Esercitazione 02: Analisi di sistemi dinamici: movimenti ed equilibri di sistemi LTI

4 marzo 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica

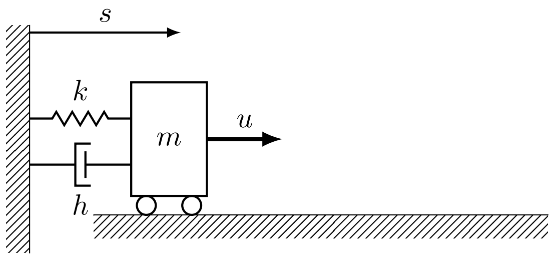
Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

1 Sistema massa-molla-smorzatore

Sia dato il sistema fisico riportato in Figura, che rappresenta un carrello che si muove lungo una guida orizzontale rettilinea. Si considera il contributo dell'attrito trascurabile. Al carrello di massa m viene applicata una forza $u(t)$ lungo la direzione del moto. L'uscita del sistema è la posizione $p(t)$ del carrello. Il carrello è connesso a un muro con una molla con costante elastica $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ e con uno smorzatore con costante di smorzamento $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$.



1. Scrivere le equazioni del sistema nello spazio di stato.
2. Calcolare gli autovalori del sistema al variare di k e h.
3. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
4. Posti $m = 1$, $k = h = 2$ calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
5. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
6. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla.
7. Posti $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione nulla e velocità $v(0) = 1$.
8. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, si trovi il valore di $\overline{u}$ tale che il sistema abbia un equilibrio in posizione $\overline{p} = 2$ e velocità nulla.
9. Dire cosa cambia nel punto precedente se la posizione e la velocità iniziali sono entrambe nulle, mentre la forza applicata al carrello è $u(t) = \overline{u} = 4$.

Soluzione

1. Il sistema è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = -kp(t) - hv(t) + u(t) \end{cases}$$

che può essere scritto nello spazio di stato come:

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\frac{k}{m}p(t) - \frac{h}{m}v(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = p(t) \end{cases}$$

Chiamando

$$x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

il sistema può essere scritto in forma matriciale come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

con le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

2. Gli autovalori del sistema si ottengono calcolando il polinomio caratteristico della matrice A:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{m} & \lambda + \frac{h}{m} \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{h}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

da cui si ricavano gli autovalori:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{h}{m} \pm \sqrt{\frac{h^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Se

- $\dfrac{h^2}{m^2} \geq 4\dfrac{k}{m}$, allora si hanno **modi reali** con autovalori strettamente negativi (se $h > 0$)
- $\dfrac{h^2}{m^2} < 4\dfrac{k}{m}$, allora si hanno **modi complessi coniugati** con autovalori a parte reale strettamente negativa (se $h > 0$)

3. Considerando $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

e gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

I modi del sistema sono quindi e^{-t} e e^{-2t}.

L'esercizio richiede di calcolare la risposta libera dell'uscita del sistema partendo da posizione $p(0) = 1$ e velocità nulla, ossia per uno stato iniziale pari a:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La risposta libera dell'uscita si può calcolare applicando la formula di Lagrange come:

$$\begin{aligned} x_L(t) &= e^{At}x(0) \\ y_L(t) &= Cx(t) + Du(t) = Ce^{At}x(0) \end{aligned}$$

Dato che gli autovalori di A sono distinti, essa è diagonalizzabile. Si può quindi calcolare $e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T$, dove la matrice T^{-1} è ottenuta accostando gli autovettori associati agli autovalori di A.

Calcoliamo quindi gli autovettori associati agli autovalori di A.

- Autovettore associato a $\lambda_1 = -1$:

$$(\lambda_1 I - A)\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(\alpha+\beta)\\2(\alpha+\beta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

dato che $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$, l'autovettore associato a $\lambda_1 = -1$ è (ad esempio):

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

- Autovettore associato a $\lambda_2 = -2$:

$$(\lambda_2 I - A)\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(2\alpha+\beta)\\(2\alpha+\beta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

dato che $-2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha$, l'autovettore associato a $\lambda_2 = -2$ è (ad esempio):

$$v_2 = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione T^{-1} si ottiene accostando gli autovettori ottenuti:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}, \quad T = \frac{1}{-2+1}\begin{bmatrix}-2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$$

La matrice A_d è quindi ottenuta come:

$$\begin{aligned}A_d = TAT^{-1} &= \begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-2 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

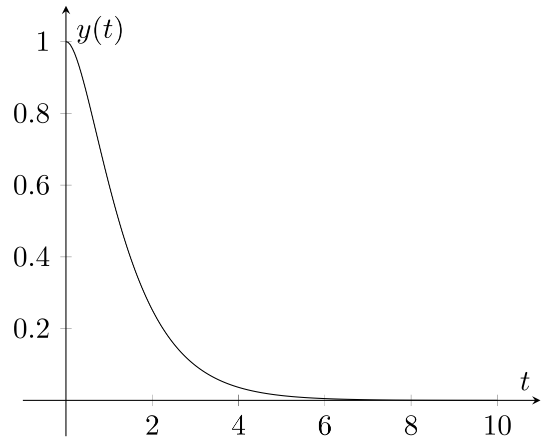
Si calcola quindi la matrice esponenziale come:

$$\begin{aligned}e^{At} = T^{-1}e^{A_d t}T &= \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-2t}\\-e^{-t} & -2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\-2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

La risposta libera dell'uscita con le condizioni iniziali date è ottenuta come:

$$\begin{aligned}y_L(t) &= Ce^{At}x(0)\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ &= 2e^{-t} - e^{-2t}\end{aligned}$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



Osservazione 1. *Un metodo alternativo per ottenere la risposta libera dell'uscita è osservare che essa è composta da una combinazione lineare dei modi del sistema, ossia:*

$$y_L(t) = \gamma_1 e^{-t} + \gamma_2 e^{-2t}. \tag{1}$$

Per individuare i valori dei parametri γ_1 e γ_2, si può impostare un sistema di equazioni sfruttando l'espressione (1), l'espressione dell'uscita e le condizioni iniziali $x(0)$:

$$y_L(0) = \gamma_1 + \gamma_2 = Cx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Dato che si hanno due parametri è necessario trovare una seconda equazione. Si deriva quindi l'espressione (1) rispetto al tempo:

$$\dot{y}_L(t) = -\gamma_1 e^{-t} - 2\gamma_2 e^{-2t}$$

e si eguaglia all'espressione:

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t)$$

valutate entrambe in $t = 0$:

$$-\gamma_1 - 2\gamma_2 = CAx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Si ha quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ -\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1 = 2 \\ \gamma_2 = -1 \end{cases}$$

L'espressione della risposta libera dell'uscita è quindi:

$$y_L(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

4. Nel caso in cui $m = 1$, $k = h = 2$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

e gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\jmath}{2} = -1 \pm \jmath.$$

I modi del sistema sono quindi: $e^{(-1+\jmath)t}$ e $e^{(-1-\jmath)t}$.

La risposta libera dell'uscita può essere calcolata come nel caso precedente tramite diagonalizzazione, oppure osservando che essa è data dalla combinazione lineare dei modi del sistema. Di seguito si segue il secondo metodo.

La risposta libera dell'uscita del sistema è data da:

$$\begin{aligned} y_L(t) &= \gamma_1 e^{(-1+\jmath)t} + \gamma_2 e^{(-1-\jmath)t} \\ \dot{y}_L(t) &= (-1+\jmath)\,\gamma_1 e^{(-1+\jmath)t} + (-1-\jmath)\,\gamma_2 e^{(-1-\jmath)t} \end{aligned}$$

e quindi il sistema di equazioni può essere ottenuto come:

$$\begin{aligned} y_L(0) &= \gamma_1 + \gamma_2 = Cx(0) = 1 \\ \dot{y}_L(0) &= (-1+\jmath)\,\gamma_1 + (-1-\jmath)\,\gamma_2 = CAx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Si noti che, data la presenza di autovalori complessi, $\gamma_1 \in \mathbb{C}$ e $\gamma_2 \in \mathbb{C}$, i parametri possono essere riscritti come:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_1^R + \jmath\gamma_1^I \\ \gamma_2 = \gamma_2^R + \jmath\gamma_2^I \end{cases}$$

con $\gamma_1^R \in \mathbb{R}$, $\gamma_1^I \in \mathbb{R}$, $\gamma_2^R \in \mathbb{R}$ e $\gamma_2^I \in \mathbb{R}$. Si ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \gamma_1^R + \gamma_2^R + \jmath\left(\gamma_1^I + \gamma_2^I\right) = 1 \\ (-1+\jmath)\left(\gamma_1^R + \jmath\gamma_1^I\right) + (-1-\jmath)\left(\gamma_2^R + \jmath\gamma_2^I\right) = 0 \end{cases}$$

che può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \gamma_1^R + \gamma_2^R = 1 \\ \gamma_1^I + \gamma_2^I = 0 \\ -\left(\gamma_1^R + \gamma_2^R\right) - \gamma_1^I + \gamma_2^I = 0 \\ \left(\gamma_1^R - \gamma_2^R\right) - \left(\gamma_1^I + \gamma_2^I\right) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_1^R = \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2^R = \dfrac{1}{2} \\ \gamma_1^I = -\dfrac{1}{2} \\ \gamma_2^I = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

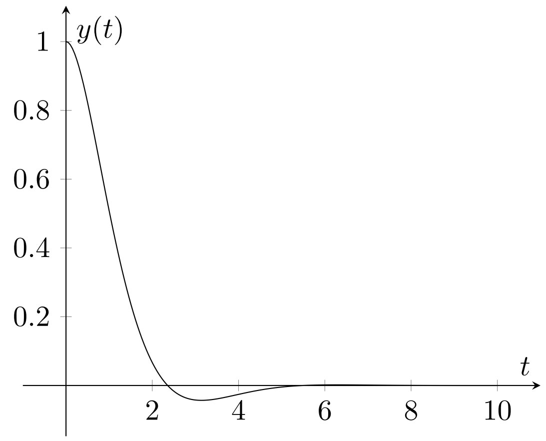
ossia:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{2}(1-\jmath) \\ \gamma_2 = \dfrac{1}{2}(1+\jmath) \end{cases}$$

La risposta libera dell'uscita è quindi data da:

$$\begin{aligned} y_L(t) &= \frac{1}{2}\,(1-\jmath)\,e^{(-1+\jmath)t} + \frac{1}{2}\,(1+\jmath)\,e^{(-1-\jmath)t} \\ &= e^{-t}\left(\frac{e^{\jmath t} + e^{-\jmath t}}{2} + \frac{e^{\jmath t} - e^{-\jmath t}}{2\jmath}\right) \\ &= e^{-t}\left(\cos(t) + \sin(t)\right) \end{aligned}$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



Osservazione 2. *In alternativa, è possibile notare che se i modi sono, in generale, associati ad autovalori complessi coniugati, ad esempio* $e^{\alpha+\jmath\omega t} = e^{\alpha t}e^{\jmath\omega t}$ *e* $e^{\alpha-\jmath\omega t} = e^{\alpha t}e^{-\jmath\omega t}$ *il movimento libero è composto dalla combinazione lineare dei modi* $e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ *e* $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$. *Nel caso trattato, essendo i modi* $e^{-t}e^{\jmath t}$ *e* $e^{-t}e^{-\jmath t}$, *il movimento libero può essere composto dalla combinazione lineare dei modi oscillanti* $\sin(t)$ *e* $\cos(t)$, *modulato da* e^{-t}.

Si sa quindi che:

$$y_L(t) = (\tilde{\gamma}_1 \cos(t) + \tilde{\gamma}_2 \sin(t))\, e^{-t}$$

con $\tilde{\gamma}_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\tilde{\gamma}_2 \in \mathbb{R}$. *Si può quindi seguire lo stesso procedimento utilizzato ma con una espressione più semplice, in campo reale.*

$$\begin{aligned}
&y_L(0) = \tilde{\gamma}_1 = 1\\
&\dot{y}_L(t) = (-\tilde{\gamma}_1 \sin(t) + \tilde{\gamma}_2 \cos(t))\, e^{-t} - (\tilde{\gamma}_1 \cos(t) + \tilde{\gamma}_2 \sin(t))\, e^{-t}\\
&\dot{y}_L(0) = \tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1 = 0
\end{aligned}$$

da cui si ottiene facilmente che: $\tilde{\gamma}_1 = 1$ *e* $\tilde{\gamma}_2 = 1$. *Per cui:*

$$y_L(t) = e^{-t}\,(\cos(t) + \sin(t))\,.$$

5. Considerando $m = 1$, $h = 0$ e $k = 1$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

e gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_{1,2} = \pm \jmath.$$

I modi del sistema sono quindi: $e^{\jmath t}$ e $e^{-\jmath t}$.

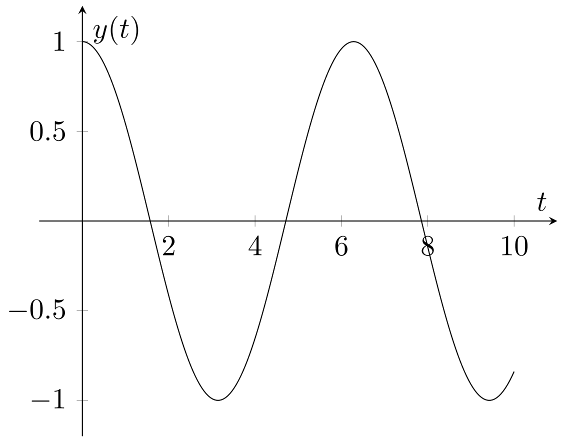
La risposta libera dell'uscita è data dalla combinazione lineare di $\cos(t)$ e $\sin(t)$ ed è reale:

$$\begin{aligned}
&y_L(t) = \gamma_1 \cos(t) + \gamma_2 \sin(t), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\\
&y_L(0) = \gamma_1 = 1\\
&\dot{y}_L(t) = -\gamma_1 \sin(t) + \gamma_2 \cos(t)\\
&\dot{y}_L(t) = \gamma_2 = 0
\end{aligned}$$

per cui la risposta libera del sistema è:

$$y_L(t) = \cos(t).$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



6. Considerando $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

   e gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \Rightarrow n_1 = 2, g_1 = 1, n_1 > g_1$$

   I modi del sistema sono quindi: e^{0t} e te^{0t}.

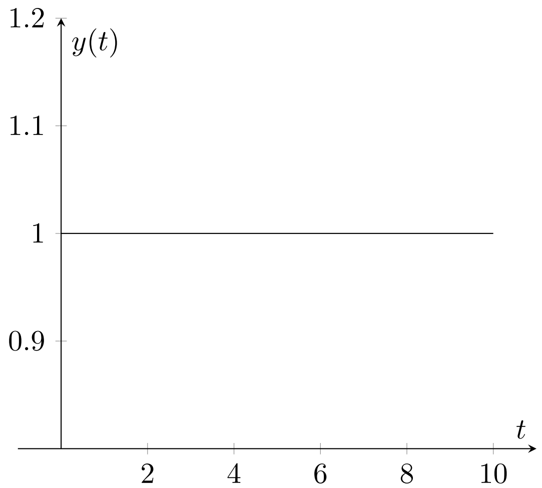
   La risposta libera dell'uscita è ancora data dalla combinazione lineare dei modi del sistema:

$$\begin{aligned} y_L(t) &= \gamma_1 + \gamma_2 t \\ y_L(0) &= \gamma_1 = 1 \\ \dot{y}_L(t) &= \gamma_2 \\ \dot{y}_L(0) &= \gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

   per cui la risposta libera dell'uscita è:

$$y_L(t) = 1, \forall t \geq 0$$

   L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



7. Considerando $m = 1$, $h = 0$ e $k = 0$, come nel caso precedente i modi del sistema sono e^{0t} e te^{0t}.

La risposta libera dell'uscita è ancora data dalla combinazione lineare dei modi del sistema:

$$\begin{aligned}
y_L(t) &= \gamma_1 + \gamma_2 t \\
y_L(0) &= \gamma_1 = 0 \\
\dot{y}_L(t) &= \gamma_2 \\
\dot{y}_L(0) &= \gamma_2 = 1
\end{aligned}$$

per cui la risposta libera dell'uscita è:

$$y_L(t) = t, \forall t \geq 0$$

8. Posti $m = 1$, $h = 3$ e $k = 2$, le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

L'esercizio richiede di trovare il valore di $u(t) = \overline{u}$ tale che il punto

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sia equilibrio del sistema. Si può quindi imporre la condizione di equilibrio:

$$\begin{aligned}
A\overline{x} + B\overline{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \overline{u} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ -4 + \overline{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

da cui: $\overline{u} = 4$.

Questo significa che se si parte dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$, e $u(t) = \overline{u} = 4 \ \forall t \geq 0$, allora $x(t) = x(0)$, $\forall t \geq 0$.

9. L'esercizio richiede quindi di valutare cosa succede nel caso in cui $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $u(t) = \overline{u} = 4$ $\forall t \geq 0$. Per affrontare questo problema si può scomporre il movimento in due contributi, per il principio di sovrapposizione degli effetti:

   (a) Il movimento dato dall'ingresso $u(t) = \overline{u} = 4$, partendo da condizioni iniziali $x(0) = \overline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} x^1(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{x} \\ u^1(t) = 4 \end{cases}, \quad x^1(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall t \geq 0.$$

   (b) Il movimento dato dall'ingresso $u(t) = 0$, partendo da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T - \overline{x}$:

$$\begin{cases} x^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \overline{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u^2(t) = 0 \end{cases}, \quad x^2(t) = x_L(t) = e^{At} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che:

$$x(0) = x^1(0) + x^2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$u(t) = u^1(t) + u^2(t) = 4$$
$$x(t) = x^1(t) + x^2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il movimento dello stato sistema, per $t \to \infty$ tende quindi all'equilibrio $\overline{x}$.

Per quanto riguarda l'uscita, si ha che:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y_L^2(t)$$

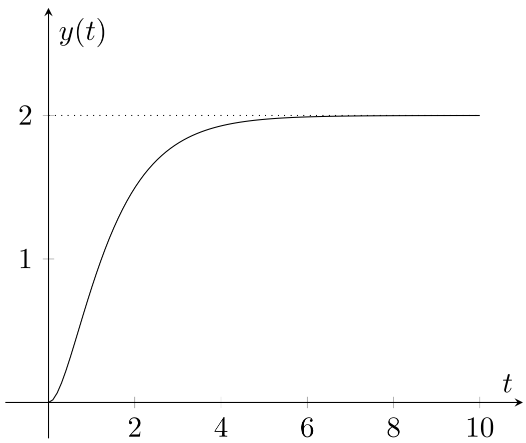
Dato che:

$$y_L^2(t) = -2 \left(2e^{-t} - e^{-2t} \right)$$

si ha che:

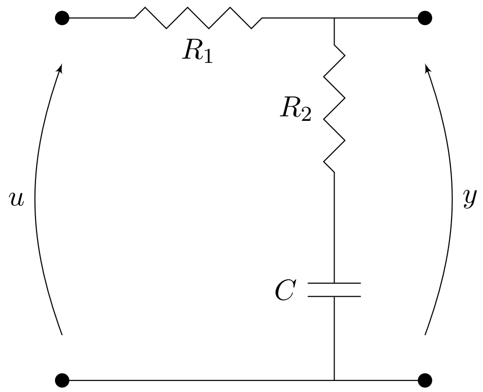
$$y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

L'andamento dell'uscita è riportato in figura.



2 Circuito RC

Si consideri il partitore di tensione rappresentato in figura con $R_1 = R_2 = 1$ e $C = 1$, dove $u(t)$ è la tensione di ingresso al circuito e $y(t)$ è la tensione misurata in uscita.



1. Scrivere il modello del circuito nello spazio di stato.
2. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio per $u(t) = \overline{u}$, $\forall t \geq 0$.
3. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\,\mathrm{sca}(t)$, per condizioni iniziali nulle.
4. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}e^{-2t}$, per condizioni iniziali nulle.
5. Calcolare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \overline{u}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, per condizioni iniziali nulle.

Soluzione

1. Il modello del sistema nello spazio di stato, chiamando con $x(t)$ la tensione sul condensatore, è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}x(t) + \dfrac{1}{(R_1+R_2)C}u(t) \\ y(t) = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}x(t) + \dfrac{R_2}{R_1+R_2}u(t) \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{1}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}u(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{2}x(t) + \dfrac{1}{2}u(t) \end{cases}.$$

2. Lo stato di equilibrio si ottiene per $\dot{x}(t) = 0$, ossia:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\overline{x} + \frac{1}{2}\overline{u} &= 0 \\ \overline{x} &= \overline{u} \end{aligned}$$

   e l'uscita di equilibrio è quindi $\overline{y} = \overline{u}$.

3. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}\,\mathrm{sca}(t)$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato:

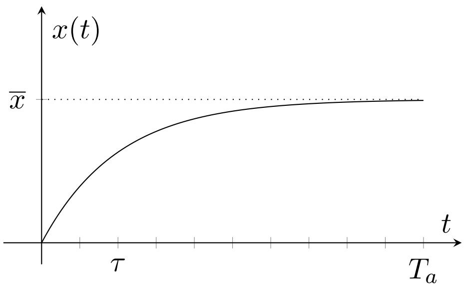
$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}\frac{\overline{u}}{2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \overline{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right), t \geq 0. \end{aligned}$$

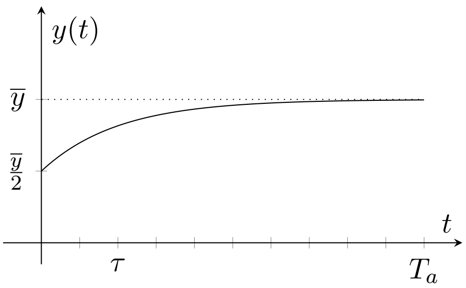
   quindi la risposta del sistema è:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}x_F(t) + \frac{1}{2}u(t) \\ &= \overline{u}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right), t \geq 0. \end{aligned}$$

Il tempo di assestamento dell'uscita è $T_a = 5\tau = 10$ unità di tempo.

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.





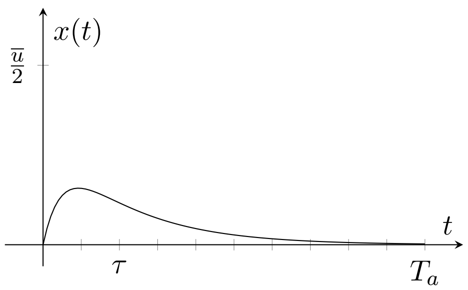
4. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}e^{-2t}$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato:

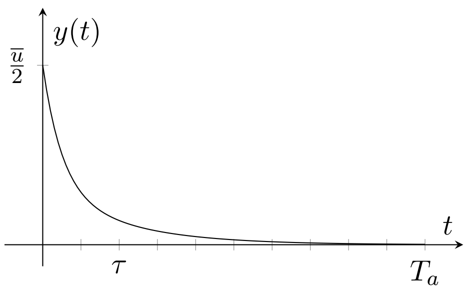
$$
\begin{aligned}
x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{\overline{u}}{2} e^{-2\tau} \, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{3}\overline{u}\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-2t}\right), t \geq 0.
\end{aligned}
$$

L'uscita è quindi:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{6}\overline{u}\left(e^{-\frac{t}{2}} - e^{-2t}\right) + \frac{1}{2}\overline{u}e^{-2t} \\
&= \frac{\overline{u}}{6}\left(e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-2t}\right)
\end{aligned}
$$

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.





Osservazione 3. *Nel punto precedente, il modo forzante è costante, mentre il modo proprio del sistema è $e^{-\frac{t}{2}}$. L'uscita forzata è combinazione lineare di questi due.*
In questo caso, il modo forzante è e^{-2t}, mentre il modo proprio del sistema rimane $e^{-\frac{t}{2}}$. L'uscita forzata è una somma pesata delle due componenti.

5. La risposta all'ingresso $u(t) = \overline{u}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ per condizioni iniziali nulle è data solo dal contributo del movimento forzato dello stato. È utile riscrivere l'ingresso come:

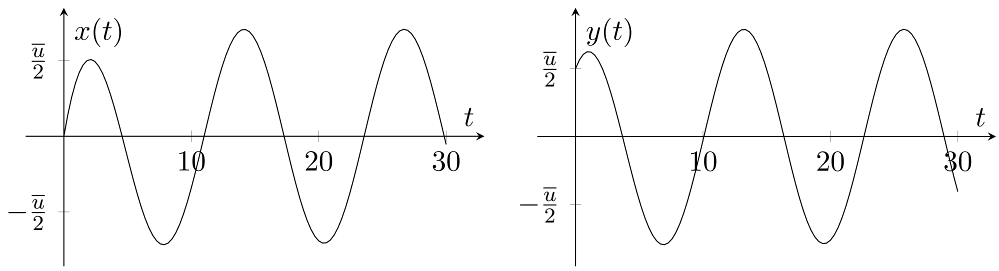
$$
\frac{\overline{u}}{2}\left(e^{\jmath\frac{t}{2}} + e^{-\jmath\frac{t}{2}}\right).
$$

$$
\begin{aligned}
x_F(t) &= \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \frac{1}{2} u(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\overline{u}}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

L'uscita è quindi:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\overline{u}}{4}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right) + \frac{\overline{u}}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{\overline{u}}{4}\left(3\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - e^{-\frac{t}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

L'andamento dello stato e dell'uscita del sistema sono mostrati in figura.



Osservazione 4. *Si noti che vale la stessa considerazione fatta per i punti precedenti.*