1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

1. Non negatività: $P(A) > 0$
2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti A e B: $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: $A_1, A_2, A_3 ...$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

1.2 Leggi di probabilità uniformi

Legge uniforme discreta
$P(A) = \frac{\#\text{casi favorevoli ad} A}{\#\text{casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Legge uniforme continua
$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)}\ \forall A \subseteq \Omega$

2 Probabilità condizionate

Definizione di probabilità condizionata: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Regola moltiplicativa: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho A_1, A_2, A_3 disgiunti che formano una partizione di Ω:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A))}{P(B)}$$

Indipendenza
Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?
casi tot $= n(n-1)(n-2)... = n!$

3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con k elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti. $0 \leq k \leq n$
sequenze ordinate di k elementi $= \frac{n!}{(n-k)!k!}$
$C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Probabilità binomiale
Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo n prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con k_i estrazioni di tipo i ci sono.
totale di scelte $= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$