1 Probabilités a priori et conditionnelles

Probabilités a priori

1) *On jette trois dés équilibrés l'un après l'autre : modéliser l'expérience.*

1 a) *Quelle est la probabilité que les trois dés donnent un même résultat ?*

1 b) *Quelle est la probabilité que les trois nombres soient deux à deux différents ?*

1 c) *Quelle est la probabilité d'avoir le même résultat sur deux dés parmi les trois, et un résultat différent sur le troisième ?*

Une urne contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4). On tire au hasard et sans remise 3 jetons. Calculer :

2 a) *La probabilité d'avoir trois jetons rouges*

2 b) *La probabilité d'avoir le jeton rouge numéro 1*

2 c) *La probabilité d'avoir trois jetons de la même couleur*

2 d) *La probabilité d'avoir deux numéros identiques*

2 e) *La probabilité d'avoir trois numéros différents*

Probabilités conditionnelles

Un bureau a neuf tiroirs. La carte d'accès à l'ENSTA a la probabilité $\frac{1}{2}$ de se trouver dans ce bureau, auquel cas les tiroirs sont équiprobables pour ce qui est de la contenir.

3 a) *Quelle est la probabilité que la carte se trouve dans le* $9^{\text{ème}}$ *tiroir ?*

3 b) *On ouvre en vain les huit premiers tiroirs. Quelle est la probabilité que la carte se trouve dans le* $9^{\text{ème}}$ *tiroir ?*

Dans une population, 7% des individus sont contaminés par un virus. On dispose d'un test de dépistage tel que :

- Parmi les individus contaminés, le test est positif à 99%
- Parmi les individus non contaminés, le test est positif à 3%

On appelle C l'évènement "individu contaminé" et P l'évènement "test positif".

4 a) *Quelle est la probabilité que le test appliqué à un individu soit positif ?*

4 b) *Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit contaminé ?*

2 Lois des variables aléatoires

Soit $\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$ muni de la loi équiprobable. Soit X la variable aléatoire définie par :

$$\begin{array}{rcl} X^{-1}\{1\} & = & \{2,4,9\} \\ X^{-1}\{2\} & = & \{1,3,5,6,8,11\} \\ X^{-1}\{3\} & = & \{7,10,12\} \end{array}$$

1) *Donner le domaine et la loi de X.*

On appelle médiane de X toute valeur m telle que $\mathrm{p}\,(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathrm{p}\,(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$.

2 a) *Soit $\mathrm{p}_X\,(0) = \frac{1}{5}$, $\mathrm{p}_X\,(1) = \frac{3}{5}$ et $\mathrm{p}_X\,(2) = \frac{1}{5}$. tracer la fonction de répartition et donner une valeur médiane.*

2 b) *Même question avec $\mathrm{p}_X\,(0) = \mathrm{p}_X\,(1) = \mathrm{p}_X\,(2) = \mathrm{p}_X\,(3) = \frac{1}{4}$.*

Une urne contient des boules blanches et des boules noires en proportion p et q (et on a donc $q = 1 - p$). On procède à des tirages avec remise.

3 a) *Quelle est la probabilité que la première boule blanche apparaisse au $k^{\text{ème}}$ tirage ?*

3 b) *Déterminer la fonction génératrice de cet évènement.*

3 c) *Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour faire apparaître la $r^{\text{ème}}$ boule blanche (r étant un entier fixé). Quelle est la loi de X_r ?*

---

4) *Soit K une variable aléatoire dont le domaine est $\mathbb{N}^*$, munie de la loi de probabilité :*

$$\mathrm{p}\,(K = k) = \frac{1}{2^k}$$

Soit X la variable aléatoire égale au reste modulo n de K. Quelle est la loi de X ?

On remplit N verres avec une tireuse dont la probabilité de sortir une bière est p et la probabilité de ne sortir que de la mousse est q. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bières servies.

5 a) *Donner le domaine et la distribution de X.*

5 b) *Donner une relation entre $\mathrm{p}_X\,(k)$ et $\mathrm{p}_X\,(k-1)$. Construire la distribution pour $p = \frac{3}{4}$ et $N = 8$. Tracer la fonction de répartition pour ces valeurs.*

Une lampe a une durée de vie X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(160, 30^2)$. Répondez aux questions suivantes en utilisant la table de la page 120.

6 a) *Calculer $\mathrm{p}\,(X \leqslant 150)$, $\mathrm{p}\,(X > 180)$ et $\mathrm{p}\,(130 < X < 190)$.*

6 b) *Calculer a et b tels que : $\mathrm{p}\,(X \leqslant a) = 0.9$ et $\mathrm{p}\,(X \geqslant b) = 0.8$.*

6 c) *Calculer* $\mathrm{p}\left(X > 180 \,|\, X > 160\right)$.

Soit $f_X\left(x\right) = Ke^{-\lambda x}$ si $x \geqslant 0$ et $f_X\left(x\right) = 0$ ailleurs, la densité de probabilité de la variable aléatoire X.

7 a) *Calculer* K.

7 b) *Calculer* $\mathrm{p}\left(X > x \,|\, X > x_0\right)$. *Interpréter le résultat.*

3 Mesures et moments de variables aléatoires

Une variable X est telle que $\Omega_X = [-1, 1]$ et le graphe de sa densité $f(x)$ forme avec l'axe Ox un triangle isocèle.

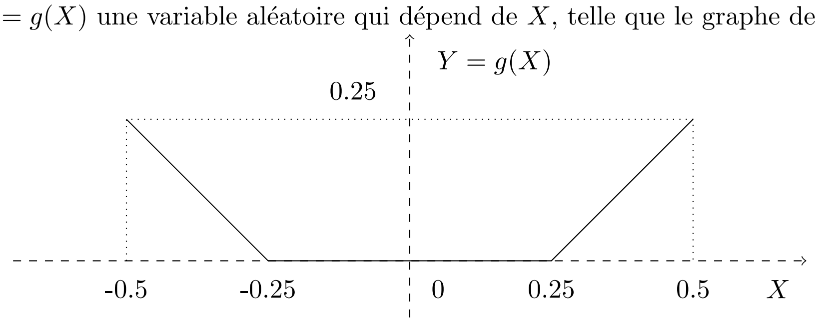
1 a) *Donner l'équation de* $f_X(x)$ *et de la fonction de répartition* $F_X(x)$.

1 b) *Calculer :* $\mathrm{p}\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right)$ *puis* $\mathrm{p}\left(X^2 \leqslant \frac{1}{4}\right)$. *Calculer*

$$\mathrm{p}\left(X^2 \leqslant \frac{1}{4} \,\text{et}\, X \leqslant \frac{1}{4}\right)$$

1 c) *Calculer la densité et la fonction de répartition de* $|X|$. *Ne pas oublier quelle est la contribution d'un point isolé à la valeur d'une intégrale.*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Soit $Y = g(X)$ une variable aléatoire qui dépend de X, telle que le graphe de g soit :



2 a) *Exprimer analytiquement la relation* $Y = g(X)$.

2 b) *Exprimer la mesure de probabilité* μ_X *de* X *à l'aide de la mesure de Lebesgue* λ.

2 c) *Calculer et tracer la fonction de répartition de* X *:* $F_X(x)$.

2 d) *Calculer la probabilité* $\mathrm{p}(Y = 0)$.

2 e) *Calculer et tracer la fonction de répartition de* Y *:* $F_Y(y)$.

2 f) *Calculer et tracer la fonction de densité de* Y *:* $f_Y(y)$.

2 g) *Exprimer la mesure de probabilité de* Y *à l'aide d'une mesure de Dirac.*

2 h) *Calculer* $\mathrm{p}(Y > 0.14 \,|\, X \in [-0.25, 0.45])$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathrm{p}_X(k) = \frac{\alpha}{k!}$.

3 a) *Calculer* α.

3 b) *Calculer* $\mathrm{E}\{X\}$ *et* $\mathrm{E}\{X(X-1)\}$. *En déduire* σ_X^2.

On considère un ensemble d'atomes radioactifs à la date $t = 0$. On s'intéresse à la durée de vie d'un atome, temps qui s'écoule entre $t = 0$ et la désintégration. On suppose que la probabilité d'un atome de ne pas être désintégré au temps t ($t > 0$) est $S(t) = e^{-\mu t}$ avec $\mu > 0$.

4 a) *Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire D, durée de vie d'un atome.*

4 b) *Calculer la densité et l'espérance de D.*

Soit m le nombre d'atomes au temps $t = 0$. L'ensemble d'atomes est nettement plus petit que la masse critique du matériau radioactif, et il ne peut y avoir de réaction en chaîne : les désintégrations d'atomes sont indépendantes les unes des autres.

4 c) *Donner la loi de $N(t)$, le nombre d'atomes non désintégrés au temps t.*

4 d) *Calculer l'espérance et la variance de $N(t)$.*

4 Intégration et espérance

1 a) *Quels sont les ensembles de mesure nulle pour la mesure de Dirac δ_a ?*

1 b) *Prouver que $\int_{\mathbb{R}} f(x)d\delta_a(x) = f(a)$.*

---

2 a) *X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer sa fonction caractéristique.*

2 b) *X suit une loi exponentielle de paramètre a. Calculer sa fonction caractéristique.*

---

3 a) *Un étudiant reçoit une note aléatoire X uniformément répartie entre 0 et 20. Donner la mesure de X ; calculer son espérance et sa variance.*

Les résultats obtenus sont insuffisants. La note est multipliée par 1.2 et les notes supérieures à 20 sont ramenées à 20 pour obtenir une variable aléatoire Y.

3 b) *Déterminer la loi de Y*

3 c) *Calculer l'espérance et la variance de Y.*

Une société de service en ingénierie emploie cinq ingénieurs à temps plein, soit 42 semaines de travail par an (il y a neuf semaines de congés et une semaine de séminaire d'entreprise pendant laquelle les ingénieurs ne peuvent pas être loués). Le patron se demande s'il ne devrait pas embaucher un nouvel ingénieur.

Un ingénieur coûte[1] 42k€ par an, soit 1000€ par semaine productive, pour un revenu aléatoire. L'expérience passée a permis de connaître la demande annuelle en semaines de travail pour l'entreprise, avec la probabilité associée. On supposera que la distribution est uniforme dans chaque classe.

X	proba	X	proba	X	proba	X	proba
200-210	0.03	220-230	0.12	240-250	0.22	260-270	0.14
210-220	0.09	230-240	0.15	250-260	0.20	270-280	0.05

4) *Chaque semaine de location d'ingénieur rapporte 1500€ à l'entreprise. Est-il rentable d'embaucher un sixième ingénieur ?*

[1] Il n'y a pas que du salaire net dans ce coût...

5 Couples de variables aléatoires

Un local est éclairé par une ampoule dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire X de loi expodentielle de paramètre $1/\lambda$, avec $\lambda = 300$. Lorsque l'ampoule claque, on la remplace par une autre, de même type. À $t = 0$ on met une ampoule neuve.

1 a) *Quelle est la probabilité que le local soit encore éclairé par la première ampoule au bout de 200 heures ?*

1 b) *Avec deux ampoules, quelle est l'espérance du temps d'éclairage ?*

1 c) *Quelle est la probabilité qu'avec deux ampoules on puisse éclairer le local plus de 400 heures ?*

1 d) *Utiliser l'inégalité de Tchebychev pour minorer la probabilité que les deux ampoules éclairent au total entre 400 et 800h.*

Le nombre de personnes se présentant à une station-service pendant une période de 15 minutes est une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{p}_X(x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

La probabilité que le client prenne de l'éthanol presque pur est de 0.4 ; dans le cas contraire il prend du carburant essentiellement issu du pétrole. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui ont, durant cette période de 15 minutes, pris de l'éthanol.

2 a) *Donner la loi conditionnelle de Y sachant X.*

2 b) *Donner la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.*

2 c) *Calculer les probabilités des évènements suivants :*

- $Y = 1$
- $X \geqslant 2$ et $Y = 0$
- $Y = 1$ sachant que $X \geqslant 2$
- $X = 3$ sachant que $Y \geqslant 1$

Un régiment de commandos est équipé d'un fusil d'assaut bien connu ; le nombre de cas d'armes qui s'enrayent au cours d'un mois suit une loi de Poisson de paramètre 3.

Le commandant du bataillon a demandé à ce que ses armes soit équipées d'un silencieux ; toutefois cela risque d'augmenter le risque d'enrayement. On estime que l'ajout du silencieux doublera le risque avec une probabilité 0.8 et le triplera avec une probabilité 0.2. Cela ne modifiera pas la nature de la loi : le nombre d'armes qui s'enrayent est toujours une loi de Poisson.

3 a) *Quelle est la loi du nombre d'armes qui s'enrayent chaque mois après l'ajout du silencieux ?*

3 b) *Calculer son espérance et sa variance*

Soit X une variable aléatoire gaussienne suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et U une variable aléatoire uniforme sur $\{-1,1\}$, indépendante de X. On pose $Y = UX$.

4 a) *Quelle est la nature du couple* (U,X) *?*

4 b) *Donner la loi de* Y.

4 c) *Calculer la covariance de* X *et* Y.

4 d) *Le couple* (X,Y) *est-il gaussien ? (on pourra calculer* $\mathrm{p}\,(X+Y=0)$*)*

6 Loi gaussienne et convergences

Soit $(X, Y)^T$ un couple gaussien centré dont la matrice de variance-covariance est :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } |\rho| < 1$$

1 a) *Déterminer la loi $Z = 2X + 3Y$.*

1 b) *Calculer* $\mathrm{E}\{XY\}$

1 c) *Montrer que $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.*

Brest, printemps 2022. La campagne bat son plein. 1200 étudiants prennent chacun une crêpe et vont s'installer confortablement pour lire les programmes. Pour s'attirer le plus de vote, les candidats ont prévu des garnitures de confiture d'abricot (A) et la classique beurre-sucre (B). Les électrices et électeurs ont chacun leur préférence. La direction de campagne estime qu'il y a une probabilité $\frac{2}{3}$ que le choix se porte sur la confiture d'abricot, et une probabilité $\frac{1}{3}$ que ce soit du beurre et du sucre. Les choix des différentes garnitures sont supposés indépendants (i.e. on ne se laisse pas influencer par le choix du précédent dans la file d'attente).

L'organisateur doit choisir de prendre assez de confiture d'abricot pour a crêpes, et assez de beurre et de sucre pour b.

2 a) *Quelle valeur minimale doit-il donner à a s'il veut que la probabilité de manquer d'abricot soit inférieure à 5% ? Même question pour le beurre (et le sucre).*

2 b) *Quelles valeurs doit-il donner à a et b s'il veut que la probabilité de manquer d'un type de garniture soit inférieure à 10% ?*

---

3) *En utilisant le théorème de la limite centrale pour des variables indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1, montrer que :*

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Dans un kiosque, un marchand de journaux remarque qu'une personne sur 20 achète un journal.

4 a) *Entre 8h et 9h, il passe 800 personnes. Donner la loi de la probabilité du nombre de journaux vendus. L'approcher par une loi plus simple.*

4 b) *Entre 10h et 11h, il ne passe que 100 personnes. Mêmes questions.*

4 c) *Entre 9h et 10h, il passe 400 personnes. Quelle est la probabilité qu'il y ait 40 journaux vendus ? (on pourra comparer les différentes approximations)*

7 Tirages aléatoires : quelques travaux sous numpy

Les outils de probabilité et de statistiques en python sont répartis en trois bibliothèques :

random : pour tirer des variables aléatoires selon les lois les plus courantes, mais aussi piocher dans une liste ou la mélanger.

numpy.random : pour tirer de nombreuses valeurs – on remplir un tableau numpy – selon un large panel de lois.

scipy.stats : pour accéder aux fonctions de densité et de répartition d'un large panel de variables aléatoires : `binom`, `poisson`, `norm`, `expon`, ... La bibliothèque fournit aussi des outils pour extraire des statistiques d'un échantillon, et pour effectuer des tests statistiques.

méfiance : les lois ne sont pas les mêmes dans `random`, `numpy.random` et `scipy.stats`. Une même loi peut y avoir deux noms différents (*cf.* `scipy.stats.expon` et `numpy.random.exponential`). Des lois de même nom peuvent être différentes : `random.randint` inclut la borne supérieure, `numpy.random.randint` pas).

Dans une distribution `X` de `scipy.stats`, plusieurs méthodes sont utiles :

pdf : fonction de densité (pour les lois continues)

pmf : loi de probabilité (pour les lois discrètes)

cdf : fonction de répartition

ppf : inverse de la fonction de répartition

sf : complémentaire de la fonction de répartition (*survival function*)

mean : espérance (la *moyenne* d'un échantillon est donnée par `numpy.mean`)

var : variance

std : écart-type

median : médiane

On considère une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle d'espérance 2. On veut apprécier sur cet exemple la précision de l'inégalité de Chebychev.

1 a) *Calculer avec une méthode appropriée de* `scipy.stats.expon` *:* $\mathrm{p}(|X - \mathrm{E}\{X\}| > 3)$.

1 b) *Sur un tirage aléatoire, estimer une valeur approchée de cette probabilité. (Commenter les lignes suivantes*[2] *jusqu'à bien les comprendre)*

```
import scipy as sp
import numpy as np
import scipy.stats as st
import numpy.random as rnd

B = rnd.exponential(scale = 2, size = (42000,))
Bm = B - np.mean(B)
Bi = abs(Bm)>3
p = sum(Bi)/42000
print(p)
```

[2] `numpy.random.exponential(scale = `λ`, size = (`n`, `m`))` remplit une matrice $n \times m$ avec des tirages aléatoires selon une loi exponentielle de paramètre $1/\lambda$, donc d'espérance λ.

1 c) *Que donne l'inégalité de Chebychev ?*

---

2 a) *X suit la loi normale*[3] *centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Faire varier* $\mathrm{E}\{X\}$ *et* σ_X^2*. Ajouter sur le même graphique des tracés pour la loi normale, avec des espérances ou des écarts-type différents.*

2 b) *Y suit la binomiale $B(n,p)$ avec $n=20$ et $p=0.5$. Pourquoi la fonction de répartition est-elle en escalier ? Augmenter p. Comment évolue la fonction de répartition ? Commentez.*

2 c) *U suit la loi binomiale $B(50, 0.1)$ et V suit la loi de Poisson $P(5)$. Comparer les probabilités* $\mathrm{p}_U(k)$ *et* $\mathrm{p}_V(k)$ *pour quelques valeurs de k. Commenter.*

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes, suivant une même loi exponentielle de paramètre 1.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

3 a) *Calculer*[4] *la densité de probabilité $f_Z(z)$. Il peut être utile de commencer par sa fonction de répartition.*

3 b) *Tracer $f_Z(z)$.*

```
z = np.arange(0.01, 20, 0.01)
fX = st.expon.pdf(z)
FX = st.expon.cdf(z)
fZ = 3*fX*(FX**2)

plt.figure()
plt.plot(z, fZ, label='densité de Z')
plt.legend()
plt.show()
```

3 c) *Calculer* $\mathrm{p}(Z < 4)$*. Vérifier approximativement – avec les valeurs du vecteur* `fZ` *– le résultat.*

3 d) *Donner une valeur approchée de* $\mathrm{E}\{Z\}$ *(avec les valeurs du vecteur* `fZ`*), puis exacte.*

[3] Attention, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est `scipy.stats.norm.cdf`, et non la fonction `scipy.special.erf`.

[4] Oui, avec un papier et un crayon.