Тема 3. Сочетания и треугольник Паскаля

Числа сочетаний

Произвольное подмножество n-элементного множества удобно описывать в виде строки длины n, состоящей из 0 и 1: если элемент с номером k входит в данное подмножество, то на k-м месте в строке стоит 1, иначе — 0. Например, запись

0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0

означает, что из 9-ти элементного множества выбрано подмножество, состоящее из элементов с номерами 3, 5, 6 (рис. 1).

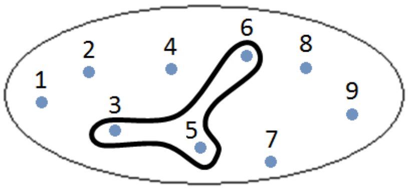

Рис. 1

Сколько всего существует разных подмножеств у n-элементного множества? Так как на каждом из n мест в записи может стоять либо 0, либо 1, то получаем, что всего разных записей 2^n. Запись, состоящая из одних единиц, соответствует самому n-элементному множеству. Запись, состоящая из одних нулей, соответствует пустому множеству, вообще не содержащему элементов.

Выясним, сколько имеется записей, содержащих ровно k элементов. Иначе говоря, найдём, сколькими способами можно выбрать k-элементное подмножество из n-элементного множества. Выбрать номера элементов, которые войдут k-элементное подмножество, — указать k мест в записи, на которых будут стоять единицы. Выберем эти места как k шаров из урны с n занумерованными шарами (выбор без возвращения). Всего существует A_n^k вариантов выбора. Однако теперь нас интересует только состав выбранных номеров, а не их порядок. Поэтому надо объединить все варианты, отличающиеся лишь порядком номеров. Их количество равно $k!$. Следовательно, k-элементное подмножество можно выбрать $A_n^k/k!$ разными способами. Это число способов обозначают через C_n^k и называют *числом сочетаний из n по k* (combination — (*англ.*) сочетание):

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Треугольник Паскаля и бином Ньютона

Для чисел сочетаний выполняются тождества:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

Первое тождество очевидно из определения. Второе тождество даёт метод вычисления чисел сочетаний C_n^k одного за другим. Например, каждое число в последней строке на рис. 2 получается сложением его двух соседей из предпоследней строки (пропуски по краям считаются нулями):

1 = 0 + 1,   7 = 1 + 6,   21 = 6 + 15,   35 = 15 + 20,   … ,   1 = 1 + 0.

Другими словами, $C_7^k = C_6^{k-1} + C_6^k,\ k = 0, 1, \ldots, 7$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Рис. 2

Числовой треугольник на рис. 2 называется *треугольником Паскаля*.[1]

Числа сочетаний C_n^k также называются *биномиальными коэффициентами* потому, что они используются в известной формуле ***бинома Ньютона***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где считается, что $C_n^0 = 1$.

Домашнее задание

Если **2-й буквой** вашего **имени** является:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 3.1 и 3.5 (вариант 1);
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 3.2 и 3.6 (вариант 2);
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 3.3 и 3.7 (вариант 3);
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 3.4 и 3.8 (вариант 4).

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи. Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт. Если «своя» задача уже решена на семинаре, то вместо неё можно решать задачу с номером 5 – N, где N — номер варианта. Если и задача с номером 5 – N тоже была решена на семинаре, то вместо первой «своей» задачи можно решать задачу с номером 9 – N. Дополнительно можно решать задачу с номером 9, но она будет засчитана лишь в том случае, если правильно решены обе «свои» задачи.

В задачах 3.1 – 3.4 *требуется* ***<u>записать ответ через числа сочетаний</u>***.

3.1) Из n лотерейных билетов k являются выигрышными ($n > 2k$). Найти вероятность, что среди k купленных билетов: а) по крайней мере один выигрышный; б) нет ни одного выигрышного билета.

3.2) Из колоды, содержащей 36 карт (9 пик, 9 крестей, 9 червей, 9 бубен), наугад извлекают 4 карты. Какова вероятность, что среди них окажется:
а) хотя бы одна пиковая карта; б) хотя бы одна червовая или бубновая карта?

3.3) Из чисел 1, 2, …, 100 наугад выбирают 70 чисел. Какова верятность, что наибольшим из них окажется: а) число 98; б) число 99?

3.4) В партии продукции l дефектных изделий и $m - l$ годных изделий. Какова вероятность, что среди взятых наугад n изделий ($n < m$) ровно i окажутся дефектными, i = 0, 1, … , n?

---

[1] В честь Блеза Паскаля, опубликовавшего в середине XVII века «Трактат об арифметическом треугольнике». Правда, этот треугольник был известен индийским математикам ещё в X веке. Омар Хайям также исследовал его около 1100 года.

3.5) В волейбольном турнире участвуют $2n$ команд, которые по жребию разбиваются на две подгруппы по n команд. При этом две наиболее сильные команды могут попасть в одну подгруппу или в разные подгруппы. Что вероятнее?

3.6) Из чисел 1, 2, …, 100 наугад выбираются 80 чисел. Найти вероятность, что из выбранных чисел: а) наименьшим будет 4, а наибольшим — 90; б) наименьшим будет 5, а наибольшим — 96. Запишите ответ через числа сочетаний.

3.7) Два равных по силам игрока договорились, что тот, кто первым выиграет определённое число партий, получит весь приз. Однако игра была прервана, когда первому игроку для получения приза требовалось выиграть ещё 2 партии, а второму — а) 3 партии; б) 4 партии. Как справедливо (*т. е. прорционально шансам на выигрыш при продолжении игры*) разделить приз?

3.8) Используя ответ задачи 3.4 и тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$, найти сумму

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

Записать ответ в виде числа сочетаний. (*Указание*. Сложите вероятности из 3.4 по всем i от 0 до n.)

3.9)* Решить задачу 3.7 в общем случае, т. е. когда первому игроку для получения приза требовалось выиграть ещё m партий, а второму — n партий.