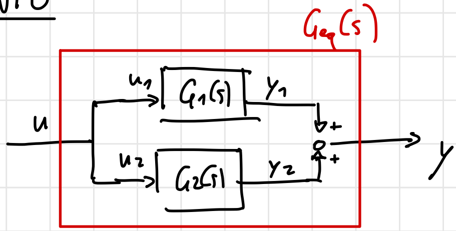
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{vmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + (D_1 + D_2) u$$

PROPRIETÀ:
- $n_{eq} = n_1 + n_2$
- $\Lambda_{eq} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ (AUTOVALORI)
- S_{eq} È AS STABILE $\Leftrightarrow$ S_1 E S_2 SONO AS. STABILI

II) FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$
$$= G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s)$$
$$= \left(G_1(s) + G_2(s)\right)U(s)$$

$\Rightarrow G_{eq}(s) = G_1(s) + G_2(s)$

$$G_{eq}(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)\,D_2(s)}$$

$\Rightarrow$ POSSONO ESSERCI CANCELLAZIONI SE E SOLO SE

$\exists$ POLI DI $G_1(s)$ = POLI DI $G_2(s)$

!
- SE LE SINGOLARITÀ CHE SI CANCELLANO HANNO $\mathrm{Re}(\cdot) < 0$
  $\Rightarrow$ CANCELLAZIONI "LECITE"
- SE LE SINGOLARITÀ CHE SI CANCELLANO HANNO $\mathrm{Re}(\cdot) \geq 0$
  $\Rightarrow$ CANCELLAZIONI "NON LECITE"

ESEMPIO

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases} \Rightarrow G_1(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

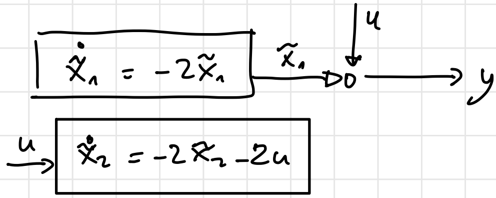
$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow G_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow G_{eq}(s) = \frac{s+1+1}{s+2} = \frac{s+2}{s+2} = 1$$

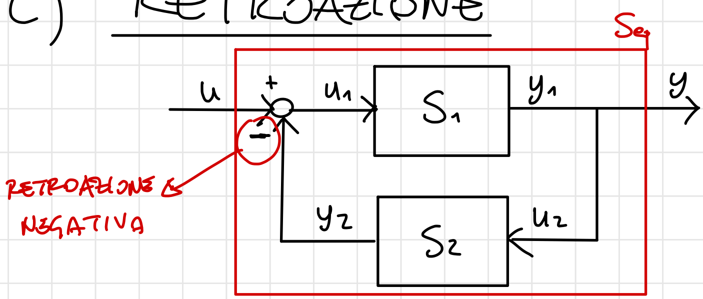
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

$\tilde{x}_1 = x_1 + x_2$
$\tilde{x}_2 = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2(x_1+x_2) \cancel{-u} \cancel{+u} = -2\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -2x_1 - u + 2x_2 - u = -2(x_1-x_2) - 2u = -2\tilde{x}_2 - 2u \\ y = \tilde{x}_1 + u \end{cases}$$



c) RETROAZIONE



I) FORMA DI STATO ($D_1 = 0$)

- $u_1(t) = u(t) - y_2(t) = u(t) - (C_2 x_2(t) + D_2 u_2(t))$
  $= u(t) - (C_2 x_2(t) + D_2 y_1(t))$
  $= u(t) - (C_2 x_2(t) + D_2 C_1 x_1(t))$
- $u_2(t) = y_1(t) = C_1 x_1(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u(t) - B_1 C_2 x_2(t) - B_1 D_2 C_1 x_1(t) \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1(t) \\ y(t) = y_1(t) = C_1 x_1(t) \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

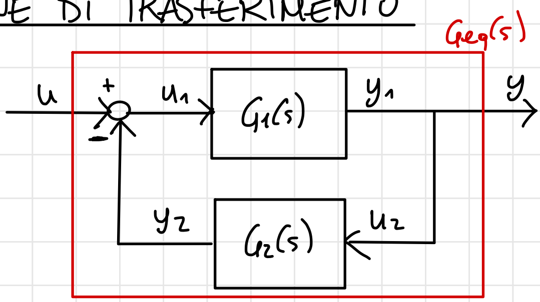
$$\dot{x} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_2 C_1 & -B_1 C_2 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right]}_{A_{eq}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{eq}} u \quad , \; y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x + [0] \cdot u(t)$$

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 C_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{NON È TRIANGOLARE A BLOCCHI}$$

$\Rightarrow$ Gli autovalori di A_{eq} non sono ereditati da A_1 e A_2

$$\Rightarrow \boxed{n = n_1 + n_2}$$

II) FUNZIONE DI TRASFERIMENTO



$$Y(s) = Y_1(s) = G_1(s) U_1(s) = G_1(s) \big(U(s) - Y_2(s) \big)$$
$$= G_1(s) \big(U(s) - G_2(s) Y(s) \big)$$

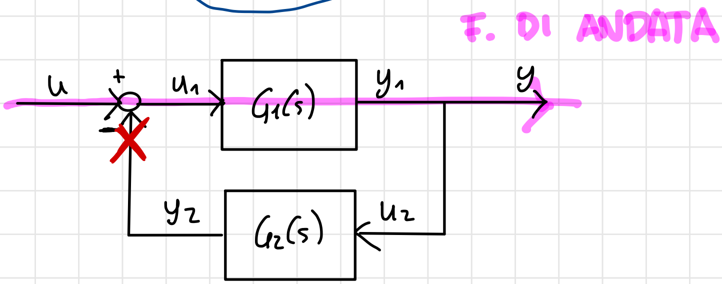
$$\Rightarrow Y(s) = -G_1(s) G_2(s) Y(s) + G_1(s) U(s)$$

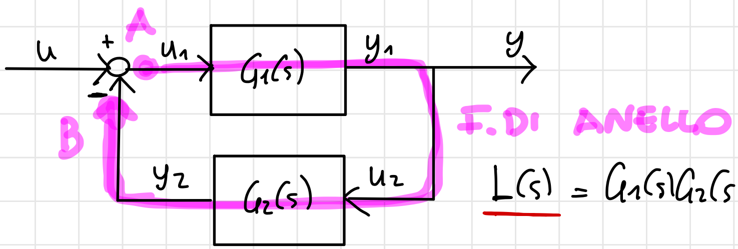
$$\Rightarrow \left(1 + G_1(s)G_2(s)\right)Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = G_{eq}(s)$$

$$= \frac{\text{F. DI ANDATA}}{1 + \text{F. DI ANELLO (APERTO)}}$$

RETROAZIONE NEGATIVA





$\underline{L(s)} = G_1(s)G_2(s)$

$$G_{eq}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} = \frac{N_1(s)/D_1(s)}{1+\frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)/D_1(s)}{\frac{N_1(s)N_2(s)+D_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}}$$

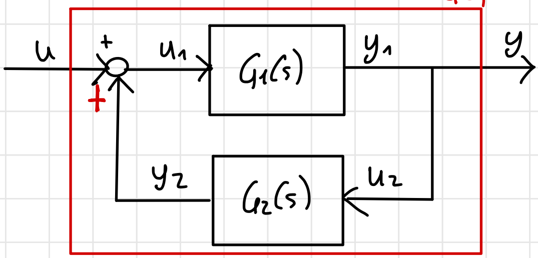
$$= \frac{N_1(s)D_2(s)}{\boxed{N_1(s)N_2(s)+D_1(s)D_2(s)}} \Rightarrow \text{POLINOMIO CARATTERISTICO DEL SISTEMA RETROAZIONATO!}$$

$\Rightarrow$ CI SONO CANCELLAZIONI SE E SOLO SE $N_1(s)$ HA FATTORI IN COMUNE CON $D_2(s)$

$\Rightarrow$ $G_1(s)$ HA ZERI IN COMUNE CON I POLI DI $G_2(s)$

$\Rightarrow$ ATTENZIONE ALLE CANCELLAZIONI NON LECITE ($\mathrm{Re}(s) \geq 0$)

III) FDT PER RETROAZIONE POSITIVA



$$Y(s) = G_1(s)\left(U(s) + G_2(s)Y(s)\right) = G_1(s)G_2(s)Y(s) + G_1(s)U(s)$$

$$\left(1 - G_1(s)G_2(s)\right)Y(s) = G_1(s)U(s)$$

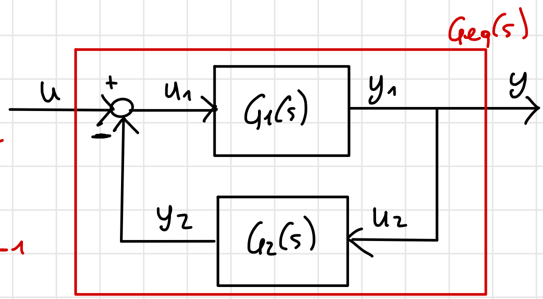
$$\Rightarrow G_{eq}(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{\text{F. DI. ANDATA}}{1 - L(s)}$$

RETROAZIONE POSITIVA

D) ESEMPIO

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1^{\circ} = -2$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2^{\circ} = -1$$



$$u_1 = u - x_2$$
$$u_2 = y_1 = x_1 + u_1 = x_1 + u - x_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u + x_2 = -2x_1 + x_2 - u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \quad (-x_2+) \\ y = x_1 + u_1 = x_1 + u - x_2 = x_1 - x_2 + u \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & +1 \\ +1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x + u$$

AUTOVALORI:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1) \to \boxed{\lambda_2 = -1}, \quad \lambda_1 = -3$$

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases} \Rightarrow sX_1(s) = -2X_1(s) - U_1(s)$$

$$\Rightarrow (s+2)X_1(s) = -U_1(s)$$

$$\Rightarrow X_1(s) = \frac{-1}{s+2} U_1(s)$$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$Y_1(s) = X_1(s) + U_1(s) = \frac{s+2-1}{s+2} U_1(s)$$

$$= \boxed{\frac{s+1}{s+2}} U_1(s) \to G_1(s)$$

$$Y_2(s) = X_2(s) = \boxed{\frac{1}{s+1}} U_2(s) \to G_2(s)$$

CANCELLAZIONE $\Rightarrow s = -1$ NON È POLO DELLA $G_{eq}(s)$!

$$G_{eq}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{s+1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+2}} = \frac{s+1}{s+3} \rightsquigarrow \text{POLO IN } s = -3$$

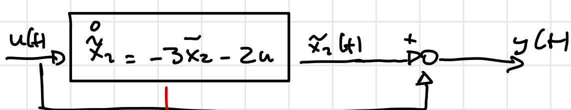
$\Downarrow$

Autovalore $\lambda_1 = -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \\ y = x_1 - x_2 + u \end{cases} \qquad \begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \tilde{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -2x_1 + x_2 - \cancel{u} + x_1 - 2x_2 + \cancel{u} = -x_1 - x_2 = -\tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -2x_1 + x_2 - u - x_1 + 2x_2 - u = -3(x_1 - x_2) - 2u = -3\tilde{x}_2 - 2u \\ y = \tilde{x}_2 + u \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1} \rightsquigarrow \lambda_2 = -1$$



$$\boxed{\lambda_1 = -3}$$

8) RISPOSTA DI UN SISTEMA A INGRESSI GENERICI

a) INGRESSO ESPONENZIALE

$u(t) = \bar{u}\, e^{\bar{\lambda} t}$ $t \geq 0$ $\bar{\lambda}$ NON È UN AUTOVALORE DI A

ES: $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$u(t) = e^{-2t} \rightsquigarrow U(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$Y(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{\alpha_1}{s+1} + \dfrac{\alpha_2}{s+2} \rightsquigarrow (\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t})\, \text{sca}(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$u(t) = \bar{u}\, e^{\bar{\lambda} t}$ $\bar{\lambda}$ non è un autovalore di A

? $\exists\, x(0) = \bar{x}$ t.c. $y(t) = \bar{y}\, e^{\bar{\lambda} t}$

$x(t) = \bar{x}\, e^{\bar{\lambda} t}$

$\Downarrow$

$\dot{x}(t) = \bar{\lambda} \bar{x} \cancel{e^{\bar{\lambda} t}} = A \bar{x} \cancel{e^{\bar{\lambda} t}} + B \bar{u} \cancel{e^{\bar{\lambda} t}}$

$(\bar{\lambda} I - A)\bar{x} = B\bar{u}$ $(\bar{\lambda} I - A)$ è invertibile

$\bar{x} = (\bar{\lambda} I - A)^{-1} B \bar{u}$

$y(t) = Cx(t) + Du(t) = C\bar{x} e^{\bar{\lambda} t} + D\bar{u} e^{\bar{\lambda} t}$

$= \boxed{(C(\bar{\lambda} I - A)^{-1} B + D)\bar{u}}\, e^{\bar{\lambda} t}$

$\alpha_2 = \bar{y}$

$= G(\bar{\lambda})\, \bar{u}\, e^{\bar{\lambda} t}$

Per il principio di sovr. effetti

se $x(0) = \bar{x} \Rightarrow y(t) = G(\bar{\lambda})\bar{u}e^{\lambda t} = \tilde{y}(t)$

$x(0) \neq \bar{x} \Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$= \underbrace{e^{At}\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\bar{x}e^{\lambda t}} + e^{At}(x(0)-\bar{x})$$

$$e^{At}(x(0)-\bar{x}) \to 0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$= \tilde{y}(t) + Ce^{At}(x(0)-\bar{x})$$

TEOREMA 1 SI APPLICHI UN INGRESSO $u(t) = \bar{u}e^{\bar{\lambda}t}$ A UN SISTEMA AVENTE $G(s)$ COME F.D.T. DOVE $\lambda \in \mathbb{C}$ NON È UN AUTOVALORE DI A.
ALLORA:

(i) $\exists\ x(0) = \bar{x} = (\bar{\lambda}I - A)^{-1}B\bar{u}$ T.C. $y(t) = \tilde{y}(t) = G(\bar{\lambda})\bar{u}e^{\bar{\lambda}t}$

(ii) SE SISTEMA È AS. STABILE, SE $x(0) \neq \bar{x} \Rightarrow y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \tilde{y}(t)$

OSSERVAZIONE

I) SE λ È UN POLO

ES 1) $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad u(t) = e^{-t} \rightsquigarrow U(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \rightsquigarrow y(t) = te^{-t}$$

ES2) $G(s) = \frac{1}{s}$ $\quad u(t) = e^{0t}\,sca(t) = sca(t) \rightsquigarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s^2} \rightsquigarrow y(t) = t\,sca(t)$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau = t\,sca(t)$$

II) Se $\bar{\lambda}$ = zero di $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

$$u(t) = \bar{u}\,e^{\bar{\lambda}t} \quad \text{dove} \quad G(\bar{\lambda}) = \frac{N(\bar{\lambda})}{D(\bar{\lambda})} = 0$$

$\tilde{y}(t) = 0$ $\boxed{\text{PROPRIETÀ BLOCCANTE DEGLI ZERI}}$

b) <u>INGRESSI SINUSOIDALI</u>

$$u(t) = \bar{u}\cos(\omega t) = \frac{\bar{u}}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) = u_a(t) + u_b(t)$$

$\bar{\lambda} \Rightarrow j\omega$ NON AUTOVALORE DI A

$$u_a(t) = \frac{\bar{u}}{2}e^{j\omega t} \Rightarrow \exists\, x_a(0) = (j\omega I - A)^{-1}B\frac{\bar{u}}{2} \Rightarrow y(t) = \tilde{y}_a(t) = G(j\omega)\frac{\bar{u}}{2}e^{j\omega t}$$

$$u_b(t) = \frac{\bar{u}}{2}e^{-j\omega t} \Rightarrow \exists\, x_b(0) = (-j\omega I - A)^{-1}B\frac{\bar{u}}{2} \Rightarrow y(t) = \tilde{y}_b(t) = \underbrace{G(-j\omega)}_{G^*(j\omega)}\frac{\bar{u}}{2}e^{-j\omega t}$$

IL P.S. ~~EFFETTI~~ SE $x(0) = \bar{x}_a + \bar{x}_b$

$$\Rightarrow y(t) = \tilde{y}(t) = \tilde{y}_a(t) + \tilde{y}_b(t)$$

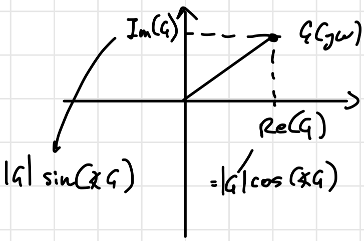
$$= G(j\omega)\frac{\bar{u}}{2}e^{j\omega t} + G(-j\omega)\frac{\bar{u}}{2}e^{-j\omega t}$$

$$\boxed{G(-j\omega) = G^*(j\omega) = Re(G(j\omega)) - j\,Im(G(j\omega))}$$

$$= \frac{\bar{u}}{2}\left\{\left(Re(G) + j\,Im(G)\right)e^{j\omega t} + \left(Re(G) - j\,Im(G)\right)e^{-j\omega t}\right\}$$

$j^2 = -1 \quad j = -\frac{1}{j}$

$$= \frac{\bar{u}}{2}\left\{Re(G)\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) \overset{-\frac{1}{j}}{+j}\, Im(G)\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right\}$$



$$= \bar{u}\left\{Re(G)\underbrace{\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)}_{\cos(\omega t)} - Im(G)\underbrace{\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)}_{\sin(\omega t)}\right\}$$

$$= \bar{u}\left\{Re(G)\cos(\omega t) - Im(G)\sin(\omega t)\right\}$$

$$= \bar{u}\,|G(j\omega)|\left\{\cos(∢G)\cos(\omega t) - \sin(∢G)\sin(\omega t)\right\}$$

$$= \bar{u}\,|G(j\omega)|\cos(\omega t + ∢G)$$

TEOREMA 2 SI APPLICHI UN INGRESSO $u(t) = \bar{u}\cos(\omega t)$ A UN SISTEMA AVENTE FDT $G(s)$ DOVE $\pm j\omega$ NON SIA AUTOVALORE DI A. ALLORA:

(i) $\exists\, x(0) = \bar{x}$ t.c. $y(t) = \tilde{y}(t) = \bar{u}\,|G(j\omega)|\cos(\omega t + ∢G(j\omega))$

(ii) SE SISTEMA È AS. STABILE $\forall\, x(0) \neq \bar{x}$

$$y(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \tilde{y}(t)$$

c) SEGNALI PERIODICI $\quad u(t) = u(t+T) \quad \forall t$

Grazie alla serie di Fourier: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t)$

$$u_n(t) = U_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

X TEOREMA 1 $\quad \exists$ C.I. $\bar{x}_n$ T.C. SE $x(0) = \bar{x}_n$

$$\Rightarrow y(t) = \tilde{y}_n(t) = G(jn\omega_0) U_n e^{jn\omega_0 t}$$

X PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

$\exists \ \bar{x}$ T.C. SE $x(0) = \bar{x}$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{y}_n(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(jn\omega_0) U_n e^{jn\omega_0 t}}$$

SERIE DI FOURIER

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow$$

$y(t)$ SCOMPONIBILE IN SERIE DI FOURIER CON COEFF. DI FOURIER

$$Y_n = G(jn\omega_0) U_n$$

! $y(t)$ È PERIODICO CON LO STESSO PERIODO DI $u(t)$!!

TEOREMA 3 $\quad$ SI APPLICHI UN INGRESSO $u(t)$ PERIODICO $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{jn\omega_0 t}$ A UN SISTEMA AVENTE FDT $G(s)$ DOVE $\pm jn\omega_0$ NON SIANO AUTOVALORI DI A. ALLORA:

(i) $\exists\, x(0) = \bar{x}$ t.c. $\quad y(t) = \tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(jn\omega_0) U_n e^{jn\omega_0 t}$

(ii) SE SISTEMA È AS. STABILE $\forall x(0) \neq \bar{x}$

$$y(t) \xrightarrow{t \to +\infty} \tilde{y}(t)$$

d) SEGNALI DOTATI DI TRASFORMATA DI FOURIER

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$u_\omega(t) = U(j\omega)\, e^{j\omega t}$$ $\rightsquigarrow \lambda = j\omega$ NON AUTOVALORE DI A

$\rightarrow$ TEO 1 $\quad \exists\ x(0) = \bar{x}_\omega$ T.C.

$$y(t) = y_\omega(t) = G(j\omega)\, U(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

$$\exists\ \bar{x} \quad \text{t.c.} \quad x(0) = \bar{x} \Rightarrow y(t) = \bar{y}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\boxed{G(j\omega)\, U(j\omega)}}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega$$

- $y(t)$ È FOURIER-TRASFORMABILE
- LA TRASF. DI FOURIER DI $y(t)$ È

$$Y(j\omega) = G(j\omega)\, U(j\omega)$$

N.B. $Y(s) = G(s)\, U(s)$

SE $u(t)$ ERA PRIVO DI COMPONENTI ARMONICHE IN UNA BANDA $[\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}]$

$\Rightarrow U(j\omega) = 0 \quad$ PER $\omega \in [\bar{\omega}, \bar{\bar{\omega}}]$

$\Rightarrow Y(j\omega) = G(j\omega)\, U(j\omega) = 0$

$G(j\omega)$: RISPOSTA IN FREQUENZA

TEOREMA 4 Si applichi un ingresso $u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$ a un sistema avente FDT $G(s)$ dove $\pm j\omega$ non siano autovalori di A. Allora:

(i) $\exists\ x(0)=\bar{x}$ t.c. $y(t) = \tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(j\omega)\, U(j\omega)}_{Y(j\omega)}\, e^{j\omega t}\, d\omega$

(ii) Se sistema è AS. stabile $\forall\, x(0)\neq\bar{x}$

$$y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \tilde{y}(t)$$

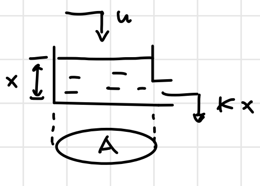
DISEGNEREMO I GRAFICI DI $G(j\omega)$ ATTRAVERSO I

GRAFICI DI:
- MODULO $|G(j\omega)|$
- FASE $\angle G(j\omega)$

} IN FUNZIONE DI ω

⇒ DIAGRAMMI DI BODE

ESEMPIO: SERBATOIO



$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{A}(-kx+u) \\ y = x \end{cases}$$

$$sX(s) = -\frac{k}{A}X(s) + \frac{1}{A}U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = X(s) = \frac{1/A}{s+k/A}\,U(s)$$

COSTANTE DI TRASFERIMENTO

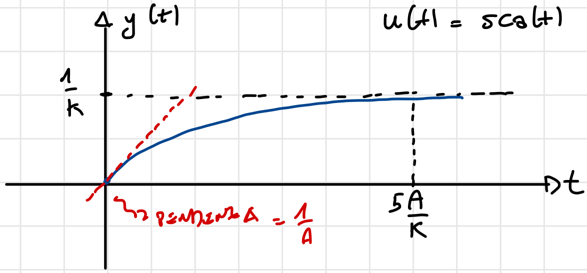
$$\Rightarrow G(s) = \frac{1/A}{s+\frac{k}{A}}$$ ⇒ FORMA DI NYQUIST

$s + p_i$ $\quad p_i = \frac{k}{A}$ ⇒ POLO: $s = -p_i = -\frac{k}{A}$

$$= \frac{1/A}{\frac{k}{A}\left(1+\frac{A}{k}s\right)} = \frac{1/k}{1+\frac{A}{k}s}$$

$\mu = G(0)$

$1 + sT \quad T = \frac{A}{k} \Rightarrow T_{a2\%} = 5T = 5\frac{A}{k}$



$u(t) = sca(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1/A}{\left(s+\frac{K}{A}\right)s}$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{1}{A}}{s+\frac{K}{A}} = 0$$

$$\mathcal{L}(\dot{y}(t)) = sY(s) - y(0) = sY(s) = \frac{1/A}{s+K/A}$$

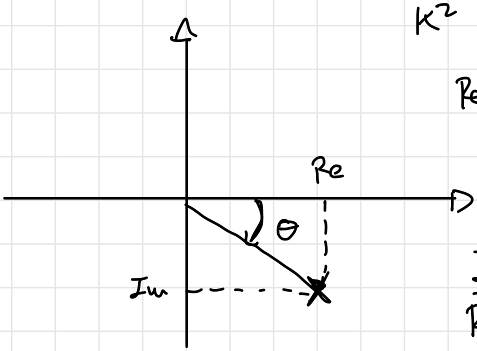
$$\underline{\dot{y}(0)} = \lim_{s\to\infty} \frac{s\,\frac{1}{A}}{s+\frac{K}{A}} = \frac{1}{A}$$ COSTANTE DI TRASFERIMENTO

IN GENERALE LA COSTANTE DI TRASFERIMENTO È IL VALORE DELLA "PIÙ PICCOLA" DERIVATA NON NULLA DELLA RISPOSTA ALLO SCALINO.

$$G(s) = \frac{1/K}{1+s\frac{A}{K}} \qquad G(j\omega) = \frac{1/K}{1+j\omega\frac{A}{K}} \cdot \frac{1-j\omega\frac{A}{K}}{1-j\omega\frac{A}{K}}$$

$$= \frac{1}{K\left(1+\omega^2\frac{A^2}{K^2}\right)} \cdot \left(1 - j\omega\frac{A}{K}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1/K}{\sqrt{1+\omega^2\frac{A^2}{K^2}}}$$



$$Re(G) = |G|\cos(\theta)$$

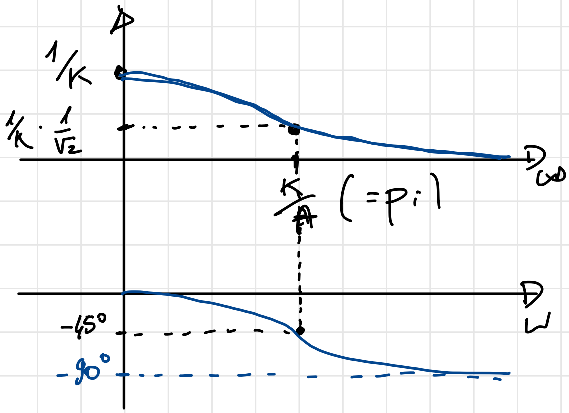
$$Im(G) = |G|\sin(\theta)$$

$$\frac{Im(G)}{Re(G)} = \frac{|G|\sin(\theta)}{|G|\cos(\theta)} = tg(\theta)$$

? $\theta = \operatorname{artg}\left(\frac{Im(G)}{Re(G)}\right) = \operatorname{artg}\left(-\omega\frac{A}{K}\right) = -\operatorname{artg}\left(\omega\frac{A}{K}\right)$

$\Rightarrow |G(j\omega)| = \dfrac{1/K}{\sqrt{1+\omega^2\frac{A^2}{K^2}}}$

$\measuredangle G(j\omega) = -\operatorname{artg}\left(\omega\frac{A}{K}\right)$



9. Tracciamento dei diagrammi di Bode

$(j\omega)^2 = j^2\omega^2 = -\omega^2$

a) Forma di Bode

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)} \frac{\prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

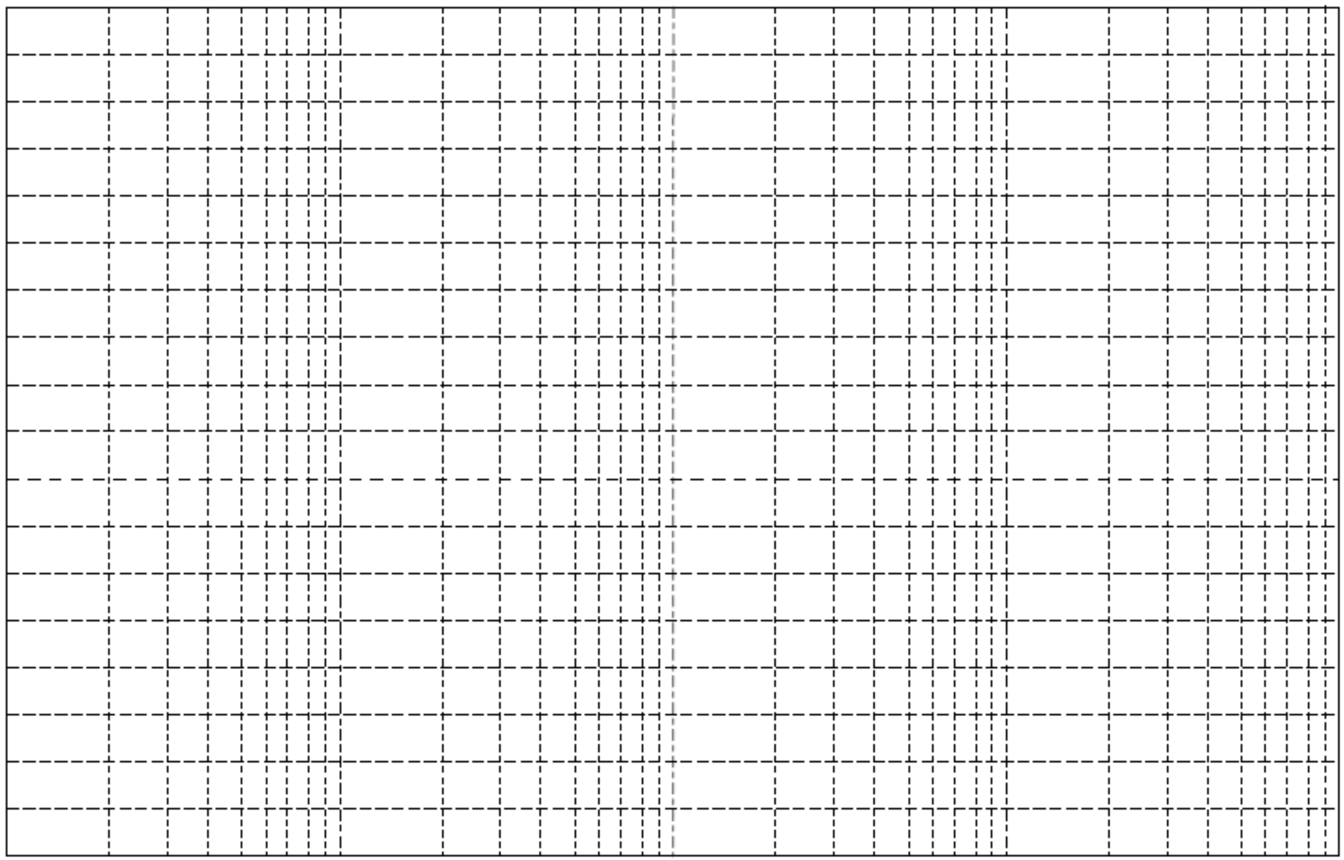
$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i)}{\prod_i (1 + j\omega T_i)} \frac{\prod_i (1 - \omega^2/\alpha_{ni}^2 + 2j\zeta_i \omega/\alpha_{ni})}{\prod_i (1 - \omega^2/\omega_{ni}^2 + 2j\xi_i \omega/\omega_{ni})}$$

Diagrammi di Bode:

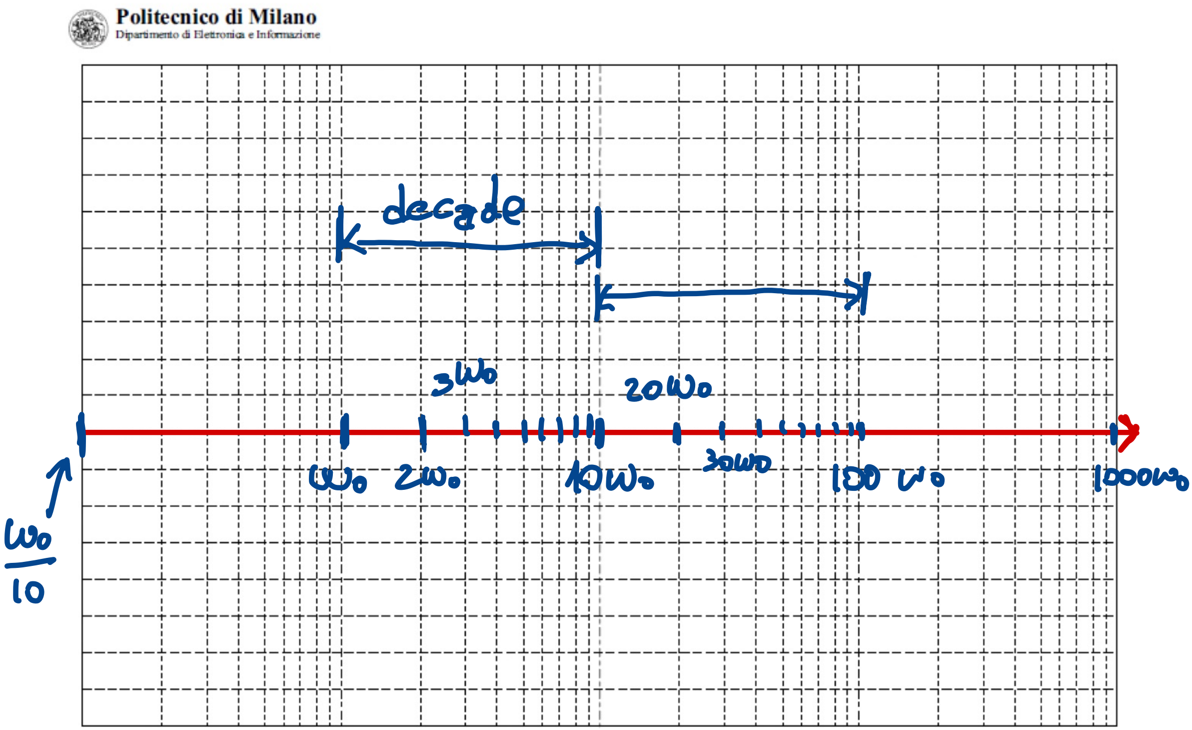
- del modulo: $|G(j\omega)|$
- della fase: $\measuredangle G(j\omega)$

b) Carta semilogaritmica

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



c) Asse delle ascisse



Si indica il valore di ω in scala logaritmica in base 10.

I) INDICARE IL "FONDO-SCALA" ω_0 SOTTO LA QUALE "NON ACCADE NULLA" $\omega_0 = 10^K$ $K \in \mathbb{Z}$

II) I VALORI DI $\omega \geq \omega_0$ SI INDICANO CON UNA DISTANZA "LINEARE" PROPORZIONALE A $\log_{10} \frac{\omega}{\omega_0}$

- $\log_{10} \frac{10\,\omega_0}{\omega_0} = \log_{10} 10 = 1$
- $\log_{10} \frac{100\,\omega_0}{\omega_0} = \log_{10} 100 = 2$

$\Rightarrow$ INDICARE $10\,\omega_0,\ 100\,\omega_0, \dots$

III) I VALORI "INTERMEDI" SONO INDICATI GIÀ SULLA CARTA SEMILOGARITMICA

d) DIAGRAMMA DEL MODULO

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1+j\omega\tau_i)}{\prod_i (1+j\omega T_i)} \frac{\prod_i \left(1-\frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2} + 2j\varsigma_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}}\right)}{\prod_i \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}}\right)}$$

$\Rightarrow$ SI INDICA, SULL'ASSE DELLE ORDINATE,

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = |\mu|_{dB} + \sum_i |1+j\omega\tau_i|_{dB} + \sum_i \left|1-\frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2} + 2j\varsigma_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}}\right|_{dB}$$

$$- |(j\omega)^g|_{dB} - \sum_i |1+j\omega T_i|_{dB} - \sum_i \left|1-\frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}}\right|_{dB}$$

- $|\mu|_{dB} = 20\log_{10}|\mu|$
- $|j\omega^g|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega|^g = 20g\log_{10}(\omega)$
- $|1+j\omega\tau_i|_{dB} = 20\log_{10}|1+j\omega\tau_i|$
- $\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right|$

Devo
- imparare a tracciare il diagramma dei termini qui sopra
- imparare a tracciare la somma

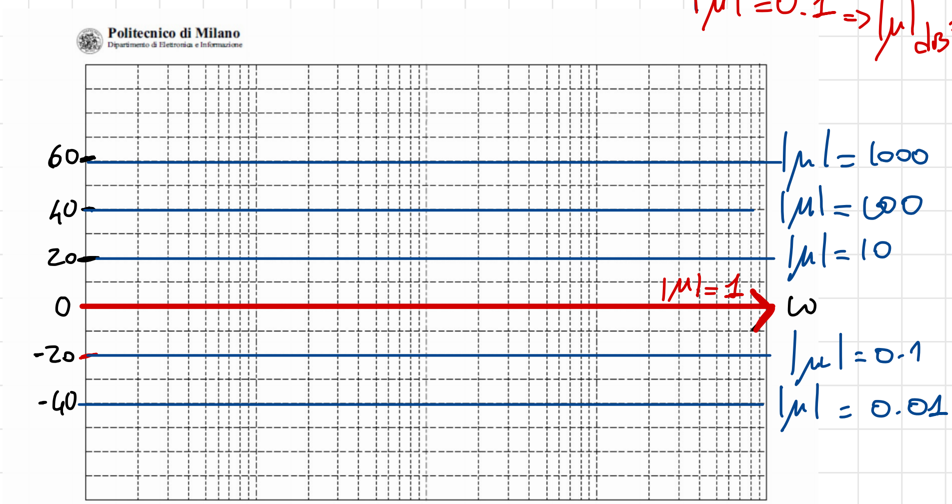
I) $G_1(s) = \mu$

$|G_1(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|\mu|$

$|\mu| = 1 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 0$

$|\mu| = 10 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 20$

$|\mu| = 0.1 \Rightarrow |\mu|_{dB} = -20$



II) ? $\Rightarrow |(j\omega)^g|_{dB} = 20\,g \log_{10}\omega$

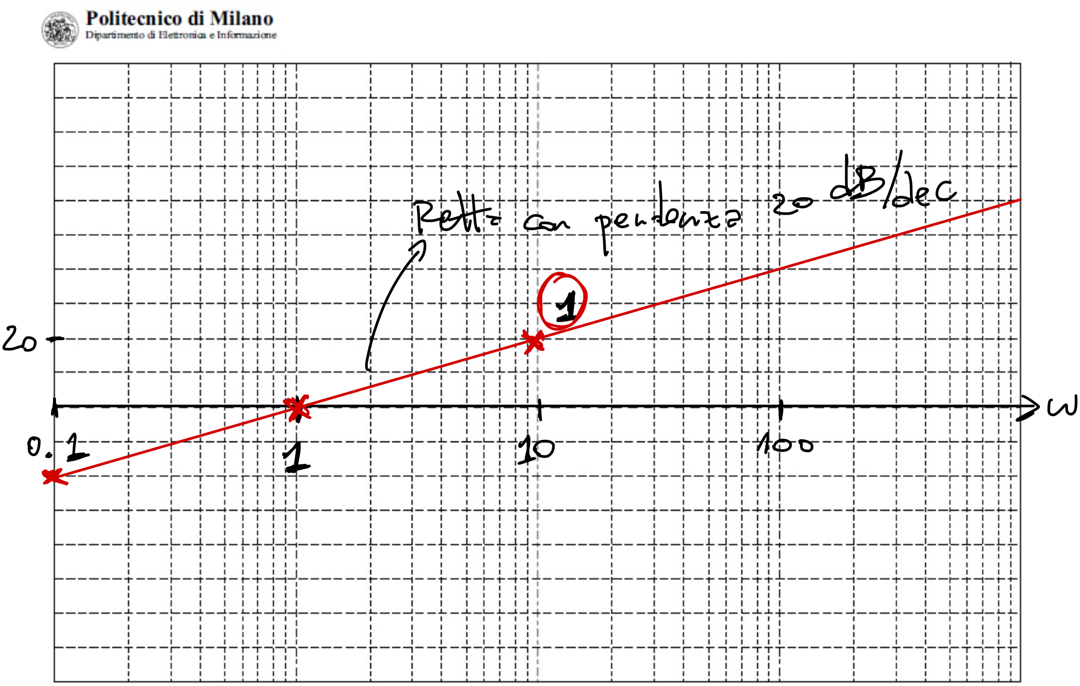
$G_2(s) = s$

$|G_2(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\omega \rightarrow$

$|G(j1)| = 20\log_{10}1 = 0$

$|G(j10)| = 20\log_{10}10 = 20$

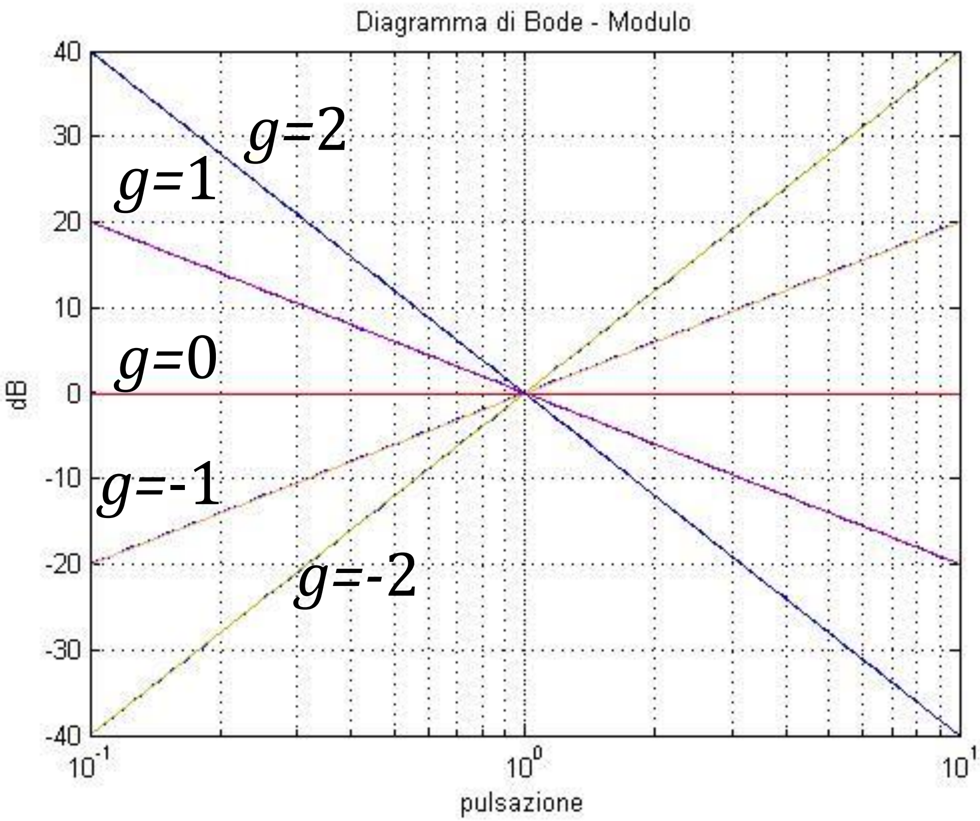
$|G(j0.1)| = 20\log_{10}0.1 = -20$



$$|G(j\omega)|_{dB} = -20g\log_{10}\omega$$

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \implies$$

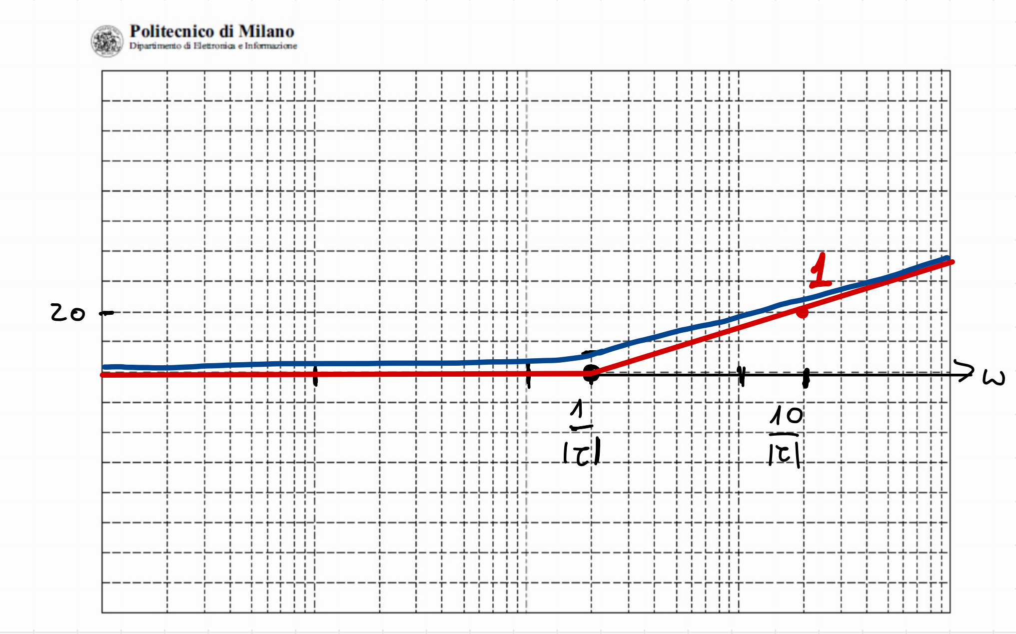
Retta di pendenza $-g$ che in $\omega = 1$ prende valore $= 0\,dB$



III) $G_3(s) = 1 + s\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau|$$

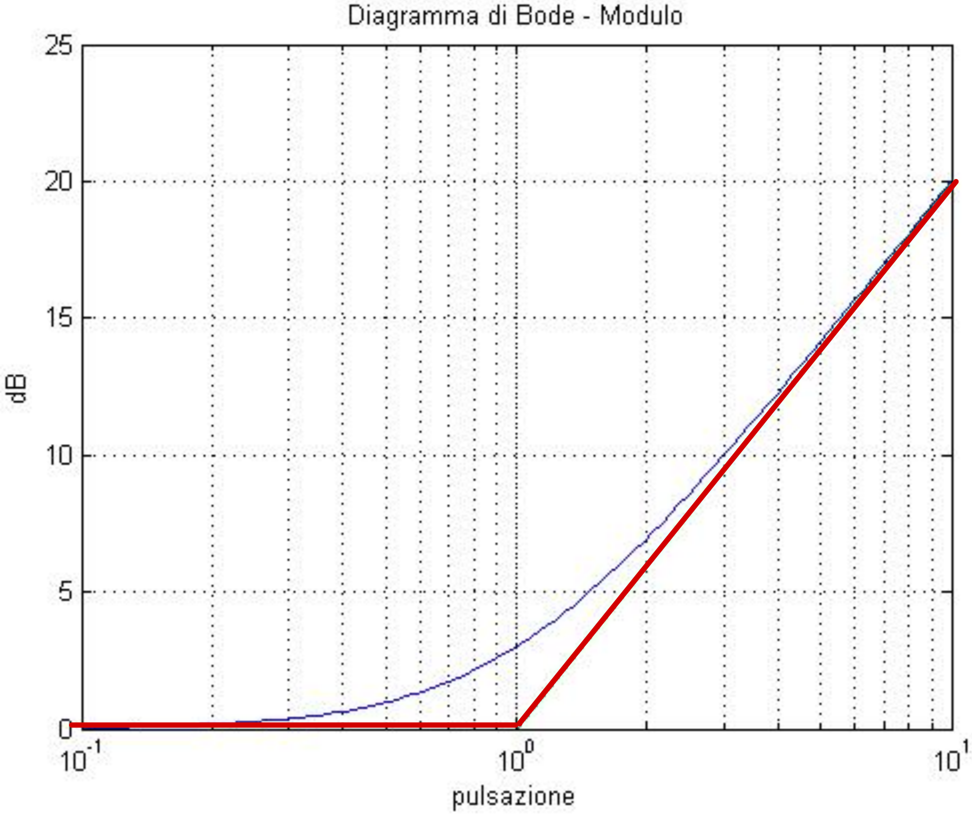
$$= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \begin{cases} 20 \log_{10} 1 = 0, & \omega \lesssim\ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log_{10}(\omega|\tau|) & \omega \gtrsim\gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$



$$|G(j \tfrac{1}{|\tau|})| = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{|\tau|^2} \tau^2} = 20 \log_{10} \sqrt{2}$$

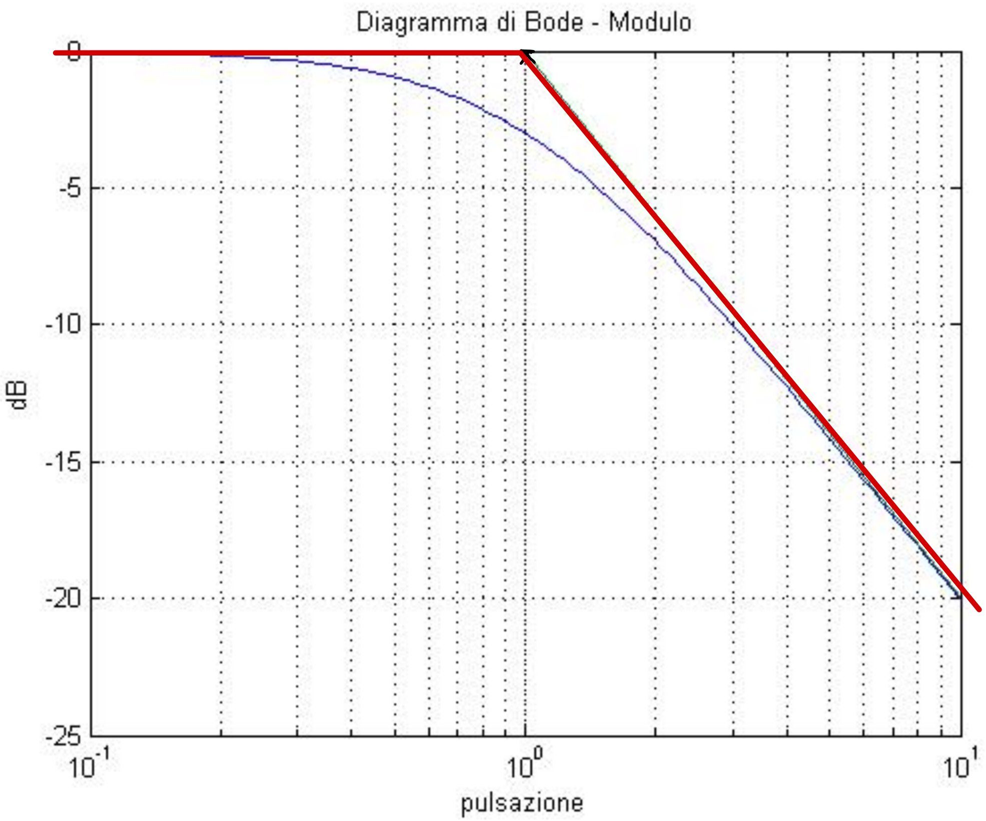
$$\simeq 3 \quad dB$$

$$G(s) = 1 + s \qquad \Rightarrow \frac{1}{|\tau|} = 1$$



$$G(s) = \frac{1}{1+s} \Rightarrow$$

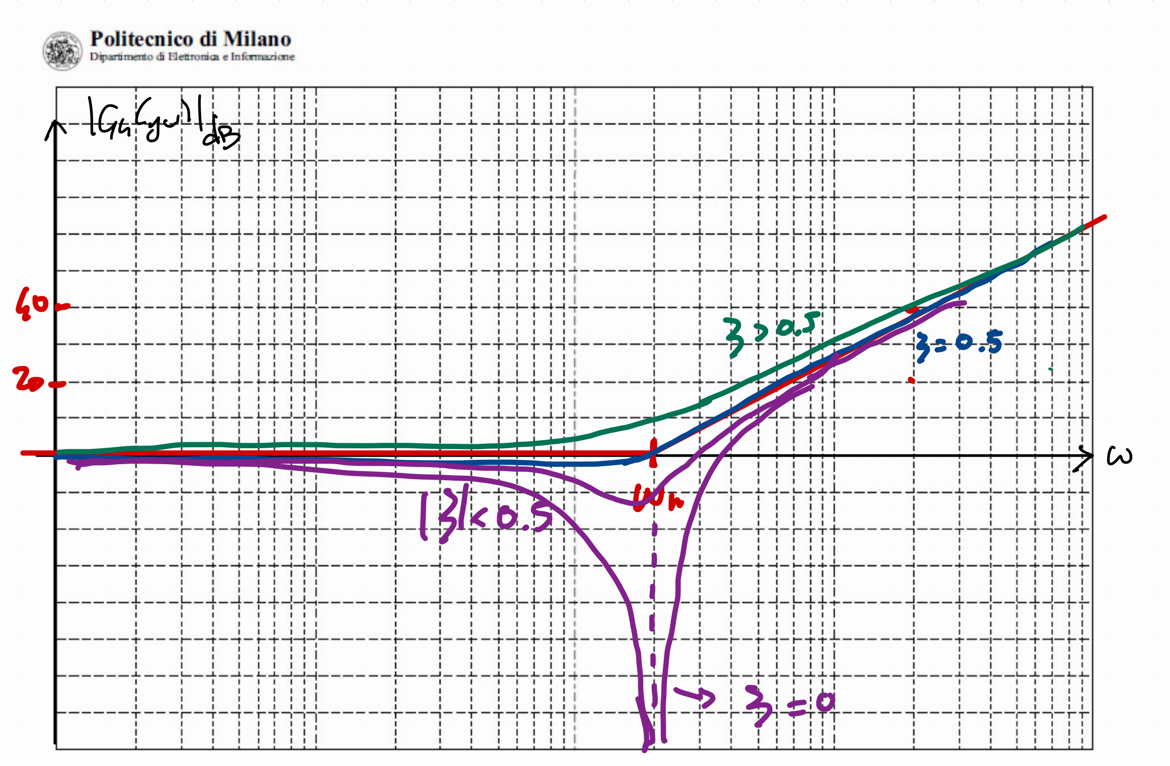
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\frac{1}{|1+j\omega|} = -20\log_{10}|1+j\omega|$$



IV) $G_4(s) = 1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

$$G_4(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$

$$|G_4(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = \begin{cases} 1|_{dB} = 0 & \omega \ll \omega_n \\ \left.\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|_{dB} = 40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n} & \omega \gg \omega_n \end{cases}$$



Se $\omega = \omega_n$

$$|G_4(j\omega_n)|_{dB} = 20\log_{10}\sqrt{\underbrace{\left(1-\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}\right)^2}_{=0} + 4\xi^2\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}} = 20\log_{10}2|\xi|$$

$|\xi| < 1$

Se $|\zeta| = 0.5 \Rightarrow |G_4(j\omega_n)|_{dB} = 20\log_{10} 1 = 0$

$|\zeta| > 0.5 \Rightarrow |G_4(j\omega_n)|_{dB} = 20\log_{10} 2|\zeta| > 0$

$|\zeta| < 0.5 \Rightarrow |G_4(j\omega_n)|_{dB} = 20\log_{10} 2|\zeta| < 0$

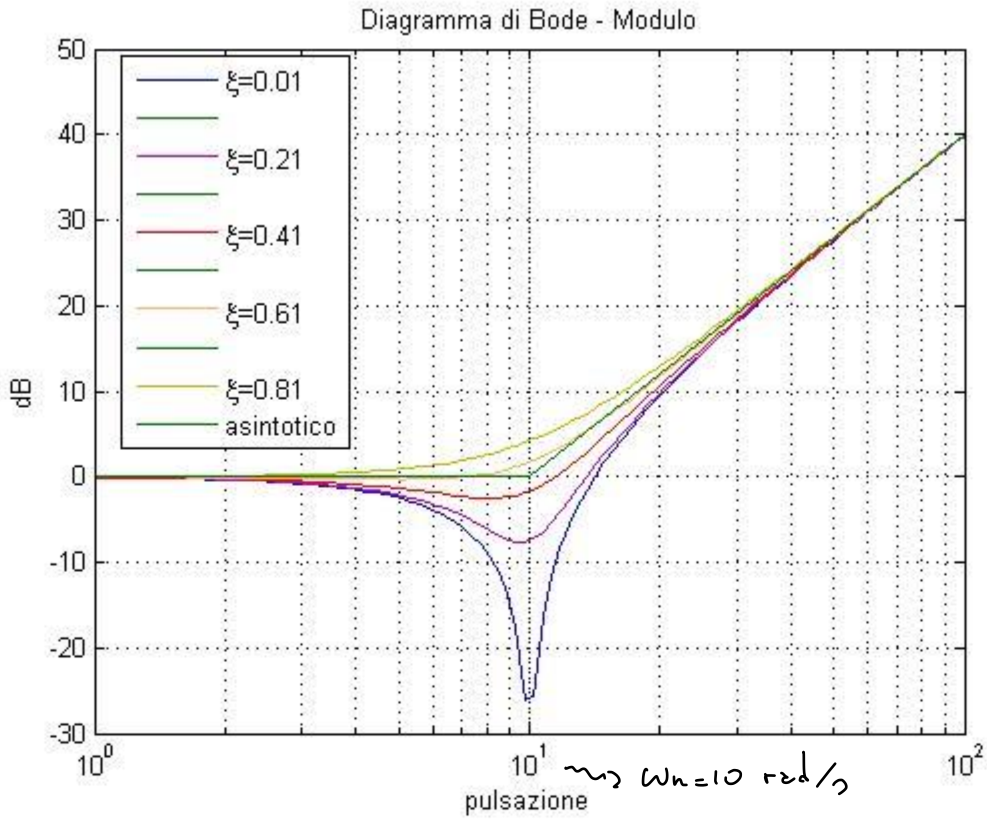
$\boxed{\text{OSS}}$ IL P.TO DI MINIMO SI HA IN

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}\,\omega_n \quad \text{SE} \quad 2\zeta^2 < 1$$

$$\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$$

$\omega_r \simeq \omega_n$ <u>tanto più ζ è piccolo</u>

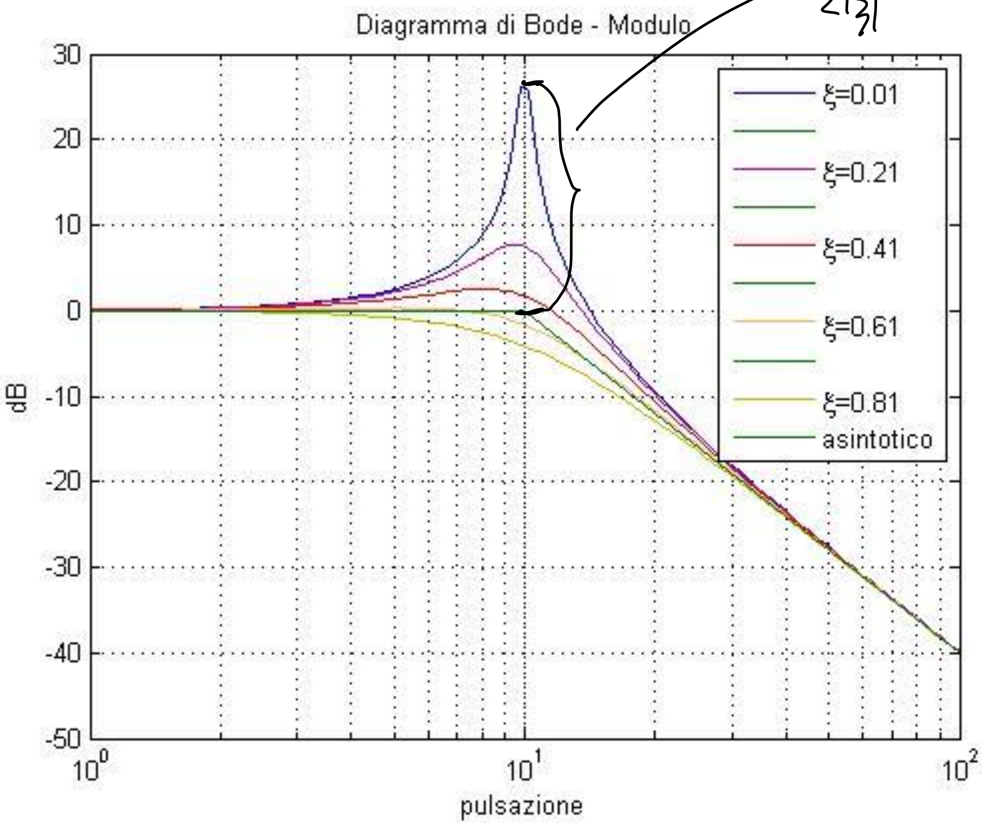
$$G(s) = 1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{{\omega_n}^2}$$



$\rightsquigarrow \omega_n = 10$ rad/s

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{{\omega_n}^2}}$$

$$\frac{1}{2|\xi|}$$



V) TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI DI BODE DEL MODULO
(ASINTOTICI)

1) PER $\omega < \frac{1}{|\tau|}, \frac{1}{|T|}, \omega_n, \alpha_n$

IL GRAFICO È UNA SEMIRETTA DI PENDENZA $-g$ ($\times 20\,\text{dB}/\text{dec}$)
IL CUI PROLUNGAMENTO PRENDE VALORE $|\mu|_{dB}$ IN $\omega = 1$

INFATTI:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \qquad |G(j\omega)|_{dB} = |\mu|_{dB} - g \cdot 20 \lg_{10} \omega$$

$$\Rightarrow \quad |G(j1)|_{dB} = \underline{\underline{|\mu|_{dB}}}$$

2) IN $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ (ZERO REALE) LA PENDENZA DELLA SPEZZATA AUMENTA DI $20\,\text{dB}/\text{dec}$ ($\times$ MOLTEPLICITÀ DELLO ZERO)

3) IN $\omega = \frac{1}{|T|}$ (POLO REALE) LA PENDENZA DELLA SPEZZATA DIMINUISCE DI $20\,\text{dB}/\text{dec}$ ($\times$ MOLT. DEL POLO).

4) IN $\omega = \alpha_n$ (COPPIA DI ZERI C/C) LA PENDENZA DELLA SPEZZATA AUMENTA DI $40\,\text{dB}/\text{dec}$ ($\times$ MOLTEPLICITÀ DELLA COPPIA DI ZERI C/C)

5) IN $\omega = \omega_n$ (COPPIA DI POLI C/C) LA PENDENZA DELLA SPEZZATA DIMINUISCE DI $40\,\text{dB}/\text{dec}$ ($\times$ MOLTEPLICITÀ DELLA COPPIA DI POLI C/C)

$\boxed{ES}$ $G(s) = \dfrac{-10\, s\, (1+s)}{(1+10 s)(1+0.1 s+0.01 s^2)}$ $\rightsquigarrow (1+\tau s)$

0) ? È in forma di Bode ? Sì

1) • $\mu = -10 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 20 \log_{10} 10 = 20\ dB$

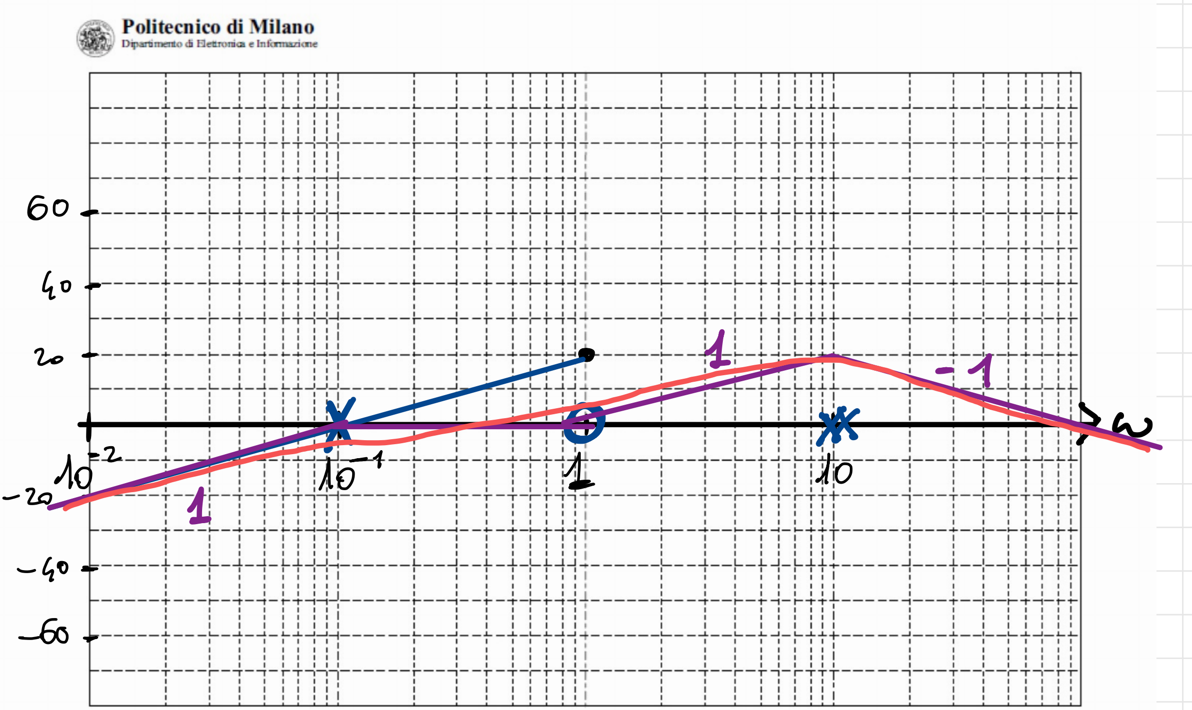
• $g = -1$

• zeri : • $(s=0)$
• $s = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\tau|} = 1$

• poli : • $1 + Ts = 1 + 10 s \Rightarrow \dfrac{1}{|T|} = 0.1$

• $1 + 0.1 s + 0.01 s^2 = 1 + \dfrac{2\zeta}{\omega_n} s + \dfrac{s^2}{\omega_n^2}$ $\Rightarrow \omega_n = 10$ $\Rightarrow \dfrac{2\zeta}{\omega_n} = 0.1 \Downarrow \zeta = 0.5$

2) TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA



Tratto iniziale : semiretta di pendenza $-g = +1$
il cui prolungamento in $\omega = 1$
ha valore $|\mu|_{dB} = 20 \, dB$

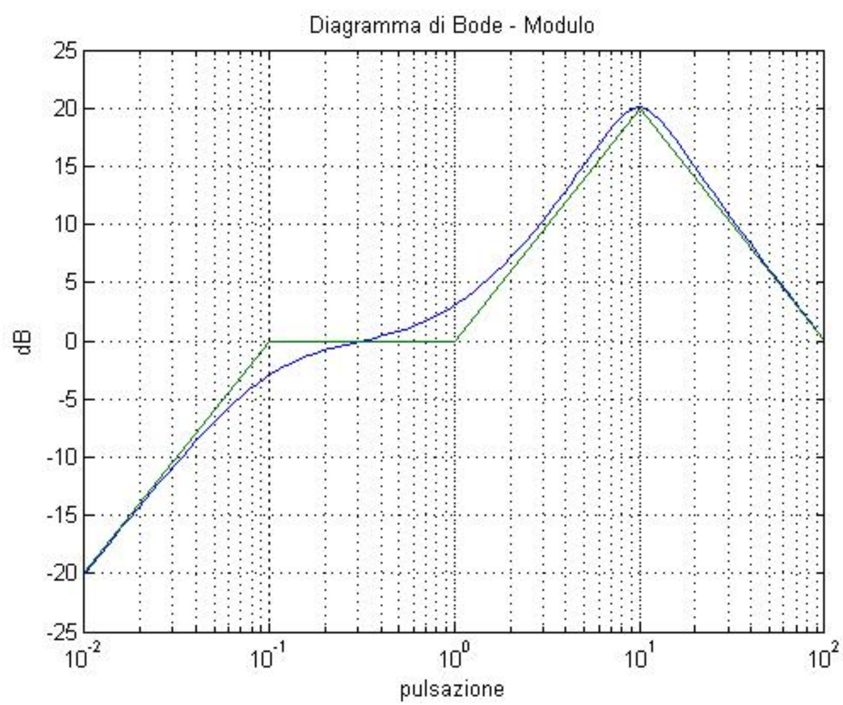


Diagramma di Bode - Modulo
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
dB
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione

e) DIAGRAMMA DELLA FASE

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1+j\omega\tau_i)}{\prod_i (1+j\omega T_i)} \frac{\prod_i \left(1-\frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}+2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{ni}}\right)}{\prod_i \left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}+2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{ni}}\right)}$$

- $r_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ $\qquad r = r_1 r_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$
  $r_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

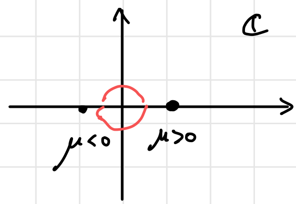
  $\measuredangle r = \theta_1 + \theta_2$

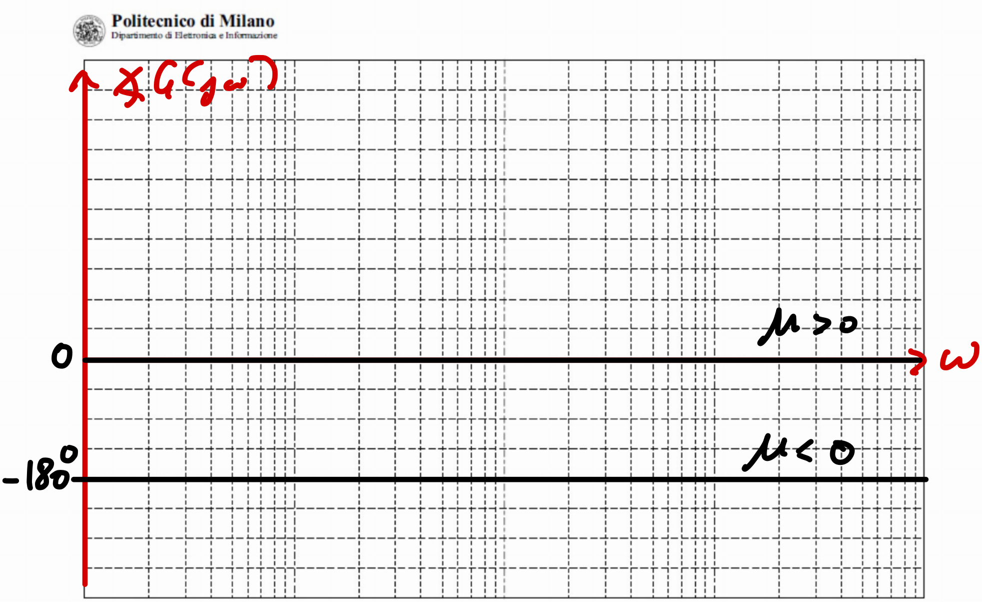
$$\measuredangle G(j\omega) = \measuredangle\mu + \sum_i \measuredangle(1+j\omega\tau_i) + \sum_i \measuredangle\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}+2j\zeta_i\frac{\omega}{\alpha_{ni}}\right)$$
$$- \measuredangle(j\omega)^g - \sum_i \measuredangle(1+j\omega T_i) - \sum_i \measuredangle\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}+2j\xi_i\frac{\omega}{\omega_{ni}}\right)$$

I) $G_1(s) = \mu$

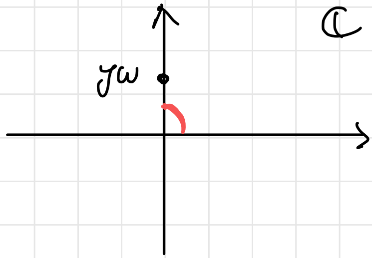
$$\measuredangle\mu = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \mu > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

↳ x convenzione





II) $G_2(s) = \frac{1}{s^8}$ $\quad \measuredangle G_2(j\omega) = -\measuredangle (j\omega)^8 = -8 \measuredangle j\omega = -8 \cdot 90^\circ$



$$G(s) = \frac{1}{s^g}$$

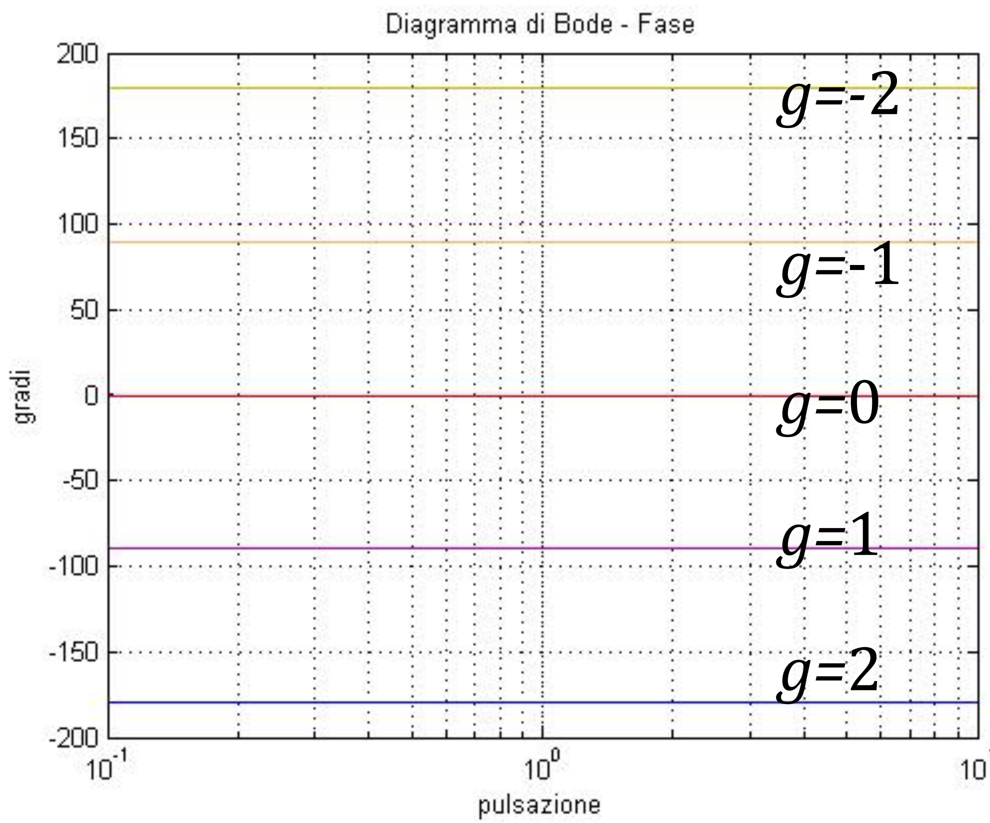
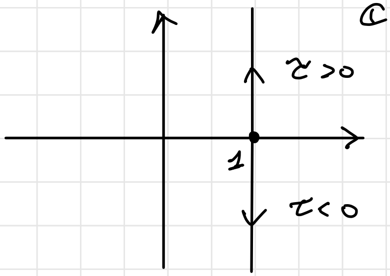


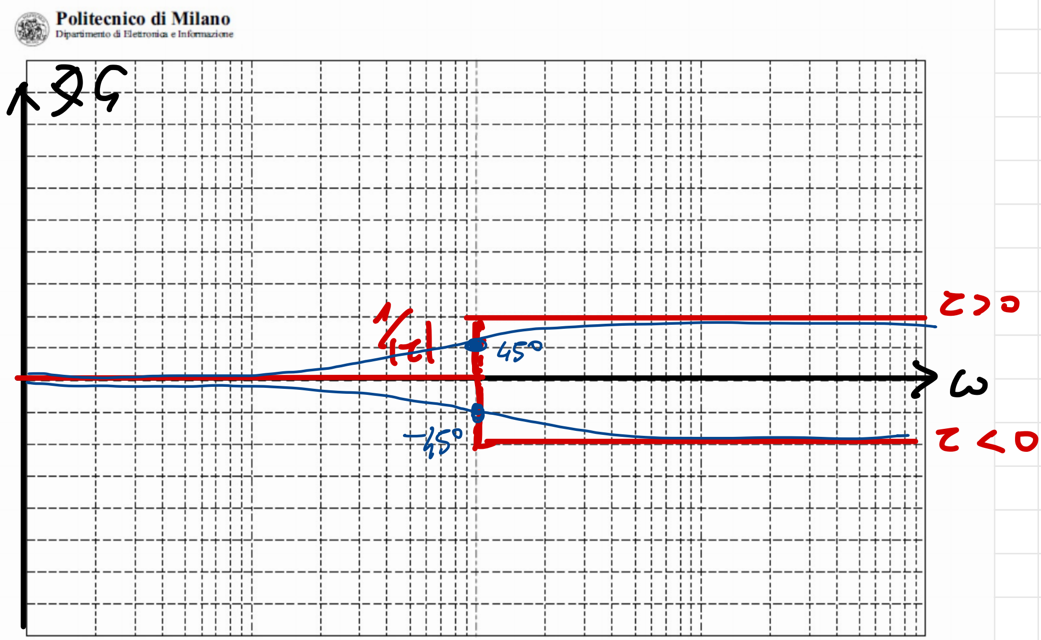
Diagramma di Bode - Fase
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
gradi
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
pulsazione
g=-2
g=-1
g=0
g=1
g=2

II) $G_3(s) = 1 + s\tau$

$$G_3(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$



$$\angle = \begin{cases} 0^\circ & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|},\ \tau > 0 \\ -90^\circ & \tau < 0 \end{cases}$$



$$\angle G_3\left(j\frac{1}{|\tau|}\right) = \angle\left(1 + j\frac{\tau}{|\tau|}\right) = \angle(1 \pm j) = \begin{cases} +45^\circ & \tau > 0 \\ -45^\circ & \tau < 0 \end{cases}$$

$$G(s) = 1 + s$$

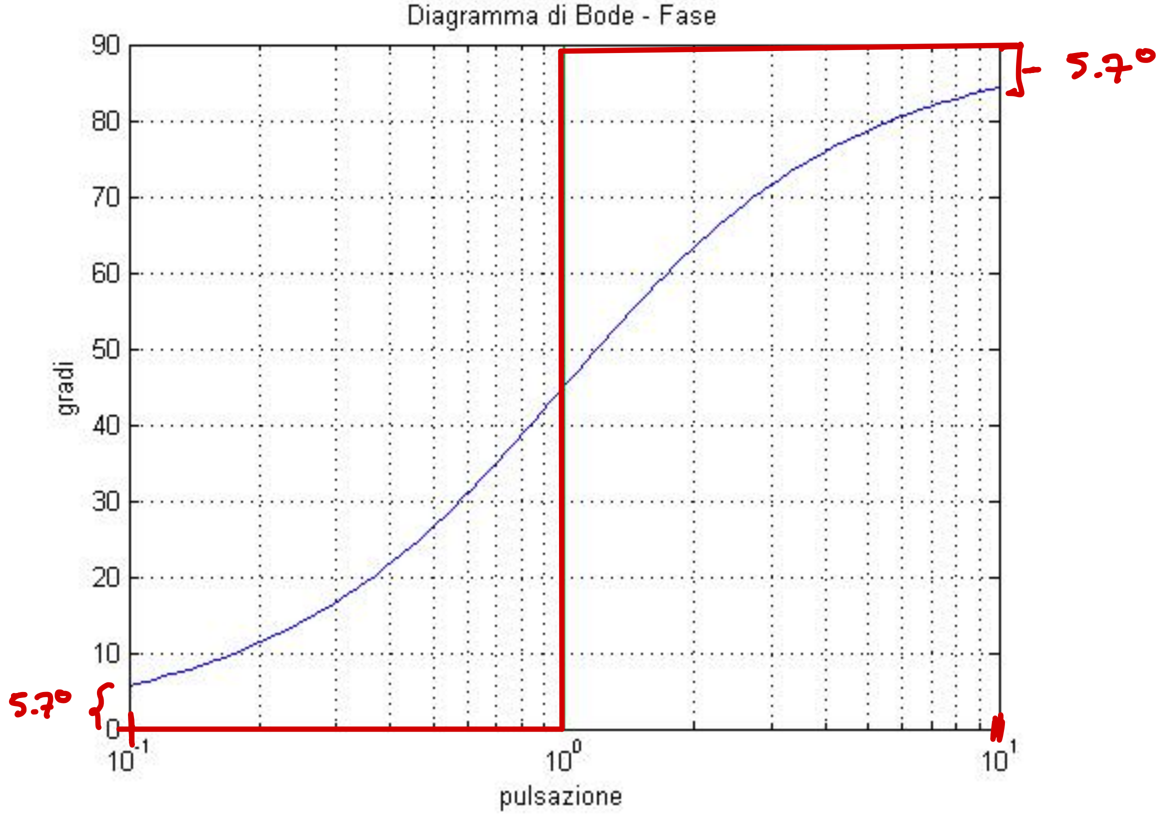
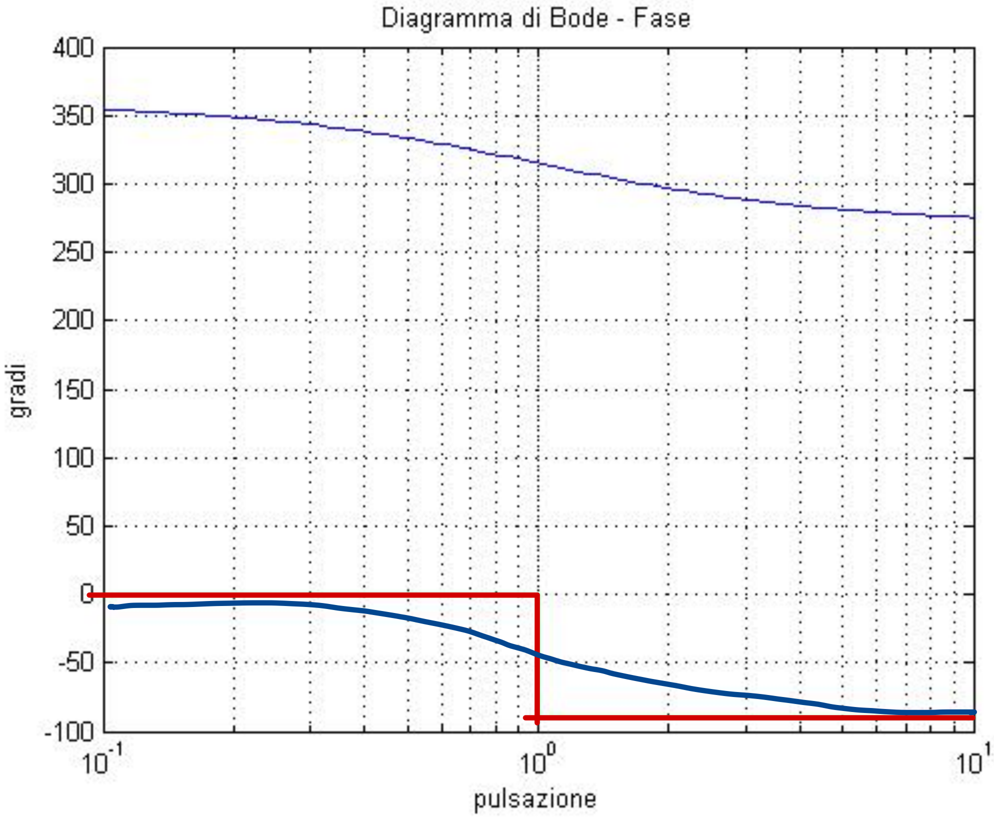


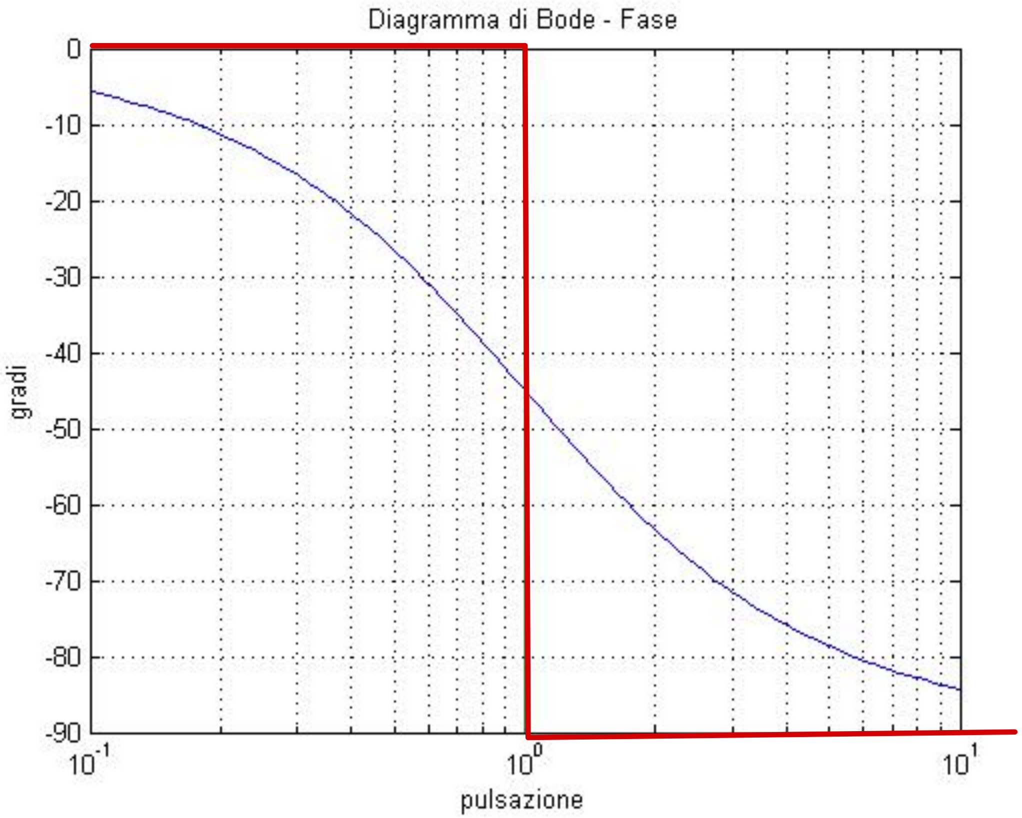
Diagramma di Bode - Fase
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
gradi
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
pulsazione
5.7°
5.7°

$$G(s) = 1 - s \qquad \tau = -1$$



$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

α 20



$$G(s) = \frac{1}{1 - s}$$

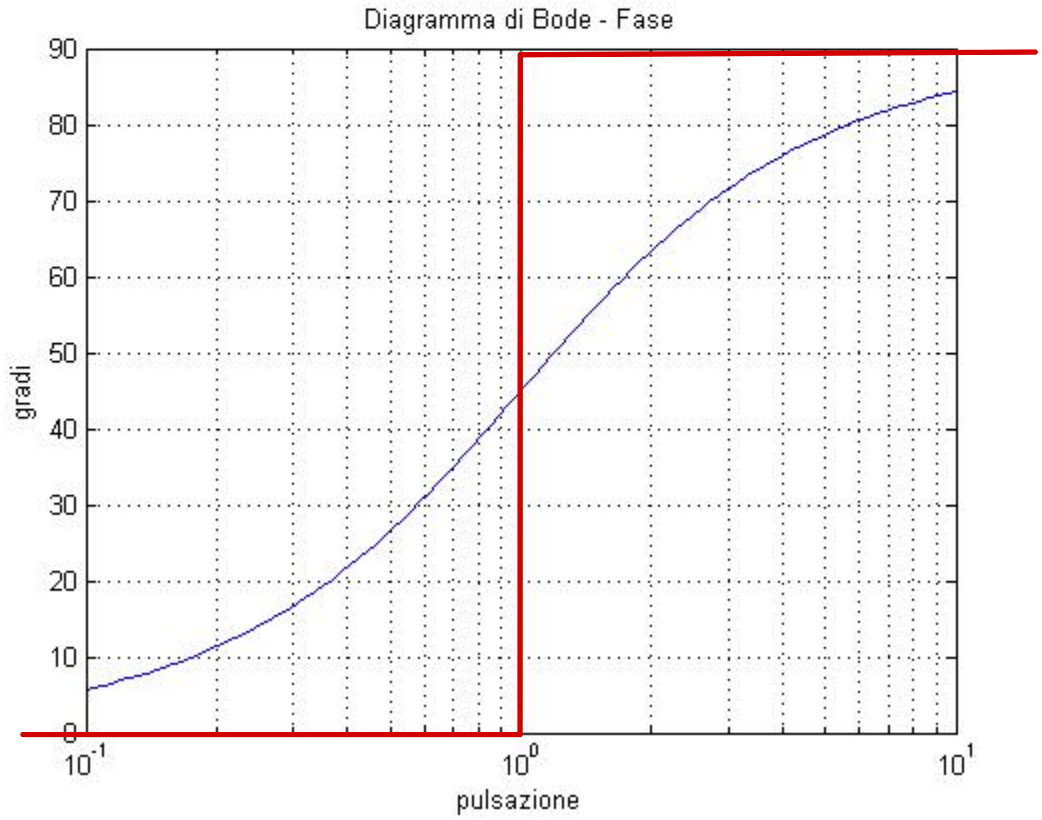
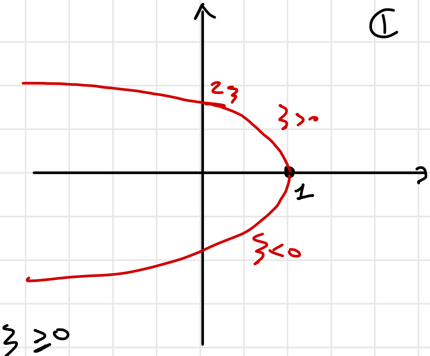


Diagramma di Bode - Fase
gradi
pulsazione
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10^{-1}
10^{0}
10^{1}

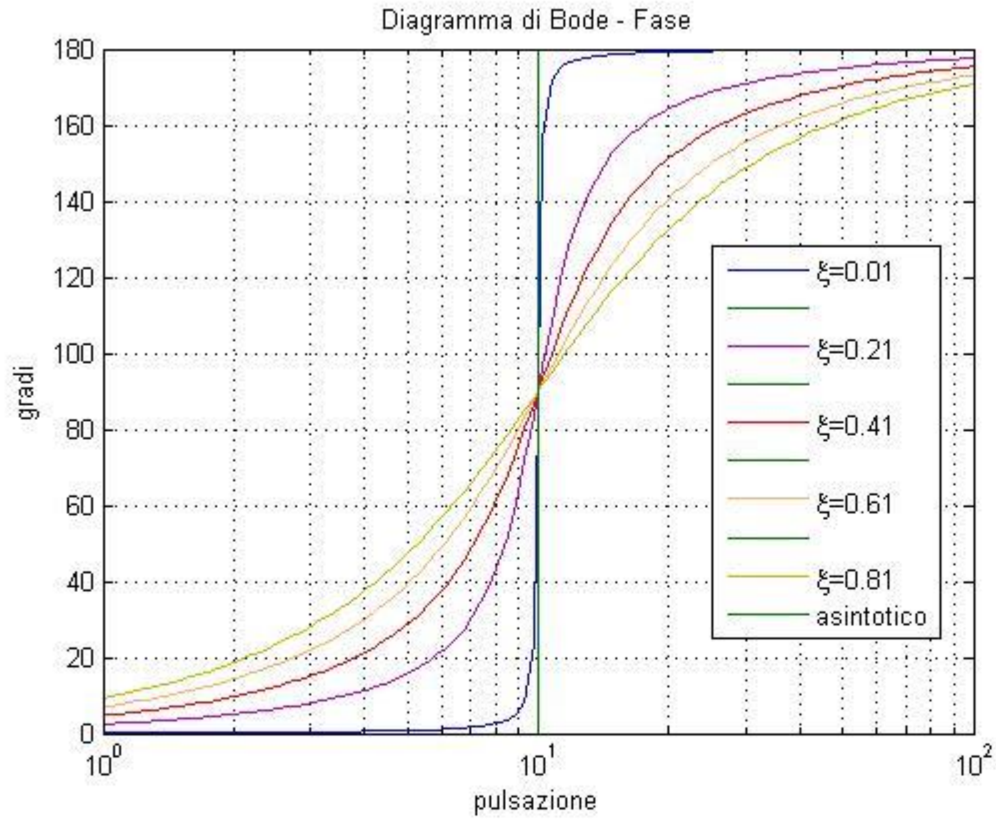
IV) $G_4(s) = 1 + \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n}$

$G_4(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}$

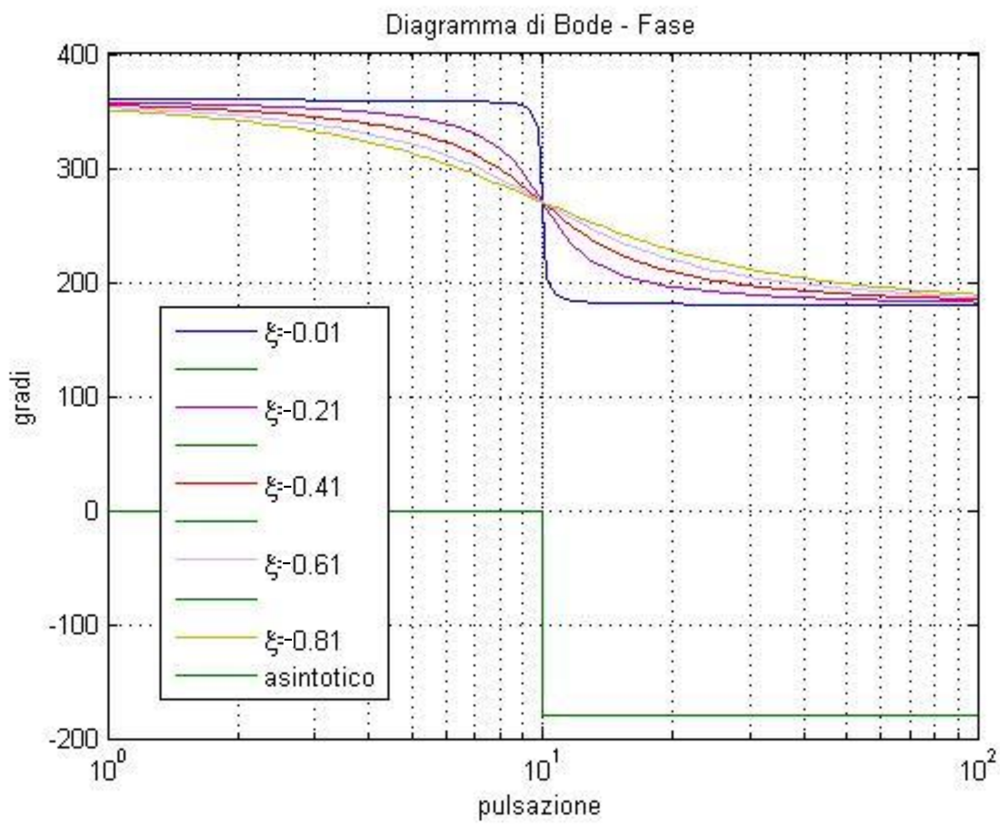


$$\measuredangle G_4(j\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \ll \omega_n \\ 180^\circ & \omega \gg \omega_n \quad \zeta \geq 0 \\ -180^\circ & \zeta < 0 \end{cases}$$

$$G(s) = 1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^{\,2}} \qquad , \xi \geq 0$$

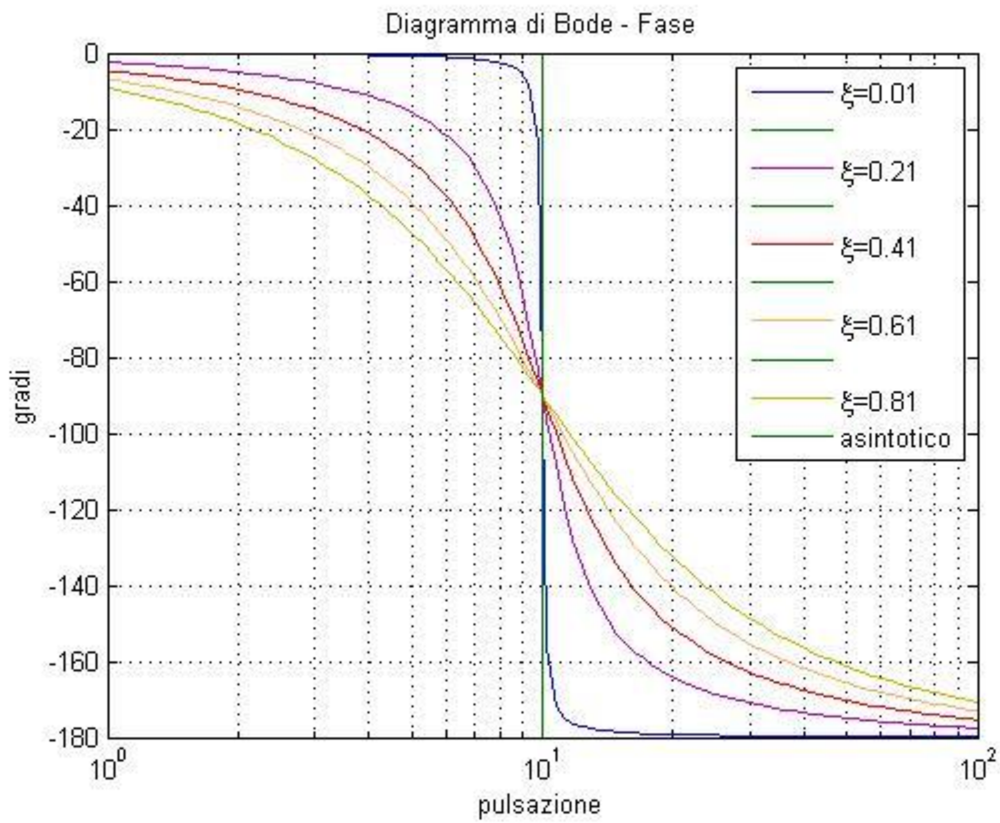


$$G(s) = 1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n{}^2} \qquad \xi < 0$$



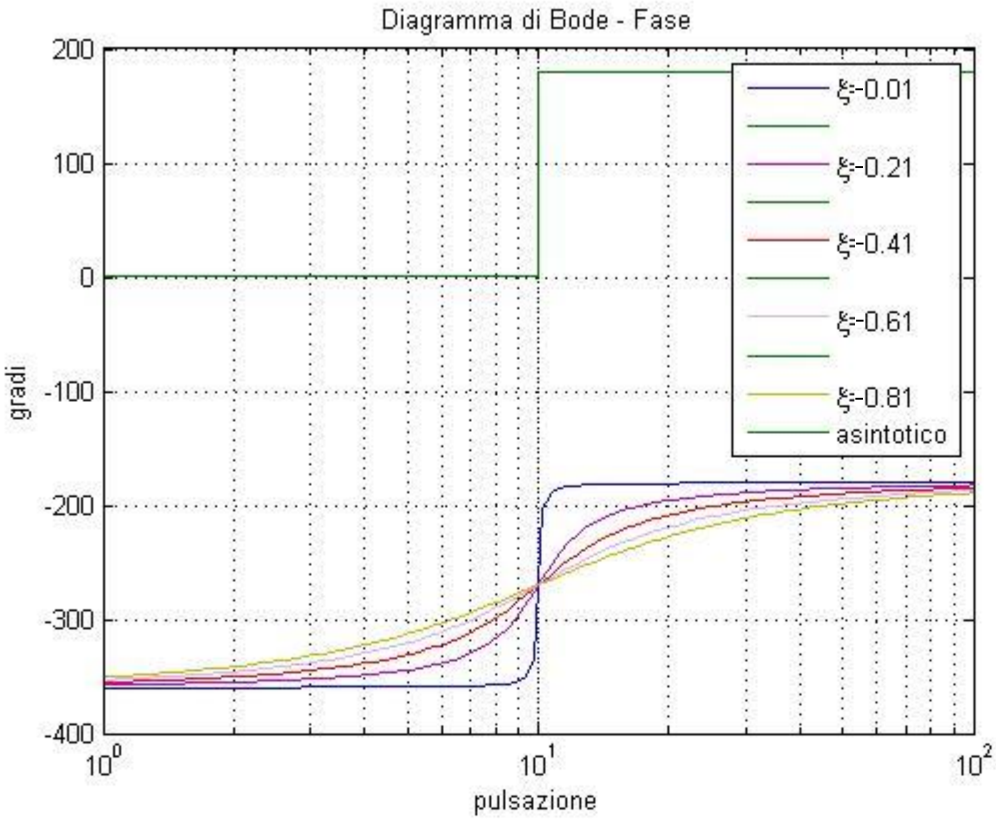
$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{{\omega_n}^2}}$$

$\xi \geq 0$



$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n{}^2}}$$

$\xi < 0$



V) TRACCIAMENTO DEL DIAGRAMMA DELLA FASE

- Il diagramma è una curva costante a tratti
- Il tratto iniziale ha fase

$$\measuredangle\mu - 90^\circ \cdot g$$

- IN CORRISPONDENZA DI
  - $\frac{1}{|\tau|}$ (ZERO REALE) — $+90^\circ$ se $\tau > 0$
    — -90° se $\tau < 0$
  - $\frac{1}{|T|}$ (POLO REALE) — -90° se $T > 0$
    — $+90^\circ$ se $T < 0$
  - α_n (ZERI c/c) — $+180^\circ$ se $\zeta \geq 0$
    — -180° se $\zeta < 0$
  - ω_n (POLI c/c) — -180° se $\zeta \geq 0$
    — $+180^\circ$ se $\zeta < 0$

ESEMPIO

$$G(s) = \frac{-10s(1+s)}{(1+10s)(1+0.1s+0.01s^2)}$$

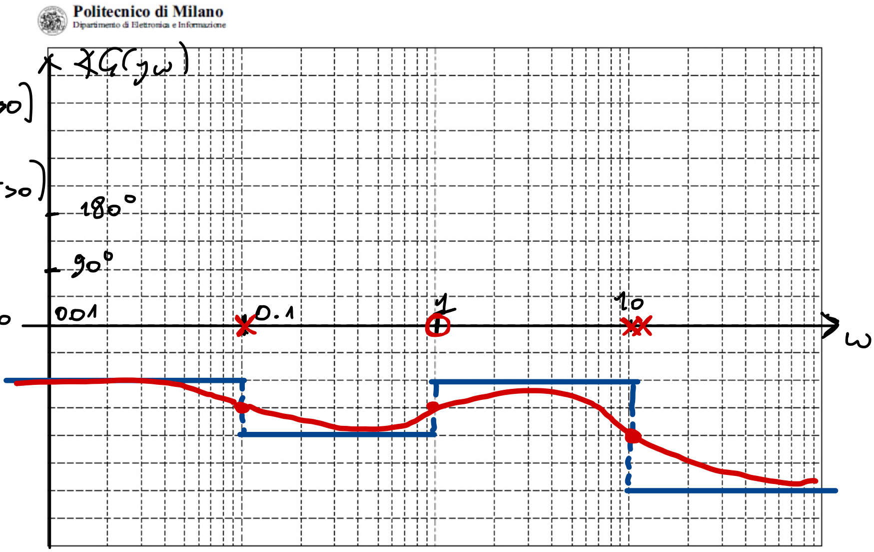
$$1 + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = 0.1$$

- $\mu = -10$
- $g = -1$
- ZERI : • $(s=0)$
  - $s=-1$ $(\tau>0)$
- POLI : • $s = -\frac{1}{10}$ $(T>0)$
  - $\omega_n = 10$
  - $\xi = 0.5 > 0$

SF. INIZIALE :

$\measuredangle\mu - 90^\circ \cdot g = -90^\circ$



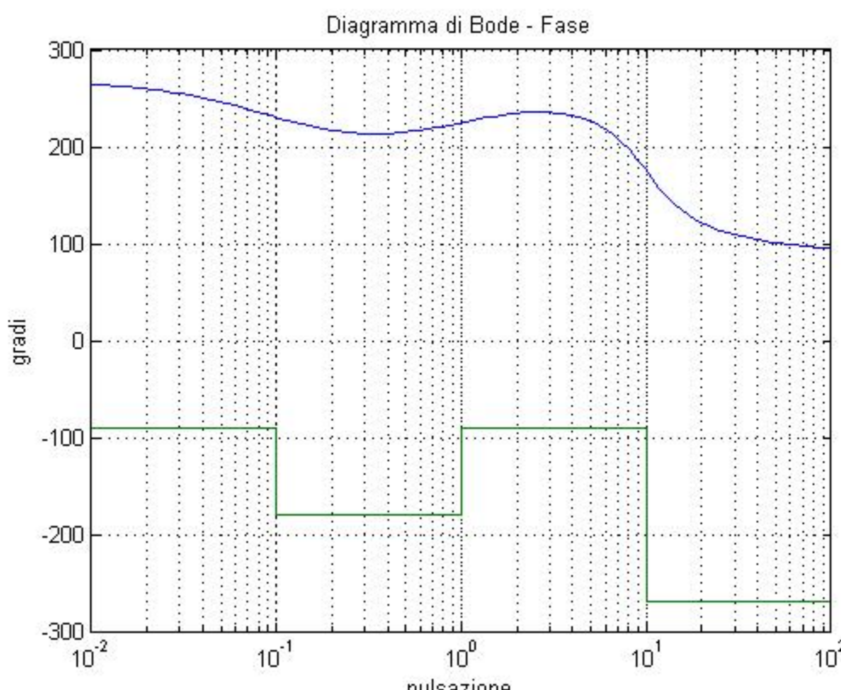


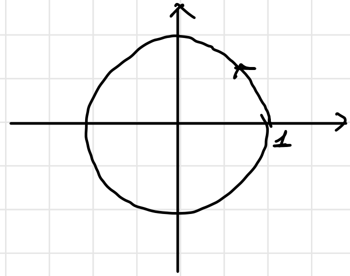
Diagramma di Bode - Fase
300
200
100
0
-100
-200
-300
gradi
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione

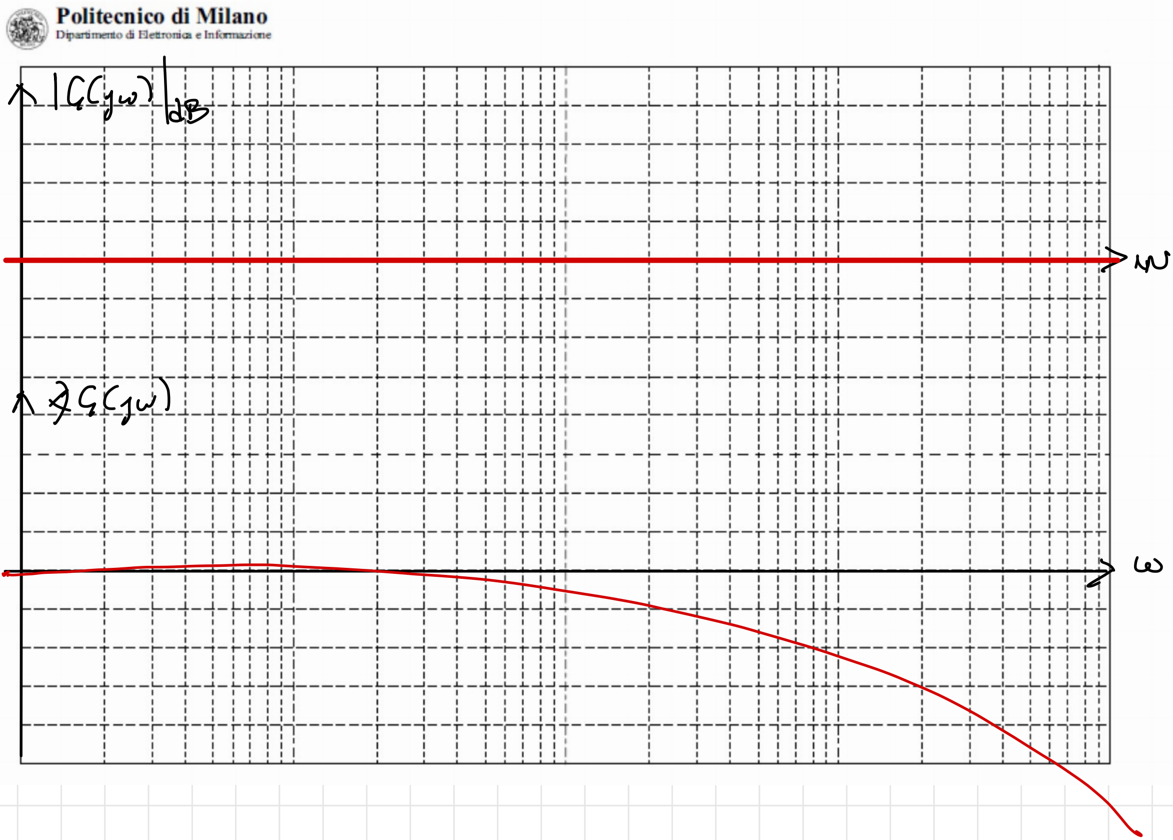
4) RITARDO

$$G(s) = e^{-\tau s} \qquad G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

$\downarrow$

Nessun contributo al diagramma del modulo



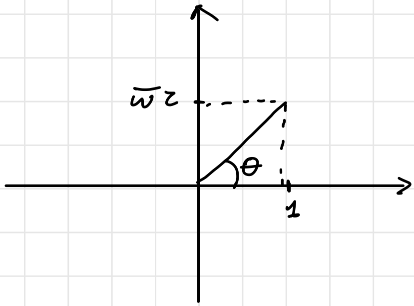


g) CALCOLO ANALITICO DELLO SFASAMENTO

$$\measuredangle G(j\omega) = \measuredangle\mu + \sum_i \measuredangle(1+j\omega\tau_i) + \sum_i \measuredangle\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2} + 2j\zeta_i\frac{\omega}{\alpha_{ni}}\right)$$

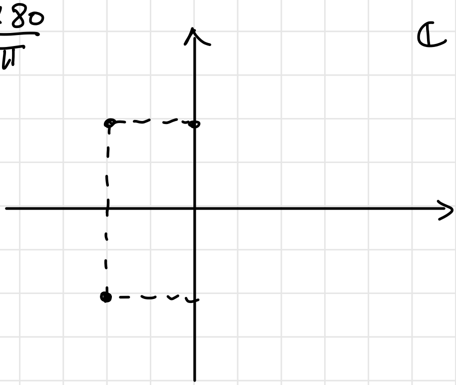
$$- \measuredangle(j\omega)^g - \sum_i \measuredangle(1+j\omega T_i) - \sum_i \measuredangle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2} + 2j\zeta_i\frac{\omega}{\omega_{ni}}\right)$$

$$\measuredangle\mu = \begin{cases} 0 & \mu > 0 \\ -180^\circ & \mu < 0 \end{cases}$$



$$-\measuredangle(j\omega)^g = -90^\circ \cdot g$$

$$\measuredangle(1+j\bar{\omega}\tau) = \operatorname{atan}(\bar{\omega}\tau)\cdot\frac{180}{\pi}$$



$$\measuredangle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$= \begin{cases} \theta & \bar{\omega} < \omega_n \\ \theta + 180^\circ & \zeta > 0 \quad \bar{\omega} > \omega_n \\ \theta - 180^\circ & \zeta < 0 \end{cases}$$

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{2\zeta\frac{\bar{\omega}}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)\cdot\frac{180}{\pi}$$

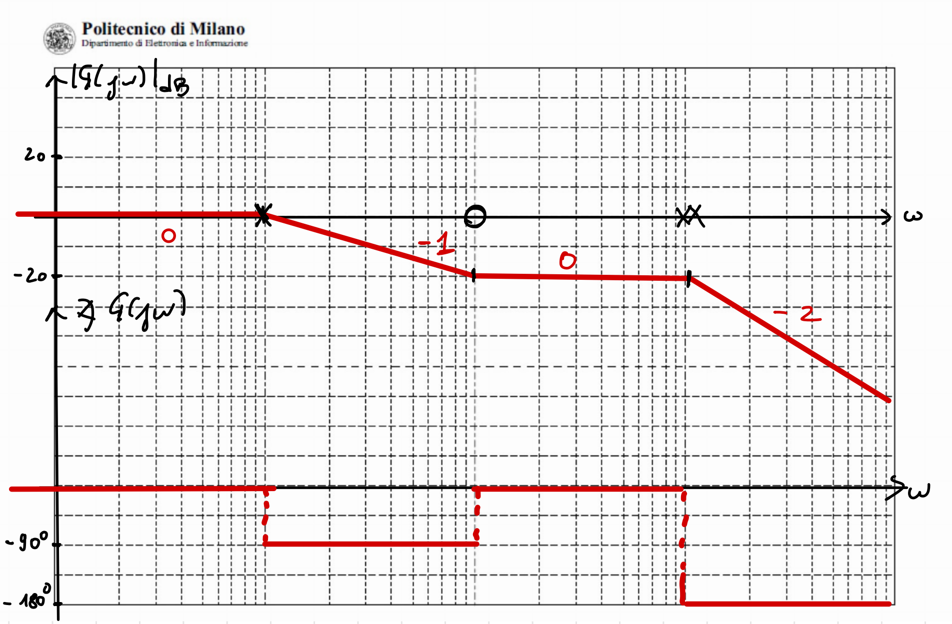
h) SISTEMI A FASE MINIMA

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI SISTEMI A FASE MINIMA È TALE CHE:

- $\mu > 0$
- RITARDI ASSENTI
- $\tau, T > 0$
  $\xi, \zeta \geq 0$

$\Rightarrow$ IL DIAGRAMMA ASINTOTICO DELLA FASE PUÒ ESSERE RICAVATO DA QUELLO DEL MODULO

ESEMPIO



ESERCIZI

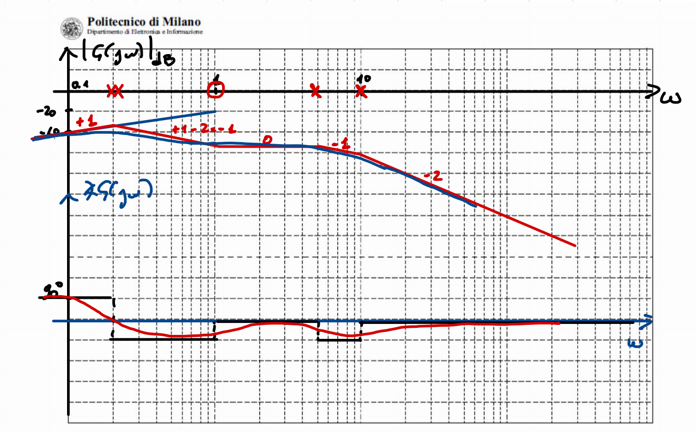
1) DISEGNARE I DIAGRAMMI DI BODE DI

$$G(s) = \frac{0.1\, s\,(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

- ! FORMA DI BODE !

- $\mu = 0.1$
- $g = -1$
- ZERI : • $(s=0)$
  - $s=-1$ $(\tau>0)$

- POLI : • $s=-0.2$ $(\times 2,\ \tau>0)$
  - $s=-5$ $(\tau>0)$
  - $s=10$ $(\tau<0)$



TRATTO INIZIALE:

- $|G(j\omega)| \rightarrow$ HA PENDENZA $-g = +1$
  - IN $\omega = 1$ IL SUO PROLUNGAMENTO HA VALORE $|\mu|_{dB} = |0.1|_{dB} = -20$
- $\angle G(j\omega) \rightarrow$ HA VALORE $\angle\mu - 90° \cdot g = +90°$

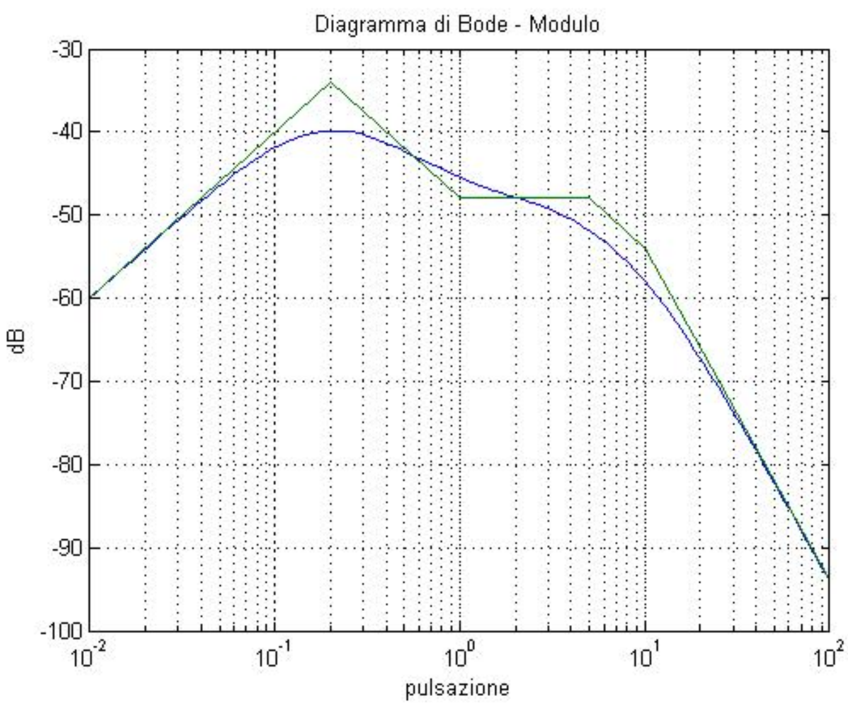


Diagramma di Bode - Modulo
dB
pulsazione

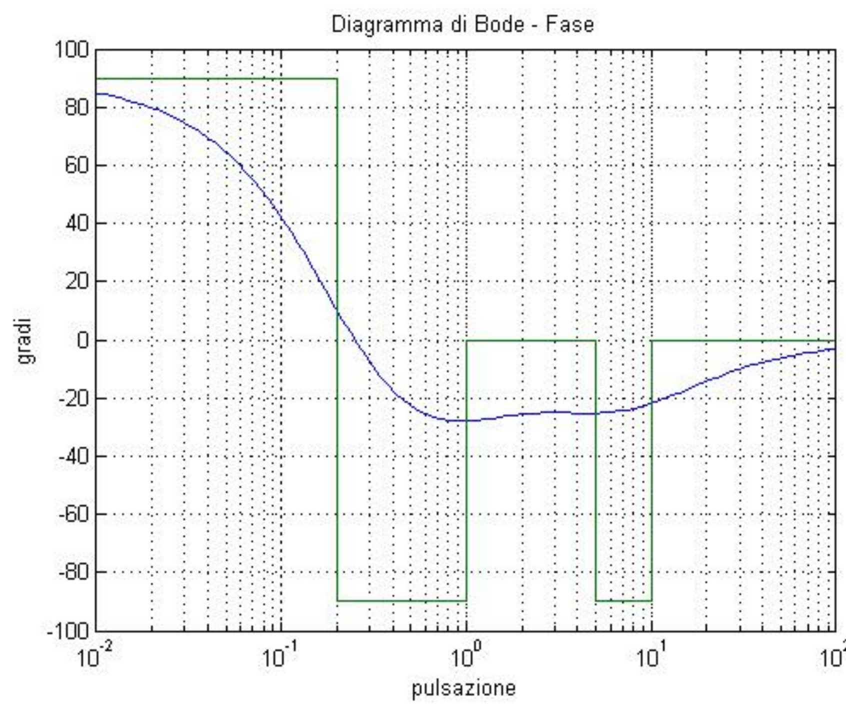


Diagramma di Bode - Fase
gradi
pulsazione

2) **disegnare i diagrammi di Bode di**

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s\,(1 + s)^2}$$

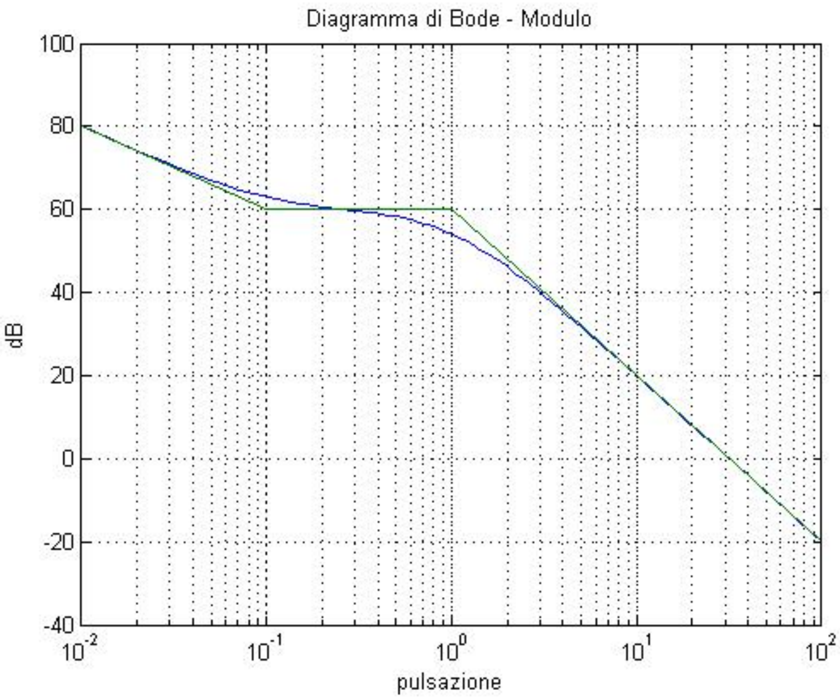


Diagramma di Bode - Modulo
100
80
60
40
20
0
-20
-40
dB
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione

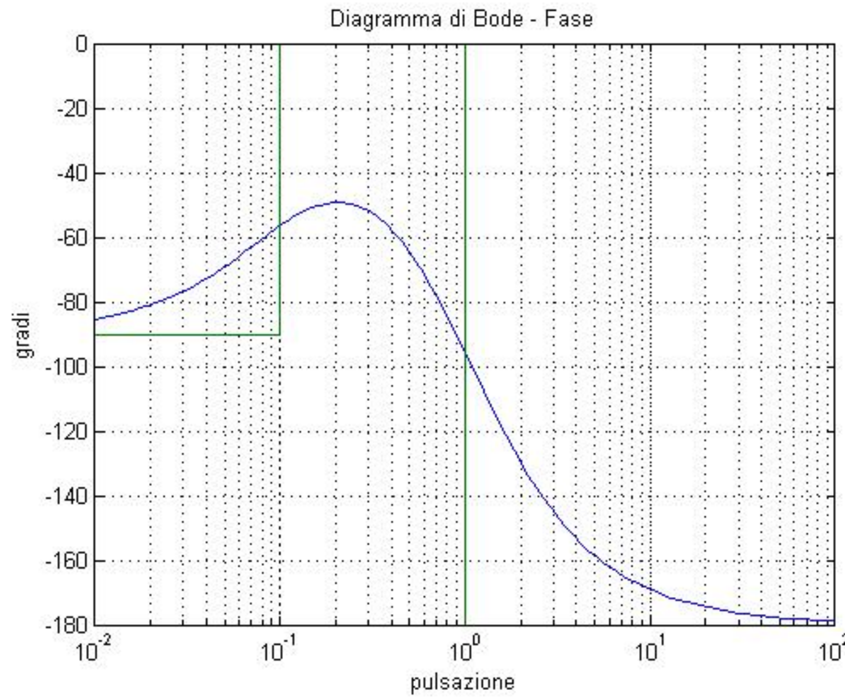


Diagramma di Bode - Fase
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
gradi
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione

3) **disegnare i diagrammi di Bode di:**

$$G(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + s^2)}$$

$\rightarrow$ 34 dB $\quad\rightarrow$ $\xi = 0.1$ $\quad |2\xi| = |0.2|_{dB} = -14$ dB

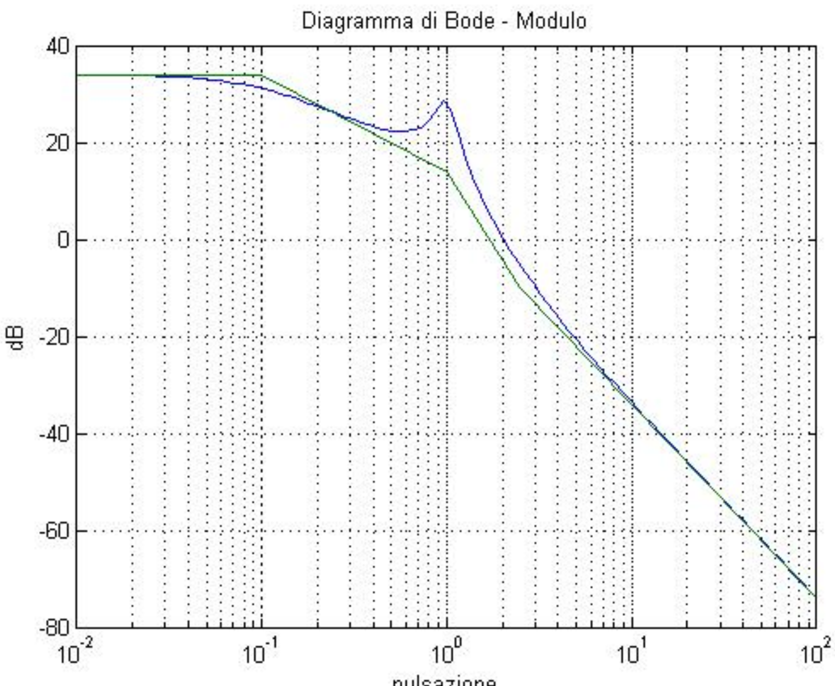


Diagramma di Bode - Modulo
dB
pulsazione
40
20
0
-20
-40
-60
-80
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

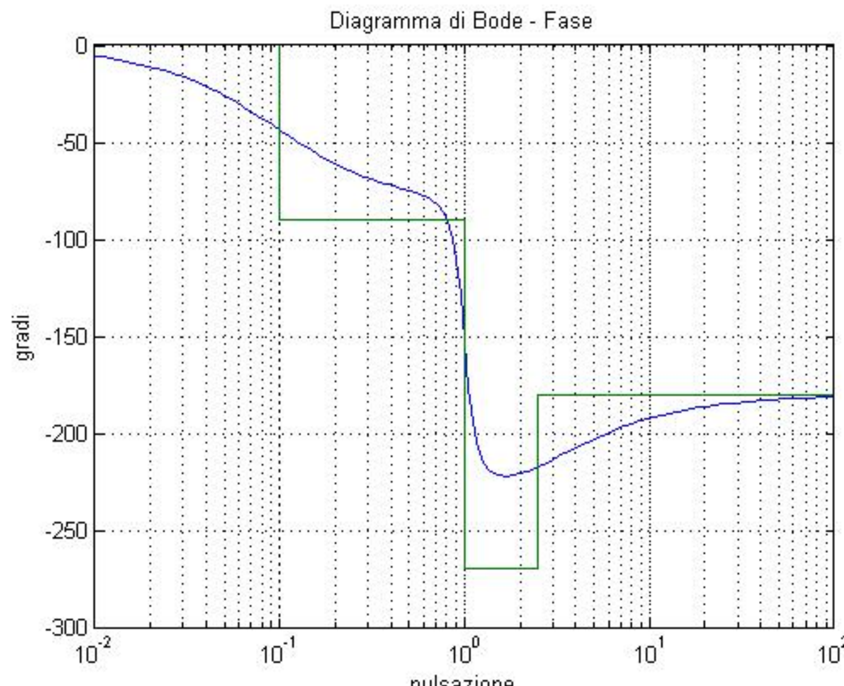


Diagramma di Bode - Fase
gradi
pulsazione
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

4) **disegnare diagrammi di Bode di:**

$$G(s) = \frac{50(1+0.4s)}{(1+10s)(1+\underline{0.6}s+s^2)}$$

$\hookrightarrow \xi = 0.3 \Rightarrow |2\xi|_{dB} \simeq -4\ dB$

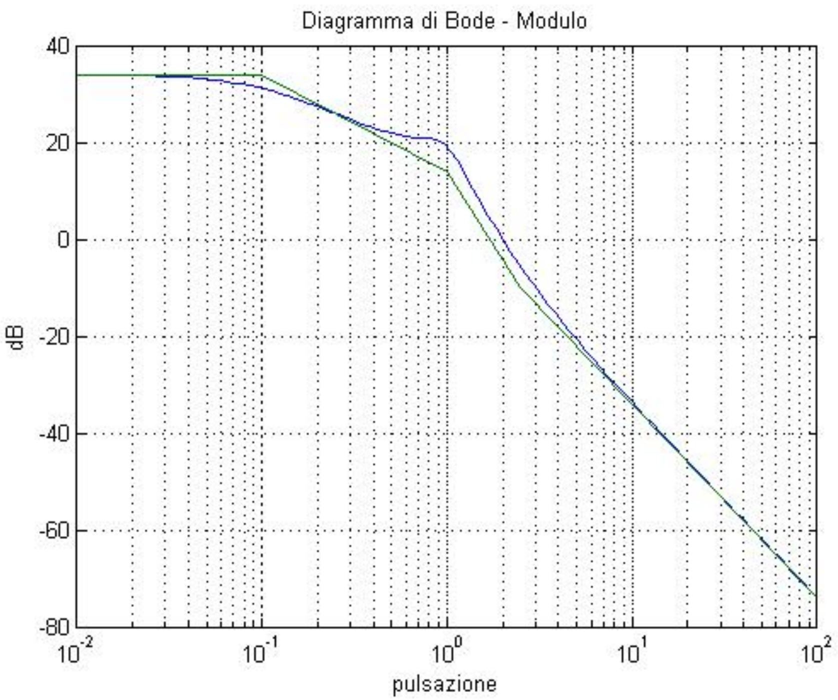


Diagramma di Bode - Modulo
40
20
0
-20
-40
-60
-80
dB
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione

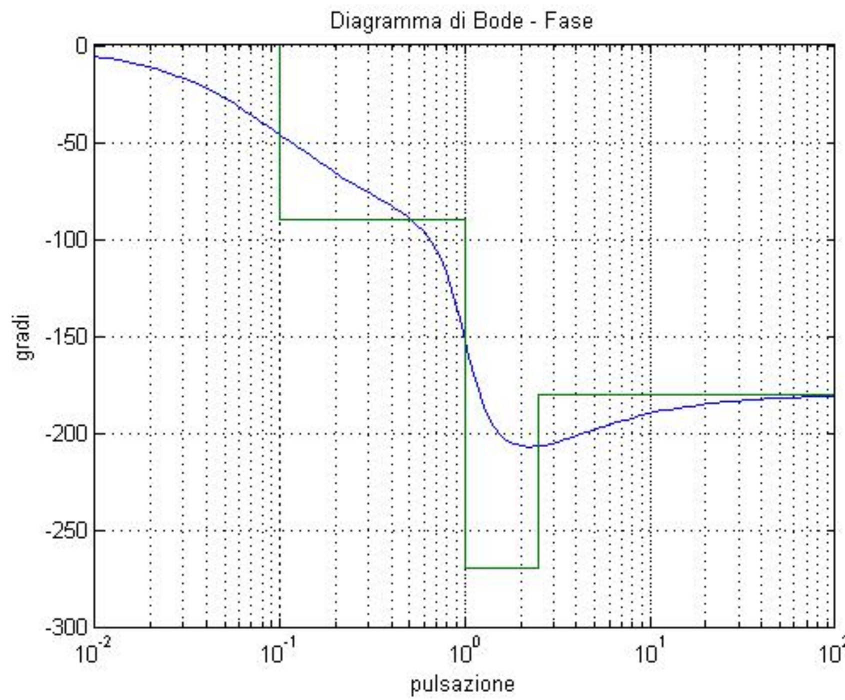


Diagramma di Bode - Fase
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
gradi
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
pulsazione