Lezione 3

Calcolo della matrice inversa

Alcune proprietà del determinante

- **Normalizzazione**: det I=1
- **Simmetria**: $\det(A)=\det(A^T)$
- **Formula di Binet**: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

Conseguenze delle proprietà

- Dalla formula di Binet segue che se A è invertibile allora $detA \neq 0$ e

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Questa condizione è necessaria e sufficiente: A è invertibile **se e solo se**

$$det\ A \neq 0$$

Calcolo dell'inversa

- Data una matrice A quadrata sia C la matrice tale che $c_{ij}=A_{ij}$. L'aggiunto classico di A è la matrice $agg(A)={}^{t}C$.
- Si ha che

A agg(A)=agg(A)A=(det A) I

quindi, se $det(A)\neq 0$, allora

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}agg(A)$$

Esercizio

- Sia $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $ad-bc\neq 0$.
- Calcolare l'inversa di A.
- Soluzione: $A_{11}=d\,,\ A_{12}=-c\,,\ A_{21}=-b\,,\ A_{22}=a$. La matrice dei complementi algebrici è

$$C=\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

L'aggiunto classico è

$$agg(A)={}^{t}C=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'inversa è

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}agg(A)=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esercizio

- Verificare se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Soluzione

- $det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}=0+0+1-1-1-0=-1$, quindi la

matrice è invertibile.

- I complementi algebrici sono: $A_{11}=(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $A_{13}=(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A_{21}=(-1)^{2+1}det\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$,

$A_{22}=(-1)^{2+2}det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $A_{23}=(-1)^{2+3}det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A_{31}=(-1)^{3+1}det\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$,

$A_{32}=(-1)^{3+2}det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A_{33}=(-1)^{3+3}det\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$,

Continuazione soluzione

- La matrice dei complementi algebrici è

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- L'aggiunto classico è

$$agg(A)={}^{t}C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Fine soluzione

- La matrice inversa è

$$A^{-1}=\frac{1}{det\left(A\right)}agg\left(A\right)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Matrici a blocchi

- Una matrice a blocchi è una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

dove $A_{1,} A_2$ sono matrici quadrate.

- Nel caso di matrici a blocchi il determinante è il prodotto dei determinanti dei blocchi e l'inversa è la matrice a blocchi avente come blocchi le inverse dei blocchi di A.

Esempio

- Verificare se la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Soluzione

- Nel nostro caso $det(A)=det(A_1)\,det(A_2)=(-1)(-2)=2$. Ne segue che A è invertibile e

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio per casa

- Verificare se la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ è

invertibile e in tal caso calcolare l'inversa.

Suggerimento: è una matrice a blocchi.

Altre proprietà del determinante

- **Alternanza**: se A’ si ottiene da A scambiando due righe allora det A’=-det A
- **Multilinearità**: se A’ si ottiene da A moltiplicando una riga di A per uno scalare t allora det A’=tdet A

se la i-esima riga di A è la somma di due vettori v e w allora det A=det A’+det A’’ dove A’ è la matrice che si ottiene da A sostituendo v alla i-esima riga e A’’ è la matrice che si ottiene da A sostituendo w alla i-esima riga.

Conseguenze delle proprietà

- Se una matrice A ha due righe uguali allora det(A)=0.
- Siccome det(A) = det(A^T) allora lo sviluppo di Laplace si può fare anche lungo le colonne: vale cioè la formula

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Esempio

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione

- Sviluppiamo il determinante lungo la quarta colonna:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\,A_{14} + 0\,A_{24} + 1\,A_{34} + 0\,A_{44}$$

$$= 1\left(-1\right)^{1+4} det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1\left(-1\right)^{3+3} det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\left(-1\right) - \left(-9\right) = 10$$

Matrici e sistemi lineari

Si consideri il sistema di m equazioni e n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

La matrice $A=(a_{ij})$ è detta matrice dei coefficienti, il

vettore colonna **b** = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è detto vettore dei termini noti, il

vettore **X** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è detto vettore delle incognite o delle variabili.

Sistemi lineari come equazioni vettoriali

Un sistema lineare di m equazioni e n incognite è equivalente all'equazione

$$AX = b$$

dove A è la matrice dei coefficienti, **b** è il vettore dei termini noti e **X** è il vettore delle incognite.