Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 04/09/2017

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

1. Si consideri il gioco del Lotto. Qual é la probabilitá che giocando 5 numeri si vinca una cinquina? E se si giocano 10 numeri? *Nel gioco del Lotto vengono estratti 5 numeri vincenti senza reinserimento da un'urna con 90 numeri. Si vince una cinquina se i cinque numeri estratti sono tra i numeri giocati.*

2. Siano X e Y due v.a. indipendenti con media nulla e varianza unitaria. Considerando $Z = X + Y$ e $W = X - Y$

   (a) determinare $\mathsf{E}[Z]$ e $\mathsf{E}[W]$

   (b) determinare $\mathsf{E}[Z^2]$ e $\mathsf{E}[W^2]$

   (c) determinare se Z e W sono correlate.

3. Un cliente viene servito alla cassa di un supermercato in un tempo casuale distribuito in modo Esponenziale con tasso μ, indipendentemente da tutto il resto. I clienti arrivano ad una cassa seguendo un processo di Poisson a tasso λ. Si consideri l'istante iniziale dove la coda alla cassa é vuota e un cliente inizia ad essere servito. Quanti clienti saranno in coda, mediamente, quando il primo cliente lascerá la cassa? *Suggerimento: considerare il merging di due opportuni processi di Poisson.*

4. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 2 al tempo 0.

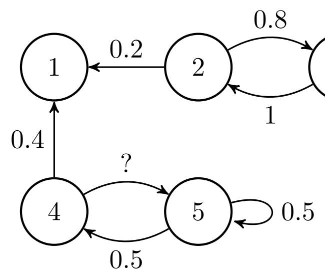
   (a) Determinare la probabilitá mancante.

   (b) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.

   (c) Qual é la probabilitá di essere ancora nello stato 2 dopo n passi della catena, per $n = 1, 2, \ldots$?

   (d) Qual é la probabilitá di essere nello stato 1 dopo n prove?

   (e) Qual é la probabilitá di essere nello stato 5 dopo n prove?



5. Si vuole caratterizzare la distribuzione di una v.a. X. Precedenti osservazioni hanno mostrato che $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (ipotesi nulla H_0). Si vuole testare la validitá di un nuovo modello in cui $X \sim \mathcal{N}(2,1)$ (ipotesi alternativa H_1). Per fare ció si osservano n v.a. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e si rifiuta il vecchio modello se $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i > 1$.

   (a) Determinare il valore di n tale che la probabilitá di falso rifiuto sia minore di 0.05.

   (b) Qual é la corrispondente probabilitá di falsa accettazione?

6. Avendo a disposizione un generatore di v.a. uniformi in $[0,1]$, descrivere un algoritmo che genera una coppia di v.a. (X_1, X_2) tale che $X_i \sim \mathcal{U}[0,i]$ e tale che $X_1 + X_2 > 1$. Mediamente quanti numeri casuali bisogna generare prima di osservare una coppia (X_1, X_2) valida?

Soluzioni

Problema 1

Il problema si puó risolvere con le probabilitá ipergeometriche. Si hanno 90 numeri partizionati in 5 numeri giocati e 85 non giocati. Si estraggono 5 numeri di cui ne vogliamo 5 coincidenti con quelli giocati e 0 non coincidenti:

$$\Pr(\text{Cinquina con 5 numeri giocati}) = \frac{\binom{85}{0}\binom{5}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

Analogamente, se si giocano 10 numeri, la probabilitá cercata é:

$$\Pr(\text{Cinquina con 10 numeri giocati}) = \frac{\binom{85}{5}\binom{5}{5}}{\binom{90}{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

Problema 2

1. $\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}[X+Y] = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y] = 0$, $\mathsf{E}[W] = \mathsf{E}[X-Y] = \mathsf{E}[X] - \mathsf{E}[Y] = 0$
2. Poiché $\mathsf{E}[X^2] = \mathsf{Var}[X] = 1$ e $\mathsf{E}[Y^2] = \mathsf{Var}[Y] = 1$, e dall'indipendenza di X e Y segue che $\mathsf{E}[XY] = 0$, si ha $\mathsf{E}[Z^2] = \mathsf{E}[(X+Y)^2] = \mathsf{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = 2$, e $\mathsf{E}[W^2] = \mathsf{E}[(X-Y)^2] = \mathsf{E}[X^2 - 2XY + Y^2] = 2$
3. La correlazione tra Z e W dipende dal termine $\mathsf{E}[ZW] = \mathsf{E}[(X+Y)(X-Y)] = \mathsf{E}[X^2 - Y^2] = 0$, che dunque ne dimostra l'incorrelazione.

Problema 3

I tempi di servizio esponenziali alla cassa possono essere interpretati come tempi di interarrivo di un processo di Poisson a tasso μ. Facendo il merging tra i due processi di Poisson, si ha un processo con tasso $\lambda + \mu$. Nel processo unione, il numero di arrivi di tipo *cliente* prima dell'arrivo di tipo *servizio completato* é una v.a. Geometrica con supporto $\{0, 1, 2, \ldots\}$ e probabilitá di successo $\mu/(\lambda + \mu)$. Pertanto, il numero medio di arrivi di tipo cliente prima di un arrivo di tipo servizio é $\frac{\lambda+\mu}{\mu} - 1 = \lambda/\mu$.

Problema 4

1. La probabilitá mancante é 0.6, perché la somma delle probabilitá uscenti dallo stato 4 deve dare 1.
2. Gli stati sono tutti transienti tranne lo stato 1 che é ricorrente.
3. Di sicuro negli istanti di tempo dispari non é possibile trovarsi nello stato 2. Negli istanti di tempo pari ci si puó trovare in 2 solo se si fanno sempre transizioni nello stato 3. Quindi si ha

$$\Pr(X_n = 2) = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ 0.8^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

4. La probabilitá di trovarsi nello stato 1 si puó calcolare come il complemento a 1 delle probabilitá di trovarsi in 2 e in 3. Seguendo un ragionamento analogo al punto precedente, si ha

$$\Pr(X_n = 1) = 1 - \Pr(X_n = 2) - \Pr(X_n = 3) = \begin{cases} 1 - 0.8^{(n+1)/2} & n \text{ dispari} \\ 1 - 0.8^{n/2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

5. Non é possibile raggiungere lo stato 5 dallo stato 2, quindi $\Pr(X_n = 5) = 0$.

Problema 5

1. Poiché tutte le v.a. X_i sono i.i.d., si ha $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(0, 1/n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} Z$ sotto l'ipotesi H_0. La probabilitá di falso rifiuto é

$$\Pr\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i > 1; H_0\right) \overset{!}{\leq} 0.05$$

$$\Pr\left(\frac{1}{\sqrt{n}} Z > 1\right) = 1 - \Phi(\sqrt{n}) \overset{!}{\leq} 0.05$$

$$\Phi(\sqrt{n}) \geq 0.95$$

Il primo valore di n che soddisfa la diseguaglianza é $n = 3$.

2. La probabilitá di falsa accettazione é

$$\Pr\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i < 1; H_1\right) = \Pr\left(\frac{Z}{\sqrt{3}} + 2 < 1\right) = \Phi(-\sqrt{3}) \approx 0.0416$$

Problema 6

L'algoritmo é come segue:

1. Genero due v.a. $U_1 \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $U_2 \sim \mathcal{U}[0,1]$ indipendentemente.
2. Assegno $X_1 = U_1$, e $X_2 = 2U_2$.
3. Se $X_1 + X_2 > 1$ allora tengo la coppia (X_1, X_2), altrimenti torno al punto 1.

Siccome tutte le prove sono indipendenti, il numero di prove al primo successo é distribuito in modo Geometrico con prob. di successo $\Pr(X_1 + X_2 > 1)$. Per valutare questa probabilitá si puó ricorrere al metodo grafico:

$$\Pr(X_1 + X_2 > 1) = 1 - \Pr(X_1 + X_2 \leq 1) = 1 - \frac{1/2}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

dunque il primo successo accade in media dopo 4/3 prove.