Тема 8. Функция распределения и плотность

Функция распределения

Вероятностные модели применяются также и для описания экспериментов, результатами которых являются действительные числа из некоторого диапазона (рис. 1).

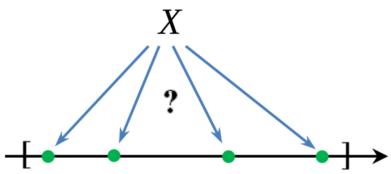

Рис. 1

Рулетка. Представим, что вокруг оси вращается с малым трением стрелка, конец которой описывает окружность длины 1 (рис. 2). Стрелку раскрутили и дождались момента, когда она остановилась. Пусть Y — длина дуги с началом в 0, на концевую точку которой указала остановившаяся стрелка.

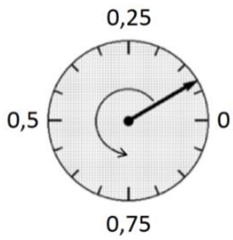

Рис. 2

Теоретически эту длину можно измерить с любой точностью. Иначе говоря, случайная величина Y может принимать произвольные действительные значения из отрезка $[0,1]$.

Важнейшей характеристикой произвольной случайной величины X, принимающей несчётное множество значений, служит её функция распределения.

Определение. Функцией распределения произвольной случайной величины $X(\omega)$ называется

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{\omega\colon X(\omega) \le x\}, \tag{1}$$

где аргумент x «пробегает» все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Здесь предполагается, что для произвольного x множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ является событием, т. е. входит в класс подмножеств пространства Ω, для которых определена вероятность. Это свойство называется *измеримостью* случайной величины $X(\omega)$.

Например, на рис. 3 изображён график случайной величины — некоторой функции $X(\omega)$, заданной своим графиком на пространстве $\Omega = [0,1]$ (ω выбирается наудачу). Для фиксированного значения переменной x множество $\{\omega\colon X(\omega) \le x\}$ заштриховано, $F_X(x)$ — длина этого множества.

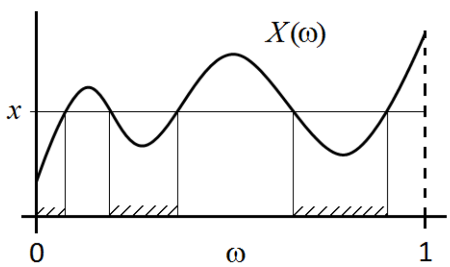

Рис. 3

Свойства функции распределения

1) $F_X(x)$ — неубывающая функция (с увеличением x множество $\{\omega\colon X(\omega)\le x\}$ «раздувается»);

2) $F_X(x)\to 0$ при $x\to-\infty$ (множество $\{\omega\colon X(\omega)\le x\}$ стягивается к пустому множеству);

3) $F_X(x)\to 1$ при $x\to+\infty$ (множество $\{\omega\colon X(\omega)\le x\}$ растягивается до всего Ω).

Свойства 2 и 3 выполняются в силу свойства непрерывности вероятностной меры (см. тему 4).

С помощью функции распределения $F_X(x)$ можно вычислить вероятность попадания случайной величины X в произвольный промежуток $(a,b]$ на числовой прямой (рис. 4):

$$\mathbf{P}(a<X\le b)=\mathbf{P}(X\le b)-\mathbf{P}(X\le a)=F_X(b)-F_X(a). \tag{2}$$

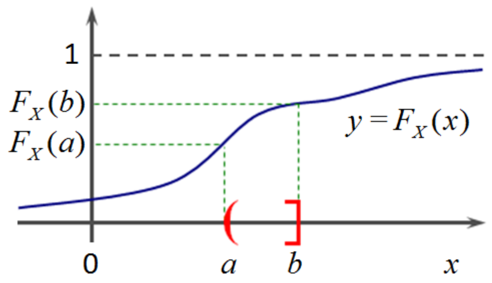

Рис. 4

Формула (2) даёт определённое количественное описание случайности. Если исследователь пришёл к выводу, что результат эксперимента (действительное число X) с вероятностью 0,999 попадает, скажем, в интервал (30, 70), то эту информацию обычно удаётся использовать на практике.

Рассмотрим два примера случайных величин с несчётным множеством значений.

Выбор наудачу из отрезка $[0,1]$. Положим $Y(\omega)=\omega$ — координата точки, взятой наудачу из $[0,1]$. Тогда функция распределения случайной величины Y имеет вид

$$F_Y(x)=\mathbf{P}(Y\le x)=\mathbf{P}(\omega\le x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ x, & \text{если } 0<x<1;\\ 1, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$$

Случайную величину Y также называют *равномерно распределённой на отрезке* $[0,1]$.

Попадание значения случайной величины Y в промежуток $(a,b]$, где $0<a<b<1$, случается с вероятностью $(b-a)$ независимо от положения этого промежутка внутри отрезка $[0,1]$:

$$\mathbf{P}(a<Y\le b)=F_Y(b)-F_Y(a)=b-a.$$

***Показательный* (*экспоненциальный*) *закон*.** Случайная величина T называется *показательной* (*экспоненциальной*) *с параметром* $\lambda>0$, если функция распределения имеет вид

$$F_T(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

На рис. 5 график изображены три графика функции $y=F_T(x)$ для $\lambda=1/2,\ 1,\ 2$ соответственно.

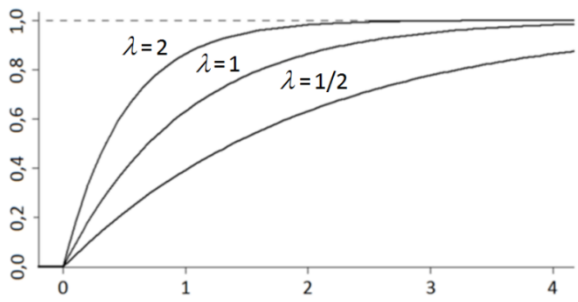

Рис. 5

Показательная модель часто используется для описания времени работы T некоторого прибора до поломки (*отказа*).

Случайную величину с показательным распределением можно получить из равномерно распределённой на отрезке $[0,1]$ случайной величины Y с помощью нелинейного преобразования

$$T = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y).$$

Заметим, что функции распределения равномерной и показательной случайных величин не имеют разрывов. Такие случайные величины называются ***непрерывными***. Как правило, их распределения удобнее задавать не с помощью функций распределения, а через плотности.

Плотность распределения

Определение. Если для произвольных действительных чисел $a < b$ для некоторой функции $f_X(x) \geq 0$ выполняется представление

$$\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx,$$

то говорят, что случайная величина X имеет *плотность распределения* $f_X(x)$ (рис. 6). Слово «распределения» часто опускают ради краткости и говорят, что X имеет плотность $f_X(x)$.

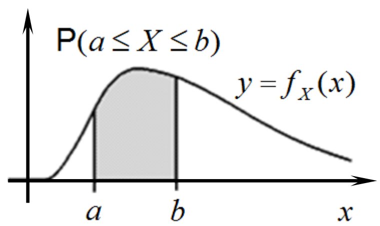

Рис. 6

Если плотность существует, то она является производной функции распределения:

$$f_X(x) = F'_X(x). \tag{3}$$

Обратно, зная плотность $f_X(x)$, можно найти функцию распределения $F_X(x)$, вычислив интеграл:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy. \tag{4}$$

Отметим, что у дискретных случайных величин функция распределения разрывна (задача 8.3), и плотности не существует.

Домашнее задание

Если **третьей** буквой вашей **фамилии** служит:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 8.1 и 8.5;
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 8.2 и 8.6;
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 8.3 и 8.7;
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 8.4 и 8.8.

8.1) Как выглядит при всех действительных x график функции распределения:
а) бернуллиевской случайной величины I с параметром p: $\mathbf{P}(I=0)=1-p$, $\mathbf{P}(I=1)=p$;
б) количества выпавших «гербов» при бросании двух монет?

8.2) Случайная величина Y равномерно распределенна на отрезке [0, 1]. Какими формулами задаются и как выглядят при всех действительных x графики функции распределения и плотности случайной величины: а) $\sqrt{Y}$; б) Y^2?

8.3) Построить график функции распределения дискретной случайной величины, принимающей значения $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

8.4) Случайная величина Y равномерно распределенна на отрезке [0, 1]. Построить при всех действительных x график плотности случайной величины: а) $X = 2Y - 1$; б) $Z = 3 - Y$.

8.5) а) Случайная величина X имеет плотность $f_X(x) = e^{-|x|}/2$. Построить график плотности случайной величины $Z = |X|$. б) Случайная величина Y равномерно распределенна на отрезке [0, 1]. Построить график плотности случайной величины $Z = |2Y - 1|$.

8.6) T — экспоненциальная случайная величина с параметром $\lambda > 0$. Построить график плотности случайной величины: а) $X = 1/T$; б) $Y = T^2$. Исследовать поведение графиков при $x \to 0$ и $x \to +\infty$.

8.7) Точка $\omega = (x, y)$ выбирается наудачу из единичного квадрата $[0,1]^2$. Построить график плотности случайной величины: а) $D(\omega) = x - y$; б) $S(\omega) = x + y$.

8.8) Из точки плоскости с координатами (0, 1) в случайном направлении вылетает частица. Найти плотность случайной величины X — координаты точки пересечения её траектории с осью абсцисс.

8.9)* Точка $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взята наудачу из n-мерного единичного куба $[0,1]^n$. Обозначим через Z k-ю величину в порядке возрастания среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти плотность случайной величины Z в виде явной формулы, не содержащей знака суммы. (*Указание.* См. задачу 4.9.)