

## 1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

1. Non negatività:  $P(A) > 0$
2. Normalizzazione:  $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti  $A$  e  $B$ :  $(P(A \cap B) = 0)$ . Allora  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

### 1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho  $n$  eventi disgiunti:  $A_1, A_2, A_3, \dots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Se  $P(A \cap B) \neq 0$  allora  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

### 1.2 Leggi di probabilità uniformi

**Legge uniforme discreta**

$$P(A) = \frac{\text{\#casi favorevoli ad } A}{\text{\#casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Legge uniforme continua**

$$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

## 2 Probabilità condizionate

**Definizione di probabilità condizionata:**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Altra definizione di intersezione:  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

**Regola moltiplicativa:**  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

### 2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho  $A_1, A_2, A_3$  disgiunti che formano una partizione di  $\Omega$ :

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

### 2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

**Indipendenza**

Se  $A \perp B$  allora  $P(B|A) = P(B)$ ,  $P(A|B) = P(A)$   
Due eventi si dicono indipendenti se:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

## 3 Calcolo combinatorio

### 3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi  $n$  elementi distinti?

$$\text{casi tot} = n(n-1)(n-2)\dots = n!$$

### 3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con  $k$  elementi, partendo da un insieme con  $n$  elementi distinti.  
 $0 \leq k \leq n$

$$\text{\#sequenze ordinate di } k \text{ elementi} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

**Probabilità binomiale**

Date  $n$  prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova  $P(\text{successo}) = p$ , la prob. di avere  $k$  successi su  $n$  prove è:  $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

### 3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo  $n$  prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con  $k_i$  estrazioni di tipo  $i$  ci sono.

$$\text{\#totale di scelte} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$$

## 4 Variabili aleatorie discrete

### 4.1 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.

**Legge dello statistico inconsapevole**

Data v.a.  $Y = g(X)$ ,  $Y$  è una v.a.

$$E[Y] = E[g(x)]$$

Nel caso lineare:

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

**Valore atteso condizionato**

$$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$$

**Legge dell'aspettativa totale**

Con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  partizioni di  $\Omega$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot E[X|A_i]$$

### 4.2 Varianza

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.

**Proprietà varianza**

$$\text{Var}[X] \geq 0 \quad \forall \text{ v.a. } X$$

$$\text{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot \text{Var}[X]$$

**Scarto quadratico medio**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

## 5 V.a. discrete multiple

### 5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a.  $X$  e  $Y$ ,  $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di  $X$ :  $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$

**Legge di probabilità condizionata**

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\sum_t p_{X,Y}(t, y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

**Regola moltiplicativa**

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$$

### 5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a.  $X$  e  $Y$  sono dette indipendenti ( $X \perp Y$ )  
 $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

### 5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di  $X$  e  $Y$ .

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

Caso lineare:  $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$

Se  $X \perp Y$  allora  $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

### 5.4 Varianza per v.a. multiple

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$$

Se  $X \perp Y$  allora  $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

## 6 Variabili aleatorie continue

**Valore atteso e varianza**

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx$$

Legge dello statistico inconsapevole:  $E[g(X)] =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

### 6.1 Funzione cumulativa di probabilità

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

**Proprietà**

$$\bullet 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$\bullet F_X \text{ è una funzione non decrescente } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x), F_X \text{ è la funzione integrale di } f_X$$

## 7 V.a. continue multiple

**Densità di probabilità congiunta**

$$P((X, Y) \in S) = \iint_{(x, y) \in S} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$f_{X,Y}$  è la densità di probabilità congiunta.

**Valore atteso**

$$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Con  $g$  funzione deterministica nota.

**Legge di probabilità marginale**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Densità marginale di  $X$ .

**Indipendenza tra due v.a. continue**

$$X \text{ e } Y \text{ sono dette indipendenti} \iff f_{X,Y}(x, y) =$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

**Densità di probabilità condizionata**

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, t) dt}$$

## 8 Regola di bayes e funzioni di v.a.

**Regola di bayes nel continuo**

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$$

Per le v.a. discrete basta cambiare la funzione continua con la probabilità.

### 8.1 Calcolo della funzione di una v.a. continua

Ho  $X$  v.a. con legge nota  $f_X$  e  $Y = g(X)$  con  $g$  deterministica e nota, voglio trovare  $f_Y$ .

**Approccio tramite la cumulata**

1- Calcolo la cumulata di  $Y$ .

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

2. Calcolo  $f_Y$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

**Trasformazioni lineari di v.a.**

$X$  è una v.a. con legge  $f_X$  nota e  $Y = aX + b$  con costanti note.

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{|a|}\right), \text{ se } a = 0 \text{ allora } Y = b$$

**Trasformazione monotona di v.a.**

$Y = g(X)$  con  $g$  deterministica nota e strettamente monotona.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dg}{dx}(x)\right|} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{dg}{dx}(g^{-1}(y))\right|}$$

Con  $y = g(x)$  e  $x = g^{-1}(y)$

Nota: se  $g$  non è strettamente monotona (ad es.  $g(x) = x^2$ ) la  $f_Y(y)$  sarà: "formula diretta con  $g$  decrescente" + "formula diretta con  $g$  crescente".

## 9 Statistiche congiunte

**Legge della somma di v.a.**

Date  $X$  e  $Y$  due v.a. discrete e  $X \perp Y$  e  $W = X + Y$

$$P_W(w) = P(W = w) = P(X + Y = w) = \sum_x p_X(x) \cdot p_Y(w - x), \quad y = w - x$$

La legge della somma di due v.a. **indipendenti** è la convoluzione delle leggi di probabilità.

**Calcolo della somma di convoluzione con il metodo grafico**

- Sovrapporre graficamente le 2 leggi di prob

- "Ribaltare" una delle 2 leggi (ad es.  $P_Y$ )

- Traslare di  $w$  posizioni la legge che ho ribaltato (traslazione a destra se  $w > 0$ )

- Moltiplicare le prob. e sommare

**Caso v.a. continue**

$W = X + Y$ ,  $X \perp Y$ ,  $X$  e  $Y$  sono v.a. continue.

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(w - x) dx$$

Integrale di convoluzione

**Somma di due gaussiane indipendenti**

$$W = X + Y, \quad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2),$$

$$X \perp Y$$

La forma di  $W$  è sempre gaussiana.

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$$

$$\text{Var}[W] = \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$$

$$(questa se \mu = 0)$$

### 9.1 Covarianza

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

**Note:**

$$- \text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$$

$$- \text{Se } E[X] = 0 \text{ o } E[Y] = 0 \text{ allora } \text{Cov}[X, Y] = E[XY]$$

$$- \text{Se } X \perp Y \text{ allora } \text{Cov}[X, Y] = 0$$

- Se  $Cov[X, Y] = 0 \nRightarrow X \perp Y$

#### Coefficiente di correlazione lineare

Versione adimensionale della covarianza.

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} = E\left[\frac{(X - E[X])}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y - E[Y])}{\sigma_y}\right]$$

Proprietà:

-  $0 \leq |\rho[X, Y]| \leq 1$

In particolare se  $|\rho[X, Y]| = 1$  allora  $Y = aX + b$

-  $X \perp Y \Rightarrow \rho[X, Y] = 0$

## 10 Valore atteso e varianza condizionati

### Legge delle aspettative iterate

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

### Legge della variazione totale

$$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

## 11 Successioni variabili aleatorie

### 11.1 Disuguaglianza di Markov

Se  $X > 0$  allora  $E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \quad \forall a \geq 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

### 11.2 Disuguaglianza di chebyshev

$$Var[X] \geq a \cdot P((X - E[X])^2 \geq a) \quad \forall a \geq 0$$

$$\text{Con } k = a^2, \quad P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}$$

### 11.3 Convergenza in probabilità

Data una successione di v.a.  $\{A_n\}$  e un numero  $a$ ,

Si dice che  $\{A_n\}$  converge ad  $a$  se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

#### Uso markov(o chebyshev nello stesso modo) per provare la convergenza in probabilità

Esempio con markov.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_n]}{a}$$

Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0$  allora per forza converge ad  $a$ .

## 11.4 Media campionaria e legge dei grandi numeri

Date  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. i.i.d.

Media campionaria:  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

è una v.a.

Dato che le varie v.a. sono i.i.d.

$$E[M_n] = E[X_1] = E[X]$$

$$Var[M_n] = \frac{Var[X_1]}{n}$$

che con  $n \rightarrow \infty \quad Var[M_n] \rightarrow 0$

#### Legge (debole) dei grandi numeri

$$M_n \xrightarrow{P} E[M_n] = E[X]$$

## 12 Variabili aleatorie note

### 12.1 V.a. uniforme continua

$$X \sim \mathbb{U}[a, b]$$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

### 12.2 V.a. gaussiana

$$X \sim Norm[E[X], Var[X]] = Norm[\mu, \sigma^2]$$

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

#### Combinazioni lineari di gaussiane

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sono  $n$  v.a. gaussiane tra loro indipendenti con ciascuna valore atteso  $\mu_i$  e varianza  $\sigma_i^2$  allora la v.a.  $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$  è una gaussiana con valore atteso  $\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_n \mu_n$  e varianza  $\sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$

### 12.3 V.A. esponenziale

$$X \sim Exp[\lambda], \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

### 12.4 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Geom(p)$  Dove  $p$  è la probabilità di successo nella singola prova.

$$E[X] = \frac{1}{p}, \quad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

#### Legge di perdita di memoria

$$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \Rightarrow E[X-t|X>t] = E[X]$$

(Vale solo per v.a.  $Geom$  e  $Exp$ )

### 12.5 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bin(n, p)$  Dove  $p$  è la probabilità di successo nella singola prova ed  $n$  è il numero di prove.

$$E[X] = np, \quad Var[X] = np(1-p)$$

$$Var[X] < \frac{n}{4}$$

### 12.6 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$  Dove  $p$  è la probabilità di successo.

$$E[X] = p, \quad Var[X] = p(1-p)$$