Тема 6. Математическое ожидание

Математическое ожидание дискретных случайных величин

Математическое ожидание $\mathsf{M}X$ случайной величины X является одним из основных понятий теории вероятностей. Оно выражает среднее (наиболее типичное) значение случайной величины.

В классической вероятностной модели с равновозможными исходами ω математическое ожидание определяется как среднее арифметическое значений функции $X(\omega)$ по всем ω из Ω:

$$\mathsf{M}X = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).$$

Пример 1. В эксперименте с однократным бросанием игральной кости имеем

$$\mathsf{M}X = (1+2+3+4+5+6)/6 = 3{,}5.$$

Если известно распределение случайной величины X, то её математическое ожидание удобно вычислять по формуле

$$\mathsf{M}X = \sum_i x_i p_i, \tag{1}$$

где x_i — всевозможные значения случайной величины X, $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$.

***Доказательство*.** Ради краткости положим $\mathrm{A}_i = \{\omega\colon X(\omega) = x_i\}$. Тогда

$$\mathsf{M}X = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}\sum_i \sum_{\omega\in\mathrm{A}_i} x_i = \frac{1}{|\Omega|}\sum_i x_i|\mathrm{A}_i| = \sum_i x_i p_i.$$

Определение. В общей вероятностной модели для произвольной <u>дискретной</u> случайной величины X определим математическое ожидание $\mathsf{M}X$ формулой (1).

Пример 2. Вычислим математическое ожидание индикатора I_{A} события А, где $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = p$:

$$\mathsf{M}I_{\mathrm{A}} = 0\cdot(1-p) \ + \ 1\cdot p = p.$$

Пример 3. Пусть $p_i = \mathbf{P}(X = i) = \dfrac{6}{\pi^2 i^2}$, $i = 1, 2, \ldots$. Из математического анализа известно, что $\sum p_i = 1$. Тогда имеем

$$\mathsf{M}X = \sum_{i=1}^{\infty} i\,p_i = \frac{6}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = \infty,$$

поскольку гармонический ряд расходится.

Свойства математического ожидания

1) $\mathsf{M}c = c$, где c — произвольная константа;
2) $\mathsf{M}(cX) = c\mathsf{M}X$;
3) Если $X(\omega) \le Y(\omega)$ при всех ω из пространства Ω, то $\mathsf{M}X \le \mathsf{M}Y$;
4) $\mathsf{M}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathsf{M}X_1 + \mathsf{M}X_2 + \ldots + \mathsf{M}X_n$, если все математические ожидания конечны.

Полезно познакомиться с механическим аналогом математического ожидания — центром масс.

Вопрос по механике. Штангист по ошибке поставил на штангу диски неодинаковой массы: слева диск массы m_1, а справа — диск массы m_2 (рис. 1). Если поднимать штангу одной рукой, то в какой точке (очень лёгкого) грифа надо её держать, чтобы штанга находилась в равновесии?

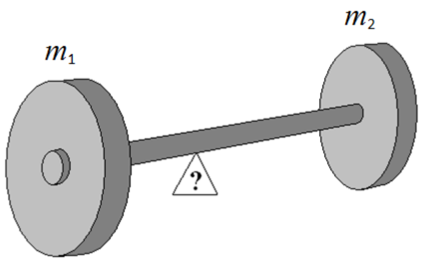

Рис. 1

Ответ. Пусть d — длина грифа. Тогда центр масс штанги (без учёта веса самого грифа) находится от левого диска приблизительно на расстоянии

$$x_{ц.м.} = (0 \cdot m_1 + d \cdot m_2) / (m_1 + m_2) = d m_2 / (m_1 + m_2).$$

В общем случае, когда на невесомой спице в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots$ закреплены грузики с массами $m_1, m_2, \ldots$ соответственно, координата центра масс всей системы грузиков вычисляется по формуле

$$x_{ц.м.} = \sum x_i m_i \Big/ \sum m_i. \qquad (2)$$

В теории вероятностей аналогами масс грузиков m_i служат вероятности p_i, причём $\sum p_i = 1$. Таким образом, математическое ожидание — это центр вероятностных масс.

Домашнее задание

Если **третьей** буквой вашего **имени** служит:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 6.1 и 6.5;
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 6.2 и 6.6;
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 6.3 и 6.7;
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 6.4 и 6.8.

6.1) По m ящикам раскладываются наудачу n занумерованных шаров. Случайная величина K — число шаров, оказавшихся в первом ящике. Вычислить $\mathrm{M}K$ (в ответе не должна присутствовать сумма).

6.2) Найти математическое ожидание (запишите ответ задачи без знака суммы):
а) случайной величины S_n с биномиальным распределением: $\mathbf{P}(S_n = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;
б) случайной величины N с пуассоновским распределением: $\mathbf{P}(N = i) = \lambda^i e^{-\lambda} / i!$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

6.3) Симметричную монету бросают 3 раза. Здесь ω = (i, j, k), где компоненты вектора ω принимают значения 0 или 1; $|\Omega| = 2^3 = 8$. Вычислить: а) $\mathrm{M}X$, где $X = i + 2jk$; б) $\mathrm{M}Y$, где $Y = 2i + jk$.

6.4) В урне лежат два шара с номерами 1 и 2. Три раза наудачу с возвращением выбирается один из шаров. Здесь ω = (i_1, i_2, i_3). Вычислить: а) $\mathrm{M}X$, где $X = \min\{i_1, i_2, i_3\}$; б) $\mathrm{M}Y$, где $Y = \max\{i_1, i_2, i_3\}$.

6.5) Вычислить $\mathrm{M}L,$ где L имеет геометрическое распределение: $\mathbf{P}(L=i)=q^{i-1}p,\ i=1,2,\ \ldots,\ q=1-p.$
(*Указание*. Для вычисления суммы ряда S рассмотрите разность $S-qS$.)

6.6) Пусть Z — число белых шаров при выборе <u>без возвращения</u> n шаров из урны с l белыми и $m-l$ чёрными шарами. Найти $\mathrm{M}Z$ (в ответе не должна присутствовать сумма).
(*Указание.* Заметим, что $Z=I_1+\ldots+I_n,$ где I_k — индикатор того, что k-й шар оказался белым.)

6.7) Пусть X — число пустых ящиков при размещении n занумерованных шаров по m ящикам. Найти $\mathrm{M}X$ без знака суммы и предел $\mathrm{M}X/m$ при $m\to\infty, n=\lambda m, \lambda>0.$
(*Указание.* Заметим, что $X=I_1+\ldots+I_m,$ где I_j — индикатор того, что j-й ящик оказался пустым.)

6.8) Написаны n писем, предназначенных разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма в случайном порядке вложены в конверты. Найти $\mathrm{M}Y,$ где Y — число писем, посланных тем адресатам, которым они предназначены. (*Указание.* Заметим, что $Y=I_1+\ldots+I_n,$ где I_k — индикатор того, что k-ое письмо попало в соответствующий конверт.)

6.9)* Урна содержит шары с номерами от 1 до m. Пусть M — наибольший номер, полученный при извлечении наудачу с возвращением n шаров. Найти предел $\mathrm{M}M/m$ при $m\to\infty$.
(*Указание.* Распределение случайной величины M было найдено в примере 2 из темы 5.)