Esercitazione 04: Sistemi a tempo discreto

18 marzo 2023 (3h)

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina
Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University
e successivamente in parte modificate e completate.

1 Analisi di investimenti

Una banca propone un tasso d'interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale mentre un'altra propone un tasso $i_2 = 12.5\%$ annuale. Se si ha intenzione di mantenere il capitale investito I per almeno un anno, quale dei due investimenti è più conveniente?

Soluzione

Per poter analizzare la decisione si deve scrivere il modello relativo all'andamento dell'investimento. In particolare, chiamando con $x(k)$ l'ammontare dell'investimento all'istante k, l'equazione con cui varia è data da:

$$x(k+1) - x(k) = ix(k) \quad \Rightarrow \quad x(k+1) = (1+i)x(k)$$

Analizziamo il caso di tasso di interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale, il tempo k rappresenta il trimestre corrente. L'investimento iniziale è $x(0) = I$. Essendo l'orizzonte temporale minimo di un anno, si deve analizzare l'evoluzione dell'investimento fino all'istante $k = 4$. Si ottiene, quindi:

$$\begin{aligned}
x(1) &= (1+i_1)x(0) = (1+i_1)I \\
x(2) &= (1+i_1)x(1) = (1+i_1)^2 I \\
x(3) &= (1+i_1)x(2) = (1+i_1)^3 I \\
x(4) &= (1+i_1)x(3) = (1+i_1)^4 I
\end{aligned}$$

Di conseguenza, dopo un anno, il capitale investito sarà pari a $(1+i_1)^4 I = 1.03^4 I \simeq 1.1255I$.

Nel caso di tasso di interesse $i_2 = 12.5\%$ annuale, il tempo k rappresenta l'anno corrente. Di conseguenza, in un anno l'investimento diventa:

$$x(1) = (1+i_2)x(0) = (1+i_2)I,$$

ossia, dopo un anno, il capitale investito sarà pari a $(i+i_2)I = 1.125I$.

Di conseguenza è più conveniente investire il capitale nella prima banca.

2 Prestito

Una banca propone un prestito pari a P, con un tasso d'interesse fisso i da estinguere con una rata annuale fissa R.

1. Se si vuole estinguere il prestito in un numero N di anni, quale dovrà essere l'importo della rata R?
2. Fissato il valore della rata R, in quanti anni si estinguerà il prestito?

Soluzione

1. Chiamando con $x(k)$ l'ammontare del debito residuo dopo k anni, il modello che rappresenta il suo andamento è:

$$x(k+1) = (1+i)x(k) - u(k),$$

dove $u(k) = R$, $\forall k$.

Risolvendo l'equazione alle differenze, si ottiene:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j),$$

in cui

$$A = 1 + i, \quad B = -1.$$

Di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned} x(k) &= (1+i)^k x(0) - \sum_{j=0}^{k-1} (1+i)^{k-j-1} u(j) \\ &= (1+i)^k P - R\frac{(1+i)^k - 1}{i} \end{aligned}$$

Utilizzando la formula precedente è possibile calcolare la rata R necessaria a estinguere il prestito P in N anni. Infatti, imponendo che il debito residuo dopo N anni sia pari a zero si ottiene:

$$(1+i)^N P - R\frac{(1+i)^N - 1}{i} = 0 \tag{1}$$

$$R = \frac{i(1+i)^N P}{(1+i)^N - 1}. \tag{2}$$

Per esempio, per estinguere un prestito di $P = 10000$ Euro, a un tasso di interesse del $i = 5\%$ in $N = 10$ anni, bisogna pagare una rata annuale pari a:

$$R = \frac{0.05 \cdot (1.05)^{10} \cdot 10000}{(1.05)^{10} - 1} \simeq 1295 \text{ Euro}.$$

Si noti che in questo caso la somma complessiva restituita alla banca è 12950 Euro.

Se si vuole estinguere il debito in $N = 20$ anni, invece sarà richiesta una rata annuale pari a:

$$R = \frac{0.05 \cdot (1.05)^{20} \cdot 10000}{(1.05)^{20} - 1} \simeq 802 \text{ Euro}.$$

Si noti che in questo caso la somma complessiva restituita alla banca è maggiore del caso precedente e pari a 16040 Euro.

L'andamento del valore della rata in funzione del numero di anni è mostrato in Figura 2.

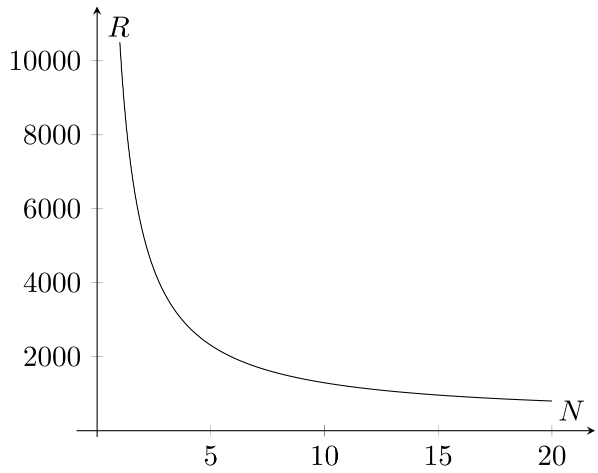

Figura 1: Andamento del valore della rata in funzione del numero di anni, per $P = 10000$ e $i = 0.05$.

2. Fissando il valore della rata R e volendo trovare il quanti anni si estinguerà il prestito, si può risolvere la relazione (1) per N, ottenendo:

$$\begin{aligned}
&(1+i)^N P - R\frac{(1+i)^N - 1}{i} = 0\\
&i(1+i)^N P - R\left((1+i)^N - 1\right) = 0\\
&i(1+i)^N P - R(1+i)^N + R = 0\\
&(1+i)^N\,(iP - R) = -R\\
&(1+i)^N = \frac{R}{R - iP}\\
&\ln(1+i)^N = \ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)\\
&N\ln(1+i) = \ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)\\
&N = \frac{\ln\left(\frac{R}{R-iP}\right)}{\ln(1+i)}
\end{aligned}$$

Per esempio, per estinguere un prestito di $P = 10000$ Euro, se si è quindi disposti ad avere una rata $R = 1000$ Euro, con un tasso di interesse del $i = 5\%$, saranno necessari:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{1000}{1000 - 0.05\cdot 10000}\right)}{\ln(1.05)} \simeq 14.02 \text{ anni.}$$

Se invece si vuole avere una rata più piccola, ad esempio di $R = 600$ Euro, il prestito sarà estinto in:

$$N = \frac{\ln\left(\frac{600}{600 - 0.05\cdot 10000}\right)}{\ln(1.05)} \simeq 36.72 \text{ anni.}$$

L'andamento del valore del numero di anni necessari per estinguere il prestito in funzione della rata è mostrato in Figura 2. Notare che esiste un asintoto per $R = Pi = 500$ dato che la rata non è sufficiente a compensare l'effetto del tasso di interesse, ossia si stanno pagando solo gli interessi alla banca, ma non si sta ripagando il prestito, per cui per $R = 500$ saranno necessari infiniti anni per poter estinguere il prestito.

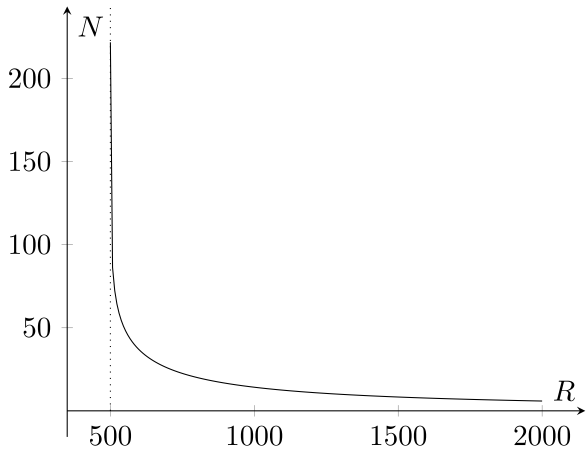

Figura 2: Andamento del valore del numero di anni necessari per estinguere il prestito in funzione della rata, per $P = 10000$ e $i = 0.05$.

3 Modello degli studenti universitari

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico k.

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno k e si iscrivono nell'anno $k+1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno k;
- $\alpha_i \in [0,1]$: tasso degli studenti promossi nell'i-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\beta_i \in [0,1)$: tasso degli studenti ripetenti nell'i-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1 - \alpha_i - \beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno i.

Si trascurino le iscrizioni di studenti provenienti da altre università.

1. Scrivere il modello dinamico del sistema.
2. Studiare la stabilità del sistema dinamico.
3. Posto:
$$\alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.6 \quad \alpha_3 = 0.5 \quad \beta_1 = 0.2 \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 0.5$$
determinare lo stato di equilibrio corrispondente a $u(k) = \bar{u} = 4000$.

Soluzione

1. Il modello dinamico è:
$$\begin{cases} x_1(k+1) = \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) = \alpha_3 x_3(k) \end{cases}$$
Le cui matrici sono:
$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$
2. Poiché la matrice A è triangolare, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale: β_1, β_2, β_3. Poiché si tratta di valori reali compresi tra 0 e 1, il sistema è asintoticamente stabile.
3. Imponiamo l'equilibrio con i valori numerici dati dei parametri
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \beta_1 \bar{x}_1 + \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \alpha_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = \alpha_2 \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 \\ \bar{y} = \alpha_3 \bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 0.2\bar{x}_1 + 4000 \\ \bar{x}_2 = 0.5\bar{x}_1 + 0.2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 = 0.6\bar{x}_2 + 0.5\bar{x}_3 \\ \bar{y} = 0.5\bar{x}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{4000}{0.8} = 5000 \\ \bar{x}_2 = \dfrac{2500}{0.8} = 3125 \\ \bar{x}_3 = \dfrac{1875}{0.5} = 3750 \\ \bar{y} = 1875 \end{cases}$$

4 Sistema non lineare

Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) + (x_2(t)-2)(u(t)-1) \\ x_2(t+1) &= 0.5x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

A. scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

B. si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

C. si determini il sistema linearizzato intorno alle condizioni di equilibrio trovate al punto precedente.

D. determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.

E. si calcoli il movimento dello stato del sistema con condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ e ingresso pari a $u(t) = \bar{u} = 1$.

Soluzione

A. Si definiscano le variabili $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $\delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2$, $\delta u = u - \bar{u}$ e $\delta y = y - \bar{y}$. Il sistema linearizzato è il seguente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta x_1(t+1) \\ \delta x_2(t+1) \end{bmatrix} &= A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u(t) \end{aligned}$$

where

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.5 & \bar{u}-1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

B. Le equazioni del sistema all'equilibrio si ottengono ponendo $x_1(t+1) = x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t+1) = x_2(t) = \bar{x}_2$ e $u(t) = 1$. L'unica condizione di equilibrio e' $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (0, 2, 1)$.

C. Il sistema linearizzato intorno alla condizione di equilibrio trovata al punto precedente presenta le seguenti matrici di sistema:

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = 0$$

D. La matrice di sistema A è diagonale. I suoi autovalori sono entrambi pari a 0.5, il cui modulo e' strettamente minore di 1. L'equilibrio trovato risulta pertanto un movimento asintoticamente stabile.

E. Ponendo $u(t) = \bar{u} = 1$ le equazioni del sistema risultano lineari e disaccoppiate tra loro:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) \\ x_2(t+1) &= 0.5x_2(t) + 1 \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

Pertanto la soluzione del sistema si ottiene calcolando separatamente i movimenti dei due stati:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= 2(1 - 0.5^t) \end{aligned}$$

5 Competizione aziendale

Un'azienda A si divide una determinata clientela con altre aziende con cui è in competizione. All'istante temporale 0 l'azienda A detiene il 30% della clintela. Per incrementare la propria quota di mercato (pacchetto clienti) decide di puntare su una campagna pubblicitaria che promette i seguenti risultati:

- l'azienda A conquisterà, ogni mese, un ventesimo dei clienti non suoi;
- l'azienda A perderà, ogni mese, un ventesimo dei propri clienti.

Assumendo che il numero di clienti complessivi rimanga invariato:

A. costruire un modello in spazio di stato a tempo discreto in grado di descrivere l'evoluzione del pacchetto clienti dell'azienda A;

B. studiare le proprietà di stabilità del sistema definito al punto a.

C. studiare l'evoluzione del pacchetto clienti della azienda A nel tempo, e la soluzione in condizioni stazionarie;

D. considerando il modello ottenuto al punto a. indipendentemente dal contesto applicativo, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ ($x(t)$ denota lo stato del sistema)?
Inoltre, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni t?

Soluzione

A. Il modello ottenuto ha come stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_A(t) \\ x_C(t) \end{bmatrix}$$

dove $x_A(t)$ è il pacchetto clienti detenuto dall'azienda A, mentre $x_C(t)$ è il pacchetto clienti detenuto dalle aziende in competizione con A. Si ha dunque che le condizioni iniziali del sistema sono $x_A(0) = 30$, mentre $x_C(0) = 70$. Il modello dinamico risultante è:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix} x(t)$$

che è autonomo, dato che non prevede variabili di ingresso.

B. La matrice di transizione A è:

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico risulta $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1.9\lambda + 0.9 = (\lambda - 0.9)(\lambda - 1)$. Perciò gli autovalori risultano $\lambda_1 = 1$ è $\lambda_2 = 0.9$. Il sistema è perciò semplicemente stabile.

C. Gli autovettori del sistema sono

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Le condizioni iniziali del sistema sono

$$x(0) = \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Si noti che il vettore $x(0)$ può essere scritto come una combinazione lineare di v_1 e v_2, cioè $x(0) = 50v_1 - 20v_2$. Per la linearità del sistema

$$x(t) = A^t x(0) = 50A^t v_1 - 20A^t v_2 = 50\lambda_1^t v_1 - 20\lambda_2^t v_2$$

Cioè
$$x(t) = \begin{bmatrix} 50 - 20(0.9)^t \\ 50 + 20(0.9)^t \end{bmatrix}$$
Si ottiene quindi che $x_A(t) = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$.

Una soluzione alternativa consiste nel considerare $x_A(t) = Cx(t)$, dove $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Come noto, il movimento libero della variabile $x_A(t)$ è combinazione lineare dei modi del sistema, cioè $\lambda_1^t = 1$ e $\lambda_2^t = (0.9)^t$. Cioè, si può scrivere
$$x_A(t) = \gamma_1 + \gamma_2(0.9)^t$$
Si ottiene che
$$\begin{array}{lllllll} x_A(0) & = & \gamma_1 + \gamma_2 & = & Cx(0) & = & 30 \\ x_A(1) & = & \gamma_1 + \gamma_2(0.9) & = & CAx(0) & = & \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \end{bmatrix} x(0) = 32 \end{array}$$
Si ottiene che $\gamma_1 = 50$ e $\gamma_2 = -20$, e dunque
$$x_A(t) = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$$
D. Le condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ sono date dall'espressione $x(0) = \gamma v_2$, dove $\gamma \in \mathbb{R}$. Infatti, essendo v_2 l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 0.9$, $x(t) = (0.9)^t x(0) \to 0$.
Inoltre, le condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni t sono date dall'espressione $x(0) = \gamma v_1$, dove $\gamma \in \mathbb{R}$. Infatti, essendo v_1 l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, $x(t) = (1)^t x(0) = x(0)$.

Soluzione alternativa

A. Dato che nel testo viene specificato che il numero totale di clienti è costante è possibile rappresentare il sistema attraverso un modello del primo ordine, dove cioè $x_C(t) = 100 - x_A(t)$, ottenendo quindi il seguente modello dinamico
$$x_A(t+1) = 0.95x_A(t) + 0.05x_C(t) = 0.95x_A(t) + 0.05(100 - x_A(t)) = 0.9x_A(t) + 5$$
B. Il modello scalare ha la forma $x(t+1) = ax(t) + bu(t)$, dove $a = 0.9$, $b = 1$, e presenta un ingresso costante $u(t) = 5$. L'autovalore è $a = 0.9$, e il modello risulta asintoticamente stabile.

C. La soluzione esplicita del sistema è data da $x(t) = a^t x(0) + \sum_{k=1}^{t} a^{t-k} u(k-1)$, e quindi
$$x_A(t) = (0.9)^t(30) + 5\sum_{k=0}^{t-1}(0.9)^k = 30(0.9)^t + 5\frac{1-(0.9)^t}{1-0.9} = 30(0.9)^t - 50(0.9)^t + 50 = 50 - 20(0.9)^t \to 50\%$$
D. Considerando questo modello, non esiste alcuna condizione iniziale tale per cui $x_A(t) \to 0$, mentre se $x_A(0) = 50$, allora $x_A(t) = 50$ per ogni $t > 0$. Infatti $\bar{x}_A = 50$ è la soluzione d'equilibrio del sistema.