Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 06/07/2018 – Compito A

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

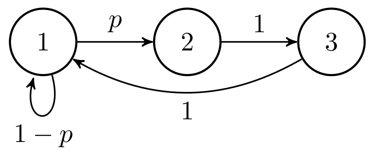
1. Due squadre di calcio si affrontano in una partita, e segnano dei goals secondo due processi di Poisson indipendenti di intensità $\lambda_1 = 2/90$ e $\lambda_2 = 1/90$ goal/minuto, rispettivamente. Calcolare
   (a) il numero medio di goal totali segnati nel primo tempo
   (b) sapendo che la squadra 1 ha segnato 2 goals, la probabilità che vinca la squadra 1
   (c) supponendo che ogni goal segnato provenga da un calcio di rigore con probabilità 0.2 in maniera indipendente dagli altri goals, la probabilità che venga segnato più di un calcio di rigore in una partita.

2. Sia X un processo Gaussiano tempo-continuo con media nulla $\mathsf{E}[X(t)] = 0$ per ogni t e funzione di autocorrelazione $R_{XX}(t_1, t_2) = \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2)]$. Si considerino i tempi di campionamento $t_i = i$, per $i = 1, 2, \cdots$, e il processo tempo-discreto Y costituito dalle v.a.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & X(t_i) \geq 0, \\ 0 & X(t_i) < 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots .$$

   Dire quali sono le condizioni che R_{XX} deve soddisfare affinché il processo Y sia un processo di Bernoulli. Sotto tali condizioni, qual è la probabilità di successo ($\{Y_i = 1\}$) della singola prova di Bernoulli?
   Suggerimento: usare la definizione di processo di Bernoulli e verificare le condizioni.

3. Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. La probabilità di transizione p può essere un qualunque numero in $[0, 1]$.
   (a) Classificare gli stati (transienti o ricorrenti) in funzione di p.
   (b) Per quali valori di p la catena è periodica?
   (c) Qual è la probabilità asintotica di essere nello stato 1?



4. Una lampadina ha una vita $X \sim \text{Exp}(\theta)$, dove θ è un parametro ignoto di cui si conosce solo la distribuzione a priori $\Theta \sim \mathcal{U}[1, 2]$. Determinare lo stimatore MAP $\widehat{\Theta}_{\text{MAP}}$ basato su una osservazione X.

5. Si vogliono generare campioni indipendenti X distribuiti secondo la legge $f_X(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$ per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e $f_X(x) = 0$ altrove, tramite il metodo della trasformazione inversa. Descrivere l'algoritmo partendo da una sorgente di numeri uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ e indipendenti.

6. Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera gli istanti di tempo degli arrivi di un processo di Poisson a tasso λ.
   Suggerimento: conviene generare i tempi di interarrivo del processo di Poisson.

Soluzioni

Problema 1

Siano $X_1(t)$ e $X_2(t)$ i goal segnati dalle due squadre nei primi t minuti di gioco. Siccome i goal sono modellizzati come arrivi di Poisson indipendenti per le due squadre, si ha $X_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)$ e $X_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t)$.

1. I goal segnati dalle due squadre nel primo tempo (nei primi 45 minuti di gioco) sono $X_1(45) \sim \text{Poisson}(1)$ e $X_2(45) \sim \text{Poisson}(0.5)$, quindi il numero medio di goal del primo tempo è
$$\mathsf{E}[X_1(45) + X_2(45)] = \mathsf{E}[X_1(45)] + \mathsf{E}[X_2(45)] = 1 + 0.5 = 1.5$$

2. La probabilità cercata è
$$\begin{aligned}\Pr\left(X_1(90) > X_2(90) \,\middle|\, X_1(90) = 2\right) &= \Pr\left(2 > X_2(90) \,\middle|\, X_1(90) = 2\right)\\ &= \Pr(X_2(90) < 2)\\ &= \Pr(X_2(90) = 0) + \Pr(X_2(90) = 1)\\ &= \left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!}\right) e^{-1} = 2e^{-1}.\end{aligned}$$

3. I calci di rigore trasformati in goals si possono pensare come ottenuti dallo splitting del processo di Poisson originale dei goals totali (con rate $\lambda_1 + \lambda_2 = 3/90$), con probabilità di splitting 0.2. Dunque il numero di goal segnati su calcio di rigore nei 90 minuti è una v.a. di Poisson di parametro $3/90 \cdot 90 \cdot 0.2 = 0.6$. La probabilità che venga segnato più di un goal su calcio di rigore è
$$1 - \frac{0.6^0}{0!}e^{-0.6} - \frac{0.6^1}{1!}e^{-0.6} = 1 - 1.6e^{-0.6} \approx 0.1219$$

Problema 2

Per avere un processo Y di Bernoulli tempo-discreto tutte le prove Y_i devono essere v.a. di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite.

- Ogni Y_i assume valori binari, quindi abbiamo v.a. di Bernoulli
- Per avere indipendenza delle Y_i, siccome il loro valore viene determinato da $X(i)$, è necessario che tutte le $X(i)$ siano indipendenti. Dato che X è un processo Gaussiano, l'indipendenza tra tutte le $X(i)$ per $i = 1, 2, \cdots$ si ottiene semplicemente imponendo l'incorrelazione
$$R_{XX}(i, j) = 0, \quad i \neq j, \qquad i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots.$$
- Le Y_i sono identicamente distribuite se la prob. di successo non dipende dall'indice temporale i:
$$\Pr(Y_i = 1) = \Pr(X(i) > 0) = 0.5$$
dove l'ultimo passaggio è conseguenza del fatto che tutte le Gaussiane $X(i)$ sono a media nulla.

Ne consegue che l'unica condizione da imporre sulla funzione di autocorrelazione è quella riportata nel secondo punto dell'elenco.

Problema 3

1. Per $p = 0$ gli stati transienti sono 2 e 3, mentre 1 è ricorrente. Per $p > 0$ tutti gli stati sono ricorrenti.
2. La catena è periodica solo per $p = 1$.
3. Se $p = 0$ allora la probabilità asintotica di trovarsi in 1 è $\pi_1 = 1$.
Per $0 < p < 1$ la catena è ricorrente aperiodica, quindi si può impostare il sistema
$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_3 + \pi_1(1-p) \\ \pi_2 = \pi_1 p \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$
la cui soluzione è $\pi_1 = \frac{1}{1+2p}$, $\pi_2 = \pi_3 = \frac{p}{1+2p}$.
Per $p = 1$ la catena è ricorrente periodica. Siccome al tempo 0 la catena si trova nello stato 1, allora si ha
$$\begin{cases} \pi_1(n) = 1 & n = 0, 3, 6, \cdots \\ \pi_1(n) = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
dunque il limite per $n \to \infty$ non esiste.

Problema 4

Dai dati del problema si sa che $f_{X|\Theta}(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$ per $x > 0$, e $f_\Theta(\theta) = 1$ per $\theta \in [1, 2]$. Lo stimatore MAP si trova applicando la definizione:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}_{\mathrm{MAP}}(x) &= \arg\max_{\theta\in[1,2]} f_{\Theta|X}(\theta|x) \\
&= \arg\max_{\theta\in[1,2]} f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) \\
&= \arg\max_{\theta\in[1,2]} \theta e^{-\theta x}.
\end{aligned}$$

Il massimo si trova imponendo la derivata uguale a 0:

$$\frac{d}{d\theta}\theta e^{-\theta x} = e^{-\theta x} - \theta x e^{-\theta x} = e^{-\theta x}(1 - \theta x) \stackrel{!}{=} 0$$

la cui soluzione dà $\theta = x^{-1}$. Non sempre la soluzione trovata cade nel supporto $[1, 2]$ di θ, in tal caso il valore di θ che massimizza la probabilità a posteriori si trova ai bordi del supporto. Quindi lo stimatore MAP sarà dato da

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{MAP}}(x) = \begin{cases} 2 & x \le 0.5 \\ x^{-1} & 0.5 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Problema 5

La funzione cumulata di probabilità è

$$F_X(x) = \int_{-\pi/2}^{x} f_X(t)dt = \begin{cases} 0 & x \le -\pi/2 \\ \frac{\sin(x)+1}{2} & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 1 & x \ge \pi/2 \end{cases}$$

e la sua inversa è

$$F_X^{-1}(u) = \arcsin(2u - 1) \qquad 0 \le u \le 1.$$

L'algoritmo dunque consiste nel generare un campione $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e poi applicare la trasformazione $X = \arcsin(2U - 1)$.

Problema 6

Partendo dal tempo $t = 0$ generiamo i tempi di interarrivo $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ del processo di Poisson: dal metodo della trasformazione inversa si ha $T_i = -\frac{1}{\lambda}\log(U_i)$. Gli istanti di arrivo X_j del processo di Poisson saranno dunque

$$\begin{aligned}
X_j &= \sum_{i=1}^{j} T_i \\
&= -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{j}\log(U_i), \qquad j \ge 1.
\end{aligned}$$