

Informazione e stima – 31/01/2022

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cercare di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

- ① Si estraggono 13 carte da un mazzo di 52 ben mescolato. Si considerino gli eventi $A = \{4 \text{ di picche, } 4 \text{ di cuori, } 3 \text{ di quadri, } 2 \text{ di fiori}\}$, $B = \{\text{estrarre } 4, 4, 3, 2 \text{ carte nei diversi semi}\}$.
- (a) Senza fare calcoli, dire quale tra A e B è l'evento più probabile. Giustificare la risposta.
- (b) Calcolare le probabilità degli eventi A e B .

Le estrazioni sono senza reinserimento. Nel mazzo ci sono 13 carte di ogni seme.

- ② Si consideri una moneta ben bilanciata. Sia X il numero di teste e Y il numero di croci in n lanci?
- (a) Senza fare calcoli, dire qual è il segno del coefficiente di correlazione lineare tra X e Y . Giustificare la risposta.
- (b) Calcolare la covarianza tra X e Y .
- ③ Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $Y = \frac{1}{X}$. Si calcoli la legge di probabilità di Y .
Si presti attenzione ai valori assunti da Y .
- ④ Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Si considerino le successioni di v.a. $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$ con $Y_n = X^n$ e $Z_n = \frac{1}{Y_n+1}$ per $n \in \mathbb{N}$. Determinare se le successioni convergono in probabilità e, se sì, a quale valore.
- ⑤ Partendo da campioni uniformemente distribuiti in $[0, 1]$, usare il metodo acceptance-rejection per campionare una v.a. X con legge

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - (x+2)^2) & -4 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Scrivere l'algoritmo acceptance-rejection con la miglior efficienza possibile. Mediamente quanti campioni uniformi bisogna generare per vedere un campione X accettato?

- ⑥ Una moneta non bilanciata ha $\Pr(\text{Testa}) = \frac{3}{4}$. Qual è il numero medio minimo di bit per lancio che serve per rappresentare il risultato di:
- (a) 1 lancio di moneta
- (b) 2 lanci di moneta
- (c) un miliardo di lanci di moneta

Soluzioni

Problema 1

1. Siccome $A \subset B$, abbiamo $\Pr(A) < \Pr(B)$.
2. La prima è una probabilità ipergeometrica:

$$\Pr(A) = \frac{\binom{13}{4}^2 \binom{13}{3} \binom{13}{2}}{\binom{52}{13}} \approx 0.0179 \quad (2)$$

L'evento B si può interpretare come l'unione di $4!/2!$ eventi di tipo A , dunque:

$$\Pr(B) = 12P(A) \approx 0.2155 \quad (3)$$

Problema 2

1. Fissato il numero di lanci n di moneta, più si osserveranno teste, meno croci si otterranno. Dunque X e Y sono correlate negativamente.
2. Notando che $Y = n - X$, la covarianza si può calcolare come:

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (4)$$

$$= E[(X - E[X])(n - X - E[n - X])] \quad (5)$$

$$= -E[(X - E[X])(X - E[X])] \quad (6)$$

$$= -\text{Var}[X] \quad (7)$$

$$= -\frac{n}{4}, \quad (8)$$

dove nell'ultimo passaggio usiamo il fatto che $X \sim \text{Bin}(n, 1/2)$.

Problema 3

Innanzitutto notiamo che $Y \in [1, \infty)$. Appliciamo il metodo della cumulata:

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr\left(\frac{1}{X} \leq y\right) \quad (9)$$

$$= \Pr\left(X \geq \frac{1}{y}\right) \quad (10)$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) \quad (11)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{y} & y \geq 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases} \quad (12)$$

dove abbiamo usato $F_X(x) = x$ per $x \in [0, 1]$, $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$, e $F_X(x) = 1$ per $x \geq 1$.

La densità di probabilità si ottiene derivando:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{y^2}, \quad y \geq 1 \quad (13)$$

e $f_Y(y) = 0$ altrove.

Problema 4

La v.a. X^n tende a concentrarsi attorno al valore $x = 0$ all'aumentare di n . Testiamo la convergenza in probabilità al valore $x = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|X^n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X > \varepsilon^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (14)$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui segue che $Y_n \rightarrow 0$ in probabilità.

La v.a. $\frac{1}{X^n+1}$ tende a concentrarsi attorno al valore $x = 1$ all'aumentare di n . Testiamo la convergenza in probabilità al valore $x = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\left| \frac{1}{X^n+1} - 1 \right| > \varepsilon \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{1}{X^n+1} - 1 < -\varepsilon \right) + \Pr \left(\frac{1}{X^n+1} - 1 > \varepsilon \right) \quad (15)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(X^n + 1 > \frac{1}{1-\varepsilon} \right) + \Pr \left(X^n + 1 < \frac{1}{1+\varepsilon} \right) \quad (16)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(X > \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \right) + \Pr \left(X^n < -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \quad (17)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left(X > \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (18)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} = 0 \quad (19)$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui segue che $Z_n \rightarrow 0$ in probabilità. Da notare che il passaggio (18) segue dal fatto che X^n è una v.a. positiva, mentre $-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ è una quantità negativa.

Problema 5

Il massimo della funzione f_X nell'intervallo $-4 \leq x \leq 0$ si ha per $x = -2$. In tal punto la funzione vale $f_X(-2) = 3/8$.

L'algoritmo é il seguente:

1. Genero $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $U' \sim \mathcal{U}[0,1]$ in maniera indipendente. Siccome $-4 \leq x \leq 0$, trasformo $Y = -4U$ e pongo $mf_Y(x) \stackrel{!}{=} 3/8 \rightarrow m = 3/2$ per ottenere massima efficienza
2. Accetto e pongo $X = Y$ se $U' \leq \frac{f_X(Y)}{mf_Y(Y)} = \frac{\frac{3}{32}(4-(Y+2)^2)}{\frac{3}{2} \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(4 - (Y+2)^2)$, altrimenti torno al punto 1.

Il numero di prove medie per avere un campione accettato é pari a $m = 3/2$.

Problema 6

1. Con un lancio di moneta c'è solo un assegnamento possibile di parole codice: 0 per rappresentare testa, e 1 per rappresentare croce. Dunque ci vuole 1 bit.
2. Per rappresentare una coppia di lanci si può usare il seguente codice:
 - 0 per rappresentare TT, con $\Pr(TT) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
 - 10 per rappresentare TC, con $\Pr(TC) = \frac{3}{4} \frac{1}{4}$
 - 110 per rappresentare CT, con $\Pr(CT) = \frac{3}{4} \frac{1}{4}$
 - 111 per rappresentare CC, con $\Pr(CC) = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Non esistono codici disambigui più corti di questo. La lunghezza media per lancio di questo codice è:

$$\frac{1}{2} \left(1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \approx 0.84 \text{ bit/lancio} \quad (20)$$

3. Per un numero molto grande di lanci sappiamo che per il teorema di codifica di sorgente esiste un codice la cui lunghezza media per lancio è molto vicina all'entropia della sorgente. Dunque la lunghezza media per lancio del codice è:

$$H(X) = -\frac{3}{4} \log \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} \approx 0.81 \text{ bit/lancio} \quad (21)$$