ens I.I.E. – 2ème année 2006-2007

M.L.S.F. – Novembre 2006 **Durée : 01h30 (une heure trente)**

TOUS DOCUMENTS STRICTEMENT PERSONNELS PERMIS
(ainsi aucun 'prêt' fût-il de polycopié voire de livre n'est autorisé)

Le sujet comporte 3 exercices indépendants dont l'énoncé tient sur cette seule page

1. <u>Questions de cours</u>

1.1. Enoncer le LA et, de deux manières différentes, le LFA. Commenter leur validité d'application, en particulier leur applicabilité dans les langages acontextuels.

1.2. Qu'est-ce qu'un automate, une machine ? En quoi «automates à états finis» et autres «automates programmables» sont des inepties ?

1.3. Qu'est-ce qu'une équation de langage, une règle BNF, une production, une production BNF ? Justifier l'obligation d'utiliser le signe ' = ' pour une règle BNF même si d'autres (lesquels ?) sont fréquemment utilisés ?.

1.4. Comment peut-on montrer qu'une grammaire acontextuelle est ambiguë et-ou ne l'est pas?

1.5. Détailler la résolution des 5 équations ei (où + dénote l'union) et les 5 règles ri suivantes :

e1.	$A = BA + C$	r1.	$A = BA \mid C$
e2.	$A = AA + C$	r2.	$A = AA \mid C$
e3.	$A = AA + \varepsilon$	r3.	$A = AA \mid \varepsilon$
e4.	$A = A + C$	r4.	$A = A \mid \varepsilon$
e5.	$A = AB$	r5.	$A = AB$

2.<u>Exercice 1</u>

2.1. Valider un afd $\mathcal{A}$ qui accepte les (usuelles) représentations binaires des entiers congrus à 1 et à 3 modulo 4.

2.2. Donner toutes les représentations équivalentes de $\mathcal{A}$.

2.3. En déduire au moins deux expressions de $L(\mathcal{A})$.

2.4. Calculer $\mathcal{B}$ l'afd minimal tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})$.

2.5. & 2.6 analogues à 2.2 et à 2.3. pour $\mathcal{B}$

3. <u>Exercice 2</u>

Soit $\mathcal{G}_1$ de BNF suivante :

$A = AB \mid BC \mid \cancel{DFG}$

$B = 2B1 \mid 2BC1 \mid C$

$\cancel{D = 3DG4 \mid 1DF2 \mid 4D4}$

$\cancel{F = 6GA1 \mid 21}$

$C = 3C2 \mid \cancel{3DFG3} \mid E$

$E = 5C5 \mid \cancel{DFG} \mid 5 \mid \varepsilon$

$\cancel{G = 2AD2 \mid \varepsilon \mid 6EG6 \mid 6}$

3.1. Corriger $\mathcal{G}_1$ en $\mathcal{G}_2$. Formaliser $\mathcal{G}_2$.

3.2. Donner, dans $\mathcal{G}_2$ toutes les dérivations droites, toutes les dérivations gauches, tous les arbres de dérivation, s'ils existent, des deux mots : 5 & 6

3.3. Que peut-on conclure quant à l'ambiguïté ou à la non ambiguïté de $\mathcal{G}_2$?

3.4. Calculer $\mathcal{G}_3$ (correcte) ε-free équivalente à $\mathcal{G}_2$.

3.5. En déduire l'ambiguité de la $\mathcal{G}_3$.

3.6. Calculer $\mathcal{G}_4$ équivalente à $\mathcal{G}_3$ et sans cette ambiguité.

******* { fin de texte }*******

MLSF – Novembre 2006

1) 1.1

LA: $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}A = AB \cup C \\ \varepsilon \notin B\end{array}\right. \Rightarrow A = CB^* \\ A = CB^* \Rightarrow A = AB \cup C\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}A = BA \cup C \\ \varepsilon \notin B\end{array}\right. \Rightarrow A = B^*C \\ A = B^*C \Rightarrow A = BA \cup C\end{array}\right.$

LFA

$A = AB \cup C \Leftrightarrow A = CB^*$

$A = BA \cup C \Leftrightarrow A = B^*C$

(pour A, B, C algébriques)

LFA pour les grammaires

$A = AB | C \Leftrightarrow A = CB^*$

$A = BA | C \Leftrightarrow A = B^*C$

(dans le cadre des grammaires acontextuelles)

1.2 Automate : système répondant Vrai ou Faux en fonction des donnée qu'il reçoit.

Machine : Idem, mais répond "V", "F" ou "?".

Automates à états finis.

→ on fonctionne toujours par état

→ confusion : "finis" non appliqué à "états".

Automates programmables

→ pas de sens : fonctionne que s'il est programmé.

1.3 Équation de langage : $A_i = p_{i1} \cup \ldots \cup p_{im}$ $p_{i,j} \in (V \cup \mathcal{A})^*$

Règle BNF : $<A_i> = \{A_i \to p_{i1}, \ldots A_i \to p_{im}\}$

Production : $A_i \to p_{i,j}$

Production BNF :

Utilisation '=' : ?

1.4 • G non ambiguë ssi $\forall m \in V^*$ avec une unique DG / DD, un unique AD

• G ambiguë ssi $\exists m \in V^*$ avec plusieurs DG / DD, plusieurs AD

• Le problème général est indécidable.

$\underline{1.5}$ $\underline{r_1}$ $\boxed{A = BA \mid C \underset{LFA}{\Leftrightarrow} A = B^{*}C}$

$\underline{r_2}$ $\boxed{A = AA \mid C \Leftrightarrow A = C^{+}}$

car $A^{(0)} = \emptyset\emptyset \cup C = C$

$A^{(1)} = CC \cup C = C^2 \cup C$

$A^{(2)} = (C^2 \cup C)(C^2 \cup C) \cup C = C^4 \cup C^3 \cup C^2 \cup C$

$A^{(n)} = \bigcup_{1 \le i \le 2^n} C^i \Rightarrow A^{(n+1)} = \bigcup_{\substack{1 \le i \le 2^n \\ 1 \le j \le 2^n}} C^{i+j} \cup C = \bigcup_{1 \le i \le 2^{n+1}} C^i$

$A = \lim_{n \to +\infty} A^{(n)} = C^{+}$

$\underline{r_3}$ $\boxed{A = AA \mid \varepsilon \Leftrightarrow A = \varepsilon^{+} = \varepsilon}$

$\underline{r_4}$: $\boxed{A = A \mid \varepsilon \Leftrightarrow A = \varepsilon}$

car $A^{(0)} = \emptyset \cup \varepsilon = \varepsilon$

$A^{(1)} = \varepsilon \cup \varepsilon = \varepsilon$ ... $A^{(n)} = \varepsilon$ $\quad A = \lim_{n \to +\infty} A^{(n)} = \varepsilon$

$\underline{r_5}$: $\boxed{A = AB \Leftrightarrow A = \emptyset}$

car $A^{(0)} = \emptyset B = \emptyset$

$A^{(1)} = \emptyset B = \emptyset$ ... $A^{(n)} = \emptyset$ $\quad A = \lim_{n \to +\infty} A^{(n)} = \emptyset$

$\underline{1.4}$ $\underline{e_1}$ $\boxed{A = BA \cup C \underset{(LBS)}{\Leftrightarrow} \exists D \in 2^{V^*} \; A = (B \cup D)^{*}C}$

$\underline{e_2}$ $A = AA \cup C \Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \; A = (A \cup D)^{*}C$

$\Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \begin{cases} A = XC \\ X = X(A \cup D) \cup \varepsilon = XA \cup XD \cup \varepsilon \end{cases}$

$\underline{e_3}$ $A = AA \cup \varepsilon \Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \; A = (A \cup D)^{*}$

$\Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \begin{cases} A = X \\ X = XA \cup XD \cup \varepsilon \end{cases}$

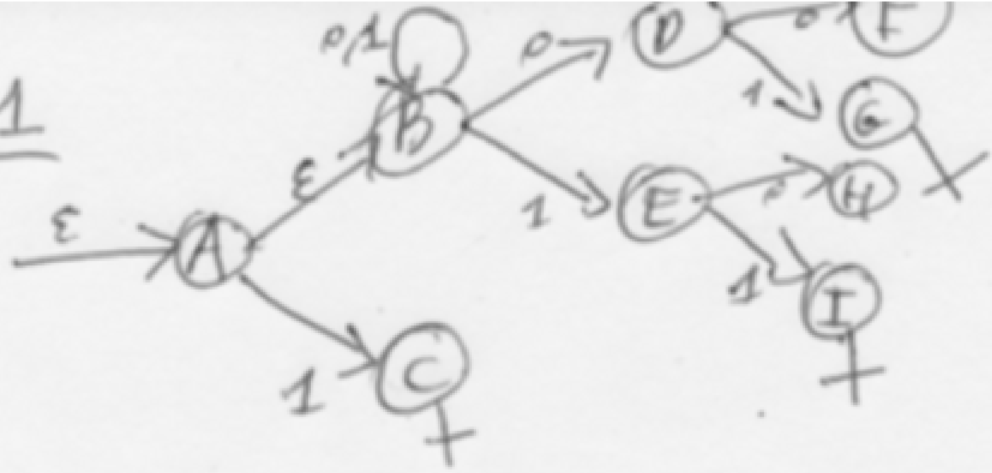
$\boxed{A = AA \cup \varepsilon \Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \; A = AA \cup AD \cup \varepsilon}$

$\underline{e_4}$ $\boxed{A = A \cup C \Leftrightarrow C \subseteq A}$

$\underline{e_5}$: $A = AB \Leftrightarrow \exists D \in 2^{V^*} \; A = \emptyset(B \cup D)^{*}$

$\boxed{A = AB \Leftrightarrow A = \emptyset}$

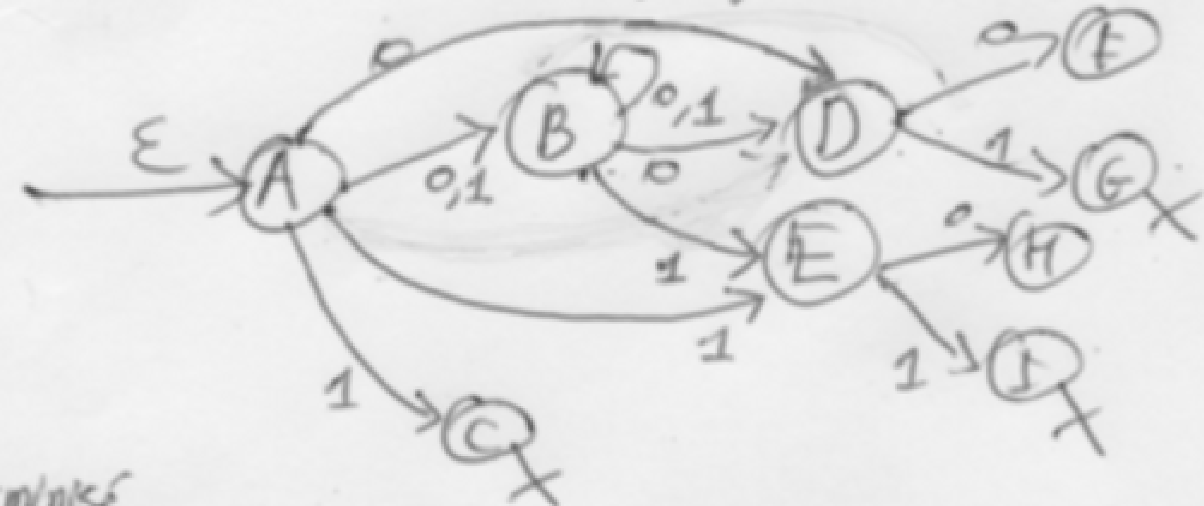
2) 2.1



$$\begin{cases} C : & 1 \\ G : & \equiv 1\ (4) \\ I : & \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

ε-free

$$\hat{\tau}\left(A, \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right) = \varepsilon^*\left(\tau\left(\varepsilon^*(A), \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right)\right)$$
$$= \varepsilon^*\left(\tau\left(\{A, B\}, \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\right)\right)$$
$$= \varepsilon^*\begin{pmatrix} \cancel{D}, D, B \\ C, E, B \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \{D, B\} \\ \{E, B\} \end{vmatrix}$$



déterminisé

		0	1
a	$\xrightarrow{\varepsilon}$ A	BD	BEC
b	BD	BDF	BEG
c ⊢	BEC	BDH	BEI
d	BDF	BDF	BEG
e ⊢	BEG	BDH	BEI
f	BDH	BDF	BEG
g ⊢	BEI	BDH	BEI

2.2 graphe, tableau

Arcs sortants :

$$\begin{cases} A = 0B \mid 1C & \leftarrow \text{initial} \\ B = 0D \mid 1E \\ C = 0F \mid 1G \mid \varepsilon & \leftarrow \text{final} \\ D = 0D \mid 1E \\ E = 0F \mid 1G \mid \varepsilon & \leftarrow \text{final} \\ F = 0D \mid 1E \\ G = 0F \mid 1G \mid \varepsilon & \leftarrow \text{final} \end{cases}$$

Arcs entrants:

$$\begin{cases} L = C \mid E \mid G & \leftarrow \text{finaux} \\ A = \varepsilon & \leftarrow \text{initial} \\ B = A0 \\ C = A1 \\ D = B0 \mid D0 \mid F0 \\ E = B1 \mid D1 \mid F1 \\ F = E0 \mid G0 \mid C0 \\ G = E1 \mid G1 \mid C1 \end{cases}$$

2.3 Arc sortants:

$D = F = 0^*1E$ (LFA)

$G = 1^*(00^*1E \cup \varepsilon)$ (LFA)

$E = 0F \cup 1G \cup \varepsilon$

$E = (00^*1 \cup 11^*00^*1)^*(11^* \cup \varepsilon)$ (LEA)

$A = 00D \cup 01E \cup 10F \cup 11G \cup 1$

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{A}) = A = (000^*1 \cup 100^*1 \cup 01 \cup 111^*00^*1)(00^*1 \cup 11^*00^*1)^*(11^* \cup \varepsilon) \cup 111^* \cup 1}$$

Arcs sortants:

$A = \varepsilon,\ B = 0,\ C = 1$

$D = 00 \cup D0 \cup F0 = (00 \cup F0)0^* = 000^* \cup F00^*$

$E = 01 \cup 000^*1 \cup F(000^*1 \cup 1)$

$G = E1 \cup G1 \cup 11 = (E1 \cup 11)1^* = 111^* \cup E11^*$

$F = E0 \cup 111^*0 \cup E11^*0 \cup 10$

$F = 010 \cup 0111^*0 \cup 000^*10 \cup 000^*111^*0 \cup 10 \cup 111^*0$
$\quad \cup F(000^*1 \cup 1)(0 \cup 11^*0)$

$$\boxed{F = (010 \cup 10 \cup 111^*0 \cup 0111^*0 \cup 000^*10 \cup 000^*111^*0) \cdot (000^*10 \cup 10 \cup 000^*111^*0 \cup 11^*0)^*}$$

$L = 1 \cup 111^* \cup E(11^* \cup \varepsilon)$

$$\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L = 1 \cup 111^* \cup 01 \cup 000^*1 \cup 000^*111^* \cup F(000^*1 \cup 1)}$$

3) **3.1** cf cours $G_2 \begin{cases} A = AB \mid BC \\ B = 2B1 \mid 2BC1 \mid C \\ C = 3C2 \mid E \\ E = 5C5 \mid 5 \mid \varepsilon \end{cases}$

3.2 $6 \notin \mathcal{L}(G_2)$: pas de dérivations

5 : DD

5DD = A → AB → AC → AE → EDD 5

A → BC → BE → B5 → C5 → E5 → 5

BE → B → C → E → 5

avec EDD 5 = A5 → AB5 → AC5 → AE5 → EDD 5

A5 → BC5 → BE5 → B5 → C5 → E5 → 5

5 : DG

5DG = A → AB → DGE B → C → E → 5

AB → DG5 B → 5C → 5E → 5

A → BC → CC → EC → 5C → 5E → 5

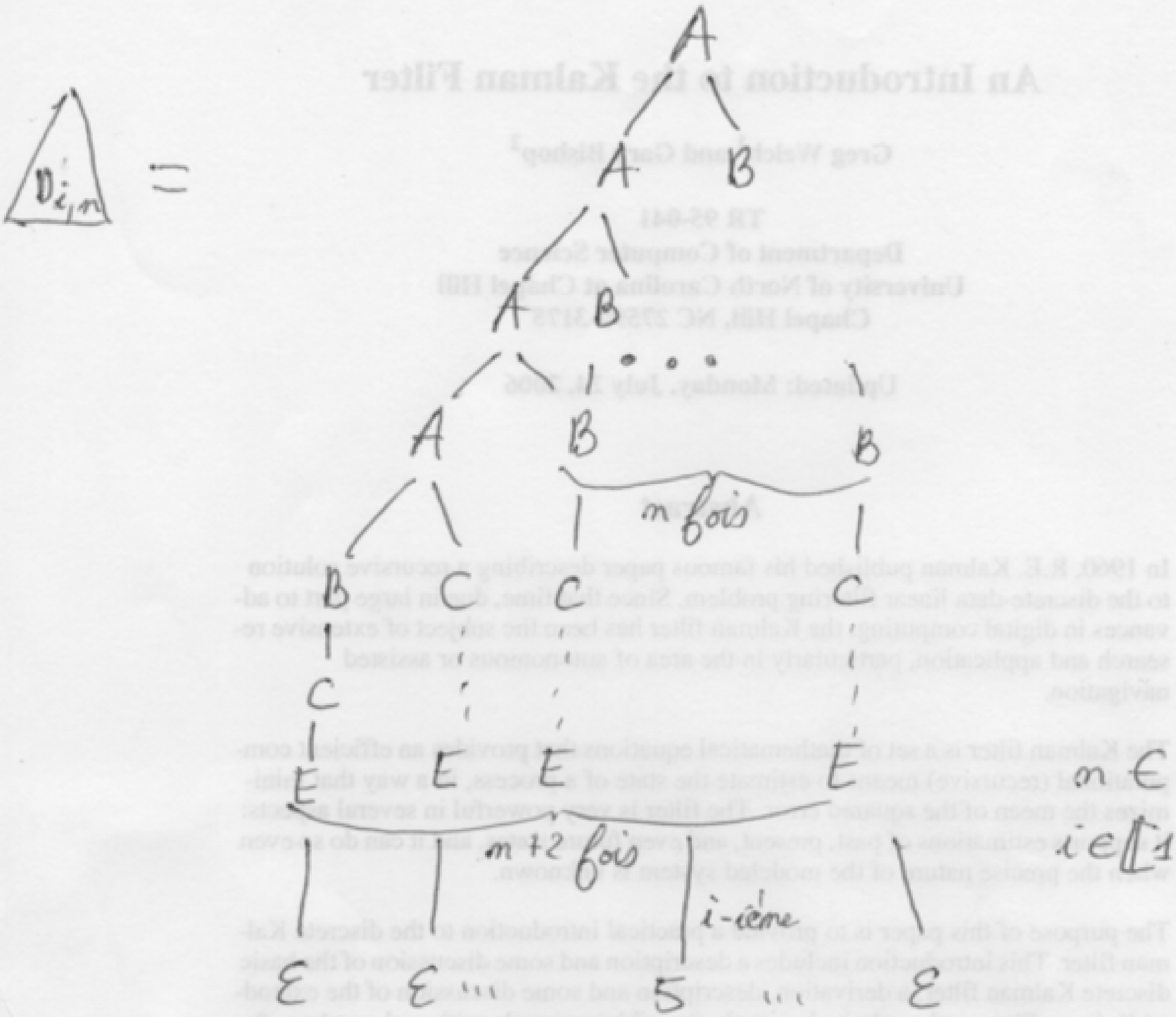
EC → C → E → 5

avec EDG B = A → EDG B → E

A → BC → CC → EC → C → E

3.3 G_2 est ambiguë : il existe plusieurs dérivations gauche / droite / arbres de dérivations

3.2 Arbre de dérivation



$m \in \mathbb{N}$

$i \in [\![1; m+2]\!]$

3.4

$M_0 = \{\varepsilon\}$ $\quad M_2 = \{\varepsilon, E, C\}$ $\quad M_4 = \{\varepsilon, E, C, B, A\}$

$M_1 = \{\varepsilon, E\}$ $\quad M_3 = \{\varepsilon, E, C, B\}$ $\quad M_5 = M_4$

Tous sont ε-iques.

$$G_3 \begin{cases} L = A \mid \varepsilon \\ A = AB \mid A \mid B \mid BC \mid B \mid C \\ B = 2B1 \mid 21 \mid 21 \mid 2B1 \mid 2C1 \mid 2BC1 \mid C \\ C = 32 \mid 3C2 \mid E \\ E = 55 \mid 5C5 \mid 5 \end{cases}$$

- Grammaire cyclique donc G_3 ambiguë :

$$L \to A \begin{cases} \nearrow A \to B \to C \to E \to 5 \\ \searrow B \to C \to E \to 5 \end{cases}$$

deux DG ≠

3.6 • Suppression cyclique direct

$$g_3' \begin{cases} L = A \mid E \\ A = AB \mid B \mid BC \mid C \\ B = 2B1 \mid 21 \mid 2C1 \mid 2BC1 \mid C \\ C = 32 \mid 3C2 \mid E \\ E = 55 \mid 5C5 \mid 5 \end{cases}$$

•

	L	A	B	C	E
L		1	1	1_A	1_c
A			1	1	1_c
B				$\underline{1}$	1_c
C					1
E					

$g_4 = g_3'$ sans cycle.