Тема 4. Аксиоматика и геометрические вероятности

Аксиоматика теории вероятностей

Как корректно определить вероятности на подмножествах (событиях) некоторого множества Ω, содержащего бесконечное число элементарных событий ω? Например, для пространства Ω = [0, 1], в котором элементарными событиями ω являются точки отрезка. Прежде всего, необходимо определиться со свойствами, которым должна удовлетворять вероятностная мера (кратко — *вероятность*). Естественно потребовать выполнения для вероятностной меры следующих трёх аксиом, предложенных А. Н. Колмогоровым в 1933 году:

1) $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \geq 0$ для любого события A;
2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3) $\mathbf{P}(\bigcup \mathrm{A}_i) = \sum \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$ для любых попарно непересекающихся (несовместных) событий $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$.

Третья аксиома, называемая свойством *счётной аддитивности* вероятности, наименее очевидна. Её смысл таков: если множество (*торт*) разделено на конечное или счётное число частей (*кусков*), то вероятность (*объём*) множества равна сумме вероятностей всех частей. Эта аксиома нужна для возможности перехода к пределу при вычислении вероятностей (сумма ряда есть предел).

В следующей задаче для описания эксперимента необходимо использовать пространство Ω, содержащее бесконечное число исходов ω.

Задача о ключах. У человека m ключей, из которых только один открывает дверь. Ключи пробуются наудачу и не подошедшие ключи не откладываются. Найти вероятность, что потребуется ровно i попыток, чтобы открыть дверь.

Решение. Обозначим интересующее нас событие через A_i. Выясним, как устроено пространство элементарных событий Ω. Эксперимент состоит из многократных испытаний ключей без откладывания. Результаты этих испытаний описываются бесконечной последовательностью $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, где i_k — это номер ключа (от 1 до m), использованного при k-й попытке. Таких последовательностей бесконечно много. Как определить вероятности для подмножеств из пространства $\Omega_\infty = \{\omega\}$, в частности, для событий A_i?

Отметим также, что недопустимо использовать параметр i при описании вероятностного пространства, так как он связан с конкретным событием, вероятность которого требуется вычислить, а не с самим экспериментом по испытанию ключей.

Рассмотрим для $n =$ 1, 2, ... вложенные пространства $\Omega_n = \{\omega_n\}$, где $\omega_n = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Каждое из них описывает n-кратный выбор наудачу с возвращением ключей из связки с m занумерованными ключами. Для $n \geq i$ нетрудно подсчитать вероятность интересующего нас события в пространстве Ω_n:

$$\mathbf{P}_n(\mathrm{A}_i) = (m-1)^{i-1} \cdot 1 \cdot m^{n-i} / m^n = (1/m)(1 - 1/m)^{i-1}. \tag{1}$$

Объясним эту формулу. Пусть дверь открывает ключ с номером 1. Чтобы дверь открылась в точности при i-ой попытке, необходимо, чтобы при попытках с номерами от 1 до $i - 1$ появлялись ключи с номерами 2, 3, …, m; при i-ой попытке использовался ключ номер 1; при остальных ($n - i$) попытках пробовались ключи с любыми номерами (предполагается, что в любом случае осуществляются все n испытаний ключей, невзирая на то, открылась дверь при i-ой попытке или не открылась).

Так как при увеличении параметра n пространства Ω_n «раздуваются», приближаясь к Ω_∞, то естественно определить $\mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$ как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(\mathrm{A}_i)$. Но $\mathbf{P}_n(\mathrm{A}_i)$ не зависит от n согласно формуле (1). Поэтому разумно считать, что правая часть формулы (1) задаёт искомую вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$ в пространстве Ω_∞.

Из решения задачи о ключах возникает идея определять вероятности произвольных событий из пространства Ω_∞ как пределы (*если они существуют*) вероятностей соответствующих событий в пространствах Ω_n (*если они там определены*). Однако более конструктивным является другой подход: не устраивать предельный переход для каждого конкретного события, а сразу определить вероятностную меру на подмножествах пространства Ω_∞. Почему такой подход предпочтительнее?

Например, рассмотрим событие

$$\mathrm{B} = \{\text{дверь откроется когда-нибудь}\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i.$$

Последнее равенство в этой формуле означает, что если дверь открылась, то это случилось либо при первой попытке, либо при второй, либо при третьей, … , т. е. произошло хотя бы одно из событий A_i, i = 1, 2, … .

Заметим, что событие B не принадлежит ни одному из Ω_n: зная только результаты первых n испытаний ключей, нельзя сказать, появится ли $i_k = 1$ при $k > n$ в бесконечной последовательности $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$. Тем не менее интуитивно очевидно, что в конце концов дверь непременно откроется, т. е. событие B обязательно произойдёт. Поэтому при корректном определении вероятностной меры на подмножествах пространства Ω_∞ вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{B})$ должна быть равна 1.

Убедимся в этом с помощью аксиомы счётной аддитивности вероятности. Так как события $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ несовместны (не могут произойти одновременно), то, применяя формулу (1) и формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1 - 1/m$, получаем:

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{\infty}(1 - 1/m)^{i-1} = (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} q^i = (1-q)\cdot\frac{1}{1-q} = 1.$$

Итак, возникает проблема, как определить вероятностную меру на подмножествах пространства Ω_∞, частности, — для множества B. К сожалению, оказалось, что вероятностную меру, удовлетворяющую трём приведённым выше аксиомам, невозможно определить на всех подмножествах пространства Ω_∞. Также нельзя её определить для всех подмножеств отрезка [0, 1] и для ряда других пространств, состоящих из бесконечного числа ω. Неформально говоря, причина заключается в том, что некоторые подмножества таких пространств очень сложно устроены (рис. 1).

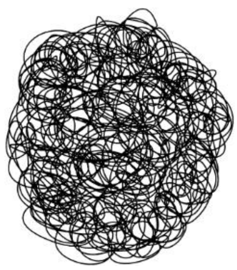

Рис. 1

Выход состоит в том, что вероятности определяются не для всех подмножеств пространства Ω, а только для достаточно широкого класса подмножеств, которые, собственно, и называются *событиями*. Какими «естественными» свойствами должен обладать класс событий?

Прежде всего, он должен быть *замкнут* относительно операций пересечения, объединения и дополнения своих элементов (событий). Действительно, если A и B — события, то представляется разумным, что событиями также должны быть: пересечение $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} = \{$произошли и A, и B$\}$, объединение $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B} = \{$случилось A или случилось B$\}$, дополнение $\overline{\mathrm{A}} = \{$A не произошло$\}$.

Ввиду аксиомы счётной аддитивности необходимо также потребовать замкнутости класса относительно операции счётного объединения событий. Тогда из очевидной ***формулы Буля***

$$\overline{\bigcap \mathrm{A}_i} = \bigcup \overline{\mathrm{A}}_i,$$

вытекает замкнутость класса также и относительно операции счётного пересечения событий.

Помимо замкнутости класс событий должен содержать пустое множество, само Ω и некоторые «простейшие» подмножества Ω, на которых вероятность определяется естественным образом. Например, в задаче про ключи такими подмножествами являются события, описываемые условиями на конечное число координат i_k элементарного события $\omega = (i_1, i_2, \ldots)$, т. е. подмножества, принадлежащие пространству Ω_n при некотором n. В частности, события A_i из задачи о ключах — «простейшие», а событие B — нет.

В свою очередь, для пространства $\Omega = [0,1]$ «простейшими» событиями служат интервалы (a,b), где $0 < a < b < 1$. Вероятность интервала (a,b) естественно определяется как его длина $b-a$. При этом вероятность, что взятая наудачу из отрезка $[0,1]$ точка окажется внутри интервала заданной длины *Δ*, не зависит от местонахождения интервала внутри отрезка $[0,1]$ (рис. 2). Это вполне согласуется с интуитивным представлением об совершенно случайном выборе точки.

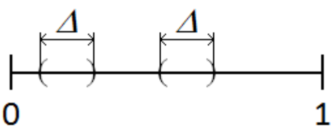

Рис. 2

Как устроены произвольные события из несчётного пространства Ω? Нестрого говоря, они являются теми множествами, которые можно сколь угодно хорошо приблизить счётными объединениями простейших событий. В частности, события на отрезке $[0,1]$ — это множества, для которых определено понятие длины как меры *Лебега.*[1] Процесс построения меры Лебега технически сложен. Поэтому мы не будем здесь его рассматривать.

Можно доказать, что следствием вероятностных аксиом являются

Свойства непрерывности вероятности

1) Пусть события вложены и сужаются: $\mathrm{A}_1 \supseteq \mathrm{A}_2 \supseteq \ldots$. Тогда $\mathbf{P}(\bigcap \mathrm{A}_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{A}_i)$.

2) Пусть события вложены и расширяются: $\mathrm{B}_1 \subseteq \mathrm{B}_2 \subseteq \ldots$. Тогда $\mathbf{P}(\bigcup \mathrm{B}_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{P}(\mathrm{B}_i)$.

Вычисление пределов, стоящих справа, позволяет находить вероятности событий, которые представляются в виде счётных пересечений или счётных объединений *вложенных* событий.

Геометрические вероятности

Вероятность можно определить не только для подмножеств отрезка $[0,1]$, но и для множеств, находящихся на плоскости, в трёхмерном пространстве и в n-мерном пространстве.

Если пространством Ω является единичный квадрат $[0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$, т. е. элементарным событием (исходом) служит точка $\omega = (x, y)$, выбранная наудачу из $[0,1]^2$, то вероятность $\mathbf{P}(\mathrm{A})$ определяется как *площадь* множества A (рис. 3).

[1] Анри Леон Лебе́г (1875-1941) — французский математик, наиболее известный как автор теории интегрирования, обобщающей обычное определение интеграла на более широкий класс функций.

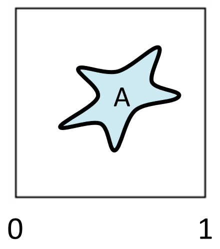

Рис. 3

Площади сложных фигур с криволинейной границей можно вычислять на основе свойства непрерывности, накрывая фигуры сеткой и уменьшая длину ребра ячейки сетки вдвое. При этом сумма площадей ячеек, оказавшихся целиком внутри фигуры, будет стремиться к площади фигуры.

Если пространством исходов Ω является единичный куб $[0,1]^3$, т. е. исходом служит $\omega = (x, y, z)$, выбранная наудачу из $[0,1]^3$, вероятность **P**(A) определяется как *объём* множества A (рис. 4).

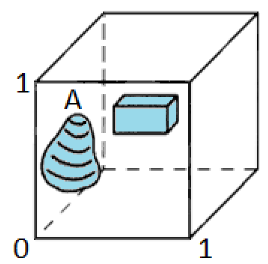

Рис. 4

Аналогично, при выборе точки $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$, вероятность **P**(A) определяется как *n-мерный объём* множества A в смысле меры Лебега.

Домашнее задание

Если **3-й буквой** вашего **имени** является:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 4.1 и 4.5 (вариант 1);
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 4.2 и 4.6 (вариант 2);
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 4.3 и 4.7 (вариант 3);
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 4.4 и 4.8 (вариант 4).

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи. Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт. Если «своя» задача уже решена на семинаре, то вместо неё можно решать задачу с номером 5 − N, где N — номер варианта. Если и задача с номером 5 − N тоже была решена на семинаре, то вместо первой «своей» задачи можно решать задачу с номером 9 − N. Дополнительно можно решать задачу с номером 9, но она будет засчитана лишь в том случае, если правильно решены обе «свои» задачи.

4.1) Две точки выбираются наудачу из [0, 1]. Какова вероятность, что из отрезков, на которые они разбивают [0, 1], можно составить треугольник? Изобразить искомое событие как фигуру из $[0,1]^2$.

4.2) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Найти вероятность, что наибольшая из координат x_i не превосходит числа a, где $0 < a < 1$.

4.3) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Найти вероятность, что наименьшая из координат x_i не превосходит числа b, где $0 < b < 1$. (*Указание*. Найдите **P**$(\overline{\text{A}})$.)

4.4) Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Определим две случайные величины: $X(\omega) = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Y(\omega) = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Найти **P**$(X \le x, Y \le y)$ в случае: а) $0 < x < y < 1$; б) $0 < y < x < 1$. (*Указание*. Найдите сначала **P**$(X > x, Y \le y)$.)

4.5) Наудачу берётся хорда в круге. Чему равна вероятность, что её длина больше длины стороны вписанного равностороннего треугольника? Определите проведение хорды наудачу двумя способами, которые приводят к разным ответам.

4.6) Два игрока по очереди бросают игральную кость. Выигрывает тот игрок, у кого раньше выпадет шестёрка. Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего кость первым? Сравнить её с 1/2.

4.7) Двое договорились встретиться в определённом месте между 6 и 7 часами. Каждый из пришедших ждёт другого: а) 20 минут; б) 15 минут после чего уходит. Какова вероятность, что встреча состоится? (Предполагается, что приход каждого в течение часа происходит наугад.)

4.8) Коэффициенты p и q квадратного уравнения: а) $px^2 + x + q = 0$; б) $x^2 + px + q = 0$ выбираются наудачу из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность, что оно имеет действительные корни?

4.9)* Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Обозначим через Z k-ю величину в порядке возрастания среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти **P**$(Z \le x)$, где $0 < x < 1$. (*Указание*. Найдите сначала вероятность, что число x не превосходят ровно i координат среди $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $0 \le i \le n$. Что представляет собой такое подмножество единичного куба $[0,1]^n$?)