Тема 1. Классическая вероятностная модель

Определим ряд понятий классической вероятностной модели с равновозможными исходами. *Элементарное событие* ω описывает исход эксперимента с непредсказуемым результатом. Множество всевозможных исходов Ω = {ω} называется *пространство элементарных событий*. Любое подмножество A множества Ω называется (просто) *событием* (рис. 1).

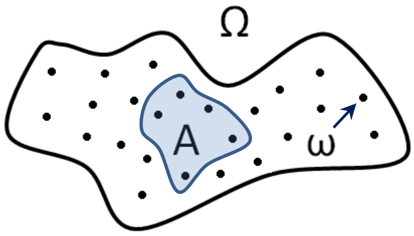

Рис. 1

Вероятность события A, обозначаемая через **P**(A), определяется как отношение числа исходов, входящих во множество A (*благоприятных исходов*), к общему числу исходов в пространстве Ω:

$$\mathbf{P}(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|\,/\,|\Omega|.$$

В частности, каждое элементарное событие ω имеет вероятность

$$\mathbf{P}(\omega) = 1\,/\,|\Omega|.$$

Таким образом, вычисление **P**(A) сводится к подсчету |A|, который осуществляется комбинаторными методами.

Дополнением к событию A называется множество $\overline{\mathrm{A}}$, состоящее из исходов, не вошедших в A. Согласно определению вероятности верно равенство

$$\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{|\Omega| - |\mathrm{A}|}{|\Omega|} = 1 - \mathbf{P}(\mathrm{A}).$$

Пример 1. В шляпе лежат 9 бумажек с надписями 1, 2, … , 9. Наудачу вынимают одну из бумажек. Какова вероятность, что число на вынутой бумажке будет нацело делиться на 3 или на 4?

Здесь ω — число от 1 до 9, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {3, 4, 6, 8, 9}, **P**(A) = |A| / |Ω| = 5/9.

Пример 2. Одновременно бросают 2 игральные кости (кубика). С какой вероятностью 6 очков выпадет хотя бы на одной из костей?

Здесь ω = (i, j), где i и j — числа от 1 до 6. Число всевозможных исходов |Ω| = 6 · 6 = 36 (рис 2).

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

Рис. 2

Из рисунка видим, что имеется ровно 11 исходов, содержащихся в событии A, поэтому **P**(A) = 11/36.

Домашнее задание

Если **третьей** буквой вашей **фамилии** является:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, то «своими» являются задачи 1.1 и 1.5 (вариант 1);
Ж, З, И, Й, К, Л, М, то «своими» являются задачи 1.2 и 1.6 (вариант 2);
Н, О, П, Р, то «своими» являются задачи 1.3 и 1.7 (вариант 3);
С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я, то «своими» являются задачи 1.4 и 1.8 (вариант 4).

Решать надо ТОЛЬКО «свои» задачи! Если задача содержит пункты а) и б), то только «свой» пункт.
Если «своя» задача уже решена на семинаре, то вместо неё можно решать задачу с номером 5 – N, где N — номер варианта. Если и задача с номером 5 – N тоже была решена на семинаре, то вместо первой «своей» задачи можно решать задачу с номером 9 – N. Дополнительно можно решать задачу с номером 9, но она будет засчитана лишь в том случае, если правильно решены обе «свои» задачи.

1.1) В слове: а) МАША; б) МАМА смешали буквы и затем выложили их в случайном порядке (все перестановки букв равновероятны). Какова вероятность, что получится то же самое слово?

1.2) Написано 3 письма и к ним подписано 3 конверта. Затем письма в случайном порядке были вложены в конверты и отправлены по почте. Какова вероятность того, что по назначению:
а) не попадёт ни одно письмо;
б) попадёт ровно одно письмо?

1.3) Монетка подбрасывается 5 раз. С какой вероятностью «герб» выпадет:
а) ровно 1 раз;
б) не более 1 раза?

1.4) В связке 6 ключей, из которых только один подходит к замку. Ключи испытываются в случайном порядке. Не подошедшие ключи откладываются. Найти вероятность, что для открытия замка потребуется:
а) не менее пяти попыток;
б) не более трёх попыток?

1.5) Игральную кость бросают 4 раза. Найти вероятность (и сравнить её с 1/2), что среди выпавших цифр окажется:
а) ровно одна шестёрка;
б) хотя бы одна шестёрка. (*Указание.* В пункте б) найдите сначала **P**($\overline{A}$).)

1.6) В условиях задачи 1.5 найти вероятность, что:
а) цифры будут идти в убывающем порядке;
б) все четыре выпавшие цифры разные.

1.7) В очередь в случайном порядке становятся 5 человек: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**. Найти вероятность, что:
а) **A** будет стоять рядом с **B** (до или после него);
б) **A** будет стоять раньше **B** и раньше **C**.

1.8) В шляпе лежат 100 бумажек с надписями 1, 2, …, 100. Наудачу вынимают одну из бумажек, смотрят на число и возвращают обратно. После этого бумажки перемешивают и опыт повторяют. Какова вероятность, что сумма чисел на двух вынутых бумажках окажется:
а) больше 160; б) меньше или равно 50?

1.9)* Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ наудачу с возвращением выбираются числа K и L. Найти предел вероятности $\mathbf{P}(K^2 + L^2 < n^2)$ при $n \to \infty$.