Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 17/06/2020

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Nominare il file da caricare con il proprio codice persona
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si consideri un mazzo ben mescolato di 52 carte da poker, e si estraggano 10 carte dal mazzo. Sapendo che la quarta carta estratta è il re di picche, qual è la probabilità che la decima carta estratta

   (a) sia un asso?

   (b) sia il secondo re estratto?

   Il mazzo contiene 4 assi e 4 re.

2. Da una stazione ferroviaria ogni ora partono due treni regionali per Brescia, sempre agli stessi minuti x e y. In fase di progetto, i valori di $X = x$ e $Y = y$ sono stati scelti secondo $X \sim Y \sim \mathcal{U}[0, 60]$, con X e Y indipendenti. Se si arriva alla stazione quando la lancetta dei minuti segna un valore $Z \sim \mathcal{U}[0, 60]$, indipendente da X e Y, qual è la probabilità di aspettare la partenza di un treno per più di mezz'ora? *Suggerimento: immaginarsi di disporre i punti X, Y e Z su una circonferenza.*

3. Sia $X \sim \text{Exp}(1)$. Calcolare $\Pr(\cos(\pi X) > 0.5)$.

4. Un supermercato ha deciso di assegnare un biglietto di lotteria istantanea per ogni scontrino emesso. Ogni biglietto è vincente con probabilità $1/100$. Supponendo che ci siano 10 casse, e che ogni cassa emetta scontrini secondo un processo di Poisson con intensità 10 scontrini ogni ora, indipendentemente dalle altre casse, qual è la legge di probabilità del numero totale di biglietti vincenti in 10 ore?

5. Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di variabili aleatorie con $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$. Sia $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di variabili aleatorie tale che $Y_n = e^{X_n}$. Dire se $\{Y_n\}$ converge in probabilità e, se sì, a quale valore.

6. Si consideri una variabile aleatoria discreta X che può assumere al più m valori diversi. Quali sono i valori minimi e massimi di $\mathsf{H}(X)$? Dare un esempio esplicito di variabile aleatoria che raggiunge il valore minimo di entropia, e un esempio di variabile aleatoria che raggiunge il valore massimo di entropia.

Soluzioni

Problema 1

1. L'unica informazione a disposizione è che un re è già stato estratto, quindi la probabilità che una carta estratta sia un asso è 4/51.

2. Sappiamo che il re di picche è già stato estratto in quarta posizione, e vogliamo imporre che non siano stati estratti altri re in tutte le prime 9 posizioni, e che sia estratto un re nella decima posizione. La probabilità di non estrarre altri re in 8 posizioni è ipergeometrica (estrazioni senza reinserimento):

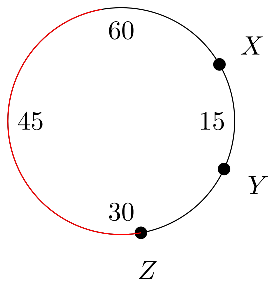
$$\frac{\binom{3}{0}\binom{48}{8}}{\binom{51}{8}}, \tag{1}$$

mentre la probabilità di avere un re in decima posizione, sapendo di avere estratto solo il re di picche nelle prime 9 posizioni è 3/43. La probabilità cercata è dunque

$$\frac{\binom{3}{0}\binom{48}{8}}{\binom{51}{8}} \cdot \frac{3}{43} \approx 0.0413 \tag{2}$$

Problema 2

Siccome lo schema di partenza dei treni si ripresenta identico ogni ora, le distanze in minuti tra le partenze dei treni si possono misurare su una circonferenza di lunghezza 60, come se i punti X, Y e Z venissero scelti casualmente sul quadrante di un orologio: In rosso è stato indicato l'arco temporale in cui i punti X e Y non



devono cadere per soddisfare l'evento di interesse, vale a dire, l'utente arrivato in Z deve aspettare un treno più di mezz'ora. Considerata una particolare realizzazione $Z = z$, i punti X e Y non devono cadere in un arco di 180 gradi. Siccome X e Y sono indipendenti, questo accade con probabilità $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. Giacché questo risultato è valido per ogni realizzazione z, lo sarà anche in media. Quindi la risposta finale è 1/4.

Problema 3

La soluzione della disequazione $\cos(\pi x) > 0.5$ è

$$\{0 \le x \le 1/3\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{2k - 1/3 \le x \le 2k + 1/3\} \tag{3}$$

per valori positivi della x. Siccome tutti gli intervalli nella (3) sono disgiunti, e in un'infinità numerabile, la probabilità cercata è la somma delle probabilità:

$$\begin{aligned}
\Pr(\cos(\pi X) > 0.5) &= \Pr(X \le 1/3) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(2k - 1/3 \le X \le 2k + 1/3) && (4)\\
&= F_X(1/3) + \sum_{k=1}^{\infty} F_X(2k + 1/3) - F_X(2k - 1/3) && (5)\\
&= 1 - e^{-1/3} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{2k-1/3} - e^{2k+1/3} && (6)\\
&= 1 - e^{-1/3} + \frac{e^2}{1 - e^2}(e^{-1/3} - e^{1/3}), && (7)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $F_X(x) = 1 - e^{-x}$.

Problema 4

Per determinare il processo degli arrivi dei biglietti vincenti, facciamo prima un merge dei 10 processi di Poisson degli scontrini, ottenendo così un $\mathcal{PP}(10 \cdot 10 = 100)$. Ogni scontrino è vincente con probabilità 1/100, indipendentemente dagli altri. Questo genera un processo split $\mathcal{PP}(100 \cdot 1/100 = 1)$ di biglietti vincenti, dove 1 è l'intensità media di biglietti vincenti in un'ora. Se si osserva questo processo per 10 ore, si ottiene il numero di biglietti vincenti, che è distribuito come $\mathcal{P}(1 \cdot 10 = 10)$, ovvero una Poisson con media 10.

Problema 5

Per n grande, le v.a. X_n tendono a concentrarsi attorno al valore medio 0, siccome la varianza decresce con n. Questo fatto suggerisce che la successione $\{Y_n\}$ potrebbe convergere in probabilità al valore $e^0 = 1$. Proviamo a dimostrarlo:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - 1| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} \Pr(|e^{X_n} - 1| > \varepsilon) && (8) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr(e^{X_n} > 1 + \varepsilon) + \Pr(e^{X_n} < 1 - \varepsilon) && (9) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n > \ln(1 + \varepsilon)) + \Pr(X_n < \ln(1 - \varepsilon)) && (10) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Pr(Z > n\ln(1 + \varepsilon)) + \Pr(Z < n\ln(1 - \varepsilon)) && (11) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - F_Z(n\ln(1 + \varepsilon)) + F_Z(n\ln(1 - \varepsilon)) && (12) \\
&= 1 - 1 + 0 = 0, && (13)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $nX_n \sim Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e che

$$\lim_{n\to\infty} F_Z(n\ln(1 + \varepsilon)) = 1, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_Z(n\ln(1 - \varepsilon)) = 0, \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1. \tag{15}$$

Problema 6

L'entropia di una variabile aleatoria discreta è tale che

$$0 \leq \mathsf{H}(X) \leq \log_2(m). \tag{16}$$

Un esempio di variabile aleatoria con entropia nulla è quella degenere:

$$p_X(x_1) = 1, \quad p_X(x_j) = 0,\ j = 2, \dots, m. \tag{17}$$

Un esempio di variabile aleatoria con entropia massima è quella uniforme:

$$p_X(x_j) = 1/m,\ j = 1, \dots, m. \tag{18}$$