

1 Proprietà relazioni

Seriale

$\forall a \in A \exists b \in A (a, b) \in R$

Grafo: ogni vertice ha una freccia uscente

Matrice: ogni riga ha almeno un "1"

Riflessiva

$\forall a \in A (a, a) \in R$

Grafo: ogni vertice ha un cappio

Matrice: sulla diagonale ho tutti "1"

Simmetrica

$\forall a, b \in A (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

Grafo: Ogni freccia in una direzione ne ha una della direzione opposta

Matrice: $Mr = Mr^T$

Antisimmetrica

$\forall a, b \in A$ se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

Grafo: Non ci devono essere doppie frecce

Matrice: eccetto la diagonale, se in pos (i,j) c'è un 1, allora in posizione (j,i) ci deve essere 0

Transitiva

$\forall a, b, c \in A (a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Grafo: se a è collegato a b e b è collegato a c anche a deve essere collegato a c

Matrice: $Mr^2 \subseteq Mr$

Osservazioni

- seriale \nRightarrow riflessiva
- antisimmetrica \nRightarrow non simmetrica
- transitiva + simmetrica \nRightarrow riflessiva
- riflessiva \Rightarrow seriale
- transitiva + simmetrica + seriale \Rightarrow riflessiva

Relazioni di equivalenza

Una relazione si dice di equivalenza se è riflessiva, transitiva, simmetrica (tutti i possibili collegamenti in ogni componente connessa nel grafo)

Relazioni d'ordine

Una relazione si dice d'ordine se è riflessiva, transitiva, antisimmetrica (per esistere una ch d'ordine la relazione deve essere antisimmetrica, se facendo la chiusura riflessiva e transitiva rimane antisimmetrica ora è una ch d'ordine)

Elementi estremali

- Massimo: se $\forall x \in A a \leq x$
- Minimo: se $\forall x \in A a \geq x$
- Minimale: $\forall x \in A$ se $x \leq a \Rightarrow x = a$
- Massimale: $\forall x \in A$ se $x \geq a \Rightarrow x = a$

Oss: Un minimo è minimale, un massimo è massimale (minimali e massimali esistono in relazioni d'ordine)

Maggiorante/minorante, sup/inf

Un elemento m si dice

- Maggiorente di B se $\forall b \in B b \leq m$
- Minorante di B se $\forall b \in B b \geq m$
- Estremo sup di B se è il minimo dei maggioranti (se esiste)
- Estremo inf di B se è il massimo dei minoranti (se esiste)

1.1 funzioni in relazioni

Proprietà della funzionalità :

Grafo: un elemento punta solo ad un altro (possono esserci varie funzioni da una relazione, ma la relazione deve essere per forza seriale) Matrice: per avere una funz devo avere un 1 per riga

Funzione iniettiva (ha inversa destra):

Matrice: in ogni colonna c'è al più un 1

Funzione suriettiva (ha inversa sinistra):

Matrice: in ogni colonna c'è almeno un 1

2 Logica proposizionale

Sintassi

- Lettere enunciative: A_1, A_2, \dots, A_n
- Connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$
- Simboli ausiliari: $() ;$

Formula ben formata

1. Ogni lettera enunciativa è una f.b.f.
2. Se A, B sono f.b.f. allora $(A \Rightarrow B), (A \Leftarrow B), (A \wedge B), (A \vee B), (\neg A)$ sono f.b.f.
3. Nient'altro è una f.b.f.

Priorità connettivi: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$

Significato connettivi

- $(A \Rightarrow B)$ Sempre vero se A=0, Se A=1 vero solo se anche B=1
- $(A \Leftarrow B)$ Vero se A=B
- $(A \Rightarrow B) = \neg A \vee B$
- $(A \Leftarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

2.1 equivalenze

- $A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$
- $(\neg A \wedge A) \vee B = B$
- $A \wedge (A \vee B) = A$
- $A \vee (A \wedge B) = A$
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Una f.b.f. A si dice soddisfacibile se esiste almeno una interpretazione che è modello di A
- Una f.b.f. A per cui ogni interpretazione è un modello si dice tautologia
- Una f.b.f. che non ammette modelli si dice insoddisfacibile
- Una f.b.f. B che ha gli stessi modelli di A si dice conseguenza semantica di A

Risoluzione logica proposizionale

- Letterali: Una lettera enunciativa (A) o la sua negata ($\neg A$)
 - Clausola: Insieme di letterali (disgiunzione di letterali) $\{\neg A, B, C\}, \{B, C, D\}$
1. Portare in forma normale congiuntiva es: $(A \vee B \vee \neg C) \wedge (B \vee D \vee \neg A)$ (or tra lettere e and tra gruppi)
 2. Convertire a letterali e clausole es: $\{A, B, \neg C\}, \{B, D, \neg A\}$ (ogni parentesi diventa una clausola con i propri letterali dentro)
 3. L'obiettivo è raggiungere la clausola vuota, abbinando una clausola con un'altra ed eliminando IL letterale che in una è normale e nell'altra è negato

3 Logica del primo ordine

3.1 sintassi

- Lettere predicative: $D(x, y) = 0/1$ falso o vero (es uguaglianza)
- Lettere funzionali: $P(x, y) = x \cdot y$ risultato della funzione (es moltiplicazione)
- variabili/ costanti (es x,y/a,b)
- connettivi soliti
- quantificatori: \exists, \forall

Per chiudere una formula del primo ordine si quantifica ogni variabile libera con il \forall

Forma normale prenessa

Sposto tutti i quantificatori in testa (dopo aver chiuso la formula)

Forma di skolem

- la formula non deve più contenere \exists
- sostituisco le variabili precedute da \exists con tante lettere funzionali quanti \forall ci sono prima del \exists che devo togliere (le variabili che uso sono quelle dei \forall precedenti al \exists che ho tolto)

3.2 equivalenze

- $\neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x)$
- $\neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$
- $\forall x(A(x) \wedge B) = \forall y(A(y) \wedge B(y))$
- (vale anche per \exists e anche per \vee) (estraendo un quantificatore da \vee o \wedge non lo cambio) (si rinomina la variabile per sicurezza)
- $\forall x A(x) \Rightarrow B = \exists y(A(y) \Rightarrow B)$
- $\forall x B \Rightarrow A(x) = \forall y(B \Rightarrow A(y))$
- estraendo un quantificatore da un \Rightarrow si cambia se lo si estrae dal primo termine, non si cambia se lo si estrae dal secondo termine

3.3 Forma a clausole

$\forall x_1, \dots, \forall x_n ((L_1 \vee L_2 \vee L_3) \wedge (\dots) \wedge \dots)$

4 algebra

4.1 strutture algebriche

- semigrupp \rightarrow proprietà associativa
- monoidi \rightarrow semigrupp + elemento neutro
- gruppo \rightarrow monoide + inverso
- gruppo abelliano \rightarrow gruppo + commutatività
- anello $(A, +, \cdot)$ dove $A(+)$ gruppo abelliano e $A(\cdot)$ semigrupp e vale la proprietà distributiva $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
- corpo \rightarrow anello + gli elementi $\neq 0$ sono invertibili + elemento neutro
- campo \rightarrow corpo + commut rispetto a \cdot