Тема 10. Двумерные распределения

Дискретный случай

Определение. *Совместным распределением* двух дискретных случайных величин X и Y называется набор всевозможных пар их значений (x_i, y_j), $i, j = 1, 2, \dots,$ и соответствующих вероятностей $p_{ij} = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$, где $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$

Можно представлять, что над каждой точкой плоскости с координатами (x_i, y_j) возвышается столбик высоты p_{ij} (рис. 1).

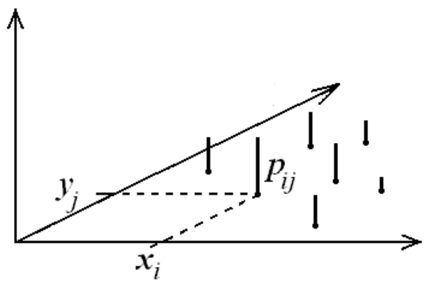

Рис. 1

Совместное распределение дискретных случайных величин с конечным числом значений удобно задавать таблицей следующего вида:

$X \setminus Y$	y_1	$\dots$	y_m
x_1	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	p_{ij}	$\dots$
x_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Пример 1. Симметричная монета бросается дважды. Здесь $\omega = (i_1, i_2)$, $i_k = 0$ или 1. Тогда $|\Omega|$ = 4. Положим $X(\omega) = i_1 + i_2$, $Y(\omega) = i_1 i_2$. Несложно убедиться, что таблица, задающая совместное распределение случайных величин X и Y, имеет вид

$X \setminus Y$	0	1
0	1/4	0
1	1/2	0
2	0	1/4

Определение. *Частные* (*маргинальные*) *распределения* случайных величин X и Y вычисляются на основе совместного распределения, соответственно, по формулам

$$\mathbf{P}(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \qquad \mathbf{P}(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}. \tag{1}$$

Формулы (1) следуют из аксиомы счётной аддитивности вероятностной меры.

Если совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей, то для вычисления частного распределения случайной величины X (Y), следует просуммировать вероятности p_{ij} по строкам (по столбцам) этой таблицы. (В условиях примера 1 имеем частные распределения: $\mathbf{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbf{P}(X = 1) = 1/2$, $\mathbf{P}(X = 2) = 1/4$ и $\mathbf{P}(Y = 0) = 3/4$, $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/4$.)

Непрерывный случай

Совместное распределение произвольных случайных величин X и Y задаётся с помощью *совместной функции распределения*

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbf{P}(X\le x, Y\le y), \tag{2}$$

где аргументы x и y принимают произвольные действительные значения.

На основе функции $F_{X,Y}(x,y)$ частные функции распределения случайных величин X и Y в силу свойства непрерывности вероятностной меры вычисляются, соответственно, по формулам

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F_{X,Y}(x,y), \qquad F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F_{X,Y}(x,y). \tag{3}$$

Пример 2. Пусть X и Y — координаты точки, взятой наудачу в квадрате $[0,1]^2$. Тогда при $0<x<1$ и $0<y<1$ совместная функция распределения, очевидно, задаётся формулой $F_{X,Y}(x,y)=xy$.

Напомним, что для произвольной случайной величины X и любых чисел $a<b$ верна формула $\mathbf{P}(X\in(a,b])=F_X(b)-F_X(a)$. Эту формулу нетрудно обобщить на двумерный случай:

$$\mathbf{P}((X,Y)\in(a,b]\times(c,d])=F_{X,Y}(b,d)-F_{X,Y}(b,c)-F_{X,Y}(a,d)+F_{X,Y}(a,c).$$

Умея вычислять вероятности попадания произвольного случайного вектора (X,Y) в любые прямоугольники на плоскости со сторонами, параллельными координатным осям, можно найти вероятности попадания более сложные множества, например, в треугольник $\{x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$? Этот треугольник можно представить как счётное объединение непересекающихся квадратов (рис. 2) и воспользоваться аксиомой счётной аддитивности вероятностной меры из темы 4.

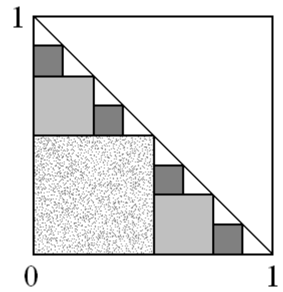

Рис. 2

В непрерывном случае также имеется другой способ вычисления вероятностей попадания случайного вектора (X,Y) в произвольные множества на плоскости. Этот способ базируется на понятии совместной плотности распределения.

Определение. Если для функции $f_{X,Y}(x,y)\ge 0$ и произвольного множества A, имеющего площадь, выполняется представление

$$\mathbf{P}((X,Y)\in \mathrm{A})=\iint\limits_{\mathrm{A}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, \tag{4}$$

то говорят, что случайные величины X и Y имеют *совместную плотность распределения* $f_{X,Y}(x,y)$. Иначе говорят, что случайный вектор (X,Y) имеет *плотность распределения* $f_{X,Y}(x,y)$. Слово «распределения» часто опускают ради краткости.

Что означает интеграл в правой части формулы (4)? Его геометрический смысл — объём цилиндра над множеством A, ограниченного сверху «шапочкой», высекаемой этим цилиндром из поверхности, заданной уравнением $z = f_{X,Y}(x, y)$ (рис. 3).

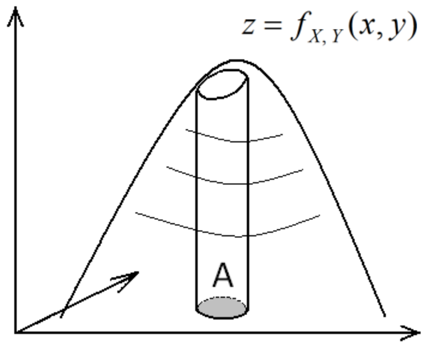

Рис. 3

Формально этот интеграл определяется так:

$$\iint\limits_{\mathrm{A}} f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{(x_i, y_j) \in \mathrm{A}} f_{X,Y}(x_i, y_j)\, \Delta_n, \tag{5}$$

где (x_i, y_j) — середины квадратных ячеек со сторонами длины $1/n$, попавшие внутрь множества A (фигуры, ограниченной замкнутым контуром на рис. 4), $\Delta_n = 1/n^2$ — площадь отдельной ячейки.

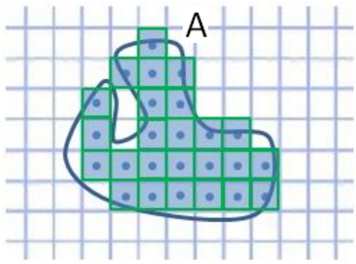

Рис. 4

На рис. 5 изображены две плотности: простая одновершинная и сложная многовершинная.

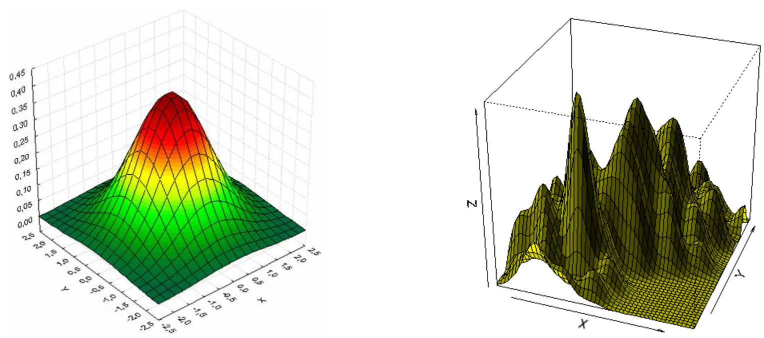

Рис. 5

Если плотность случайного вектора (X, Y) существует, то её можно вычислить по формуле

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x\, \partial y}. \tag{6}$$

Пример 3. Случайный вектор (X, Y) из примера 2 с функцией распределения $F_{X,Y}(x, y) = xy$ на квадрате $[0, 1]^2$ согласно формуле (6) имеет плотность $f_{X,Y}(x, y) = I_{[0,1]^2}$ — индикатор квадрата $[0, 1]^2$.

Частные (*маргинальные*) *плотности* компонент случайного вектора (X, Y) вычисляются по формулам

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx, \tag{7}$$

которые являются непрерывными аналогами формул (1).

Домашнее задание

Если **пятой** буквой вашей **фамилии** служит:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 10.1 и 10.5;
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 10.2 и 10.6;
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 10.3 и 10.7;
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 10.4 и 10.8.

10.1) Монету бросают: а) 2 раза; б) 3 раза, отмечая результат каждого бросания знаком + или – в зависимости от того, что выпало — герб или решка соответственно. Пусть X — число выпавших гербов, Y — число перемен знака в образовавшейся последовательности плюсов и минусов. Нарисуйте таблицу совместного распределения случайных величин X и Y.

10.2) В урне лежат 3 шара с номерами 1, 2, 3. Наудачу: а) с возвращением; б) без возвращения извлекают 2 шара. Пусть N_i — номер i-го шара. Найти совместное и частные распределения N_1 и N_2.

10.3) Бросаются две игральных кости (кубика). Здесь исход $\omega = (i,\ j)$, где $1 \le i \le 6$, $1 \le j \le 6$; $|\Omega| = 36$. Найти совместное распределение случайных величин $X = \min\{i,\ j\}$ и $Y = \max\{i,\ j\}$.

10.4) Функция распределения случайного вектора (X, Y) на квадрате $[0, 1]^2$ задаётся формулой $F_{X,Y}(x, y) = \min\{x, y\}$. Найти: а) $\mathbf{P}((X, Y) \in [0,\ a]^2)$ при $0 \le a \le 1$ и $F_X(x)$; б) $\mathbf{P}((X, Y) \in [0,\ 1]^2)$ и $F_Y(y)$.

10.5) Пусть $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — случайная перестановка, $|\Omega| = n!$. Положим $X(\omega) = i_1$, $Y(\omega) = i_2$. Найти совместное распределение случайных величин X и Y.

10.6) Пусть $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = (1-\alpha)(1-\beta)\alpha^i\beta^j$; $i,\ j = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Найти без знака суммы: а) $\mathbf{P}(X = i)$ и $F_{X,Y}(k, l)$; б) $\mathbf{P}(Z \le k)$, где $Z = \max\{X, Y\}$.

10.7) Точка $\omega = (x,\ y)$ взята наудачу в квадрате $[0, 1]^2$. Положим $X = \min\{x,\ y\}$, $Y = \max\{x,\ y\}$.

Найти: а) плотность случайного вектора (X, Y); б) $\mathbf{P}(X + Y \le 1)$.
(*Указание.* В пункте а) см. задачу 4.4 и используйте формулу (6). В пункте б) примените формулу (4).)

10.8) По m ящикам наудачу раскладываются n занумерованных шаров. Пусть X обозначает число шаров в первом ящике, Y — число шаров во втором ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y.

10.9)* В условиях задачи 10.4 найти $\mathbf{P}(X < Y)$, $\mathbf{P}(X > Y)$, $\mathbf{P}(X = Y)$.