Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 21/02/2018

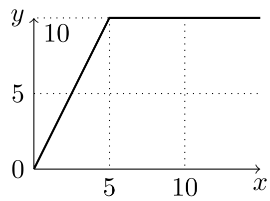
- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

1. Si consideri un mazzo di 52 carte da poker. Vi vengono distribuite 5 carte a caso dal mazzo. Avendo osservato che la prima carta è un 5 di cuori, qual è la probabilità di ottenere una scala colore? *Una scala colore si ottiene con* 5 *carte in sequenza dello stesso seme (in questo caso cuori). Nella scala l'asso può precedere il* 2 *o seguire il re.*

2. Due v.a. X e Y sono Gaussiane e indipendenti, con $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(3, 9)$. Determinare:
   (a) la distribuzione congiunta di X e Y;
   (b) il coefficiente di correlazione tra X e Y;
   (c) il valore atteso di $Z = X^2\, Y$;

3. Un segnale ha un'ampiezza casuale X distribuita esponenzialmente con media 1. Prima della trasmissione, l'ampiezza del segnale viene distorta da un amplificatore non ideale.

   La relazione ingresso/uscita dell'amplificatore è $Y = \min\{2X, 10\}$, per $X \geq 0$, come mostrato in figura. Si determini la ddp f_Y dell'ampiezza del segnale trasmesso Y. *Suggerimento: aiutarsi con la figura per capire come vengono rimappate le probabilità. Controllare che la* f_Y *integri a* 1.



4. Ad un distributore di carburanti i clienti arrivano secondo un processo di Poisson con tasso $\lambda = 15$ clienti all'ora. Indipendentemente da tutto il resto, ogni cliente si serve alla pompa di benzina con prob. 0.4 spendendo mediamente 30 eur, mentre si serve di gasolio con prob. 0.6 spendendo mediamente 20 eur. Determinare:
   (a) il ricavo orario medio del distributore;
   (b) la probabilità che nessun cliente si serva alla pompa di benzina in un intervallo di 30 minuti;
   (c) a partire dall'apertura del distributore, il tempo medio per osservare il primo cliente, e il tempo medio per osservare il primo cliente benzina.

5. Si trova una moneta per terra e si vuole capire se è bilanciata oppure no. A tale scopo si costruisce un test come segue: si lancia la moneta n volte e si decide che è bilanciata se il numero di teste osservate non si discosta per più del 5% da $n/2$ (il 5% si riferisce a $n/2$). Supponendo che in effetti la moneta sia bilanciata, quanto deve valere n affinché il test funzioni nel 95% dei casi? *Suggerimento: si utilizzi l'approssimazione Gaussiana della Binomiale.*

6. Applicando il metodo della trasformazione inversa, proporre un algoritmo che partendo da un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ generi un numero casuale distribuito come una Erlang-2 di parametro $\lambda = 1$.

Soluzioni

Problema 1

Sapendo che è stato estratto il 5 di cuori, il numero di mani possibili è $\binom{51}{4}$. Il numero di scale colore che si possono formare con il 5 di cuori sono 5. Pertanto la probabilità si calcola come

$$\frac{5}{\binom{51}{4}} \approx 2 \cdot 10^{-5}. \tag{1}$$

Problema 2

1. Siccome X e Y sono indipendenti, la distribuzione congiunta si ricava come prodotto delle distribuzioni marginali:
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi 9}} e^{-\frac{(y-3)^2}{2\cdot 9}}. \tag{2}$$

2. Dato che X e Y sono indipendenti, il coefficiente di correlazione è nullo.

3. Il valore atteso di Z è:
$$\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}[X^2 Y] = \mathsf{E}[X^2]\mathsf{E}[Y] = 3. \tag{3}$$

Problema 3

Come si osserva dalla caratteristica ingresso/uscita dell'amplificatore, tutte le ampiezze fino a $X = 5$ vengono moltiplicate per 2, dopodiché vengono tutte limitate al valore massimo di 10. Questo suggerisce che la distribuzione di Y ha una componente discreta in $y = 10$:

$$\Pr(Y = 10) = \Pr(X \geq 5) = e^{-5}. \tag{4}$$

Invece, per $0 < y < 10$ la legge che lega ingresso e uscita è biunivoca, e tenendo conto della pendenza della retta $y = 2x$ si ha:
$$f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(y/2) = \frac{1}{2} e^{-y/2}, \qquad 0 < y < 10. \tag{5}$$

Problema 4

1. Mediamente si hanno 15 clienti all'ora, di cui $15 \cdot 0.4 = 6$ clienti benzina, e $15 \cdot 0.6 = 9$ clienti gasolio. Considerando le spese medie, in totale il ricavo medio orario è: $6 \cdot 30 + 9 \cdot 20 = 360$ eur.

2. Il numero di clienti benzina in un intervallo di 30 minuti è una v.a. di Poisson con media $15 \cdot 0.4 \cdot 1/2 = 3$. Dunque la probabilità che non ci sia alcun arrivo è e^{-3}.

3. Considerando il processo di Poisson complessivo, il tempo al primo arrivo è distribuito esponenzialmente con media $60/15 = 4$ minuti. Considerando solo i clienti benzina, il tempo al primo arrivo è distribuito esponenzialmente con media $60/6 = 10$ minuti.

Problema 5

Sia S il numero di teste osservate. Formalizzando il test, si richiede che

$$\Pr(|S - n/2| \leq 0.05n/2) \geq 0.95. \tag{6}$$

Dato che la moneta è in realtà bilanciata, S è distribuita in modo Binomiale con parametri n e $p = 0.5$, dunque con media $0.5n$ e varianza $0.25n$. Prevedendo un n abbastanza grande, usiamo l'approssimazione Gaussiana della Binomiale e procediamo con una standardizzazione dell'evento in (6):

$$\Pr\left(\frac{-0.05n/2}{\sqrt{0.25n}} \leq \frac{S - n/2}{\sqrt{0.25n}} \leq \frac{0.05n/2}{\sqrt{0.25n}}\right) \geq 0.95. \tag{7}$$

$$\Pr\left(-\frac{\sqrt{n}}{20} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geq 0.95. \tag{8}$$

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right) - 1 \geq 0.95 \tag{9}$$

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{20}) \geq 0.975 \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{20} \geq \Phi^{-1}(0.975) = 1.96 \tag{11}$$

$$n \geq 1537. \tag{12}$$

Problema 6

La v.a. Y_2 Erlang-2 può essere interpretata come la distribuzione del tempo del secondo arrivo in un processo di Poisson. Il tempo del secondo arrivo è la somma di due tempi esponenzialmente distribuiti con parametro $\lambda = 1$, cioè $Y_2 = T_1 + T_2$, dove $T_1 \sim \text{Exp}(1)$ e $T_2 \sim \text{Exp}(1)$ con T_1 e T_2 indipendenti.

Per generare T_1 e T_2 uso due volte il generatore di v.a. Esponenziali usando il metodo della trasformata inversa, descritto come segue:

1. Genero v.a. $U_1 \sim \mathcal{U}([0, 1])$ e $U_2 \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indipendentemente
2. Calcolo $T_1 = -\log(U_1)$ e $T_2 = -\log(U_2)$
3. Calcolo $Y_2 = T_1 + T_2$.