

Esercitazione 03: Sistemi interconnessi e stabilità dei sistemi lineari e degli equilibri dei sistemi non lineari

11 marzo 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

1 Sistemi interconnessi

Si considerino i sistemi lineari \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , descritti dalle seguenti equazioni:

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u_1(t) \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) \\ y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Discutere le proprietà di stabilità dei sistemi \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , singolarmente.
2. Discutere le proprietà di stabilità della serie di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , cioè del sistema avente come ingresso $u(t) = u_1(t)$, dove $u_2(t) = y_1(t)$, e avente come uscita $y(t) = y_2(t)$.
3. Discutere le proprietà di stabilità del sistema costituito da \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 in parallelo, avente come ingresso $u(t) = u_2(t) = u_1(t)$ e avente come uscita $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.
4. I due sistemi vengono interconnessi come mostrato in Figura 1 per ottenere un sistema \mathcal{S} con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$. Scrivere le equazioni del sistema \mathcal{S} in variabili di stato.

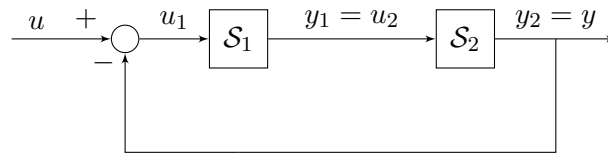


Figura 1: Sistema \mathcal{S} con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$.

5. Discutere le proprietà di stabilità del sistema \mathcal{S} .
6. Dire se le proprietà di stabilità del sistema interconnesso cambiano se i sistemi vengono interconnessi come in Figura 2 e 3.

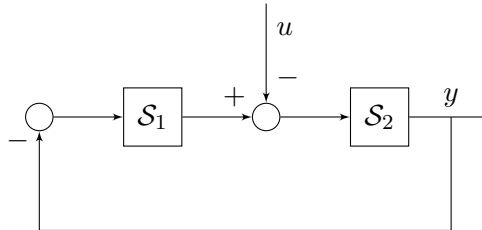


Figura 2: Sistema \mathcal{S} , prima variante.

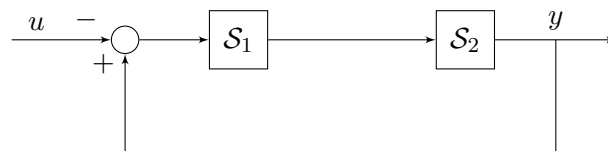


Figura 3: Sistema \mathcal{S} , seconda variante.

Soluzione

1. Il sistema \mathcal{S}_1 ha un solo autovalore $\lambda_1 = 0$. Dato che l'autovalore ha parte reale nulla, il sistema è semplicemente stabile. Il sistema \mathcal{S}_2 ha anch'esso un unico autovalore $\lambda_2 = 1$. Dato che λ_2 ha parte reale strettamente positiva, \mathcal{S}_2 è instabile.

2. Il sistema risultante dalla serie di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 è lineare e descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, cioè l'unione dei due autovalori di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . La serie dei due sistemi è dunque instabile.

3. Il sistema costituito da \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 in parallelo è lineare e descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \end{cases}.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, cioè l'unione dei due autovalori di \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 . Il parallelo dei due sistemi è dunque instabile.

4. L'uscita di \mathcal{S}_1 diventa l'ingresso di \mathcal{S}_2 , per questo vale la relazione $y_1(t) = u_2(t)$. L'uscita $y(t)$ del sistema \mathcal{S} è uguale all'uscita $y_2(t)$ del sistema \mathcal{S}_2 . Inoltre, l'ingresso $u_1(t)$ di \mathcal{S}_1 è dato dall'ingresso $u(t)$ a cui viene sottratta l'uscita $y(t)$ del sistema \mathcal{S} .

Il sistema \mathcal{S} è, quindi, lineare e descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}.$$

5. La matrice dinamica A del sistema \mathcal{S} è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Per valutare la stabilità di \mathcal{S} si può calcolare il polinomio caratteristico di A :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$$

Essendo il polinomio caratteristico di grado 2 e avendo tutti i coefficienti concordi in segno e non nulli, allora gli autovalori sono entrambi con parte reale strettamente negativa, e il sistema \mathcal{S} è asintoticamente stabile.

6. La proprietà di stabilità di un sistema lineare non dipende dall'ingresso. Quello che conta è il modo in cui \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono connessi. Ponendo $u(t) = 0$, $t \geq 0$, il sistema in Figura 2, è identico a quello in Figura 1. Dunque le proprietà di stabilità non cambiano.

Se si pone $u(t) = 0$, $t \geq 0$, il sistema in Figura 3 non è identico a quello in Figura 1. Analizzando le proprietà di stabilità del sistema in Figura 3, esso è lineare e descritto da:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) = y(t) - u(t) = 2x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + u_2(t) = x_2(t) + y_1(t) = x_2(t) + x_1(t) - u(t) + 2x_2(t) \\ y(t) = y_2(t) = 2x_2(t) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_2(t) - u(t) \\ y(t) = 2x_2(t) \end{cases}.$$

Per valutare la stabilità, si può calcolare il polinomio caratteristico di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$p_A(\lambda) = \det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 3\lambda - 2$$

e osservare che i suoi coefficienti non sono concordi in segno, quindi gli autovalori di A non sono entrambi con parte reale strettamente negativa. Il sistema non è quindi asintoticamente stabile. Calcolando gli autovalori

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \simeq 3.5616, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \simeq -0.5616$$

si può concludere che il sistema è instabile dato che $\Re(\lambda_1) = \lambda_1 > 0$.

2 Sistema non lineare

Si consideri il sistema non lineare con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Determinare il valore \bar{u} dell'ingresso $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$, a cui è associato l'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Calcolare il movimento dello stato associato a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad u(t) = 0, t \geq 0.$$

3. Valutare le proprietà di stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, associato all'ingresso $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$.

Soluzione

1. Per determinare il valore di $u(t) = \bar{u}$, $t \geq 0$, tale che lo stato di equilibrio corrispondente sia $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, si può applicare la condizione di equilibrio

$$\begin{cases} -\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 + \bar{x}_2 \bar{u} = 0 \\ 3\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = -2\bar{x}_2^2 \\ \bar{u} = -3\bar{x}_2 \end{cases}$$

La prima equazione valutata in $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ è soddisfatta, quindi l'equilibrio richiesto è un possibile equilibrio del sistema. Dalla seconda equazioni si ottiene che $\bar{u} = 0$ è l'ingresso a cui lo stato di equilibrio richiesto è associato.

2. Si può notare che l'evoluzione di $x_2(t)$ è indipendente dall'evoluzione di $x_1(t)$. Si può quindi calcolare il movimento di $x_2(t)$ associato alla condizione iniziale e all'ingresso dati. Risolvendo quindi l'equazione differenziale lineare

$$\dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t)$$

quando $x_2(0) = \varepsilon$ e $u(t) = 0$, $t \geq 0$. Applicando la formula di Lagrange, si ricava

$$x_2(t) = e^{3t}\varepsilon, \quad t \geq 0.$$

A questo punto si può calcolare il movimento di $x_1(t)$ risolvendo

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)^2 + x_2(t)u(t)$$

quando $x_1(0) = 0$ e $x_2(t) = e^{3t}\varepsilon$, $u(t) = 0$ $t \geq 0$. L'equazione differenziale, diventa

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \left(e^{3t}\varepsilon\right)^2 + e^{3t}\varepsilon \cdot 0 = -x_1(t) + e^{6t}\varepsilon^2$$

che è lineare e si può quindi risolvere applicando ancora la formula di Lagrange

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{6\tau}\varepsilon^2 d\tau \\ &= \frac{1}{7}\varepsilon^2 \left(e^{6t} - e^{-t}\right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Il movimento dello stato risulta essere quindi

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{7}\varepsilon^2 (e^{6t} - e^{-t}) \\ x_2(t) = e^{3t}\varepsilon \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

3. Ci sono due possibili modi per verificare se lo stato di equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ del sistema associato all'ingresso $u(t) = 0$, $t \geq 0$, è asintoticamente stabile:

- (a) Nel punto precedente, si è calcolato il movimento associato alla condizione iniziale

$$x(0) = \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

e all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$, $t \geq 0$. Si noti che $x(0)$ è una condizione iniziale perturbata rispetto allo stato di equilibrio

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}}_{\Delta x_0}$$

Se si analizza il movimento perturbato in (1) per $t \rightarrow \infty$, entrambe le variabili di stato divergono, allontanandosi dall'equilibrio, per ogni perturbazione di entità ε ($\varepsilon \simeq 0$), anche arbitrariamente piccola. Di conseguenza lo stato di equilibrio è instabile.

- (b) Alternativamente, si sarebbe potuto linearizzare il sistema intorno all'equilibrio. Il sistema linearizzato sarà della forma

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}(t) = A(\bar{x}, \bar{u}) \Delta x(t) + B(\bar{x}, \bar{u}) \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = C(\bar{x}, \bar{u}) \Delta x(t) \end{cases}$$

con

$$A(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}, B(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}, C(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix}$$

In particolare, basta calcolare la matrice $A(\bar{x}, \bar{u})$ e ricavare i suoi autovalori. La matrice $A(\bar{x}, \bar{u})$ è diagonale e pari a

$$A(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

I suoi autovalori sono quindi

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

Si noti che $\Re(\lambda_2) > 0$, che è condizione sufficiente per concludere che l'equilibrio è instabile.

3 Sistema con saturazione sull'ingresso

Si consideri lo schema a blocchi in Figura 4.

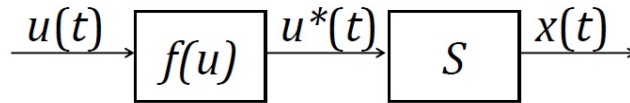


Figura 4: Sistema da analizzare

dove S è il sistema lineare a tempo continuo scalare descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u^*(t),$$

e $f(u)$ è una saturazione della variabile di ingresso, cioè

$$u^* = f(u) = \begin{cases} u_M & \text{se } u \geq u_M \\ u & \text{se } -u_M < u < u_M \\ -u_M & \text{se } u \leq -u_M \end{cases}$$

descritta dal grafico in Figura 5

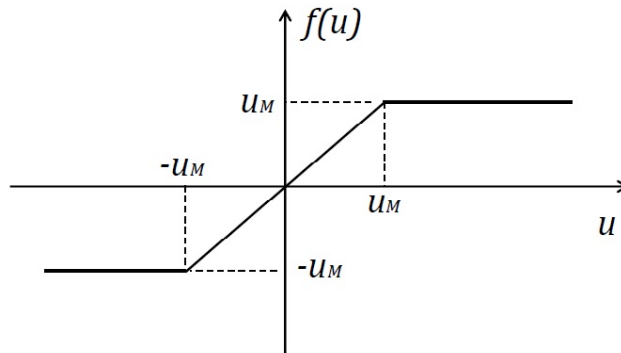


Figura 5: Saturazione

1. Si determini la condizione di equilibrio corrispondente all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 0$. Si determini la proprietà di stabilità del suddetto movimento di equilibrio.
2. Il precedente sistema viene posto in retroazione come nella Figura 6, dove k è un parametro reale.

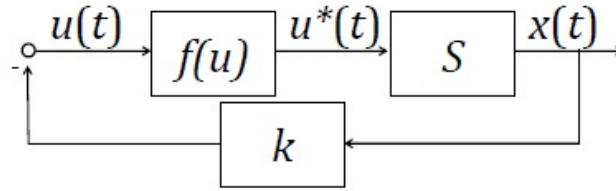


Figura 6: Sistema ad anello chiuso

- Scrivere l'equazione dinamica del sistema complessivo.
- Per quali valori del parametro k l'equilibrio $x(t) = \bar{x} = 0$ risulta asintoticamente stabile?
- In corrispondenza dei valori di k trovati al punto precedente, la proprietà di stabilità asintotica dell'equilibrio $x(t) = \bar{x} = 0$ risulta locale o globale? Si giustifichi adeguatamente la risposta.

Soluzione

- Ponendo $u(t) = \bar{u} = 0$, il sistema risultante è $\dot{x}(t) = 2x(t)$, che presenta un equilibrio (instabile) nel punto $\bar{x} = 0$.
- Si considera il sistema retroazionato in figura.
 - Il sistema non lineare corrispondente è $\dot{x}(t) = 2x(t) + f(-kx(t))$.
 - Si definisca $\delta x = x - \bar{x}$. Si noti preliminarmente che, linearizzando la funzione $f(-kx)$ nell'intorno del punto $\bar{x} = 0$ si ottiene $f(-kx) \simeq f(-k\bar{x}) + (-k)(x - \bar{x}) = -k\delta x$. Si ricava quindi che il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $\bar{x} = 0$ è

$$\delta \dot{x}(t) = (2 - k)\delta x(t)$$

Ne risulta che, se $k > 2$, l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è asintoticamente stabile.

- Si ricorda che il sistema retroazionato ottenuto è $\dot{x}(t) = g(x(t)) = 2x(t) + f(-kx(t))$. Per analizzare più in dettaglio le proprietà di stabilità dei movimenti di equilibrio di questo sistema nel caso in cui $k > 2$ si disegna il grafico della funzione $g(x)$, vd Figura 7.

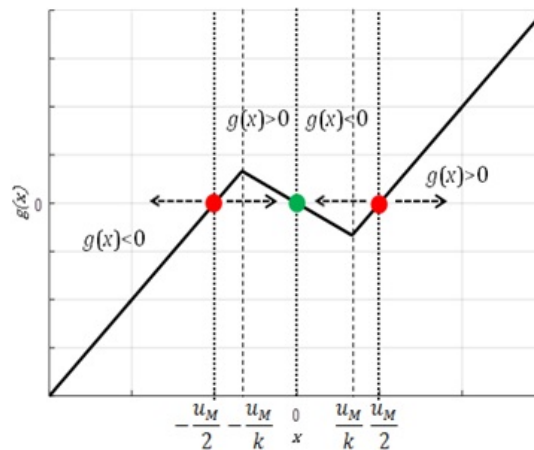


Figura 7: Studio delle proprietà degli equilibri con il metodo grafico.

Questo grafico evidenzia la presenza di due ulteriori punti di equilibrio (instabile): $\bar{x}_2 = u_M/2$ e $\bar{x}_3 = -u_M/2$. Per questo motivo, il punto di equilibrio evidenziato precedentemente ($\bar{x} = 0$) è asintoticamente stabile *localmente*.

4 Modello di crescita logistica di Verhulst

Si consideri il sistema non lineare senza ingresso descritto dalla equazione

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right), \quad r, k \in \mathbb{R}^+$$

che descrive l'evoluzione di una popolazione (modello logistico o equazione logistica). In particolare, si possono distinguere due contributi all'evoluzione della popolazione, e cioè

$$\dot{x}(t) = \overbrace{rx(t)}^{\blacktriangle} - \overbrace{\frac{r}{k}x^2(t)}^{\blacktriangledown}$$

in cui il termine \blacktriangle tiene conto della crescita della popolazione (r , tasso di crescita), proporzionalmente agli individui già presenti, mentre il termine \blacktriangledown tiene conto dell'effetto di "sovraffollamento", legato al numero di possibili incontri tra individui proporzionali a $x^2(t)$ (k , capacità).

Calcolare quali sono gli stati di equilibrio del sistema al variare dei parametri r e k e discuterne la stabilità.

Soluzione

Si possono calcolare analiticamente i punti di equilibrio del sistema

$$r\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{k} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_a = 0, \quad \bar{x}_b = k$$

Per discutere la stabilità degli stati di equilibrio si può utilizzare il metodo basato sulla linearizzazione, oppure il metodo grafico dato che il sistema è del primo ordine.

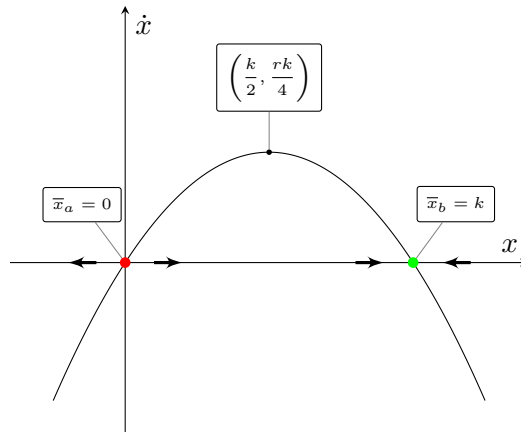


Figura 8: Analisi tramite metodo grafico.

Analizzando il segno di $\dot{x}(t)$, come mostrato in Figura 8, si può concludere che l'equilibrio \bar{x}_a è instabile, mentre l'equilibrio \bar{x}_b è asintoticamente stabile.

Allo stesso risultato si poteva arrivare linearizzando il sistema nell'intorno dei due equilibri. La matrice dinamica $A(\bar{x})$ è uno scalare, e coincide con il suo unico autovalore. Tale scalare è il coefficiente angolare della retta tangente in \bar{x}_a e in \bar{x}_b , ed è positivo in \bar{x}_a e negativo in \bar{x}_b .

Al variare dei parametri il punto di massimo della curva cambia, così come l'equilibrio \bar{x}_b , ma, dato che sia r che k sono parametri sempre positivi, le proprietà di stabilità del sistema non sono alterate.

5 Pendolo inverso

Si consideri il sistema pendolo rappresentato in Figura 9.

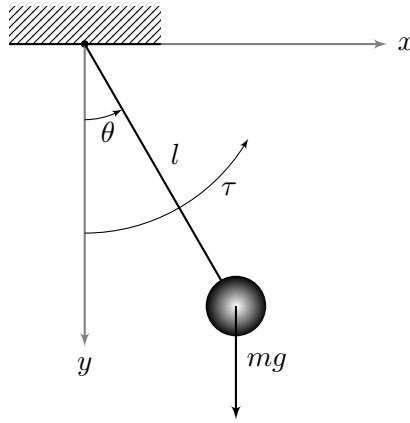


Figura 9: Sistema pendolo.

Si ipotizzi che la massa dell'asta a cui è sospesa la massa m sia trascurabile, così che il momento d'inerzia del pendolo sia $J = ml^2$. Si supponga inoltre che è anche presente un termine di dissipazione lineare con la velocità angolare (momento di attrito $\tau_a(t) = k\dot{\theta}(t)$, $k > 0$).

Si risponda in modo chiaro e preciso ai seguenti quesiti:

1. Scrivere il modello del sistema in variabili di stato, considerando come uscita l'angolo di inclinazione del pendolo rispetto alla verticale, e come ingresso il momento torcente $\tau(t)$ in figura.
2. Calcolare gli stati di equilibrio del sistema associati a ingresso nullo.
3. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto precedente. Verificare che il pendolo presenta un equilibrio instabile.
4. Il pendolo viene retroazionato come mostrato in Figura 10. Trovare, se possibile, un valore costante per l'ingresso $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$, e un valore per il parametro $p \in \mathbb{R}$ tali che il sistema retroazionato ammetta come stato di equilibrio lo stato di equilibrio instabile del pendolo trovato al punto precedente e che tale equilibrio sia asintoticamente stabile.

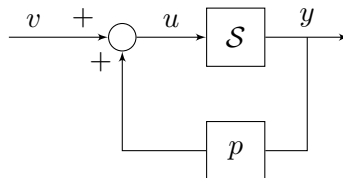


Figura 10: Sistema di controllo in retroazione del pendolo.

Soluzione

1. Le equazioni che descrivono la dinamica del pendolo sono

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - \tau_a(t) - mgl \sin(\theta(t)), \quad \Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - k\dot{\theta}(t) - mgl \sin(\theta(t)).$$

Indicando con

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x_2(t) = \dot{\theta}(t), \quad u(t) = \tau(t), \quad y(t) = \theta(t)$$

si può descrivere il sistema nelle variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ come:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{k}{ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{ml^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

2. Dalla fisica del problema, e limitando il dominio di $x_1(t) \in [0, 2\pi)$, si sa che gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso nullo ($u = \bar{u} = 0$) sono i seguenti

$$P_1 : \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} \bar{x}_1 = \pi \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Essi si possono calcolare imponendo le condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Si noti che si hanno infiniti equilibri, ma da un punto di vista fisico sono solo due, cioè scegliendo $k \in \{0, 1\}$:

$$E_1 : \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = 0 \end{cases} \quad E_2 : \begin{cases} \bar{x}_1 = \pi \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \pi \end{cases}$$

che sono esattamente gli stati di equilibrio che ci si aspetta di trovare sulla base di considerazioni fisiche sul sistema.

3. Per studiare la stabilità degli stati di equilibrio, si linearizza il sistema nel loro intorno

$$\begin{cases} \dot{\Delta x}_1(t) = \Delta x_2(t) \\ \dot{\Delta x}_2(t) = -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) \Delta x_1(t) - \frac{k}{ml^2} \Delta x_2(t) + \frac{1}{ml^2} \Delta u(t) \\ \Delta y(t) = \Delta x_1(t) \end{cases}$$

in cui la matrice dinamica è

$$A(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A(\bar{x}, \bar{u})$ è:

$$p_{A(\bar{x}, \bar{u})}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\bar{x}, \bar{u})) = \lambda^2 + \frac{k}{ml^2} \lambda + \frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1).$$

Dato che il polinomio caratteristico è di secondo grado, gli autovalori di $A(\bar{x}, \bar{u})$ sono a parte reale strettamente negativa se e solo se i coefficienti del polinomio caratteristico sono concordi in segno. Se si considera $\bar{x}_1 = 0$, $\cos(0) = 1$, quindi i coefficienti sono tutti concordi. Di conseguenza, si può concludere che E_1 è asintoticamente stabile. Se $\bar{x}_1 = \pi$ il polinomio caratteristico ha almeno una radice con parte reale positiva, per cui l'equilibrio E_2 è instabile (non può accadere che abbia parte reale nulla perché $g/l > 0$ e $k/(ml^2) > 0$).

4. Le equazioni del sistema retroazionato mostrato in Figura 10 sono:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{p}{ml^2} x_1(t) - \frac{k}{ml^2} x_2(t) + \frac{1}{ml^2} v(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio del sistema retroazionato associati all'ingresso costante $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$, sono:

$$\begin{cases} mgl \sin(\bar{x}_1) - p\bar{x}_1 = \bar{v} \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Quello che si vuole trovare è l'ingresso $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$ tale per cui il sistema retroazionato ammette come equilibrio

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

\bar{v} deve soddisfare:

$$\begin{cases} mgl \sin(\pi) - p\pi = \bar{v} \\ 0 = 0 \\ \bar{y} = \pi \end{cases} \Rightarrow \bar{v} = -p\pi.$$

Il valore \bar{v} non garantisce nulla sulle proprietà di stabilità del suddetto equilibrio.

Per imporre che lo stato di equilibrio associato a $v(t) = \bar{v}$, $t \geq 0$ sia asintoticamente stabile, si ricava la matrice dinamica del sistema linearizzato nel suo intorno:

$$A(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(\bar{x}, \bar{v})} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(\bar{x}, \bar{v})} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(\bar{x}, \bar{v})} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(\bar{x}, \bar{v})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{p}{ml^2} - \frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{p}{ml^2} + \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

dove

$$f_1(x_1, x_2, v) = x_2$$

$$f_2(x_1, x_2, v) = -\frac{g}{l} \sin(\bar{x}_1) + \frac{p}{ml^2} \bar{x}_1 - \frac{k}{ml^2} \bar{x}_2 + \frac{1}{ml^2} \bar{v}.$$

Per valutare la stabilità, si può calcolare il polinomio caratteristico di

$$A(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{p}{ml^2} + \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$p_A(\lambda) = \det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{p}{ml^2} + \frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\frac{p}{ml^2} - \frac{g}{l} & \lambda + \frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + \frac{k}{ml^2} \lambda + \left(-\frac{p}{ml^2} - \frac{g}{l} \right)$$

Dato che il polinomio caratteristico è di secondo grado, per garantire autovalori con parte reale strettamente negativa i coefficienti del polinomio caratteristico devono essere concordi in segno.

$$-\frac{p}{ml^2} - \frac{g}{l} > 0 \Rightarrow \frac{p}{ml^2} < -\frac{g}{l} \Rightarrow p < -mlg$$

In alternativa, per individuare le condizioni per l'asintotica stabilità dell'equilibrio, si possono utilizzare le condizioni necessarie e sufficienti (per i sistemi del secondo ordine) affinché gli autovalori della matrice $A(\bar{x}, \bar{u})$ abbiano entrambi parte reale strettamente negativa:

$$\begin{cases} \text{tr}(A(\bar{x}, \bar{u})) < 0 \\ \det(A(\bar{x}, \bar{u})) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{k}{ml^2} < 0 \\ -\frac{p}{ml^2} - \frac{g}{l} > 0 \end{cases} \Rightarrow p < -mlg.$$

Prendendo, per esempio $m = 1$, $l = 1$ e $k = 0.5$, scegliendo $p = -10$ e $\bar{v} = -p\pi = 10\pi$, allora (2) è stato equilibrio asintoticamente stabile del sistema retroazionato. La Figura 11 mostra il comportamento del sistema retroazionato associato alla condizione iniziale $x(0) = [\pi/3 \ 0]^T$ e all'ingresso $v(t) = 10\pi$, $t \geq 0$. Il sistema progettato è un pendolo controllato.

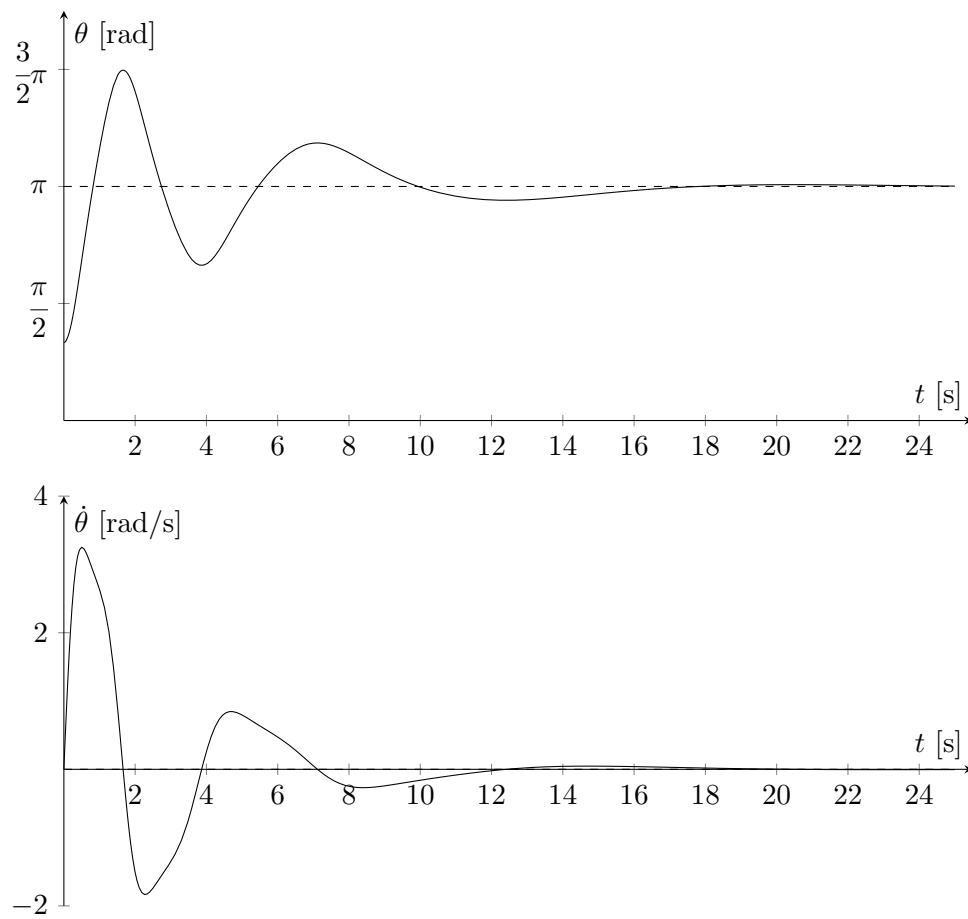


Figura 11: Simulazione del pendolo inverso controllato.