

1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

- 1. Non negatività: $P(A) > 0$
- 2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
- 3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti A e B : $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: $A_1, A_2, A_3 \dots$

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

1.2 Leggi di probabilità uniformi

Legge uniforme discreta

$$P(A) = \frac{\text{\#casi favorevoli ad A}}{\text{\#casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Legge uniforme continua

$$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

2 Probabilità condizionate

Definizione di probabilità condizionata:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Regola moltiplicativa: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho A_1, A_2, A_3 disgiunti che formano una partizione di Ω :
 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Indipendenza

Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B)$, $P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?
casi tot = $n(n-1)(n-2) \dots = n!$

3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con k elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti.
 $0 \leq k \leq n$
#sequenze ordinate di k elementi = $\frac{n!}{(n-k)!k!}$
 $C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Probabilità binomiale

Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo n prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con k_i estrazioni di tipo i ci sono.
#totale di scelte = $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4}$

4 Variabili aleatorie discrete

4.1 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim \text{Geom}(p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova.

Legge di perdita di memoria

$$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \implies E[X-t|X>t] = E[X]$$

(Vale solo per v.a. Geom)

4.2 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim \text{Bin}(n, p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova ed n è il numero di prove.

$$E[X] = np, \text{Var}[X] = np(1-p)$$

$$\text{Var}[X] < \frac{n}{4}$$

4.3 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim \text{Bern}(p)$ Dove p è la probabilità di successo.
 $E[X] = p, \text{Var}[X] = p(1-p)$

4.4 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.

Legge dello statistico inconsapevole

Data v.a. $Y = g(X)$, Y è una v.a.

$$E[Y] = E[g(x)]$$

Nel caso lineare:

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

Valore atteso condizionato

$$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$$

Legge dell'aspettativa totale

Con A_1, A_2, \dots, A_n partizioni di Ω

$$E[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot E[X|A_i]$$

4.5 Varianza

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.

Proprietà varianza

$$\text{Var}[X] \geq 0 \quad \forall \text{ v.a. } X$$

$$\text{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot \text{Var}[X]$$

Scarto quadratico medio

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

5 V.a. discrete multiple

5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a. X e Y, $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di X: $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$

Legge di probabilità condizionata

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\sum_t p_{X,Y}(t,y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

Regola moltiplicativa

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$$

5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a. X e Y sono dette indipendenti ($X \perp Y$)
 $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di X e Y.

$$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$$

Caso lineare: $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$

Se $X \perp Y$ allora $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

5.4 Varianza per v.a. multiple

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$$

Se $X \perp Y$ allora $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

6 Variabili aleatorie continue

Valore atteso e varianza

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_x(x) dx$$

Legge dello statistico inconsapevole: $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_x(x) dx$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

6.1 V.a. uniforme continua

$$X \sim \mathbb{U}[a, b]$$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}, \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

6.2 Funzione cumulativa di probabilità

$$P(X \leq x) = F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$$

Proprietà

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- F_x è una funzione non decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} F_x(x) = f_x(x)$, F_x è la funzione integrale di f_x

6.3 V.a. gaussiana

$$X \sim \text{Norm}[E[x], \text{Var}[X]] = \text{Norm}[\mu, \sigma^2]$$

Cumulata della gaussiana

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

7 V.a. continue multiple

Densità di probabilità congiunta

$$P((X, Y) \in S) = \iint_{(x,y) \in S} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$f_{X,Y}$ è la densità di probabilità congiunta.

Valore atteso

$$E[g(X, Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Con g funzione deterministica nota.

Legge di probabilità marginale

$$f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Densità marginale di X.

Indipendenza tra due v.a. continue

X e Y sono dette indipendenti $\iff f_{X,Y}(x, y) =$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Densità di probabilità condizionata

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,t) dt}$$

8 Regola di bayes e funzioni di v.a.

Regola di bayes nel continuo

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)}$$

Per le v.a. discrete basta cambiare la funzione continua con la probabilità.

8.1 Calcolo della funzione di una v.a. continua

Ho X v.a. con legge nota f_x e $Y = g(X)$ con g deterministica e nota, voglio trovare f_y .

Approccio tramite la cumulata

1- Calcolo la cumulata di Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

2. Calcolo f_Y

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

Trasformazioni lineari di v.a.

X è una v.a. con legge f_X nota e $Y = aX + b$ con costanti note.

$$f_Y(y) = f_X(\frac{y-b}{a} \cdot \frac{1}{|a|}), \text{ se } a \neq 0 \text{ allora } Y = b$$

Trasformazione monotona di v.a.

$Y = g(X)$ con g deterministica nota e strettamente monotona.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left|\frac{dg}{dx}(x)\right|} = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{dg}{dx}(g^{-1}(y))\right|}$$

Con $y = g(x)$ e $x = g^{-1}(y)$

Nota: se g non è strettamente monotona (ad es. $g(x) = x^2$) la $f_Y(y)$ sarà: "formula diretta con g decrescente" + "formula diretta con g crescente".

9 Statistiche congiunte

Legge della somma di v.a.

Date X e Y due v.a. discrete e $X \perp Y$ e $W = X + Y$

$$P_W(w) = P(W = w) = P(X + Y = w) = \sum_x p_X(x) \cdot p_Y(w - x), \quad y = w - x$$

La legge della somma di due v.a. **indipendenti** è la convoluzione delle leggi di probabilità.

Calcolo della somma di convoluzione con il metodo grafico

- Sovrapporre graficamente le 2 leggi di prob

- "Ribaltare" una delle 2 leggi (ad es. P_Y)

- Traslare di w posizioni la legge che ho ribaltato (traslazione a destra se $w > 0$)

- Moltiplicare le prob. e sommare

Caso v.a. continue

$W = X + Y$, $X \perp Y$, X e Y sono v.a. continue.

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot f_Y(w - x) dx$$

Integrale di convoluzione

Somma di due gaussiane indipendenti

$$W = X + Y, \quad X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2), \\ X \perp Y$$

La forma di W è sempre gaussiana.

$$E[W] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$$

$$Var[W] = Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}}$$

(questa se $\mu = 0$)

9.1 Covarianza

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Note:

- $Cov[X, X] = Var[X]$

- Se $E[X] = 0$ o $E[Y] = 0$ allora $Cov[X, Y] = E[XY]$

- Se $X \perp Y$ allora $Cov[X, Y] = 0$

- Se $Cov[X, Y] = 0 \nRightarrow X \perp Y$

Coefficiente di correlazione lineare

Versione adimensionale della covarianza.

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} = E\left[\frac{(X - E[X])}{\sigma_x} \cdot \frac{(Y - E[Y])}{\sigma_y}\right]$$

Proprietà:

- $0 \leq |\rho[X, Y]| \leq 1$

In particolare se $|\rho[X, Y]| = 1$ allora $Y = aX + b$

- $X \perp Y \Rightarrow \rho[X, Y] = 0$

10 Valore atteso e varianza condizionati

Legge delle aspettative iterate

$$E[Y] = E[E[Y|X]]$$

Legge della variazione totale

$$Var[x] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$$

11 Successioni variabili aleatorie

11.1 Disuguaglianza di Markov

Se $X > 0$ allora $E[X] \geq a \cdot P(X \geq a) \quad \forall a \geq 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

11.2 Disuguaglianza di chebyshev

$$Var[X] \geq a \cdot P((X - E[X])^2 \geq a) \quad \forall a \geq 0$$

$$\text{Con } k = a^2, \quad P(|X - E[X]| \geq k) \leq \frac{Var[X]}{k^2}$$

11.3 Convergenza in probabilità

Data una successione di v.a. $\{A_k\}$ e un numero a ,

Si dice che $\{A_k\}$ converge ad a se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|A_k - a| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

11.4 Media campionaria e legge dei grandi numeri

Date X_1, X_2, \dots, X_n v.a. i.i.d.

Media campionaria: $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

è una v.a.

Dato che le varie v.a. sono i.i.d.

$$E[M_n] = E[X_1] = E[X]$$

$$Var[M_n] = \frac{Var[X_1]}{n}$$

che con $n \rightarrow \infty \quad Var[M_n] \rightarrow 0$

Legge (debole) dei grandi numeri

$$M_n \xrightarrow{P} E[M_n] = E[X]$$