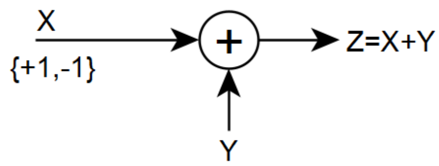
Informazione e Stima: Esercitazione 4

davide.scazzoli@polimi.it

2023

1 Canale con rumore Laplaciano

Rappresentiamo il problema con uno schema:



Dal testo abbiamo $X \perp Y$ con $Y \sim \text{Laplace}(\lambda)$ e

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } p \\ -1 & \text{con prob. } 1-p \end{cases} \tag{1}$$

Per trovare $\mathbb{P}(X = 1|Z = z)$ possiamo applicare Bayes.

$$\mathbb{P}(X = 1|Z = z) = \frac{f_{Z|X}(z|1)\mathbb{P}_X(1)}{f_Z(z)} \tag{2}$$

Troviamo la ddp condizionata:

$$f_{Z|X}(z|1) = f_{X+Y|X}(z|1) = f_{Y+1|X}(z|1) = f_{Y|X}(z-1|1) \stackrel{\perp}{=} f_Y(z-1) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z-1|} \tag{3}$$

Per trovare $f_Z(z)$ posso applicare il teorema delle probabilità totali:

$$f_Z(z) = \mathbb{P}_X(1)f_{Z|X}(z|1) + \mathbb{P}_X(-1)f_{Z|X}(z|-1) = p\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z-1|} + (1-p)\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z+1|} \tag{4}$$

Sostituendo:

$$\mathbb{P}(X = 1|Z = z) = \frac{p\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z-1|}}{p\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z-1|} + (1-p)\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z+1|}} = \frac{p}{p + (1-p)e^{-\lambda(|z+1|-|z-1|)}} \tag{5}$$

Verifichiamo la formula nei 4 casi:

1.
$$\lim_{p\to 0^+} \mathbb{P}(X=1|Z=z)=0 \tag{6}$$

Questo ci dice che indipendentemente dal valore di z non è stato trasmesso $X=1$

2.
$$\lim_{p\to 1^-} \mathbb{P}(X=1|Z=z)=1 \tag{7}$$

Questo ci dice che indipendentemente dal valore di z è stato trasmesso $X=1$

3.
$$\lim_{\lambda\to 0^+} \mathbb{P}(X=1|Z=z)=p \tag{8}$$

Questo implica che Z non ci da informazioni su X

4.
$$\lim_{\lambda\to \infty} \mathbb{P}(X=1|Z=z)=\begin{cases}1 & z>0\\ 0 & z<0\end{cases} \tag{9}$$

Questo ci dice che noto z sappiamo con certezza quale X è stato trasmesso.

2 Lancio di moneta non bilanciata

Dal testo abbiamo $\{X|Q=q\} \sim \text{Bern}(q)$,
quindi $\mathbb{P}(X=1|Q=q)=q$, inoltre viene fornito:

$$f_Q(q) = \begin{cases} 6q(1-q) & 0 \leq q \leq 1 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{10}$$

Utilizziamo il theorema di Bayes

$$f_{Q|X}(q|x) = \frac{\mathbb{P}_{X|Q}(x|q) f_Q(q)}{\mathbb{P}_X(x)} \tag{11}$$

$$\mathbb{P}_X(x) = \int_0^1 \mathbb{P}_{X|Q}(x|q) f_Q(q) dq \tag{12}$$

Valutiamo nei casi in cui x=1 e x=0:

$$\mathbb{P}_X(1) = \int_0^1 q \cdot 6q(1-q)dq = 6\left[\frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} \tag{13}$$

$$\mathbb{P}_X(0) = 1 - \mathbb{P}_X(1) = \frac{1}{2} \tag{14}$$

Sostituendo otteniamo:

$$f_{Q|X}(q|1) = \begin{cases} 12q^2(1-q) & 0 \leq q \leq 1 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{15}$$

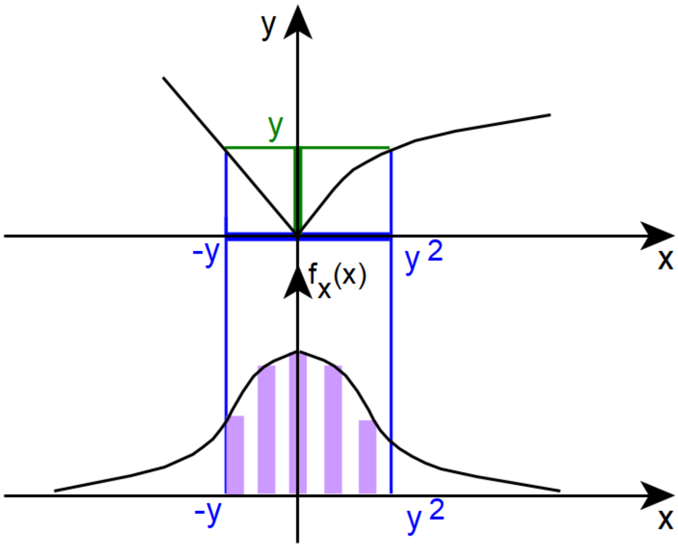
$$f_{Q|X}(q|0) = \begin{cases} 12q(1-q)^2 & 0 \leq q \leq 1 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{16}$$

3 Trasformazione di una Gaussiana

Dal testo abbiamo $X \sim \mathbb{N}(0,1)$ e $Y = g(x)$ con:

$$g(t) = \begin{cases} -t & t \leq 0 \\ \sqrt{t} & t > 0 \end{cases} \tag{17}$$

3.1 Metodo della cumulata



$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) \overset{\text{dal grafico}}{=} \mathbb{P}(-y \leq X \leq y^2) = \begin{cases} F_X(y^2) - F_X(-y) & y \geq 0 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{18}$$

Otteniamo la densità derivando la cumulata:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = \begin{cases} \frac{dF_X}{dy}(y^2) - \frac{dF_X}{dy}(-y) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{19}$$

$$= \begin{cases} f_X(y^2) \cdot 2y - f_X(-y) \cdot (-1) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2y \cdot e^{-\frac{1}{2}y^4} + e^{-\frac{1}{2}y^2} \right) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{21}$$

3.2 Metodo diretto

Se $g(x)$ è invertibile abbiamo:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{d}{dx}g(x)\right|_{x=g^{-1}(y)}} \tag{22}$$

La funzione $g(x)$ non è invertibile, ma è invertibile a tratti se la spezziamo nelle due parti $x > 0$ e $x < 0$, quindi:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(-y)}{|-1|} + \frac{f_X(y^2)}{\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=y^2}} = \begin{cases} f_X(-y) + f_X(y^2) \cdot 2y & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{23}$$

4 Trasformazione quadratica

Possiamo risolverlo alla stessa maniera dell'esercizio 3,
ad esempio col metodo della cumulata abbiamo:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{24}$$

Otteniamo la densità derivando la cumulata:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = \begin{cases} \frac{dF_X}{dy}(\sqrt{y}) - \frac{dF_X}{dy}(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{25}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\Big(f_X(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y})\Big) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \tag{26}$$

5 Correlazione lineare

Per prima cosa calcoliamo la Varianza della trasformazione lineare:

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X] \tag{27}$$

Per cui la deviazione standard è:

$$\sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X \tag{28}$$

Applichiamo la definizione:

$$\begin{align}
\rho[aX + b, Y] &= \frac{cov[aX + b, Y]}{\sigma_{aX+b}\sigma y} \tag{29}\\
&= \frac{E[(aX + b)Y] - E[aX + b]E[Y]}{|a|\sigma_x\sigma_y} \tag{30}\\
&= \frac{aE[XY] + bE[Y] - aE[X]E[Y] - bE[Y]}{|a|\sigma_x\sigma_y} \tag{31}\\
&= \frac{a}{|a|} \cdot \frac{(E[XY] - E[X]E[Y])}{\sigma_x\sigma_y} \tag{32}\\
&= \frac{a}{|a|}\rho[X, Y] \tag{33}
\end{align}$$

6 Treni in ritardo

X, Y: Ritardi treno 1 e 2, $X \perp Y$
$X \sim \text{Exp}(\lambda)$
$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$
$Z = X - Y$, dobbiamo trovare f_Z
Possiamo dividere il problema in due casi:

6.1 $z \geq 0$

Applichiamo sempre il metodo della cumulata:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X - Y \leq z) = \mathbb{P}(Y \geq X - z) = \int_0^\infty \int_0^{y+z} f_{X,Y}(x, y)dxdy = ... \tag{34}$$

Sfrutto l'indipendenza tra X e Y:

$$... = \int_0^\infty \int_0^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dxdy = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \int_0^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} dxdy = ... \tag{35}$$

$$... = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda(y+z)})dy = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda z} \qquad z \geq 0 \tag{36}$$

6.2 $z \leq 0$

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X - Y \leq z) = \mathbb{P}(Y \geq X - z) = \int_0^\infty \int_{x-z}^\infty f_{X,Y}(x, y)dydx = ... \tag{37}$$

Seguendo gli stessi passaggi del punto precedente si ottiene:

$$... = \int_0^\infty \int_{x-z}^\infty \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dydx = ... = \frac{e^{\lambda z}}{2} \qquad z \leq 0 \tag{38}$$

Mettiamo assieme e deriviamo per ottenere la densità di probabilità:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{\lambda z} & z \leq 0 \end{cases} \tag{39}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ \frac{\lambda}{2}e^{\lambda z} & z \leq 0 \end{cases} \tag{40}$$

Quindi otteniamo $Z \sim \text{Laplace}(\lambda)$

6.3 Applicando il teorema delle probabilità totali:

Fissiamo il ritardo di uno dei treni (ad esempio X) ed integriamo su di esso:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_X(x) f_{Z|X}(z|x)dx && (41)\\
&= \int_0^\infty f_X(x) f_{X-Y|X}(z|x)dx && (42)\\
\text{(Sfrutto il cond. X=x)} &= \int_0^\infty f_X(x) f_{x-Y|X}(z|x)dx && (43)\\
&= \int_0^\infty f_X(x) f_{Y|X}(x-z|x)dx && (44)\\
\text{(Sfrutto: } X \perp Y) &= \int_0^\infty f_X(x) f_Y(x-z)dx && (45)
\end{aligned}
$$

Per fissare gli estremi di integrazione usare dobbiamo capire com'è fatta $f_Y(x-z)$:

$$
\begin{aligned}
f_Y(x-z) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-z)} & x-z>0 \\ 0 & x-z<0 \end{cases} && (46)\\
&= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-z)} & x>z \\ 0 & x<z \end{cases} && (47)
\end{aligned}
$$

Vi è una condizione implicita che impone $x > z$, abbiamo quindi:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \begin{cases} \displaystyle\int_z^\infty \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx & z>0 \\ \displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx & z<0 \end{cases} && (48)\\
&= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ \dfrac{\lambda}{2} e^{\lambda z} & z \leq 0 \end{cases} && (49)
\end{aligned}
$$

7 Gaussiane in coordinate polari

Dal testo abbiamo: $X \sim Y \sim \mathbb{N}(0,1)$, con $X \perp Y$
Abbiamo la trasformazione $(X,Y) \to (R,\Theta), R \geq 0 \quad \Theta \in [0, 2\pi)$ tale che:

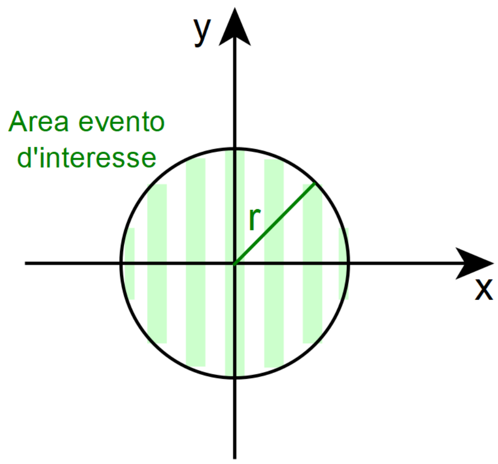
$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases} \tag{50}$$

Dobbiamo dimostrare che $R \perp \Theta$, cioè:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \cdot f_\Theta(\theta) \quad \forall (r,\theta) \tag{51}$$

7.1 a) $f_R(r)$

Applichiamo il metodo della cumulata.
Abbiamo che $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ quindi possiamo identificare graficamente l'evento d'interesse:



$$F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = \mathbb{P}(R^2 \leq r^2) = \mathbb{P}(X^2+Y^2 \leq r^2) = ... \tag{52}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy \overset{X \perp Y}{=} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \left(dxdy = \rho d\rho d\theta \right) = ... \tag{53}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{\rho^2}{2}} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\dfrac{\rho^2}{2}} \rho d\rho = \left(\text{Sostituzione } \mu = \frac{\rho^2}{2}, d\mu = \rho d\rho \right) = ... \tag{54}$$

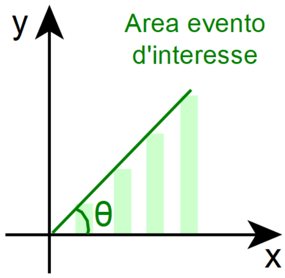
$$\int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-\mu} d\mu = \begin{cases} 1 - e^{-\dfrac{r^2}{2}} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \tag{55}$$

Deriviamo per trovare la densità:

$$f_R(r) = \frac{dF_R}{dr}(r) = \begin{cases} re^{-\dfrac{r^2}{2}} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \tag{56}$$

7.2 b) $f_\Theta(\theta)$

Applichiamo lo stesso procedimento:



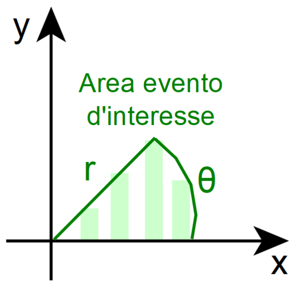
$$F_\Theta(\theta) = \mathbb{P}(\Theta \le \theta) = \int_0^\infty \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\theta d\rho = \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^\infty \rho \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = ... \tag{57}$$

$$= \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} d\theta = \begin{cases} \frac{\theta}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{58}$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{dF_\Theta}{d\theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{59}$$

7.3 c) $f_{R,\Theta}(r, \theta)$

Applichiamo sempre lo stesso procedimento:



$$F_{\Theta,R}(\theta, r) = \mathbb{P}(\Theta \le \theta, R \le r) = \int_0^\theta \int_0^r \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho d\theta = ... \tag{60}$$

$$= \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} d\theta \int_0^r \rho \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \begin{cases} F_\Theta(\theta) F_R(r) & 0 \le \theta \le 2\pi, r \ge 0 \\ 0 & \text{Altr.} \end{cases} \tag{61}$$

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{d}{dr} \frac{d}{d\theta} F_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{d}{dr} F_R(r) \frac{d}{d\theta} F_\Theta(\theta) = f_R(r) f_\Theta(\theta) \tag{62}$$

8 Correlazione di somme e differenze

Possiamo applicare la definizione:

$$\rho[X-Y, X+Y] = \frac{E[(X-Y)(X+Y)] - E[(X-Y)]E[(X+Y)]}{\sigma_{X-Y} \cdot \sigma_{X+Y}} \tag{63}$$

$$= \frac{E[X^2 - Y^2] - (E[X] - E[Y])(E[X] + E[Y])}{\sigma_{X-Y} \cdot \sigma_{X+Y}} \tag{64}$$

$$= \frac{E[X^2] - E[Y^2] - (E[X]^2 - E[Y]^2)}{\sigma_{X-Y} \cdot \sigma_{X+Y}} \tag{65}$$

$$= \frac{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}{\sigma_{X-Y} \cdot \sigma_{X+Y}} = 0 \tag{66}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il dato del testo che ci dice $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

9 Coefficiente di correlazione

Possiamo sempre usare la definizione:

$$
\begin{aligned}
\rho[X,Y] &= \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sigma_X\sigma_Y} && (67)\\
&= \frac{E[X(a+bX+cX^2)-E[X]E[a+bX+cX^2]}{\sigma_X\sigma_{a+bX+cX^2}} && (68)\\
&= \frac{aE[X]+bE[X^2]+cE[X^3]-aE[X]-bE[X]^2-cE[X]E[X^2]}{\sigma_X\sigma_{a+bX+cX^2}} && (69)\\
&= \frac{b}{\sigma_X\sigma_{a+bX+cX^2}} && (70)\\
& && (71)
\end{aligned}
$$

Possiamo ricavare dai dati del problema:
$\sigma_X = \sqrt{E[X^2]-E[X]^2} = 1$,
rimane $\sigma_{a+bX+cX^2}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{a+bX+cX^2} &= Var[a+bX+cX^2] = Var[bX+cX^2] && (72)\\
&= E[(bX+cX^2)^2]-E[bX+cX^2]^2 && (73)\\
&= b^2E[X^2]+2bcE[X^3]+c^2E[X^4]-\big(bE[X]+cE[X^2]\big)^2 && (74)\\
&= b^2+3c^2-c^2 = b^2+2c^2 && (75)
\end{aligned}
$$

Sostituendo otteniamo

$$\rho[X,Y] = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}} \tag{76}$$