Esercitazione 09: Prestazioni dei sistemi di controllo

13 maggio 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

Richiami di teoria

Si consideri il sistema di controllo in Figura 1 dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema da controllare, mentre $R(s)$ è la funzione di trasferimento del controllore. Si supponga che gli eventuali autovalori nascosti del sistema con funzione di trasferimento $L(s)$ siano tutti a parte reale strettamente negativa, cioè che non vi siano cancellazioni non lecite tra $R(s)$ e $G(s)$.
Il segnale di riferimento $y^\circ(t)$ rappresenta l'andamento desiderato per la variabile di uscita $y(t)$, $d(t)$ è il disturbo, mentre $n(t)$ è l'errore di misura.

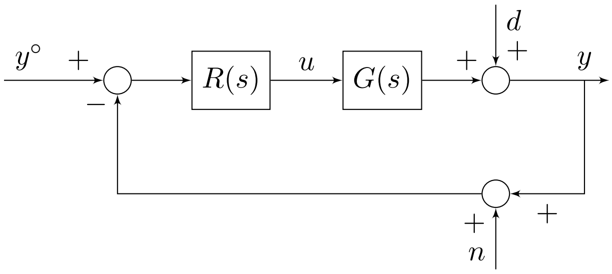

Figura 1: Schema di controllo di riferimento con indicate le funzioni di trasferimento del controllore e del sistema da controllare.

Si definisce l'errore di controllo $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$. Definendo $\mathcal{L}$ l'operatore *trasformata di Laplace*, si definiscono $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, $E(s) = \mathcal{L}(e(t))$, $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$, $Y^\circ(s) = \mathcal{L}(y^\circ(t))$, $D(s) = \mathcal{L}(d(t))$, $N(s) = \mathcal{L}(n(t))$. Si ottengono le seguenti relazioni osservando lo schema in figura 1:

$$\begin{aligned}
Y(s) &= F(s)Y^\circ(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \\
E(s) &= S(s)Y^\circ(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \\
U(s) &= Q(s)Y^\circ(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s)
\end{aligned}$$

dove

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

è la funzione di *sensitività complementare*,

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

è la funzione di *sensitività* e

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

è la funzione di *sensitività del controllo*.

Requisiti dei sistemi di controllo

- **Asintotica stabilità**. Si veda l'Esercitazione 08.
- **Prestazioni statiche**. Per valutare le prestazioni statiche si valuta l'andamento dell'errore di controllo $e(t)$ *a transitorio esaurito*, a fronte di segnali $y^\circ(t)$ e $d(t)$ tali che $Y^\circ(s) = A_1/s^{r_1}$ e $D(s) = A_2/s^{r_2}$. Si ottiene la seguente tabella, per $r_i = 1, 2, 3$, che determina l'entità dell'errore a transitorio esaurito in funzione del tipo g_L e del guadagno μ_L della funzione $L(s)$.

Segnale $y^\circ(t)$ o $d(t)$	Asca(t)	Aram(t)	Apar(t)
$g_L = 0$	$\frac{A}{1+\mu_L}$	∞	∞
$g_L = 1$	0	$\frac{A}{\mu_L}$	∞
$g_L = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu_L}$
$g_L = 3$	0	0	0

- **Prestazioni dinamiche**. Le prestazioni dinamiche riguardano il comportamento in transitorio del sistema. Sotto le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode (e sotto l'ipotesi di asintotica stabilità del sistema retroazionato) la funzione $F(s)$, che lega $y°(t)$ con $y(t)$, può essere approssimata ai poli dominanti come segue:

$$F(s) \simeq \begin{cases} \dfrac{\mu_F}{1+\dfrac{s}{\omega_c}} & \text{se } \varphi_m \geq 75° \\ \dfrac{\mu_F}{1+2\xi_F s/\omega_c + s^2/\omega_c^2} & \text{se } \varphi_m < 75° \end{cases}$$

dove μ_F è il guadagno di $F(s)$ e si calcola come

$$\mu_F \simeq \begin{cases} \dfrac{\mu_L}{1+\mu_L} & \text{se } g_L = 0 \\ 1 & \text{se } g_L > 0 \end{cases}$$

e $\xi_F = \sin\left(\dfrac{\varphi_m}{2}\right) \approx \varphi_m/100$.

La durata dei transitori è quindi:

$$T_a \approx \begin{cases} \dfrac{5}{\omega_c}, & \varphi_m \geq 75° \\ \dfrac{5}{\xi_F\omega_c}, & \varphi_m < 75° \end{cases}$$

Nel caso di approssimazione a polo reale, i transitori non introducono oscillazioni o sovraelongazioni, mentre nel caso di approssimazione a poli complessi coniugati, si ha che la sovraelongazione percentuale $S\%$ e il periodo di oscillazione T_p sono, rispettivamente

$$S\% = 100e^{\frac{-\xi_F\pi}{\sqrt{1-\xi_F^2}}},\ T_p = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_F^2}}$$

- **Attenuazione di disturbi $d(t)$ in banda** $[\omega_1^d, \omega_2^d]$. Ogni componente armonica del segnale $d(t)$ dalla forma $d(t) = \bar{d}\sin(\omega t+\varphi)$ (dove $\omega \in [\omega_1^d, \omega_2^d]$), grazie al teorema della risposta in frequenza ha un effetto sul segnale di uscita - a transitorio esaurito -, pari a

$$y(t) = \bar{d}|S(\jmath\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\measuredangle S(\jmath\omega)).$$

dove $|S(\jmath\omega)|$ si può approssimare come segue

$$|S(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|L(\jmath\omega)|}, & \omega < \omega_c \\ 1, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

- **Attenuazione di disturbi $n(t)$ in banda** $[\omega_1^n, \omega_2^n]$. Ogni componente armonica del segnale $n(t)$ dalla forma $n(t) = \bar{n}\sin(\omega t+\varphi)$ (dove $\omega \in [\omega_1^n, \omega_2^n]$), grazie al teorema della risposta in frequenza, ha un effetto sul segnale di uscita a transitorio esaurito pari a

$$y(t) = \bar{n}|F(\jmath\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\measuredangle - F(\jmath\omega)).$$

dove $|F(\jmath\omega)|$ si può approssimare come segue

$$|F(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |L(\jmath\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

1 Analisi delle prestazioni del cruise control

Si consideri il sistema di controllo per il cruise control di un'automobile mostrato in Figura 2.

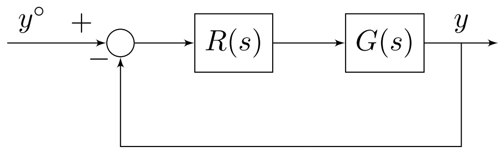

Figura 2: Schema di controllo.

In particolare, si ha che:

$$G(s) = \frac{1}{ms+b} \cdot \frac{1}{1+s/10}$$

dove $m = 1000$kg, $b = 10$Ns/m. Le prestazioni richieste del sistema di controllo sono:

- Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa 5s.
- La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni.
- La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del 2%.

1. Valutare quale dei seguenti controllori soddisfa le specifiche di progetto:
   (a) $R_1(s) = 1000$
   (b) $R_2(s) = \dfrac{1}{s}$
   (c) $R_3(s) = \dfrac{10(1+100s)}{s}$
2. Tracciare la risposta allo scalino unitario del sistema di controllo con ingresso $y^\circ(t)$ e uscita $y(t)$ per i tre controllori.

2 Analisi delle prestazioni

Si consideri il sistema del II ordine, asintoticamente stabile, avente guadagno positivo e avente funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 3.

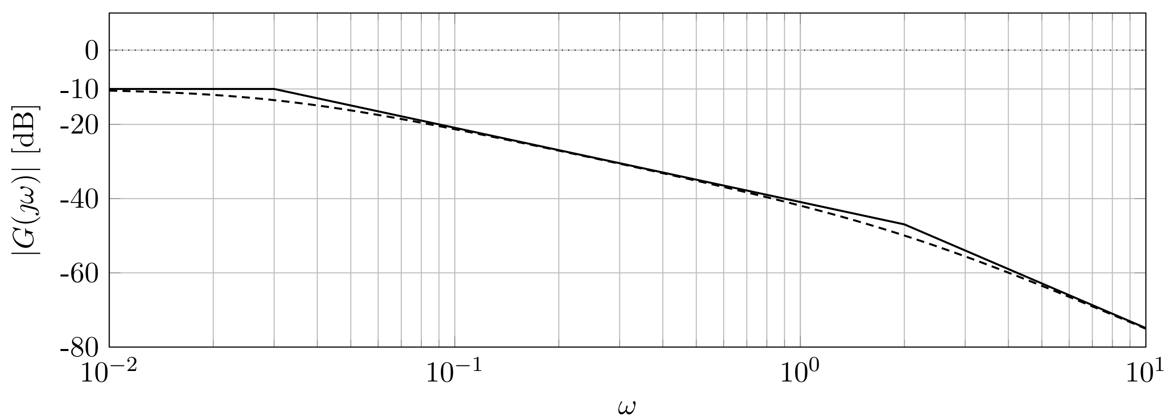

Figura 3: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

1. Si disegni in modo qualitativo la risposta allo scalino di ampiezza unitaria.
2. Si disegni il diagramma di Nyquist di $G(s)$.

3. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 4 nei seguenti casi:
   (a) $H(s) = 100$;
   (b) $H(s) = -1$;
   (c) $H(s) = 1$.

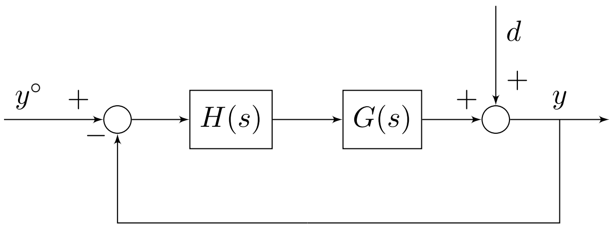

Figura 4: Sistema di controllo di riferimento.

4. Si consideri il caso $H(s) = 100$. Si descrivano le proprietà delle funzioni di trasferimento:
   (a) Tra la variabile $y^\circ(t)$ e l'uscita $y(t)$;
   (b) Tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

3 Analisi delle prestazioni

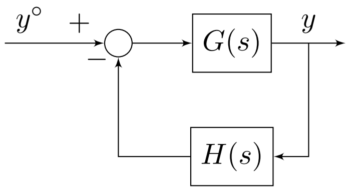

Figura 5: Sistema di controllo di riferimento.

Si consideri il sistema retroazionato descritto dallo schema a blocchi in Figura 5, dove $G(s)$ e $H(s)$ sono due funzioni di trasferimento prive di poli a parte reale positiva, con guadagno positivo, i cui moduli sono rappresentati in nel diagramma di Bode in Figura 6.

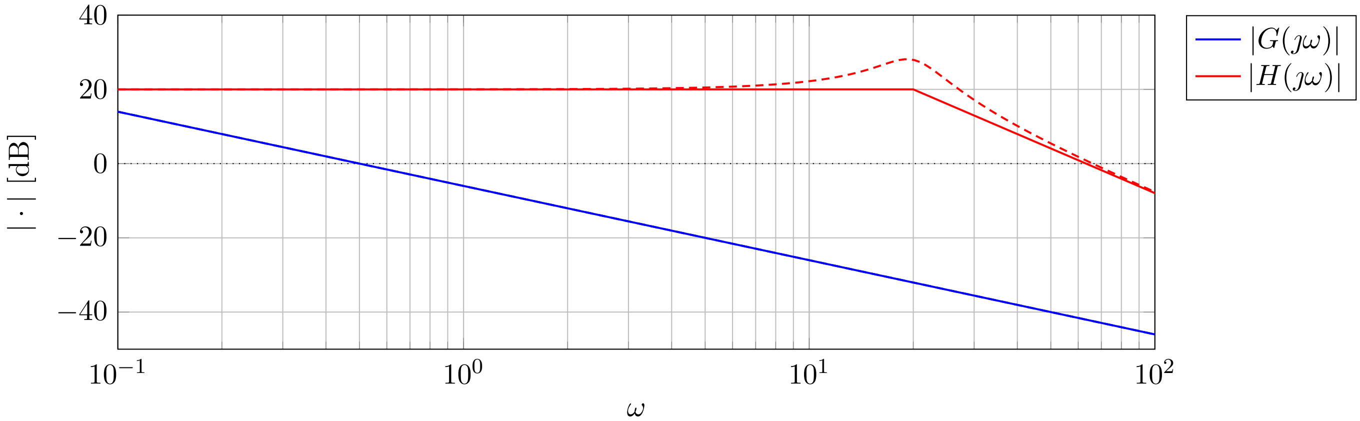

Figura 6: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$ e $H(s)$.

1. Valutare la pulsazione critica e il guadagno generalizzato di $L(s)$.
2. Dire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Valutare approssimativamente il margine di fase di $L(s)$, spiegando il significato di tale indicatore nei riguardi della robustezza del sistema. Spiegare perché in questo caso il margine di fase non è un buon indicatore di robustezza.

3. Tracciare il diagramma di Bode del modulo (approssimato) relativo alla funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$ da $y^\circ(t)$ a $y(t)$. Sulla base del diagramma così ricavato, tracciare inoltre l'andamento approssimato della risposta del sistema in anello chiuso ad un segnale di riferimento $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$.

4. Discutere le variazioni del comportamento del sistema (stabilità, risposta a scalino) indotte rispettivamente da una riduzione e da un aumento di $H(s)$ di un fattore 10.

4 Analisi di stabilità di un sistema retroazionato grazie al criterio di Nyquist

Si consideri il sistema di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0.25s^2)(1 + 0.1s)}$$

I diagrammi di Bode (asintotici e reali) corrispondenti sono riportati in Figura 7.

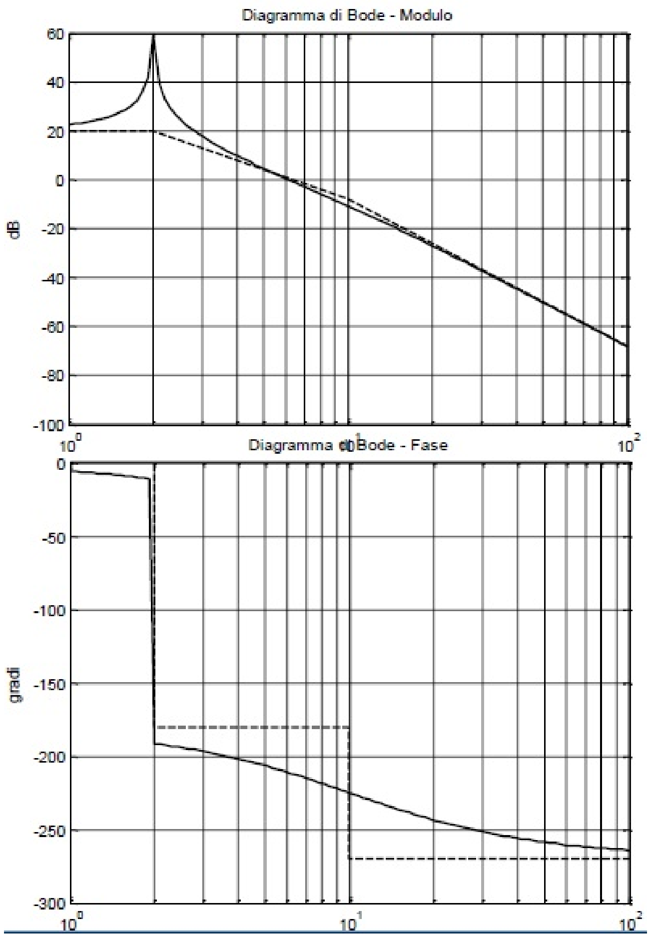

Figura 7: Diagrammi di Bode relativi alla funzione di trasferimento $G(s)$.

Il corrispondente diagramma di Nyquist è riportato in Figura 8, dove sono riportati per chiarezza anche gli andamenti del diagramma "all'infinito".

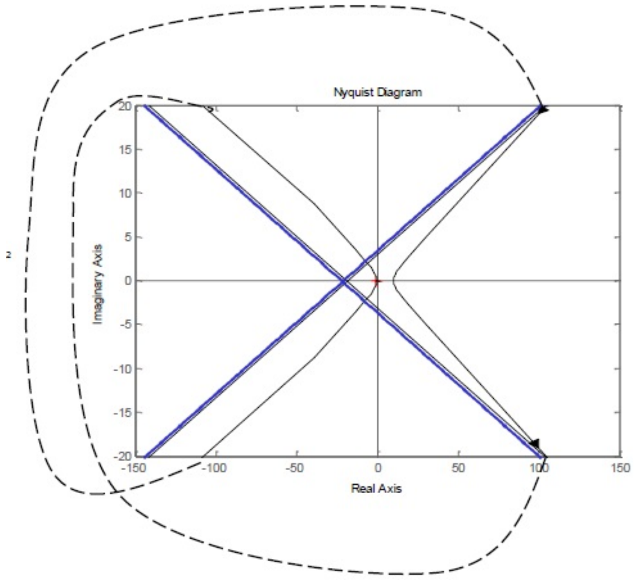

Figura 8: Diagramma di Nyquist relativo alla funzione di trasferimento $G(s)$.

Si studino le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 9.

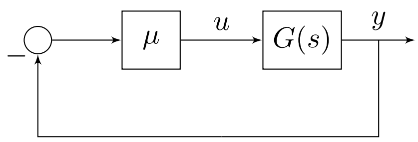

Figura 9: Schema ad anello chiuso.

nei seguenti casi:

1. $\mu = 1$;
2. $\mu = -1$;
3. $\mu = 0.01$;
4. $\mu = -0.01$;