## Teorema Formula risolutiva per EDO 1° ordine lineari

$a, b : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$

L'integrale generale è dato dalla formula

$$\boxed{y(t) = e^{A(t)} \left( \int e^{-A(x)} b(x)\, dx + C \right)} \qquad C \in \mathbb{R}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a$.

Dim 1 • porto $ay$ sulla sinistra

$$y' - ay = b$$

• Moltiplico l'equazione per $e^{-A}$

$$y' e^{-A} - a y e^{-A} = b e^{-A}$$

• Riconosco

$$y(t)' e^{-A(t)} - a(t)\, y(t)\, e^{-A(t)} = \left( y(t)\, e^{-A(t)} \right)'$$

infatti $\left( y e^{-A} \right)' = y' e^{-A} + y \left( e^{-A} \right)'$

$$= y' e^{-A} + y e^{-A} (-A)'$$

$$= y' e^{-A} - a y e^{-A}$$

Quindi la EDO iniziale si riscrive equivalentemente:

$$(y e^{-A})' = b e^{-A}$$

- Integro

$$y e^{-A} = \int (y e^{-A})' = \int b e^{-A} + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

- Moltiplico tutto per $e^{A}$:

$$y = e^{A} \left[ \int b e^{-A} + c \right]$$

FINE

<u>Esempio</u> $\quad y'(t) + y(t) + \sin t = 0$

$$y'(t) + y(t) = -\sin t$$

$$\underbrace{(y' + y)\, e^{t}}_{(e^{t} y(t))'} = -e^{t} \sin t$$

$$e^{t} y(t) = -\int e^{t} \sin t + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{-t} \left[ -\int e^{t} \sin t + c \right]$$

Integrale generale

$$y(t) = \frac{\cos t - \sin t}{2} + c\,e^{-t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Risolvere poi il pb. di Cauchy : $y(0) = 1$

$$c = \frac{1}{2}.$$

FINE

Teorema "Struttura dell' integrale generale di EDO del 2° ordine lineari omogenee"

Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con $a \neq 0$ in $I$.

L' integrale generale dell' eq. omogenea

$$a(t)\, y''(t) + b(t)\, y'(t) + c(t) y(t) = 0$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2, cioè le soluzioni sono tutte e sole della forma

$$y_0(t) = C_1\, y_{01}(t) + C_2\, y_{02}(t) \qquad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

dove $y_{01}, y_{02}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti.

FINE

OSS Dire che le due soluzioni $y_{01}, y_{02}$ sono linearmente indipendenti significa che non sono una multipla dell' altra: non esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $t$ si abbia $y_{02}(t) = c\, y_{01}(t)$.

FINE

Premessa: Spazio vettoriale $V = C^2(I)$

$I \subseteq \mathbb{R}$ funzioni di 1 variabile $y(t)$

$$C^1(I) = \{ y : I \to \mathbb{R} \text{, derivabili in } I,\ y' \text{ è continua in } I \}$$

$$C^2(I) = \{ y \in C^1(I) \text{, derivabili due volte in } I \text{ con } y'' \text{ continua in } I \}$$

$C^2(I)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali di somma di funzioni e prodotto di funzione per uno scalare

esempio $\quad y_1(t) = \cos t \quad y_2(t) = \cos t \quad (y_1+y_2)(t) = 2\cos t$

$3y_1(t) = 3\cos t$

Dim (2) $\quad V = C^2(I)$

L'integr. generale dell'omogenea è

$$W = \{ y \in V : a y'' + b y' + c y = 0 \}$$

- $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$ $\iff$ è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare

  Questo è vero grazie al principio di sovrapposizione (caso particolare dell'omogenea).

- Devo dimostrare che $W$ ha dimensione 2:

  (i) Determinare 2 soluzioni lin. indip. dell'equaz. $\quad y_{o1}(t)$, $y_{o2}(t)$

  (ii) Dimostrare che ogni soluzione $y_o(t)$ della EDO si scrive come combinaz. lineare di $y_{o1}(t)$ e $y_{o2}(t)$

(i) Scelgo $y_{o1}$ soluzione del pb. di Cauchy

$$\begin{cases} a\, y_{o1}'' + b\, y_{o1}' + c\, y_{o1} = 0 \\ y_{o1}(0) = 1 \\ y_{o1}'(0) = 0 \end{cases}$$

suppongo OEI

Mentre $y_{o2}$
$$\begin{cases} a\, y_{o2}'' + b\, y_{o2}' + c\, y_{o2} = 0 \\ y_{o2}(0) = 0 \\ y_{o2}'(0) = 1 \end{cases}$$

Verifico che $y_{o1}, y_{o2}$ sono linearm. indip.
se per assurdo fossero una multiplo dell'altra

$$y_{o1}(t) = c_1\, y_{o2}(t) \qquad \forall t$$

In particolare, per $t = 0$ $\quad \underbrace{y_{o1}(0)}_{=1} = c_1 \underbrace{y_{o2}(0)}_{=0}$

avrei trovato $1 = c_1\, 0$ assurdo.

(ii) Sia $y_o(t)$ una qualunque soluzione della EDO, cerco $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$y_o(t) = c_1\, y_{o1}(t) + c_2\, y_{o2}(t)$$

$$y_o(0) = c_1 \overbrace{y_{o1}(0)}^{=1} + c_2 \overbrace{y_{o2}(0)}^{=0} = c_1$$

$$y_o'(0) = c_1 \underbrace{y_{o1}'(0)}_{=0} + c_2 \underbrace{y_{o2}'(0)}_{=1} = c_2$$

in conclusione la funzione

$$z(t) = y_o(0)\, y_{o1}(t) + y_o'(0)\, y_{o2}(t)$$

risolve lo stesso problema di Cauchy di $y_0(t)$ e quindi, grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy, coincidono:

$$y_0(t) = z(t) \quad \forall t,$$

cioè $y_0(t)$ si scrive come combinazione lineare di $y_{01}(t)$, $y_{02}(t)$ con coefficienti

$$c_1 = y_0(0), \qquad c_2 = y_0'(0).$$

FINE

# Calcolo del raggio di convergenza

Data una serie di potenze reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

(i) se il seguente limite esiste (anche 0 o $+\infty$)

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

allora la serie di potenze ha raggio di conv. R.

(ii) se il seguente limite esiste (anche 0 o $+\infty$)

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

allora la serie di potenze ha raggio di conv. R.

FINE

Dim 3 La serie di potenze converge assolutamente in $\bar{x} \in \mathbb{R} \overset{def.}{\iff}$

la serie numerica $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{|a_n| \, |\bar{x} - x_0|^n}^{b_n}}$ converge

serie numerica a termini positivi
$\Rightarrow$ posso applicare criterio radice o rapporto purché i limiti esistono

- se il criterio del rapporto è applicabile, ho convergenza se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$$

non ho convergenza se $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |\bar{x} - x_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |\bar{x} - x_0|^n} < 1 \iff$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |\bar{x} - x_0| < 1$$

$$\iff |\bar{x} - x_0| \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

$$\iff |\bar{x} - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

- se il criterio della radice è applicabile, la serie converge se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1$

  e non converge se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \left( |a_n| \cdot |\bar{x} - x_0|^n \right)^{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\iff |\bar{x} - x_0| \cdot \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

$$\iff |\bar{x} - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

FINE

## COSTRUZIONE DELLA SERIE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE PERIODICA

### Teorema "Calcolo dei coeff. di Fourier"

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi$-periodica e somma di una serie trigonometrica

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Supponiamo inoltre di poter integrare termine a termine. Allora:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \end{aligned}} \qquad \forall\, n \geq 1$$

Dim (1) • Integro $f$ in $(-\pi, \pi)$, uso integr. termine a termine e formule di ortogonalità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \, dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \, dx}_{=0}$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi a_0$$

- Per trovare $a_m$, moltiplico $f$ per $\cos(mx)$, integro in $(-\pi, \pi)$, uso l'integrabilità termine a termine e le formule di ortogonalità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \right] \cos(mx)\, dx$$

non nullo solo per $k = m$

$$= \underbrace{a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\, dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx)\, dx$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(mx)\, dx}_{=0}$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\, dx = a_m \pi$$

- $b_m \rightarrow$ moltiplico per $\sin(mx)$

FINE

## Teorema <u>Invarianza della lunghezza di una curva per riparametrizzazioni</u>

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ limitato

$\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizz. di una curva regolare di sostegno $\gamma$

$\underline{v} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ , $\underline{v}(s) = \underline{r}(\phi(s))$ parametrizz. equival. di sostegno $\delta$

delta

Allora: lunghezza$(\gamma)$ = lunghezza$(\delta)$

Dim 5

$$\text{lunghezza}(\gamma) \overset{\text{def.}}{=} \int_a^b \| \underline{r}'(t) \| \, dt$$

$$\text{lunghezza}(\delta) \overset{\text{def.}}{=} \int_c^d \| \underline{v}'(s) \| \, ds$$

dato che $\underline{v}(s) = \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \end{pmatrix} = \underline{r}(\phi(s)) = \begin{pmatrix} r_1(\phi(s)) \\ r_2(\phi(s)) \\ r_3(\phi(s)) \end{pmatrix}$

$$\underline{v}'(s) = \begin{pmatrix} r_1'(\phi(s))\,\phi'(s) \\ r_2'(\phi(s))\,\phi'(s) \\ r_3'(\phi(s))\,\phi'(s) \end{pmatrix}$$

$$\| \underline{v}'(s) \| = \| \underline{r}'(\phi(s)) \| \cdot | \phi'(s) |$$

$$\Rightarrow \text{lunghezza}(\delta) = \int_c^d \| \underline{r}'(\phi(s)) \| \cdot | \phi'(s) | \, ds$$

Per definizione di parametrizz. equival.,

$\phi$ è biunivoca, cioè sempre crescente o sempre decrescente

Supponiamo $\phi'(s) \geq 0 \ \forall \ s \in [c,d]$

$\Rightarrow$ lunghezza$(\delta) = \int_c^d \| \underline{r}'(\phi(s)) \| \underbrace{\phi'(s)\, ds}_{= dt}$

cambio di variabile nell'integrale $t = \phi(s)$

$dt = \phi'(s)\, ds$

$\Rightarrow \int_a^b \| \underline{r}'(t) \| \ dt =$ lunghezza$(\gamma)$.

Se $\phi'(s) \leq 0 \ \forall \ s \in [c,d]$ allora

lunghezza$(\delta) = \int_c^d \| \underline{r}'(\phi(s)) \| \cdot |\phi'(s)|\, ds$

$= \int_c^d \| \underline{r}'(\phi(s)) \| \cdot (-\phi'(s))\, ds$

$t = \phi(s) \quad dt = \phi'(s)\, ds$

dato che $\phi$ è decrescente: $\phi(c) = b \quad \phi(d) = a$

lunghezza$(\delta) = \int_b^a \| \underline{r}'(t) \| \, (-dt) = \int_a^b \| \underline{r}'(t) \| \, dt$

estremi invertiti segno $-$ $=$ lunghezza$(\gamma)$

FINE

# Teorema Differenziabile implica continua

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto
$\underline{x}_0 \in A$
$f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$

Allora $f$ è continua in $\underline{x}_0$

Dim 6 Dobbiamo dimostrare: $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

Essendo $f$ differenz. in $\underline{x}_0$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)|$$

disug. triang. $\leq |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$

Cauchy-Schwarz $\leq \underbrace{\|\nabla f(\underline{x}_0)\|}_{\text{numero fissato}} \cdot \underbrace{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}_{\downarrow \, 0}$

quando $\underline{x} \to \underline{x}_0$

Quindi

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x})| = 0$$

cioè

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

FINE

# Teorema Formula del gradiente

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$

$f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0$.

Allora $f$ ammette derivate direzionali in ogni direzione $\underline{v}$ e inoltre

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle}$$

FINE

Dim 7 Devo dimostrare che

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle .$$

Scelgo $\underline{h} = t\underline{v}$ nella def. di differenziabilità:

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \underbrace{\langle \nabla f(\underline{x}_0), t\underline{v} \rangle}_{t \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle} + o(\underbrace{\| t\underline{v} \|}_{\| t\underline{v} \| = |t| \|\underline{v}\| = |t|})$$

Divido per $t$ e faccio il limite $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + o(|t|)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + \lim_{t \to 0} \frac{o(|t|)}{t}$$

$$= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + 0$$

FINE

Esempio $\quad f(x,y) = e^{x^2 \cdot y}$ $\qquad \underline{x}_0 = (1,1)$

$$\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\, e^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\, e^{x^2 y}$$

derivate parziali definite e continue in $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ per il teor. del diff. totale $f$ è differenz. in $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ ammette derivate direzionali in ogni punto e in ogni direzione e vale la formula del gradiente

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix}2e\\e\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), \underline{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2e\\e\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \frac{3e}{\sqrt{2}}$$

FINE

Esercizio 4 $\quad$ T.D.E. 21 gennaio 2022

$$f(x,y) = \frac{y}{x^4+y^4}$$

Determinare la derivata direzionale di $f$ in direzione $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ nel punto $(1,-1)$.

Determinare il piano tangente al grafico di $f$ nel punto $(1,-1,f(1,-1))$.

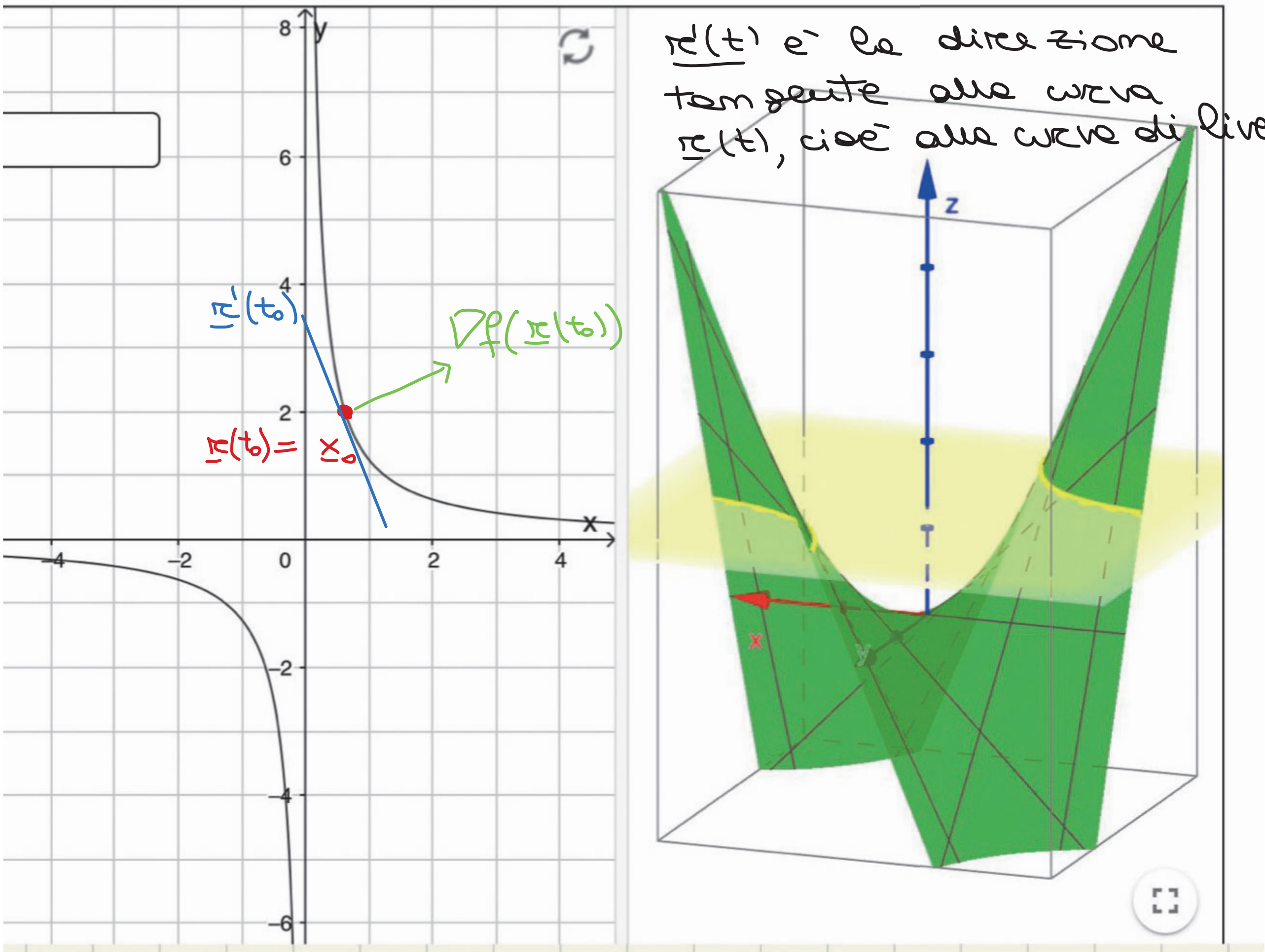
**Teorema** **Ortogonalità del gradiente alle curve di livello** (cioè direzione di crescita nulla)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $A$ e l'insieme di livello $I_k$ è il sostegno di una curva regolare $\underline{r}$

Allora

$$\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0 \quad \text{per ogni } t.$$

FINE




Spiegazione: questo teorema dice 2 cose

(i) se $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ allora $\nabla f(\underline{x}_0) \perp$ curva di livello passante per $\underline{x}_0$

(ii) grazie alla formula del gradiente:

$$0 = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{r}(t)) \quad \text{con } \underline{v} = \underline{r}'(t)$$

cioè la derivata direzionale di $f$ nella direzione tangente alla curva di livello è nulla.

Dim 8 Per ipotesi $I_k$ coincide con il sostegno della curva regolare $\underline{r}(t)$, cioè

$$I_k = \{ \underline{r}(t),\ t \in J \}$$

In particolare $f(\underline{r}(t)) = k \quad \forall t \in J$.

Chiamo $F: J \to \mathbb{R}$ la funzione composta

$$F(t) = f(\underline{r}(t)) = f \circ \underline{r}(t)$$

Da un lato $F(t) = k \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad F'(t) = 0 \quad \forall t$

D'altro lato, per il teorema di derivazione della funzione composta

$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \to \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0$$

FINE

Dim 9  Essendo $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, la formula di Taylor al secondo ordine diventa

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \frac{1}{2} q(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2)$$

(i) $q$ definita positiva, cioè $q(\underline{h})>0 \quad \forall \underline{h}$

$\Rightarrow \quad f(\underline{x}_0+\underline{h}) > f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}\|^2)$

$\Rightarrow$ in una palletta $f(\underline{x}_0+\underline{h}) > f(\underline{x}_0)$

$\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ pto di minimo locale

(ii) $q$ definita negativa $\quad q(\underline{h})<0 \quad \forall \underline{h}$

$\Rightarrow \quad f(\underline{x}_0+\underline{h}) < f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}\|^2)$

(iii) $q$ indefinita, cioè $\exists\ \underline{h}_P, \underline{h}_N$ t.c.

$$q(\underline{h}_P)>0 \qquad e \qquad q(\underline{h}_N)<0$$

$$\Rightarrow \quad f(\underline{x}_0+\underline{h}_P) > f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}_P\|^2)$$

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}_N) < f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}_N\|^2)$$

$\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ punto di sella

FINE

⚠ Se $q$ è semidefinita, il criterio della matrice Hessiana non dà informazioni può accadere di tutto. Infatti esiste $\underline{h}_0 \neq \underline{0}$ t.c. $q(\underline{h}_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(\underline{x}_0 + \underline{h}_0) = f(\underline{x}_0) + o(\|\underline{h}_0\|^2)$$

il resto non è più trascurabile.

FINE

<u>Come applicare il criterio Hessiano:</u>

(i) $\det H_f(x_0,y_0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ min

(ii) $\det H_f(x_0,y_0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ max

(iii) $\det H_f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ sella

⚠ $\det H_f(x_0,y_0) = 0$ procedere in altro modo

FINE

<u>Esempio</u> $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y$

Voglio trovare i punti di estremo locale di $f$ in $\mathbb{R}^2$.

Per il teorema di Fermat i punti di estremo vanno ricercati tra i punti critici.

I punti critici erano $(0,0)$ $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(0,0)=12>0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=6>0$$

$\Rightarrow$ f.q. def. positiva $\Rightarrow$ $(0,0)$ min

$$H_f(\sqrt{2},\sqrt{2})=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H_f(\sqrt{2},\sqrt{2})=-48<0$$

sella

Per simmetria $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ sella

In conclusione: un unico punto di estremo, e' origine, che è punto di minimo locale.

Domanda aggiuntiva: $(0,0)$ è anche min. globale?

Considero la restrizione di f alla retta $y=x$

$$f(x,y)=3x^2+y^2-x^3y$$

$$g(x)=f(x,x)=4x^2-x^4$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

quindi $(0,0)$ non è min globale

FINE

**Teorema** La trasformaz. in coord. sferiche

$$T_1(r,\phi,\theta) = r \sin\phi \cos\theta$$
$$T_2(r,\phi,\theta) = r \sin\phi \sin\theta$$
$$T_3(r,\phi,\theta) = r \cos\phi \qquad \text{con } \phi \in (0,\pi),\ \theta \in [0, 2\pi)$$

ha determinante Jacobiano

$$\det J(r,\phi,\theta) = r^2 \sin\phi \qquad (\text{sempre} > 0)$$

**Dim** 10

$$J(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial r} & \frac{\partial T_1}{\partial \phi} & \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_2}{\partial r} & \frac{\partial T_2}{\partial \phi} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T_3}{\partial r} & \frac{\partial T_3}{\partial \phi} & \frac{\partial T_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\phi \cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

sviluppo il det sull'ultima riga: $\det J(r,\phi,\theta) =$

$$= \cos\phi \left[ r^2 \cos\phi \sin\phi \cos^2\theta + r^2 \cos\phi \sin\phi \sin^2\theta \right]$$
$$+ r\sin\phi \left[ r \sin^2\phi \cos^2\theta + r \sin^2\phi \sin^2\theta \right]$$

$$= \cos\phi \cdot r^2 \cos\phi \sin\phi + r\sin\phi \, r \sin^2\phi$$

$$= r^2 \cos^2\phi \sin\phi + r^2 \sin^2\phi \sin\phi$$

$$= r^2 \sin\phi$$

FINE