Esercitazione 12: Prova d'esame

28 maggio 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica

Prof. M. Farina

Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University
e successivamente in parte modificate e completate.

1 Sistema non lineare a tempo continuo

Si consideri il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)^2 - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)^2 + u(t) - x_2(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{cases}$$

A. Si risponda alle seguenti domande, giustificando brevemente le risposte:

a. Il sistema è dinamico?

b. Il sistema è lineare?

c. Qual è l'ordine di un sistema?

d. Il sistema è MIMO?

e. Il sistema è strettamente proprio?

B. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$.

C. Si calcolino i possibili movimenti di equilibrio di stato e uscita corrispondenti all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.

D. Si valutino le proprietà di stabilità degli equilibri individuati al punto C.

E. Si scriva l'espressione analitica della risposta dell'uscita all'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$ e alle condizioni iniziali $(x_1(0), x_2(0)) = (-1, 1)$.

Soluzione

A.a Sì, il sistema è dinamico, dato che l'evoluzione delle variabili di uscita non può essere determinata conoscendo unicamente l'andamendo delle variabili di ingresso;

A.b no, il sistema è non lineare;

A.c l'ordine è $n = 2$;

A.d no, il sistema presenta una variabile di ingresso e una variabile di uscita, pertanto è SISO;

A.e Il sistema è strettamente proprio, dato che la variabile di ingresso non compare nell'equazione di uscita.

B. Si definiscano $\delta x_1 = x_1 - \bar{x}_1, \delta x_2 = x_2 - \bar{x}_2, \delta u = u - \bar{u}, \delta y = y - \bar{y}$ e

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Il sistema linearizzato attorno ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ risulta

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta x + B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u \\ \delta y &= C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta x + D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})\delta u \end{aligned}$$

dove

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 0 \\ 2\bar{x}_1 & -1 \end{bmatrix}, \; B(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

C. Ponendo $u(t) = \bar{u} = 1$, esistono due movimenti di equilibrio possibili:

I. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1, 2, 1)$;

II. $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (-1, 2, 1)$.

D. Per gli equilibri calcolati al punto C. si calcola:

I.
$$A(1,2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dato che gli autovalori di questa matrice sono 2 e -1, l'equilibrio $(1, 2, 1)$ risulta instabile.

II.
$$A(-1,2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dato che gli autovalori di questa matrice sono -2 e -1, l'equilibrio $(-1, 2, 1)$ risulta asintoticamente stabile.

E. Si consideri ora il sistema non lineare di partenza. Si noti che per $u(t) = 1$, il valore $x_1 = -1$ risulta un valore di equilibrio per la prima equazione, che non dipende dal valore di x_2. Dato che $x_1(0) = -1$, $\dot{x}_1(t) = 0$ per ogni t, da cui $x_1(t) = -1$ per ogni t.
Sostituendo $x_1(t) = -1$ e $u(t) = 1$ nella seconda equazione si ottiene che la dinamica della variabile $x_2(t)$ è determinata dall'equazione
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 2$$
che è lineare. Considerando la condizione iniziale $x_2(0) = 1$, la sua soluzione risulta
$$x_2(t) = e^{-t}x_2(0) + \int_0^t e^{-(t-\tau)}2d\tau = e^{-t} + 2(1 - e^{-t})$$

2 Analisi prestazioni

In Figura 1 sono rappresentati i diagrammi di Bode (asintotici ed esatti) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema dinamico lineare asintoticamente stabile con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$.

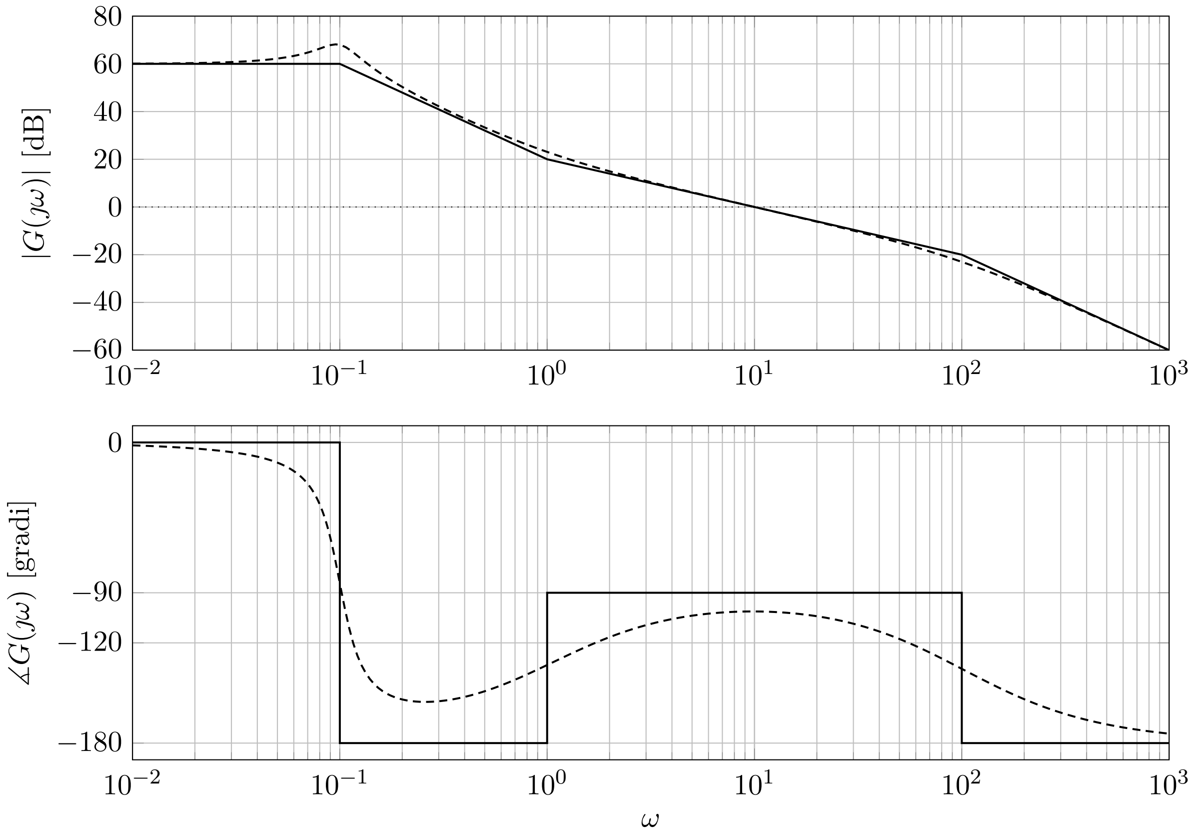

Figura 1: Diagrammi di Bode asintotici (linea continua) ed esatti (linea tratteggiata) della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.

1. Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
   (a) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$ si assesta al valore 1000.
   (b) La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$ presenta oscillazioni ripetute smorzate.
   (c) I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.
   (d) I segnali sinusoidali in ingresso $u(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [100,\ 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.

2. Il sistema viene retroazionato secondo lo schema in Figura 2 ed è presente un disturbo additivo sull'uscita $d(t)$.

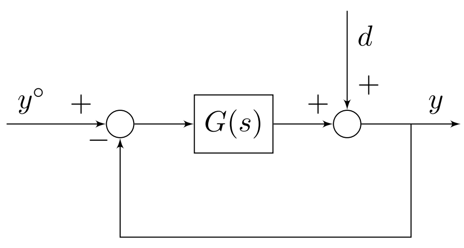

Figura 2: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

Dire, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

(b) La risposta del sistema retroazionato all'ingresso $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$, con $d(t) = 0$, si assesta al valore 1000.

(c) I transitori del sistema retroazionato dovuti alla condizione iniziale si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.

(d) I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$, con pulsazione $\omega \in [100,\ 1000]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 5.

(e) I disturbi sinusoidali sull'uscita del sistema retroazionato $d(t) = \sin(\omega t)$ con pulsazione $\omega \in [0.01,\ 0.1]$ sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di 10.

3. Dire, giustificando la risposta, come e se cambierebbero le risposte al punto 2, nel caso in cui il disturbo $d(t)$ fosse additivo sull'ingresso al sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ invece che sull'uscita, come mostrato in Figura 3.

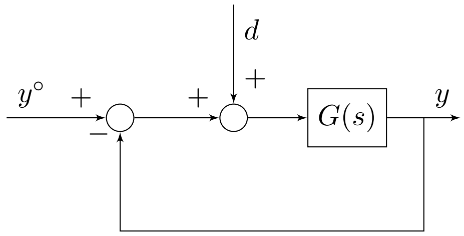

Figura 3: Schema con cui viene retroazionato il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ con disturbo additivo sull'ingresso.

Soluzione

1. Il tipo della funzione di trasferimento $G(s)$ è $g = 0$, perché la pendenza del diagramma asintotico del modulo è zero a basse pulsazioni ($\omega < 0.1$).
Il guadagno è $\mu_G = 1000$, perché nei diagrammi asintotici il modulo è 60dB e la fase è zero a basse pulsazioni ($\omega < 0.1$).
$G(s)$ ha due poli complessi coniugati con modulo $\omega_n = 0.1$, perché il diagramma esatto del modulo presenta un picco in prossimità di $\omega = 0.1$, e parte reale strettamente negativa (perché nel diagramma di Bode asintotico della fase, la fase decresce di 180° a $\omega = 0.1$). La presenza del picco di risonanza ci suggerisce inoltre che il fattore di smorzamento ξ soddisfa $0 < \xi < \sqrt{2}/2$.
$G(s)$ ha inoltre uno zero singolo (e quindi necessariamente reale) negativo con modulo 1, perché nel diagramma di Bode del modulo la pendenza aumenta di 20dB/decade alla pulsazione $\omega = 1$, e nel diagramma di Bode asintotico della fase, la fase aumenta a scalino di 90°.
Infine, $G(s)$ ha un polo singolo (reale) negativo con modulo 100, perché alla pulsazione $\omega = 100$ la pendenza del diagramma di Bode asintotico del modulo decresce di 20dB/decade e corrispondentemente si ha una variazione di $-90°$ della fase.

Quindi:

(a) *La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$ si assesta al valore 1000.*
Vero.
Il guadagno di $G(s)$ è $\mu = 1000$, e il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è asintoticamente stabile.

(b) *La risposta del sistema all'ingresso $u(t) = \text{sca}(t)$ presenta oscillazioni ripetute smorzate.*
Vero.
$G(s)$ presenta due poli complessi coniugati con $\omega_n = 0.1$ e $0 < \xi < \sqrt{2}/2$.

(c) *I transitori si esauriscono in un tempo pari circa a 0.5.*
Falso.

La costante di tempo dominante è quella associata ai due poli complessi coniugati perché la loro costante di tempo è:

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n} > \frac{1}{\omega_n} = 10,$$

mentre il polo reale ha una costante di tempo $\tau = 1/100$. Quindi la costante di tempo dominante è $\tau_D > 10$, a cui corrisponde un tempo di assestamento superiore a 50 unità di tempo.

(d) *I segnali sinusoidali in ingresso* $u(t) = \sin(\omega t)$ *con pulsazione* $\omega \in [100,\ 1000]$ *sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di* 5.
Vero.
A regime $y_\infty(t) = |G(\jmath\omega)| \sin(\omega t + \measuredangle G(\jmath\omega))$ ha un'ampiezza pari a $|G(\jmath\omega)|$ e $|G(\jmath\omega)|_{\text{dB}} < -20\text{dB}$ per $\omega \in [100,\ 1000]$, quindi $|G(\jmath\omega)| < 1/10$, $\omega \in [100,\ 1000]$.

2. La funzione d'anello del sistema retroazionato è $L(s) = G(s)$.

(a) *Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.*
Vero.
Il criterio di Bode è applicabile perché:

i. $G(s)$ è funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile, quindi eventuali autovalori nascosti hanno tutti parte reale strettamente negativa;
ii. I poli di $G(s)$ hanno tutti parte reale strettamente negativa;
iii. La pulsazione critica ω_c è ben definita e pari a $\omega_c = 10$, come si vede dal diagramma di Bode del modulo in Figura 1.

Quindi, dato che $\mu_G = 1000 > 0$ e che $\varphi_m = 180° - |\measuredangle G(\jmath 10)| > 0$, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per il criterio di Bode.

(b) *La risposta del sistema retroazionato all'ingresso* $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$*, con* $d(t) = 0$*, si assesta al valore* 1000.
Falso.
La risposta allo scalino del sistema retroazionato si assesta al valore del guadagno di:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

che è pari a

$$\mu_F = \frac{10^3}{1 + 10^3} \simeq 1.$$

(c) *I transitori del sistema retroazionato si esauriscono in un tempo pari circa a* 0.5.
Vero.
Dato che $\varphi_m > 75°$, allora $F(s)$ si può approssimare con una funzione a polo singolo pari a:

$$F(s) \simeq \frac{\mu_F}{1 + s/\omega_c}, \quad \omega_c = 10$$

quindi il tempo di assestamento del sistema retroazionato è $T_a \simeq 5/\omega_c = 0.5$.

(d) *I segnali sinusoidali in ingresso al sistema retroazionato* $y^\circ(t) = \sin(\omega t)$ *con pulsazione* $\omega \in [100,\ 1000]$ *sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di* 5.
Vero.
Il modulo della funzione di trasferimento $F(s)$

$$|F(\jmath\omega)| = \frac{|G(\jmath\omega)|}{|1 + G(\jmath\omega)|}$$

e può essere approssimato come:

$$|F(\jmath\omega)| \simeq |F(\jmath\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |G(\jmath\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che il segnale sinusoidale $y^{\circ}(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in [100,\ 1000]$ ha frequenza molto maggiore di $\omega_c = 10$, allora:

$$y_{\infty}(t) = |F(\jmath\omega)| \sin\left(\omega t + \measuredangle F(\jmath\omega)\right) \simeq |G(\jmath\omega)| \sin\left(\omega t + \measuredangle F(\jmath\omega)\right).$$

Dato che $|G(\jmath\omega)| < 1/10$ per $\omega \in [100,\ 1000]$, come si vede in Figura 1, $y^{\circ}(t)$ è attenuato in ampiezza di almeno un fattore 10.

(e) *I disturbi sinusoidali additivi sull'uscita del sistema retroazionato* $d(t) = \sin(\omega t)$ *con pulsazione* $\omega \in [0.01,\ 0.1]$ *sono attenuati in ampiezza sull'uscita di un fattore maggiore di* 10.
Vero.
La funzione di trasferimento $H(s)$ dal disturbo $d(t)$ sull'uscita $y(t)$ è data da

$$H(s) = \frac{1}{1 + G(s)},$$

il cui modulo della risposta in frequenza può essere approssimato come

$$|H(\jmath\omega)| \simeq |H(\jmath\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} \dfrac{1}{|G(\jmath\omega)|} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dato che i segnali sinusoidali $d(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in [0.01,\ 0.1]$ sono tutti con pulsazione molto minore di $\omega_c = 10$, allora l'uscita a regime corrispondente è:

$$y_{\infty}(t) = |H(\jmath\omega)| \sin\left(\omega t + \measuredangle H(\jmath\omega)\right),$$

che ha ampiezza $|H(\jmath\omega)| \simeq 1/|G(\jmath\omega)| < 1/1000$, $\omega \in [0.01,\ 0.1]$, quindi sono attenuati di almeno un fattore 1000.

3. Le risposte ai punti 2a, 2b, 2c, 2d sono invariate perché:

- 2a e 2c: nei sistemi lineari la stabilità e i transitori non dipendono dall'ingresso e quindi si può porre $d(t) = 0$, $t \geq 0$, ottenendo lo stesso schema nei due casi di Figura 2 e 3.
- 2b e 2d: non dipendono dal disturbo $d(t)$ ma dall'ingresso $y^{\circ}(t)$.

La risposta al quesito 2e cambia e l'affermazione è falsa. La funzione di trasferimento da $d(t)$ a $y(t)$ è uguale a quella da $y^{\circ}(t)$ a $y(t)$:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

L'uscita di regime diventa:

$$y_{\infty}(t) = |F(\jmath\omega)| \sin\left(\omega t + \measuredangle F(\jmath\omega)\right), \quad \omega \in [0.01, 0.1]$$

con

$$|F(\jmath\omega)| \simeq |F(\jmath\omega)|_{\simeq} = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |F(\jmath\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

Essendo $\omega_c = 10$, allora il disturbo passa invariato sull'uscita. Da notare che lo schema in Figura 3 è equivalente per quanto riguarda le funzioni di trasferimento allo schema con disturbo additivo sull'uscita $w(t)$ (come mostrato in Figura 4).

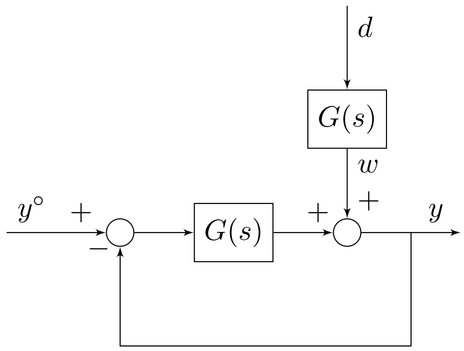

Figura 4: Schema equivalente allo schema in Figura 3.

$w_\infty(t)$ corrispondente a $d(t) = \sin(\omega t)$ è:

$$w_\infty(t) = |G(\jmath\omega)| \sin\left(\omega t + \measuredangle G(\jmath\omega)\right),$$

e ha quindi ampiezza riscalata rispetto a $d(t)$. La funzione di trasferimento da $w(t)$ a $y(t)$ è:

$$H(s) = \frac{1}{1 + G(s)}$$

e

$$|H(\jmath\omega)| \simeq \frac{1}{G(\jmath\omega)}, \quad \text{per } \omega \in [0.01, 0.1].$$

Se $\omega \in [0.01, 0.1]$, $w_\infty(t)$ ha ampiezza amplificata di un fattore $|G(\jmath\omega)|$ rispetto a quella di $d(t)$, e questo compensa l'attenuazione $1/|G(\jmath\omega)|$ che $w_\infty(t)$ subisce sull'uscita $y(t)$. Da ciò si perviene al risultato sopra che $d(t)$ passa invariato sull'uscita.

3 Progetto del controllore

Si consideri il sistema di controllo mostrato in Figura 5.

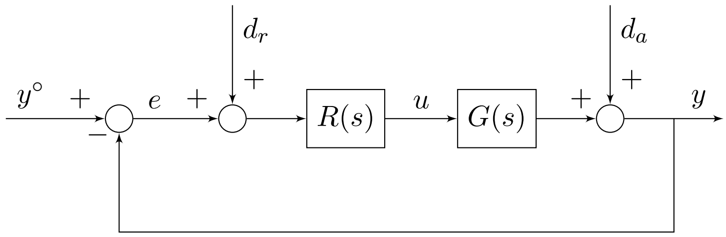

Figura 5: Schema di controllo.

$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{2s}$$

e i segnali indicati valgono:

$$\begin{aligned} y^\circ(t) &= 2\,\mathrm{sca}(t), \\ d_a(t) &= -0.1\,\mathrm{sca}(t), \\ d_r(t) &= A_r \sin(\omega_r t), \quad |A_r| < 10, \omega_r > 20. \end{aligned}$$

Determinare un regolatore $R(s)$ tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e che:

1. l'errore a transitorio esaurito prodotto da $y^\circ(t)$ e $d_a(t)$ sia nullo,
2. la pulsazione critica ω_c sia compresa tra 0.1 e 1rad/s,
3. il margine di fase φ_m sia di almeno 45°,
4. l'ampiezza dell'effetto asintoticamente prodotto dal disturbo $d_r(t)$ su $y(t)$ non superi 0.1.

Soluzione

Progetto statico Partiamo con il considerare il regolatore:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}.$$

Viene richiesto che l'errore a transitorio esaurito dovuto da $y^\circ(t)$ e da $d_a(t)$ sia nullo. Per cui:

- Consideriamo il contributo legato a $y^\circ(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)$:

$$\begin{aligned} e_{\infty,y^\circ} &= \lim_{s\to\infty} sE_{y^\circ}(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{2}{s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{2}{1+\dfrac{\mu_R}{s^{g_R}}\cdot\dfrac{0.5}{s}} = \lim_{s\to\infty} \frac{2s^{g_R+1}}{s^{g_R+1}+0.5\mu_R} \end{aligned}$$

  che è pari a 0 per $g_R \geq 0$, $\forall \mu_R$.

- Consideriamo il contributo legato a $d_a(t) = -0.1\,\mathrm{sca}(t)$:

$$\begin{aligned} e_{\infty,d_a} &= \lim_{s\to\infty} sE_{d_a}(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{-1}{1+L(s)}\frac{-0.1}{s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{0.1}{1+\dfrac{\mu_R}{s^{g_R}}\cdot\dfrac{0.5}{s}} = \lim_{s\to\infty} \frac{0.1s^{g_R+1}}{s^{g_R+1}+0.5\mu_R} \end{aligned}$$

  che è pari a 0 per $g_R \geq 0$, $\forall \mu_R$.

I vincoli di attenuazione del disturbo d_r si traducono in vincoli sulla $L(s)$. In particolare, la funzione di trasferimento da d_r a y è:

$$\frac{Y(s)}{D_r(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s)$$

per cui il vincolo si traduce come:

$$10|F(\jmath\omega_r)| \leq 0.1, \quad |F(\jmath\omega_r)| \leq 0.01, \quad \omega_r > 20$$

Dato che $|F(\jmath\omega)|$ si può approssimare in alta frequenza (dove agisce il disturbo e oltre ω_c) come $|L(\jmath\omega)|$, il vincolo diventa:

$$|L(\jmath\omega_r)| \leq 0.01, \quad |L(\jmath\omega_r)|_{\text{dB}} \leq -40\text{dB}, \quad \omega_r > 20.$$

Possiamo quindi selezionare $R_1(s) = 1$, tenendo presente che è possibile cambiare il valore di μ_R in fase di progetto dinamico.

Progetto dinamico Tracciamo il diagramma di Bode del modulo di $L_1(s) = R_1(s)G(s) = G(s)$ come mostrato in Figura 6

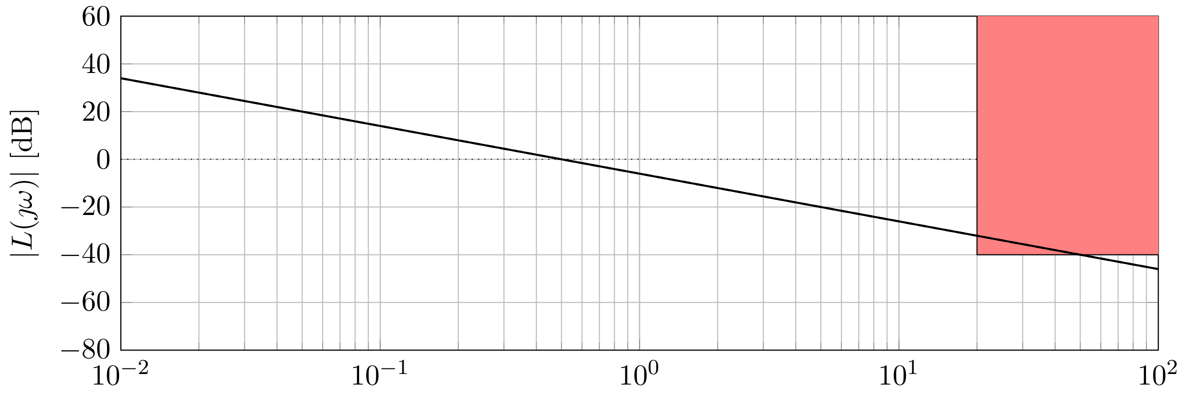

Figura 6: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $L_1(s)$.

in cui è evidente che il vincolo sull'attenuazione del disturbo d_r non è rispettato. Inoltre se calcolassimo il margine, osservando che $\omega_c = 0.5\mu_R = 0.5$ di fase otterremmo:

$$\varphi_c = -90° - 0.5 \cdot 0.5 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq -104°$$
$$\varphi_m = 180° - |-104°| \simeq 75°$$

che è sufficiente per le specifiche di progetto.

L'unica cosa, quindi che si deve quindi modificare è il guadagno del regolatore. Si può fare in modo, ad esempio che a $\omega = 20$, il diagramma di Bode di $L(s)$ passi esattamente in -40dB e calcolare quanto deve valere ω_c. Graficamente, si ottiene che la ω_c deve essere minore o uguale a 0.2. Volendo massimizzare la ω_c, possiamo quindi imporre che $\omega_c = 0.2$ che si ottiene quando $0.5\mu_R = 0.2$, ossia quando $\mu_R = 0.4$.

Il margine di fase è quindi:

$$\varphi_c = -90° - 0.5 \cdot 0.2 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq -95°$$
$$\varphi_m = 180° - |-95°| \simeq 84°$$

che è più che sufficiente. Tutti i vincoli di progetto sono quindi rispettati e il regolatore ottenuto è:

$$R(s) = 0.4.$$

4 Controllore digitale

Dato il sistema di controllo a tempo continuo in retroazione come mostrato in Figura 7

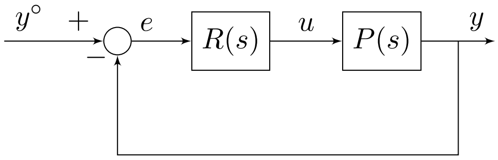

Figura 7: Schema di controllo.

in cui il processo e il regolatore sono rispettivamente descritti dalle funzioni di trasferimento:

$$P(s) = \frac{0.5}{s(1+0.01s)}, \quad R(s) = 2 \cdot \frac{1+10s}{s}$$

e dovendo realizzare il regolatore con tecnologia digitale:

1. Determinare il tempo di campionamento T_s in modo che la pulsazione di campionamento ω_s sia superiore di almeno una decade alla pulsazione critica ω_c, che il decremento del margine di fase φ_m dovuto a:
   - Campionamento,
   - Tempo di calcolo $\tau_{\text{comp}} = 50\ \mu$s,
   - Filtro antialiasing con banda pari a 10 volte la banda del sistema in anello chiuso,

   non ecceda 9°.

2. Calcolare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ del regolatore a tempo discreto ottenuto da $R(s)$ col metodo di Eulero esplicito e con il valore di T_s determinato.

3. Esprimere la corrispondente legge di controllo a tempo discreto.

Soluzione

1. Per determinare il tempo di campionamento T_s bisogna prima calcolare quanto vale la pulsazione di taglio ω_c. Per questo si possono tracciare i diagrammi di bode di

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)P(s) &= 2 \cdot \frac{1+10s}{s} \cdot \frac{0.5}{s(1+0.01s)} \\ &= \frac{1+10s}{s^2(1+0.01s)} \end{aligned}$$

   come mostrato in Figura 8.

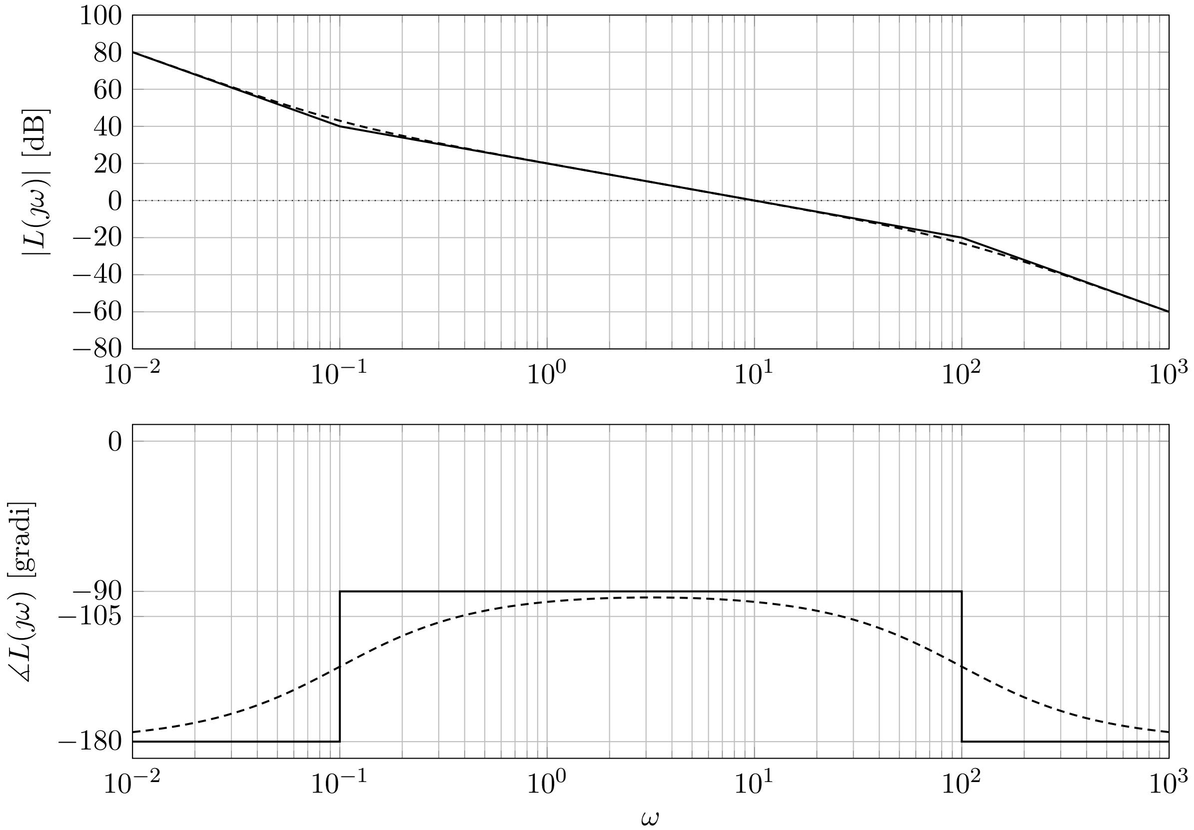

Figura 8: Diagramma di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Dal grafico è possibile vedere che $\omega_c \simeq 10$. Il margine di fase φ_m è maggiore di 75°.

È quindi ora possibile calcolare il contributo di decremento di fase associato a:

- **Campionamento**, che contribuisce come un ritardo $e^{-sT_s/2}$ sulla funzione d'anello:

$$\Delta\varphi_{m,s} = -\frac{T_s}{2}\omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{900}{\pi}T_s$$

- **Tempo di calcolo**, che contribuisce come un ritardo $e^{-s\tau_{\text{comp}}}$ sulla funzione d'anello:

$$\Delta\varphi_{m,\text{comp}} = -\tau_{\text{comp}}\omega_c \cdot \frac{180}{\pi} = -\frac{0.09}{\pi} \simeq -0.02865°$$

- **Filtro antialiasing**, che contribuisce come una funzione di trasferimento in serie a $L(s)$ con guadagno unitario e un polo a $\omega_a = 10\omega_c$, per cui si ha che il contributo di fase a ω_c è:

$$\Delta\varphi_{m,a} = -\arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right) = -\arctan(0.1) = -5.711°$$

Dato che lo sfasamento totale non deve eccedere $\overline{\Delta\varphi_m} = -9°$, ed è composto dalla somma dei tre contributi, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta\varphi_m} \leq \Delta\varphi_{m,s} + \Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a}\\
&\Delta\varphi_{m,s} \geq \overline{\Delta\varphi_m} - (\Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a})\\
&-\frac{900}{\pi}T_s \geq -9° - (-0.02865° - 5.711°)\\
&T_s \leq \frac{3.2603}{900}\pi \simeq 0.0114
\end{aligned}$$

Possiamo selezionare, ad esempio, $T_s = 0.001$ s. Il decremento di margine di fase è quindi:

$$\Delta\varphi_m = -\frac{0.001}{2} \cdot 10 \cdot \frac{180}{\pi} + \Delta\varphi_{m,\text{comp}} + \Delta\varphi_{m,a} = -6.0261^\circ$$

Si verifica inoltre che $\omega_s = 6283$ rad/s, e dunque $\omega_s > 10\omega_c$, come richiesto.

2. Per calcolare la funzione di trasferimento $R^*(z)$ a partire da $R(s)$ con il metodo di Eulero esplicito, basta fare la seguente sostituzione nell'espressione di $R(s)$:

$$s = \frac{z-1}{T_s} = 1000(z-1).$$

Quindi:

$$\begin{aligned} R^*(z) = R(s)|_{s=1000(z-1)} &= 2 \cdot \frac{1 + 10 \cdot (1000(z-1))}{1000(z-1)} \\ &= 2 \cdot \frac{1 + 10000z - 10000}{1000(z-1)} = 2 \cdot \frac{10z - 9999/1000}{z-1} \end{aligned}$$

3. La corrispondente legge di controllo a tempo discreto è:

$$\begin{aligned} R^*(z) = \frac{U(z)}{E(z)} &= 2 \cdot \frac{10z - 9999/1000}{z-1} \\ U(z)(z-1) &= 2E(z)(10z - 9999/1000) \end{aligned}$$

che può essere antitrasformata come:

$$\begin{aligned} u(k+1) - u(k) &= 20e(k+1) - 9999/500e(k) \\ u(k+1) &= u(k) + 20e(k+1) - 9999/500e(k) \\ u(k) &= u(k-1) + 20e(k) - 9999/500e(k-1) \end{aligned}$$