GILLIARD Tallulah

Licence 3 MIASHS
Décembre 2015

Modélisation Biomathématique

Système Proie-Prédateur de Leslie, 1948

On considère le système Proie-Prédateur proposé par Leslie en 1948 sur $[0,+\infty[$

$$(S)\begin{cases} H'(t) = H(t)(a - bH(t) - cP(t)) \\ P'(t) = P\left(r - s\,\dfrac{P}{H}\right) \\ P(0) = P_0 \geq 0,\ \ H(0) = H_0 \geq 0 \end{cases}$$

Où les paramètres a, b, c, r et s sont tous positifs strictement.

a) Que représente ce système. Donner la signification des différents paramètres

H' et P' représentent respectivement les variations d'effectifs des populations de proies et de prédateurs.

$H'(t) = aH(t) - bH^2(t) - cP(t)H(t)$

$P'(t) = rP(t) - s\,\dfrac{P^2(t)}{H(t)}$

a représente le taux de naissance

b représente le taux de décès dû à la vieillesse et aux accidents

c représente le taux de morts dû à l'attaque de prédateur

r représente le taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies

s représente le taux de morts de prédateurs lié à la compétition (face au nombre de proies)

b) Déterminer les solutions stationnaires positives (indépendante du temps) du système différentiel. On notera ces solutions (H^*, P^*).

Solutions stationnaires (les fonctions sont constantes).

$H(t) = H^*$ et $P(t) = P^*$

$H'(t) = 0$ et $P'(t) = 0$

Le système devient donc :

$$\begin{cases} 0 = H^*(a - bH^* - cP^*) & (1) \\ 0 = P^*\left(r - s\dfrac{P^*}{H^*}\right) & (2) \end{cases}$$

(1) $H^* = 0$ ou $a - bH^* - cP^* = 0$

> $H^* = 0 \implies \frac{P^*}{H^*}$ limite impossible

> $a - bH^* - cP^* = 0$

$\Leftrightarrow\ bH^* = a - cP^*$

$\Leftrightarrow H^* = \dfrac{a - cP^*}{b}$

On remplace dans (2)

$$P^*\left(r - s\frac{P^*}{\frac{a-cP^*}{b}}\right) = 0$$

D'où

② $P^* = 0$ ou $r - s\frac{P^*}{\frac{a-cP^*}{b}} = 0$

> $P^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad a - bH^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad H^* = \frac{a}{b}$

> $r - s\frac{P^*}{\frac{a-cP^*}{b}} = 0$

$$\Longleftrightarrow r - s\frac{b\,P^*}{a - cP^*} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ra - rcP^* - sbP^*}{a - cP^*} = 0$$

$$\Longleftrightarrow ra - rcP^* - sbP^* = 0$$

$$\Longleftrightarrow P^* = \frac{ra}{rc + sb}$$

Donc on a les solutions stationnaires suivantes :

$\boldsymbol{P^* = 0}$ **et** $\boldsymbol{H^* = \frac{a}{b}}$

$\boldsymbol{H^* = \frac{a-cP^*}{b}}$ **et** $\boldsymbol{P^* = \frac{ra}{rc+sb}}$

Avec

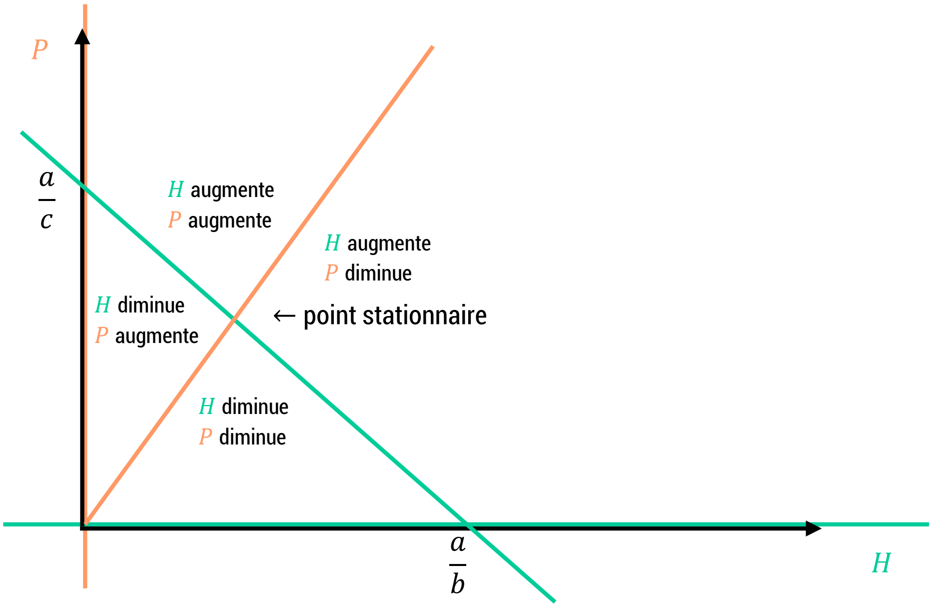
$$H^* = \frac{a - cP^*}{b} \Longleftrightarrow \frac{a - c\left(\frac{ra}{rc + sb}\right)}{b} \Longleftrightarrow \frac{arc + asb - arc}{b(rc + sb)} \Longleftrightarrow \frac{asb}{brc + b^2 s}$$

c) Tracer les isoclines du système différentiel.

Trace des isoclines

- $\boldsymbol{H' = 0} \quad \Longrightarrow \quad H(a - bH - cP) = 0$
  $H = 0 \quad \Longrightarrow$ axe des abscisses
  $a - bH - cP = 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{a-bH}{c} \quad \Longrightarrow$ droite décroissante

- $\boldsymbol{P' = 0} \quad \Longrightarrow \quad P\left(r - s\frac{P}{H}\right)$
  $P = 0 \quad \Longrightarrow$ axe des ordonnées
  $r - s\frac{P}{H} = 0 \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{rH}{s} \quad \Longrightarrow$ droite croissante



Représentation des isoclines

$H(a - bH - cP) = 0$ ① isocline verticale

$P\left(1 - s\frac{P}{H}\right) = 0$ ② isocline horizontale

① $\Leftrightarrow \begin{cases} H = 0 \\ a - bH - cP = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H(t) = 0 \\ H(t) = \dfrac{a - cP(t)}{b} \end{cases}$ ← intersection axe des abcisses

② $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ 1 - s\dfrac{P}{H} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(t) = 0 \\ P(t) = \dfrac{H(t)}{s} \end{cases}$ ← intersection axe des ordonnées

d) Soit la fonction $V(H,P) = \left(\frac{H^*}{H} + Log\left(\frac{H^*}{H}\right)\right) + \frac{cH^*}{s}\left(\frac{P^*}{P} + Log\left(\frac{P^*}{P}\right)\right)$. Montrer que cette fonction n'est pas croissante le long des trajectoires $\left(\frac{d}{dt}V(H(t),P(t)) \leq 0\right)$. Que peut-on en déduire ?

On doit dériver l'expression $\frac{P}{r}$ par rapport au temps

On développe pour étudier la fonction et trouver son sens de variation.

$$\frac{d}{dt}V(H,P) = H'\frac{dv}{dH} + P'\frac{dv}{dP}$$

$$= H'\left(-\frac{H^*}{H^2} + \frac{1}{H}\right) + P'\frac{cH^*}{s}\left(-\frac{P^*}{P^2} + \frac{1}{P}\right)$$

$$= (a - bH - cP)\left(-\frac{H^*}{H^2} + \frac{1}{H}\right) + \left(r - s\frac{P}{H}\right)\frac{cH^*}{s}\left(-\frac{P^*}{P^2} + \frac{1}{P}\right)$$

$$= \frac{aH^*}{H} + a + bH^* - bH + \frac{cPH^*}{H} - cP - \frac{cP^*H^*r}{sp} + \frac{cH^*r}{s} + \frac{cP^*H^*}{H} - \frac{cH^*P}{H}$$

$$= \frac{aH^*}{H} + a + bH^* - bH - cP - \frac{cP^*H^*r}{sp} + \frac{cH^*r}{s} + \frac{cP^*H^*}{H} \quad < 0 \,?$$

Pour le prouver, il faut étudier la fonction dans différents cas, selon où on est placé par rapport aux isoclines.

Et donc, on est sensés voir que la fonction n'est pas croissante le long des trajectoires.

On en déduit alors que la courbe converge vers le point stationnaire.

e) Ecrire un code numérique sous scilab vous permettant de simuler les solutions du système différentiel.

On utilise le schéma d'Euler explicite

Définition mathématique de la dérivée: $H'(t) = \frac{H(t+dt)-H(t)}{dt}$

Si on fait une approximation avec un temps discret :

$H'(ti) = \frac{H(ti+1)-H(ti)}{dt}$ avec $dt = ti + 1 - ti$ et dt pas de temps utilisé

On a donc d'après les équations données, on a pour H :

$$\frac{H(ti+1) - H(ti)}{dt} = H(ti).(a - b.H(ti) - c.P(ti))$$

$$H(ti+1) = dt.H(ti).\big(a - b.H(ti) - c.P(ti)\big) + H(ti)$$

De même pour P :

$$\frac{P(ti+1) - P(ti)}{dt} = P(ti).\left(r - s.\frac{P(ti)}{H(ti)}\right)$$

$$P(ti+1) = dt.P(ti).\left(r - s.\frac{P(ti)}{H(ti)}\right) + P(ti)$$

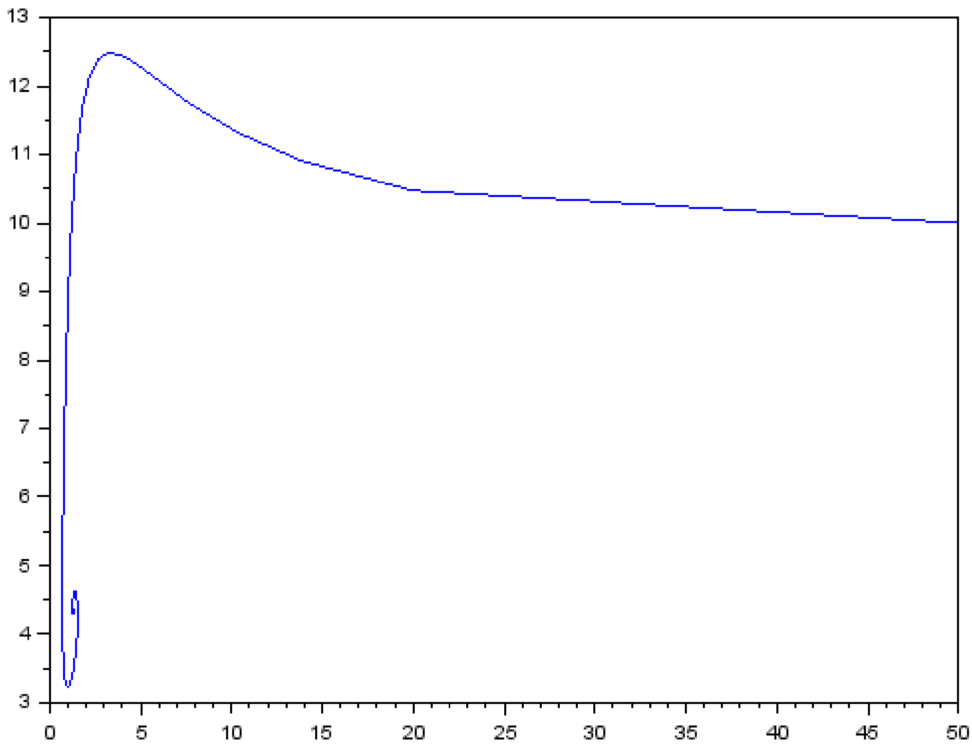
On a une double relation de récurrence entre P et H. Connaissant P_0 et H_0 on peut tous les connaitre. Il faut donc calculer P et H en même temps comme elles dépendent l'une de l'autre à l'instant t. Ces deux relations sont des approximations. Si on veut une courbe proche de la réalité il faut au moins 1000 points environ. L'erreur s'amplifie à chaque fois que le terme suivant est recalculé.

Voyons ce qu'on obtient avec différentes valeurs des paramètres. Ci-dessous, pour chaque cas, le code scilab dans la console puis le graphique qui en est issu suivant les paramètres.

Valeurs #1 :

```
///// VARIABLES /////
H(1)=50
P(1)=10

T=50        // durée de la simulation
N=50000    // nombre de points voulus
dt=T/N      // pas

// proies //
a=100     // taux de naissance
b=10      // taux de décès (accidents + vieillesse)
c=20      // taux de morts par attaque de prédateurs
// prédateurs //
r=50      // taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies
s=15      // taux de mort de prédateurs lié à la compétition

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   P(i+1)=dt*P(i)*(r-s*(P(i)/H(i)))+P(i)
   H(i+1)=dt*H(i)*(a-b*H(i)-c*P(i))+H(i)
end

plot(H,P)
```

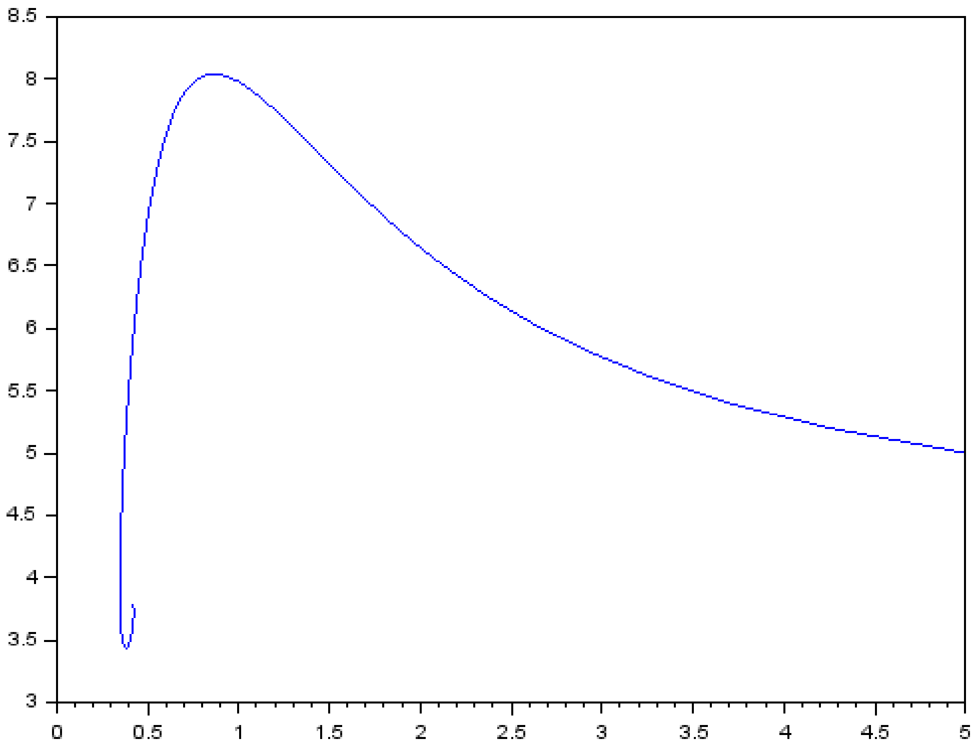
Graphique #1 :



Valeurs #2 :

```
///// VARIABLES /////
H(1)=5
P(1)=5

T=50        // durée de la simulation
N=50000     // nombre de points voulus
dt=T/N      // pas

// proies //
a=50      // taux de naissance
b=30      // taux de décès (accidents + vieillesse)
c=10      // taux de morts par attaque de prédateurs
// prédateurs //
r=45      // taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies
s=5      // taux de mort de prédateurs lié à la compétition

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   P(i+1)=dt*P(i)*(r-s*(P(i)/H(i)))+P(i)
   H(i+1)=dt*H(i)*(a-b*H(i)-c*P(i))+H(i)
end

plot(H,P)
```

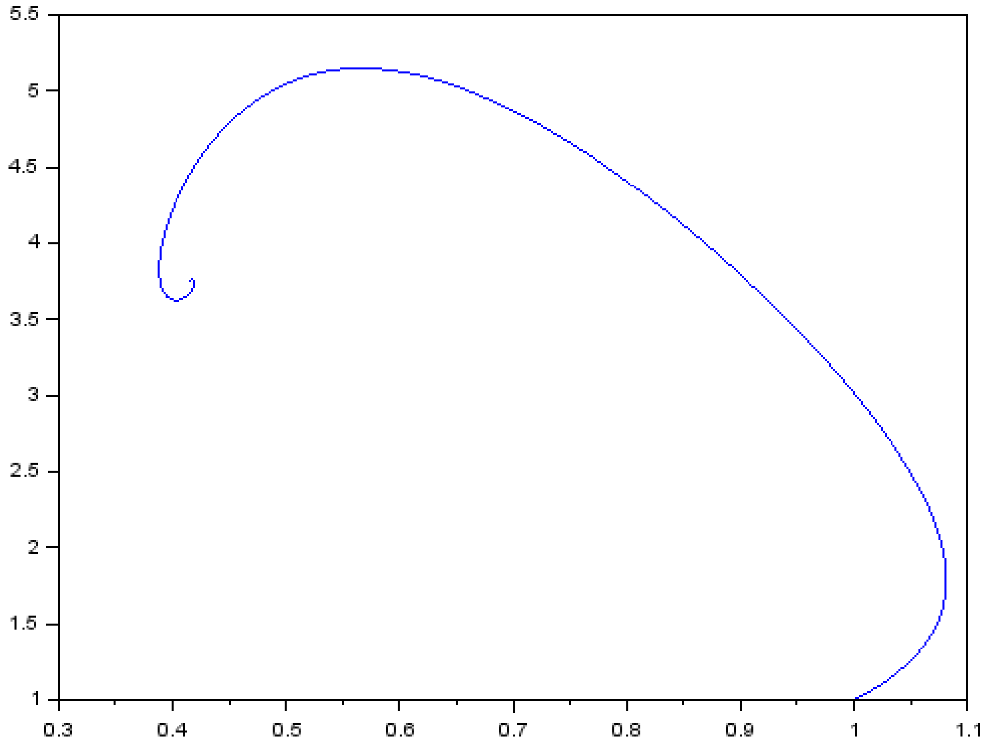
Graphique #2 :



Valeurs #3 :

```
///// VARIABLES /////
H(1)=1
P(1)=1

T=50        // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N      // pas

// proies //
a=50     // taux de naissance
b=30     // taux de décès (accidents + vieillesse)
c=10     // taux de morts par attaque de prédateurs
// prédateurs //
r=45     // taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies
s=5      // taux de mort de prédateurs lié à la compétition

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   P(i+1)=dt*P(i)*(r-s*(P(i)/H(i)))+P(i)
   H(i+1)=dt*H(i)*(a-b*H(i)-c*P(i))+H(i)
end

plot(H,P)
```

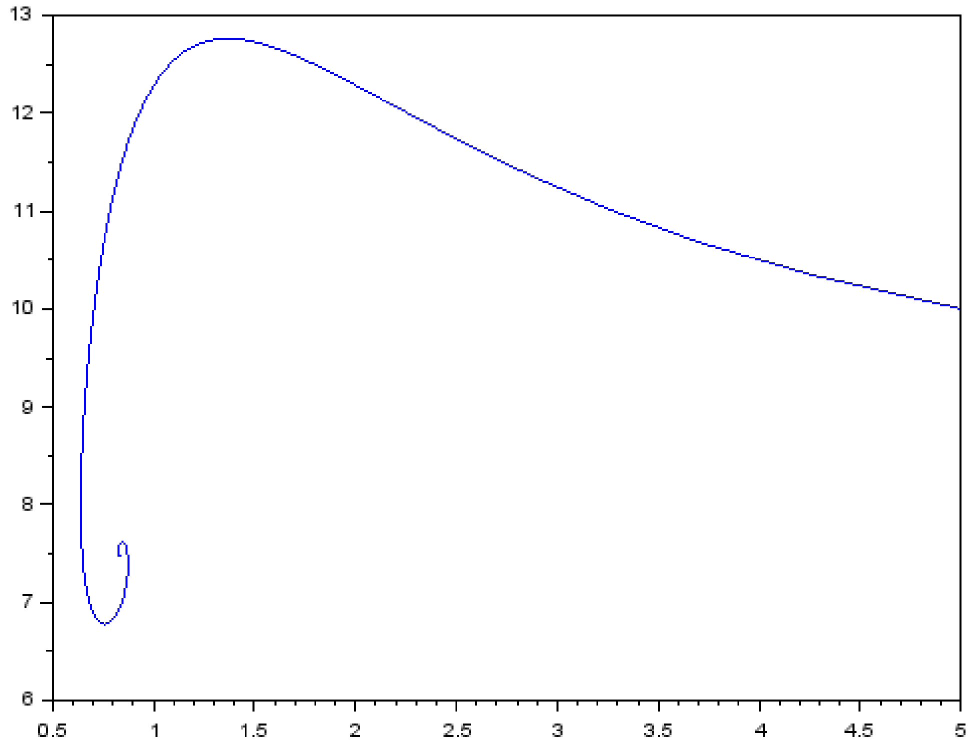
Graphique #3 :



Valeurs #4 :

```
///// VARIABLES /////
H(1)=5
P(1)=10

T=50        // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N      // pas

// proies //
a=100     // taux de naissance
b=30      // taux de décès (accidents + vieillesse)
c=10      // taux de morts par attaque de prédateurs
// prédateurs //
r=45      // taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies
s=5       // taux de mort de prédateurs lié à la compétition

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   P(i+1)=dt*P(i)*(r-s*(P(i)/H(i)))+P(i)
   H(i+1)=dt*H(i)*(a-b*H(i)-c*P(i))+H(i)
end

plot(H,P)
```

Graphique #4 :



Valeurs #5 :

```
///// VARIABLES /////
H(1)=5
P(1)=10

T=50        // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N      // pas

// proies //
a=100     // taux de naissance
b=30      // taux de décès (accidents + vieillesse)
c=10      // taux de morts par attaque de prédateurs
// prédateurs //
r=45      // taux de naissance des prédateurs en l'absence de proies
s=1       // taux de mort de prédateurs lié à la compétition

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   P(i+1)=dt*P(i)*(r-s*(P(i)/H(i)))+P(i)
   H(i+1)=dt*H(i)*(a-b*H(i)-c*P(i))+H(i)
end

plot(H,P)
```

Graphique #5 :