Lezione 1

Vettori e matrici

n-vettori

- Le coppie di numeri reali sono anche dette 2-vettori
- Le triple di numeri reali sono anche dette 3-vettori
- Le quadruple di numeri reali sono anche dette 4-vettori
- Le n-uple di numeri reali sono anche dette n-vettori.

Esempi

- $(1,2,3)$ è un 3-vettore.
- $(1,0,-1,\pi)$ è un 4-vettore.
- $(\sqrt{2},0,0,1/2,1,1,-1,e,12)$ è un ???

Operazioni con gli n-vettori

- La somma di due 2-vettori è definita come:

  $$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

- In modo del tutto analogo si definisce la somma di n-vettori sommando componente per componente.

Esempi

- $(1,2,1)+(2,2,-1)=(3,4,0)$
- $(1,1,0,0,1/2)+(-3,1/4,2,0,-1)=(-2,5/4,2,0,-1/2)$

Operazioni con gli n-vettori

- Il prodotto di un 2-vettore per uno scalare è stato definito ponendo:

$$t(x,y) = (tx,ty)$$

- In modo del tutto analogo si definisce il prodotto di un n-vettore per uno scalare moltiplicando componente per componente.

Esempi

- $2(1,1,2)=(2,2,4)$

- $\frac{3}{2}\left(-4,\frac{1}{4},0,36\right)=\left(-6,\frac{3}{8},0,54\right)$

Vettore nullo e vettore opposto

- n-vettore nullo: $\vec{0} = (0,0,0,\ldots\ldots,0)$
- Se v è un n-vettore allora scriviamo

  $(-1)v$ con il simbolo $-v$
- Definiamo la differenza di n-vettori come

  $v-w = v+(-w)$

Esempio: $(3,2,1,0) - (1,2,3,4)=(2,0,-2,-4)$

Proprietà delle operazioni

- $(v+w)+u=v+(w+u)$ Proprietà associativa
- $v+w=w+v$ Proprietà commutativa
- $v+\vec{0}=v$ Esistenza elemento neutro
- $v+(-1)v=\vec{0}$ Esistenza opposto
- $t(v+w)=tv+tw$ Proprietà distributiva
- $(t+s)v=tv+sv$ Proprietà distributiva
- $(ts)v=t(sv)$ Proprietà associativa mista
- $1v=v$ Legge di unità

Matrici

- Le matrici sono tabelle di numeri reali.
- Una matrice nxm è una tabella di numeri con n righe e m colonne.
- Le matrici sono una generalizzazione degli n-vettori: un n-vettore è una matrice 1xn.
- Una matrice nx1 viene anche chiamata

  n-vettore colonna.

Esempi

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ è una matrice 2x3
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un matrice 3x3
- $\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ è una matrice 1x1

Altri esempi

- Il 4-vettore $(1,1,3,3)$ lo si può considerare come una matrice 1x4
- Un 5-vettore colonna è una matrice 5x1, ad esempio

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Notazioni

- Se A è una matrice si indica con a_{ij} l'elemento della matrice che sta sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna
- Si scrive A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ o, semplicemente,

A= (a_{ij})

Matrici speciali

- Matrice nulla:

$$0_{n,m}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice identità:

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Operazioni con le matrici

- La somma di matrici e il prodotto di uno scalare per una matrice si definiscono in maniera del tutto analoga a quanto fatto per gli n-vettori, sommando e moltiplicando componente per componente.

Esempi

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
- $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Proprietà delle operazioni

- $(A+B)+C=A+(B+C)$ Proprietà associativa
- $A+B=B+A$ Proprietà commutativa
- $A+0_{n,m}=A$ Esistenza elemento neutro (qui A è nxm)
- $A+(-1)A=0_{n,m}$ Esistenza opposto
- $t(A+B)=tA+tB$ Proprietà distributiva
- $(t+s)A=tA+sA$ Proprietà distributiva
- $(ts)A=t(sA)$ Proprietà associativa mista
- $1A=A$ Legge di unità

Il prodotto riga per colonna

- Una matrice A si dice conformabile ad una matrice B se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.
- Se A è una matrice nxm e B è una matrice mxk si può definire un prodotto AB in questo modo

$$AB = C$$

dove

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

N.B. Il prodotto AB si può definire solo se A è conformabile a B

Esercizio

- Calcolare il prodotto riga per colonna

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Risutato: $\begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Proprietà del prodotto riga per colonna

- $A(BC)=(AB)C$ Proprietà associativa
- $A(B+C)=AB+AC$ Proprietà distributiva
- $(A+B)C=AC+BC$ Proprietà distributiva
- $t(AB)= (tA)B = A(tB)$
- Se A è una matrice nxm allora
  $I_n A=A$ e $AI_m = A$
- Non vale la proprietà commutativa

Esercizio

- Calcolare AB e BA con

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$