

Algebra di Boole

Cenni
(V1.0 2018)

Introduzione

Rappresentazione di una funzione combinatoria

Proprietà dell'algebra di commutazione

Forme canoniche

Teorema di espansione di Shannon

Introduzione

■ Operazione

- ▶ Una operazione α sull'insieme $S=\{s_1, s_2, \dots\}$ è una funzione che da $S \times S$ porta in S , cioè:

$$\alpha: S \times S \rightarrow S$$

- ▶ Esempio:

- L'operazione di moltiplicazione sull'intervallo $[0,1]$ consente di ottenere un valore incluso in $[0,1]$ a partire da elementi inclusi in $[0,1]$

■ Sistema algebrico:

- ▶ Combinazione di un insieme e di una o più operazioni.
- ▶ Esempio:
 - $([0,1], *)$ è un sistema algebrico

Introduzione

■ Algebra Booleana B:

- ▶ È un sistema algebrico identificato dalla quintupla:
 $(B, +, *, O, I)$
- ▶ In cui:
 - B è l'insieme di specificazione (carrier)
 - +, * sono operatori binari (operazioni a due elementi)
 - Associano a coppie di elementi in B un elemento dello stesso insieme
 - + è il simbolo associato all'operazione *somma*
 - * è il simbolo associato all'operazione *prodotto*
 - O, I sono elementi speciali di B

Introduzione

- Le proprietà dei due operatori dedotte da assiomi
 - ▶ $+$ (simbolo *somma*) e $*$ (simbolo *prodotto*) sono commutative per ogni $x, y \in B$
 - ▶ La somma è distributiva rispetto al prodotto ed il prodotto è distributivo rispetto alla somma per ogni $x, y, z \in B$
 - ▶ 0 è l'elemento neutro rispetto a $+$ ed 1 è l'elemento neutro rispetto a $*$
 - ▶ Ogni elemento $x \in B$ ammette un elemento x' complemento di x tale che $(x + x') = 1$ e $(x * x') = 0$
 - L'elemento x' complemento di x è unico.
 - Questa proprietà autorizza l'inserimento del nuovo operatore *complemento* (\sim) intendendo con $\sim x$ l'elemento x' complemento di x
 - \sim è il simbolo associato all'operazione *complemento*

Algebra di Commutazione

■ Algebra Booleana a due valori (o di *commutazione*)

► È definita da

($\{0, 1\}$, $+$, $*$, \sim , 0 , 1)

► In cui

- L'insieme di specificazione $B = \{0, 1\}$
- le operazioni \oplus , \odot e \sim sono definite come:

| | | b | |
|---|---|---|---|
| | | + | |
| a | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 |

| | | b | |
|---|---|---|---|
| | | * | |
| a | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 |

| | \sim |
|---|--------|
| a | |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

■ Nota: D'ora in poi si farà riferimento all'algebra di commutazione.

Algebra di Commutazione

“Tra tutte le algebre booleane, l'algebra booleana a due valori... è la più utile. Essa è la base matematica della analisi e progetto di circuiti di commutazione che realizzano i sistemi digitali.”

Lee, S.C
Digital Circuit And Logic Design
Prentice-Hall, 1976

Algebra di Commutazione

■ Definizioni:

- ▶ Un letterale è una coppia (variabile, valore)
 - $(x, 1)$ È indicato come x mentre $(x, 0)$ È indicato come $\sim x$
- ▶ Un termine prodotto è il prodotto logico o disgiunzione (AND) di più letterali
 - Ad esempio, una funzione nelle variabili a, b, c e d potrebbe avere una espressione che contiene i termini prodotto $(\sim a * b * \sim c)$ e $(a * \sim b * c)$.
- ▶ Un termine somma è la somma logica o congiunzione (OR) di più letterali
 - Ad esempio, una funzione nelle variabili a, b, c e d potrebbe avere una espressione che contiene i termini somma $(\sim a + b + \sim c)$ e $(a + \sim b + c)$.

Algebra di Commutazione

■ Espressione Boolana

- ▶ Una espressione Booleana E è definita in modo induttivo come parola composta da operatori booleani, parentesi, costanti e letterali nel modo seguente:
 - Sia gli elementi di B , chiamati costanti, che i letterali x, y, z, \dots sono espressioni booleane.
 - Se E_1 e E_2 sono espressioni booleane anche $(E_1 + E_2)$ ($E_1 * E_2$) e $(\sim E_1)$ lo sono.
 - Non esistono altre espressioni booleane oltre a quelle che possono essere generate da un numero finito di applicazioni delle due regole precedenti.

- Nota: D'ora in avanti, i simboli degli operatori “+”, “*” e “~” saranno sostituiti con “+”, “*” e “!” (o “”) oppure da OR, AND e NOT.

Proprietà

■ Associativa

- ▶ Somma: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- ▶ Prodotto: $a * (b * c) = (a * b) * c$

■ Distributiva

- ▶ Somma: $a * (b + c) = a * b + a * c$
- ▶ Prodotto: $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$

■ Idempotenza

- ▶ Somma: $a + a = a$
- ▶ Prodotto: $a * a = a$

■ Elemento neutro

- ▶ Somma: $a + 1 = 1$ $a + 0 = a$
- ▶ Prodotto: $a * 0 = 0$ $a * 1 = a$

Proprietà

■ Assorbimento

- ▶ Somma: $a + (a * b) = a$
- ▶ Prodotto: $a * (a + b) = a$

■ Involuzione

- ▶ Negazione: $(a')' = a$

■ Leggi di De Morgan

- ▶ Somma: $(a + b)' = a' * b'$
- ▶ Prodotto: $(a * b)' = a' + b'$

■ Consenso

- ▶ Somma: $a * b + a' * c + b * c = a * b + a' * c$
- ▶ Prodotto: $(a + b) * (a' + c) * (b + c) = (a + b) * (a' + c)$

Principio di dualità

- Ogni identità deducibile dai postulati dell'algebra di Boole è trasformata in un'altra identità se:

- ▶ Ogni somma è sostituita da un prodotto, e viceversa
- ▶ Ogni elemento identità 0 è sostituito da un elemento identità 1, e vice versa

- Esempi:

Legge di assorbimento

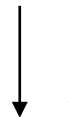
$$a + (a * b) = a$$



$$a * (a + b) = a$$

Elemento neutro

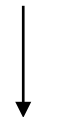
$$a + 1 = 1$$



$$a * 0 = 0$$

Proprietà distributiva

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$$



$$a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

Dimostrazioni

■ Dimostrazioni delle proprietà

- ▶ Metodo esaustivo
- ▶ Metodo algebrico

■ Esempio: $a + a'b = a + b$

Metodo algebrico

| Operazione | Proprietà |
|-----------------------|------------------------|
| $a*1 + a'b$ | Elemento neutro |
| $a(b+b') + a'b$ | Negazione: $x+x'=1$ |
| $ab + ab' + a'b$ | Proprietà distributiva |
| $ab + ab + ab' + a'b$ | Idempotenza |
| $a(b+b') + b(a+a')$ | Distributiva |
| $a*1 + b*1$ | Negazione: $x+x'=1$ |
| $a + b$ | Elemento neutro |

Metodo esaustivo

| a | b | $a+a'*b$ | $a+b$ |
|---|---|-----------|---------|
| 0 | 0 | $0+1*0=0$ | $0+0=0$ |
| 0 | 1 | $0+1*1=1$ | $0+1=1$ |
| 1 | 0 | $1+0*0=1$ | $1+0=1$ |
| 1 | 1 | $1+0*1=1$ | $1+1=1$ |

Rappresentazione di una funzione

■ Funzione di commutazione

- ▶ Una funzione di commutazione a n variabili $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ è una funzione che ha dominio in $\{0, 1\}^n$ e codominio in $\{0, 1\}$:
$$f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

■ Una funzione di commutazione $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ può essere rappresentata in modo comodo utilizzando una tabella della funzione o tabella della verità

- ▶ Una tabella della verità specifica la relazione tra ogni elemento del dominio $\{0, 1\}^n$ di f e l'immagine nel codominio.

Rappresentazione di una funzione

■ Esempio:

| a | b | c | $f(a, b, c)$ |
|----------|----------|----------|--------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Espressioni e funzioni

- Una funzione booleana di n variabili può essere espressa
 - ▶ Da una espressione booleana di n variabili E
- Le proprietà dell'algebra di commutazione
 - ▶ Possono essere utilizzate per manipolare una espressione booleana ed ottenerne una equivalente
 - ▶ Due espressioni booleane $E1$ e $E2$ sono equivalenti se e solo se sono riconducibili alla stessa funzione booleana

Esempio:

$$f(a,b,c) = (a'b')'a = (a+b)*a = aa + ba = a + ba = a$$

$$E1 = (a'b')'a; \quad E2 = (a+b)*a; \quad E3 = aa + ba$$

$$E4 = a + ba; \quad E5 = a$$

$E1$, $E2$, $E3$, $E4$ ed $E5$ sono espressioni booleane equivalenti

Espressioni e funzioni

- Relazione tra funzioni ed espressioni:
 - ▶ Ad una espressione E di n variabili corrisponde un'unica funzione f di n variabili
 - ▶ Viceversa, ad una funzione f di n variabili corrispondono infinite espressioni di n variabili.

Funzione booleana

| a | b | c | $f(a, b, c)$ |
|-----|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |



Espressioni booleane

$$f(a, b, c) = \dots$$

$$f(a, b, c) = (a' * b')' * a$$

$$f(a, b, c) = a$$

Espressioni e funzioni

- Data una funzione booleana, il problema è identificare almeno una espressione booleana ad essa corrispondente
 - ▶ In molte applicazioni dell'algebra booleana uno scopo fondamentale è determinare una buona rappresentazione della funzione booleana
 - ▶ È necessario definire una metrica che indichi la qualità di una soluzione rispetto ad uno o più aspetti (es. Costo, prestazioni, energia...)
 - Esempio: se l'obiettivo è minimizzare il costo del circuito corrispondente a un'espressione, una possibile metrica è il numero di letterali presenti nell'espressione.
 - Si osservi che la metrica è caratterizzata da un valore atteso e da una varianza; quindi, due soluzioni di costo simile (es. $\pm 20\%$) sono da considerarsi equivalenti.

Espressioni e funzioni

■ Data una funzione booleana

- ▶ La soluzione iniziale al problema di determinare una sua espressione consiste nel ricorso alle forme canoniche
- ▶ La soluzione iniziale può essere manipolata per raggiungere l'obiettivo desiderato
 - Ad esempio, riduzione del costo

■ Le forme canoniche più comuni sono:

- ▶ La forma somma di prodotti, o SoP
- ▶ La forma prodotto di somme, o PoS

■ Data una funzione booleana è rappresentata da

- ▶ Una ed una sola forma canonica SoP (disgiuntiva)
- ▶ Una ed una sola forma canonica PoS (coniuntiva)

Forme canoniche

- Si consideri il seguente esempio:

| a | b | $f(a,b)$ |
|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- È intuitivo osservare che la funzione possa essere ottenuta dalla somma (OR) delle seguenti funzioni:

| a | b | $f(a,b)$ | | a | b | $f_1(a,b)$ | | a | b | $f_2(a,b)$ |
|---|---|----------|---|---|---|------------|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | = | 0 | 1 | 1 | + | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 |

Forme canoniche

- Per cui, intuitivamente, si ottiene:

| <u>a</u> | <u>b</u> | <u>f(a,b)</u> |
|----------|----------|---------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

=

| <u>a</u> | <u>b</u> | <u>f₁(a,b)</u> |
|----------|----------|---------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

+

| <u>a</u> | <u>b</u> | <u>f₂(a,b)</u> |
|----------|----------|---------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$f_1(a,b) = a'b$ $f_2(a,b) = ab$

- Infatti

- ▶ Quando **a=0** e **b=1** il prodotto **a'b** assume valore 1 mentre vale 0 in tutti gli altri casi (**f₁**)
- ▶ Quando **a=1** e **b=1** il prodotto **ab** assume valore 1 mentre vale 0 in tutti gli altri casi (**f₂**)

- Osservazione: "**a=0** e **b=1**" significa anche letterale (a,0) in AND con la coppia (variabile, valore) (b,1) cioè, termine prodotto **a'b**

Forme canoniche: Definizioni

■ Mintermine

- ▶ È un termine prodotto in cui compaiono letterali corrispondenti a tutte le variabili della funzione
- ▶ Ad esempio, una funzione nelle variabili **a**, **b**, **c** e **d** potrebbe avere una espressione che contiene i mintermini **a'bc'd** e **ab'cd'** .

Forme canoniche

■ Ne consegue:

| <u>a</u> <u>b</u> | <u>f(a,b)</u> | | <u>a</u> <u>b</u> | <u>f₁(a,b)</u> | | <u>a</u> <u>b</u> | <u>f₂(a,b)</u> |
|-------------------|---------------|---|-------------------|---------------------------|---|-------------------|---------------------------|
| 0 0 | 0 | | 0 0 | 0 | | 0 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | = | 0 1 | 1 | + | 0 1 | 0 |
| 1 0 | 0 | | 1 0 | 0 | | 1 0 | 0 |
| 1 1 | 1 | | 1 1 | 0 | | 1 1 | 1 |

$$f(a,b) = a'b + ab$$

■ In generale

- ▶ Mettendo in OR i mintermini della funzione si ottiene una espressione della funzione: Prima Forma Canonica
- ▶ Nel mintermine una variabile compare:
 - Nella forma x se nella configurazione di ingresso ha valore 1
 - Nella forma x' se nella configurazione di ingresso ha valore 0

Forme canoniche

■ Esempio

► Tabella della verità:

| a | b | c | f(a,b,c) | Mintermini |
|----------|----------|----------|-----------------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $a'b'c$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | $a'bc'$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $a'bc$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $ab'c'$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | abc |

► Prima forma canonica:

$$f(a,b,c) = a'b'c + a'bc' + a'bc + ab'c' + abc$$

Forme canoniche

- Si consideri il nuovamente l'esempio iniziale

| a | b | f(a,b) |
|---|---|--------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

- È intuitivo osservare che la funzione possa essere ottenuta dal prodotto (AND) delle seguenti funzioni:

| a | b | f(a,b) | | a | b | f ₁ (a,b) | | a | b | f ₂ (a,b) |
|---|---|--------|---|---|---|----------------------|---|---|---|----------------------|
| 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | = | 0 | 1 | 1 | * | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 1 | | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 |

Forme canoniche

- Per cui, intuitivamente, si ottiene:

| a | b | f(a,b) |
|---|---|--------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$=$$

| a | b | f ₁ (a,b) |
|---|---|----------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$$*$$

| a | b | f ₂ (a,b) |
|---|---|----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$f_1(a,b) = (a'b')' \quad f_2(a,b) = (ab')'$$

- Infatti

- ▶ Quando $a=0$ e $b=0$ il termine $(a'b')'$ assume valore 0 mentre vale 1 in tutti gli altri casi (f_1)
- ▶ Quando $a=1$ e $b=0$ il termine $(ab')'$ assume valore 0 mentre vale 1 in tutti gli altri casi (f_2)

Forme canoniche

■ Ne consegue:

| <u>a</u> <u>b</u> | <u>f(a,b)</u> | | <u>a</u> <u>b</u> | <u>f₁(a,b)</u> | | <u>a</u> <u>b</u> | <u>f₂(a,b)</u> |
|-------------------|---------------|---|-------------------|---------------------------|---|-------------------|---------------------------|
| 0 0 | 0 | | 0 0 | 0 | | 0 0 | 1 |
| 0 1 | 1 | = | 0 1 | 1 | * | 0 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | | 1 0 | 1 | | 1 0 | 0 |
| 1 1 | 1 | | 1 1 | 1 | | 1 1 | 1 |

$$f(a,b) = (a'b')' * (ab')'$$

■ Applicando le leggi di De Morgan:

$$f(a,b) = (a'b')' * (ab')' = (a + b) * (a' + b)$$

Forme canoniche

■ In generale

- ▶ Mettendo in AND i maxtermini della funzione si ottiene una espressione della funzione: Seconda Forma Canonica
- ▶ Nel maxtermine una variabile compare:
 - Nella forma x se nella configurazione di ingresso ha valore 0
 - Nella forma x' se nella configurazione di ingresso ha valore 1

■ Dove, Maxtermine

- ▶ È un termine somma in cui compaiono letterali corrispondenti a tutte le variabili della funzione
 - Ad esempio, una funzione nelle variabili a, b, c e d potrebbe avere una espressione che contiene i maxtermini $a' + b + c' + d$ e $a + b' + c + d'$.

Forme canoniche

■ Esempio

► Tabella della verità:

| a | b | c | f(a,b,c) | Maxtermini |
|----------|----------|----------|-----------------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $a + b + c$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | $a' + b + c'$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $a' + b' + c$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |

► Seconda forma canonica:

$$f(a,b,c) = (a + b + c) * (a' + b + c') * (a' + b' + c)$$

Prima forma canonica

- La prima forma canonica ha come espressione generale

$$\begin{aligned} f = & (\mathbf{x}_1' \dots \mathbf{x}_n') * f(0, \dots, 0) + \\ & + (\mathbf{x}_1' \dots \mathbf{x}_n) * f(0, \dots, 1) + \\ & + \dots + \\ & + (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) * f(1, \dots, 1) \end{aligned}$$

- Mintermini della funzione f

$$(\mathbf{x}_1' \dots \mathbf{x}_n'), (\mathbf{x}_1' \dots \mathbf{x}_n), \dots, (\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$$

- Valori che la funzione assume quando la configurazione delle variabili in ingresso è $(0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1)$

$$f(0, \dots, 0), f(0, \dots, 1), \dots, f(1, \dots, 1)$$

Prima forma canonica

- La seconda forma canonica ha come espressione generale

$$\begin{aligned} f = & ((x_1' + \dots + x_n') + f(1, \dots, 1)) * \\ & * ((x_1' + \dots + x_n) + f(1, \dots, 0)) * \\ & * \dots * \\ & * ((x_1 + \dots + x_n) + f(0, \dots, 0)) \end{aligned}$$

- Maxtermini della funzione f

$$(x_1' + \dots + x_n'), (x_1' + \dots + x_n), \dots, (x_1 + \dots + x_n)$$

- Valori che la funzione assume quando la configurazione delle variabili in ingresso è $(0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1)$

$$f(0, \dots, 0), f(0, \dots, 1), \dots, f(1, \dots, 1)$$

Teorema di espansione di Shannon

- La descrizione formale introdotta in precedenza deriva direttamente dall'applicazione iterativa del Teorema di espansione di Shannon
- Sia $f: B^n \rightarrow B$ è una funzione booleana
 - Per ogni (x_1, x_2, \dots, x_n) in B^n , si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1' * f_{x_1'} + x_1 * f_{x_1} = \\ &= x_2' * f_{x_2'} + x_2 * f_{x_2} = \\ &= \dots \end{aligned}$$

- E, dualmente:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1' + f_{x_1}) * (x_1 + f_{x_1'}) = \\ &= (x_2' + f_{x_2}) * (x_2 + f_{x_2'}) = \\ &= \dots \end{aligned}$$

Teorema di espansione di Shannon

■ Esempio, SoP:

$$\begin{aligned}f(a, b, c) &= a' * f(0, b, c) + a * f(1, b, c) = \\&= b' * f(a, 0, c) + b * f(a, 1, c) = \\&= c' * f(a, b, 0) + c * f(a, b, 1)\end{aligned}$$

■ Esempio, PoS:

$$\begin{aligned}f(a, b, c) &= (a' + f(1, b, c)) * (a + f(0, b, c)) = \\&= (b' + f(a, 1, c)) * (b + f(a, 0, c)) = \\&= (c' + f(a, b, 1)) * (c + f(a, b, 0))\end{aligned}$$

Teorema di espansione di Shannon

■ Ad esempio:

$$\begin{aligned} f(a,b,c) = & a'b'c' * f(0,0,0) + a'b'c * f(0,0,1) + a'bc' * f(0,1,0) \\ & + a'bc * f(0,1,1) + ab'c' * f(1,0,0) + ab'c * f(1,0,1) + \\ & + abc' * f(1,1,0) + abc * f(1,1,1) \end{aligned}$$

| a | b | c | f(a,b,c) |
|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Prima Forma Canonica
 $a'b'c + a'bc + ab'c' + ab'c + abc$

$(a+b+c) * (a+b'+c) * (a'+b'+c)$

Seconda forma Canonica

Teorema di espansione di Shannon

■ Esempio di espansione completa

$$\begin{aligned}f(a,b,c) = & a'b'c' * f(0,0,0) + a'b'c * f(0,0,1) + \\ & + a'bc' * f(0,1,0) + a'bc * f(0,1,1) + \\ & + ab'c' * f(1,0,0) + ab'c * f(1,0,1) + \\ & + abc' * f(1,1,0) + abc * f(1,1,1)\end{aligned}$$

| a | b | c | f(a,b,c) |
|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Prima forma canonica

$$f(a,b,c) = a'b'c + a'bc + ab'c' + ab'c + abc$$

Seconda forma canonica

$$f(a,b,c) = (a+b+c) * (a+b'+c) * (a'+b'+c)$$

Teorema di espansione di Shannon

- Può essere utilizzato anche su espressioni Booleane

- ▶ Espandendo rispetto ad a l'espressione booleana:

$$f(a,b,c) = ab + b' + a'bc'$$

- ▶ Si ottiene la forma equivalente:

$$f = ab + (ab' + a'b') + a'bc'$$

$$f = a'(b' + bc') + a(b + b') = a'b' + a'bc' + a$$

- ▶ Espandendo rispetto ad a, b e c l'espressione booleana:

$$f(a,b,c) = ab + b' + a'bc'$$

- ▶ Si ottiene la forma equivalente:

$$f = a'(b' + bc') + a(b + b') =$$

$$= a'(b'1 + bc') + a(b'1 + b1) =$$

$$= a'(b'(c' + c) + b(c')) + a(b'(c' + c) + b(c' + c)) =$$

$$= a'b'c' + a'b'c + a'bc' + ab'c' + ab'c +$$

$$+ abc' + abc$$

Manipolazione delle espressioni

- Data un'espressione di una funzione booleana
 - ▶ L'algebra di commutazione permette di manipolarla per ottenere un'espressione equivalente, ma di forma diversa
 - ▶ Eventualmente con caratteristiche meglio rispondenti a particolari requisiti
- Esempio:
 - ▶ Sia data la forma canonica:
$$f(x, y, z) = x'yz' + xyz' + xyz$$
 - ▶ E sia data la funzione di costo costituita dal numero di letterali presenti
 - In questo caso vale 9
 - ▶ Obiettivo: ridurre il costo

Manipolazione delle espressioni

- Dall'espressione di partenza:

$$f(x, y, z) = x'yz' + xyz' + xyz$$

- Applicando la proprietà distributiva e quella della complementazione si ottiene:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x' + x)yz' + xyz = \\ &= 1 * yz' + xyz = yz' + xyz \end{aligned}$$

- Applicando di nuovo la proprietà distributiva si ottiene:

$$f = y(z' + xz)$$

- E ricordando che $a + a'b = a + b$, si ottiene infine:

$$f = y(z' + x) = yz' + xy$$

- La nuova espressione ha un costo di 4 letterali

Manipolazione delle espressioni

- Allo stesso risultato si sarebbe giunti anche:

$$f(x, y, z) = x'yz' + xyz' + xyz$$

- Applicando la proprietà dell'idempotenza si ottiene:

$$f(x, y, z) = x'yz' + xyz' + xyz' + xyz$$

- Applicando la proprietà distributiva

$$f = yz'(x' + x) + xy(z' + z)$$

- Da cui infine

$$f = yz'1 + xy1 = yz' + xy$$

Manipolazione delle espressioni

- In conclusione

- ▶ L'applicazione delle trasformazioni algebriche non permette di identificare una procedura sistematica

- Di conseguenza

- ▶ Non è possibile identificare un algoritmo
 - non si possono realizzare strumenti CAD che consentano di produrre una soluzione ottima a due livelli utilizzando le proprietà dell'algebra
- ▶ Non è possibile sapere se una espressione è quella minima
 - L'immediatezza della bontà del risultato dipende molto dalla scelta delle proprietà da applicare e dall'ordine in cui sono applicate

- Quindi, non è questa la via che si sceglie!