Informazione e stima – 11/04/2022

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Per gli studenti online: nominare il file da caricare con il proprio codice persona.
- Indicare l'esercizio da escludere dal punteggio finale.

1. Si consideri un mazzo di 52 carte ben mescolato.

   (a) Qual è la probabilità che pescando 2 carte si ottenga un *blackjack*?

   (b) Si supponga di aver pescato due J e di voler *sdoppiare*: si gioca prima con il primo J pescando un'altra carta, e successivamente si gioca con il secondo J pescando un'altra sola carta. Qual è la probabilità di fare almeno un *blackjack*?

   Il punto blackjack si ottiene pescando un asso e una carta che vale 10 *punti (non necessariamente in questo ordine). Le carte che valgono* 10 *punti sono* 10*, J, Q, e K. Nel mazzo ci sono* 4 *carte di ogni tipo.*

2. In tasca si hanno due monete A e B apparentemente indistinguibili. La probabilità di ottenere testa con la moneta A è $1/4$, mentre con la moneta B è $1/2$. Pescate una moneta a caso e cominciate a lanciarla.

   (a) Calcolare il valore atteso dei lanci necessari per ottenere testa per la prima volta.

   (b) Dopo aver osservato che il risultato del primo lancio è stato testa, qual è la probabilità di aver lanciato la moneta A?

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti ed esponenziali di parametri λ e μ, rispettivamente. Determinare la legge di probabilità di $Z = X/Y$.

4. Sia $W = |X + Y|$, dove $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$, $Y \sim \mathcal{N}(-1, 9)$, e $\rho[X, Y] = 0.5$. Calcolare $\Pr(W < 2)$.

5. La media delle temperature rilevate dalle 15 stazioni situate a Milano è di 20 gradi, con una varianza di 1 grado^2, mentre la media delle temperature dalle 5 stazioni situate a Bergamo è di 18 gradi, con una varianza di 1.5 gradi^2. Calcolare la media totale e la varianza totale delle temperature.

6. Sia X_n una v.a. con legge $f_{X_n}(x) = n(1 - n|x|)$ per $|x| < \frac{1}{n}$ e $f_{X_n}(x) = 0$ altrove. Stabilire se la sequenza $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge in probabilità e, se sì, a quale valore.

Soluzioni

Problema 1

Il problema consiste in estrazioni da un mazzo senza reinserimento. Il mazzo totale contiene 4 assi e $4 \cdot 4 = 16$ carte con punteggio 10. Il mazzo è ben mescolato, dunque lo spazio di probabilità è uniforme.

1. La probabilità cercata è ipergeometrica, dove si vuole estrarre esattamente una carta dal gruppo di assi ed esattamente una carta dal gruppo $\{10, J, Q, K\}$:

$$\Pr(\text{blackjack}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{1}\binom{32}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{4 \cdot 16}{52 \cdot 51} \cdot 2 \approx 0.0483. \tag{1}$$

2. Per calcolare la probabilità di fare almeno un blackjack è conveniente calcolare il complemento a 1 della probabilità di non fare alcun blackjack. La probabilità di non fare un blackjack con il primo J è:

$$\Pr(\text{no blackjack con primo J}) = 1 - \frac{4}{50} \tag{2}$$

perché non si devono pescare i 4 assi sulle 50 carte rimanenti nel mazzo. La probabilità di non fare un blackjack con il secondo J, sapendo di non aver fatto blackjack con il primo J è:

$$\Pr(\text{no blackjack con secondo J}|\text{no blackjack con primo J}) = 1 - \frac{4}{49} \tag{3}$$

perché non si devono pescare i 4 assi rimasti dalle $52 - 3 = 49$ carte rimanenti nel mazzo. La probabilità cercata è dunque:

$$\Pr(\text{almeno un blackjack sdoppiando i J}) = 1 - \left(1 - \frac{4}{50}\right)\left(1 - \frac{4}{49}\right) \approx 0.1551 \tag{4}$$

Problema 2

Sia Y il numero di lanci totali per osservare la prima testa. Dai dati del problema si ha che $\{Y|A\} \sim \text{Geom}(1/4)$ e $\{Y|B\} \sim \text{Geom}(1/2)$ perché, una volta che si è scelta una moneta, si fanno lanci indipendenti della moneta fino ad ottenere la prima testa. Applicando la legge dell'aspettazione totale si ha che:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[Y] &= \Pr(A)\mathsf{E}[Y|A] + \Pr(B)\mathsf{E}[Y|B] && (5)\\
&= \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 && (6)\\
&= 2 + 1 = 3. && (7)
\end{aligned}$$

Supponendo di aver ottenuto testa al primo lancio, la probabilità di aver lanciato la moneta A si trova grazie alla regola di Bayes:

$$\begin{aligned}
\Pr(A|T) &= \frac{\Pr(T|A)\Pr(A)}{\Pr(T)} && (8)\\
&= \frac{\Pr(T|A)\Pr(A)}{\Pr(T|A)\Pr(A) + \Pr(T|B)\Pr(B)} && (9)\\
&= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} && (10)\\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}} && (11)\\
&= \frac{1}{3}. && (12)
\end{aligned}$$

Problema 3

Le leggi di X e Y sono

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y} & y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{13}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu y} & y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{14}$$

Valutiamo la legge di $Z = X/Y$ tramite la cumulata. Innanzitutto notiamo che Z potrà essere solo positiva, perché rapporto di quantità positive.

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Pr(Z \le z) = \Pr(X/Y \le z) = \Pr(X \le zY) && (15)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(X \le zY | Y = y) f_Y(y) dy && (16)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(X \le zy) f_Y(y) dy && (17)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(zy) f_Y(y) dy && (18)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-\lambda zy}) \mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{zy>0} \mathbb{1}_{y>0} dy && (19)\\
&= \int_{0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda zy}) \mu e^{-\mu y} dy && (20)\\
&= 1 - \mu \int_{0}^{\infty} e^{-y(\lambda z+\mu)} dy && (21)\\
&= 1 + \frac{\mu}{\lambda z + \mu} \left| e^{-y(\lambda z+\mu)} \right|_0^{\infty} && (22)\\
&= 1 - \frac{\mu}{\lambda z + \mu}, \qquad z > 0 && (23)
\end{aligned}$$

e 0 altrimenti. Calcolando la derivata si ottiene

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z}{dz}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{(\lambda z+\mu)^2} & z > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{24}$$

Problema 4

Cominciamo col caratterizzare la v.a. $T = X + Y$. La somma di due v.a. Gaussiane è Gaussiana, con

$$\mathsf{E}[T] = \mathsf{E}[X + Y] = 1 - 1 = 0 \tag{25}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}[T] &= \mathsf{Var}[X + Y] = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[Y] + 2\mathsf{Cov}[X, Y] && (26)\\
&= \mathsf{Var}[X] + \mathsf{Var}[Y] + 2\rho[X, Y]\sqrt{\mathsf{Var}[X]}\sqrt{\mathsf{Var}[Y]} && (27)\\
&= 4 + 9 + 2\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{9} = 19. && (28)
\end{aligned}$$

Dunque si ha $T \sim \mathcal{N}(0, 19)$. La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}
\Pr(|T| < 2) &= \Pr(-2 < T < 2) = \Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{19}} < \frac{T}{\sqrt{19}} < \frac{2}{\sqrt{19}}\right) && (29)\\
&= \Pr\left(-\frac{2}{\sqrt{19}} < Z < \frac{2}{\sqrt{19}}\right) && (30)\\
&= 2\Pr\left(0 < Z < \frac{2}{\sqrt{19}}\right) && (31)\\
&= 2\left(\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{19}}\right) - \Phi(0)\right) && (32)\\
&\approx 2 \cdot 0.1768 = 0.3472. && (33)
\end{aligned}$$

Problema 5

Siano X i dati di temperatura, e gli eventi $Y = 1$ per indicare la stazione di Milano e $Y = 2$ la stazione di Bergamo. I dati del problema sono:

$$\mathsf{E}[X|Y] = \begin{cases} 20 & \text{con prob } p_Y(1) = \frac{15}{15+5} = \frac{3}{4} \\ 18 & \text{con prob } p_Y(2) = \frac{5}{15+5} = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{34}$$

$$\mathsf{Var}[X|Y] = \begin{cases} 1 & \text{con prob } p_Y(1) = \frac{3}{4} \\ 1.5 & \text{con prob } p_Y(2) = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{35}$$

La media totale è:

$$\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X|Y]] = 20 \cdot \frac{3}{4} + 18 \cdot \frac{1}{4} = 19.5 \tag{36}$$

Supponendo che tutte le rilevazioni siano indipendenti, la varianza totale è:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}[X] &= \mathsf{E}[\mathsf{Var}[X|Y]] + \mathsf{Var}[\mathsf{E}[X|Y]] &(37)\\
&= 1 \cdot \frac{3}{4} + 1.5 \cdot \frac{1}{4} + (20 - 19.5)^2 \cdot \frac{3}{4} + (18 - 19.5)^2 \frac{1}{4} &(38)\\
&= \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = 1.875. &(39)
\end{aligned}$$

Problema 6

Si può notare come f_{X_n} abbia la forma di un triangolo isoscele con altezza n e lunghezza di base pari a $\frac{2}{n}$. Al crescere di n la legge di probabilità si concentra sempre più attorno al valore $x = 0$. Dunque testiamo la convergenza in probabilità al valore $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - 0| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n < -\varepsilon) + \Pr(X_n > \varepsilon) &(40)\\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \Pr(X_n > \varepsilon) &(41)\\
&= 0, \qquad \forall \varepsilon > 0, &(42)
\end{aligned}$$

dove in (41) abbiamo fatto uso della simmetria pari della f_{X_n}, e in (42) del fatto che fissato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ esiste un valore $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ si ha che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ e dunque che $X_n < \varepsilon$ con probabilità 1.

Rimane dunque dimostrato che $X_n \xrightarrow{P} 0$.