Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 27/01/2020

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Sapendo di aver estratto (senza reinserimento) due carte rosse da un mazzo ben mescolato di 52 carte, qual è la probabilità che la terza carta estratta sia di cuori?

2. Siano $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $Y \sim \text{Bern}(0.5)$ due variabili aleatorie indipendenti, e sia $Z = X + Y$. Determinare la legge di probabilità di Z e graficarla.

3. Siano $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(1,2)$ due variabili aleatorie Gaussiane con coefficiente di correlazione $\rho[X;Y] = 0.5$. Calcolare $\mathsf{E}[(X-Y)^2]$.

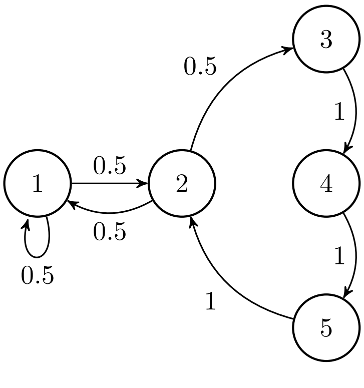
4. In un negozio ci sono due casse che condividono una coda unica. Il primo cliente della coda viene servito dalla prima cassa che si libera. Sapendo che

   - all'orario di chiusura ci sono 10 clienti in coda e che le casse sono già occupate, e
   - il tempo di servizio di ogni cassa è $T \sim \text{Exp}(\lambda = 1/30)$ secondi indipendentemente per ogni cliente,

   calcolare qual è il tempo medio dopo il quale entrambe le casse saranno chiuse.
   Suggerimento: ragionare in termini di oppurtuni split e merge di processi aleatori.

5. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 1.

   (a) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.
   (b) La catena è periodica? Giustificare la risposta
   (c) Qual è la probabilità di trovarsi nello stato 1 dopo un lungo periodo?



6. Si consideri il lancio di due dadi ben bilanciati a 4 facce, e si supponga di ripetere l'esperimento tantissime volte e di annotare ogni volta la somma delle facce risultanti. Qual è il numero minimo di bit per lancio che mediamente servono per descrivere il risultato della somma?

Soluzioni

Problema 1

La probabilità di estrarre una carta di cuori alla terza estrazione (evento C), sapendo di averne estratte 2 rosse (evento R), viene influenzata dal numero di carte di cuori che sono già state estratte. I casi possibili sono 0, 1, oppure 2 carte (rispettivamente eventi A_0, A_1, e A_2), perché sappiamo solo che sono state estratte 2 carte rosse. Grazie alla legge delle probabilità totali possiamo scrivere:

$$\Pr(C|R) = \Pr(C|A_0, R)\Pr(A_0|R) + \Pr(C|A_1, R)\Pr(A_1|R) + \Pr(C|A_2, R)\Pr(A_2|R)$$

dove

$$\Pr(C|A_i, R) = \frac{13-i}{50}, \qquad i = \{0, 1, 2\},$$

perché alla terza estrazione rimangono $13 - i$ carte di cuori su 50 se sono state estratte i carte di cuori nelle prime due estrazioni. Per le tre probabilità restanti possiamo ragionare così: sapendo che sono state estratte 2 carte rosse, lo spazio campionario si riduce alle sole carte rosse, di cui la metà sono di cuori. Per ragioni di simmetria, la probabilità di estrarre un solo cuori sarà $\Pr(A_1|R) = 1/2$, e le probabilità di estrarre 0 oppure 2 cuori saranno identiche, quindi $\Pr(A_0|R) = \Pr(A_2|R) = 1/4$, poiché queste tre probabilità devono sommare a 1.

In definitiva:

$$\Pr(C|R) = \frac{13}{50}\frac{1}{4} + \frac{12}{50}\frac{1}{2} + \frac{11}{50}\frac{1}{4} = 0.24.$$

Problema 2

Usando la legge delle probabilità totali si ha:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_{Z|Y=1}(z)p_Y(1) + f_{Z|Y=0}(z)p_Y(0) && (1)\\ &= \frac{1}{2}\left(f_X(z-1) + f_X(z-0)\right) && (2)\\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le z \le 2, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} && (3) \end{aligned}$$

dove in (2) abbiamo fatto uso dell'indipendenza tra X e Y. Da notare che $Z \sim \mathcal{U}[0, 2]$, da cui il grafico segue facilmente.

Problema 3

Il coefficiente di correlazione è definito come

$$\rho[X; Y] = \frac{\mathsf{E}[XY]}{\sqrt{\mathsf{Var}[X]\mathsf{Var}[Y]}}$$

da cui si ricava che

$$\mathsf{E}[XY] = \rho[X; Y]\sqrt{\mathsf{Var}[X]\mathsf{Var}[Y]} = 0.5 \cdot \sqrt{1 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il calcolo richiesto si può impostare come

$$\mathsf{E}[(X-Y)^2] = \mathsf{E}[X^2] - 2\mathsf{E}[XY] + \mathsf{E}[Y^2]$$

dove

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X^2] &= \mathsf{Var}[X] + \mathsf{E}[X]^2 = 1 && (4)\\ \mathsf{E}[Y^2] &= \mathsf{Var}[Y] + \mathsf{E}[Y]^2 = 2 + 1 = 3. && (5) \end{aligned}$$

Quindi $\mathsf{E}[(X-Y)^2] = 1 - \sqrt{2} + 3 = 4 - \sqrt{2}$.

Problema 4

Poiché i tempi di servizio ad ogni cassa sono esponenziali e indipendenti, all'uscita di ogni cassa si osserva un processo di arrivo di Poisson $\mathcal{PP}(\lambda = 1/30)$. Dunque si hanno due processi di Poisson indipendenti che possono anche essere interpretati come il risultato di uno splitting di un unico processo di Poisson con tasso doppio, cioé $\mathcal{PP}(\lambda = 2/30)$. Equivalentemente, ogni utente in cima alla coda deve aspettare mediamente un tempo di $30/2 = 15$ secondi prima di essere servito. Il tempo medio totale per servire i 10 clienti sarà dato dal tempo totale che l'ultimo cliente in coda rimane nel negozio, cioé $15 \cdot 10 + 30 = 180$ secondi, dove alla fine abbiamo sommato i 30 secondi che mediamente passano per servire l'ultimo cliente.

Problema 5

1. Tutti gli stati sono ricorrenti.
2. La catena non è periodica, grazie, ad esempio, all'autoanello nello stato 1.
3. Siccome c'è una sola classe ricorrente, esiste la distribuzione stazionaria, e si può impostare il sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 + \pi_5 \\ \pi_3 = 0.5\pi_2 \\ \pi_4 = \pi_3 \\ \pi_5 = \pi_4 \\ 1 = \sum_{i=1}^{5} \pi_i \end{cases}$$

   che, sostituendo le probabilità in funzione di π_1 nell'ultima equazione, può essere risolto come

$$1 = \pi_1(1 + 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5)$$

   cioé $\pi_1 = 2/7$.

Problema 6

Le possibili somme vanno da un minimo di $X = 2$ a un massimo di $X = 8$, e le probabilità sono

$$p_X(2) = p_X(8) = \frac{1}{16} \tag{6}$$

$$p_X(3) = p_X(7) = \frac{2}{16} \tag{7}$$

$$p_X(4) = p_X(6) = \frac{3}{16} \tag{8}$$

$$p_X(5) = \frac{4}{16}. \tag{9}$$

Il numero minimo di bit che in media servono per descrivere la somma del lancio dei due dadi è pari all'entropia della somma dei due dadi. L'entropia si calcola come

$$\mathsf{H}(X) = -\sum_{x=2}^{8} p_X(x) \log_2 p_X(x) \tag{10}$$

$$= 2\left(\frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{3}{16} \cdot \log_2 \frac{16}{3}\right) + \frac{1}{4} \cdot 4 \tag{11}$$

$$\approx 3.1556 \text{ bit/lancio.} \tag{12}$$