

## Informazione e stima – 28/06/2021 – Compito B

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
  - Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
  - Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
  - Riportare il proprio nome, cognome, codice persona, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
  - Esercizio da escludere dal punteggio finale:
- 
- ① Sia  $X$  il numero di 3 e  $Y$  il numero di 5 ottenuti in 10 lanci di dado (a 6 facce, onesto) e sia  $Z = X + Y$ . Si calcolino le varianze di  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .  
*Suggerimento: chiedersi se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti o meno.*
  - ② La variabile aleatoria  $X$ , Gaussiana, ha valore medio 0 e varianza 1. La variabile aleatoria  $Y$ , indipendente da  $X$ , vale 1 o 3 con uguale probabilità. Si calcoli la legge di probabilità di  $Z = XY$ .
  - ③ Si estraggono 100 variabili casuali  $X_i$  Gaussiane indipendenti con valore medio  $m = 0$  e varianza  $\sigma^2 = 1$ , e sia  $Y = \sum_{i=1}^{100} |X_i|$ . Usando la disuguaglianza di Markov, dare un'approssimazione di  $\Pr(Y > 200)$ .
  - ④ Alla cassa di un supermercato arrivano clienti paganti in contanti secondo un  $PP(\lambda = 10 \text{ clienti/ora})$  e clienti con pagamenti elettronici secondo un  $PP(\lambda = 5 \text{ clienti/ora})$ . Qual è la probabilità che tra i primi 10 clienti ci siano stati più pagamenti elettronici che in contanti?
  - ⑤ Partendo da un generatore di campioni indipendenti  $U_i$  distribuiti come  $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ , descrivere un algoritmo per campionare da una distribuzione  $X \sim \text{Geom}(p)$ . Mediamente quanti campioni uniformi bisogna generare per avere un campione geometrico?
  - ⑥ Si lancia 20 volte una moneta con  $P(T) = 0.2$  e 80 volte una moneta con  $P(T) = 0.8$ . Tutti i lanci sono indipendenti. Quanti bit di entropia vengono generati?

# Soluzioni

## Problema 1

Il dado è onesto, per cui la probabilità di ottenere in un lancio uno dei possibili 6 numeri corrispondenti alle 6 facce del dado è  $p = \frac{1}{6}$ .

$X$  che  $Y$  sono v.a. Binomiali identiche, e la loro varianza è pari a

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[Y] = np(1-p) = \frac{50}{36} = \frac{25}{18},$$

con  $n = 10$  (numero di lanci) e  $p = \frac{1}{6}$ .

Per calcolare la varianza di  $Z$  conviene considerare un nuovo evento successo dato dall'unione delle facce 3 e 5.  $Z$  è una v.a. Binomiale con probabilità di successo  $q = 2/6 = 1/3$ , dunque:

$$\text{Var}[Z] = nq(1-q) = \frac{20}{9}.$$

## Problema 2

Conviene studiare separatamente il caso  $Y = 1$  e quello  $Y = 3$ , ricordandosi che sono equiprobabili ( $p = \frac{1}{2}$ ).

- *caso 1*:  $Y = 1$ . In questo caso  $\{Z|Y = 1\} \sim \{X|Y = 1\} \sim X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , per cui

$$f_{Z|Y=1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

- *caso 2*:  $Y = 3$ . Qui  $\{Z|Y = 3\} \sim \{3X|Y = 3\} \sim 3X \sim \mathcal{N}(0, 9)$ , da cui

$$f_{Z|Y=3}(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{9}\right).$$

Essendo i due casi equiprobabili, dalla legge delle probabilità totali si ottiene

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{9}\right).$$

## Problema 3

Innanzitutto notiamo che  $Y$  è una v.a. positiva. La disuguaglianza di Markov dice che

$$\Pr(Y > 200) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{200} = \frac{\sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[|X_i|]}{200} = \frac{\mathbb{E}[|X_1|]}{2}. \quad (1)$$

Il valore atteso si può calcolare come segue

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (2)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (3)$$

Dunque, si ha:

$$\Pr(Y > 200) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4)$$

## Problema 4

Si consideri il processo unione dei clienti. I tipi di cliente dei primi 10 arrivi sono indipendenti tra loro. La prob di avere un cliente pagante in contanti è  $\frac{10}{10+5} = \frac{2}{3}$ . Sia  $C$  il numero di clienti paganti con contante tra i primi 10 clienti, allora la probabilità cercata è:

$$\Pr(C < 5) = \sum_{i=0}^4 \binom{10}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{10-i}. \quad (5)$$

## Problema 5

I campioni geometrici possono essere interpretati come tempi di interarrivo di un processo di Bernoulli  $BP(p)$ . I campioni uniformi possono essere usati per generare successi e insuccessi del processo di Bernoulli. Un possibile algoritmo per generare un campione  $X$  Geometrico è il seguente:

1. Inizializzo  $i = 1$
2. Genero un campione  $U_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$
3. Se  $U_i < p$  allora  $X = i$ , altrimenti  $i \leftarrow i + 1$  e torno al punto 1.

Il numero medio di campioni  $U_i$  generati per avere un valore valido di  $X$  è proprio pari alla media di una v.a. Geometrica di parametro  $p$ , cioè  $1/p$ .

## Problema 6

Siano  $X_i$  i risultati dei lanci della prima moneta, e  $Y_i$  i risultati dei lanci della seconda moneta. Allora si ha che

$$H(X_1, X_2, \dots, X_{20}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{80}) = \sum_{i=1}^{20} H(X_i) + \sum_{i=1}^{80} H(Y_i) \quad (6)$$

$$(\text{identic. distr.}) = 20H(X_1) + 80H(Y_1) \quad (7)$$

$$(\text{Siccome } X_1, Y_1 \text{ sono v.a. binarie}) = 20H_2(0.2) + 80H_2(0.8) \quad (8)$$

$$(\text{Siccome } H_2(x) = H_2(1-x)) = 100H_2(0.2) \quad (9)$$

$$= 100 \left( 0.2 \log_2 \left( \frac{1}{0.2} \right) + 0.8 \log_2 \left( \frac{1}{0.8} \right) \right) \quad (10)$$

$$\approx 72.19 \text{ bit} \quad (11)$$

dove il primo passaggio è dovuto all'indipendenza di tutte le v.a.