Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 27/07/2018

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

(1) Si consideri il lancio di due dadi bilanciati a 6 facce e gli eventi $A =\{\text{Somma} \leq 7\}$, $B =\{\text{Somma pari}\}$, e $C =\{\text{Somma multiplo di 5}\}$.

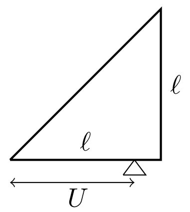
(a) Calcolare le probabilità degli eventi

(b) Gli eventi A e B sono indipendenti?

(c) Sapendo che l'evento C si è verificato, gli eventi A e B sono indipendenti?

(2) Si consideri l'oggetto in figura: la forma è un triangolo isoscele rettangolo di lato ℓ ed è composto da un materiale di densità uniforme.

L'oggetto viene appoggiato su un cuneo posto ad una distanza U dal vertice sinistro, dove U è una v.a. uniformemente distribuita tra 0 e ℓ. Calcolare la probabilità che l'oggetto triangolare, soggetto alla sola forza di gravità, cada alla sinistra del cuneo. *Saranno contate valide solo le giustificazioni ottenute tramite il calcolo delle probabilità.*



(3) Un amico vi promette di regalarvi 10 € dopo che voi abbiate giocato un totale di 100 € alla Roulette. Dopo aver ragionato un po', vi convincete che la miglior strategia sia di giocare sempre la puntata minima (1 €) sul nero.

- Qual è la probabilità che alla fine del gioco abbiate guadagnato qualcosa? Si usi l'approssimazione Gaussiana per trovare il valore numerico.

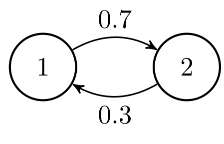
Per ogni euro puntato si vincono 2 € *se esce il nero e si perde la puntata altrimenti. Si assuma una Roulette con numeri da* 1 *a* 36 *e con un unico* 0*, che è sempre perdente.*

(4) Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. Si consideri la successione aleatoria degli stati visitati:

(a) qual è la probabilità che la sequenza inizi con una serie di cinque '1'? (incluso lo stato '1' al tempo 0)

(b) Trovare la distribuzione asintotica della catena.

(c) Qual è la probabilità asintotica di osservare una serie di cinque '1'?



(5) I bus arrivano alla fermata (e partono istantaneamente) secondo un processo di Poisson con intensità di 10 bus all'ora. I bus sono pieni e non accettano altri passeggeri, indipendentemente dagli altri bus, con probabilità 0.3. Un signore arriva alla fermata del bus in un istante di tempo casuale. Qual è il tempo medio che il signore deve attendere prima di poter prendere il primo bus non pieno?

(6) Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo che genera la sequenza di stati campionati secondo la legge Markoviana illustrata nella figura dell'esercizio 4. Si inizializzi il processo partendo dallo stato '1'.

Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 27/07/2018 – Compito II

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

(1) Sia X un processo Gaussiano con media nulla e funzione di autocorrelazione $R_{XX}(\tau)$. Determinare se il processo Y con $Y(t) = X(t) - X(t-1)$ è stazionario in senso lato.

(2) Si vuole trasmettere un segnale X con legge Gaussiana $\mathcal{N}(0,4)$. Al ricevitore sono presenti due antenne la cui uscita è modellizzata come $Y_1 = X + N_1$ e $Y_2 = X + N_2$, dove $N_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $N_2 \sim \mathcal{N}(0,2)$ e N_1, N_2, X sono indipendenti. Trovare lo stimatore lineare LMS di X basato sulle osservazioni Y_1 e Y_2.

Suggerimento: lo stimatore sarà del tipo $aY_1 + bY_2$ dove a e b sono costanti da calcolare opportunamente.

(3) Un amico vi consegna 10 € per giocare alla Roulette, ma vi vengono regalati solo se il totale delle puntate è di almeno 100 € o se perdete tutto. Dopo aver ragionato un po', vi convincete che la miglior strategia sia di puntare 100 volte sul nero con la puntata minima (1 €), ed eventualmente fermarvi se perdete tutto il capitale.

(a) Si usi una catena di Markov per rappresentare l'evoluzione del capitale nel tempo. Individuare gli stati della catena, le probabilità di transizione, e lo stato iniziale.

(b) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti

(c) Individuare l'evento che serve per calcolare la probabilità di terminare le 100 puntate con un guadagno.

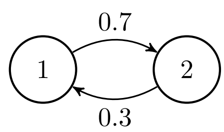
Per ogni euro puntato si vincono 2 € se esce il nero e si perde la puntata altrimenti. Si assuma una Roulette con numeri da 1 a 36 e con un unico 0, che è sempre perdente.

(4) Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0. Si consideri la successione aleatoria degli stati visitati:

(a) qual è la probabilità che la sequenza inizi con una serie di cinque '1'? (incluso lo stato '1' al tempo 0)

(b) Trovare la distribuzione asintotica della catena.

(c) Qual è la probabilità asintotica di osservare una serie di cinque '1'?



(5) I bus arrivano alla fermata (e partono istantaneamente) secondo un processo di Poisson con intensità di 10 bus all'ora. I bus sono pieni e non accettano altri passeggeri, indipendentemente dagli altri bus, con probabilità 0.3. Un signore arriva alla fermata del bus in un istante di tempo casuale. Qual è il tempo medio che il signore deve attendere prima di poter prendere il primo bus non pieno?

(6) Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, descrivere un algoritmo che genera la sequenza di stati campionati secondo la legge Markoviana illustrata nella figura dell'esercizio 4. Si inizializzi il processo partendo dallo stato '1'.

Soluzioni

Problema 1

Tutti gli esiti della somma del lancio di due dadi a 6 facce possono essere organizzati in una tabella a doppia entrata 6×6. Ogni elemento della tabella ha probabilità $1/36$ di verificarsi.

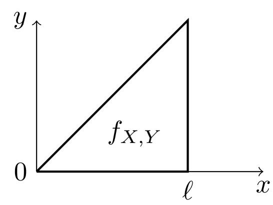
1. Sull'anti-diagonale principale di questa tabella la somma sarà sempre 7 e tutti gli elementi che stanno sopra questa diagonale saranno minori di 7. Dunque si ha che $\Pr(A) = \frac{18+3}{36} = \frac{7}{12}$. Andando sempre a contare i casi favorevoli sulla tabella si ottengono $\Pr(B) = \frac{18}{36} = 0.5$ e $\Pr(C) = \frac{7}{36}$.

2. La probabilità congiunta è $\Pr(A, B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, mentre il prodotto delle probabilità degli eventi singoli è $\Pr(A)\Pr(B) = \frac{7}{24} \neq \frac{1}{4}$. Dunque gli eventi A e B non sono indipendenti.

3. Condizioniamo tutto lo spazio di probabilità all'evento C. La probabilità congiunta è $\Pr(A, B|C) = 0$ perché l'unica somma ≤ 7 e multiplo di 5 è proprio 5, che non soddisfa l'evento B. Le probabilità condizionate sono $\Pr(A|C) = \frac{4}{7}$, e $\Pr(B|C) = \frac{3}{7}$. Anche in questo caso si vede che gli eventi A e B non sono indipendenti condizionatamente all'evento C.

Problema 2

L'oggetto triangolare cadrà alla sinistra del cuneo se il suo baricentro, di coordinate $B = (b_x, b_y)$, si trova alla sinistra del cuneo. Formalmente, l'evento si scrive come $\{b_x \leq U\}$. Il baricentro si può calcolare tramite il formalismo del calcolo delle probabilità, ricordandosi l'interpretazione del valore atteso come baricentro della distribuzione di probabilità. Siccome l'oggetto ha densità uniforme, allora anche la densità di probabilità congiunta $f_{X,Y}$ sarà uniforme dentro la regione triangolare.



Questo permette di calcolare:

$$b_x = \mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X|Y]] = \mathsf{E}[\frac{\ell + Y}{2}] = \frac{\ell}{2} + \frac{\mathsf{E}[Y]}{2} = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell - \mathsf{E}[X]}{2}$$

dove abbiamo usato, in ordine, (i) la legge delle aspettazioni iterate, (ii) il fatto che $f_{X|Y}$ è uniforme nell'intervallo (y, ℓ), dando così $\mathsf{E}[X|Y = y] = \frac{y+\ell}{2}$, (iii) per ragioni di simmetria della figura $\mathsf{E}[X] = \ell - \mathsf{E}[Y]$.

Risolvendo l'equazione di primo grado nell'incognita $\mathsf{E}[X]$ si ottiene $\mathsf{E}[X] = \frac{2}{3}\ell$. Questo è un risultato noto in geometria, ma solo un'argomentazione che coinvolge il calcolo delle probabilità dà punteggio valido per l'esame.

Si conclude che $\Pr(b_x \leq U) = \Pr(\frac{2}{3}\ell \leq U) = \frac{1}{3}$.

Problema 3

La strategia dice di fare 100 giocate sul nero. Tutte le giocate rappresentano prove indipendenti e identiche X_i, $i = 1, \ldots, 100$, con probabilità di successo $p = 18/37$. I valori di X_i sono binari, dove 1 rappresenta il successo e 0 l'insuccesso. Il bilancio finale si può scrivere come:

$$T = 2\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 + 10,$$

dove mettiamo in evidenza $\mathsf{E}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100 \cdot \frac{18}{37}$ e $\mathsf{Var}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100 \cdot \frac{18}{37}\frac{19}{37}$. La probabilità di avere un bilancio positivo è

$$\Pr(T \geq 0) = \Pr\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 45\right) = \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{100 \cdot \frac{18}{37}\frac{19}{37}}} \geq \frac{45 - 100 \cdot \frac{18}{37}}{\sqrt{100 \cdot \frac{18}{37}\frac{19}{37}}}\right)$$
$$\approx \Pr(Z \geq -0.73) = \Pr(Z \leq 0.73) = \Phi(0.73) \approx 0.7673$$

dove abbiamo usato l'approssimazione Gaussiana della Binomiale.

Problema 4

Indichiamo con X_i lo stato della catena al tempo i. La probabilità di avere la sequenza '11111' partendo dal tempo zero è:

$$\Pr(X_0 = X_1 = \ldots = X_4 = 1) = \Pr(X_0 = 1)(p_{1,1})^4 = (1 - 0.7)^4 \approx 8.1 \cdot 10^{-3}.$$

La distribuzione asintotica della catena è $\pi_1 = 0.3$ e $\pi_2 = 0.7$. La probabilità asintotica di osservare la sequenza '11111' è

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+4} = 1) &= \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1)(p_{1,1})^4 \qquad (1)\\ &= \pi_1 \cdot (p_{1,1})^4 = 0.3 \cdot (1-0.7)^4 \approx 2.4 \cdot 10^{-3}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Problema 5

Il signore è interessato solamente ai bus non pieni, quindi bisogna considerare uno splitting del processo originale di Poisson. L'intensità dei bus che accettano passeggeri è dunque $10 \cdot (1 - 0.3) = 7$ bus all'ora. Il tempo di attesa al primo bus utile è dunque una v.a. esponenziale di parametro 7, il cui valor medio è $1/7$ di ora, cioè circa 8 minuti e mezzo.

Problema 6

L'algoritmo deve mantenere una memoria che è lo stato della catena Markoviana, e generare il numero casuale che decide se saltare all'altro stato o meno.

1. Inizializza $X_0 = 1$ e $i = 1$.
2. Genera $U_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Non cambiare stato se accadono gli eventi $\{U_i \leq 0.3, X_{i-1} = 1\}$ oppure $\{U_i \leq 0.7, X_{i-1} = 2\}$, altrimenti cambia lo stato.
3. $i \leftarrow i + 1$, e torna al punto 2.

Soluzioni

Problema 1

Per determinare se il processo Y è stazionario in senso lato bisogna controllare se i momenti del primo e secondo ordine sono stazionari. Per il valor medio si ha

$$\mathsf{E}[Y(t)] = \mathsf{E}[X(t) - X(t-1)] = 0$$

mentre per la funzione di autocorrelazione si ha

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t_1, t_2) &= \mathsf{E}[Y(t_1)Y(t_2)] = \mathsf{E}[(X(t_1) - X(t_1-1))(X(t_2) - X(t_2-1))] \\
&= \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2)] - \mathsf{E}[X(t_1)X(t_2-1)] - \mathsf{E}[X(t_1-1)X(t_2)] + \mathsf{E}[X(t_1-1)X(t_2-1)] \\
&= 2R_{XX}(t_1-t_2) - R_{XX}(t_1-t_2+1) - R_{XX}(t_1-t_2-1) \\
&= R_{YY}(t_1-t_2).
\end{aligned}$$

Siccome la funzione di autocorrelazione di Y dipende solo dalla differenza degli istanti di tempo, e la media è sempre nulla, il processo Y è stazionario in senso lato.

Problema 2

Per definizione, lo stimatore LMS è quello con minimo errore quadratico medio. Calcoliamo il MSE parametricamente in a e b:

$$\mathsf{E}[(X - aY_1 - bY_2)^2] = \mathsf{E}[X^2] + a^2\mathsf{E}[(Y_1)^2] + b^2\mathsf{E}[(Y_2)^2] - 2a\mathsf{E}[XY_1] - 2b\mathsf{E}[XY_2] + 2ab\mathsf{E}[Y_1Y_2]$$

e per minimizzarlo calcoliamo le derivate e imponiamole a zero:

$$\begin{cases} 2a\mathsf{E}[(Y_1)^2] - 2\mathsf{E}[XY_1] + 2b\mathsf{E}[Y_1Y_2] \stackrel{!}{=} 0 \\ 2b\mathsf{E}[(Y_2)^2] - 2\mathsf{E}[XY_2] + 2a\mathsf{E}[Y_1Y_2] \stackrel{!}{=} 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$a = \frac{\mathsf{E}[Y_1Y_2]\mathsf{E}[XY_2] - \mathsf{E}[XY_1]\mathsf{E}[(Y_2)^2]}{\mathsf{E}[Y_1Y_2]^2 - \mathsf{E}[(Y_1)^2]\mathsf{E}[(Y_2)^2]}, \qquad b = \frac{\mathsf{E}[XY_1]\mathsf{E}[Y_1Y_2] - \mathsf{E}[(Y_1)^2]\mathsf{E}[XY_2]}{\mathsf{E}[Y_1Y_2]^2 - \mathsf{E}[(Y_1)^2]\mathsf{E}[(Y_2)^2]}.$$

Siccome tutte le variabili in gioco sono Gaussiane, e le relazioni sono lineari, allora anche Y_1 e Y_2 sono Gaussiane. Inoltre siccome la media è nulla, varianza e momento quadrato sono la stessa cosa. Si passa a valutare tutti i valori attesi:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[(Y_1)^2] &= \mathsf{Var}[Y_1] = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[N_1] = 4 + 1 = 5 \\
\mathsf{E}[(Y_2)^2] &= \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[N_2] = 4 + 2 = 6 \\
\mathsf{E}[Y_1Y_2] &= \mathsf{E}[(X+N_1)(X+N_2)] = \mathsf{E}[X^2] = 4 \\
\mathsf{E}[XY_1] &= \mathsf{E}[X^2] = 4 \\
\mathsf{E}[XY_2] &= \mathsf{E}[X^2] = 4
\end{aligned}$$

che danno

$$a = \frac{4}{7}, \qquad b = \frac{2}{7}.$$

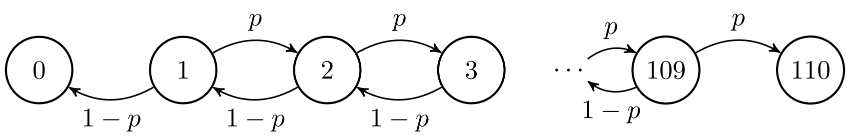
Dunque lo stimatore lineare LMS di X è $\widehat{X}_{\text{Lin}} = \frac{4Y_1 + 2Y_2}{7}$.

Problema 3

La strategia dice di fare 100 giocate sul nero. Tutte le giocate rappresentano prove indipendenti e identiche con probabilità di successo $p = 18/37$. Se indichiamo con C_i il capitale al tempo i, allora abbiamo $C_0 = 10$ e poi il capitale dopo la prima giocata può salire di 1 € (se c'è una vincita) o scendere di altrettanto (se c'è una perdita). Quindi in 100 puntate il capitale può oscillare tra 0 e 110. Ad ogni stato della catena (tranne gli estremi) si può salire di 1 con probabilità p oppure scendere di 1 con probabilità $1-p$.

Gli stati 0 e 110 sono ricorrenti, mentre tutti gli altri sono transienti.

Alla fine delle puntate si ha un guadagno solo se non ci si trova nello stato 0: $\Pr(C_{100} > 0) = 1 - \Pr(C_{100} = 0)$.



Problema 4

Indichiamo con X_i lo stato della catena al tempo i. La probabilità di avere la sequenza '11111' partendo dal tempo zero è:

$$\Pr(X_0 = X_1 = \ldots = X_4 = 1) = \Pr(X_0 = 1)(p_{1,1})^4 = (1 - 0.7)^4 \approx 8.1 \cdot 10^{-3}.$$

La distribuzione asintotica della catena è $\pi_1 = 0.3$ e $\pi_2 = 0.7$. La probabilità asintotica di osservare la sequenza '11111' è

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+4} = 1) = \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1)(p_{1,1})^4 \tag{3}$$
$$= \pi_1 \cdot (p_{1,1})^4 = 0.3 \cdot (1 - 0.7)^4 \approx 2.4 \cdot 10^{-3}. \tag{4}$$

Problema 5

Il signore è interessato solamente ai bus non pieni, quindi bisogna considerare uno splitting del processo originale di Poisson. L'intensità dei bus che accettano passeggeri è dunque $10 \cdot (1 - 0.3) = 7$ bus all'ora. Il tempo di attesa al primo bus utile è dunque una v.a. esponenziale di parametro 7, il cui valor medio è $1/7$ di ora, cioè circa 8 minuti e mezzo.

Problema 6

L'algoritmo deve mantenere una memoria che è lo stato della catena Markoviana, e generare il numero casuale che decide se saltare all'altro stato o meno.

1. Inizializza $X_0 = 1$ e $i = 1$.
2. Genera $U_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Non cambiare stato se accadono gli eventi $\{U_i \leq 0.3, X_{i-1} = 1\}$ oppure $\{U_i \leq 0.7, X_{i-1} = 2\}$, altrimenti cambia lo stato.
3. $i \leftarrow i + 1$, e torna al punto 2.