Informazione e stima – 10/02/2021

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Nominare il file da caricare con il proprio codice persona.
- Indicare l'esercizio da escludere dal punteggio finale.

1. Si consideri un gioco dove si lancia un dado ben bilanciato a 6 facce e successivamente si pesca una carta da un mazzo ben mescolato di 52 carte. Si vincono 100 € se la carta pescata ha un valore minore al risultato del dado, altrimenti si perde la somma puntata p. Qual è il minimo valore di p che rende il gioco sostenibile per il banco nel lungo periodo?
Le figure (fante, regina, e re) valgono 10. *Ad ogni giocata si rimescola il mazzo con tutte le carte.*

2. Sia $X = -\log(|U|)$ dove $U \sim \mathcal{U}[-1, 1]$. Determinare la ddp di X.
Suggerimento: determinare prima la distribuzione di $T = |U|$.

3. Sia $X \sim \text{Poisson}(10)$. Condizionando ad un certo $X = x$, si sa che $\{Y|X = x\} \sim \text{Poisson}(x)$. Calcolare $\mathsf{Var}[Y]$ tramite la legge della variazione totale.

4. All'ufficio postale arrivano due tipi di clienti che richiedono servizi diversi. I clienti di tipo A e B arrivano secondo un processo di Poisson con tasso 20 e 10 all'ora, rispettivamente. Qual è la probabilità che i primi 3 clienti arrivati all'ufficio siano tutti di tipo A?

5. Partendo da campioni uniformemente distribuiti in $[0, 1]$, usare il metodo acceptance-rejection per campionare una v.a. X con ddp
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-(x-1)^2) & 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Scrivere l'algoritmo acceptance-rejection con la miglior efficienza possibile. Mediamente quanti campioni bisogna generare per vederne uno accettato?

6. Il numero di giorni di vita di una lampadina è una v.a. $X \sim \text{Geom}(p)$. Qual è il minimo numero medio di bit necessari a rappresentare il valore X?

Soluzioni

Problema 1

Chiamando X il risultato del lancio del dado, e $\mathcal{V}$ l'evento vittoria, si ha

$$\Pr(\mathcal{V}|X = x) = \frac{4(x-1)}{52} = \frac{x-1}{13}, \qquad x = \{1,2,3,4,5,6\}, \tag{1}$$

e mediando sui possibili risultati di x si ha

$$\begin{aligned}
\Pr(\mathcal{V}) &= \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} \Pr(\mathcal{V}|X = x) &(2)\\
&= \sum_{x=1}^{6} \frac{x-1}{78} &(3)\\
&= \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 78} = \frac{15}{78} = \frac{5}{26}. &(4)
\end{aligned}$$

Siccome la puntata p è sempre persa, mentre si vincono 100 € nel solo evento $\mathcal{V}$, per trovare il valore minimo di p bisogna impostare la disequazione

$$100 \Pr(\mathcal{V}) - p < 0 \tag{5}$$

la cui soluzione è

$$p > 100 \Pr(\mathcal{V}) = \frac{500}{26} \approx 19.23 \text{ €}. \tag{6}$$

Problema 2

Siccome la distribuzione di $U \sim \mathcal{U}[-1,1]$ ha simmetria pari, anche $T = |U|$ è uniforme con $T \sim \mathcal{U}[0,1]$. Dunque abbiamo che $X = -\log(T) > 0$, perché $0 < T < 1$. La cumulata di X è

$$\begin{aligned}
F_X(x) = \Pr(X \leq x) &= \Pr(-\log(T) \leq x) &(7)\\
&= \Pr(T \geq e^{-x}) &(8)\\
&= 1 - F_T(e^{-x}) &(9)\\
&= \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} &(10)
\end{aligned}$$

che è la cumulata di una v.a. esponenziale $X \sim \text{Exp}(1)$.

Problema 3

Applicando la legge della variazione totale, si ha

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}[Y] &= \mathsf{E}[\mathsf{Var}[Y|X]] + \mathsf{Var}[\mathsf{E}[Y|X]] &(11)\\
&= \mathsf{E}[X] + \mathsf{Var}[X] &(12)\\
&= 2\mathsf{E}[X] &(13)\\
&= 20, &(14)
\end{aligned}$$

dove in (12) abbiamo usato $\mathsf{Var}[Y|X = x] = x$ e $\mathsf{E}[Y|X = x] = x$, dato che $\{Y|X = x\} \sim \text{Poisson}(x)$. Infine, in (13) abbiamo usato $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}[X]$.

Problema 4

Si può considerare il processo unione, che risulta essere un processo di Poisson con tasso 30 utenti all'ora. La probabilità che un arrivo sia di tipo A è di $2/3$. Grazie alle proprietà dei processi di Poisson, gli arrivi nel processo unione possono essere di tipo A o B in maniera indipendente. Dunque, la probabilità di ottenere la sequenza di arrivi AAA è pari a $(2/3)^3 = 8/27 \approx 0.3$

Problema 5

Il massimo della funzione f_X nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ si ha per $x = 1$. In tal punto la funzione vale $f_X(1) = 3/4$.
L'algoritmo é il seguente:

1. Genero $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $U' \sim \mathcal{U}[0,1]$ in maniera indipendente. Siccome $0 \leq x \leq 2$, trasformo $Y = 2U$ e pongo $mf_Y(x) \stackrel{!}{=} 3/4 \to m = 6/4 = 3/2$ per ottenere massima efficienza
2. Accetto e pongo $X = Y$ se $U' \leq \frac{f_X(Y)}{mf_Y(Y)} = (1 - (Y-1)^2)$, altrimenti torno al punto 1.

Il numero di prove medie per avere un campione accettato é pari a $m = 3/2$.

Problema 6

Sappiamo che il numero medio minimo di bit non può essere inferiore all'entropia di X. La legge di X è

$$p_X(x) = p\,(1-p)^{x-1}\,, \qquad x = 1, 2, \cdots .$$

L'autoinformazione dell'evento $X = x$ è

$$i(x) = \log_2 \frac{1}{p_X(x)} = -\log_2\left(p\,(1-p)^{x-1}\right) = -\log_2(p) - (x-1)\log_2(1-p), \qquad x = 1, 2, \cdots .$$

Se $L(X)$ è la lunghezza del messaggio, in bit, necessario a descrivere X, allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[L(X)] &\geq H(X) && (15)\\
&= \mathsf{E}[i(X)] && (16)\\
&= \mathsf{E}[-\log_2(p) - (X-1)\log_2(1-p)] && (17)\\
&= -\log_2(p) - (\mathsf{E}[X] - 1)\log_2(1-p) && (18)\\
&= -\log_2(p) - \left(\frac{1}{p} - 1\right)\log_2(1-p) \text{ bit} && (19)
\end{aligned}$$