# Grammatiche

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria
Politecnico di Milano

13 marzo 2024

# Modelli Generativi

## Grammatiche

- I modelli di linguaggio/calcolo visti finora definiscono un linguaggio tramite l'*elaborazione* della stringa che gli appartiene
- Vediamo un modello *generativo* del linguaggio: la grammatica
- In generale, una *grammatica* o *sintassi* è un insieme di regole per generare *frasi* di un linguaggio
- Modello molto antico (Pāṇini ne fornì una per il sanscrito tra il 6º e il 4º secolo a.C.), ma di grande efficacia

# Grammatica come sistema di riscritture

## Esempi (informali)

- "Una frase è formata da un soggetto seguito da un predicato"
  - "Un soggetto è un sostantivo, o un pronome, oppure ..."
  - "Un predicato è un verbo seguito da complementi, oppure ..."
  - Frase $\rightarrow$ soggetto.predicato $\rightarrow$ "Pierino mangia la mela"
  - Specifica sintattica: vale anche "La mela mangia Pierino"
- "Una funzione `ANSI-C-89` è composta da un prototipo, una parte dichiarativa, una esecutiva"
  - Programma $\rightarrow$ prototipo.dichiarativa.esecutiva $\rightarrow$ `int f(void) {int a; a=a+1; return a;}`
- "Un cartello di segnaletica verticale è di obbligo, divieto, pericolo, precedenza,..."
  - "Un cartello di pericolo è di forma triangolare, bordato in rosso e contiene..."

# Grammatica come sistema di riscritture

## Riscritture per raffinamenti successivi

- Le regole di una grammatica descrivono un "oggetto principale" (libro, protocollo, messaggio grafico) come un insieme ordinato di "componenti"
- La descrizione è fornita fino ad arrivare al livello di dettaglio desiderato (carattere, bit, forma geometrica elementare)
- Ogni passo di riscrittura può offrire una o più alternative
  - Il soggetto può essere un nome, un pronome ...
- Spesso si tende a chiamare *lessico* la descrizione grammaticale delle singole "parole", *sintassi* quella della loro composizione
  - Dal nostro punto di vista, è un riuso dello stesso modello

# Grammatica

## Definizione formale

- Una grammatica è una quadrupla $G = \langle \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n, \mathbf{P}, S \rangle$
  - $\mathbf{V}_t$: alfabeto o vocabolario *terminale*
  - $\mathbf{V}_n$: alfabeto o vocabolario *nonterminale*
  - $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n \cup \mathbf{V}_t$: alfabeto o vocabolario
  - $S \in \mathbf{V}_n$: elemento di $\mathbf{V}_n$ detto *assioma* o *simbolo iniziale*
  - $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{V}_n^+ \times \mathbf{V}^*$ insieme delle produzioni sintattiche o regole di riscrittura
- Per semplicità di notazione, indicheremo gli elementi $p \in \mathbf{P}$, $p = \langle \alpha, \beta \rangle$ come $p = \alpha \to \beta$

# Grammatica

## La relazione di derivazione

- Definiamo la relazione di derivazione immediata $\underset{G}{\Rightarrow}$ per una grammatica $G = \langle \mathbf{V}_t, \mathbf{V}_n, \mathbf{P}, S \rangle$ come $\alpha \underset{G}{\Rightarrow} \beta$ se e solo se
  $\alpha \in V^+, \beta \in V^*, \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta = \alpha_1\beta_2\alpha_3,\ \alpha_2 \rightarrow \beta_2 \in \mathbf{P}$
- Esempio: Rispetto a $G = \langle \{ab\}, \{S, R\}, \{S \rightarrow aR, R \rightarrow bS, S \rightarrow \varepsilon\}, S \rangle$, abbiamo che $abaR \underset{G}{\Rightarrow} ababS$ ma non è vero che $abaR \underset{G}{\Rightarrow} aba$
- Dove non ambiguo, ometteremo il pedice $G$ che indica la grammatica
- Definiamo $\overset{*}{\Rightarrow}$ come la chiusura riflessiva e transitiva di $\Rightarrow$

## Linguaggio generato da una grammatica

Il linguaggio $L(G)$ generato dalla grammatica $G$ è l' insieme di tutte e sole le stringhe $x$ di soli caratteri di $\mathbf{V}_t$ tali che $S \overset{*}{\Rightarrow} x$.

## Alcuni esempi - 1

### Una prima grammatica semplice $G_1$

- $\mathbf{V}_t = \{a, b, c\}$, $\mathbf{V}_n = \{S, A, B, C\}$ con assioma $S$
- $\mathbf{P} = \{S \to A,\ A \to aA,\ A \to B,\ B \to bB,\ B \to C,\ C \to cC,\ C \to \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione è
  $S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow aaB \Rightarrow aaC \Rightarrow aacC \Rightarrow aaccC \Rightarrow aacccC \Rightarrow aaccc$
- Un'altra possibile derivazione è $S \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow bB \Rightarrow bC \Rightarrow b$
- Linguaggio generato da $G$, $L(G) = \{a^*b^*c^*\}$

## Alcuni esempi - 2

### Qualcosa di più sostanzioso $G_2$

- $\mathbf{V}_t = \{a, b\}, \mathbf{V}_n = \{S\}$ assioma $S$
- $\mathbf{P} = \{S \rightarrow aSbS, S \rightarrow \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$
- Una ulteriore possibile derivazione
  $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow aSbaSbS \Rightarrow abaSbS \Rightarrow ababS \Rightarrow abab$
- Linguaggio generato dalla grammatica? Coppie di $a$ e $b$ “ben parentetizzate”

# Alcuni esempi - 3

## Qualcosa di *ancora* più sostanzioso $G_3$

- $\mathbf{V}_t = \{a, b, c\}, \mathbf{V}_n = \{S, A, B, C, D\}$ assioma $S$
- $\mathbf{P} = \{S \to aACD,\ A \to aAC,\ A \to \varepsilon,\ B \to b, CD \to BDc, CB \to BC, D \to \varepsilon\}$
- Una possibile derivazione:
  $S \Rightarrow aACD \Rightarrow aaACCD \Rightarrow aaaACCCD \Rightarrow aaaACCCD \Rightarrow aaaCCCD \Rightarrow aaaCCBDc \Rightarrow aaaCCBDc \Rightarrow aaaCBCDc \Rightarrow aaaBCCDc \Rightarrow aaaBCBDcc \Rightarrow aaaBBCDcc \Rightarrow aaaBBBDccc \Rightarrow aaaBBBccc \stackrel{*}{\Rightarrow} aaabbbccc$
- Linguaggio generato: $L(G) = \{a^n b^n c^n\}$

# Alcune domande “naturali”

## Utilità pratica

- Dove è possibile utilizzare grammatiche in pratica?

## Espressività

- Quali linguaggi è possibile esprimere con una data grammatica?

## Relazione con i riconoscitori

- Che relazione sussiste tra i linguaggi generati dalle grammatiche e i linguaggi riconosciuti dagli automi?

# Usi pratici delle grammatiche

## Modello descrittivo

- Le grammatiche sono ampiamente usate come modello descrittivo di linguaggi di programmazione (C, Scheme, Pascal, ...) e descrizione dati (JSON)
    - Esiste per alcune di esse la possibilità di ottenere automaticamente l'automa riconoscitore del linguaggio generato

## Modello generativo

- Generazione automatizzata di input di test per programmi
- Sintesi di frasi in linguaggio "naturale"

# Espressività delle grammatiche

## Quali linguaggi è possibile esprimere

- Negli esempi precedenti abbiamo visto come sia possibile generare linguaggi che sappiamo essere riconosciuti, usando un automa a potenza minima
  - Da un FSA: è facile costruire un FSA det. a 3 stati che riconosce $L(G_1)$
  - Da un PDA: il riconoscitore di $L(G_2)$ è stato un esempio che abbiamo visto durante le precedenti lezioni
  - Da una MT: serve una MT per riconoscere $L(G_3) = a^n b^n c^n$
- É possibile classificare le grammatiche in base al loro potere generativo
  - ovvero in base alla famiglia di appartenenza del linguaggio generato

# Espressività delle grammatiche

## Quali linguaggi è possibile esprimere? La gerarchia di Chomsky

- 4 classi, a seconda delle limitazioni (crescenti) imposte sulle produzioni $\alpha \to \beta$

$A \to B$

$\in V_n^+$ $V^*$

| Tipo | Nome | Limitazione Produzioni |
|---|---|---|
| 0 | Non limitate | nessuna |
| 1 | Monotone (non-decreasing) | $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$ |
| 1 | Dipendenti dal contesto | $\alpha = \gamma A \delta \quad \beta = \gamma\chi\delta, \chi \neq \varepsilon$ o $S \to \varepsilon$ |
| 2 | Libere dal contesto | $\lvert\alpha\rvert = 1$ |
| 3 | Regolari | di forma $A \to a, A \to aA$, oppure $A \to a, A \to Aa$ con $a \in \mathbf{V}_t, A \in \mathbf{V}_n$ |

∃ UN RICONOSCITORE CHE RICONOSCE SE UNA STRINGA ∈ AL LINGUAGGIO

- Una grammatica più potente genera tutti i linguaggi di una meno potente. Domanda: l'inclusione è stretta?

# A quali automi corrispondono?

## Grammatiche Regolari e FSA

- Linguaggi generati da grammatiche regolari $\equiv$ riconosciuti da FSA

## Dall'FSA $\mathcal{A}$ alla grammatica

- Poniamo $\mathbf{V}_n = \mathbf{Q}, \mathbf{V}_t = \mathbf{I}, S = \langle q_0 \rangle$
- Per ogni $\delta(q, i) = q'$ aggiungiamo $\langle q \rangle \to i \langle q' \rangle$ all'insieme $\mathbf{P}$
- Se $q' \in \mathbf{F}$ per una data $\delta(q, i) = q'$, aggiungiamo anche $\langle q \rangle \to i$ all'insieme $\mathbf{P}$
- Facile mostrare per induzione che $\delta^*(q_0, x) = q'$ sse $\langle q_0 \rangle \stackrel{*}{\Rightarrow} x \langle q' \rangle$

## Dalla grammatica all'FSA (non deterministico)

- $\mathbf{Q} = \mathbf{V}_n \cup \{q_f\},\ \mathbf{I} = \mathbf{V}_t,\ q_0 = S,\ \mathbf{F} = \{q_f\}$
- Se $A \to bC \in \mathbf{P}$, $\delta(A, b) = C$; Se $A \to b \in \mathbf{P}$, $\delta(A, b) = q_f$

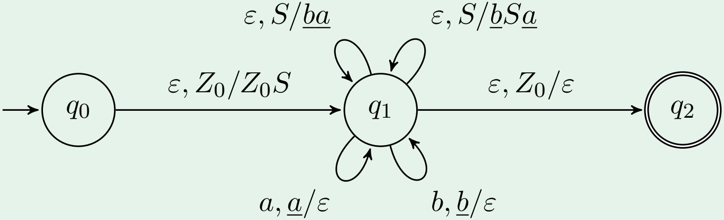
# A quali automi corrispondono?

## Grammatiche Libere dal Contesto e AP-ND

- I linguaggi generati dalle grammatiche libere dal contesto coincidono con i riconosciuti dagli AP non deterministici
- Dimostrazione non banale; intuizione: salvo in pila la coda della forma di frase

## Dalla grammatica all'AP ND: un esempio illustrativo

- Data $\langle \{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to ab\}, S \rangle$



# A quali automi corrispondono?

## Grammatiche non limitate e MT

- Le grammatiche non limitate (tipo 0) corrispondono alle MT
- Costruiamo, senza pretesa di formalizzazione qui, una MT ND che accetti $L(G)$
- $\mathcal{M}$ ha un nastro di memoria, inizializzato con $Z_0S$
- La stringa da riconoscere è sul nastro di ingresso
- Il nastro di memoria viene scandito alla ricerca di una parte sinistra di una qualche produzione $p \in \mathbf{P}$
- Quando una viene trovata (scelta nondeterministicamente), viene sostituita con la sua parte destra
- Se ve n'è più di una, si opera ancora nondeterministicamente

# Grammatiche non limitate e MT

## Funzionamento della MT

- Per come abbiamo costruito la MT ND, sappiamo che

$$\alpha \Rightarrow \beta \text{ se e solo se } c = \langle q, Z_0, \alpha\rangle \overset{*}{\vdash} \langle q, Z_0, \beta\rangle$$

- In questo modo, quando (e *se*) sul nastro di memoria si raggiunge un contenuto fatto di soli elementi di $\mathbf{V}_t$, lo si può confrontare con la stringa in ingresso $x$ e
  - se coincide accettare $x$
  - se non coincide, questa computazione tra quelle eseguite nondeterministicamente non è di accettazione
- N.B. Il nondeterminismo della MT è utile, ma non essenziale
- Resta il problema di sapere *se* la MT termina...

# Grammatiche non limitate e MT

## Emulare una MT con una grammatica non ristretta

- Senza perdere di generalità, emuliamo una MT $\mathcal{M}$ a nastro singolo con una grammatica $G$ non ristretta
- Considerato che $G$ può "manipolare" solo elementi di $\mathbf{V}_n$, faccio in modo che generi stringhe della forma $x\blacklozenge X$ con $\blacklozenge \in \mathbf{V}_n, x \in \mathbf{V}_t^*$ e $X$ che è costituita da "copie nonterminali" degli elementi di $X$
  - Ad esempio, se $x = abac$, genero la stringa $abac\blacklozenge ABAC$
- Obiettivo: avere una derivazione $x\blacklozenge X \overset{*}{\Rightarrow} x$ se e solo se $x$ è accettata da $\mathcal{M}$
- Simuleremo ogni mossa di $\mathcal{M}$ con una derivazione diretta di $G$

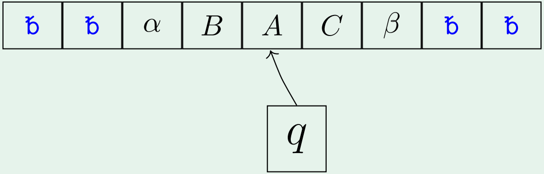
# Grammatiche non limitate e MT

## Emulazione della impostazione del nastro con parte iniziale di $G$

- Assumendo $\mathbf{I} = \mathbf{V}_t = \{a, b\}$ la parte delle produzioni di $G$ che genera le stringhe appena descritte è:
  - $S \to SA'A,\ S \to SB'B,\ S \to \blacklozenge$ (genero coppie di simboli)
  - $AA' \to A'A,\ BA' \to A'B$ (faccio "scorrere" le $A'$ a sx)
  - $AB' \to B'A,\ BB' \to B'B$ (faccio "scorrere" le $B'$ a sx)
  - $\blacklozenge A' \to a\blacklozenge,\ \blacklozenge B' \to b\blacklozenge$ (quando "scorro" attraverso $\blacklozenge$ trasformo il nonterminale in terminale)

# Grammatiche non limitate e MT

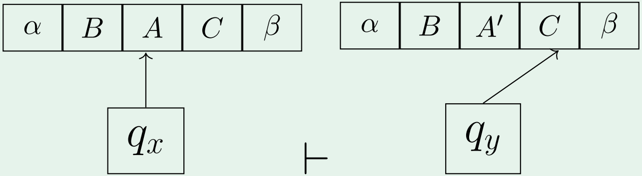
## Emulare le mosse




- Rappresento la configurazione qui sopra con $\blacklozenge \alpha B Q A C \beta$
- Se è definita:
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', R \rangle$ aggiungo $QA \rightarrow A'Q'$ alle prod. di $G$
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', S \rangle$ aggiungo $QA \rightarrow Q'A'$ alle prod. di $G$
  - $\delta(q, A) = \langle q', A', L \rangle$ aggiungo, $\forall B$ nell'alfabeto di $\mathcal{M}$, $BQA \rightarrow Q'BA'$ alle prod. di $G$ (n.b. l'alfabeto di $\mathcal{M}$ è unico)

# Grammatiche non limitate e MT

## Emulare le mosse




- se e solo se $\blacklozenge \alpha B Q_x A C \beta \Rightarrow \blacklozenge \alpha B A' Q_y C \beta$
- La costruzione di $G$ va completata aggiungendo regole che cancellano tutto ciò che sta a destra del $\blacklozenge$ ($\blacklozenge$ incluso) se e solo se la configurazione della $\mathcal{M}$ è accettante, e.g. $\blacklozenge \alpha B Q_f A C \beta$

# Rimanenti corrispondenze

## Automi a pila deterministici

- Esiste un sottoinsieme (proprio) delle grammatiche libere dal contesto che genera i linguaggi riconosciuti dagli AP deterministici
- Restrizione difficile da esprimere sulla forma delle produzioni
- Dettagliata nel corso di Formal Languages and Compilers

## Grammatiche dipendenti dal contesto

- Le grammatiche di tipo 1 corrispondono a un sottoinsieme delle MT di cui è certo che terminino sempre
- N.B. non si tratta delle uniche MT che terminano sempre
- Consentono sempre di sapere se una stringa $x$ è generata da $G$ (si può costruire l'insieme delle stringhe gen. da $G$ lunghe quanto $x$ e vedere se essa appare)