Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 06/07/2018 – Compito B

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Una tripla di numeri viene puntata su dieci ruote del Lotto. Si calcoli la probabilità che tale terno venga estratto:

   (a) su una sola ruota
   (b) su due sole ruote
   (c) su almeno una ruota.

   Nel gioco del Lotto su ogni ruota vengono estratti 5 *numeri da un'urna con* 90 *numeri diversi senza reinserzione.*

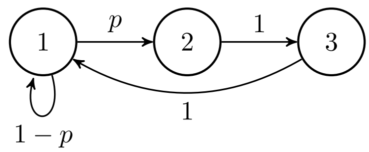
2. Si estragga un punto S uniformemente distribuito sulla circonferenza di raggio unitario e con centro nel punto $(0, 0)$. Qual è la distribuzione di probabilità f_X della coordinata X del punto $S = (X, Y)$?

   Suggerimento: l'estrazione del punto S *equivale all'estrazione di un angolo* Θ.
   Identità utili: $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *oppure* $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

3. Siano $\{X_i\}$ delle v.a. i.i.d. con $\mathsf{E}[X_i] = 0$ e $\mathsf{Var}[X_i] = i$, e $\{Y_i\}$ delle v.a. i.i.d. con $\mathsf{E}[Y_i] = 0$ e $\mathsf{Var}[Y_i] = i^{-2}$. Si assuma inoltre che le $\{X_i\}$ siano indipendenti dalle $\{Y_i\}$. Determinare se la successione $\{X_i \cdot Y_i\}$ converge in probabilità a qualche valore per $i \to \infty$.

4. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. La probabilità di transizione p può essere un qualunque numero in $[0, 1]$.

   (a) Classificare gli stati (transienti o ricorrenti) in funzione di p.
   (b) Per quali valori di p la catena è periodica?
   (c) Qual è la probabilità asintotica di essere nello stato 1?



5. Una lampadina ha una vita $X \sim \text{Exp}(\theta)$, dove θ è un parametro ignoto di cui si conosce solo la distribuzione a priori $\Theta \sim \mathcal{U}[1, 2]$. Determinare lo stimatore MAP $\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}$ basato su una osservazione X.

6. Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera gli istanti di tempo degli arrivi di un processo di Poisson a tasso λ.

   Suggerimento: conviene generare i tempi di interarrivo del processo di Poisson.

Soluzioni

Problema 1

1. La probabilità P_3 che vengano estratti 3 numeri prescelti su 90 in 5 estrazioni senza reinserzione è una ipergeometrica:
$$P_3 = \frac{\binom{3}{3}\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}.$$
Le estrazioni sulle 10 ruote sono tutte indipendenti tra loro, quindi la probabilità di ottenere un terno su esattamente una ruota è la probabilità che in 10 prove indipendenti si ottenga solo un successo. La probabilità cercata $P_{3,1}$ è dunque binomiale con probabilità di successo P_3:
$$P_{3,1} = \binom{10}{1} P_3(1-P_3)^9.$$

2. La probabilità $P_{3,2}$ cercata è
$$P_{3,2} = \binom{10}{2} (P_3)^2(1-P_3)^8.$$

3. Fare terno su almeno una ruota è l'evento complementare di non fare alcun terno, dunque:
$$P_{3,\geq 1} = 1 - P_{3,0} = 1 - \binom{10}{0}(P_3)^0(1-P_3)^{10} = 1-(1-P_3)^{10}.$$

Problema 2

L'estrazione di un punto casuale S sulla circonferenza di raggio unitario è equivalente all'estrazione di un angolo Θ uniformemente distribuito in $[-\pi, \pi]$. Il valore della coordinata X è pari a $X = \cos(\Theta)$. Poiché il coseno è una funzione pari, cioè $X = \cos(\Theta) = \cos(-\Theta)$, allora sfruttando la simmetria del problema si può considerare un angolo Θ uniformemente distribuito tra $[0, \pi]$: in questo modo la trasformazione $X = \cos(\Theta)$ diventa univoca per $\Theta \in [0, \pi]$. Applicando il metodo diretto, si ha:
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{f_\Theta(\arccos(x))}{|\frac{d}{dt}\cos(t)|_{t=\arccos(x)}} \\ &= \frac{1}{\pi \sin(\arccos(x))} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$
e $f_X(x) = 0$ altrimenti.

Problema 3

Fissato un valore limite ℓ, la successione $\{X_i \cdot Y_i\}$ converge in probabilità a ℓ se
$$\lim_{i\to\infty} \Pr(|X_iY_i - \ell| > \epsilon) = 0, \qquad \forall \epsilon > 0.$$
Siccome sappiamo solo che le X_i e le Y_i sono a media nulla, proviamo a testare il valore $\ell = 0$. Dall'indipendenza di X_i e Y_i abbiamo che $\mathsf{E}[X_iY_i] = \mathsf{E}[X_i]\mathsf{E}[Y_i] = 0 = \ell$, e allora siamo nella posizione di usare la diseguaglianza di Chebyshev:
$$\begin{aligned} \Pr(|X_iY_i - \ell| > \epsilon) &= \Pr(|X_iY_i - \mathsf{E}[X_iY_i]| > \epsilon) \\ &\leq \frac{\mathsf{Var}[X_iY_i]}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\mathsf{E}[X_i^2Y_i^2] - (\mathsf{E}[X_iY_i])^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\mathsf{E}[X_i^2]\mathsf{E}[Y_i^2]}{\epsilon^2} \\ &= \frac{\mathsf{Var}[X_i]\mathsf{Var}[Y_i]}{\epsilon^2} = \frac{1}{i\epsilon^2} \xrightarrow{i\to\infty} 0, \qquad \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$
pertanto concludiamo che la successione delle $\{X_iY_i\}$ converge in probabilità a $\ell = 0$.

Problema 4

1. Per $p = 0$ gli stati transienti sono 2 e 3, mentre 1 è ricorrente. Per $p > 0$ tutti gli stati sono ricorrenti.
2. La catena è periodica solo per $p = 1$.
3. Se $p = 0$ allora la probabilità asintotica di trovarsi in 1 è $\pi_1 = 1$.
   Per $0 < p < 1$ la catena è ricorrente aperiodica, quindi si può impostare il sistema

   $$\begin{cases} \pi_1 = \pi_3 + \pi_1(1-p) \\ \pi_2 = \pi_1 p \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

   la cui soluzione è $\pi_1 = \frac{1}{1+2p}$, $\pi_2 = \pi_3 = \frac{p}{1+2p}$.
   Per $p = 1$ la catena è ricorrente periodica. Siccome al tempo 0 la catena si trova nello stato 1, allora si ha

   $$\begin{cases} \pi_1(n) = 1 & n = 0, 3, 6, \cdots \\ \pi_1(n) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   dunque il limite per $n \to \infty$ non esiste.

Problema 5

Dai dati del problema si sa che $f_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ per $x > 0$, e $f_\Theta(\theta) = 1$ per $\theta \in [1, 2]$. Lo stimatore MAP si trova applicando la definizione:

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}_{\mathrm{MAP}}(x) &= \arg \max_{\theta \in [1,2]} f_{\Theta|X}(\theta|x) \\ &= \arg \max_{\theta \in [1,2]} f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) \\ &= \arg \max_{\theta \in [1,2]} \theta e^{-\theta x}. \end{aligned}$$

Il massimo si trova imponendo la derivata uguale a 0:

$$\frac{d}{d\theta} \theta e^{-\theta x} = e^{-\theta x} - \theta x e^{-\theta x} = e^{-\theta x}(1 - \theta x) \overset{!}{=} 0$$

la cui soluzione dà $\theta = x^{-1}$. Non sempre la soluzione trovata cade nel supporto $[1, 2]$ di θ, in tal caso il valore di θ che massimizza la probabilità a posteriori si trova ai bordi del supporto. Quindi lo stimatore MAP sarà dato da

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{MAP}}(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 0.5 \\ x^{-1} & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Problema 6

Partendo dal tempo $t = 0$ generiamo i tempi di interarrivo $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ del processo di Poisson: dal metodo della trasformazione inversa si ha $T_i = -\frac{1}{\lambda} \log(U_i)$. Gli istanti di arrivo X_j del processo di Poisson saranno dunque

$$\begin{aligned} X_j &= \sum_{i=1}^{j} T_i \\ &= -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{j} \log(U_i), \qquad j \geq 1. \end{aligned}$$