Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 06/07/2018 – Compito A

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Due squadre di calcio si affrontano in una partita, e segnano dei goals secondo due processi di Poisson indipendenti di intensità $\lambda_1 = 2/90$ e $\lambda_2 = 1/90$ goal/minuto, rispettivamente. Calcolare

   (a) il numero medio di goal totali segnati nel primo tempo

   (b) sapendo che la squadra 1 ha segnato 2 goals, la probabilità che vinca la squadra 1

   (c) supponendo che ogni goal segnato provenga da un calcio di rigore con probabilità 0.2 in maniera indipendente dagli altri goals, la probabilità che venga segnato più di un calcio di rigore in una partita.

2. Sia X un processo Gaussiano tempo-continuo con media nulla $\mathsf{E}[X(t)] = 0$ per ogni t e funzione di autocorrelazione $R_{XX}(t_1, t_2) = \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2)]$. Si considerino i tempi di campionamento $t_i = i$, per $i = 1, 2, \cdots$, e il processo tempo-discreto Y costituito dalle v.a.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X(t_i) \geq 0, \\ 0 & X(t_i) < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots .$$

   Dire quali sono le condizioni che R_{XX} deve soddisfare affinché il processo Y sia un processo di Bernoulli. Sotto tali condizioni, qual è la probabilità di successo ($\{Y_i = 1\}$) della singola prova di Bernoulli?

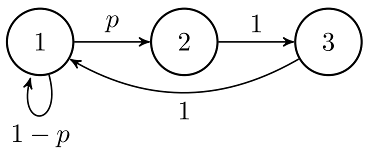
   Suggerimento: usare la definizione di processo di Bernoulli e verificare le condizioni.

3. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. La probabilità di transizione p può essere un qualunque numero in $[0, 1]$.

   (a) Classificare gli stati (transienti o ricorrenti) in funzione di p.

   (b) Per quali valori di p la catena è periodica?

   (c) Qual è la probabilità asintotica di essere nello stato 1?



4. Una lampadina ha una vita $X \sim \text{Exp}(\theta)$, dove θ è un parametro ignoto di cui si conosce solo la distribuzione a priori $\Theta \sim \mathcal{U}[1, 2]$. Determinare lo stimatore MAP $\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}$ basato su una osservazione X.

5. Si vogliono generare campioni indipendenti X distribuiti secondo la legge $f_X(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $f_X(x) = 0$ altrove, tramite il metodo della trasformazione inversa. Descrivere l'algoritmo partendo da una sorgente di numeri uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ e indipendenti.

6. Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera gli istanti di tempo degli arrivi di un processo di Poisson a tasso λ.

   Suggerimento: conviene generare i tempi di interarrivo del processo di Poisson.

Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 06/07/2018 – Compito B

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

(1) Una tripla di numeri viene puntata su dieci ruote del Lotto. Si calcoli la probabilità che tale terno venga estratto:

(a) su una sola ruota
(b) su due sole ruote
(c) su almeno una ruota.

Nel gioco del Lotto su ogni ruota vengono estratti 5 *numeri da un'urna con* 90 *numeri diversi senza reinserzione.*

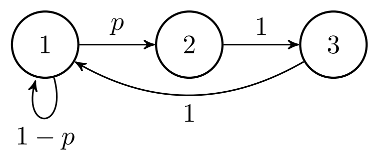
(2) Si estragga un punto S uniformemente distribuito sulla circonferenza di raggio unitario e con centro nel punto $(0, 0)$. Qual è la distribuzione di probabilità f_X della coordinata X del punto $S = (X, Y)$?

Suggerimento: l'estrazione del punto S equivale all'estrazione di un angolo Θ.
Identità utili: $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *oppure* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

(3) Siano $\{X_i\}$ delle v.a. i.i.d. con $\mathsf{E}[X_i] = 0$ e $\mathsf{Var}[X_i] = i$, e $\{Y_i\}$ delle v.a. i.i.d. con $\mathsf{E}[Y_i] = 0$ e $\mathsf{Var}[Y_i] = i^{-2}$. Si assuma inoltre che le $\{X_i\}$ siano indipendenti dalle $\{Y_i\}$. Determinare se la successione $\{X_i \cdot Y_i\}$ converge in probabilità a qualche valore per $i \to \infty$.

(4) Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. La probabilità di transizione p può essere un qualunque numero in $[0, 1]$.

(a) Classificare gli stati (transienti o ricorrenti) in funzione di p.
(b) Per quali valori di p la catena è periodica?
(c) Qual è la probabilità asintotica di essere nello stato 1?



(5) Una lampadina ha una vita $X \sim \text{Exp}(\theta)$, dove θ è un parametro ignoto di cui si conosce solo la distribuzione a priori $\Theta \sim \mathcal{U}[1, 2]$. Determinare lo stimatore MAP $\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}$ basato su una osservazione X.

(6) Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera gli istanti di tempo degli arrivi di un processo di Poisson a tasso λ.

Suggerimento: conviene generare i tempi di interarrivo del processo di Poisson.