

1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

1. Non negatività: $P(A) > 0$
2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti A e B : $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: A_1, A_2, A_3, \dots

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

1.2 Leggi di probabilità uniformi

Legge uniforme discreta

$$P(A) = \frac{\text{\#casi favorevoli ad } A}{\text{\#casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Legge uniforme continua

$$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

2 Probabilità condizionate

Definizione di probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Regola moltiplicativa: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho A_1, A_2, A_3 disgiunti che formano una partizione di Ω :

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Indipendenza

Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B)$, $P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?

$$\text{casi tot} = n(n-1)(n-2)\dots = n!$$

3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con k elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti.

$$0 \leq k \leq n$$
$$\text{\#sequenze ordinate di } k \text{ elementi} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Probabilità binomiale

Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo n prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con k_i estrazioni di tipo i ci sono.

$$\text{\#totale di scelte} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$$

4 Variabili aleatorie discrete

4.1 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.

Legge dello statistico inconsapevole

Data v.a. $Y = g(X)$, Y è una v.a.

$$E[Y] = E[g(x)]$$

Nel caso lineare:

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

Valore atteso condizionato

$$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$$

Legge dell'aspettativa totale

Con A_1, A_2, \dots, A_n partizioni di Ω

$$E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot E[X|A_i]$$

4.2 Varianza

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.

Proprietà varianza

$$\text{Var}[X] \geq 0 \quad \forall \text{ v.a. } X$$

$$\text{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot \text{Var}[X]$$

Scarto quadratico medio

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

5 V.a. discrete multiple

5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a. X e Y , $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di X : $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$

Legge di probabilità condizionata

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\sum_t p_{X,Y}(t, y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Regola moltiplicativa

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$$

5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a. X e Y sono dette indipendenti ($X \perp Y$)
 $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di X e Y .

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

Caso lineare: $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$

Se $X \perp Y$ allora $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

5.4 Varianza per v.a. multiple

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$$

Se $X \perp Y$ allora $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

6 Variabili aleatorie continue

Valore atteso e varianza

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x) dx$$

Legge dello statistico inconsapevole: $E[g(X)] =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

6.1 Funzione cumulativa di probabilità

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Proprietà

$$\bullet 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$\bullet F_X \text{ è una funzione non decrescente } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x), F_X \text{ è la funzione integrale di } f_X$$

7 V.a. continue multiple

Densità di probabilità congiunta

$$P((X, Y) \in S) = \iint_{(x, y) \in S} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$f_{X,Y}$ è la densità di probabilità congiunta.

Valore atteso

$$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Con g funzione deterministica nota.

Legge di probabilità marginale

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Densità marginale di X .

Indipendenza tra due v.a. continue

$$X \text{ e } Y \text{ sono dette indipendenti} \iff f_{X,Y}(x, y) =$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Densità di probabilità condizionata

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, t) dt}$$

8 Regola di bayes e funzioni di v.a.

Regola di bayes nel continuo

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$$

Per le v.a. discrete basta cambiare la funzione continua con la probabilità.

8.1 Calcolo della funzione di una v.a. continua

Ho X v.a. con legge nota f_X e $Y = g(X)$ con g deterministica e nota, voglio trovare f_Y .

Approccio tramite la cumulata

1- Calcolo la cumulata di Y .

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

2. Calcolo f_Y

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Trasformazioni lineari di v.a.

X è una v.a. con legge f_X nota e $Y = aX + b$ con costanti note.

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{|a|}\right), \text{ se } a = 0 \text{ allora } Y = b$$

Trasformazione monotona di v.a.

$Y = g(X)$ con g deterministica nota e strettamente monotona.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dg}{dx}(x)\right|} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{dg}{dx}(g^{-1}(y))\right|}$$

Con $y = g(x)$ e $x = g^{-1}(y)$

Nota: se g non è strettamente monotona (ad es. $g(x) = x^2$) la $f_Y(y)$ sarà: "formula diretta con g decrescente" + "formula diretta con g crescente".

9 Statistiche congiunte

Legge della somma di v.a.

Date X e Y due v.a. discrete e $X \perp Y$ e $W = X + Y$

$$P_W(w) = P(W = w) = P(X + Y = w) = \sum_x p_X(x) \cdot p_Y(w - x), \quad y = w - x$$

La legge della somma di due v.a. **indipendenti** è la convoluzione delle leggi di probabilità.

Calcolo della somma di convoluzione con il metodo grafico

- Sovrapporre graficamente le 2 leggi di prob

- "Ribaltare" una delle 2 leggi (ad es. P_Y)

- Traslare di w posizioni la legge che ho ribaltato (traslazione a destra se $w > 0$)

- Moltiplicare le prob. e sommare

Caso v.a. continue

$W = X + Y$, $X \perp Y$, X e Y sono v.a. continue.

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(w - x) dx$$

Integrale di convoluzione

Somma di due gaussiane indipendenti

$$W = X + Y, \quad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2),$$

$$X \perp Y$$

La forma di W è sempre gaussiana.

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$$

$$\text{Var}[W] = \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$$

$$(questa se \mu = 0)$$

9.1 Covarianza

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Note:

$$- \text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$$

$$- \text{Se } E[X] = 0 \text{ o } E[Y] = 0 \text{ allora } \text{Cov}[X, Y] = E[XY]$$

$$- \text{Se } X \perp Y \text{ allora } \text{Cov}[X, Y] = 0$$

- Se $Cov[X, Y] = 0 \nRightarrow X \perp Y$

Coefficiente di correlazione lineare

Versione adimensionale della covarianza.

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = E\left[\frac{(X - E[X])}{\sigma_X} \cdot \frac{(Y - E[Y])}{\sigma_Y}\right]$$

Proprietà:

- $0 \leq |\rho[X, Y]| \leq 1$

In particolare se $|\rho[X, Y]| = 1$ allora $Y = aX + b$

- $X \perp Y \Rightarrow \rho[X, Y] = 0$

10 Valore atteso e varianza condizionati

Legge delle aspettative iterate

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

Legge della variazione totale

$$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

11 Successioni variabili aleatorie

11.1 Disuguaglianza di Markov

Se $X > 0$ allora $E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \quad \forall a \geq 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

11.2 Disuguaglianza di chebyshev

$$Var[X] \geq a \cdot P((X - E[X])^2 \geq a) \quad \forall a \geq 0$$

$$\text{Con } k = a^2, \quad P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}$$

11.3 Convergenza in probabilità

Data una successione di v.a. $\{A_n\}$ e un numero a ,

Si dice che $\{A_n\}$ converge ad a se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

Test generale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^{+\infty} f_{A_n}(x) dx$$

Se questo valore fa 0, c'è convergenza.

Usa markov(o chebyshev nello stesso modo) per provare la convergenza in probabilità

Esempio con markov.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - a| \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[X_n]}{a}$$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0$ allora per forza converge ad a .

11.4 Media campionaria e legge dei grandi numeri

Date X_1, X_2, \dots, X_n v.a. i.i.d.

$$\text{Media campionaria: } M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

è una v.a.

Dato che le varie v.a. sono i.i.d.

$$E[M_n] = E[X_1] = E[X]$$

$$Var[M_n] = \frac{Var[X_1]}{n}$$

$$\text{che con } n \rightarrow \infty \quad Var[M_n] \rightarrow 0$$

Legge (debole) dei grandi numeri

$$M_n \xrightarrow{P} E[M_n] = E[X]$$

12 Teorema centrale del limite

CLT: Siano X_i v.a. i.i.d. con varianza finita σ^2 sia

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \text{ e sia } Z \sim N(0, 1), \text{ allora}$$

$$F_{Z_n}(c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(c) = \Phi(c) \text{ per ogni } c \in \mathbb{R}$$

13 Processi di bernoulli

Def: una sequenza di prove (v.a.) di bernoulli i.i.d.

$X_i \sim Bern(p)$, ogni X_i è i.i.d.

Numero di successi S in n istanti temporali

S = numero di successi in n istanti

$$S \sim Bin(n, p)$$

Tempi di interarrivo

T_1 = numero di prove fino al primo arrivo

$$T_1 \sim Geom(p)$$

T_1 gode di perdita di memoria

Tempo al k-esimo arrivo

$$P(Y_k = t) \sim$$

$$\begin{cases} p^k \cdot (1-p)^{t-k} \cdot \binom{t-1}{k-1} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[Y_k] = \frac{k}{p}, \quad Var[Y_k] = k \frac{(1-p)}{p^2}$$

Splitting di un processo di bernoulli

Con q la prob che un arrivo vada nel processo P_1

$$P_1 \sim BP(p \cdot q)$$

$$P_1 \sim BP(p \cdot (1-q))$$

Merging di un processo di bernoulli

Con p e q le probabilità dei due BP

$$P \sim BP(p+q-p \cdot q)$$

14 Processi di poisson

- Processo a tempo continuo (mantiene le stesse proprietà del processo di Bernoulli es. perdita di memoria)

Intensità media degli arrivi (per unità di tempo τ)

$$P(k, \tau) = \text{costante}$$

Distribuzione del numero di arrivi in un intervallo di tempo finito

$$P(N_{[0, \tau]} = k) = \begin{cases} \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{Legge di Poisson: } N_{[0, \tau]} \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot \tau)$$

$$E[N_{[0, \tau]}] = \lambda \tau \quad Var[N_{[0, \tau]}] = \lambda \tau$$

Distribuzione del tempo al k-esimo arrivo

Y_k : tempo al k-esimo arrivo

$$f_{Y_k} = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \lambda & t \geq 0, k > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Legge di Erlang, $Y_k \sim Erlang - k(\lambda)$

$$E[Y_k] = \frac{k}{\lambda}$$

	Poisson	Bernoulli
Tempo di arrivo	Continui	Discreti
Ritorno degli arrivi	λ / unità di tempo	p / μ prova
Legge # arrivi	Poisson $(\lambda \cdot \tau)$	Bin (n, p)
legge tempo di interarrivo	Exp (λ)	Geom (p)
legge tempo al k-esimo arrivo	Erlang - $k(\lambda)$	Pascal - $k(p)$

Splitting e merging di un processo di Poisson

- Il processo generato dal merging di due PP indipendenti è un PP con intensità $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

- Il processo generato dallo split di un PP (Le "decisioni" di split devono essere tutte \perp) è $PP_1(\lambda p)$ dove p è la probabilità di finire nel PP_1

Incidenza casuale per processi di Poisson

Con un PP iniziato da molto tempo la distribuzione della lunghezza dell'intervallo tra due arrivi è $\sim Erlang - 2(\lambda)$ (approssimazione della binomiale con poissoniana?)

15 Stima bayesiana

15.1 Stimatore MAP

Scelgo l'ipotesi con massima probabilità a posteriori

$$\Theta_{MAP}(X) = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} p_{\Theta|X}(\theta|X)$$

La MAP minimizza l'errore a posteriori

15.2 Stima LMS

$$\Theta_{LMS}(X = x) = E[\Theta|X = x]$$

L'errore quadratico medio minimo di Θ_{LMS} è

$$E[Var[\Theta|X]] \leq Var[\Theta]$$

15.3 Stimatore lineare LMS

$$\Theta_{LIN}(X) = E[\Theta] + \frac{Cov[X, \Theta]}{Var[X]} \cdot (X - E[X])$$

16 Variabili aleatorie note

16.1 V.a. uniforme continua

$$X \sim \mathbb{U}[a, b]$$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

16.2 V.a. gaussiana

$$X \sim Norm[E[X], Var[X]] = Norm[\mu, \sigma^2]$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Combinazioni lineari di gaussiane

Se X_1, X_2, \dots, X_n sono n v.a. gaussiane tra loro indipendenti con ciascuna valore atteso μ_i e varianza σ_i^2 allora la v.a. $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$ è una gaussiana con valore atteso $\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \dots + \alpha_n \mu_n$ e varianza $\sigma^2 = \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \sigma_n^2$

16.3 V.A. esponenziale

$$X \sim Exp[\lambda], \lambda > 0$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x > 0$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

16.4 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Geom(p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova.

$$E[X] = \frac{1}{p}, \quad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Legge di perdita di memoria

$$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \implies E[X-t|X>t] = E[X]$$

(Vale solo per v.a. *Geom* e *Exp*)

16.5 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bin(n, p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova ed n è il numero di prove.

$$E[X] = np, \quad Var[X] = np(1-p)$$

$$Var[X] < \frac{n}{4}$$

16.6 Variabile aleatoria ipergeometrica

La probabilità ipergeometrica descrive l'estrazione senza reinserimento delle palline, perdenti o vincenti, da un'urna.

$X \sim Ipergeom(n, h, r)$, data un'urna contenente h palline bianche e $n-h$ palline nere, il numero di palline bianche che vengono ottenute estraendo senza reinserimento r palline.

$$P_k = \frac{\binom{h}{k} \binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

$$E[X] = \frac{r h}{n}, \quad Var[X] = \frac{r(n-r)h(n-h)}{n^2(n-1)}$$

16.7 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$ Dove p è la probabilità di successo.

$$E[X] = p, \quad Var[X] = p(1-p)$$