

# **Esercitazione 11: Sintesi del controllore Parte 2**

27 maggio 2024 (3h)

**Fondamenti di Automatica**

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University  
e successivamente in parte modificate e completate.

# 1 Sistema a fase non minima

Si consideri lo schema di controllo rappresentato in Figura 1

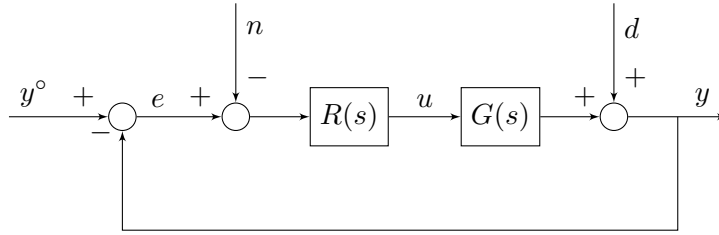


Figura 1: Schema di controllo.

dove

$$G(s) = \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)},$$

è la funzione di trasferimento di un sistema del terzo ordine, da controllare.

1. Si determini la funzione di trasferimento  $R(s)$  del regolatore di ordine minimo in modo tale che
  - (a) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.001$  quando  $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$ ,  $n(t) = 0$  e  $d(t) = 0$ .
  - (b) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.1$  quando  $y^\circ(t) = 0$ ,  $n(t) = \sin(\omega_n t)$  e  $d(t) = 0$ , con  $\omega_n \geq 10^2$ .
  - (c) L'errore a transitorio esaurito  $e_\infty$  soddisfi la limitazione  $|e_\infty| \leq 0.1$  quando  $y^\circ(t) = 0$ ,  $n(t) = 0$  e  $d(t) = \sin(\omega_d t)$ , con  $\omega_d \leq 0.1$ .
  - (d) Il margine di fase  $\varphi_m$  sia maggiore o uguale a  $50^\circ$ .
  - (e) La pulsazione critica  $\omega_c$  sia maggiore o uguale a 3.
2. Si determini la funzione di trasferimento  $R^*(z)$  del regolatore ottenuto discretizzando  $R(s)$  con il metodo di Eulero implicito e con il valore di  $T_s = 0.1$ , valutando la variazione di margine di fase dovuta alla discretizzazione.
3. Scrivere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

## Soluzione

### 1. Progetto statico

Dato che il valore di regime dell'errore richiesto non è nullo, si può scegliere  $g_L = 0$ , come tipo di  $L(s) = R(s)G(s)$ . Infatti, se si suppone che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale con la funzione di trasferimento da  $y^\circ(t)$  a  $e(t)$ , data da:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Si ha quindi:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \mu_L} = \frac{1}{1 + \mu_L}.$$

Imponendo che:

$$\frac{1}{1 + \mu_L} \leq 0.001 \quad \Rightarrow \quad \mu_L \geq 999.$$

Quindi si può, ad esempio, scegliere  $R_1(s) = \mu_L = 1000$ .

Per quanto riguarda i vincoli sui disturbi si osserva che:

- La funzione di trasferimento da  $n(t)$  a  $e(t)$  è:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} =: F(s)$$

Il modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $F(s)$  può essere approssimato come:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che  $\omega_n > \omega_c$ , si può imporre il vincolo:

$$|L(j\omega)| < \frac{1}{10}, \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{\text{dB}} < -20\text{dB}$$

- La funzione di trasferimento da  $d(t)$  a  $e(t)$  è:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} =: -S(s)$$

Il modulo della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $S(s)$  può essere approssimato come:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|}, & \omega < \omega_c \\ 1, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che  $\omega_d < \omega_c$ , si può imporre il vincolo:

$$\frac{1}{|L(j\omega)|} < \frac{1}{10} \\ |L(j\omega)| > 10, \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{\text{dB}} > 20\text{dB}$$

I vincoli sull'errore a transitorio esaurito relativo ai disturbi  $n(t)$  ed  $d(t)$  sono riportati sul diagramma di Bode del modulo come vincolo (Figura 2).

### Progetto dinamico

Scegliendo  $R_1(s) = \mu_L = 1000$  derivante dal progetto statico, si ha una funzione di trasferimento d'anello  $L_1(s) = \mu_L G(s)$ , che ha un margine di fase negativo, come si può verificare dai diagrammi di Bode asintotici della risposta in frequenza associata a  $L_1(s)$ , mostrati in Figura 2.

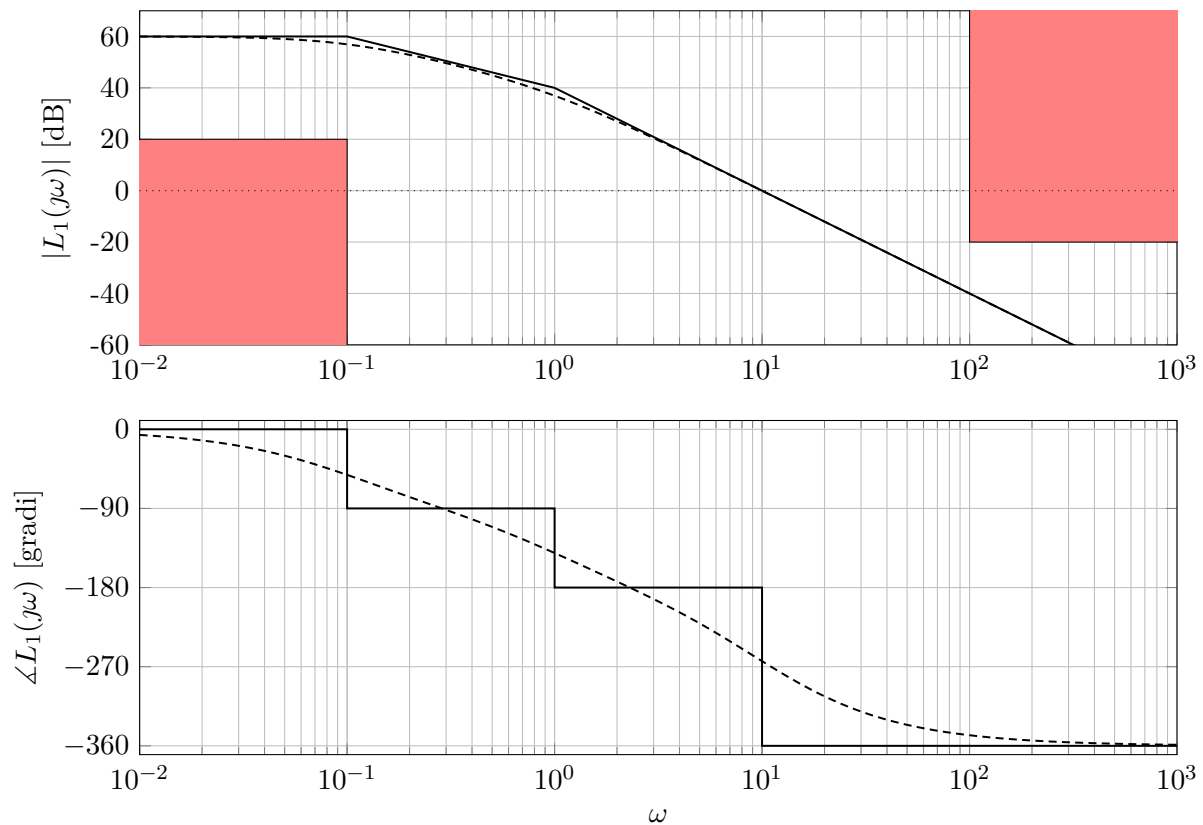


Figura 2: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L_1(s)$ .

Si può quindi cercare di sfruttare le specifiche di progetto e ottenere la  $\omega_c$  di  $L(s)$  pari a  $\omega_c = 3$ , e che cancelli i due poli in bassa frequenza. Si deve poi fare scendere  $L_1(s)$  ed  $L(s)$  con la stessa pendenza per rendere realizzabile il regolatore, per cui si può aggiungere un polo in alta frequenza.

Si ottiene, quindi:

$$L(s) = G(s)1000 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+s/0.003)(1+s/100)} = 1000 \frac{1-0.1s}{(1+0.1s)(1+s/0.003)(1+s/100)}.$$

I diagrammi di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$  sono mostrati in Figura 3.

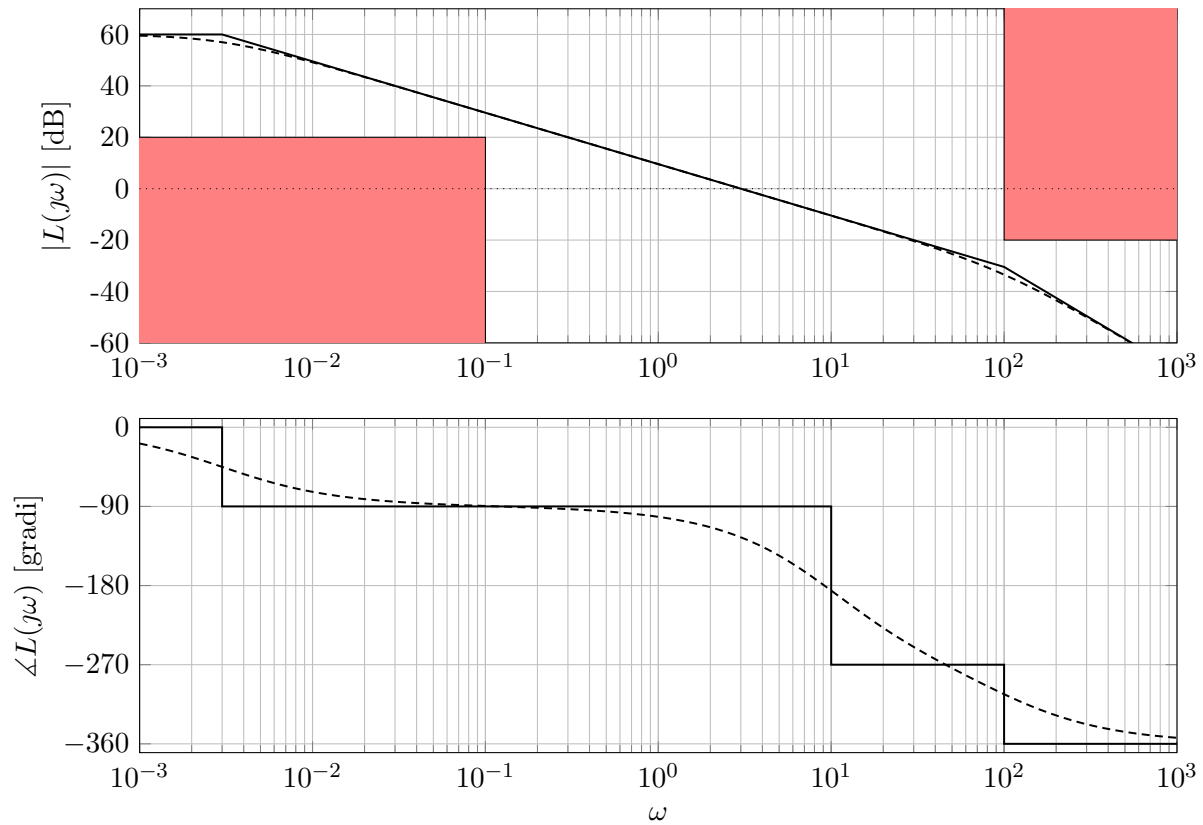


Figura 3: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $L(s)$ .

Calcolando il margine di fase di  $L(s)$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= \angle L(j\omega_c) = \arctan(-0.1\omega_c) - \arctan(0.1\omega_c) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{0.003}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_c}{100}\right) \\ &\simeq -16.6992^\circ - 16.6992^\circ - 89.9427^\circ - 1.7184^\circ = -125.0596^\circ \\ \varphi_m &= 180^\circ - |\varphi_c| = 54.9404^\circ,\end{aligned}$$

per cui il requisito sul margine di fase è rispettato.

Il regolatore così ottenuto è:

$$R(s) = 1000 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+s/0.003)(1+s/100)}$$

2. Ci sono diversi modi per discretizzare il controllore:

$$\begin{aligned}s &= \frac{z-1}{T_s}, & \text{Eulero Esplicito} \\ s &= \frac{z-1}{zT_s}, & \text{Eulero Implicito} \\ s &= \frac{2}{T_s} \cdot \frac{z-1}{z+1}, & \text{Tustin}\end{aligned}$$

Nel caso in questione viene richiesto di utilizzare il metodo di Eulero Implicito per  $T_s = 0.1$ ,

quindi:

$$\begin{aligned}
 R^*(z) &= R(s)|_{s=10 \cdot \frac{z-1}{z}} = 1000 \frac{\left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z}\right) \left(1 + 100 \cdot \frac{z-1}{z}\right)}{\left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1000}{3}\right) \left(1 + 10 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{100}\right)} \\
 &= 1000 \frac{\left(\frac{z + 10(z-1)}{z}\right) \left(\frac{z + 100(z-1)}{z}\right)}{\left(\frac{z + \frac{10000}{3}(z-1)}{z}\right) \left(\frac{z + 0.1 \cdot (z-1)}{z}\right)} \\
 &= 1000 \frac{(z + 10(z-1))(z + 100(z-1))}{\left(z + \frac{10000}{3}(z-1)\right)(z + 0.1 \cdot (z-1))} \\
 &= 30000 \frac{(11z - 10)(101z - 100)}{(10003z - 10000)(11z - 1)}
 \end{aligned}$$

La variazione del margine di fase ottenuta con  $T_s = 0.1$ , trascurando lo sfasamento introdotto dal ritardo di elaborazione e dall'inserimento del filtro antialiasing, è:

$$\Delta\varphi_m = -\frac{T_s}{2} \cdot \omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{0.1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{27}{\pi} \simeq -8.6^\circ$$

3. Per scrivere la legge di controllo si riscrive l'espressione del regolatore come:

$$\begin{aligned}
 R^*(z) &= \frac{U(z)}{E(z)} = 30000 \frac{(11z - 10)(101z - 100)}{(10003z - 10000)(11z - 1)} \\
 U(z)(10003z - 10000)(11z - 1) &= 30000E(z)(11z - 10)(101z - 100) \\
 U(z)(110033z^2 - 120003z + 10000) &= 30000E(z)(1111z^2 - 2110z + 1000)
 \end{aligned}$$

antitrasformando, si ottiene:

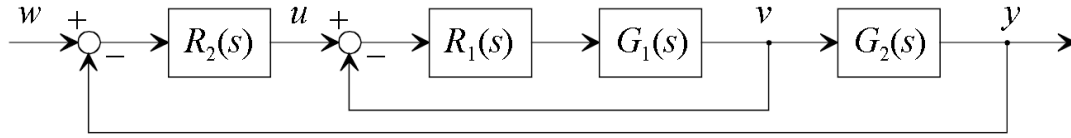
$$\begin{aligned}
 110033u(k+2) - 120003u(k+1) + 10000u(k) &= 30000(1111e(k+2) - 2110e(k+1) + 1000e(k)) \\
 u(k+2) &= \frac{120003}{110033}u(k+1) - \frac{10000}{110033}u(k) + \frac{30000}{110033}(1111e(k+2) - 2110e(k+1) + 1000e(k)) \\
 u(k) &= \frac{120003}{110033}u(k-1) - \frac{10000}{110033}u(k-2) + \frac{30000}{110033}(1111e(k) - 2110e(k-1) + 1000e(k-2)) \\
 u(k) &= 1.091u(k-1) - 0.091u(k-2) + 302.91e(k) - 575.282e(k-1) + 272.645e(k-2)
 \end{aligned}$$

## 2 Progetto di regolatori PID con sistema instabile

Si consideri il sistema di controllo in figura, dove:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}, \quad G_2(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+s)}$$

Si chiede di



1. Determinare un regolatore  $R_1(s)$  di tipo P, PD o PID (ideali) in modo che la funzione di trasferimento tra la variabile  $u$  e la variabile  $v$  sia caratterizzata da due poli coincidenti in  $s = -0.5$ .
2. Determinare un regolatore  $R_2(s)$  di tipo P che garantisca la massima pulsazione critica ottenibile con un margine di fase  $\varphi_m = 60^\circ$  per il sistema di controllo complessivo.

### Soluzione

1. Si consideri inizialmente il sistema retroazionato interno, la cui funzione d'anello e'

$$L_1(s) = R_1(s)G_1(s)$$

Si ricordi che il polinomio caratteristico del sistema (ad anello chiuso), a meno di cancellazioni, corrisponde con il denominatore delle funzioni di sensitività. Nel caso del sistema avente come funzione d'anello  $L_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$ , il polinomio caratteristico e' dunque  $p(s) = N_1(s) + D_1(s)$ . La specifica richiesta e' che

$$p(s) = N_1(s) + D_1(s) = (s + 0.5)^2 = s^2 + s + 0.25$$

Affinche'  $N_1(s) + D_1(s)$  sia un polinomio del II ordine e' necessario che  $N_1(s)$  e  $D_1(s)$  siano anche esse (al massimo) del II ordine. Affinche'  $D_1(s)$  non superi il secondo ordine, non si possono includere poli in  $R_1(s)$ , ad eccezione del caso in cui si effettua una cancellazione non critica tra uno zero del regolatore e un polo del sistema  $G_1(s)$ . Questo permette di considerare anche il regolatore PID tra le possibilita'.

Inoltre, per poter ottenere  $N_1(s) + D_1(s) = s^2 + s + 0.25$ , e' necessario che il numeratore di  $R_1(s)$  sia un polinomio di I grado, in modo da introdurre due gradi di liberta', che permettono di definire i parametri dei termini di I grado e noto del polinomio, il che esclude il regolatore P tra le possibilita'.

Se considero un regolatore PD (ideale)  $R_1(s) = K_P + K_D s$ , si ottiene che

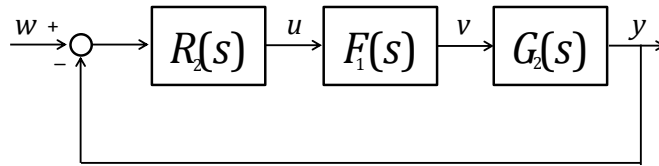
$$p(s) = N_1(s) + D_1(s) = K_P + K_D s + (s+1)(s-2) = s^2 + (K_D - 1)s + K_P - 2 = s^2 + s + 0.25$$

ponendo  $K_P = 2.25$  e  $K_D = 2$ .

2. Inserendo nello schema il regolatore  $R_1(s)$  progettato al punto precedente, l'intero sistema puo' essere riformulato come mostrato nella seguente figura.

Si calcola che

$$F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1 + L_1(s)} = \frac{9/4 + 2s}{(s + 0.5)^2} = 9 \frac{1 + 8/9s}{(1 + 2s)^2}$$



Si chiede di progettare un regolatore  $P$ , cioè  $R_2(s) = K_2$ . La funzione di trasferimento dell'anello di retroazione esterno è dunque

$$L_2(s) = R_2(s)F_1(s)G_2(s) = 9K_2 \frac{1 + 8/9s}{(1 + 2s)^2(1 + 10s)(1 + s)}$$

Si noti prima di tutto che la funzione  $L_2(s)$  presenta un polo in  $s = -1$  e uno zero in  $s = -9/8$ . Si può dunque svolgere l'approssimazione consistente nella cancellazione polo/zero simili, ottenendo:

$$L_2(s) = \frac{9K_2}{(1 + 2s)^2(1 + 10s)}$$

Ora il problema consiste nel calcolare il valore del guadagno  $K_2$  che permette di ottenere un margine di fase pari a  $\varphi_m = 60^\circ$ . Tale valore è circa pari a  $K_P = 0.363$ .



### 3 Realizzazione digitale di un regolatore PI

Un regolatore  $R(s)$  è caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$R(s) = 1 + \frac{10}{s}$$

e permette di garantire che il sistema ad anello chiuso (in condizioni ideali) abbia pulsazione critica  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$  e margine di fase  $\varphi_m^o = 45^\circ$ .

1. Considerando un generico periodo di campionamento  $T_S$ , si determini la funzione di trasferimento a tempo discreto  $R^*(z)$  del regolatore ottenuto discretizzando  $R(s)$  con il metodo di Tustin.
2. Scrivere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto, cioè il corrispondente sistema a rappresentazione esterna nel dominio del tempo.
3. Considerando che il ritardo di elaborazione è pari a  $\tau_{EL} = 1 \text{ ms}$ , si progetti il filtro anti-aliasing e si determini il passo di campionamento in modo tale che il sistema ad anello chiuso reale presenti un margine di fase superiore a  $\varphi_m^{REALE} = 25^\circ$ .

### Soluzione

1. La funzione di trasferimento a tempo discreto si ottiene applicando la sostituzione

$$s \rightarrow \frac{2}{T_S} \frac{z-1}{z+1}$$

Risulta

$$R^*(z) = \frac{(2 + 10T_S)z - 2 + 10T_S}{2z - 2}$$

2. Dette  $E^*(z)$  e  $U^*(z)$  le trasformate zeta dei segnali  $e^*(k)$  e  $u^*(k)$ , rispettivamente, si ha che

$$U^*(z) = R^*(z)E^*(z)$$

Si ottiene che  $2zU^*(z) - 2U^*(z) = (2 + 10T_S)zE^*(z) + (-2 + 10T_S)E^*(z)$ . Dividendo per  $z$  e antitrasformando ambo i membri dell'equazione si calcola che

$$u^*(k) = u^*(k-1) + (1 + 5T_S)e^*(k) + (5T_S - 1)e^*(k-1)$$

3. Si considera che:

- Il ritardo corrispondente alla cascata campionatore+mantenitore e' pari a  $\tau_S = T_S/2$ . Il corrispondente contributo al margine di fase (in gradi) e'  $-\tau_S\omega_c \frac{180}{\pi}$ .
- Il contributo al margine di fase (in gradi) dato dal ritardo di elaborazione e' pari a  $-\tau_{EL}\omega_c \frac{180}{\pi}$ .
- Il filtro (passabasso) anti-aliasing ha banda  $[0, \omega_{AA}]$ , dove  $\omega_{AA} \gg \omega_c$ . Se si pone  $\omega_{AA} = 10\omega_c$  lo sfasamento corrispondente, conferito al margine di fase, e' pari a  $-\text{atan}(\omega_c/\omega_{AA}) = -\text{atan}(0.1) = -5.7^\circ$ . Si ricordi inoltre che il teorema di Shannon impone che  $\omega_N = \omega_S/2 > \omega_{AA}$ , dove  $\omega_N$  e' la pulsazione di Nyquist e  $\omega_S = 2\pi/T_S$ . Cio' equivale a richiedere che  $T_S < \pi/\omega_{AA} \simeq 0.3 \text{ s}$ .

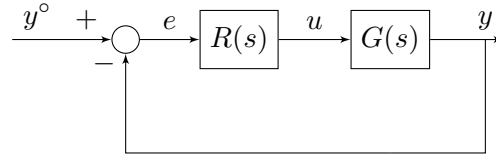
Complessivamente il margine di fase reale risulta pari a

$$\varphi_m^{REALE} = \varphi_m^o - (T_S/2 + \tau_{EL})\omega_c \frac{180}{\pi} - 5.7$$

Affinche'  $\varphi_m^{REALE} \geq 20^\circ$  si ottiene che  $T_S \leq 0.497 \text{ s}$ . Se si sceglie, ad esempio,  $T_S = 0.2 \text{ s}$  tutte le richieste sono soddisfatte.

## 4 Integratore nel processo

Si consideri il seguente schema di controllo:



dove

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$$

Si progetti  $R(s)$  in modo tale che:

$$\begin{aligned} |e_\infty| &= 0 & y^o &= \text{sca}(t) \\ \omega_c &\geq 1 \text{ rad/s} \\ \varphi_m &\geq 50^\circ \end{aligned}$$

### Soluzione

#### Progetto statico

Sia  $R(s) = R_1(s)R_2(s)$  con  $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$ .

Supponendo il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso, applichiamo il teorema del valore finale:

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} Y^o(s)$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + L(s)} Y^o(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{1 + \frac{10 \mu_R}{s^{g_R}}} \cdot \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + \mu_R} = 0, \quad \forall g_R \geq 0$$

Ma allora anche un regolatore di tipo nullo ( $g_R = 0$ ) consente di ottenere errore nullo a transitorio esaurito.

Si osservi che il tipo della funzione di trasferimento d'anello è la somma del tipo della F.d.T. del processo e del tipo della F.d.T. del regolatore:

$$g_L = g_G + g_R$$

In questo caso  $g_G = 1$ , per cui anche con  $g_R = 0$  si garantisce che  $g_L = 1$ , condizione per avere errore statico nullo. In altre parole, l'integratore necessario per annullare l'errore è già presente nel processo, per cui non occorre metterlo nel regolatore. Pertanto il **progetto statico non pone vincoli sul regolatore**. Formalmente, possiamo porre  $R_1(s) = 1$ .

#### Progetto dinamico

Poiché  $L(s) = R_2(s)G(s)$ , tracciamo il diagramma di  $|G(j\omega)|$  per controllare se le specifiche sono già soddisfatte:

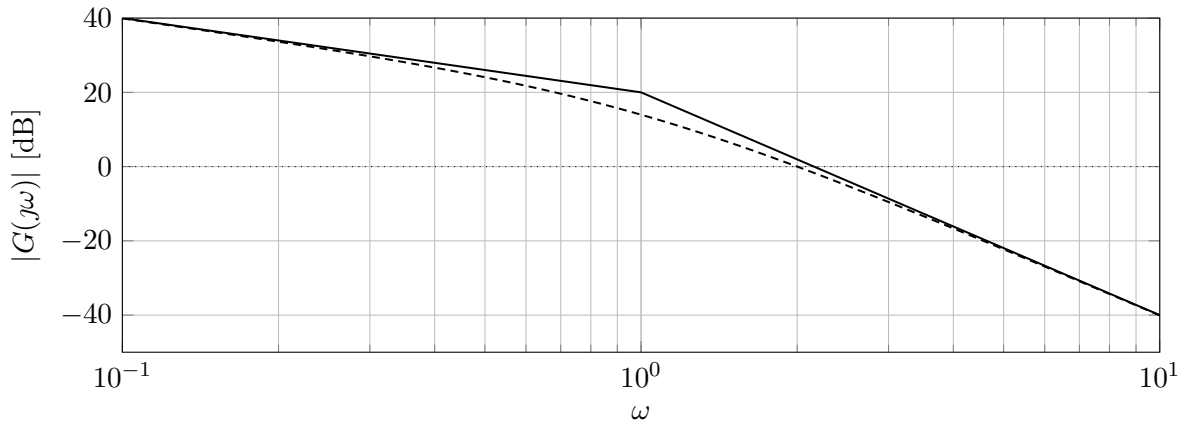


Figura 4: Diagramma di Bode del Modulo.

Si ha  $\omega_c = 10^{\frac{1}{3}} \simeq 2$  (che andrebbe bene) ma

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \arctan(2)| = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \cdot 63^\circ| = -36^\circ < 0$$

Pertanto il sistema sarebbe instabile in anello chiuso.

Il progetto del regolatore si può impostare imponendo che la  $|L(j\omega)|$  tagli l'asse a 0 dB alla pulsazione 1 rad/s, con pendenza -1, cancellando i due poli del processo alla pulsazione 1 e spostandoli alla pulsazione 3.

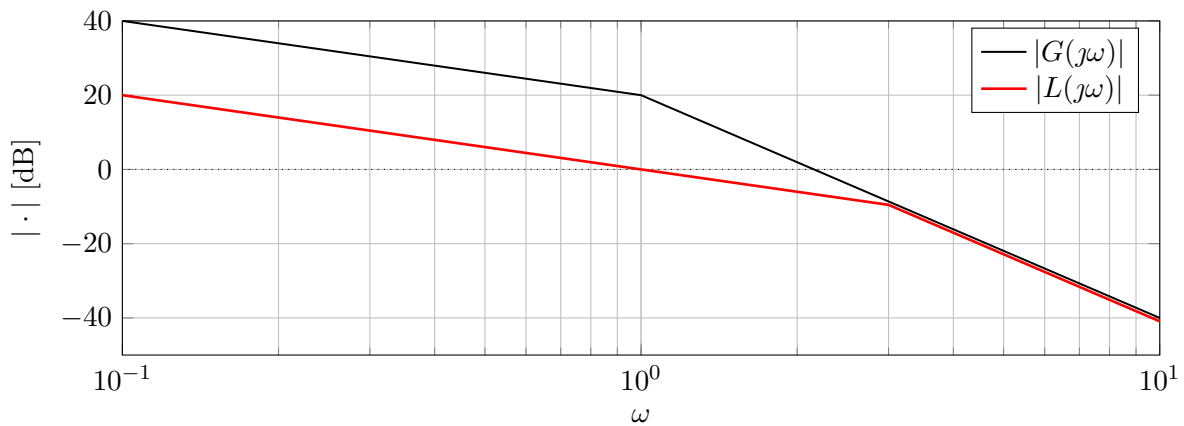


Figura 5: Diagramma di Bode del Modulo.

Per ottenere la pulsazione in cui si incrociano i due diagrammi di Bode basta scrivere le equazioni delle rette dei due diagrammi di Bode e metterle a sistema.

$$\begin{cases} y - 20 = -60 (\log(\omega) - 0) \\ y - 0 = -20 (\log(\omega) - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -60 \log(\omega) + 20 \\ y = -20 \log(\omega) \end{cases}$$

$$-20 \log(\omega) = -60 \log(\omega) + 20 \Rightarrow \log(\omega) = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 10^{\frac{1}{2}} \simeq 3$$

Poiché il progetto statico non ha portato ad alcun vincolo sul guadagno del regolatore, si può far correre in bassa frequenza il diagramma di  $|L(j\omega)|$  parallelo a quello di  $|G(j\omega)|$  (non c'è bisogno di ricongiungerli).

L'espressione di  $L(s)$  è la seguente:

$$L(s) = \frac{1}{s \left(1 + \frac{s}{3}\right)^2}$$

da cui risulta che  $\omega_c = 1$  e  $\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \arctan(1/3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 2 \cdot 18^\circ| = 54^\circ$ .

Tutte le specifiche sono soddisfatte. L'espressione della F.d.T. del regolatore è quindi la seguente:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 0.1 \cdot \frac{(1+s)^2}{\left(1 + \frac{s}{3}\right)^2}$$