Eq diff secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Polinomio caratteristico $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$	**Soluzione associata all'equazione differenziale** $y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$ con $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$ Due radici reali e distinte λ_1, λ_2	$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$ Due radici reali e coincidenti λ_0	$y(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} + t c_2 e^{\lambda_0 t}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$ Due radici complesse e coniugate $\alpha + i\beta$ $\alpha - i\beta$	$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Il "metodo di somiglianza" per la ricerca di una soluzione particolare delle equazioni differenziali lineari del second'ordine non omogenee:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (*)$$

(con a, b, c costanti, $a \neq 0$)

Forma di $f(x)$	**Forma in cui si cerca $\overline{y}(x)$**	**Eventuali eccezioni e osservazioni**
CASO 1		
polinomio di grado n	polinomio di grado n	Se nella (*) $c = 0$, cercare un polinomio di grado $n + 1$; se $c = b = 0$, cercare un polinomio di grado $n + 2$.
ESEMPI CASO 1		
$y'' + 2y = x^3 + 2$	$\overline{y}(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$	
$y'' - 3y' = 2x + 1$	$\overline{y}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	
CASO 2		
esponenziale $Ae^{\lambda x}$	esponenziale $ce^{\lambda x}$ (lo stesso λ, e c da determinarsi)	Se non c'è soluzione di questo tipo (ciò accade perché $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, ossia perché $e^{\lambda x}$ è soluzione dell'eq. diff. omogenea), cercare $\overline{y}(x) = cxe^{\lambda x}$; se nemmeno questo tipo di soluzione esiste, cercare $\overline{y}(x) = cx^2e^{\lambda x}$
ESEMPI CASO 2		
$y'' + 2y' + 3y = 2e^{-3x}$	$\overline{y}(x) = ce^{-3x}$	
$y'' + 2y' - 3y = 3e^x$	$\overline{y}(x) = cxe^x$	
(Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$; equivalentemente: e^x è soluzione dell'eq. diff. omogenea $y'' + 2y' - 3y = 0$; perciò occorre moltiplicare per x)		
CASO 3		
$A\cos\omega x + B\sin\omega x$	$c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ (lo stesso ω, e c_1, c_2 da determinarsi)	Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi. Se $b = 0$ può accadere che $c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$ sia soluzione dell'omogenea: in tal caso, cercare soluzione $x(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$.
ESEMPIO CASO 3		
$y'' + 2y' - y = 3\sin 2x$	$\overline{y}(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	

Forma di $f(x)$	**Forma in cui si cerca $\overline{y}(x)$**	**Eventuali eccezioni e osservazioni**
CASO 4		
$e^{\lambda x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$	$e^{\lambda x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$ (gli stessi ω, λ e c_1, c_2 da determinarsi)	Se $z = \lambda + i\omega$ è soluzione di $az^2 + bz + c = 0$, sostituire $e^{\lambda x}$ con $xe^{\lambda x}$. Notare che anche se f ha uno solo dei due addendi (seno o coseno), in generale la soluzione li ha entrambi.

ESEMPI CASO 4

$y'' + 2y = 3e^{-x}\sin 2x \quad \overline{y}(x) = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

$y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}\cos x \quad \overline{y}(x) = xe^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$

(Spiegazione 2° es.: $z = 2 + i$ è soluzione dell'eq. caratteristica $z^2 - 4\lambda + 5 = 0$, ossia $e^{2x}\cos x$, $e^{2x}\sin x$ sono soluzioni dell'eq. omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$, perciò si introduce il fattore x).

(Nel caso 4 può essere più comodo effettuare i calcoli utilizzando i numeri complessi.
Per sinteticità, qui non si riporta l'illustrazione di quel metodo).

CASO 5		
$e^{\lambda x}p(x)$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado n	$e^{\lambda x}q(x)$, con lo stesso λ, e $q(x)$ polinomio di grado n, da determinarsi	Se λ è soluzione dell'eq. caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, cercare una soluzione $y(x) = e^{\lambda x} \cdot$ (polinomio di grado $n + 1$)

ESEMPI CASO 5

$y'' + 2y' - y = e^{3x}(x+2) \quad \overline{y}(x) = e^{3x}(ax+b)$

$y'' - y = e^{x}(x+2) \quad \overline{y}(x) = e^{x}(ax^2+bx + c)$

(Spiegazione 2° esempio: $\lambda = 1$ è soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - \lambda = 0$, ossia e^x è soluzione dell'equazione omogenea $y'' - y = 0$; perciò il polinomio che compare in $\overline{y}$ si alza di grado).

OSSERVAZIONE. QUANDO IL TERMINE NOTO E' *SOMMA DI DUE FUNZIONI* DEI TIPI PRECEDENTI

Se il termine noto è del tipo $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, con f_1, f_2 dei tipi descritti in precedenza, è sufficente cercare (separatamente):
una soluzione particolare y_1 dell'equazione $Ly = f_1$; una soluzione particolare y_2 dell'equazione $Ly = f_2$;
a questo punto (per la *linearità dell'equazione differenziale*), la funzione $y_1 + y_2$ sarà una soluzione particolare di $Ly = f_1 + f_2$.

Esempio:

$y'' + 2y = 3e^{-x} + x^2 + 1$

Si cerca una soluzione $y_1 = c_1e^{-x}$ dell'equazione $y'' + 2y = 3e^{-x}$; si cerca una soluzione $y_1 = ax^2 + bc + c$ dell'equazione $y'' + 2y = x^2 + 1$;
la funzione $y_1 + y_2$ sarà allora una soluzione particolare dell'equazione di partenza.

EQ DI EULERO

EQ $\quad a x^2 y'' + b x y' + c y = 0$ "DI EULERO"

1) RISOLVERE L'EQ DI SECONDO GRADO

$$a r(r-a) + b r + c = 0$$

2) SI HANNO 3 CASI

- 2 RADICI REALI DISTINTE r_1, r_2

INT GEN: $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$ PER $x>0$

- 2 RADICI COMPLESSE CONIUGATE $\alpha \pm i\beta$

INT GEN: $y(x) = x^{\alpha}\left(c_1 \cos\left(\beta \log(x)\right) + c_2 \sin\left(\beta \log(x)\right)\right)$ PER $x>0$

- 2 RADICI COINCIDENTI r

INT GEN: $y(x) = x^{r}\left(c_1 + c_2 \log(x)\right)$ PER $x>0$

(PER $x<0$ STESSE SOLUZIONI MA CON $-x$ INVECE DI x)