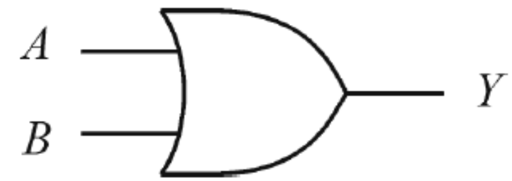
Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Tópicos II

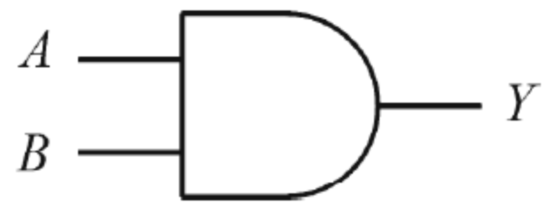
Thiago Silva Vilela

Álgebra Booleana

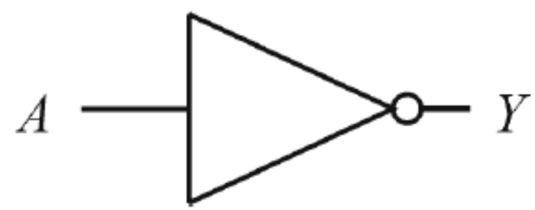
- Operações básicas:
  - OU (adição booleana):



  - E (multiplicação booleana):



  - Complementação (Negação):



Avaliação de expressões boolenas

- Expressões booleanas: expressões algébricas formadas por variáveis lógicas.
- Avaliação de expressões booleanas: encontrar a tabela verdade de certa expressão booleana.
- A ordem de precedência dos operadores deve ser seguida.
  - **E** tem precedência sobre **OU**.
  - **OU** e **OU Esclusivo** (**XOR**) possuem a mesma precedência.

Avaliação de expressões boolenas

- Exemplo: avaliação de F = X + !Y . Z

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$\overline{Y} \cdot Z$	$X + \overline{Y} \cdot Z$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Leis Fundamentais e Propriedades da Álgebra Booleana

- Teoremas de Morgan: $\overline{A+B+C}=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

  $\overline{A.B.C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

- Comutatividade: $A+B=B+A$

  $A.B=B.A$

- Associatividade: $A+(B+C)=(A+B)+C$

  $A.(B.C)=(A.B).C$

- Distributividade: $A.(B+C)=A.B+A.C$

Derivação de Expressões Booleanas

- Problema inverso da avaliação de expressões booleanas.
- A partir de uma tabela verdade, derivar a expressão booleana geradora.
- Existem dois métodos para definir uma função booleana:
  - soma de produtos;
  - produto de somas.

Soma de Produtos

- Para uma função booleana de n entradas teremos 2^n possíveis valores.
- A cada combinação de entradas podemos associar um termo produto.
  - No termo produto, se uma entrada vale 0, ela aparece negada;
  - Se a entrada vale 1, ela aparece não negada.
- Cada termo produto é denominado mintermo, ou minitermo.

Soma de Produtos

A B C	mintermo
0 0 0	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
0 0 1	$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$
0 1 0	$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
0 1 1	$\overline{A} \cdot B \cdot C$
1 0 0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1 0 1	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
1 1 0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1 1 1	$A \cdot B \cdot C$

Soma de Produtos

- Para um dado mintermo:
  - Se subtistuirmos os valores da entradas associadas, obteremos 1;
  - Se substituirmos as entradas com qualquer outra combinação de valores, obteremos 0.

- Para encontrar a equação relativa a certa tabela verdade, basta montar um **OU** entre os mintermos que valem 1.

Soma de Produtos

- Exemplo: encontrar a equação em soma de produtos para a função F, descrita por:

A B C	F
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Produto de Somas

- O método de derivação usando produtos de somas é o **dual** (oposto) da soma de produtos.
  - A cada combinação das variáveis de entrada associamos um termo soma;
  - Se a variável correspondente vale 1, ela aparece negada no termo soma;
  - Se a variável correspondente vale 0, ela aparece não negada no termo soma.
- Cada termo soma é denominado maxtermo ou maxitermo.

Produto de Somas

A B C	maxtermos
0 0 0	$A+B+C$
0 0 1	$A+B+\overline{C}$
0 1 0	$A+\overline{B}+C$
0 1 1	$A+\overline{B}+\overline{C}$
1 0 0	$\overline{A}+B+C$
1 0 1	$\overline{A}+B+\overline{C}$
1 1 0	$\overline{A}+\overline{B}+C$
1 1 1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

Produto de Somas

- Para um dado maxtermo:
  - Se subtistuirmos os valores da entradas associadas, obteremos 0;
  - Se substituirmos as entradas com qualquer outra combinação de valores, obteremos 1.

- Para encontrar a equação relativa a certa tabela verdade, basta montar um **E** entre os maxtermos que valem 0.

Produto de Somas

- Exemplo: encontrar a equação em produto de somas para a função F, descrita por:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

Formas Canônicas e Padrão

- As representações de expressões em soma de produtos e produto de somas são denominadas **formas padrão**.

- Se cada maxtermo e mintermo apresentam todas as variáveis da função, a expressão também está na **forma canônica**.

Expressões Canônicas

- Existe uma forma mais concisa de representar expressões canônicas:
  - associamos cada combinação das variáveis de entrada a seu valor em decimal;
  - cada mintermo é representado por m_i, onde i é o decimal associado;
  - cada maxtermo é representado por M_i, onde i é o decimal associado.

Expressões Canônicas

A B C	mintermo	maxtermo
0 0 0	m_0	M_0
0 0 1	m_1	M_1
0 1 0	m_2	M_2
0 1 1	m_3	M_3
1 0 0	m_4	M_4
1 0 1	m_5	M_5
1 1 0	m_6	M_6
1 1 1	m_7	M_7

Expressões Canônicas

A expressão:

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

pode ser representada como:

$$F = m_2 + m_3 + m_5 + m_6$$

ou:

$$F = \sum(2,3,5,6)$$

Expressões Canônicas

A expressão:

$$F = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

pode ser representada como:

$$F = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_7$$

ou:

$$F = \prod(0,1,4,7)$$

Forma não-padrão

- Formas canônicas nem sempre são práticas:
  – número de elementos de um circuito lógico depende diretamente do número de operações booleanas.
- Pode ser necessário reduzir o número de operações.
  – redução é obtida eliminando litarais da expressão;
  – basta aplicar propriedades da álgebra booleana;
  – o processo é denominado **simplificação**.

Forma não-padrão

- Exemplo:

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Equação Mínima

- Quando são feitas todas as simplificações possíveis em uma expressão booleana, a equação resultante é chamada de equeação **mínima**.

Exemplos de Questões

Considere a seguinte tabela verdade, na qual estão definidas quatro entradas – A, B, C e D – e uma saída S. Qual é a menor expressão de chaveamento representada por uma soma de produtos correspondente à saída S?

A	B	C	D	S
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**1**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**1**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

Exemplos de Questões

- Esse exercício tem mais de uma solução.

- Podemos encontrar a solução simplificando a expressão booleana ou por Mapas de Karnaugh.

- As soluções são:
  - A'D'+AB'C'+ABC+AB'D
  - A'D'+AB'C'+ABC+ACD

Exemplos de Questões

- Fazendo a simplificação pela expressão:
  - A'B'C'D'+A'B'CD'+A'BC'D'+A'BCD'+AB'C'D'+AB'C'D+AB'CD +ABCD'+ABCD
  - A'B'C'D'+A'B'CD'+A'BC'D'+A'BCD'+AB'C'D'+AB'C'D+AB'CD +ABCD'+ABCD
    - AB'CD pode ser simplificado com ABCD ou AB'C'D. Devemos escolher um deles e duplicá-lo na expressão.
  - A'B'C'D'+A'B'CD'+A'BC'D'+A'BCD'+AB'C'D'+AB'C'D+AB'C'D +AB'CD+ABCD'+ABCD
  - A'B'D'+A'BD'+AB'C'+AB'D+ABC
  - A'D' +AB'C'+AB'D+ABC
- Não existem mais simplificações. A equação é mínima.

Exemplos de Questões

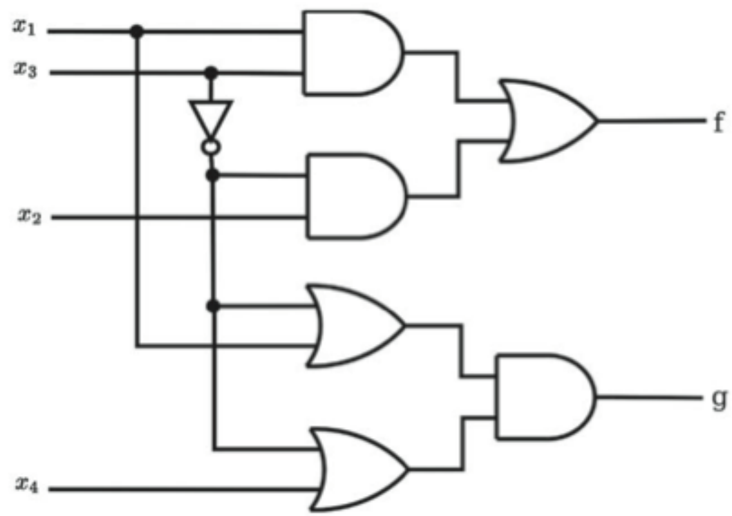
- Usando Mapas de Karnaugh:

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	0	1	1
	10	1	1	1	0

- O último **1** não agrupado possui dois agrupamentos possíveis, e a solução final depende do agrupamento escolhido. Podemos ter:
  - A'D'+AB'C'+ABC+AB'D ou
  - A'D'+AB'C'+ABC+ACD

Exemplos de Questões

- Analise o circuito de quatro variáveis a seguir:



Considerando esse circuito, quais são as funções **f** e **g**, na forma canônica?

Exemplos de Questões

- Uma forma de resolver essa questão é derivando a tabela verdade do circuito e, a partir dela, obter a forma canônica das funções **f** e **g**.
- Quando **f** é 1?
  - quando x_1=1 e x_3=1 **ou** quando x_3=0 e x_2=1
- Quando **g** é 1?
  - quando x_3=0 **ou** x_1=1 e x_4=1.

Exemplos de Questões

x1	x2	x3	x4	f	g
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Exemplos de Questões

- Resposta: $\sum m(4,5,10,11,12,13,14,15)$ e $\sum m(0,1,4,5,8,9,11,12,13,15)$

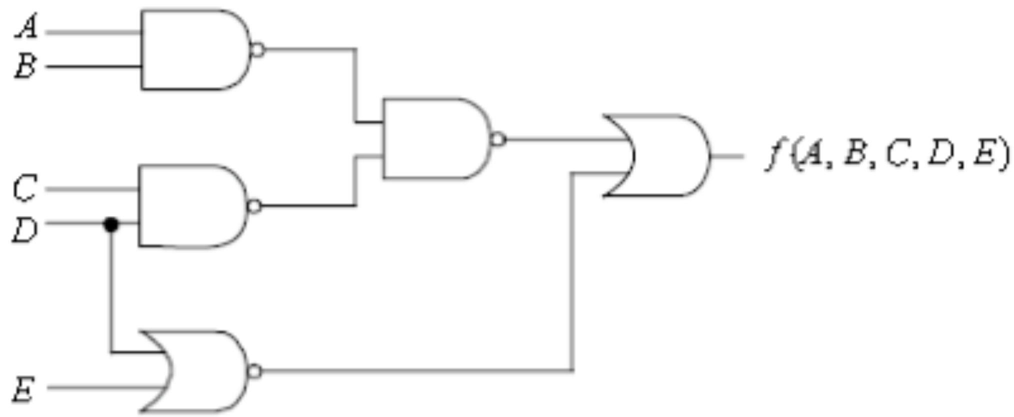
ou

$\prod M(0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9)$ e

$\prod M(2, 3, 6, 7, 10, 14)$

Exemplos de Questões

- No circuito mostrado, que possui cinco entradas — A, B, C, D e E — e uma saída f (A, B, C, D, E), qual opção apresenta uma expressão lógica equivalente à função f (A, B, C, D, E)?



(A) $\overline{A.B} + \overline{C.D} + D.E$

(B) $(A + B).(C + D) + D.E$

(C) $\overline{A.B} + \overline{C.D} + D + E$

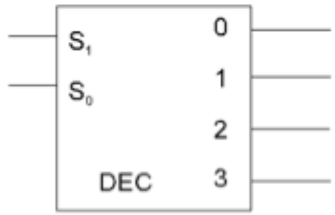
(D) $A.B + C.D + D + E$

(E) $A.B + C.D + \overline{D}.\overline{E}$

Exemplos de Questões

- Resposta: letra e.
- Basta construir a expressão booleana e aplicar o Teorema de Morgan.

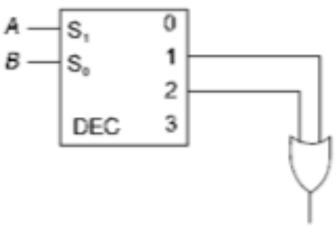
Exemplos de Questões



entradas		saídas			
S_1	S_0	0	1	2	3
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

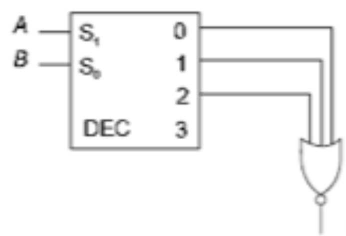
Considere o bloco decodificador ilustrado acima, o qual opera segundo a tabela apresentada. Em cada item a seguir, julgue se a função lógica mostrada corresponde ao circuito lógico a ela associado.

I



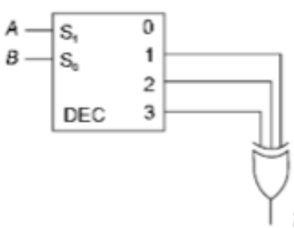
$f(A,B) = \overline{A}.B + A.\overline{B}$

II



$f(A,B) = A.B$

III



$f(A,B) = A + B$

Exemplos de Questões

- Para resolver essa questão, basta construir a tabela verdade de cada circuito e comparar o resultado com a tabela verdade da expressão.

- Resposta: Os 3 itens possuem o circuito equivalente à expressão.