Informazione e Stima: Esercitazione 3

davide.scazzoli@polimi.it

2023

1 Densità di probabilità

Dal testo del problema riscriviamo:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \gamma(1+z^2) & \text{se } -2 < z < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

1.1 a)

Devo imporre due condizioni, la prima è che tutti i valori di f_Z devono essere positivi:

$$(1+z^2) > 0 \quad \text{sempre, quindi: } \gamma \geq 0 \tag{2}$$

La seconda condizione è che l'area di f_Z deve essere unitaria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = 1 \tag{3}$$

$$\int_{-2}^{1} \gamma(1+z^2)dz = \gamma \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-2}^{1} = 6\gamma \overset{!}{=} 1 \rightarrow \gamma = \frac{1}{6} \tag{4}$$

1.2 b)

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)dt = \begin{cases} 0 & z \leq -2 \\ 1 & z \geq 1 \\ \frac{1}{6}\left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{-2}^{z} & -2 < z < 1 \end{cases} \tag{5}$$

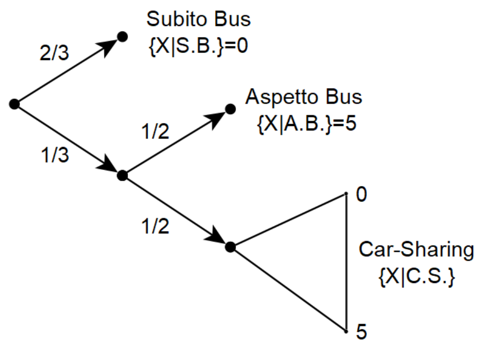
$$= \begin{cases} 0 & z \leq -2 \\ 1 & z \geq 1 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{z^3}{3} + z + \frac{14}{3} \right) & -2 < z < 1 \end{cases} \tag{6}$$

2 Bus e auto

Definiamo le V.A.:
X : Tempo di attesa
C : Tempo di attesa per raggiungere un auto.
Dal testo, abbiamo che $C \sim \mathbb{U}[0, 10]$.
Se C è minore di 5 prendiamo il car sharing altrimenti aspettiamo un bus.
Con che probabilità scegliamo il car sharing?

$$\mathbb{P}(C < 5) = 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

Di conseguenza possiamo costruire un albero di probabilità:

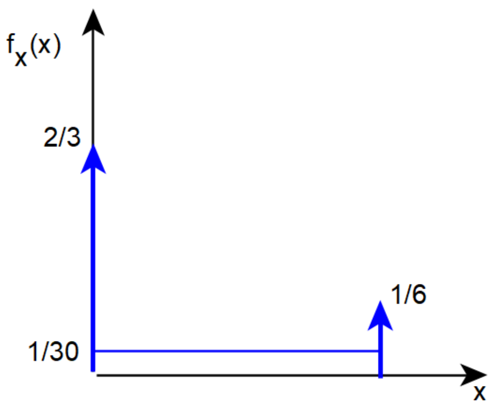


Da cui ricaviamo che il ritardo X è zero se prendo subito l'autobus, 5 minuti se aspetto l'autobus e uniforme da 0 a 5 se prendo il car sharing:

$$f_{X|C.S.}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{8}$$

X ha sia delle masse di probabilità in alcuni punti che delle zone continue, è quindi una V.A. mista. Abbiamo una massa di probabilità pari a 2/3 in $X = 0$, una pari ad 1/6 (seguendo i rami) in $X = 5$ ed infine una parte continua data dal car sharing. In totale ho:

$$f_X(x) = f_{X|\text{C.S.}}(x)\mathbb{P}(\text{C.S.}) + \mathbb{P}_{X|\text{S.B.}} \cdot \mathbb{P}(\text{S.B.}) + \mathbb{P}_{X|\text{A.B.}} \cdot \mathbb{P}(\text{A.B.}) \tag{9}$$



Per ottenere la cumulata basta integrare, per gli estremi sappiamo che la cumulata parte sempre da zero ed arriva a 1:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{30} & 0 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases} \tag{10}$$

Per calcolare il valore atteso posso usare il teorema dell'aspettativa totale:

$$E[X] = 0 \cdot \frac{2}{3} + 2.5 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{4} \tag{11}$$

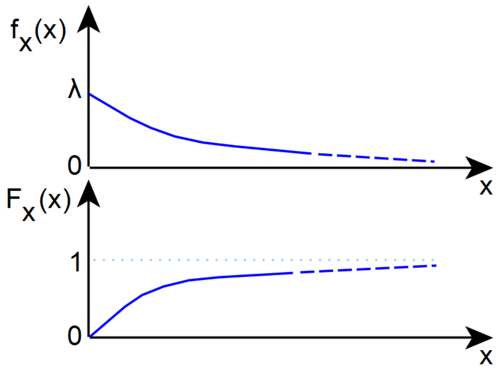
3 Variabile aleatoria Esponenziale

Per $\lambda > 0$ la V.A. X è esponenziale: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

3.1 a)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{12}$$

Possiamo disegnare la ddp e la cumulata:



3.2 b)

Possiamo applicare la definizione di valore atteso nel continuo:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = ... \tag{13}$$

Posso risolvere l'integrale integrando per parti considerando x come $f(x)$ e $\lambda e^{-\lambda x}$ come $g'(x)$.

$$E[X] = \left[\lambda x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \lambda \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right) dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \tag{14}$$

3.3 c)

Partiamo dalla definizione di varianza:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 \tag{15}$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[\lambda x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x\lambda \left(-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right) dx = \tag{16}$$

Il primo termine si annulla mentre il secondo termine è molto simile a $E[X]$ quindi:

$$= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x\lambda \cdot e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}E[X] = \frac{2}{\lambda^2} \tag{17}$$

Qundi possiamo calcolare la varianza:

$$Var[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{18}$$

3.4 d)

X_1, X_2, X_3 sono V.A. Indipendenti, Identicamente Distribuite (IID), $X_1 \sim X \sim \text{Exp}(\lambda)$
$Z = \text{Max}\{X_1, X_2, X_3\}$ trovare la ddp di Z.
La condizione si può scrivere come:

$$\begin{cases} X_1 \leq Z \leq z \\ X_2 \leq Z \leq z \\ X_3 \leq Z \leq z \end{cases} \tag{19}$$

Dove la prima disuguaglianza viene dal MAX mentre la seconda è la proprietà della cumulata.
Uso appunto la cumulata per ricavare la soluzione:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X_1 \leq z, X_2 \leq z, X_3 \leq z) \stackrel{\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq z)\mathbb{P}(X_2 \leq z)\mathbb{P}(X_3 \leq z) = ... \tag{20}$$

$$(\text{Identicamente distribuite}) = (\mathbb{P}(X \leq z))^3 = (F_X(z))^3 = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda z}\right)^3 & z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{21}$$

Per ottenere la ddp basta derivare:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 3 \cdot \left(1 - e^{-\lambda z}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{22}$$

3.5 e)

Vogliamo la ddp di $W = \min\{X_1, X_2\}$, riscriviamo la condizione:

$$\begin{cases} X_1 \geq W \geq w \\ X_2 \geq W \geq w \end{cases} \tag{23}$$

Calcoliamo la proabilità $\mathbb{P}(W \geq w)$:

$$\mathbb{P}(W \geq w) = \mathbb{P}(X_1 \geq w, X_2 \geq w) \stackrel{\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \geq w)\mathbb{P}(X_2 \geq w) \stackrel{\text{ID}}{=} (\mathbb{P}(X \geq w))^2 = (1 - F_X(w))^2 \tag{24}$$

$\mathbb{P}(W \geq w)$ è l'anticumulata di W, quindi:

$$\mathbb{P}(W \geq w) = 1 - F_W(w) = (1 - F_X(w))^2 \quad \rightarrow \quad F_W(w) = 1 - (1 - F_X(w))^2 \tag{25}$$

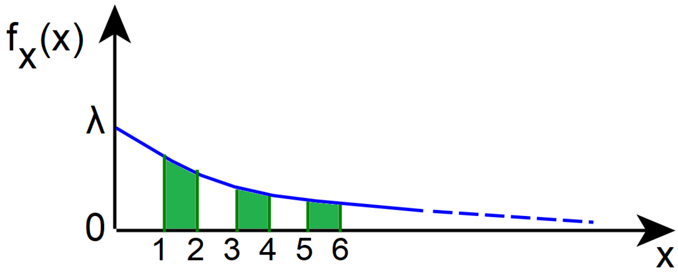
Deriviamo per trovare la ddp:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw} F_W(w) = \frac{d}{dw} \begin{cases} 1 - \left(e^{-\lambda w}\right)^2 & w > 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda w} & w > 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases} \tag{26}$$

Quindi abbiamo che $W \sim \text{Exp}(2\lambda)$

4 V.a. Esponenziale

Abbiamo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, vogliamo trovare $\mathbb{P}(X \in [n, n+1] \ \ \forall\, n \text{ dispari})$, cioè:



Iniziamo a calcolare la probabilità di essere in un particolare intervallo:

$$\mathbb{P}(n \leq X \leq n+1) = \int_n^{n+1} f_X(x)dx = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} - \int_{-\infty}^{n} \lambda e^{-\lambda x} dx = ... \tag{27}$$

$$= F_X(n+1) - F_X(n) = \left(1 - e^{-\lambda(n+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda n}\right) = e^{-\lambda n} - e^{-\lambda(n+1)} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}) \quad n \geq 0 \tag{28}$$

Siccome gli eventi $X \in [n, n+1]$ sono disgiunti possiamo sommare le probabilità:

$$\mathbb{P}(X \in [n, n+1] \ \ \forall\, n \text{ dispari}) = \sum_{n \text{ dispari}} \mathbb{P}(n \leq X \leq n+1) \tag{29}$$

$$= \sum_n e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}) \qquad n = 2k+1 \quad k = 0, 1, ... \tag{30}$$

$$= (1 - e^{-\lambda}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(2k+1)} \qquad k = 0, 1, ... \tag{31}$$

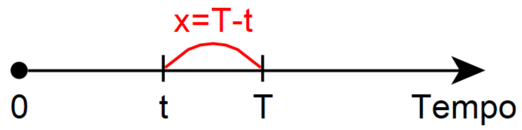
$$= (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\lambda}\right)^k \qquad k = 0, 1, ... \tag{32}$$

$$\text{(serie geometrica di ragione } e^{-2\lambda}) \quad = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}} \tag{33}$$

$$= \frac{(1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})(1 + e^{-\lambda})} = \frac{e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}} \tag{34}$$

5 Perdita di memoria per v.a. continue

Abbiamo la V.A. $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, l'evento $A = \{T > t\}$, cioè ad un certo t osserviamo che la lampadina è ancora accesa.



Definiamo $X = \{\text{tempo rimanente}\} = T - t$, dobbiamo ricavare $F_{X|A}$. Partiamo dalla definizione:

$$F_{X|A} = \mathbb{P}(X \leq x|A) = 1 - \mathbb{P}(X > x|A) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x|A) = \mathbb{P}(X > x|T > t) &= \mathbb{P}(T - t > x|T > t) && (36)\\
&= \mathbb{P}(T > x + t|T > t) && (37)\\
\text{Uso def. prob. condizionata} \quad &= \frac{\mathbb{P}(T > x + t, T > t)}{\mathbb{P}(T > t)} && (38)\\
\text{Sfrutto } [\{T > x + t\} \subseteq \{T > t\}] \quad &= \frac{\mathbb{P}(T > x + t)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{1 - F_T(x + t)}{1 - F_T(t)} && (39)\\
\text{Sfrutto } \left[1 - F_T(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}\right] \quad &= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} && (40)
\end{aligned}$$

Abbiamo trovato che $X|A \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{41}$$

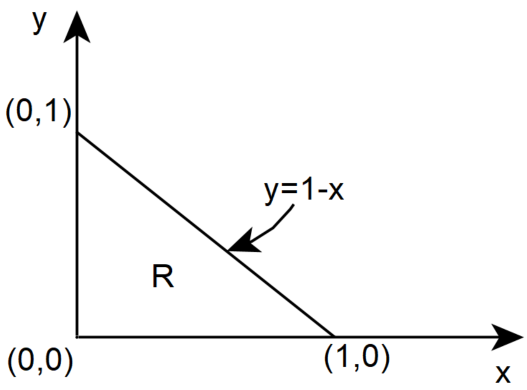
Questo ci porta al principio di perdita di memoria:

$$f_{X|T>t}(x) = f_{T-t|T>t}(x) = f_{T-t|T-t>0}(x) = f_T(x) \tag{42}$$

6 Triangolo uniforme

Abbiamo le V.A. X, Y e

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{43}$$



6.1 a)

Per trovare k basta imporre:

$$\iint_R f_{X,Y}(x,y)dxdy \overset{!}{=} 1 \tag{44}$$

$$k = \frac{1}{\text{Area}(R)} = \frac{1}{1/2} = 2 \tag{45}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & (x,y) \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{46}$$

6.2 b)

Posso usare la definizione di marginale:

$$f_Y(y) \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{1-y} 2dx = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \tag{47}$$

6.3 c)

Utilizziamo la definizione di ddp condizionata:

$$f_{X|Y}(x|y) \overset{def}{=} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2(1-y)} & 0 < x < 1-y < 1 \\ \nexists & y < 0 \cup y > 1 \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \tag{48}$$

6.4 d)

Ora posso usare la definizione di valore atteso condizionato:

$$E[X|Y=y] \overset{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{0}^{1-y} x \cdot \frac{1}{1-y} dx = \begin{cases} \frac{1-y}{2} & 0 < y < 1 \\ \nexists & \text{Altrimenti} \end{cases} \tag{49}$$

Utilizziamo il teorema dell'aspettazione totale:

$$E[X] = \int_0^1 E[X|Y=y] \cdot f_Y(y)dy = \int_0^1 \frac{1-y}{2} \cdot 2(1-y)dy = ... \tag{50}$$

Alternativamente potrei sostituire solo il valore atteso ottenendo:

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} f_Y(y)dy - \int_0^1 \frac{y}{2} f_Y(y)dy = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} E[Y] \tag{51}$$

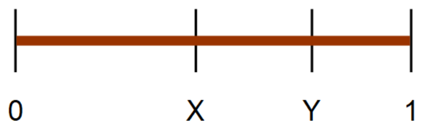
6.5 e)

Per simmetria ho $E[X] = E[Y]$, quindi posso risolvere il sistema:

$$\begin{cases} E[X] = E[Y] \\ E[X] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E[Y] \end{cases} \tag{52}$$

$$E[X] = E[Y] = \frac{1}{3} \tag{53}$$

7 Legnetto e triangolo



Dal testo abbiamo $X \perp Y$, $X \sim Y \sim \mathbb{U}[0,1]$. Voglio trovare $\mathbb{P}(\text{Formare un triangolo})$.
Ho due casi:

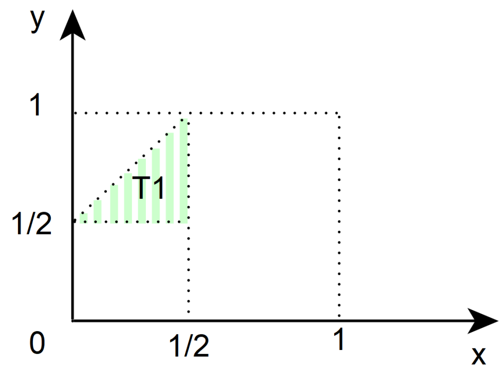
1. $X < Y$
2. $X > Y$

7.1 1) $X < Y$:

Applico la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{cases} X < (Y - X) + (1 - Y) \\ Y - X < X + (1 - Y) \\ 1 - Y < X + (Y - X) \end{cases} = \begin{cases} X < \dfrac{1}{2} \\ Y - X < \dfrac{1}{2} \\ Y > \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{54}$$

Individuiamo l'area dell'evento di interesse disegnando le condizioni:



$$\mathbb{P}(\text{Triangolo}, X < Y) = \frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(\Omega)} = \frac{1}{8} \tag{55}$$

7.2 2) $X > Y$:

Per simmetria:

$$\mathbb{P}(\text{Triangolo}, X > Y) = \frac{1}{8} \tag{56}$$

Si tratta di eventi disgiunti quindi posso sommare le probabilità:

$$\mathbb{P}(\text{Triangolo}) = \mathbb{P}(\text{Triangolo}, X > Y) + \mathbb{P}(\text{Triangolo}, X < Y) = \frac{1}{4} \tag{57}$$