1 Assiomi

Assiomi di kolmogorov:

1. Non negatività: $P(A) > 0$
2. Normalizzazione: $P(\Omega) = 1$
3. Additività: se ho 2 eventi disgiunti A e B: $(P(A \cap B) = 0)$. Allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

1.1 Teorema delle probabilità totali:

Ho n eventi disgiunti: $A_1, A_2, A_3 ...$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Se $P(A \cap B) \neq 0$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (e varie combinazioni se ci sono più di 2 eventi analizzati)

1.2 Leggi di probabilità uniformi

Legge uniforme discreta
$P(A) = \frac{\#\text{casi favorevoli ad} A}{\#\text{casi totali}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Legge uniforme continua
$P(A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\Omega)}\ \forall A \subseteq \Omega$

2 Probabilità condizionate

Definizione di probabilità condizionata: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Altra definizione di intersezione: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Regola moltiplicativa: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

2.1 Teorema delle probabilità totali

Se ho A_1, A_2, A_3 disgiunti che formano una partizione di Ω:
$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

2.2 Regola di Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A))}{P(B)}$$

Indipendenza
Se $A \perp B$ allora $P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$
Due eventi si dicono indipendenti se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3 Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

In quanti modi posso ordinare questi n elementi distinti?
casi tot $= n(n-1)(n-2)... = n!$

3.2 Combinazioni

Calcolare il numero di sottoinsiemi con k elementi, partendo da un insieme con n elementi distinti. $0 \leq k \leq n$
#sequenze ordinate di k elementi $= \frac{n!}{(n-k)!k!}$
$C_{n,k} = \binom{n}{k}$

Probabilità binomiale
Date n prove indipendenti, probabilità di successo della singola prova $P(\text{successo}) = p$, la prob. di avere k successi su n prove è: $p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

3.3 Coefficiente multinomiale (partizioni)

Ho uno spazio di probabilità uniforme ed eseguo n prove indipendenti (es. estrazioni con reinserimento), voglio calcolare quante sequenze con k_i estrazioni di tipo i ci sono.
#totale di scelte $= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} = \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4}$

4 Variabili aleatorie discrete

4.1 Variabile aleatoria geometrica

La v.a. geometrica risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti, qual'è la probabilità di ottenere il primo successo alla k-esima prova.

$$X \sim \begin{cases} (1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Geom(p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova.
Legge di perdita di memoria
$p_{x-t|X>t}(k) = p_x(k) \implies E[X-t|X>t] = E[X]$ (Vale solo per v.a. $Geom$)

4.2 Variabile aleatoria binomiale

La v.a. binomiale risponde al problema: facendo esperimenti ripetuti qual'è la probabilità di ottenere esattamente k successi?.

$$X \sim \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & k = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bin(n, p)$ Dove p è la probabilità di successo nella singola prova ed n è il numero di prove.
$E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$
$Var[X] < \frac{n}{4}$

4.3 Variabile aleatoria Bernoulliana

La v.a. bernoulliana è una distribuzione di probabilità su due soli valori: 0 e 1

$$X \sim \begin{cases} p & 1 \\ 1-p & 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$X \sim Bern(p)$ Dove p è la probabilità di successo.
$E[X] = p$, $Var[X] = p(1-p)$

4.4 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_x(x)$$

Moltiplico sommo il prodotto di ogni realizzazione con il suo peso ovvero la sua probabilità.
Legge dello statistico inconsapevole
Data v.a. $Y = g(X)$, Y è una v.a.
$E[Y] = E[g(x)]$

Nel caso lineare:
$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$
Valore atteso condizionato
$E[X|B] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot p_{X|B}(x)$
Legge dell'aspettativa totale
Con $A_1, A_2, ..., A_n$ partizioni di Ω
$E[X] = \sum_{i_1}^{n} P(A_1) \cdot E[X|A_i]$

4.5 Varianza

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

La varianza è il momento di ordine 2.
Proprietà varianza
$Var[X] \geq 0 \quad \forall$ v.a. X
$Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \cdot Var[X]$
Scarto quadratico medio
$\sigma = \sqrt{Var[X]}$

5 V.a. discrete multiple

5.1 Legge di probabilità congiunta

Ho 2 v.a. X e Y, $P(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x, y)$

Per trovare la legge marginale di X: $p_x(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
Legge di probabilità condizionata
$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{\sum_t p_{X,Y}(t,y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
Regola moltiplicativa
$p_{X,Y}(x, y) = p_{X|Y}(x|y) \cdot p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x)$

5.2 Variabili aleatorie indipendenti

Due v.a. X e Y sono dette indipendenti $(X \perp Y)$ $\iff p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

5.3 Valore atteso per v.a. multiple

Statistica congiunta di X e Y.
$E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y)$
Caso lineare: $E[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha E[X] + \beta E[Y] + \gamma$
Se $X \perp Y$ allora $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

5.4 Varianza per v.a. multiple

$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$
Se $X \perp Y$ allora $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$

6 Variabili aleatorie continue

Valore atteso e varianza
$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_x(x)dx$
Legge dello statistico inconsapevole: $E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_x(x)dx$
$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

6.1 V.a. uniforme continua

$X \sim \mathbb{U}[a, b]$

$$f_x(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

6.2 Funzione cumulativa di probabilità

$P(X \leq x) = F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$
Proprietà

- $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- F_x è una funzione non decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx}F_x(x) = f_x(x)$, F_x è la funzione integrale di f_x

6.3 V.a. gaussiana

$X \sim Norm[E[x], Var[X]] = Norm[\mu, \sigma^2]$
Cumulata della gaussiana
$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
Fare doc 8