Esercitazione 09: Prestazioni dei sistemi di controllo

13 maggio 2024 (3h)

Fondamenti di Automatica
Prof. M. Farina
Responsabile delle esercitazioni: Daniele Ravasio

Queste dispense sono state scritte e redatte dal Prof. Alessandro Papadopoulos, Mälardalen University e successivamente in parte modificate e completate.

Richiami di teoria

Si consideri il sistema di controllo in Figura 1 dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema da controllare, mentre $R(s)$ è la funzione di trasferimento del controllore. Si supponga che gli eventuali autovalori nascosti del sistema con funzione di trasferimento $L(s)$ siano tutti a parte reale strettamente negativa, cioè che non vi siano cancellazioni non lecite tra $R(s)$ e $G(s)$.
Il segnale di riferimento $y^\circ(t)$ rappresenta l'andamento desiderato per la variabile di uscita $y(t)$, $d(t)$ è il disturbo, mentre $n(t)$ è l'errore di misura.

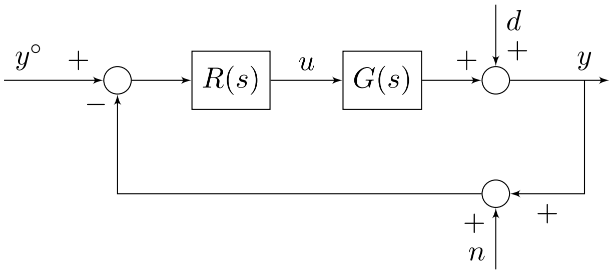

Figura 1: Schema di controllo di riferimento con indicate le funzioni di trasferimento del controllore e del sistema da controllare.

Si definisce l'errore di controllo $e(t) = y^\circ(t) - y(t)$. Definendo $\mathcal{L}$ l'operatore *trasformata di Laplace*, si definiscono $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, $E(s) = \mathcal{L}(e(t))$, $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$, $Y^\circ(s) = \mathcal{L}(y^\circ(t))$, $D(s) = \mathcal{L}(d(t))$, $N(s) = \mathcal{L}(n(t))$. Si ottengono le seguenti relazioni osservando lo schema in figura 1:

$$\begin{aligned} Y(s) &= F(s)Y^\circ(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s) \\ E(s) &= S(s)Y^\circ(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s) \\ U(s) &= Q(s)Y^\circ(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s) \end{aligned}$$

dove

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

è la funzione di *sensitività complementare*,

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

è la funzione di *sensitività* e

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)}$$

è la funzione di *sensitività del controllo*.

Requisiti dei sistemi di controllo

- **Asintotica stabilità**. Si veda l'Esercitazione 08.
- **Prestazioni statiche**. Per valutare le prestazioni statiche si valuta l'andamento dell'errore di controllo $e(t)$ *a transitorio esaurito*, a fronte di segnali $y^\circ(t)$ e $d(t)$ tali che $Y^\circ(s) = A_1/s^{r_1}$ e $D(s) = A_2/s^{r_2}$. Si ottiene la seguente tabella, per $r_i = 1, 2, 3$, che determina l'entità dell'errore a transitorio esaurito in funzione del tipo g_L e del guadagno μ_L della funzione $L(s)$.

Segnale $y^\circ(t)$ o $d(t)$	Asca(t)	Aram(t)	Apar(t)
$g_L = 0$	$\frac{A}{1+\mu_L}$	∞	∞
$g_L = 1$	0	$\frac{A}{\mu_L}$	∞
$g_L = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu_L}$
$g_L = 3$	0	0	0

- **Prestazioni dinamiche**. Le prestazioni dinamiche riguardano il comportamento in transitorio del sistema. Sotto le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode (e sotto l'ipotesi di asintotica stabilità del sistema retroazionato) la funzione $F(s)$, che lega $y^{\circ}(t)$ con $y(t)$, può essere approssimata ai poli dominanti come segue:

$$F(s) \simeq \begin{cases} \dfrac{\mu_F}{1+\dfrac{s}{\omega_c}} & \text{se } \varphi_m \geq 75^{\circ} \\ \dfrac{\mu_F}{1+2\xi_F s/\omega_c + s^2/\omega_c^2} & \text{se } \varphi_m < 75^{\circ} \end{cases}$$

dove μ_F è il guadagno di $F(s)$ e si calcola come

$$\mu_F \simeq \begin{cases} \dfrac{\mu_L}{1+\mu_L} & \text{se } g_L = 0 \\ 1 & \text{se } g_L > 0 \end{cases}$$

e $\xi_F = \sin\left(\dfrac{\varphi_m}{2}\right) \approx \varphi_m/100$.

La durata dei transitori è quindi:

$$T_a \approx \begin{cases} \dfrac{5}{\omega_c}, & \varphi_m \geq 75^{\circ} \\ \dfrac{5}{\xi_F \omega_c}, & \varphi_m < 75^{\circ} \end{cases}$$

Nel caso di approssimazione a polo reale, i transitori non introducono oscillazioni o sovraelongazioni, mentre nel caso di approssimazione a poli complessi coniugati, si ha che la sovraelongazione percentuale $S\%$ e il periodo di oscillazione T_p sono, rispettivamente

$$S\% = 100 e^{\frac{-\xi_F \pi}{\sqrt{1-\xi_F^2}}}, \; T_p = \frac{2\pi}{\omega_c\sqrt{1-\xi_F^2}}$$

- **Attenuazione di disturbi $d(t)$ in banda** $[\omega_1^d, \omega_2^d]$. Ogni componente armonica del segnale $d(t)$ dalla forma $d(t) = \bar{d}\sin(\omega t + \varphi)$ (dove $\omega \in [\omega_1^d, \omega_2^d]$), grazie al teorema della risposta in frequenza ha un effetto sul segnale di uscita - a transitorio esaurito -, pari a

$$y(t) = \bar{d}|S(\jmath\omega)|\sin(\omega t + \varphi + \measuredangle S(\jmath\omega)).$$

dove $|S(\jmath\omega)|$ si può approssimare come segue

$$|S(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|L(\jmath\omega)|}, & \omega < \omega_c \\ 1, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

- **Attenuazione di disturbi $n(t)$ in banda** $[\omega_1^n, \omega_2^n]$. Ogni componente armonica del segnale $n(t)$ dalla forma $n(t) = \bar{n}\sin(\omega t + \varphi)$ (dove $\omega \in [\omega_1^n, \omega_2^n]$), grazie al teorema della risposta in frequenza, ha un effetto sul segnale di uscita a transitorio esaurito pari a

$$y(t) = \bar{n}|F(\jmath\omega)|\sin(\omega t + \varphi + \measuredangle - F(\jmath\omega)).$$

dove $|F(\jmath\omega)|$ si può approssimare come segue

$$|F(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ |L(\jmath\omega)|, & \omega > \omega_c \end{cases}.$$

1 Analisi delle prestazioni del cruise control

Si consideri il sistema di controllo per il cruise control di un'automobile mostrato in Figura 2.

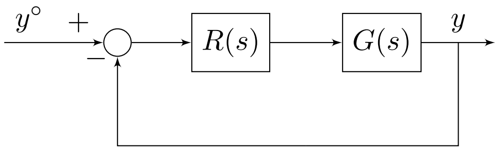

Figura 2: Schema di controllo.

In particolare, si ha che:

$$G(s) = \frac{1}{ms+b} \cdot \frac{1}{1+s/10}$$

dove $m = 1000$kg, $b = 10$Ns/m. Le prestazioni richieste del sistema di controllo sono:

- Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa 5s.
- La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni.
- La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del 2%.

1. Valutare quale dei seguenti controllori soddisfa le specifiche di progetto:
   (a) $R_1(s) = 1000$
   (b) $R_2(s) = \dfrac{1}{s}$
   (c) $R_3(s) = \dfrac{10(1+100s)}{s}$
2. Tracciare la risposta allo scalino unitario del sistema di controllo con ingresso $y^\circ(t)$ e uscita $y(t)$ per i tre controllori.

Soluzione

1. Le tre specifiche si traducono in termini di pulsazione critica, margine di fase ed errore a transitorio esaurito:

   (a) *Il sistema di controllo deve portare l'automobile alla velocità desiderata in circa* $5s$. Questa specifica si traduce come un vincolo sulla pulsazione critica. In particolare viene richiesto $T_a \simeq 5$, ma il tempo di assestamento è legato alla pulsazione critica come:

   $$T_a = \begin{cases} \dfrac{5}{\omega_c}, & \varphi_m \geq 75^\circ \\ \dfrac{5}{\xi_F \omega_c}, & 0 < \varphi_m < 75^\circ \end{cases}$$

   con $\xi_F = \sin(\varphi_m/2) \simeq \varphi_m/100$. Si deve, quindi tradurre il vincolo sul tempo di assestamento come un vincolo sulla pulsazione critica come:

   $$\omega_c \simeq \begin{cases} 1, & \varphi_m \geq 75^\circ \\ \dfrac{1}{\xi_F}, & 0 < \varphi_m < 75^\circ \end{cases}$$

   (b) *La risposta allo scalino unitario del segnale di riferimento non deve presentare oscillazioni.* Dato che la seconda specifica di progetto è che non ci siano oscillazioni nella risposta del sistema, ciò implica che si deve avere $\varphi_m \geq 75^\circ$.

(c) *La velocità reale dell'automobile non si può scostare dalla velocità desiderata di più del* 2%. Per verificare infine che la terza specifica di progetto si considera il segnale $e(t)$, si calcola la funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $e(t)$ e si applica il teorema del valore finale con $y^\circ(t) = \mathrm{sca}(t)$. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $e(t)$ è:

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

L'errore a transitorio esaurito si calcola quindi come:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+L(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\mu_L}{s^g}} = \lim_{s\to 0}\frac{s^g}{s^g+\mu_L}$$

e si verifica che sia inferiore a 0.02.

Consideriamo i tre controllori separatamente:

(a) Nel caso in cui $R_1(s) = 1000$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_1(s) = \frac{100}{(1+100s)(1+s/10)}.$$

Il diagramma di Bode di $L_1(s)$ è mostrato in Figura 3.

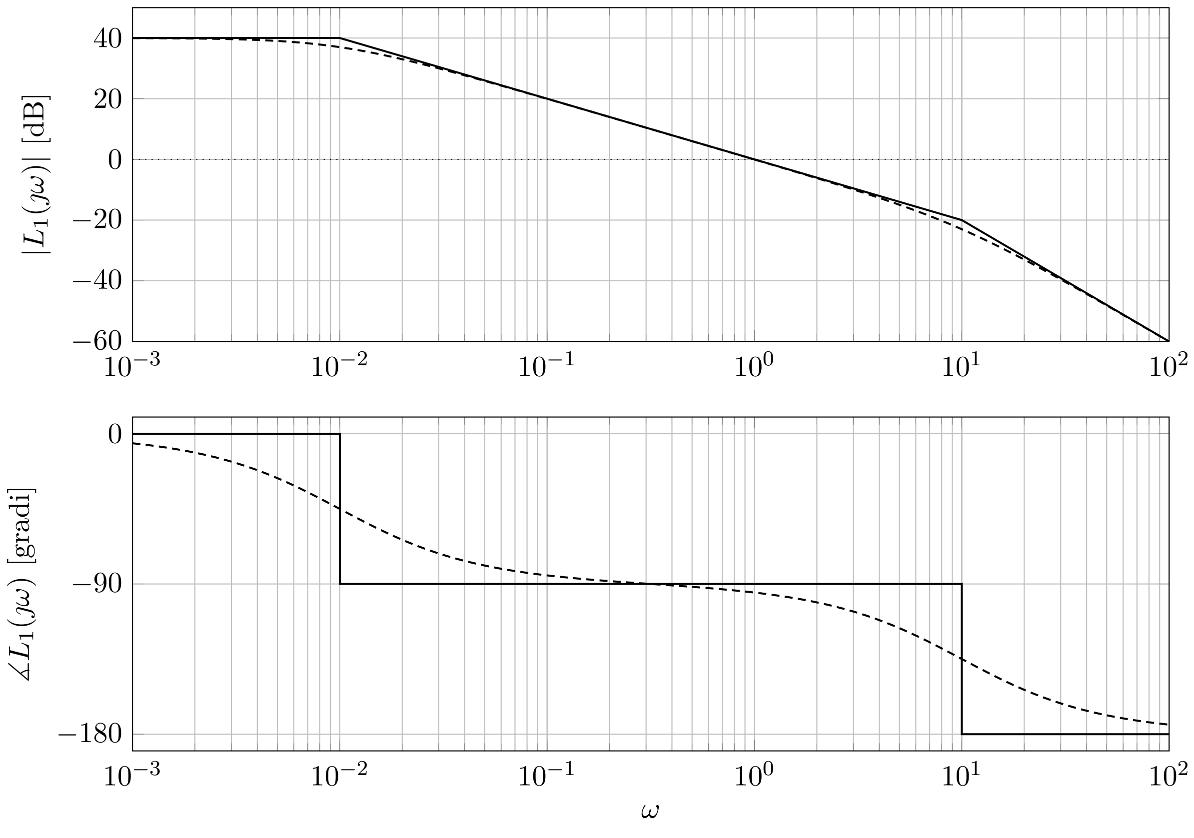

Figura 3: Diagramma di Bode di $L_1(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

i. $L_1(s)$ è strettamente propria;
ii. $L_1(s)$ non ha poli nel semipiano destro;
iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 1$rad/s.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

i. $\mu_L = 100 > 0$

ii. $\varphi_c \simeq -90°$, $\varphi_m \simeq 90° > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Dato che il margine di fase $\varphi_m > 75°$, la seconda specifica di progetto è soddisfatta. La prima specifica di progetto si traduce quindi come: $\omega_c \simeq 1$rad/s. Anche la prima specifica di progetto è soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\mu_L} = \frac{1}{1+100} = \frac{1}{101} < 0.02$$

Il controllore in questione soddisfa tutte le specifiche di progetto.

(b) Nel caso in cui $R_2(s) = 1/s$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_2(s) = \frac{0.1}{s(1+100s)(1+s/10)}.$$

Il diagramma di Bode di $L_2(s)$ è mostrato in Figura 4.

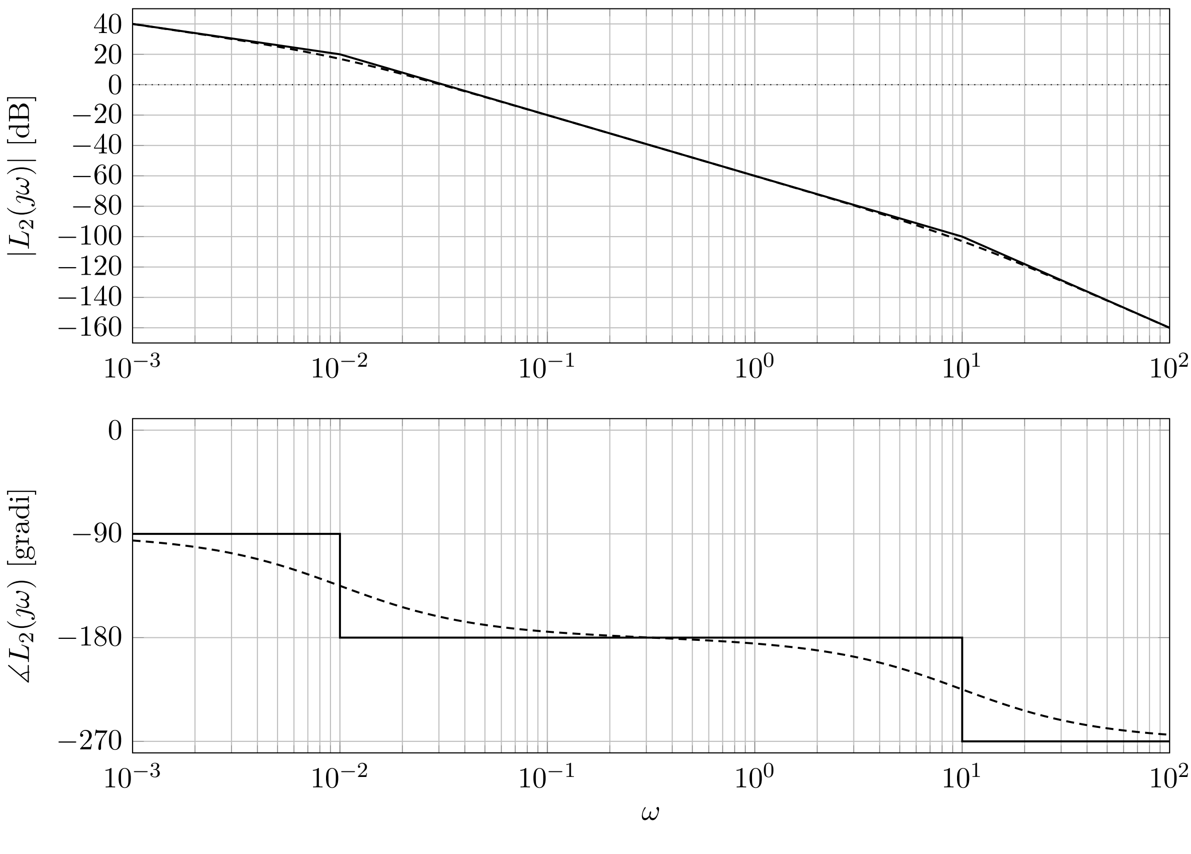

Figura 4: Diagramma di Bode di $L_2(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

i. $L_2(s)$ è strettamente propria;

ii. $L_2(s)$ non ha poli nel semipiano destro;

iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 0.03$rad/s.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

i. $\mu_L = 0.1 > 0$

ii. $\varphi_m > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Calcoliamo φ_m per verificare la specifica sul margine di fase:

$$\begin{aligned}
\varphi_c &= -90^\circ - \arctan(100\omega_c) - \arctan(\omega_c/10) \\
&= -90^\circ - \arctan(3) - \arctan(310^{-3}) \\
&= -90^\circ - 72^\circ - 0.2^\circ \simeq -162^\circ \\
\varphi_m &= 180 - |\varphi_c| \simeq 18^\circ
\end{aligned}$$

Dato che il margine di fase $\varphi_m < 75^\circ$, la seconda specifica di progetto non è soddisfatta. Osserviamo anche che la prima specifica di progetto si traduce come: $\omega_c \simeq 1/\xi_F$ rad/s, con $\xi_F \simeq 0.15$, quindi la pulsazione critica dovrebbe essere $\omega_c \simeq 6.6$rad/s. Dato che $\omega_c \simeq 0.03$, anche la prima specifica non è quindi soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s + \mu_L} = 0 < 0.02$$

Il controllore in questione non soddisfa tutte le specifiche di progetto.

(c) Nel caso in cui $R_3(s) = \dfrac{10(1 + 100s)}{s}$, allora la funzione d'anello diventa:

$$L_3(s) = \frac{1}{s(1 + s/10)}.$$

Il diagramma di Bode di $L_3(s)$ è mostrato in Figura 5.

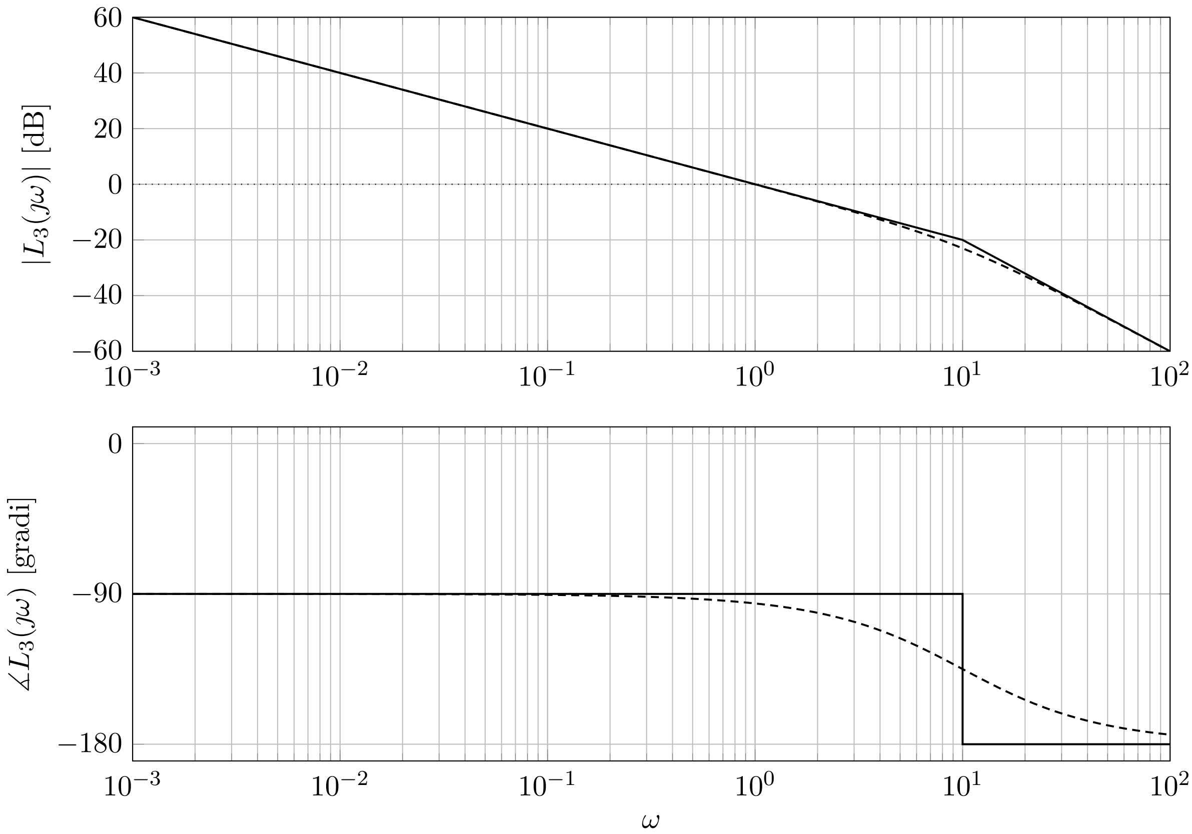

Figura 5: Diagramma di Bode di $L_3(s)$.

Innanzitutto verifichiamo che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Verifichiamo le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode:

i. $L_3(s)$ è strettamente propria;
ii. $L_3(s)$ non ha poli nel semipiano destro;
iii. ω_c è ben definita ed è circa $\omega_c \simeq 1$rad/s.

Si può quindi applicare il criterio di Bode. Dato che:

i. $\mu_L = 1 > 0$
ii. $\varphi_m > 0$,

allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Verifichiamo dunque le prestazioni del sistema di controllo. Calcoliamo φ_m per verificare la specifica sul margine di fase:

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90° - \arctan(\omega_c/10)\\ &= -90° - \arctan(0.1)\\ &\simeq -90° - 6° = -96°\\ \varphi_m &= 180 - |\varphi_c| \simeq 84°\end{aligned}$$

Dato che il margine di fase $\varphi_m \geq 75°$, la seconda specifica di progetto è soddisfatta.

La prima specifica di progetto si traduce quindi come: $\omega_c \simeq 1$rad/s. La prima specifica è quindi soddisfatta. L'ultima specifica di progetto è che l'errore a transitorio esaurito sia inferiore al 2% del valore del segnale di riferimento. Nel caso in questione:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s+\mu_L} = 0 < 0.02$$

Il controllore in questione soddisfa tutte le specifiche di progetto.

2. Consideriamo i tre controllori separatamente.

(a) Nel caso in cui $R_1(s) = 1000$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \geq 75°$, e che la $\omega_c \simeq 1$rad/s. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{\mu_L}{1+\mu_L} \cdot \frac{1}{1+s/\omega_c} = \frac{100}{101} \cdot \frac{1}{1+s}$$

La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 6.

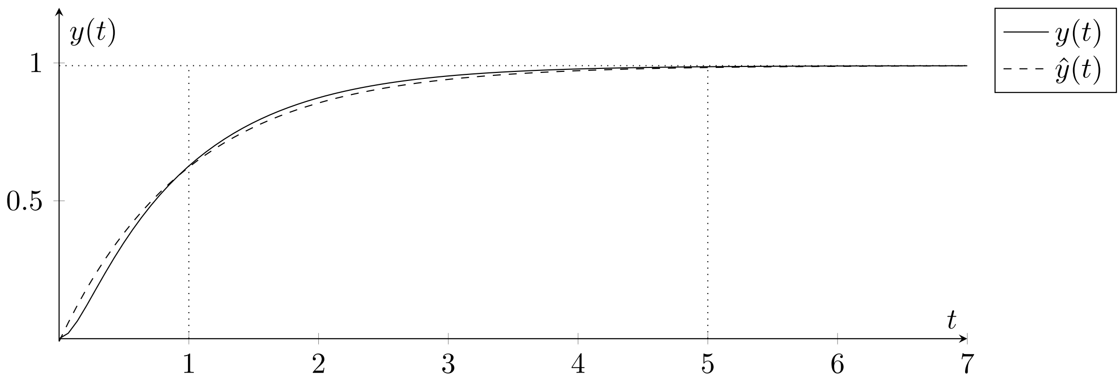

Figura 6: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_1(s)$.

(b) Nel caso in cui $R_2(s) = 1/s$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \simeq 18°$, e che la $\omega_c \simeq 0.03$rad/s. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + 2\frac{\xi_F}{\omega_c}s + \frac{s^2}{\omega_c^2}}.$$

Il tempo di assestamento sarà quindi di circa $T_a = \frac{5}{\xi_F \omega_c} \simeq 1065\text{s}$ ($\simeq$ 18 minuti). La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 7.

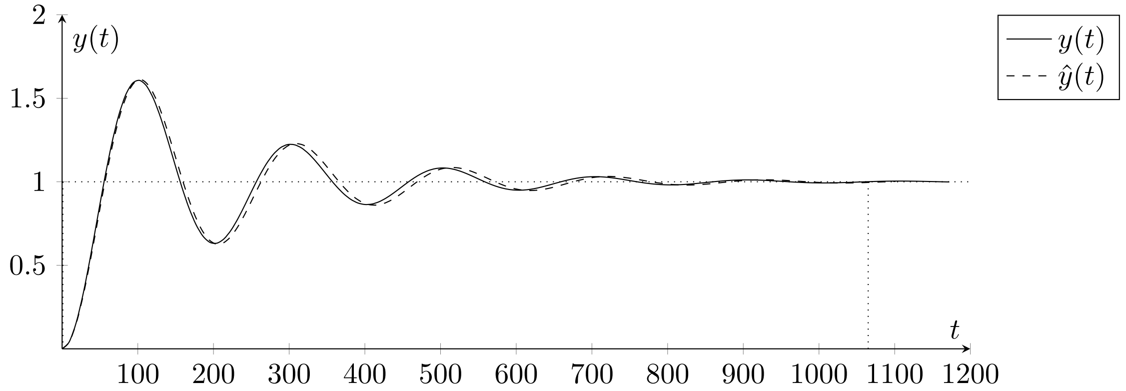

Figura 7: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_2(s)$.

(c) Nel caso in cui $R_3(s) = \dfrac{10(1+100s)}{s}$, abbiamo trovato che il margine di fase è $\varphi_m \simeq 84°$, e che la $\omega_c \simeq 1\text{rad/s}$. Il sistema in anello chiuso, si comporta approssimativamente come:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1+s/\omega_c} = \frac{1}{1+s}.$$

Il tempo di assestamento sarà quindi di circa $T_a \simeq 5\text{s}$. La risposta allo scalino reale ($y(t)$) e approssimata ($\hat{y}(t)$) sono mostrate in Figura 8.

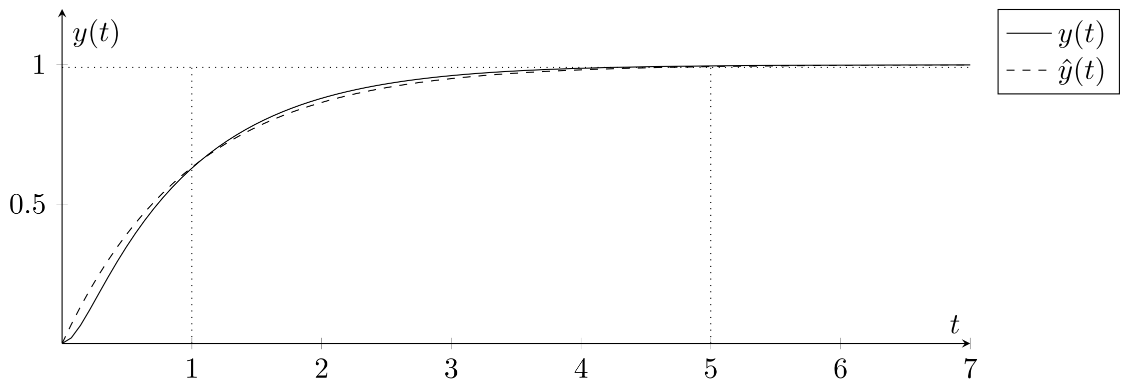

Figura 8: Risposta allo scalino del sistema di controllo con controllore $R_3(s)$.

2 Analisi delle prestazioni

Si consideri il sistema del II ordine, asintoticamente stabile, avente guadagno positivo e avente funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente al diagramma di Bode del modulo mostrato in Figura 9.

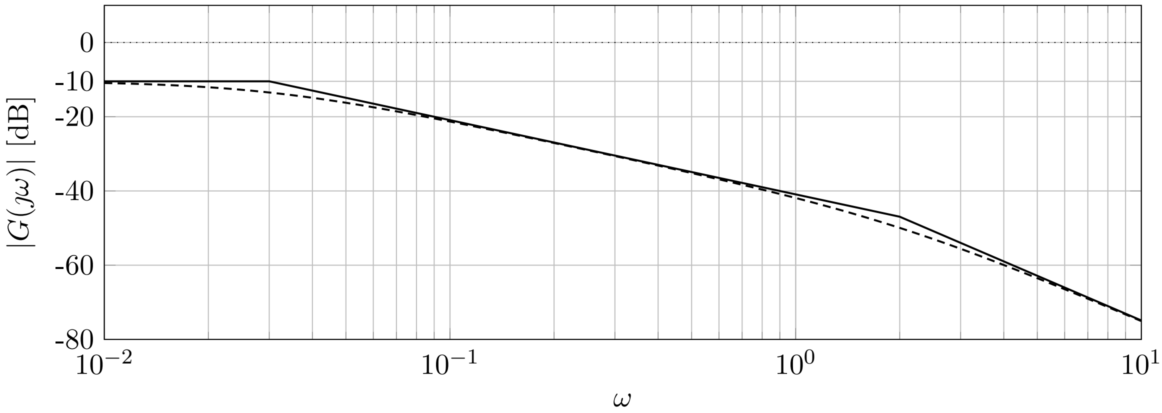

Figura 9: Diagramma di Bode del modulo di $G(s)$.

1. Si disegni in modo qualitativo la risposta allo scalino di ampiezza unitaria.
2. Si disegni il diagramma di Nyquist di $G(s)$.
3. Si discutano le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 10 nei seguenti casi:
   (a) $H(s) = 100$;
   (b) $H(s) = -1$;
   (c) $H(s) = 1$.

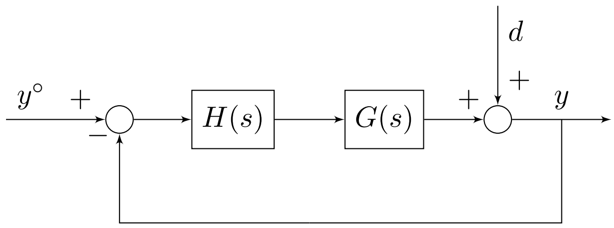

Figura 10: Sistema di controllo di riferimento.

4. Si consideri il caso $H(s) = 100$. Si descrivano le proprietà delle funzioni di trasferimento:
   (a) Tra la variabile $y^\circ(t)$ e l'uscita $y(t)$;
   (b) Tra il disturbo $d(t)$ e l'uscita $y(t)$.

Soluzione

1. La risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è mostrata in Figura 11.

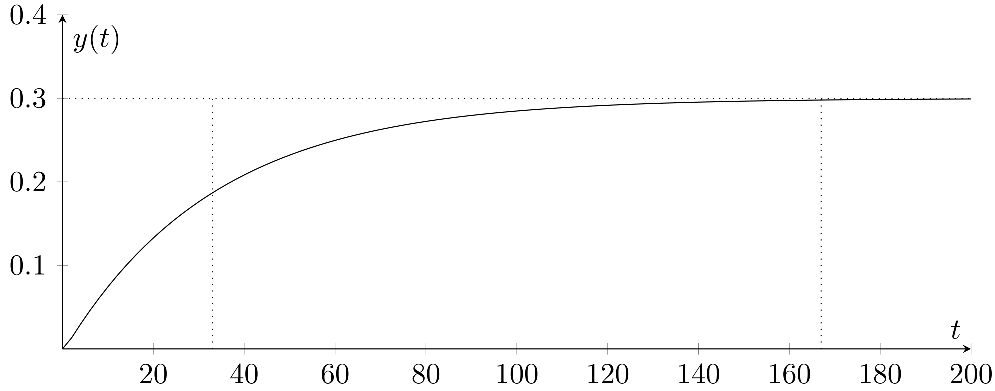

Figura 11: Risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

2. Per tracciare il diagramma di Nyquist, tracciamo il diagramma di Bode della fase (mostrato in Figura 12).

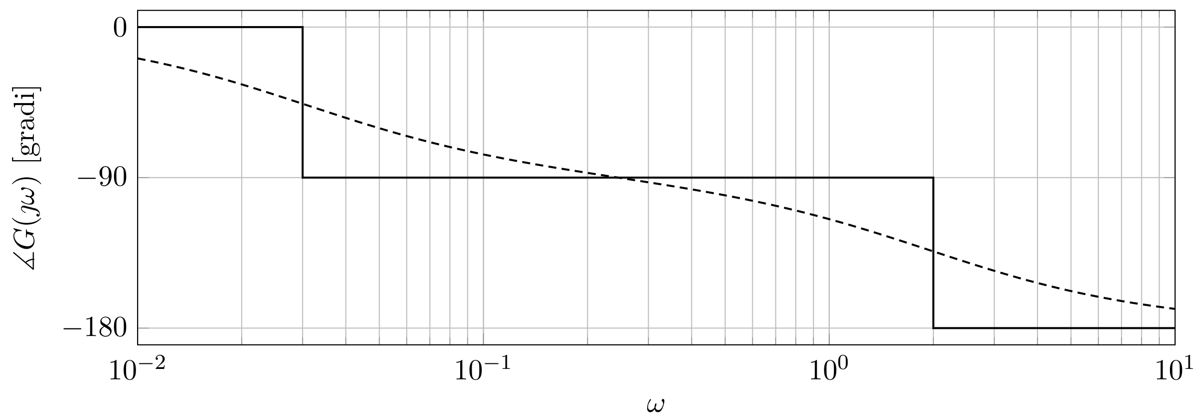

Figura 12: Diagramma di Bode della fase di $G(s)$.

Si può quindi tracciare il diagramma di Nyquist come mostrato in Figura 13.

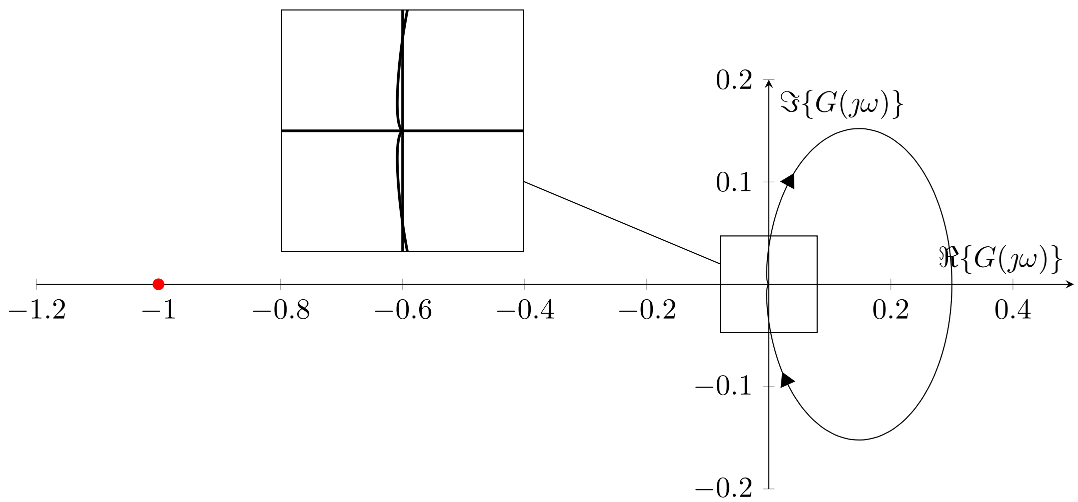

Figura 13: Diagramma di Nyquist di $G(s)$.

3. Per valutare la stabilità del sistema nei vari casi, si può sfruttare il criterio di Nyquist. In particolare:

(a) Se $H(s) = 100$, il diagramma di Nyquist mostrato in Figura 13 si amplifica, ma non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.

(b) Se $H(s) = -1$, il diagramma di Nyquist mostrato in Figura 13 si ribalta rispetto all'asse immaginario, ma non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.

(c) Se $H(s) = 1$, il diagramma di Nyquist di $L(s)$ è quello mostrato in Figura 13 e non circonda il punto -1 sull'asse reale, per cui $N = 0$. Dato che $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P = 0$), si ha che $N = P$, per cui il sistema in retroazione è asintoticamente stabile.

4. Nel caso in cui $H(s) = 100$, il diagramma di Bode asintotico è mostrato in Figura 14. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ è:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Il modulo di $F(s)$ può essere approssimato come:

$$|F(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} 1, & \omega \ll \omega_c \\ |L(\jmath\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $F(\jmath\omega)$ è mostrato in Figura 14.

La funzione di trasferimento da $d(t)$ a $y(t)$ è:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Il modulo di $S(s)$ può essere approssimato come:

$$|S(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|L(\jmath\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ 1, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $S(\jmath\omega)$ è mostrato in Figura 14.

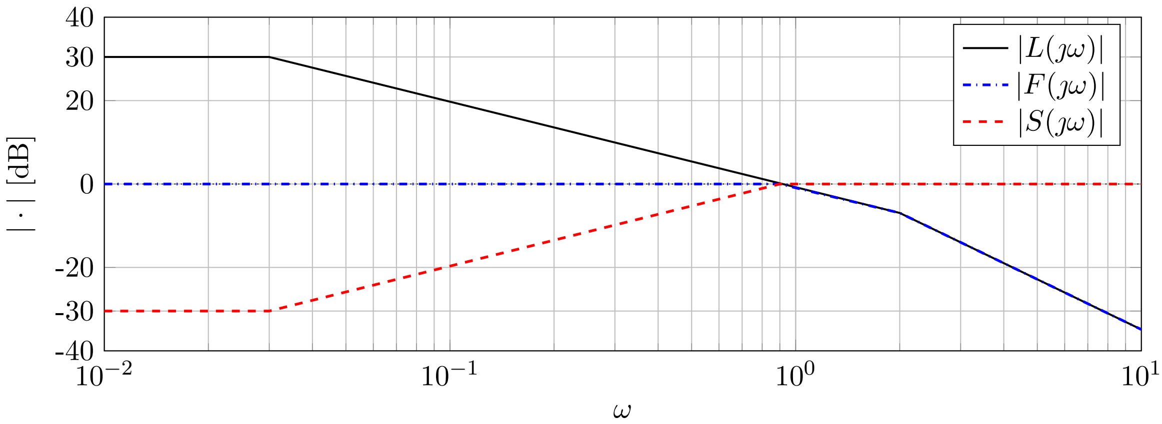

Figura 14: Diagramma di Bode del modulo di $L(s)$, di $F(s)$ e di $S(s)$.

3 Analisi delle prestazioni

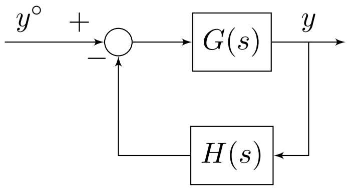

Figura 15: Sistema di controllo di riferimento.

Si consideri il sistema retroazionato descritto dallo schema a blocchi in Figura 15, dove $G(s)$ e $H(s)$ sono due funzioni di trasferimento prive di poli a parte reale positiva, con guadagno positivo, i cui moduli sono rappresentati in nel diagramma di Bode in Figura 16.

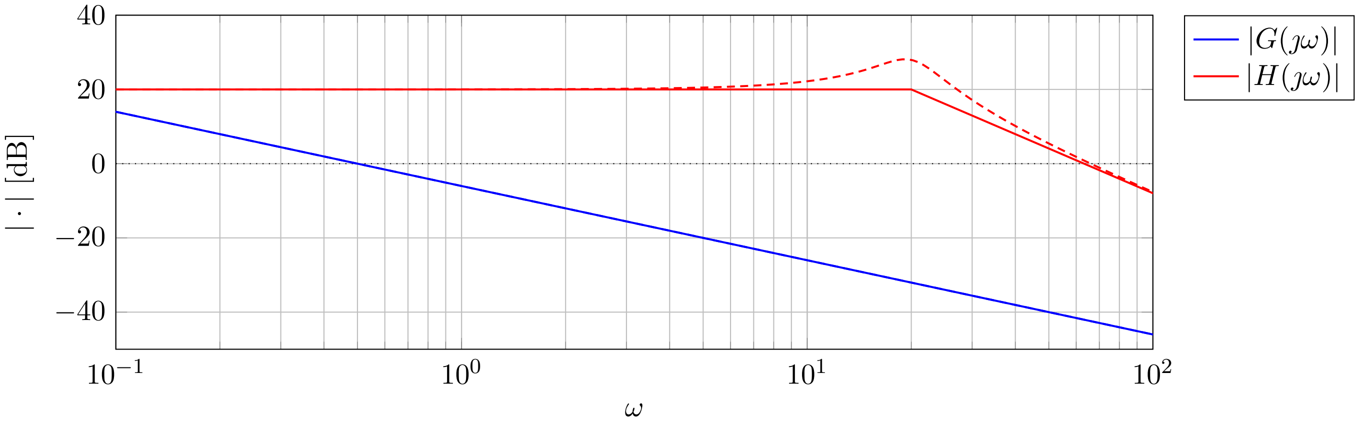

Figura 16: Diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza associata a $G(s)$ e $H(s)$.

1. Valutare la pulsazione critica e il guadagno generalizzato di $L(s)$.

2. Dire se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile. Valutare approssimativamente il margine di fase di $L(s)$, spiegando il significato di tale indicatore nei riguardi della robustezza del sistema. Spiegare perché in questo caso il margine di fase non è un buon indicatore di robustezza.

3. Tracciare il diagramma di Bode del modulo (approssimato) relativo alla funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$ da $y^\circ(t)$ a $y(t)$. Sulla base del diagramma così ricavato, tracciare inoltre l'andamento approssimato della risposta del sistema in anello chiuso ad un segnale di riferimento $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$.

4. Discutere le variazioni del comportamento del sistema (stabilità, risposta a scalino) indotte rispettivamente da una riduzione e da un aumento di $H(s)$ di un fattore 10.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento $L(s)$ è data da $L(s) = G(s)H(s)$. Il guadagno generalizzato di $L(s)$ sarà quindi dato da $\mu_L = \mu_G \cdot \mu_H$. Si può vedere dai diagrammi di Bode che $\mu_G = 0.5$ e $\mu_H = 10$, per cui $\mu_L = 5$.

   $L(s)$ ha un polo nell'origine e altri due poli in $\omega = 20$. Per cui il tratto iniziale di $L(s)$ è dato da $5/s$. La pulsazione critica è quindi $\omega_c \simeq 5$.

2. I diagrammi di Bode di $L(s)$ sono mostrati in Figura 17.

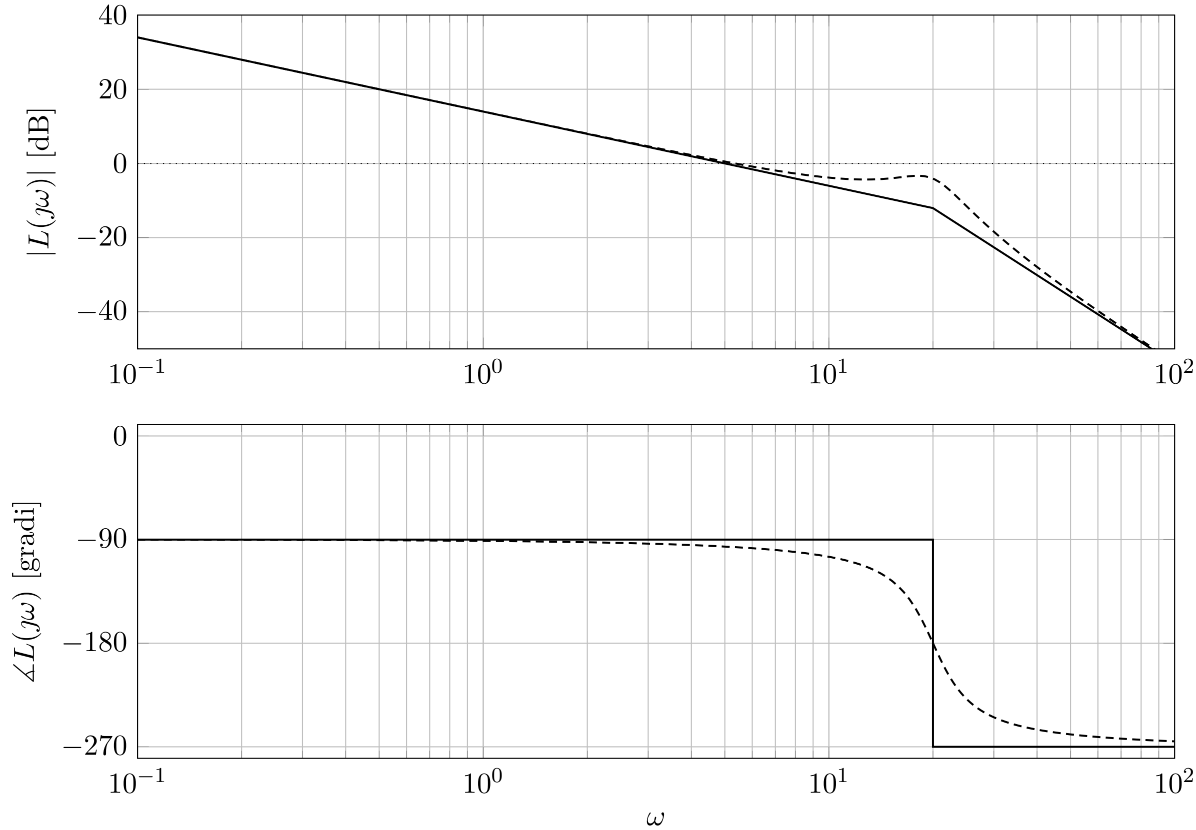

Figura 17: Diagramma di Bode della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Dai diagrammi di Bode è possibile verificare che il margine di fase è di circa 90°. In questo caso, nonostante il margine di fase sia molto grande, basta moltiplicare per un valore k piccolo per fare sì che il picco di risonanza superi l'asse 0dB. Questo si può vedere anche tracciando il diagramma di Nyquist di $L(s)$, in cui si vede che il picco di risonanza è molto vicino al punto -1 sull'asse reale (si veda Figura 18).

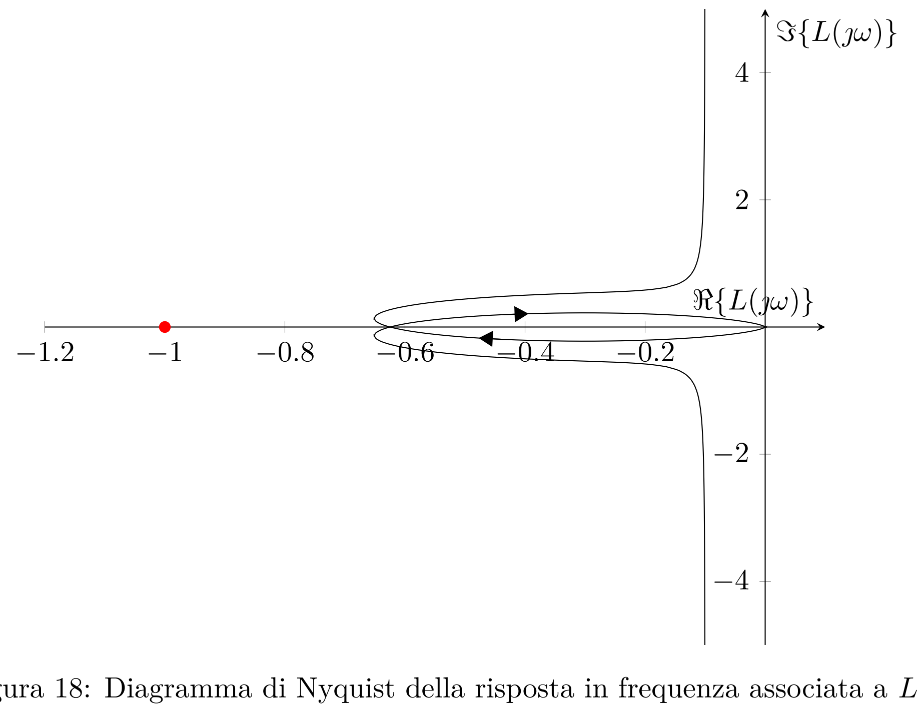

Figura 18: Diagramma di Nyquist della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

3. La funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ è:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

Il modulo di $F(s)$ può essere approssimato come:

$$|F(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{|H(\jmath\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ |G(\jmath\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

L'approssimazione del diagramma di Bode del modulo di $F(\jmath\omega)$ è mostrato in Figura 19.

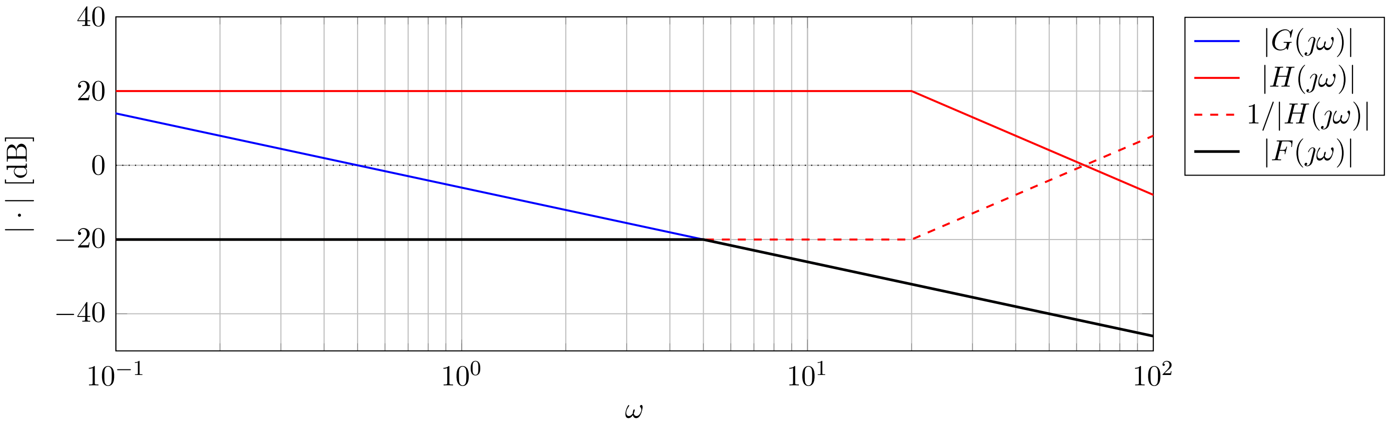

Figura 19: Diagramma di Bode del modulo risposta in frequenza associata a $F(s)$.

Dato che il margine di fase è ampio (maggiore di 75°), si può approssimare il sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ come:

$$F(s) \simeq \frac{0.1}{1 + s/\omega_c} = \frac{0.1}{1 + s/5}$$

per cui il tempo di assestamento sarà circa pari a $T_a = 1$. La risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ è mostrato in Figura 20.

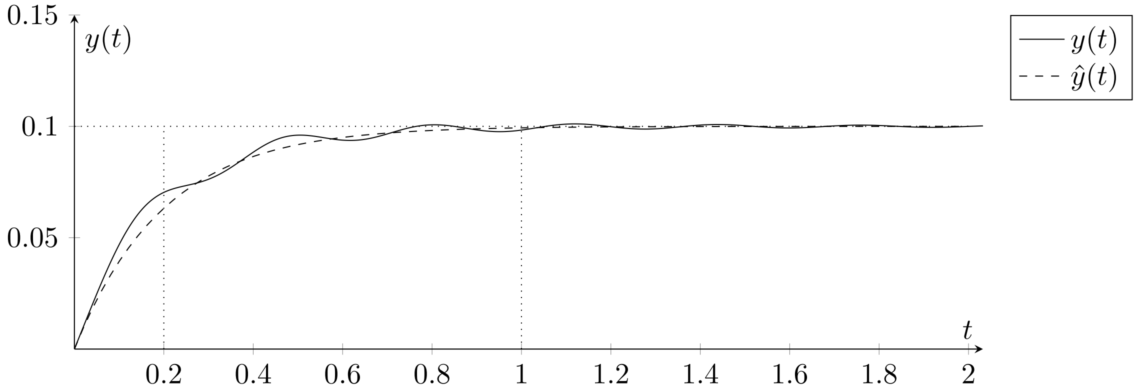

Figura 20: Risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$.

4. Moltiplicare o dividere per un fattore 10 $H(s)$ influenza l'ampiezza di $L(s)$ ma non la fase. In particolare, il modulo viene traslato in alto o in basso di 20dB nel caso in cui viene moltiplicato o diviso, rispettivamente. Traslare il modulo ha un effetto sulla pulsazione critica, per cui sul margine di fase. I diagrammi di Bode del modulo e della fase scalati sono mostrati in Figura 21.

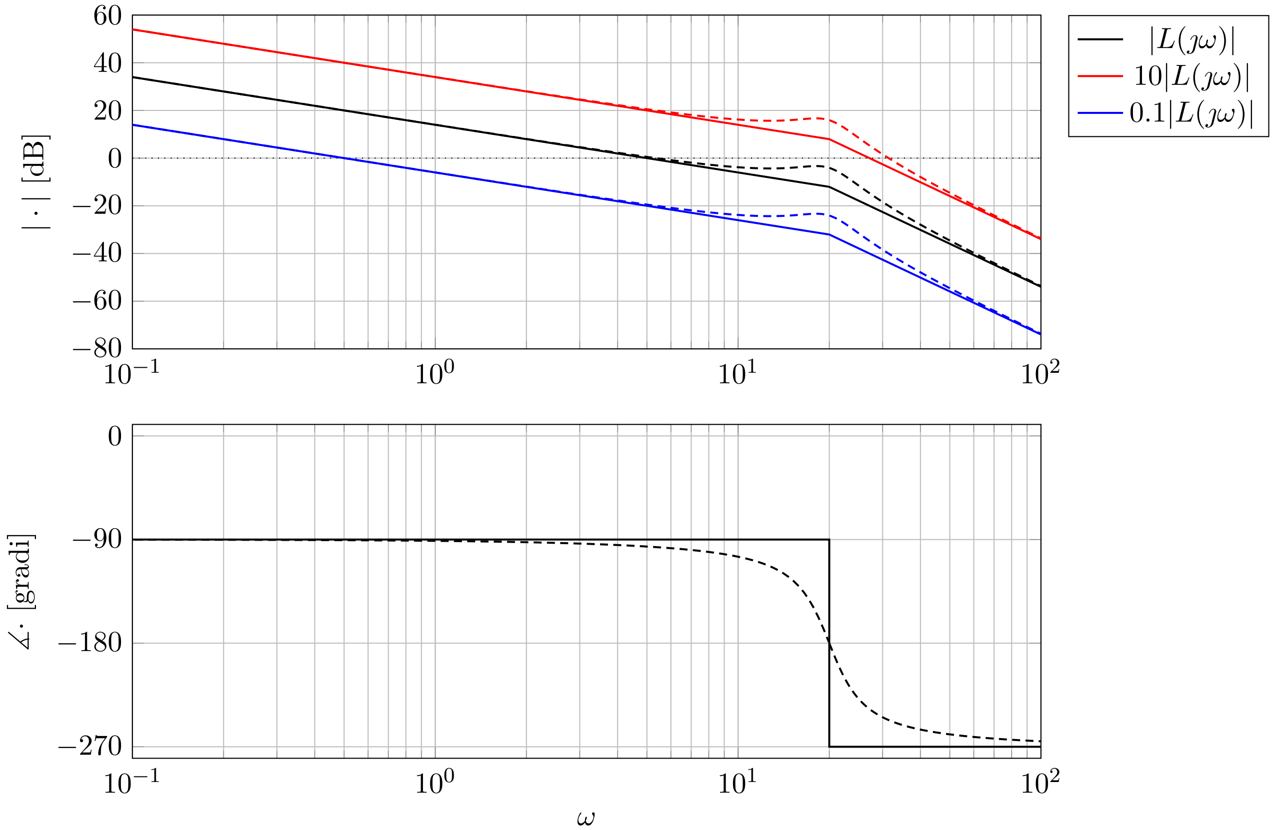

Figura 21: Diagramma di Bode della risposta in frequenza associata a $L(s)$.

Per quanto riguarda la stabilità, le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode sono soddisfatte. Dato che μ_L è sempre positivo, l'unico fattore decisivo per la stabilità è il margine di fase.

- Se si moltiplica per 10, la ω_c aumenta ed è circa uguale a 30. La fase scende velocemente a causa dei poli complessi coniugati verso i $-270°$, per cui si può concludere che il margine di fase è negativo e il sistema in anello chiuso è instabile.
- Tuttavia, se si divide $H(s)$ per 10, la ω_c diminuisce fino a 0.5 e il margine di fase aumenta. Dato che φ_m era già positivo, in questo caso è aumentato ed è più vicino a 90°.

Dal punto di vista della risposta allo scalino, quello che accade è che:

- Quando si moltiplica per 10, il sistema è instabile, per cui la risposta del sistema diverge.
- Quando si divide per 10, la funzione d'anello viene approssimata come:

$$|F(\jmath\omega)| \simeq \begin{cases} \dfrac{10}{|H(\jmath\omega)|}, & \omega \ll \omega_c \\ |G(\jmath\omega)|, & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

e in particolare:

$$F(s) \simeq \frac{1}{1 + s/\omega_c} = \frac{1}{1 + s/0.5}$$

Il tempo di assestamento aumenta, avendo diminuito la ω_c, e in particolare $T_a = 5/0.5 = 10$ La risposta allo scalino del nuovo sistema è mostrata in Figura 22.

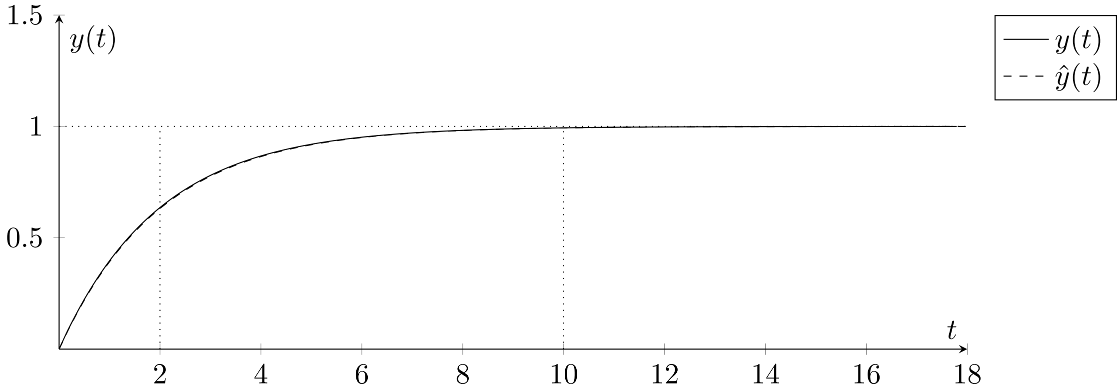

Figura 22: Risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $F(s)$ con $0.1H(s)$.

4 Analisi di stabilità di un sistema retroazionato grazie al criterio di Nyquist

Si consideri il sistema di ordine 3 avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0.25s^2)(1 + 0.1s)}$$

I diagrammi di Bode (asintotici e reali) corrispondenti sono riportati in Figura 23.

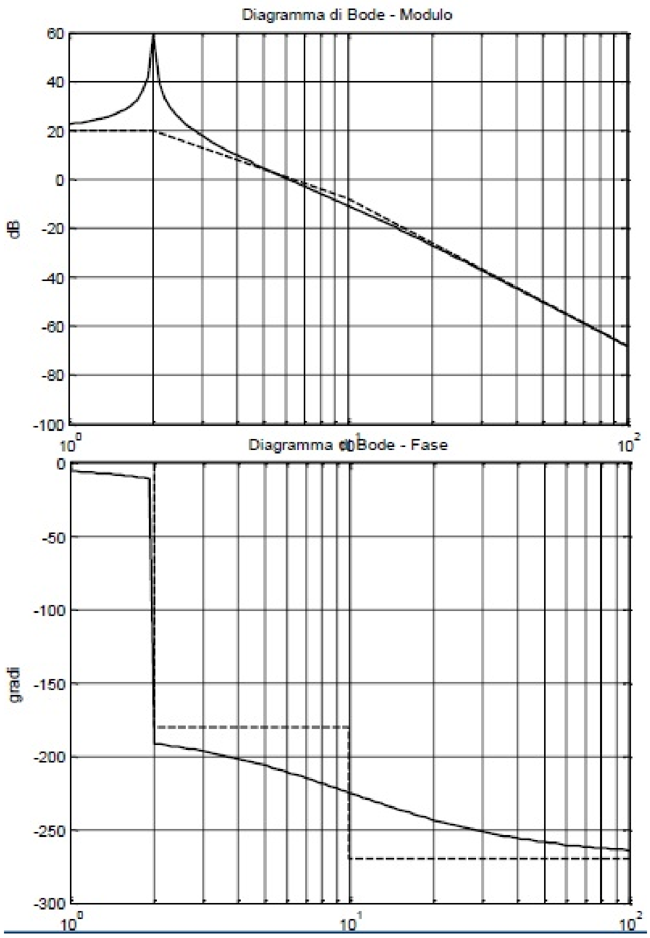

Figura 23: Diagrammi di Bode relativi alla funzione di trasferimento $G(s)$.

Il corrispondente diagramma di Nyquist è riportato in Figura 24, dove sono riportati per chiarezza anche gli andamenti del diagramma "all'infinito".

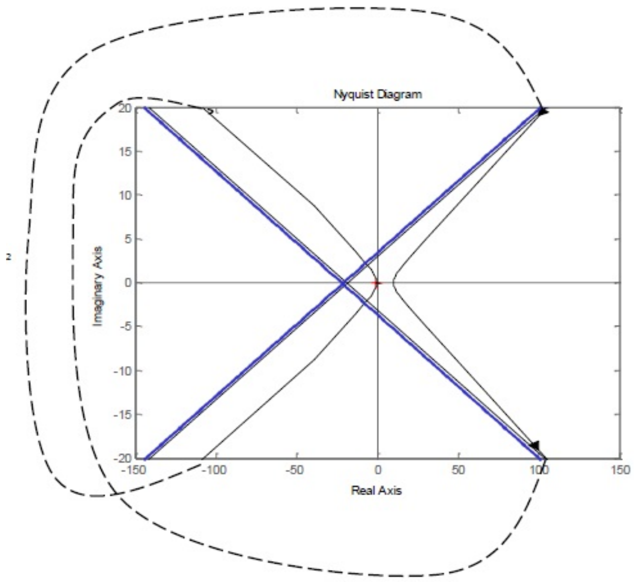

Figura 24: Diagramma di Nyquist relativo alla funzione di trasferimento $G(s)$.

Si studino le proprietà di stabilità del sistema retroazionato in Figura 25.

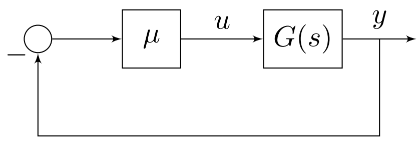

Figura 25: Schema ad anello chiuso.

nei seguenti casi:

1. $\mu = 1$;
2. $\mu = -1$;
3. $\mu = 0.01$;
4. $\mu = -0.01$;

Soluzione

Osservando i diagrammi di Bode mostrati in Figura 23 è possibile concludere che il criterio di Bode è applicabile nei casi 1 ($\mu = 1$) e 2 ($\mu = -1$). Infatti, in entrambi i casi $L(s) = \mu G(s)$ verifica le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode specificate a lezione, cioè (i) $L(s)$ è strettamente propria, (ii) $P = 0$, (iii) il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ (che nei casi 1 e 2 corrisponde con il diagramma di Bode del modulo di $G(s)$) attraversa una sola volta l'asse a 0 dB dall'alto verso il basso.
Nel caso 1, osservando il diagramma di Bode in Figura 23 si ottiene che $\varphi_c < -180°$ e quindi $\varphi_m < 0°$: grazie al criterio di Bode si può concludere che il sistema retroazionato in Figura 25 non è asintoticamente stabile.
Nel caso 2, dato che il guadagno della funzione d'anello aperto $L(s)$ è negativo, grazie al criterio di Bode si può concludere che il sistema retroazionato in Figura 25 non è asintoticamente stabile.

Nei casi 3 ($\mu = 0.01$) e 4 ($\mu = -0.01$) il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ attraversa due volte l'asse a 0 dB, violando una delle condizioni di applicabilità del criterio di Bode. Pertanto in questi casi è necessario ricorrere al criterio di Nyquist. Bisogna quindi verificare che il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $G(s)$ in Figura 24 compie attorno al punto $-1/\mu$ sia pari a $P = 0$. Ciò avviene solo nel caso in cui $\mu = -0.01$. Si possono trarre dunque le seguenti conclusioni.

Nel caso 3, grazie al criterio di Nyquist si può concludere che il sistema retroazionato in Figura 25 non è asintoticamente stabile.
Nel caso 4, grazie al criterio di Nyquist si può concludere che il sistema retroazionato in Figura 25 è asintoticamente stabile.
Si noti che l'analisi del caso 1 e del caso 2 sarebbe potuta essere condotta direttamente usando il criterio di Nyquist.