Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 02/05/2018

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1 Si consideri un mazzo di 40 carte ben mescolato. Si distribuiscono 5 carte a ognuno di 3 giocatori. Qual è la probabilità che ogni giocatore riceva esattamente un 2?

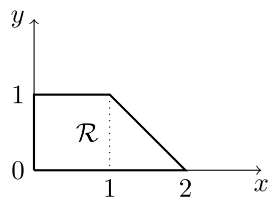
2 Si consideri il lancio di una moneta bilanciata. Se esce testa si estraggono 2 biglie da un'urna con 5 biglie nere e 5 bianche. Se esce croce si estraggono 2 biglie da un'urna con 3 biglie nere e 7 bianche. Calcolare:

(a) La probabilità di estrarre due biglie nere
(b) La probabilità di ottenere croce e due biglie nere
(c) Avendo estratto due biglie nere, la probabilità di aver ottenuto croce

3 In un triangolo rettangolo la lunghezza dell'ipotenusa è unitaria e uno dei restanti angoli α viene scelto in maniera uniformemente distribuita tra 0 e $\pi/2$ radianti. Com'è distribuita la lunghezza del lato opposto all'angolo α? *Suggerimento:* $\frac{d}{dx}arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4 Considerare la regione $\mathcal{R}$ in figura delimitata dal poligono di 4 lati. Due v.a. X e Y hanno distribuzione congiunta uniforme nella regione $\mathcal{R}$ e zero altrimenti.

(a) Determinare l'espressione della $f_{X,Y}$, della f_X, e della $f_{Y|X}$
(b) Calcolare $\mathsf{E}[X]$ e $\mathsf{E}[Y|X=x]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
(c) Calcolare $\mathsf{Var}[X]$



5 Sia X_i, $i = 1, 2, \cdots$ una successione di v.a. i.i.d. con $X_i \sim \mathcal{U}[-1, 1]$. Determinare se le seguenti successioni convergono in probabilità a qualche limite:

(a) $(-1)^i X_i, \quad i = 1, 2, \cdots$
(b) $(-X_i)^i, \quad i = 1, 2, \cdots$
(c) $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k / i, \quad i = 1, 2, \cdots$

6 Dovete commissionare un sondaggio per stimare il risultato di un referendum. Una nuova società è disponibile sul mercato, e vi offre una stima del "sì" con un'accuratezza di 0.01 e affidabilità del 98%. Affidereste l'incarico a questa nuova società? Discuterne i motivi. Assunzioni: tutte le persone rispondono al sondaggio in maniera indipendente e con la stessa probabilità di "sì". Considerare il caso pessimista sulla varianza della stima. Le probabilità vengono approssimate con il teorema fondamentale del limite.

Soluzioni

Problema 1

Lo spazio di probabilità è uniforme. Si può interpretare il problema con 4 partizioni delle carte totali: 3 partizioni sono corrispondenti ai 3 giocatori, mentre l'ultima partizione è il mazzo. Ci sono due sottoinsiemi di interesse: l'insieme dei 4 "2" e le restanti 36 carte. La probabilità cercata è:

$$\frac{\binom{4}{1,1,1,1}\binom{36}{4,4,4,24}}{\binom{40}{5,5,5,25}} = \frac{4!\cdot 36!\cdot(5!)^3\cdot 25!}{(4!)^3\cdot 24!\cdot 40!} = 4!\frac{5^3\cdot 25}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37} \tag{1}$$

Problema 2

1. Si può usare il teorema delle probabilità totali:

$$\begin{aligned}\Pr(\mathrm{NN}) &= \Pr(\mathrm{NN}|T)\Pr(T) + \Pr(\mathrm{NN}|C)\Pr(C)\\ &= \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{0}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{13}{90}\end{aligned} \tag{2}$$

2. Usando la regola moltiplicativa si ha:

$$\begin{aligned}\Pr(\mathrm{NN}\text{ e }C) &= \Pr(\mathrm{NN}|C)\Pr(C)\\ &= \frac{3\cdot 2}{10\cdot 9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{30}\end{aligned} \tag{3}$$

3. Usando il teorema di Bayes:

$$\Pr(C|\mathrm{NN}) = \frac{\Pr(\mathrm{NN}\text{ e }C)}{\Pr(\mathrm{NN})} = \frac{1/30}{13/90} = \frac{3}{13}. \tag{4}$$

Problema 3

Il lato cercato ha lunghezza $X = \sin(\alpha)$ dove $\alpha \sim \mathcal{U}(0, \pi/2)$. La legge cumulata di X è

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \Pr(\sin(\alpha) < x)\\ &= \Pr(\alpha < \arcsin(x))\\ &= \begin{cases} 0 & x < 0\\ \arcsin(x)\cdot\frac{2}{\pi} & 0 < x < 1\\ 1 & x > 1.\end{cases}\end{aligned} \tag{5}$$

La distribuzione di X è

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0 < x < 1\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases} \tag{6}$$

Problema 4

1.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{area}(\mathcal{R})} = 2/3 & (x,y)\in\mathcal{R}\\ 0 & (x,y)\notin\mathcal{R}\end{cases} \tag{7}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = 2/3 & 0 < x < 1\\ \int_0^{2-x} f_{X,Y}(x,y)dy = \frac{2}{3}(2-x) & 1 < x < 2\end{cases} \tag{8}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\\ \frac{1}{2-x} & 1 < x < 2,\ 0 < y < 2-x\\ 0 & (x,y)\notin\mathcal{R}\end{cases} \tag{9}$$

2. Per definizione:

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^2 x f_X(x)dx = \int_0^1 x\frac{2}{3}dx + \int_1^2 x\frac{2}{3}(2-x)dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}|x^2 - x^3/3|_1^2 = \frac{7}{9}. \tag{10}$$

Tramite ispezione visiva della figura si calcola immediatamente il valore atteso condizionato:

$$\mathsf{E}[Y|X=x] = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \\ 1/2 - (x-1)/2 & 1 < x < 2 \end{cases} \tag{11}$$

3. Per definizione:

$$\mathsf{E}[X^2] = \int_0^1 x^2\frac{2}{3}dx + \int_1^2 x^2\frac{2}{3}(2-x)dx = \frac{2}{9} + \frac{2}{3}|2x^3/3 - x^4/4|_1^2 = \frac{13}{6}, \tag{12}$$

quindi

$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 = \frac{13}{6} - \frac{49}{81}. \tag{13}$$

Problema 5

1. $-X_i$ è statisticamente equivalente a X_i grazie alla simmetria della distribuzione, quindi la successione $\{(-1)^i X_i\}$ è statisticamente equivalente alla successione $\{X_i\}$. La successione $\{X_i\}$ non converge in probabilità ad alcun numero.

2. $(-X_i)^i = (-1)^i X_i^i$ che è statisticamente equivalente a $(X_i)^i$. Si verifica che la successione $\{(X_i)^i\}$ converge in probabilità a 0:

$$\lim_{i\to\infty} \Pr(|(X_i)^i - 0| > \epsilon) = \lim_{i\to\infty} \Pr(X_i < -\epsilon^{1/i}) + \Pr(X_i > \epsilon^{1/i}) = 0 \tag{14}$$

poiché $\lim_{i\to\infty} \epsilon^{1/i} = 1$, e la v.a. X_i non ha densità al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi la successione $\{(-X_i)^i\}$ converge in probabilità a 0.

3. Per la legge debole dei grandi numeri $\{S_i\}$ converge a $\mathsf{E}[X_i] = 0$ in probabilità.

Problema 6

Sia f la frazione di persone che risponde "sì" al referendum. La nuova società garantisce che la stima $\widehat{f}$ è tale che

$$\Pr(|\widehat{f} - f| > 0.01) < 1 - 0.98. \tag{15}$$

Usando il teorema fondamentale del limite si ha che

$$\Pr\left(\frac{|\widehat{f} - f|}{\sqrt{1/(4n)}} > \frac{0.01}{\sqrt{1/(4n)}}\right) \approx \Pr\left(|Z| > 0.02\sqrt{n}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(0.02\sqrt{n}\right)\right) < 0.02 \tag{16}$$

$$0.02\sqrt{n} > \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.3263 \longrightarrow n \geq 13530. \tag{17}$$

E' inverosimile che la società abbia intervistato più di diecimila cittadini ad un costo contenuto, quindi non ci fidiamo ad affidare la stima a questa società.