Informazione e stima – 21/04/2021

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Nominare il file da caricare con il proprio codice persona.
- Indicare l'esercizio da escludere dal punteggio finale.

(1) Tom e Jerry vengono invitati al matrimonio di Romeo e Giulietta. Al ricevimento, oltre agli sposi, ci saranno 70 invitati, tra cui Tom e Jerry. Gli invitati vengono disposti casualmente su 10 tavoli circolari, con 7 posti ciascuno. Qual è la probabilità che Tom e Jerry siedano vicini?

(2) Si consideri un quiz con 10 domande con 4 opzioni ciascuna, di cui solo una corretta. Ad ogni risposta corretta si riceve 1 punto, mentre ad ogni risposta errata si perde 1/3 di punto. Quali sono valore atteso e varianza del punteggio totale se si risponde a caso?

(3) Si consideri la funzione $g(x) = x/2$ per $x < 0$ e $g(x) = x^2$ per $x > 0$. Sia $X \sim \mathcal{U}[-1, 1]$. Determinare la legge di probabilità di $Y = g(X)$.
Consiglio: controllare che la legge di Y integri a 1.

(4) Sia $Y = X + Z + 1$, dove $X \sim \mathcal{U}\{-1, 1\}$ (v.a. discreta), $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e $X \perp Z$. Sapendo che $Y = 1.5$, calcolare la probabilità di $X = -1$.

(5) Si consideri il quadrilatero di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, e $(0, 1)$. Le v.a. X e Y hanno una legge di probabilità congiunta uniforme dentro il quadrilatero, e zero altrove. Calcolare $\mathsf{Cov}[X, Y]$.

(6) Siano $X_n \sim \text{Exp}(1/n)$ e $Y_n \sim \text{Exp}(n)$, per $n \in \mathbb{N}$. Per ogni sequenza $\{X_n\}_n$ e $\{Y_n\}_n$, determinare se c'è convergenza in probabilità e, se sì, a quale valore.

Soluzioni

Problema 1

Strada breve.

Affinché l'evento si verifichi Tom si può sedere dove vuole, mentre Jerry può scegliere 2 posti (quelli adiacenti a Tom) su 69 rimanenti. Dunque la probabilità cercata è 2/69.

Strada lunga.

Siano

$$V = \{\text{Tom e Jerry si siedono vicini}\} \tag{1}$$
$$T = \{\text{Tom e Jerry si siedono allo stesso tavolo}\} \tag{2}$$
$$T_i = \{\text{Tom e Jerry siedono entrambi al tavolo } i\}, \qquad i = 1, \ldots, 10. \tag{3}$$

Notando che $T = \bigcup_{i=1}^{10} T_i$, e che gli eventi T_i sono tutti disgiunti, possiamo scrivere

$$\Pr(T) = \sum_{i=1}^{10} \Pr(T_i) \tag{4}$$
$$= 10 \Pr(T_1) \tag{5}$$
$$= 10 \frac{\binom{2}{2}\binom{68}{5}}{\binom{70}{7}} \tag{6}$$

dove il passaggio (5) è dovuto al fatto che ci troviamo in uno spazio di probabilità uniforme, mentre l'ultimo passaggio deriva dall'interpretazione del problema con una partizione di 70 invitati in un insieme di 2 (Tom e Jerry) e 68 (altri invitati), da cui si deve estrarre, senza reinserimento, un gruppo di 7 invitati (di cui 2 devono essere Tom e Jerry). Infine abbiamo che:

$$\Pr(V) = \Pr(V|T)\Pr(T) + \Pr(V|T^c)\Pr(T^c) \tag{7}$$
$$= \Pr(V|T)\Pr(T) \tag{8}$$
$$= \frac{2}{6} \cdot 10 \frac{\binom{2}{2}\binom{68}{5}}{\binom{70}{7}} \approx 0.029, \tag{9}$$

dove possiamo dire che $\Pr(V|T^c) = 0$ e che $\Pr(V|T) = 2/6$. Infatti, se sappiamo che Tom e Jerry si siedono allo stesso tavolo, allora se fissiamo la posizione di uno, i casi favorevoli sono 2 (posti adiacenti) su 6 (posti rimanenti totali in un tavolo da 7).

Problema 2

Sia X_i la v.a. Bernoulliana che indica se la risposta i-esima è corretta o meno, dunque $X_i \sim \text{Bern}(1/4)$. Il punteggio assegnato alla domanda i-esima sarà $Y_i = \frac{4}{3}X_i - \frac{1}{3}$. Il punteggio totale sarà $Y = \sum_{i=1}^{10} Y_i$, dunque

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{10} Y_i\right] = 10\mathsf{E}[Y_1] = 10\mathsf{E}\left[\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{3}\right] = 10\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\mathsf{Var}[Y] = \mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^{10} Y_i\right] = 10\mathsf{Var}[Y_1] = 10\mathsf{Var}\left[\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{3}\right] = 10 \cdot \frac{16}{9}\mathsf{Var}[X_1] = 10 \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{10}{3}. \tag{11}$$

Problema 3

La funzione $g(x)$ è monotona crescente, dunque invertibile, ma conviene comunque considerare i due intervalli $x < 0$ e $x > 0$ disgiuntamente. In particolare,

$$\frac{d}{dx}g(x) = g'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} \qquad g^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & y > 0 \\ 2y & y < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Dunque, applicando il metodo diretto, si ottiene

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|\frac{dg}{dx}(x)|_{x=g^{-1}(y)}} = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y > 0 \\ \frac{f_X(2y)}{1/2} & y < 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} < y < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{14}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $f_X(x) = 1/2$ per $-1 < x < 1$, e $f_X(x) = 0$ altrimenti.

Problema 4

Il problema si può risolvere con la regola di Bayes:

$$p_{X|Y}(-1|1.5) = \frac{f_{Y|X}(1.5|-1)p_X(-1)}{f_Y(1.5)} \tag{15}$$

$$= \frac{f_{Y|X}(1.5|-1)p_X(-1)}{f_{Y|X}(1.5|-1)p_X(-1) + f_{Y|X}(1.5|1)p_X(1)}. \tag{16}$$

Dal testo del problema sappiamo che $p_X(-1) = p_X(1) = 1/2$. Inoltre, la legge condizionata di $\{Y|X = -1\}$ si può ricavare come segue:

$$f_{Y|X}(1.5|-1) = f_{Y-X-1|X}(1.5 - (-1) - 1|-1) \tag{17}$$

$$= f_{Z|X}(1.5 - (-1) - 1|-1) \tag{18}$$

$$= f_Z(1.5 - (-1) - 1) \tag{19}$$

$$= f_Z(1.5) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1.5^2}{2}} \approx 0.1295 \tag{21}$$

dove nel passaggio (17) abbiamo sfruttato il condizionamento e sottratto la quantità deterministica 1; nel passaggio (18) abbiamo usato la relazione $Y = X + Z + 1$; nel passaggio (19) abbiamo sfruttato l'indipendenza tra X e Z. Analogamente, si può calcolare $f_{Y|X}(1.5|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-0.5)^2}{2}} \approx 0.3521$. Il conto finale risulta pari a $p_{X|Y}(-1|1.5) \approx 0.2689$.

Problema 5

Per la legge delle aspettazioni iterate abbiamo che

$$\mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[XY|X]] \tag{22}$$

$$= \mathsf{E}[X\mathsf{E}[Y|X]] \tag{23}$$

$$= \mathsf{E}\left[X\left(\frac{X + X + 1}{2}\right)\right] \tag{24}$$

$$= \mathsf{E}[X^2] + \frac{\mathsf{E}[X]}{2}, \tag{25}$$

e

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[Y|X]] \tag{26}$$

$$= \mathsf{E}\left[X + \frac{1}{2}\right] = \mathsf{E}[X] + \frac{1}{2}. \tag{27}$$

Mettendo insieme i risultati abbiamo

$$\mathsf{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\mathsf{E}[Y] \tag{28}$$

$$= \mathsf{E}[X^2] + \frac{\mathsf{E}[X]}{2} - \mathsf{E}[X]^2 - \frac{\mathsf{E}[X]}{2} \tag{29}$$

$$= \mathsf{Var}[X]. \tag{30}$$

La legge di probabilità di X è:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \tag{31}$$

$$= \begin{cases} \int_x^{1+x} dy = 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{32}$$

dunque $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, e $\mathsf{Var}[X] = 1/12$. Pertanto, $\mathsf{Cov}[X,Y] = 1/12$.

Problema 6

I valori attesi delle esponenziali sono $\mathsf{E}[X_n] = n$ e $\mathsf{E}[Y_n] = 1/n$, dunque potremmo ipotizzare che $\{X_n\}_n$ non converga, e che $\{Y_n\}_n$ converga in probabilità al valore 0. Mostriamolo:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - a| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - \Pr(|X_n - a| < \varepsilon) \tag{33}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \Pr(a - \varepsilon < X_n < a + \varepsilon) \tag{34}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - (F_{X_n}(a+\varepsilon) - F_{X_n}(a-\varepsilon)) \tag{35}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - e^{-\frac{a+\varepsilon}{n}} - 1 + e^{-\frac{a-\varepsilon}{n}}) \tag{36}$$

$$= 1, \qquad \forall a, \varepsilon > 0, \tag{37}$$

dunque non c'è convergenza ad alcun valore a della sequenza $\{X_n\}_n$. Per quanto riguarda $\{Y_n\}_n$, testiamo la convergenza ad $a = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \Pr(Y_n > \varepsilon) \tag{38}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} \tag{39}$$

$$= 0, \qquad \forall \varepsilon > 0, \tag{40}$$

quindi rimane dimostrata la convergenza in probabilità a zero. Nei calcoli abbiamo usato che $F_{X_n}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{n}}$ per $x > 0$, e $F_{Y_n}(y) = 1 - e^{-ny}$ per $y > 0$.