Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 11/09/2019

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1) Da un mazzo di 51 carte (consueto mazzo di 52 a cui manca il re di cuori) si estraggono due carte e si vince se la prima è una figura o se la seconda è una carta di cuori. Calcolare la probabilità di vittoria.

2) Siano $X \sim \text{Bern}(0.5)$ e $Y \sim \text{Bern}(0.1)$ due variabili aleatorie indipendenti, e sia $Z = X \oplus Y$, dove $\oplus$ è l'operatore di or esclusivo (xor). Determinare:

   (a) la legge di probabilità di Z;

   (b) se le variabili aleatorie Z e Y sono indipendenti.

3) Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $W = b^X$ con $0 < b < 1$. Trovare la legge di probabilità di W.
Suggerimento: porre particolare attenzione al fatto che $0 < b < 1$.

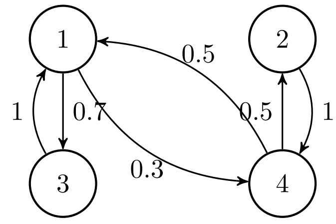
4) I clienti arrivano alle Poste secondo un processo di Poisson con intensità di 30 clienti all'ora. Ci sono 3 tipi di servizi alle Poste, A, B e C, e si sa che i clienti scelgono in maniera indipendente ed equiprobabile uno dei tre servizi. Sapendo che le Poste aprono alle ore 09:00, e che voi arrivate alle ore 09:10 pescando un biglietto per il servizio A, qual è la probabilità $p_X(x)$ di estrarre il biglietto Ax, per $x \geq 1$?
Ad ogni cliente viene assegnato un numero progressivo, partendo da 1*, in base al servizio scelto. Ad esempio, se sono arrivati* 3 *clienti di cui* 2 *per il servizio* A *e* 1 *per il servizio* C*, allora il sistema emette i biglietti* $A01$*,* $A02$*, e* $C01$*.*

5) Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 1.

   (a) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.

   (b) La catena è periodica? Giustificare la risposta

   (c) Esiste una distribuzione stazionaria della catena? Giustificare la risposta.



6) Si consideri una sorgente dati che emette simboli $X \in \{v, w, x, y, z\}$. Per ognuno dei seguenti possibili codici

   (a) $110, 1110, 0, 100, 1111$

   (b) $111, 100, 0, 101, 110$

   (c) $10, 110, 01, 111, 00$

   (d) $10, 0, 110, 111, 101$

riconoscere se il codice è disambiguo e/o efficiente.
Un codice è disambiguo se una qualunque stringa di 0 *e* 1 *ha una e una sola possibile decodifica nei simboli di sorgente* $\{v, w, x, y, z\}$*. Il codice è efficiente se usa il minimo numero di bit possibile rimanendo decodificabile.*

Soluzioni

Problema 1

Chiamando gli eventi $A = \{\text{Prima carta è una figura}\}$ e $B = \{\text{Seconda carta è di cuori}\}$, la probabilità di vittoria è

$$\begin{aligned} p &= \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) && (1) \\ &= \frac{11}{51} + \frac{12}{51} - \Pr(A \cap B). && (2) \end{aligned}$$

Introducendo gli eventi $C = \{\text{Prima carta è una figura di cuori}\}$ e $D = \{\text{Seconda carta è una figura non di cuori}\}$, e usando il teorema delle probabilità totali, si ha:

$$\begin{aligned} \Pr(A \cap B) &= \Pr(A \cap B|C)\Pr(C) + \Pr(A \cap B|D)\Pr(D) && (3) \\ &= \Pr(B|C)\Pr(C) + \Pr(B|D)\Pr(D) && (4) \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \Pr(C) &= \frac{2}{51}, \quad \Pr(B|C) = \frac{11}{50} \\ \Pr(D) &= \frac{9}{51}, \quad \Pr(B|D) = \frac{12}{50}. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione di p si ottiene $p = 0.4$.

Problema 2

1. Siccome l'operatore xor ha risultato binario, anche la v.a. Z è Bernoulliana. Il parametro della Bernoulliana è:
$$p_Z(1) = p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(1,0) = \frac{1}{2}\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{9}{10} = \frac{1}{2},$$
dunque $Z \sim \text{Bern}(0.5)$.

2. Per testare l'indipendenza di Z e Y partiamo dalla definizione:
$$\begin{aligned} p_{Z,Y}(z,y) &= p_{Z|Y}(z|y) \cdot p_Y(y) && (5) \\ &= p_{X|Y}(z \oplus y|y) \cdot p_Y(y) && (6) \\ &= p_X(z \oplus y) \cdot p_Y(y) && (7) \\ &= p_Z(z \oplus y) \cdot p_Y(y) && (8) \\ &= p_Z(z) \cdot p_Y(y), \qquad \forall z, y && (9) \end{aligned}$$
dove (6) è dovuta alla legge $Z = X \oplus Y$, la (7) alla indipendenza di X e Y, la (8) al fatto che le leggi di Z e X sono identiche, e infine la (9) perché i risultati di Z sono equiprobabili. Dunque risulta che $Z \perp Y$.

   Un ragionamento alternativo consiste nel dire che se Y è noto, allora non si può estrarre alcuna informazione su Z, perché X può assumere con la stessa probabilità i valori 0 e 1, e X è indipendente da Y.

Problema 3

Innanzitutto notiamo che $W \in (0,1)$ siccome la base b è compresa tra 0 e 1, e X è una v.a. positiva. La legge cumulativa di W è

$$\begin{aligned} \Pr(W \le w) &= \Pr(b^X \le w) = \Pr(X \ge \ln(w)/\ln(b)) && (10) \\ &= e^{-\lambda \ln(w)/\ln(b)} = w^{-\lambda/\ln(b)}, \qquad 0 < w < 1 && (11) \end{aligned}$$

dove il cambio del verso della diseguaglianza in (10) è dovuto al fatto che $\ln(b) < 0$, mentre in (11) abbiamo sfruttato la legge cumulativa di X. Derivando rispetto a w si ottiene:

$$f_W(w) = -\frac{\lambda}{\ln(b)} w^{-\frac{\lambda}{\ln(b)}-1}, \qquad 0 < w < 1.$$

Da notare che la f_W è sempre positiva nonostante il segno negativo.

Problema 4

Siccome i clienti scelgono in maniera equiprobabile ed indipendente uno dei 3 servizi, allora i clienti che arrivano per il servizio A costituiscono un processo di arrivi di Poisson con intensità di 10 clienti all'ora. Pescare il biglietto Ax alle ore 09:10 è equivalente all'evento che esattamente $x-1$ clienti di tipo A siano arrivati nei primi 10 minuti, cioé chiamando con N il numero di arrivi nei primi 10 minuti si ha $N \sim \text{Poisson}(10 \cdot 1/6)$:

$$p_X(x) = \Pr(N = x-1) = \frac{(10 \cdot 1/6)^{x-1}}{(x-1)!} e^{-(10 \cdot 1/6)}, \qquad x \geq 1.$$

Problema 5

1. Tutti gli stati sono ricorrenti.
2. La catena è periodica. In particolare, le due classi periodiche sono $C_1 = \{1, 2\}$ e $C_2 = \{3, 4\}$. Infatti, basta osservare che, partendo dallo stato 1 al tempo 1, nei tempi dispari si sta sempre nella classe C_1 e nei tempi pari sempre nella classe C_2.
3. Siccome la catena è periodica, non esiste una distribuzione stazionaria.

Problema 6

Per testare la disambiguità basta vedere se il codice è prefix-free. Per testare l'efficienza, basta vedere se togliendo qualche bit il codice rimane disambiguo.

1. Questo codice è disambiguo ma non efficiente, infatti per il simbolo y basta usare la codifica 10
2. Questo codice è disambiguo ed efficiente, infatti non si può togliere alcun bit senza tenerlo disambiguo.
3. Questo codice è disambiguo ed efficiente, infatti non si può togliere alcun bit senza tenerlo disambiguo.
4. Questo codice è ambiguo, perché la codifica per il simbolo v è un prefisso della codifica per il simbolo z.