

Esercitazione 04: Sistemi a tempo discreto

18 marzo 2023 (3h)

Fondamenti di Automatica

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University
e successivamente in parte modificate e completate.

1 Analisi di investimenti

Una banca propone un tasso d'interesse $i_1 = 3\%$ trimestrale mentre un'altra propone un tasso $i_2 = 12.5\%$ annuale. Se si ha intenzione di mantenere il capitale investito I per almeno un anno, quale dei due investimenti è più conveniente?

2 Prestito

Una banca propone un prestito pari a P , con un tasso d'interesse fisso i da estinguere con una rata annuale fissa R .

1. Se si vuole estinguere il prestito in un numero N di anni, quale dovrà essere l'importo della rata R ?
2. Fissato il valore della rata R , in quanti anni si estinguerà il prestito?

3 Modello degli studenti universitari

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico k .

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno k e si iscrivono nell'anno $k + 1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno k ;
- $\alpha_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti promossi nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\beta_i \in [0, 1]$: tasso degli studenti ripetenti nell' i -esimo anno di corso ($i \in \{1, 2, 3\}$);
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1 - \alpha_i - \beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno i .

Si trascurino le iscrizioni di studenti provenienti da altre università.

1. Scrivere il modello dinamico del sistema.
2. Studiare la stabilità del sistema dinamico.
3. Posto:

$$\alpha_1 = 0.5 \quad \alpha_2 = 0.6 \quad \alpha_3 = 0.5 \quad \beta_1 = 0.2 \quad \beta_2 = 0.2 \quad \beta_3 = 0.5$$

determinare lo stato di equilibrio corrispondente a $u(k) = \bar{u} = 4000$.

4 Sistema non lineare

Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) + (x_2(t) - 2)(u(t) - 1) \\ x_2(t+1) &= 0.5x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

- A. scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.
- B. si calcolino le condizioni di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
- C. si determini il sistema linearizzato intorno alle condizioni di equilibrio trovate al punto precedente.
- D. determinare le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio trovati.
- E. si calcoli il movimento dello stato del sistema con condizione iniziale $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ e ingresso pari a $u(t) = \bar{u} = 1$.

5 Competizione aziendale

Un'azienda A si divide una determinata clientela con altre aziende con cui è in competizione. All'istante temporale 0 l'azienda A detiene il 30% della clientela. Per incrementare la propria quota di mercato (pacchetto clienti) decide di puntare su una campagna pubblicitaria che promette i seguenti risultati:

- l'azienda A conquisterà, ogni mese, un ventesimo dei clienti non suoi;
- l'azienda A perderà, ogni mese, un ventesimo dei propri clienti.

Assumendo che il numero di clienti complessivi rimanga invariato:

- costruire un modello in spazio di stato a tempo discreto in grado di descrivere l'evoluzione del pacchetto clienti dell'azienda A;
- studiare le proprietà di stabilità del sistema definito al punto a.
- studiare l'evoluzione del pacchetto clienti della azienda A nel tempo, e la soluzione in condizioni stazionarie;
- considerando il modello ottenuto al punto a. indipendentemente dal contesto applicativo, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ ($x(t)$ denota lo stato del sistema)?
Inoltre, esistono delle condizioni iniziali non nulle per lo stato tali per cui $x(t) = x(0)$ per ogni t ?