Тема 2. Выбор с возвращением и без возвращения

Повторный выбор наудачу с возвращением

В урне лежат шары, занумерованные числами от 1 до m. Наудачу <u>*с возвращением*</u> извлекают n шаров с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно (рис. 1).

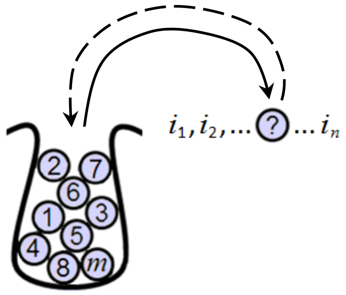

Рис. 1

Пространство исходов Ω состоит из всевозможных наборов длины n из первых m натуральных чисел, среди которых возможны повторения: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $1 \le i_k \le m$. Очевидно, что $|\Omega| = m^n$.

Пример 1. Рассмотрим событие А = {при последнем извлечении был вынут шар с номером 1}. Тогда исходы, входящие во множество А, имеют вид $\omega = (i_1, \ldots, i_{n-1}, 1)$, где компоненты $i_1, \ldots, i_{n-1}$ могут принимать любые значения от 1 до m. Поэтому $|A| = m^{n-1}$. Следовательно, $\mathbf{P}(A) = 1/m$.

Пример 2. Пусть M — наибольший из номеров вынутых шаров, т. е. $M = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Найдём $\mathbf{P}(M \le k)$, где $1 \le k \le m$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{P}(M \le k) = \mathbf{P}(i_1 \le k, \ldots, i_n \le k) = k^n / m^n = (k/m)^n$.

Случайные перестановки

В модели перестановок пространство исходов Ω состоит из всевозможных перестановок первых n натуральных чисел: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где i_k — числа от 1 до n без повторений. Давайте найдём $|\Omega|$. Единицу можно поставить на любое из n мест в перестановке; двойку — на любое из $(n-1)$ мест, оставшихся после размещения единицы; тройку — на любое из $(n-2)$ мест, оставшихся после размещения единицы и двойки, и т. д. Всего вариантов получается $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! = |\Omega|$.

В этой модели даже для не очень больших n вычислять вероятности событий прямым перебором всех ω не получится. И компьютер не поможет. Например, для $n = 15, 20, 30$ имеем:

$15! \approx 1{,}31 \cdot 10^{12}$ (ноутбук «завис»),
$20! \approx 2{,}43 \cdot 10^{18}$ (суперкомпьютер «завис»),
$30! \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$ (нереально осуществить прямой перебор всех перестановок НИКОГДА).

Повторный выбор наудачу без возвращения

В урне лежат шары, занумерованные числами от 1 до m. Наудачу <u>*без возвращения*</u> извлекаются n шаров ($n \le m$) с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно. Пространство исходов Ω состоит из всевозможных наборов длины n из первых m натуральных чисел без повторений: $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $1 \le i_k \le m$ — различные числа. Нетрудно понять, что $|\Omega| = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$. Это произведение обозначается через A_m^n и называется *числом размещений из m по n* (arrangement — (*англ.*) размещение). Число размещений можно выразить через факториалы: $A_m^n = m!/(m-n)!$.

Модель случайных перестановок является частным случаем модели размещений при $m = n$.

Методика решения комбинаторных задач

Решение любой комбинаторной задачи следует разделять на две части:

1) формальное описание случайного эксперимента, при котором конкретизируется, что представляет собой ω (обычно, ω — вектор с целочисленными компонентами), подсчёт общего числа исходов $|\Omega|$;

2) подсчёт числа исходов, входящих в событие А, которое определяется некоторым условием, заданным словами.

Пример 3. Найдём вероятность, что при выборе шаров наудачу без возвращения при последнем извлечении появится шар с номером 1.

***Часть* 1.** Здесь $\omega = (i_1, \dots, i_n)$, где $1 \le i_k \le m$ — различные натуральные числа, $|\Omega| = A_m^n$.

***Часть* 2.** Исходы, образующие событие А, устроены так: $\omega = (i_1, \dots, i_{n-1}, 1)$, где $2 \le i_k \le n$ — различные натуральные числа. Таким образом, надо разместить $(m-1)$ чисел на позициях от 1 до $n-1$. Поэтому

$$|\mathrm{A}| = A_{m-1}^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = \frac{A_{m-1}^{n-1}}{A_m^n} = \frac{(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)} = \frac{1}{m}.$$

Ответ интуитивно ожидаем. Он совпадает с ответом из примера 1 для выбора с возвращением.

Трудности:

а) надо научиться чётко разделять задачу на две указанные выше части, при этом описание эксперимента должно быть максимально детальным, без учёта информации и параметров, характеризующих событие А (в противном случае появляются сомнения в том, что элементарные события равновероятны);

б) иногда возникают семантические проблемы: студенты неправильно понимают условие задачи, определяющее событие А, или не знают, как перевести «слова» в условия на компоненты вектора ω.

Рекомендации:

1) если сомневаетесь, уточните у преподавателя, правильно ли вы поняли условие;
2) напрямую переберите все варианты для случаев, когда размерность вектора ω равна 2 или 3;
3) что-нибудь зафиксируйте (скажем, какую-нибудь компоненту вектора ω) и перейдите к подсчету в пространстве меньшей размерности.

Домашнее задание

Если **четвёртой** буквой вашей **фамилии** служит:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 2.1 и 2.5 (вариант 1);
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 2.2 и 2.6 (вариант 2);
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 2.3 и 2.7 (вариант 3);
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 2.4 и 2.8 (вариант 4).

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи. Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт. Если «своя» задача уже решена на семинаре, то вместо неё можно решать задачу с номером 5 – N, где N — номер варианта. Если и задача с номером 5 – N тоже была решена на семинаре, то вместо первой «своей» задачи можно решать задачу с номером 9 – N. Дополнительно можно решать задачу с номером 9, но она будет засчитана лишь в том случае, если правильно решены обе «свои» задачи.

2.1) Среди m экзаменационных билетов l — лёгкие, n студентов по очереди наудачу берут билеты. Найти вероятность, что k-й студент получит лёгкий билет, если билеты:
а) не возвращаются; б) возвращаются. (Что такое элементарное событие ω в этой задаче?)

2.2) В связке n ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке. Не подошедшие ключи откладываются. Найти вероятность, что для открытия замка потребуется: а) ровно k попыток; б) не более k попыток?

2.3) На шахматной доске (8 х 8 клеток) наугад ставятся: а) 3 ладьи; б) 2 ладьи. Найти вероятность, что они не будут угрожать друг другу. Запишите ответ в виде несократимой дроби.
(*Ладьи ходят по вертикали или по горизонтали на любое число клеток*.)

2.4) 8 девушек, в том числе две сестры, водят хоровод, встав в круг наугад. Какова вероятность (запишите ответ в виде несократимой дроби), что сёстры находятся: а) рядом; б) друг против друга? (Что такое элементарное событие ω в этой задаче?)

2.5) В очередь в случайном порядке становятся n человек. Найти вероятность, что:
а) между определёнными лицами окажется ровно k человек, k = 0, 1, … , n – 2.
б) два определённых лица окажутся рядом.

2.6) Найти вероятность, что взятое наугад: а) трехзначное; б) четырёхзначное число записывается разными цифрами.

2.7) Найти вероятность p_n, что по крайней мере двое из n людей имеют одинаковый день рождения. Выразить ответ через число размещений. Вычислить на компьютере значение p_n с двумя знаками после запятой для n = 30 и n = 50. (Опишите, как вычисляли.)

2.8) В лифт 9-ти этажного дома на первом этаже вошли трое. Найти вероятность, что для их выхода лифт будет останавливаться трижды. Записать ответ в виде несократимой дроби.

Замечание. В задаче 2.8 предполагается, что каждый пользователь лифта независимо от остальных пользователей с одинаковыми вероятностями выходит на любой из возможных остановок. Так, в данном случае каждый вошедший в лифт на первом этаже с вероятностью 1/8 выходит на 2-м этаже, с вероятностью 1/8 на 3-м этаже, … , с вероятностью 1/8 на 9-м этаже.

2.9)* В условиях задачи 2.8 найти вероятность, что лифт будет останавливаться однажды и дважды. Записать ответы в виде несократимых дробей.