Lezione 2

Determinante e inversa

Proprietà del prodotto riga per colonna

- $A(BC)=(AB)C$ Proprietà associativa
- $A(B+C)=AB+AC$ Proprietà distributiva
- $(A+B)C=AC+BC$ Proprietà distributiva
- $t(AB)= (tA)B = A(tB)$
- Se A è una matrice nxm allora

  $I_nA=A$ e $AI_m = A$
- Non vale la proprietà commutativa

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Trasposta di una matrice

- La trasposta di una matrice A è la matrice che si ottiene scambiando le righe con le colonne.
- La trasposta di A si indica in vari modi:

$$A^T, \; {}^tA, \; \boxed{A'} \qquad \text{MATLAB}$$

- Una matrice si dice simmetrica se $A = A^T$.
- Una matrice si dice antisimmetrica o emisimmetrica se $A = -A^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T \qquad {}^tA$$

$A = -A^T$ ANTISIMMETRICA

A DEVE ESSERE QUADRATA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(a_{ij} \right)^T = -\left(a_{ji} \right)$$

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ È ANTISIMMETRICA

$A = A^T$ A è simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$ simmetrica

Proprietà della trasposta

- $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$
- $\left(sA\right)^T = s\,A^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $\left(AB\right)^T = \underline{B^T\,A^T}$

Potenze di matrici quadrate

- Una matrice nxn è anche detta matrice quadrata di ordine n.
- Se una matrice A è quadrata allora ha senso definire $A^2 = AA$ o, più generalmente,

$$A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{\text{n volte}}$$

A(AA)...

- Si pone $A^0 = I$
- Valgono le proprietà delle potenze:

$$A^n A^m = A^{n+m}$$

$$(A^n)^m = A^{nm}$$

Matrici invertibili

- Una matrice A quadrata si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B tale che

$$AB = BA = I$$

$a \qquad a^{-1} = \frac{1}{a}. \qquad a^{-1}a = 1$

$a a^{-1} = 1$

- Se una matrice A è invertibile allora la matrice B è unica e la si indica con A^{-1}
- Se A è invertibile allora si pone

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1}\,A^{-1}\cdots A^{-1}}_{\text{n volte}}$$

- Valgono le proprietà delle potenze anche con potenze intere.

$$BA = AB = I$$

$$B'A = AB' = I$$

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B$$

$$\Rightarrow B' = B$$

Esercizio

- Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare $A^2, A^3, A^{123}, A^{-1}, A^{-72}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = I_2$$

$A^2 = I$ $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I.$$

$A^{-1} = A$

$A^2 = I \qquad A^{-1}A^2 = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}AA = A^{-1} \quad IA = A^{-1} \quad A = A^{-1}$

$$A^3 = AA^2 = AI = A \qquad A^3 = A$$

$$A^{2n} = I \qquad A^{2n+1} = A$$

Esercizio

- Data $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ calcolare A^2, A^3, A^{123}. Esiste A^{-1}?

$$A^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$A^3 = 0$ SE ESISTE A^{-1}

$$0 = A^{-1}A^3 = (A^{-1}A)A^2 = IA^2 = A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Problemi

- Come si fa a verificare se una matrice è invertibile?
- Come si fa a calcolare l'inversa di una matrice invertibile?
- Per risolvere entrambi questi problemi è necessario introdurre il determinante di una matrice quadrata.

Determinante di matrici 1x1 e 2x2

- Se (a) è una matrice quadrata di ordine 1 il suo determinante è

$$\det(a) = a$$

- Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine 2 il suo determinante è

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Determinante di matrici 3x3

- Se $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ è una matrica quadrata di

ordine 3 allora il suo determinante è

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Regola di Sarrus

- La regola di Sarrus (1798-1861) è un metodo di calcolo del determinante di una matrice di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Somma dei prodotti sulle diagonali discendenti meno somma dei prodotti sulle diagonali ascendenti

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Esercizio

- Calcolare $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 - 2 + 0 + 2 + 1 - 0 = 1$$

Determinante

Per matrici di ordine superiore al 3 la formula del determinante diventa sempre più complicata:

- la formula del determinante di una matrice di ordine 4 è una somma di 24 termini
- la formula del determinante di una matrice di ordine 5 è una somma di 120 termini
- la formula del determinante di una matrice di ordine n è una somma di n! termini

Sviluppo di Laplace

- Lo sviluppo di Laplace è una formula ricorsiva che permette di calcolare il determinante di una matrice di ordine n se si sa calcolare il determinante di una matrice di ordine n-1.

Sottomatrici e minori

- Si chiama sottomatrice di A una matrice ottenuta togliendo alcune righe e/o colonne ad A
- Se la sottomatrice è quadrata di ordine m allora la si chiama minore di ordine m
- Il minore complementare M_{ij} dell'elemento a_{ij} è il minore che si ottiene togliendo ad A la i-esima riga e la j-esima colonna
- Il complemento algebrico di a_{ij} è

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

MATRICI

$n \times m$

MATRICI

QUADRATE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(-1) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ È SOTTOMATRICE

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$ " " "

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ NON È SOTTOMATRICE

Sviluppo di Laplace lungo la i-esima riga

- Se A è una matrice quadrata di ordine n, allora, fissato un indice i si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Esempio

- Calcolare

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ 1(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 0$$