Informazione e stima – 12/01/2024

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Supponiamo di avere una scatola con 8 palline rosse, 5 palline verdi, e 7 palline blu. Estraiamo casualmente 3 palline senza reinserimento. Qual è la probabilità che ci siano almeno 2 palline rosse tra quelle estratte?

2. Siano $X \sim \text{Exp}(2)$ e $Y = aX + Z$ con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e indipendente da X.

   (a) Si calcoli $\rho[X, Y]$.

   (b) Si dica se è possibile avere $\rho[X, Y] = 1$ per qualche valore di a. Giustificare la risposta.

3. Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $Y = \sqrt{X}$. Trovare la legge di Y.

4. In una fabbrica, il processo di produzione di un certo componente è descritto da un processo di Poisson con un tasso di produzione medio di 2 componenti all'ora. Supponendo che la probabilità che un componente sia difettoso sia 0.1, indipendentemente dagli altri componenti

   (a) qual è la probabilità che il primo componente difettoso sia prodotto non prima di 3 ore?

   (b) Mediamente in quante ore saranno prodotti 10 componenti difettosi?

5. Sia $X_n = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ il massimo tra n lanci indipendenti di un dado a 6 facce ben bilanciato. Determinare se la successione di v.a. $\{X_n\}_n$ converge in probabilità e, se sì, a quale valore.

6. Avendo a disposizione un generatore di campioni uniformi $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo (con pseudocodice) che con la massima efficienza possibile generi campioni distribuiti con legge $f_X(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$ e $f_X(x) = 0$ altrimenti.

Soluzioni

Problema 1

Lo spazio di probabilità è uniforme discreto. La probabilità di avere almeno 2 palline rosse è la probabilità di averne esattamente 2 rosse oppure esattamente 3 rosse. Entrambe queste probabilità sono ipergeometriche e sommandole si trova il risultato finale:

$$p = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{1} + \binom{8}{3}\binom{12}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{336 + 56}{1140} = \frac{392}{1140} \approx 0.3439. \tag{1}$$

Problema 2

1. Il coefficiente di correlazione lineare è

$$\rho[X, Y] = \frac{\mathsf{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{2}$$

dove

$$\sigma_X^2 = \mathsf{Var}[X] = \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \tag{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathsf{Var}[Y] = \mathsf{Var}[aX] + \mathsf{Var}[Z] = \frac{a^2}{4} + 1 = \frac{a^2 + 4}{4} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}[X, Y] &= \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] && (5)\\
&= \mathsf{E}[X(aX + Z)] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[aX + Z] && (6)\\
&= a\mathsf{E}[X^2] + \mathsf{E}[XZ] - a\mathsf{E}[X]^2 - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Z] && (7)\\
&= a\mathsf{Var}[X] && (8)\\
&= \frac{a}{4}. && (9)
\end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$\rho[X, Y] = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{\sqrt{a^2+4}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}. \tag{10}$$

2. Il coefficiente di correlazione lineare non può essere pari a 1 per nessun valore di a, perché, a causa della presenza della variabile indipendente Z, non ci potrà mai essere un legame lineare deterministico tra X e Y.

Problema 3

Innanzitutto si noti che $Y \geq 0$. Applicando il metodo della cumulata si ha che

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) &= \Pr(\sqrt{X} \leq y) && (11)\\
&= \Pr(X \leq y^2) && (12)\\
&= F_X(y^2), \qquad y \geq 0. && (13)
\end{aligned}$$

Calcolando la derivata, si ottiene

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 2y f_X(y^2) = 2y\lambda e^{-\lambda y^2}, \qquad y \geq 0, \tag{14}$$

e $f_Y(y) = 0$ altrimenti.

Problema 4

Siccome i componenti sono difettosi in maniera indipendente con la stessa probabilità 0.1, il processo dei componenti difettosi è di Poisson con tasso medio di $2 \cdot 0.1 = 0.2$ componenti difettosi all'ora.

1. L'evento di interesse è equivalente all'avere 0 componenti difettosi in 3 ore di produzione:

$$\Pr(N_{[0,3]} = 0) = e^{-3 \cdot 0.2} = e^{-0.6} \approx 0.5488. \tag{15}$$

2. Il tempo alla produzione del decimo componente difettoso Y_{10} è una somma di 10 tempi di interarrivo indipendenti e identicamente distribuiti come $T_i \sim \text{Exp}(0.2)$. Pertanto, si ha

$$\mathsf{E}[Y_{10}] = 10\mathsf{E}[T_i] = \frac{10}{0.2} = 50 \text{ ore}. \tag{16}$$

Problema 5

Intuitivamente, facendo tanti lanci indipendenti di un dado a 6 facce ben bilanciato, si ottiene un valore massimo pari a 6 con alta probabilità. Dunque, ci aspettiamo una convergenza in probabilità al valore 6. Dimostriamolo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr(6 - X_n > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n < 6 - \varepsilon) && (17)\\
&\leq \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \leq 5) && (18)\\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr(L_1 \leq 5, L_2 \leq 5, \ldots, L_n \leq 5) && (19)\\
&= \lim_{n\to\infty} (\Pr(L_i \leq 5))^n && (20)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n && (21)\\
&= 0, \qquad \forall \varepsilon > 0. && (22)
\end{aligned}$$

Pertanto, rimane dimostrato che $X_n \xrightarrow{P} 6$

Problema 6

Con il metodo della cumulata inversa è possibile avere un algoritmo con efficienza del 100%. La funzione cumulata di probabilità si calcola come

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = \left[e^{-\frac{1}{t}}\right]_0^x = e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x > 0. \tag{23}$$

La funzione inversa della cumulata si calcola come:

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\frac{1}{x}} && (24)\\
\log(u) &= -\frac{1}{x} && (25)\\
-\log(u) &= \frac{1}{x} && (26)\\
-\frac{1}{\log(u)} &= x. && (27)
\end{aligned}$$

Pertanto, l'algoritmo sarà come segue:

1. Genero un campione $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$
2. Calcolo $X = -\frac{1}{\log(U)}$