Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 19/07/2017

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.

1. Si consideri una moneta con $\Pr(\text{Testa}) = p$, e $0 < p < 1$. Quanti lanci di moneta bisogna fare, in media, per osservare almeno una volta sia il risultato "Testa" che il risultato "Croce"?
E se si lanciano sempre 2 monete identiche contemporaneamente? (In questo caso un lancio comprende il risultato congiunto delle due monete)

2. Si hanno due v.a. discrete X e Y distribuite come in tabella

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 1$	1/20	0	2/20
$y = 2$	1/20	8/20	2/20
$y = 3$	2/20	?	4/20

   (a) Determinare la probabilitá mancante $\Pr(X = 2, Y = 3)$.
   (b) Determinare la ddp di X dato $Y = 1$, $\Pr(X = x|Y = 1)$ per ogni x.
   (c) Calcolare $\mathsf{E}[Y|X = 2]$ e $\mathsf{Var}[Y|X = 2]$.
   (d) Le v.a. X e Y sono indipendenti? E se condizioniamo all'evento $X \neq 2$?

3. Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Si trovi la ddp di $Y = e^{-X}$.
Suggerimento: quali sono i valori possibili assunti da Y?

4. Si ha un sacchetto con 4 biglie bianche e una nera. A turno, ogni persona di un gruppo di 5 pesca a caso una biglia dal sacchetto: se pesca la biglia nera ha perso e il gioco termina, altrimenti reinserisce la biglia bianca nel sacchetto e lo passa alla persona successiva. Il gioco continua finché qualcuno pesca la biglia nera.
   (a) Si illustri il problema tramite una catena di Markov, indicando gli stati della catena e le probabilitá di transizione.
   (b) Indicare gli stati transitori e gli stati ricorrenti.
   (c) Sapendo che il giocatore 1 é il primo a pescare, qual é la probabilitá che il giocatore 1 interrompa prima o poi il gioco?
   (d) Ci sono giocatori avvantaggiati? Se sí, qual é il giocatore piú avvantaggiato?

5. Si vuole misurare una costante fisica α tramite n osservazioni del tipo $Y_i = \alpha + Z_i$, dove le v.a. Z_i per $i = 1, \dots, n$ sono indipendenti e identicamente distribuite come $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) Determinare lo stimatore a massima verosimiglianza (ML) di α, $\widehat{A}_{\text{ML}}$, basato sulle osservazioni $Y_1, \dots, Y_n$.
   (b) Dire se lo stimatore cosí ottenuto é polarizzato e consistente.

6. Avendo a disposizione un generatore di v.a. uniformi in $[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera la v.a. X rappresentante la somma che risulta dal lancio di 2 dadi bilanciati a 6 facce.

Soluzioni

Problema 1

Con un lancio si osserva sicuramente uno dei due risultati. Con prob. p abbiamo osservato "Testa", e quindi dobbiamo chiederci quanti lanci dobbiamo aspettare, in media, per osservare "Croce". I lanci necessari ad osservare "Croce" sono distribuiti Geometricamente con prob. di successo $1-p$.

Si puó fare un ragionamento analogo se il primo lancio é stato "Croce", con prob. $1-p$.

Mettendo insieme i due contributi con il teorema dell'aspettazione totale, si ha che il numero atteso di lanci é:

$$1 + p\frac{1}{1-p} + (1-p)\frac{1}{p}.$$

Nei lanci di due monete contemporaneamente, se si osserva "TC" o "CT", con prob. $2p(1-p)$, l'esperimento si conclude subito con un lancio, altrimenti bisogna continuare. Se al primo lancio é uscito "TT", con prob. p^2, si deve attendere un numero geometrico di lanci con prob. di successo $\Pr(\text{"TC"}) + \Pr(\text{"CT"}) + \Pr(\text{"CC"}) = 1 - p^2$; altrimenti, se al primo lancio é uscito "CC", con prob. $(1-p)^2$, si deve attendere un numero geometrico di lanci con prob. di successo $\Pr(\text{"TT"}) + \Pr(\text{"TC"}) + \Pr(\text{"CT"}) = 1 - (1-p)^2$.

Mettendo insieme i vari contributi si ha che il numero atteso di lanci é:

$$1 + p^2\frac{1}{1-p^2} + (1-p)^2\frac{1}{1-(1-p)^2}.$$

Problema 2

1. La prob. mancante é 0, giacché tutte le altre prob. sommano a 1.
2. Si ha

$$\Pr(X = x|Y = 1) = \frac{\Pr(X = x, Y = 1)}{\Pr(Y = 1)} = \frac{\Pr(X = x, Y = 1)}{\sum_{x'=1}^{3}\Pr(X = x', Y = 1)} = \begin{cases} \frac{1/20}{3/20} & x = 1 \\ 0 & x = 2 \\ \frac{2/20}{3/20} & x = 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 1 \\ 0 & x = 2 \\ \frac{2}{3} & x = 3 \end{cases}$$

3. Condizionando a $X = 2$, l'unico evento possibile é $Y = 2$, quindi

$$\mathsf{E}[Y|X = 2] = 2, \qquad \mathsf{Var}[Y|X = 2] = 0.$$

4. Le v.a. X e Y non possono essere indipendenti, ad esempio $\Pr(X = 2, Y = 1) = 0$ esclude questa possibilitá.

   Se si condiziona all'evento $X \neq 2$, si puó notare che $\Pr(Y = y|X = 1) = \Pr(Y = y|X = 3)$ per ogni y, quindi le v.a. X e Y sono indipendenti condizionatamente a $X \neq 2$.

Problema 3

Poiché $X \in [0, \infty)$, Y puó assumere valori in $(0, 1]$. Usando l'approccio della cumulata, si ha:

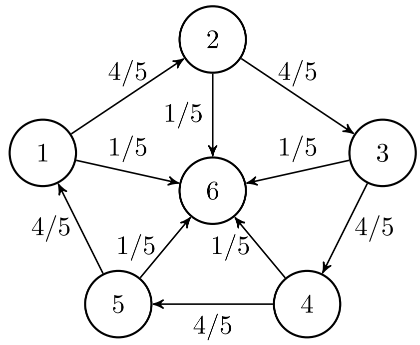
$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(e^{-X} \leq y) = \Pr(X \geq -\log y) = \begin{cases} e^{\lambda \log y} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} y^{\lambda} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Derivando, si ha

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_y(y) = \begin{cases} \lambda y^{\lambda-1} & 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema 4

1. Si possono usare gli stati numerati da 1 a 5 per indicare quale persona che ha il sacchetto con le biglie. Si puó usare un altro stato per indicare il termine del gioco. Da ogni stato $1 \ldots 5$ si continua il gioco con prob. $4/5$ e si conclude con prob. $1/5$.



2. Gli stati transitori sono $1, \ldots, 5$, mentre 6 é uno stato ricorrente.

3. Il giocatore 1 puó interrompere il gioco, facendo la transizione da 1 a 6, al primo turno con prob. $1/5$, oppure al secondo turno con prob. $(4/5)^5 1/5$, al terzo turno con prob. $(4/5)^{10} 1/5$, eccetera. Quindi la prob. cercata é la somma di tutti i contributi:
$$P_1 = \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \cdot \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{5i} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1-(4/5)^5} \approx 0.2975$$

4. Dato che il primo giocatore a pescare é il numero 1, il giocatore piú avvantaggiato é il numero 5. Infatti, la probabilitá che il giocatore i perda é uguale a:
$$P_i = \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1+5} \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1+10} \frac{1}{5} + \ldots = \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} P_1$$
dunque $P_5 < P_4 < P_3 < P_2 < P_1$.

Problema 5

1. Innanzitutto si nota che $Y_i \sim \mathcal{N}(\alpha, 1)$ per ogni i. Lo stimatore ML si calcola come
$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{\mathrm{ML}}(y_1, \ldots, y_n) &= \arg\max_{\alpha} f_{Y_1,\ldots,Y_n;\alpha}(y_1, \ldots, y_n; \alpha) \\
&= \arg\max_{\alpha} \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i; \alpha) \\
&= \arg\max_{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2\right) \\
&= \arg\min_{\alpha} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2.
\end{aligned}$$
La funzione da minimizzare é differenziabile in α, quindi:
$$\frac{d}{d\alpha}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha)^2 = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha) \stackrel{!}{=} 0$$
che risolta in α dá
$$\widehat{A}_{\mathrm{ML}}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \longrightarrow \quad \widehat{A}_{\mathrm{ML}}(Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

2. Lo stimatore ML risulta essere la media campionaria che e' non-polarizzata e consistente.

Problema 6

La v.a. X puó essere interpretata come la somma di due contributi $X = X_1 + X_2$, dove X_1 e X_2 sono i risultati del lancio di due dadi identici bilanciati a 6 facce. Si puó pertanto procedere alla simulazione di X_1 e X_2, per poi sommarli. L'algoritmo é come segue:

1. Genero due v.a. $U_1 \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $U_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$ indipendentemente.
2. Assegno $X_1 = \lceil 6\, U_1 \rceil$, e $X_2 = \lceil 6\, U_2 \rceil$, dove $\lceil x \rceil$ é il primo intero piú grande di x.
3. Assegno $X = X_1 + X_2$.