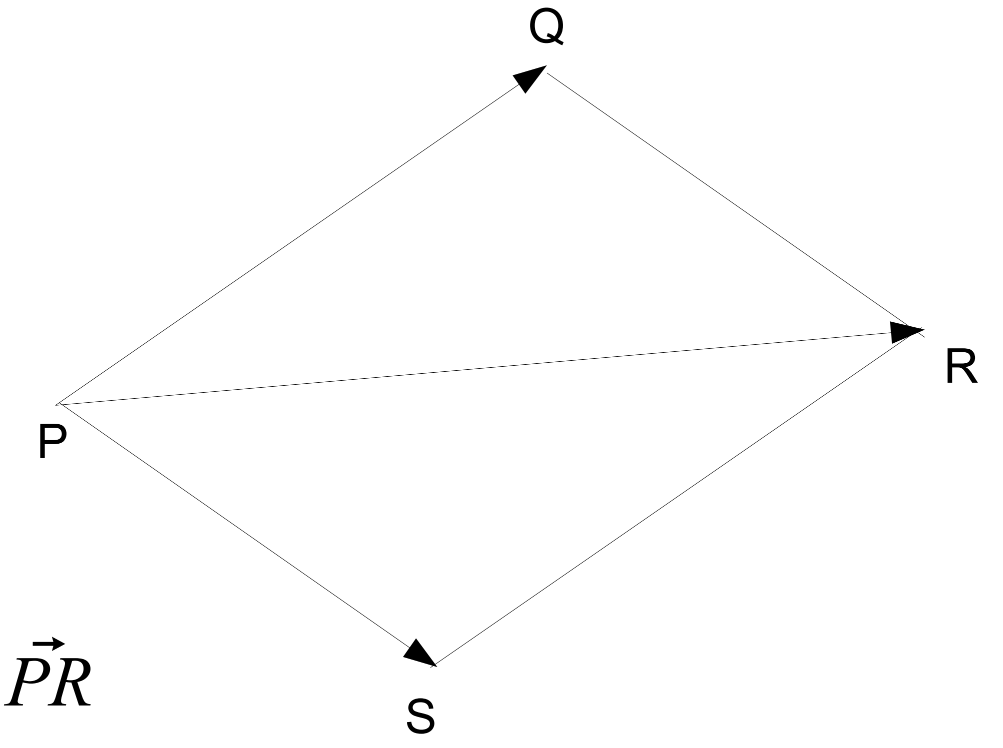
Lezione 5

Spazi vettoriali

Regola del parallelogramma

- Un modo equivalente di esprimere la legge di Galileo è la regola del parallelogramma:



- $\vec{PQ}+\vec{PS}=\vec{PR}$

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità

Esercizio

- Verificare che $\vec{QP} = -\vec{PQ}$

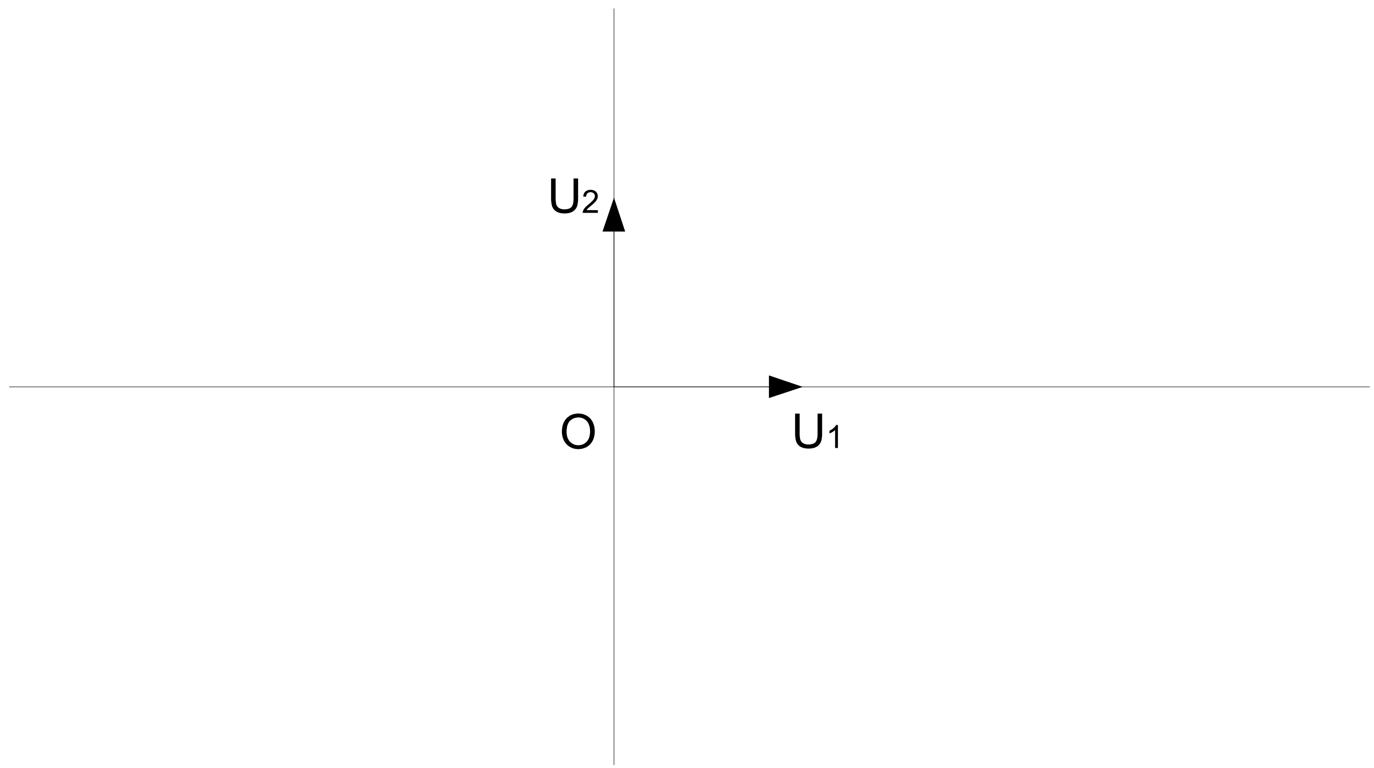
- Soluzione: per la legge di Galileo

$$\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec{0}$$

Quindi $\vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{0}$ e quindi $\vec{PQ} = -\vec{QP}$

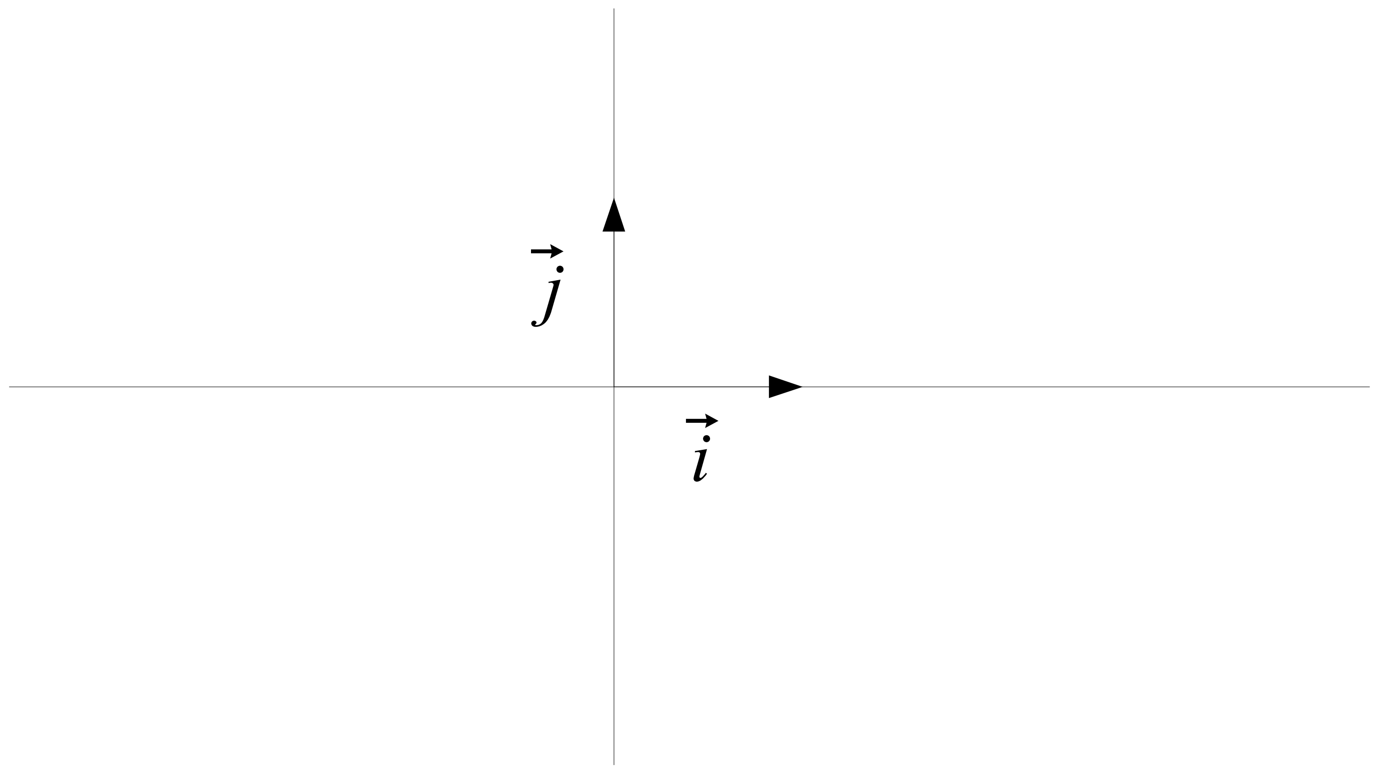
Sistemi di assi cartesiani

- Dare un sistema di assi cartesiani nel piano equivale a fissare un punto O e i vettori $\vec{OU}_1, \ \vec{OU}_2$.



Versori degli assi cartesiani

- Di solito i vettori $\vec{OU}_1, \ \vec{OU}_2$ si indicano rispettivamente con $\vec{i}\,, \vec{j}$ e sono detti versori degli assi cartesiani.



Definizione equivalente di sistema di assi cartesiani

- Dare un sistema di assi cartesiani è equivalente a fissare un punto O e due vettori liberi $\vec{i}, \vec{j}$ di lunghezza 1 e ortogonali tra loro.

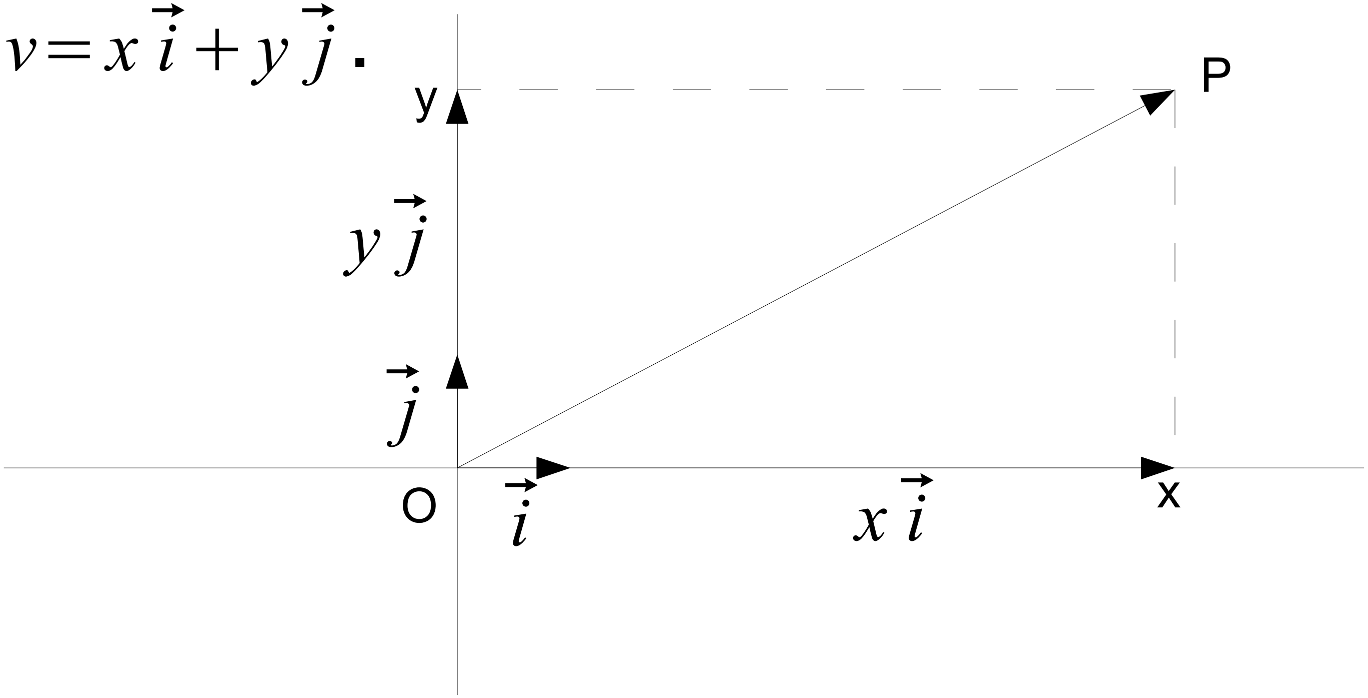
- Il sistema di assi cartesiani individuato da O e $\vec{i}, \vec{j}$ lo si indica come

$$S=\left(O,\{\vec{i},\vec{j}\}\right)$$

Coordinate di un vettore

- Se v è un vettore allora possiamo scrivere $v = \vec{OP}$. La coppia (x,y) delle coordinate di P è detta 2-vettore delle coordinate di v.

Si nota che $v = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.



Coordinate e operazioni

- Se (x_1, y_1) è il 2-vettore delle coordinate di v_1 e (x_2, y_2) è il 2-vettore delle coordinate di v_2 allora il 2-vettore delle coordinate di v_1+v_2 è (x_1+x_2, y_1+y_2).
- Se (x, y) è il 2-vettore delle coordinate di v allora (tx, ty) è il 2-vettore delle coordinate di tv.

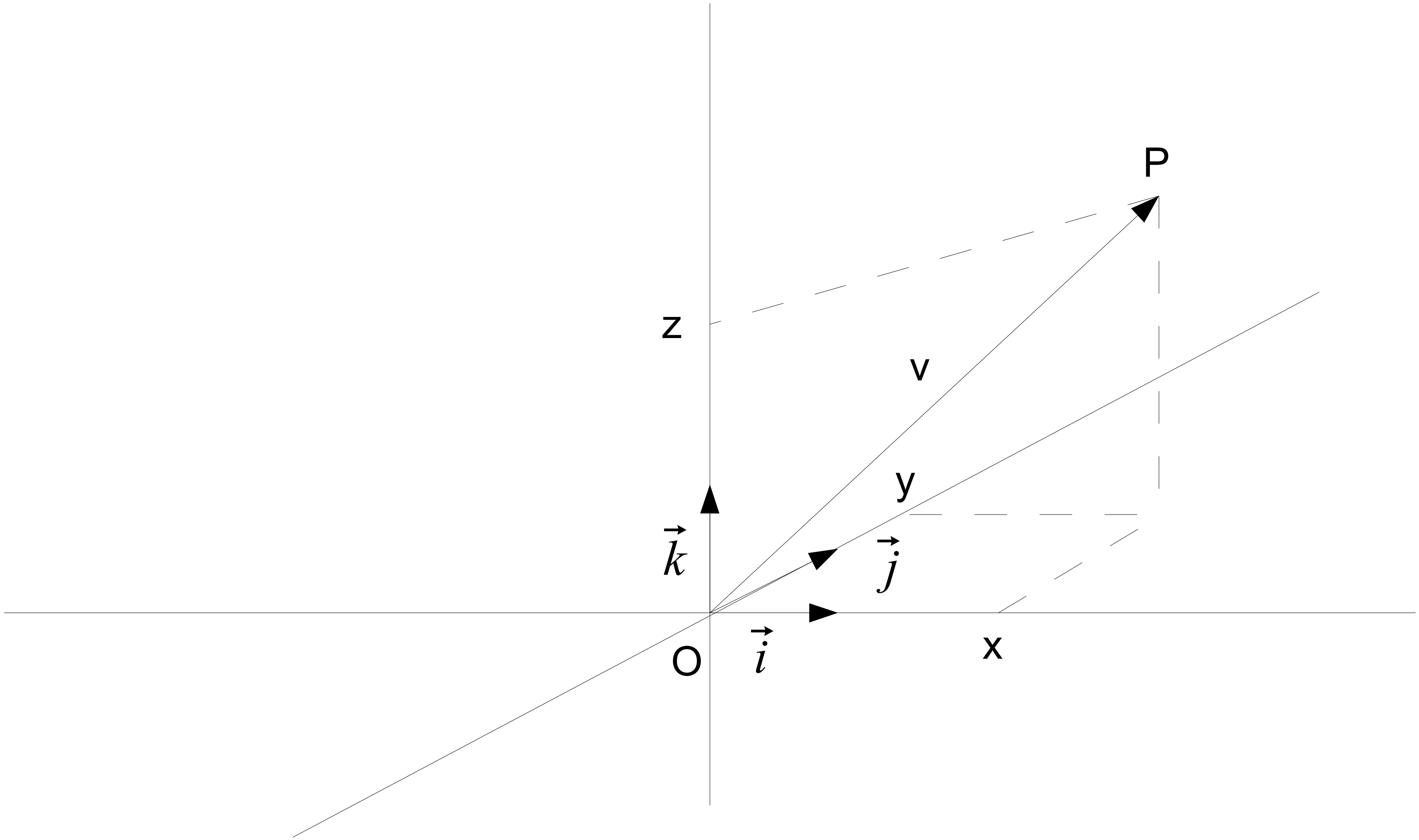
Osservazione semplice ma importante

- Siano a il 2-vettore delle coordinate del vettore libero v e b il 2-vettore delle coordinate del vettore libero w
- Il 2-vettore delle coordinate di v+w è a+b.
- Il 2-vettore delle coordinate di tv è ta.

Vettori nello spazio

- Quanto visto per i vettori nel piano vale anche per i vettori nello spazio, basta aggiungere una coordinata:
  - Si hanno tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
  - Il 3-vettore delle coordinate di $v = \vec{OP}$ è la tripla (x,y,z) delle coordinate di P.
  - Si ha che $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Vettori nello spazio



Osservazione semplice ma importante

- Siano a il 3-vettore delle coordinate del vettore libero v e b il 3-vettore delle coordinate del vettore libero w
- Il 3-vettore delle coordinate di v+w è a+b.
- Il 3-vettore delle coordinate di tv è ta.

Definizione di spazio vettoriale (G. Peano – 1888)

Uno spazio vettoriale è un insieme V su cui è definita

- un’operazione di somma che associa a due elementi v,w di un elemento v+w di V
- un’operazione di prodotto per uno scalare che associa ad un numero t e ad un elemento v di V un elemento tv di V

Queste due operazioni devono inoltre verificare le seguenti proprietà:

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità

Giuseppe Peano

Nato il 27 Agosto 1858 a Cuneo

Morto il 20 Aprile 1932 a Torino

Esempi

- L’insieme dei vettori liberi nel piano o nello spazio.
- L'insieme di tutti gli n-vettori (che di solito si indica con $\mathbb{R}^n$)
- L’insieme delle matrici nxm (che di solito si indica con M(nxm, $\mathbb{R}$) o $\mathbb{R}^{n\times m}$)
- L’insieme dei polinomi (che di solito si indica con $\mathbb{R}[x]$)
- L’insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n (che di solito si indica con $\mathbb{R}_n[x]$)

Sottospazi

Un sottospazio di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme non vuoto W di V tale che

- Se v,w sono in W allora v+w è in W
- Se v è in W e t è un numero allora tv è in W

Esempi

- Esempi banali: se V è uno spazio vettoriale allora V è un sottospazio di se stesso e $\{\vec{0}\}$ è un sottospazio di V.
- Esempio importante: se $AX = \vec{0}$ è un sistema **omogeneo** di n equazioni e m incognite, allora l'insieme delle soluzioni Sol(A,$\vec{0}$) è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$. (Legge di sovrapposizione).

Altri esempi

- L'insieme $\{(x, y) | ax + by = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.
- L'insieme $\{(x, y, z) | ax + by + cz = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
- Sono entrambi sottospazi perchè sono entrambi l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo.

Esercizio

- Verificare se $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Osservazioni

- Il vettore $\vec{0}$ appartiene ad ogni sottospazio, quindi se in un insieme W non c'è $\vec{0}$ allora W non può essere un sottospazio.
- Dimostrazione: se W è sottospazio allora non è vuoto. Sia v un elemento di W, allora (-1)v è in W e quindi $v+(-1)v=\vec{0}$ è in W.
- Se W è un sottospazio di V, allora, con la somma e il prodotto per uno scalare indotte da V, W è uno spazio vettoriale.
- Ne segue che ogni proprietà che vale per gli spazi vettoriali vale anche per tutti i sottospazi.

Esercizio

- Quali dei seguenti insiemi è un sottospazio?

1. $\{(x, y) | 2x - y = 1\}$.
2. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.
3. $\{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$.
4. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$.
5. $\{(t, 2t) | t \in R\}$.

Soluzione

1. non è sottospazio perchè $(0,0) \notin \{(x, y) | 2x - y = 1\}$.
2. non è sottospazio perchè $(0,0) \notin \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.
3. $\{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$ non è sottospazio perchè non è chiuso rispetto alla somma: (1,1) e (1,-1) entrambi appartengono a $\{(x, y) | x^2 - y^2 = 0\}$, ma non la loro somma (2,0).
4. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$ è sottospazio perchè

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\} = \{\vec{0}\}$$

Soluzione 5

- 5. $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$ è sottospazio. Per la verifica utilizziamo la definizione di sottospazio: dobbiamo verificare che
- a) $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$ è non vuoto: $(1,2)\in\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$
- b) è chiuso rispetto alla somma: se (t,2t) e (s,2s) sono in $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$ allora la loro somma (t+s, 2(t+s)) sta ancora in $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$
- c) è chiuso rispetto al prodotto: se (t,2t) è in $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$ e s è un numero allora s(t,2t)=(st, 2(st)) sta ancora in $\{(t,2t)\,|\,t\in R\}$

Combinazioni lineari

- In uno spazio vettoriale V, si dice che il vettore v è una combinazione lineare dei vettori v_1,v_2, …,v_k se

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k$$

con a_1,a_2,...,a_k numeri reali. Questi numeri vengono chiamati coefficienti della combinazione lineare.

Esempio

(1,2,-1,4) è combinazione lineare di

(1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,0,0,1) infatti

(1,2,-1,4)=2(1,1,0,1)-(1,0,1,1)+3(0,0,0,1)

(3,2,1,0) non è combinazione lineare di

(1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1) infatti ogni combinazione lineare di (1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,1,0,1) deve avere la terza componente nulla. Siccome le terza componente di (3,2,1,0) è1 , (3,2,1,0) non può essere combinazione lineare.

Esercizio

- Verificare se (1,2,2,1) è combinazione lineare di (1,0,-3,1), (1,1,0,0), (1,4,-1,2)
- Soluzione: dobbiamo verificare se esistono coefficienti a_1, a_2, a_3 tali che

$$(1,2,2,1)=a_1(1,0,-3,1)+a_2(1,1,0,0)+a_3(1,4,-1,2)$$

ovvero $(1,2,2,1)=(a_1+a_2+a_3, a_2+4a_3, -3a_1-a_3, a_1+2a_3)$

Questa equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=1 \\ a_2+4a_3=2 \\ -3a_1-a_3=2 \\ a_1+2a_3=1 \end{cases}$$

Continuazione soluzione

- Risolviamo il sistema: se il sistema ha soluzioni allora il vettore è combinazione lineare, altrimenti no. Riduciamo la matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Siccome l'ultimo pivot è in ultima colonna, il sistema non ha soluzioni e quindi il vettore non è combinazione lineare.