

# **Esercitazione 12: Prova d'esame**

28 maggio 2024 (3h)

**Fondamenti di Automatica**

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University  
e successivamente in parte modificate e completate.

## 1 Sistema non lineare a tempo continuo

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)^2 - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2 + u(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:

- a. Il sistema è dinamico?
- b. Il sistema è lineare?
- c. Qual è l'ordine di un sistema?
- d. Il sistema è MIMO?
- e. Il sistema è strettamente proprio?

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ .

C. Si calcolino i possibili movimenti di equilibrio di stato e uscita corrispondenti all'ingresso  $u(t) = \bar{u} = 1$ .

D. Si valutino le proprietà di stabilità degli equilibri individuati al punto C.

E. Si scriva l'espressione analitica della risposta dell'uscita all'ingresso  $u(t) = \bar{u} = 1$  e alle condizioni iniziali  $(x_1(0), x_2(0)) = (-1, 1)$ .

## 2 Analisi prestazioni

In Figura 1 sono rappresentati i diagrammi di Bode (asintotici ed esatti) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con ingresso  $u(t)$  ed uscita  $y(t)$ .

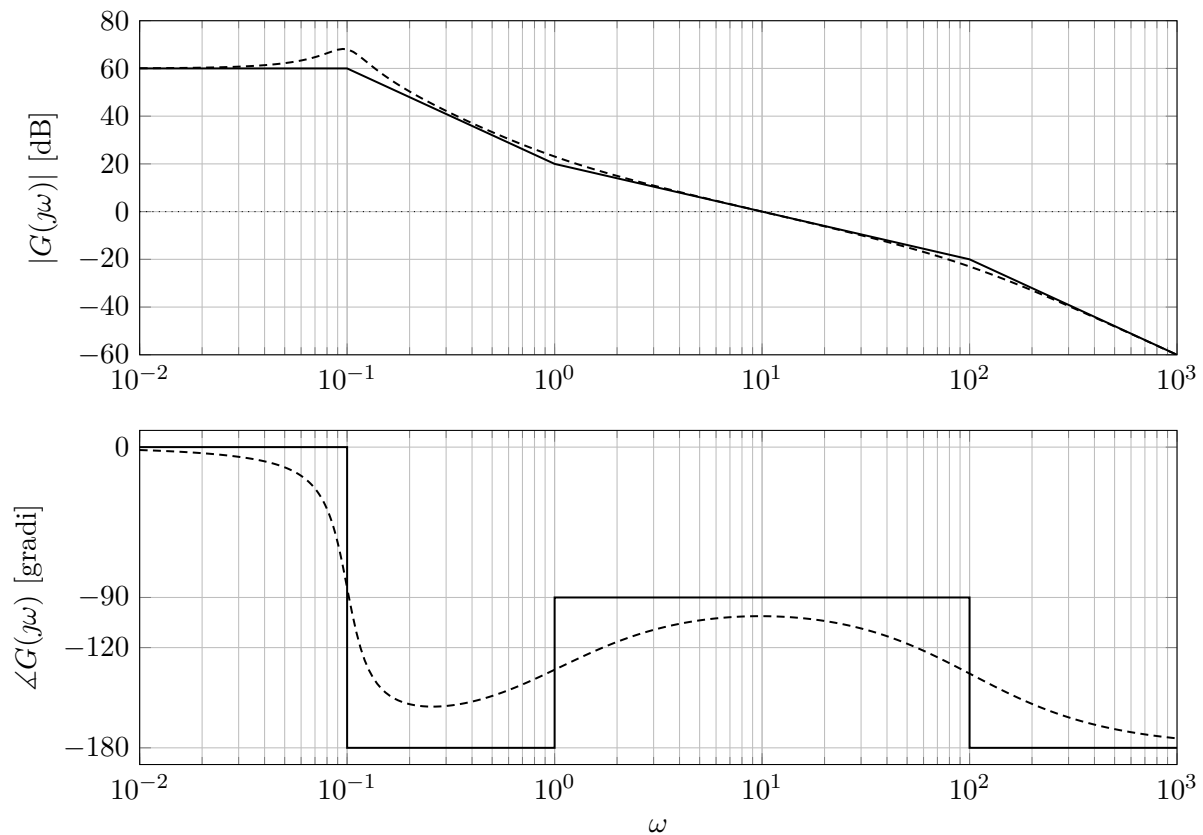


Figura 1: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento  $G(s)$ .

1. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
  - (a) La risposta del sistema all'ingresso  $u(t) = \text{sca}(t)$  si assesta al valore 1000.
  - (b) La risposta del sistema all'ingresso  $u(t) = \text{sca}(t)$  presenta oscillazioni ripetute smorzate.
  - (c) I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
  - (d) I segnali sinusoidali in ingresso  $u(t) = \sin(\omega t)$  con pulsazione  $\omega \in [100, 1000]$  sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.
2. Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in Figura 2 ed è presente un disturbo additivo sull'uscita  $d(t)$ .

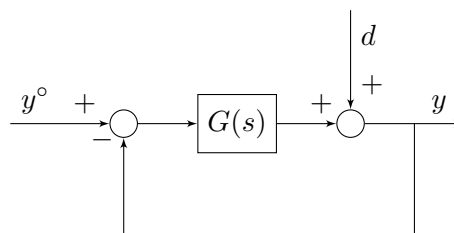


Figura 2: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$ .

Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
  - (b) La risposta del sistema retroazionato all'ingresso  $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$ , con  $d(t) = 0$ , si assesta al valore 1000.
  - (c) I transitori del sistema retroazionato dovuti alla condizione iniziale si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
  - (d) I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato  $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$ , con pulsazione  $\omega \in [100, 1000]$  sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.
  - (e) I disturbi sinusoidali sull'uscita del sistema retroazionato  $d(t) = \sin(\omega t)$  con pulsazione  $\omega \in [0.01, 0.1]$  sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 10.
3. Dire, giustificando la risposta, come e se cambierebbero le risposte al punto 2, nel caso in cui il disturbo  $d(t)$  fosse additivo sull'ingresso al sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  invece che sull'uscita, come mostrato in Figura 3.

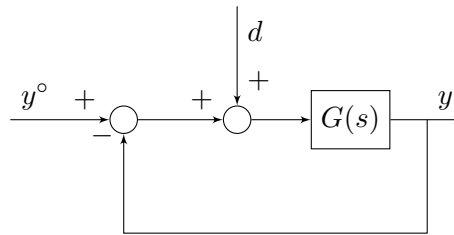


Figura 3: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento  $G(s)$  con disturbo additivo sull'ingresso.

### 3 Progetto del controllore

Si consideri il sistema di controllo mostrato in Figura 4.

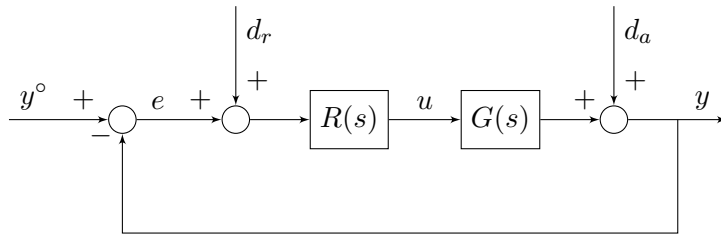


Figura 4: Schema di controllo.

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{2s}$$

e i segnali indicati valgono:

$$\begin{aligned} y^o(t) &= 2 \operatorname{sca}(t), \\ d_a(t) &= -0.1 \operatorname{sca}(t), \\ d_r(t) &= A_r \sin(\omega_r t), \quad |A_r| < 10, \omega_r > 20. \end{aligned}$$

Determinare un regolatore  $R(s)$  tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che:

1. l'errore a transitorio esaurito prodotto da  $y^o(t)$  e  $d_a(t)$  sia nullo,
2. la pulsazione critica  $\omega_c$  sia compresa tra 0.1 e 1 rad/s,
3. il margine di fase  $\varphi_m$  sia di almeno  $45^\circ$ ,
4. l'ampiezza dell'effetto asintoticamente prodotto dal disturbo  $d_r(t)$  su  $y(t)$  non superi 0.1.

## 4 Controllore digitale

Dato il sistema di controllo a tempo continuo in retroazione come mostrato in Figura 5

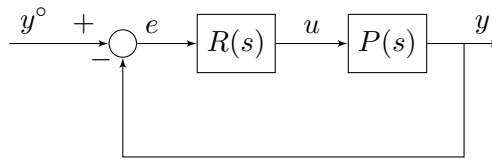


Figura 5: Schema di controllo.

in cui il processo e il regolatore sono rispettivamente descritti dalle funzioni di trasferimento:

$$P(s) = \frac{0.5}{s(1 + 0.01s)}, \quad R(s) = 2 \cdot \frac{1 + 10s}{s}$$

e dovendo realizzare il regolatore con tecnologia digitale:

1. Determinare il tempo di campionamento  $T_s$  in modo che la pulsazione di campionamento  $\omega_s$  sia superiore di almeno una decade alla pulsazione critica  $\omega_c$ , che il decremento del margine di fase  $\varphi_m$  dovuto a:
  - Campionamento,
  - Tempo di calcolo  $\tau_{\text{comp}} = 50 \mu\text{s}$ ,
  - Filtro antialiasing con banda pari a 10 volte la banda del sistema in anello chiuso,
 non ecceda  $9^\circ$ .
2. Calcolare la funzione di trasferimento  $R^*(z)$  del regolatore a tempo discreto ottenuto da  $R(s)$  col metodo di Eulero esplicito e con il valore di  $T_s$  determinato.
3. Esprimere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.