Informazione e Stima: Esercitazione 2

davide.scazzoli@polimi.it

2023

1 Gratta e Vinci

1.1 a)

La distribuzione di probabilità (ddp) di X:{Numero di biglietti vincenti su 10 comprati} è binomiale con probabilità di successo 1/15.

$$X \sim \text{Binomiale}(n = 10, p = \frac{1}{15}) \tag{1}$$

Quindi:

$$\mathbb{P}_X(k) = \begin{cases} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{15}\right)^k \left(1 - \frac{1}{15}\right)^{10-k} & \text{se } x = 0, 1, ..., 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

1.2 b)

Basta sostituire nella legge trovata:

$$\mathbb{P}(\text{zero vincite}) = \mathbb{P}_X(k = 0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{15}\right)^0 \left(\frac{14}{15}\right)^{10} \approx 0.5016 \tag{3}$$

1.3 c)

Si possono sommare le probabilità dei casi favorevoli dato che gli eventi sono disgiunti:

$$\mathbb{P}(\text{vincenti} > \text{perdenti}) = \mathbb{P}_X(k \geq 6) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{15}\right)^k \left(\frac{14}{15}\right)^{10-k} \approx 1.45 \cdot 10^{-5} \tag{4}$$

1.4 d)

Valore medio e varianza di una binomiale:

$$E[X] = np = 10 \cdot \frac{1}{15} \approx 0.67 \qquad Var[X] = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{15} \approx 0.62 \tag{5}$$

1.5 e)

Definisco la variabile aleatoria Y come il profitto ottenuto: $Y = 5 \cdot X - 2 \cdot 10 = 5X - 20$ quindi:

$$E[Y] = E[5X - 20] = 5E[X] - 20 \approx -16.67 \text{ euro} \tag{6}$$

$$Var[Y] = Var[5X - 20] = Var[5X] = 25Var[X] \approx 15.56 \text{ euro}^2 \tag{7}$$

1.6 f)

Definisco il nuovo profitto come: $Y' = 5 \cdot X - c \cdot 10$ dove c rappresenta il costo del biglietto. Impongo $E[Y'] \overset{!}{=} 0$ quindi:

$$E[Y'] = 5E[X] - c \cdot 10 \overset{!}{=} 0 \tag{8}$$

$$c = \frac{1}{3} \approx 0.33 \text{ euro} \tag{9}$$

2 La moneta di S. Pietroburgo

Definisco la variabile aleatoria X: Numero di lanci per osservare la prima testa, $\mathbb{P}(T) = 0.5$ Di conseguenza ho:

$$X \sim \text{Geometrica}(0.5) \tag{10}$$

Quindi:

$$\mathbb{P}_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k} & \text{per } k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{11}$$

Mentre la quantità vinta è: 2^X Per capire quanto possiamo guadagnare dal gioco proviamo a calcolare il valore atteso:

$$E[2^X] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty \tag{12}$$

Dato che il valore atteso risulta infinito ci chiediamo se vale la pena di pagare qualsiasi cifra pur di giocare a questo gioco.
Ci accorgiamo infatti che c'è una grossa probabilità di fermarsi dopo pochi lanci e quindi se paghiamo tanto perdiamo tutto.
Possiamo calcolare la varianza:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 = \infty - \infty \tag{13}$$

Abbiamo una forma di indecisione tuttavia il primo infinito è di ordine superiore rispetto al secondo e quindi la varianza tende ad infinito molto più velocemente del valore atteso, da ciò deduciamo che c'è un elevato rischio in questo gioco.

3 Indovina il numero

Definiamo la variabile aleatoria I come il numero da indovinare, esso sarà:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/8 \\ 2 & \text{con prob. } 1/8 \\ \vdots & \vdots \\ 8 & \text{con prob. } 1/8 \end{cases} \tag{14}$$

La sua legge è quindi uniforme:

$$\mathbb{P}_I(i) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{per } i = 1, 2, ..., 8 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{15}$$

3.1 a)

Definiamo X_1: numero di domande poste nel primo caso
Da questo deduciamo che $X_1 = I$, quindi $\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{P}_I(x) \quad \forall x \in \{1, ..., 8\}$. Possiamo calcolare il valore atteso come:

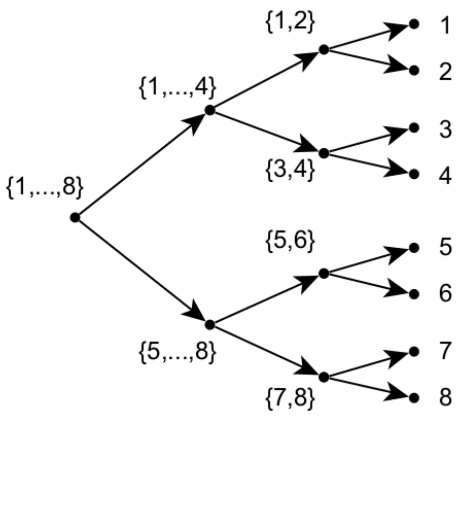
$$E[X_1] = E[I] = \frac{1+8}{2} = 4.5 \tag{16}$$

Nel caso in cui mi fermo alla domanda 7 perchè so che un volta fatte 7 domande, se la risposta a tutte e 7 è no allora il numero è per forza 8, il risultato diventa:

$$E[X_1] = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} i + \frac{2}{8} \cdot 7 = 4.375 \tag{17}$$

3.2 b)

In questo caso escludo metà dei casi con ogni domanda quindi faccio sempre 3 domande, quindi $E[X_2] = 3$



4 Capacità paranormali

Definiamo X: numero di lanci indovinati su 10 lanci. Dato che la moneta è ben bilanciata $p = 0.5$, quindi $X \sim \text{Bin}(10, 0.5)$.
Possiamo calcolare la probabilità di indovinare almeno 7 lanci come:

$$\mathbb{P}(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2^{10}}\right) \approx 0.172 \tag{18}$$

Possiamo anche calcolare la deviazione standard per capire il range di valori tipici:

$$Var[X] = np(1-p) = 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2.5 \qquad \sigma_X \approx 1.58 \tag{19}$$

Indovinare 7 lanci su 10 rientra nell'intervallo 2σ quindi non è particolarmente improbabile.
Extra: Se fosse chiesta invece la probabilità di indovinare 700 lanci su 1000?

$$X' \sim \text{Bin}(1000, 0.5) \tag{20}$$

$$\mathbb{P}(X' \geq 700) = \sum_{k=700}^{1000} \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{2^{1000}}\right) \approx 3.93 \cdot 10^{-5} \tag{21}$$

5 Dado e moneta

Dati: Dado a 4 facce, dado bilanciato, moneta bilanciata. Definiamo:
N: Risultato del lancio del dado
K: Numero totale di teste nei lanci di moneta

5.1 a)

Essendo una distribuzione uniforme, abbreviabile anche come $N \sim \mathbb{U}\{0,1,2,3\}$, la sua legge è:

$$\mathbb{P}_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per } n = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{22}$$

5.2 b)

La legge congiunta è:

$$\mathbb{P}_{N,K}(n,k) = \mathbb{P}_N(n)\mathbb{P}_{K|N}(k|n) \tag{23}$$

La legge condizionata è $\{K|N = n\} \sim \text{Bin}(n, 0.5)$. **Attenzione!** Dire che $K \sim \text{Bin}(n, 0.5)$ è un errore perchè è la condizionata ad essere binomiale, K non è binomiale!

$$\mathbb{P}_{K|N}(k|n) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2^n}\right) & \text{per } k = 0,...,n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{24}$$

5.3 c)

Siamo condizionati a $n = 2$ quindi:

$$\mathbb{P}_{K|N}(k|2) = \begin{cases} 1/4 & \text{k=0} \ \rightarrow \ \text{CC} \\ 2/4 & \text{k=1} \ \rightarrow \ \text{CT,TC} \\ 1/4 & \text{k=2} \ \rightarrow \ \text{TT} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases} \tag{25}$$

5.4 d)

Per avere due teste, il risultato del lancio del dado deve essere almeno 2, possiamo utilizzare Bayes:

$$\mathbb{P}_{N|K}(n|2) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\mathbb{P}_{K|N}(2|n)\cdot\mathbb{P}_N(n)}{\mathbb{P}_K(2)} \end{cases} = \begin{cases} 0 & n = \{0,1\} \\ \frac{\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4}}{\mathbb{P}_K(2)} & n = \{2,3\} \end{cases} \tag{26}$$

Non abbiamo il valore di $\mathbb{P}_K(2)$, tuttavia possiamo calcolare in funzione di essa e normalizzare:

$$\mathbb{P}_{N|K}(2|2) = \frac{\frac{1}{16}}{\mathbb{P}_K(2)} = \frac{2}{32\mathbb{P}_K(2)} \tag{27}$$

$$\mathbb{P}_{N|K}(3|2) = \frac{3 \cdot \frac{1}{32}}{\mathbb{P}_K(2)} = \frac{3}{32\mathbb{P}_K(2)} \tag{28}$$

Dato che la somma di queste due probabilità deve dare 1 ottengo:

$$\mathbb{P}_{N|K}(2|2) = \frac{2}{5} \qquad \mathbb{P}_{N|K}(3|2) = \frac{3}{5} \tag{29}$$

Quindi il risultato finale è:

$$\mathbb{P}_{N|K}(n|2) = \begin{cases} 0 & \text{n=0} \\ 0 & \text{n=1} \\ 2/5 & \text{n=2} \\ 3/5 & \text{n=3} \end{cases} \tag{30}$$

6 Momenti condizionati

3	1/8	0	0	0	1/8
2	0	0	1/8	0	1/8
1	1/8	0	1/8	0	1/8
0	0	0	0	0	1/8
	0	1	2	3	4

6.1 a)

Posso procedere con la definizione:

$$E[Y|X=x] = \sum_{y=0}^{3} y \cdot \mathbb{P}_{Y|X}(y|x) \qquad \forall x = 0,1,2,3,4 \tag{31}$$

Posso velocizzare i calcoli guardando i momenti condizionati:

$$E[Y|X=x] = \begin{cases} 2 & \text{x=0} \\ \nexists & \text{x=1} \rightarrow \mathbb{P}(x=1)=0 \\ 1.5 & \text{x=2} \\ \nexists & \text{x=3} \rightarrow \mathbb{P}(x=3)=0 \\ 1.5 & \text{x=4} \end{cases} \tag{32}$$

Di conseguenza $x = 0$ massimizza il valore atteso condizionato.

6.2 b)

$$Var[X|Y=y] = E[(X - E[X|Y=y])^2|Y=y] = E[X^2|Y=y] - E[X|Y=y]^2 = \tag{33}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{y=0} \\ 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} & \text{y=1} \\ 1 & \text{y=2} \\ 4 & \text{y=3} \end{cases} \tag{34}$$

$y = 3$ è il valore che massimizza la varianza condizionata

6.3 c)

Definiamo la variabile aleatoria $R = \min\{X, Y\}$, i casi che rientrano nei vari valori di R sono mostrati nella figura, ad esempio tutte le coppie di X, Y nell'area blu danno come risultato $R = 0$ e così via. Quindi il risultato è:

$$\mathbb{P}_R(r) = \begin{cases} 3/8 & \text{r=0} \\ 2/8 & \text{r=1} \\ 2/8 & \text{r=2} \\ 1/8 & \text{r=3} \end{cases} \tag{35}$$

6.4 d)

Definiamo l'evento d'interesse: $A = \{X^2 \geq Y\}$ questo accade nei casi mostrati in figura:

3	1/8	0	0	0	1/8
2	0	0	1/8	0	1/8
1	1/8	0	1/8	0	1/8
0	0	0	0	0	1/8
	0	1	2	3	4

Leggendo dalla tabella i valori della legge congiunta posso calcolare:

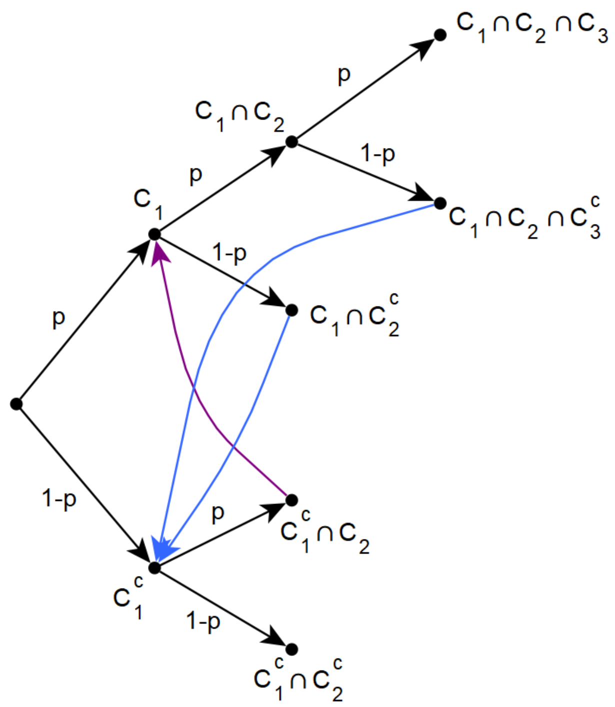
$$E[XY] = \sum_{(x,y)} x \cdot y \cdot \mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8}(0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = \frac{30}{8} \tag{36}$$

Se ci condizioniamo all'evento A:

$$E[XY|A] = \sum_{(x,y)} x \cdot y \cdot \mathbb{P}_{X,Y|A}(x, y) = \frac{1}{6}(2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = \frac{30}{6} \tag{37}$$

7 Lo studente di Informazione e Stima

Definisco le Variabili Aleatorie C_i: Esercizio i svolto correttamente. $\mathbb{P}(C_i) = p$, gli eventi sono indipendenti. Definisco X: numero di Esercizi svolti, $E[X] =?$. Possiamo ragionare con un albero di probabilità:



Posso usare i valori attesi condizionati (teorema aspettazione totale):

$$E[X] = \mathbb{P}(C_1)(1 + E[X|C_1]) + \mathbb{P}(C_1^c)(1 + E[X|C_1^c]) = p(1 + E[X|C_1]) + (1-p)(1 + E[X|C_1^c]) \quad (38)$$

Seguendo i rami posso costruire il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} E[X|C_1] = p^2 \cdot 2 + p(1-p)(2 + E[X|C_1^c]) + (1-p)(1 - E[X|C_1^c]) \\ E[X|C_1^c] = (1-p) \cdot 1 + p(1 + E[X|C_1]) \end{cases} \quad (39)$$

Risolvendo ottengo

$$E[X|C_1] = \frac{p(3-p)}{1 + p - 2p^2 + p^3} \qquad E[X|C_1^c] = 1 + \frac{p^2(3-p)}{1 + p - 2p^2 + p^3} \quad (40)$$

Sostituendo nella prima equazione trovata ottengo:

$$E[X] = p\left(1 + \frac{p(3-p)}{1 + p - 2p^2 + p^3}\right) + (1-p)\left(2 + \frac{p^2(3-p)}{1 + p - 2p^2 + p^3}\right) \quad (41)$$

8 Gli studenti di Informazione e Stima

Definiamo le V.A.
X: numero di esercizi svolti dallo studente 1
Y: numero di esercizi svolti dallo studente 2
$\mathbb{P}(\text{Esercizio corretto}) = p$, $X \perp Y$.
Possiamo intuire che $X \sim Y \sim \text{Geom}(p)$.
$\mathbb{P}_{X,Y} \overset{\perp}{=} \mathbb{P}_X \mathbb{P}_Y$.
Definisco $A = \{X + Y = n\}$.
Posso applicare Bayes:

$$\mathbb{P}_{X|A}(i) = \mathbb{P}(X = i|(X+Y) = n) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}((X+Y) = n|X = i)\mathbb{P}(X = i))}{\mathbb{P}(X+Y = n)} = \tag{42}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(Y = n-i|X = i)\mathbb{P}(X = i))}{\mathbb{P}(X+Y = n)} \overset{\perp}{=} \frac{\mathbb{P}(Y = n-i)\mathbb{P}(X = i))}{\mathbb{P}(X+Y = n)} = \tag{43}$$

$$= \frac{p(1-p)^{n-i-1} \cdot p(1-p)^{i-1}}{\mathbb{P}(X+Y = n)} = \frac{p^2(1-p)^{n-2}}{\mathbb{P}(X+Y = n)} \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{44}$$

Arriviamo solo fino a $n - 1$ perchè ogni studente svolge almeno un esercizio.
Ci accorgiamo che questa probabilità in realtà non dipende da i, quindi siccome i possibili casi vanno da 1 a n-1 e sono tutti equiprobabili, la probabilità finale è:

$$\mathbb{P}_{X|A}(i) = \left(\frac{1}{n-1}\right) \tag{45}$$

Cioè è distribuita uniformemente:

$$\{X|A\} \sim \mathbb{U}\{1, 2, 3, ..., n-1\} \tag{46}$$