Тема 9. Моменты *k*-го порядка

Математическое ожидание и дисперсия в непрерывном случае

Определение. Для случайной величины X с плотностью $f_X(x)$ математическое ожидание МX определяется формулой

$$\text{M}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx. \qquad (1)$$

Механическая аналогия. Как вычисляется в механике центр масс, если масса распределена непрерывно? Для примера рассмотрим стержень переменного радиуса, скажем, ствол спиленного дерева без верхушки и сучьев (рис. 1).

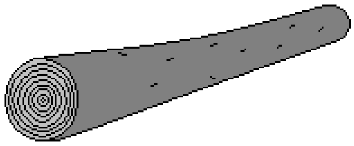

Рис. 1

Чтобы найти центр масс, мысленно распилим ствол на очень тонкие слои толщиной Δ. Масса i-го (почти цилиндрического) слоя, расположенного в точке с координатой $x_i = \Delta i$, приближённо равна

$$m_i = \pi R^2(x_i)\rho\Delta,$$

где $R(x_i)$ — радиус ствола в точке с координатой x_i, ρ — плотность древесины. Вводя обозначение $f(x) = \pi R^2(x)\rho$ и учитывая, что $\Delta = x_i - x_{i-1}$, заметим, что сумма

$$\sum x_i m_i = \sum x_i f(x_i)\Delta$$

служит интегральной суммой для интеграла

$$\int x\, f(x)\, dx.$$

Аналогично, сумма масс всех цилиндров (она приближённо равна массе всего ствола)

$$\sum m_i = \sum f(x_i)\Delta$$

представляет собой интегральную сумму для интеграла

$$\int f(x)\, dx.$$

Наконец, для координаты центра масс ствола имеем формулу

$$x_{ц.м.} = \int x\, f(x)\, dx \Big/ \int f(x)\, dx, \qquad (2)$$

которая является непрерывным аналогом формулы (2) из темы 6. В теории вероятностей в роли функции $f(x)$ выступает плотность $f_X(x)$, причём $\int f_X(x)\, dx = 1$.

Отметим, что математическое ожидание может не существовать. Например, для случайной величины R, имеющей *распределение Коши*[1] с плотностью

$$f_R(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

интеграл (1) не определён, т. е. МR не существует. Это вызвано тем, что функция $f_R(x)$ так медленно убывает при $x \to \pm\infty$ (рис. 2), что интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} x\, f_R(x)\, dx$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} x\, f_R(x)\, dx$ расходятся. Действительно, рассмотрим, например, второй интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x\, f_R(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{2\pi}(\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) \; - \; \ln(1+0^2)) = \infty.$$

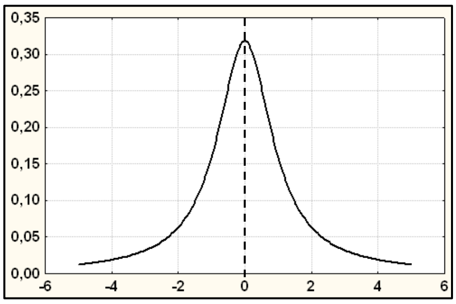

Рис. 2

Теперь обобщим на непрерывный случай полезную формулу (1) из темы 7, применяемую для вычисления математического ожидания некоторой функции от случайной величины. Верно

Утверждение. Пусть случайная величина X имеет плотность $f_X(x)$. Рассмотрим случайную величину $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ — заданная функция. Тогда

$$\text{М}Y = \text{М}\varphi(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_X(x)\, dx. \tag{3}$$

Применив это утверждение к функции $\varphi(x) = x^2$, получим непрерывный аналог формулы (3) из темы 7, применяемой для вычисления дисперсии:

$$\text{D}X = \text{М}X^2 - (\text{М}X)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx \; - \; (\text{М}X)^2. \tag{4}$$

Мерой «типичного разброса» значений случайной величины X относительно МX служит *стандартное отклонение* $\sqrt{\text{D}X}$. Интервал

$$(\text{М}X - \sqrt{\text{D}X}, \; \text{М}X + \sqrt{\text{D}X})$$

обычно рассматривается в качестве *области типичных значений* случайной величины X (рис. 3).

[1]Огюстен Луи Коши (1789 – 1857) — французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

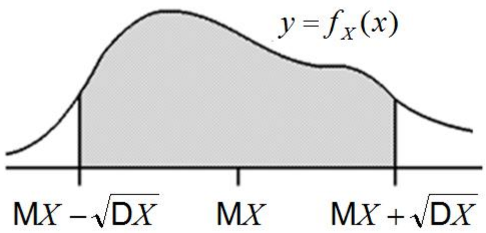

Рис. 3

Моменты

Напомним, что согласно примеру из темы 7 дисперсия $\mathsf{D}X = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)^2$ является аналогом *момента инерции относительно центра масс* механической системы:

$$I(x_{ц.м.}) = \sum (x_i - x_{ц.м.})^2 m_i.$$

В теории вероятностей интерес также представляет рассмотрение степеней выше 2.

Определение. Величина $\alpha_k = \mathsf{M}X^k$ называется *моментом k-го порядка*, величина $\mu_k = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)^k$ называется *центральным моментом k-го порядка*, где k — произвольное натуральное число.

В частности, $\mathsf{M}X = \alpha_1$ и $\mathsf{D}X = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \mu_2$.

Согласно формуле (1) из темы 7 в дискретном случае имеем равенства

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i \quad \text{и} \quad \mu_k = \sum_i (x_i - \mathsf{M}X)^k p_i. \tag{5}$$

Согласно приведённой выше формуле (3) в непрерывном случае имеем равенства

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\,dx \quad \text{и} \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}X)^k f_X(x)\,dx. \tag{6}$$

Пример. Вычислим моменты α_k и μ_k для бернуллиевской случайной величины I, принимающей значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Согласно формулам (5) получаем

$$\alpha_k = 0^k \cdot q + 1^k \cdot p = p \quad \text{и} \quad \mu_k = (0 - p)^k \cdot q + (1 - p)^k \cdot p = (-1)^k p^k q + q^k p.$$

Домашнее задание

Если **четвёртой** буквой вашей **фамилии** служит:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 9.1 и 9.5;
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 9.2 и 9.6;
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 9.3 и 9.7;
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 9.4 и 9.8.

9.1) Для экспоненциальной случайной величины T с параметром λ вычислить $\mathsf{D}T$.

9.2) Для случайной величины X с плотностью $f_X(x) = e^{-|x|}/2$ вычислить $\mathsf{D}T$.

9.3) Для случайной величины X с плотностью $f_X(x) = (1 - |x|) I_{[-1,1]}$ вычислить $\mathsf{D}T$.

9.4) Для пуассоновской случайной величины N с параметром λ найти $\mathsf{M}N(N-1)(N-2)$.

9.5) Для случайной величины X, имеющей плотность $f_X(x)$, найти значение параметра a, при котором достигается минимум по a функции $\mathrm{M}|X-a|$. Выразить ответ через функцию распределения $F_X(x)$.

9.6) Число X выбирается наугад из чисел $1, 2, \ldots, n$. Вычислить третий момент случайной величины X. (*Указание*. Используйте математическую индукцию для вывода формулы.)

9.7) Для экспоненциальной случайной величины T с параметром λ найти момент k-го порядка. (*Указание*. Используйте математическую индукцию для вывода формулы.)

9.8) Вычислить третий момент (запишите ответ задачи без знака суммы):

а) случайной величины S_n с биномиальным распределением: $\mathbf{P}(S_n = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

б) случайной величины N с пуассоновским распределением: $\mathbf{P}(N = i) = \lambda^i e^{-\lambda} / i!$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

9.9)* Найти момент k-го порядка для случайной величины Z с плотностью $f_X(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$. Вычислить числовые значения моментов 4-го, 6-го и 8-го порядка.