

# 알고리즘 게임

최백준 [choi@startlink.io](mailto:choi@startlink.io)

---

# 조합 게임

---

# 조합 게임

Combinatorial Game

3

1. 두 사람이 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
2. 완벽한 정보를 가지고 있다
3. 더 이상 움직일 수 없으면 이기는 경우 또는 지는 경우이다
4. 게임을 어떻게 플레이해도 게임이 끝난다.

# 조합 게임

Combinatorial Game

- 게임은 보통 위치로 이루어져 있으며
- 턴을 번갈아가면서 게임을 진행한다

# 조합 게임

Combinatorial Game

5

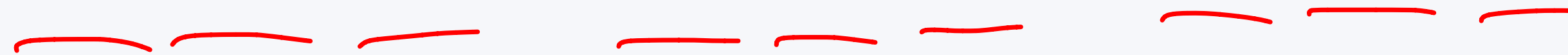
- Impartial Game (공정한 게임)
- 위치에 상관없이 두 사람이 선택할 수 있는 방법이 같다
- Partizan Game (편파적인 게임)
- 위치에 따라 선택할 수 있는 방법이 다르다

# 조합 게임

Combinatorial Game

6

- 이번 강의에서 다루는 내용은 Impartial Game (공정한 게임)



# 돌 게임

Combinatorial Game

- 두 플레이어 A와 B가 있다
- 돌 21개가 탁자 위에 있다
- 한 번에 돌을 1, 2, 3개 가져갈 수 있다 (적어도 1개의 돌은 가져가야 함)
- A가 먼저 게임을 시작하고, 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
  - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다

1개 A  
2개 A  
3개 A

4개 B  
5개 A  
6개 A  
7개 A  
8개 B

# 조합 게임

## Combinatorial Game

- Normal Play Rule
  - 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
    - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다
- Misère Play Rule
  - 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 진다
    - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 이긴다



# 돌 게임

## Combinatorial Game

- 돌이 1, 2, 3개 남았으면 다음 플레이어가 돌을 다 가져갈 수 있기 때문에 게임을 이긴다
- 돌이 4개 남았으면, 돌을 어떻게 가져가도 항상 1, 2, 3개가 남기 때문에, 게임을 진다
- 돌이 5, 6, 7개 남았으면, 1, 2, 3개를 가져가서 돌을 4개 남게 만들 수 있기 때문에 게임을 이긴다
- 돌이 8개 남았으면, 돌을 어떻게 가져가도 항상 5, 6, 7개가 남기 때문에, 게임을 진다
- 돌이 4의 배수개수 만큼 남았으면, 게임을 지고 그 외의 경우에는 게임을 이긴다

# 조합 게임

Combinatorial Game

10

- P-위치
- Previous Player가 이기는 위치
- 방금 턴을 가진 사람이 이기는 위치
- N-위치
- Next Player가 이기는 위치
- 턴을 가질 사람이 이기는 위치

지는 위치! L

이기는 위치! W

# 돌 게임

Combinatorial Game

- P-위치: 0, 4, 8, 12, 16, ...
- N-위치: 1, 2, 3, 5, 6, 7, ...

# 조합 게임

Combinatorial Game

12

- 모든 끝나는 위치는 P-위치이다
- 모든 N-위치에서 적어도 하나는 P-위치로 움직일 수 있다
- 모든 P-위치에서 모든 움직임은 N-위치로 이동한다

# 돌 게임

13

## Combinatorial Game

- P-위치에 있으면 진다 (L)
- N-위치에 있으면 이긴다 (W)

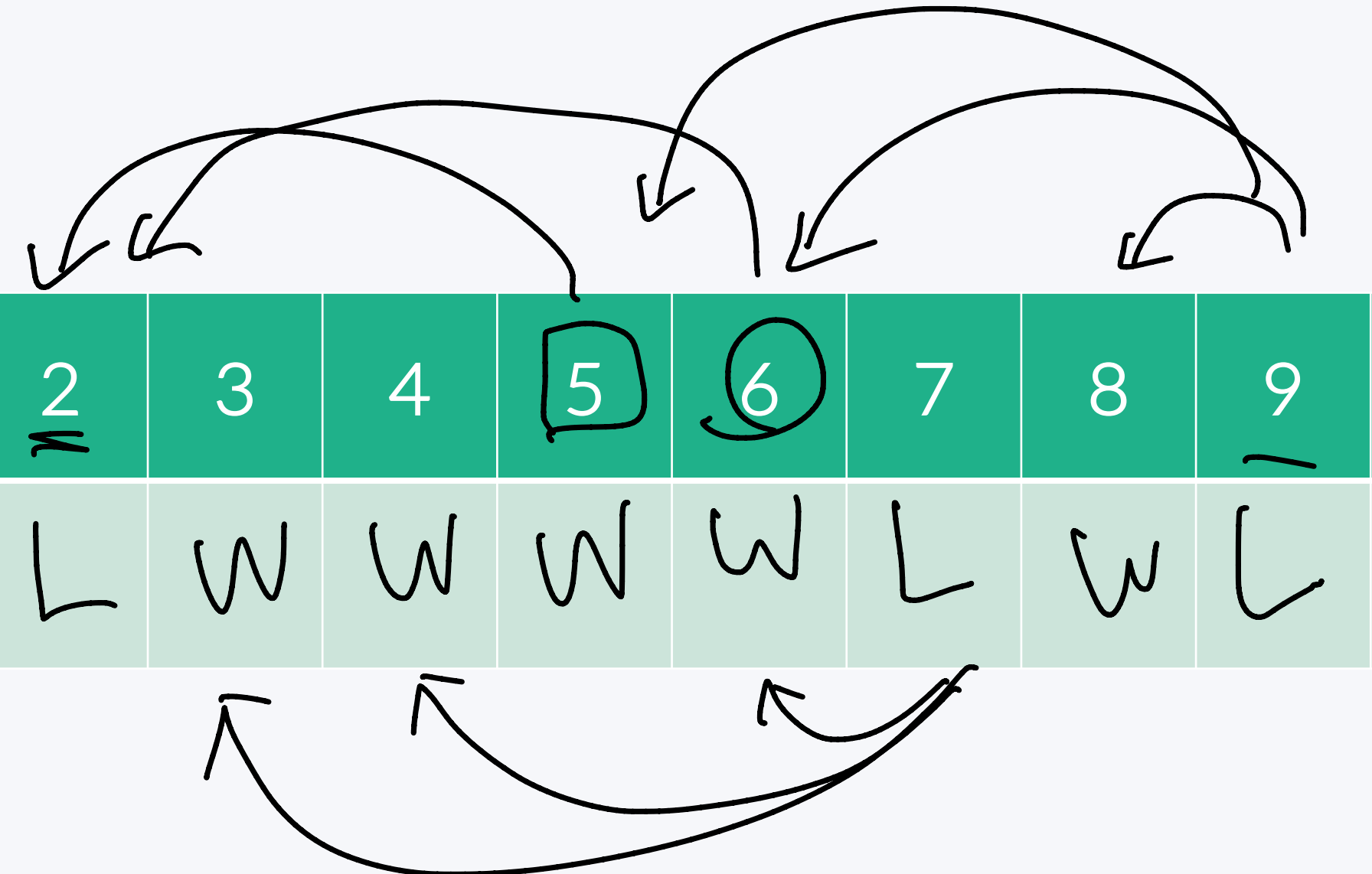
| i    | 0        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | <u>L</u> | W | W | W | L | W | W | W | L | W | W  | W  | L  | W  | W  | W  | L  | W  |

# 돌 게임

14

## Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다



The diagram shows a sequence of 18 green boxes representing the game state. The first row is labeled 'i' and contains indices from 0 to 17. The second row is labeled 'D[i]' and contains win/loss results. Handwritten annotations include circles around indices 1, 5, and 6, and arrows showing moves from index 5 to indices 1, 2, 3, and 6, and from index 6 to index 2.

| i    | 0 | ① | ② | 3 | 4 | ⑤ | ⑥ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | W | W | L | W | L | W  | W  | W  |    |    |    |    |    |

# 돌 게임

## Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | W | W | L | W | L | W  | W  | W  | W  | L  | W  | L  | W  |

# 돌 게임

16

## Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | W | L | W | L | W | W |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |



# 돌 게임

17

## Combinatorial Game

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | W | L | W | L | W | W | W | W | W | L | W  | L  | W  | W  | W  | W  | W  | L  |

# 돌 게임

18

## Combinatorial Game

- P-위치에 있으면 진다 (L)
- N-위치에 있으면 이긴다 (W)

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | W | W | L | W | W | W | L | W | W  | W  | L  | W  | W  | W  | L  | W  |

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

[illegible]

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- 소스: <http://boj.kr/57a10cc914e546f2ba459a5ce1027810>

[illegible]

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

[illegible]

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다
- 소스: <http://boj.kr/13f7acad329c43459e65d3fd1f513e86>

[illegible]

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

[illegible]

# 돌 게임 3

<https://www.acmicpc.net/problem/9657>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- 소스: <http://boj.kr/9855d70bf5407e884286b226f09b0c>

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | W | W | L | W | L | W  | W  | W  | W  | L  | W  | L  | W  |



- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다

[illegible]

# 돌 게임 4

<https://www.acmicpc.net/problem/9658>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 진다
- 소스: <http://boj.kr/3ad0a9613e4847e18692e6b99f1a7e37>

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | W | L | W | L | W | W | W | W | W | L | W  | L  | W  | W  | W  | W  | W  | L  |

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

[illegible]

- 돌을 1, 3개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- 소스: <http://boj.kr/fea6cf9ed7bf4b4d946bbc073ce612eb>

[illegible]

# 돌 게임 6

<https://www.acmicpc.net/problem/9660>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | W | W | L | W | L | W  | W  | W  | W  | L  | W  | L  | W  |

# 돌 게임 6

<https://www.acmicpc.net/problem/9660>

- 돌을 1, 3, 4개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- 소스: <http://boj.kr/476d217f83474983b57cbc7273aa8f3c>

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | W | W | L | W | L | W  | W  | W  | W  | L  | W  | L  | W  |

- 돌을 1, 4, 16, 64, ... ( $4^k$ )개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다

$6n+1$   
 $6n+5$

$$\begin{aligned} & 6n \\ & 6n+2 \\ & 6n+3 \\ & 6n+4 \end{aligned}$$
[illegible]

# 돌 게임 7

<https://www.acmicpc.net/problem/9661>

- 돌을 1, 4, 16, 64,  $\dots$  ( $4^k$ )개 가져갈 수 있다 ( $N \leq 1,000,000,000,000$ )
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 이긴다
- 소스: <http://boj.kr/b588ec3f96ef4290b020e16e71113058>

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| D[i] | L | W | L | W | W | L | W | L | W | W | L  | W  | L  | W  | W  | L  | W  | L  |



# 돌 게임 7

<https://www.acmicpc.net/problem/9661>

- 지는 위치는 지는 위치에서 이동할 수 없어야 한다.
- $x - 4^k = y$ 인  $(x, y)$ 가 존재한다고 해보자.
- $x - 4^k = y \pmod 5$
- $x = 0 \text{ or } 2 \pmod 5, y = 0 \text{ or } 2 \pmod 5, 4^k = 1 \text{ or } 4 \pmod 5$
- 이기 때문에 식이 true가 될 수가 없다

# 돌 게임 8

<https://www.acmicpc.net/problem/9662>

- 돌을  $A[1], A[2], \dots, A[K]$ 개 가져갈 수 있다
- 돌을 가져가는 방법이 없는 사람이 진다.
- $N \leq 1,000,000,000$
- $K \leq 22$

# 돌 게임 8

<https://www.acmicpc.net/problem/9662>

- 가능한 방법이 총  $K$ 개이기 때문에,  $2^K$ 에서 주기를 갖게 된다

# 돌 게임 8

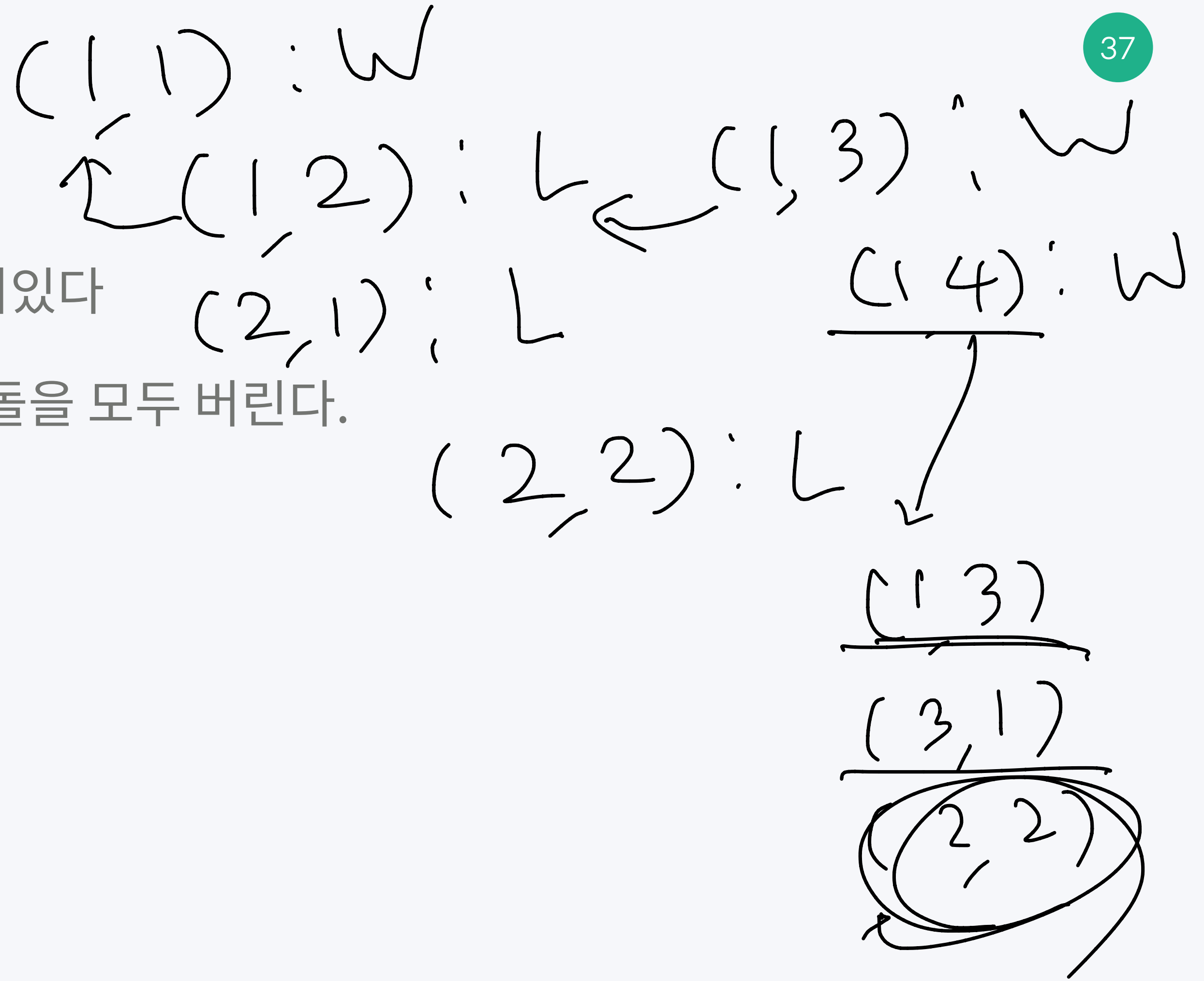
<https://www.acmicpc.net/problem/9662>

- 소스: <http://boj.kr/532f34aba12d439aad8325a470da5636>

# 박스 나누기 게임

<https://www.acmicpc.net/problem/11867>

- 한 박스에 돌이 N개, 다른 박스에 돌이 M개 들어있다
- 턴: 박스를 하나 선택하고, 박스 안에 들어있는 돌을 모두 버린다.
- 그 다음 다른 박스에 들어있는 돌을 분배한다.
- 각 박스에는 돌이 적어도 1개 이상 있어야 한다.
- 두 박스에 돌을 각각 1개 만드는 사람이 이긴다.
- N, M이 주어졌을 때, 승자 구하기



# 박스 나누기 게임

<https://www.acmicpc.net/problem/11867>

- 소스: <http://boj.kr/e6bf9fc98d8244fd944e5845bc7297e1>

# 님 게임

The Game of Nim

- 돌 더미 3개가 있다.
- 각 사람은 비어있지 않은 돌 더미를 하나를 선택하고, 돌을 가져간다. (제한 없음)
- 마지막 돌을 제거한 사람이 게임을 이기게 된다 (더 이상 가져갈 ~~돌~~이 없는 사람이 게임을 진다)

$(0, 0, 0) : L$   
 $(0, 0, 1) : W$   
 $(0, 1, 1) : L$

$(0, 1, 2) : W$   
 $(0, 1, 3) : W$

$a, b, c$

$a \wedge b \wedge c \neq 0$

# 님 게임

The Game of Nim

40

- $(0, 0, 0)$ 은 지는 위치이다
- $(0, 0, x)$ 는 이기는 위치이다 ( $x > 0$ )
- $(0, 0, 1)$ 은 이기는 위치이다
- $(0, 1, 1)$ 은 지는 위치이다
- $(0, 1, x)$ 은 이기는 위치이다



# 님 게임

The Game of Nim

41

- 돌의 개수를 XOR한 결과가 0이면 지는 위치이다

# 님 게임 2

42

<https://www.acmicpc.net/problem/11868>

- 소스: <http://boj.kr/2c6542132b1c403d9251c61292f46561>



- 님블은  $1 \times N$  직사각형에서 즐기는 게임이다. 직사각형은  $1 \times 1$  크기의 정사각형으로 나누어져 있고, 가장 왼쪽 정사각형은 0번, 그 오른쪽 정사각형은 1번, ..., 가장 오른쪽 정사각형은  $N-1$ 번이다. 각 정사각형에는 동전이 놓여져 있을 수 있는데, 한 개 이상 놓여져 있을 수도 있다.
- 두 사람은 턴을 번갈아가면서 게임을 진행한다. 턴은 동전을 하나 고르고, 동전을 왼쪽으로 옮기는 것으로 이루어져 있다.
- 모든 동전이 0에 있으면 게임이 끝나게 되며, 마지막 동전을 0으로 옮긴 사람이 게임을 이긴다.

2 3 ~~4~~ 5  
1

# nimble

<https://www.acmicpc.net/problem/11869>

- 이 문제는 nim 게임 2와 같은 문제이다.
- $k$ 번째 칸에 있는 동전은  $k$ 개 돌이 있는 돌 더미와 같다

# 님블

<https://www.acmicpc.net/problem/11869>

- 소스: <http://boj.kr/06c0d16cdaff45fb879ab4a6c5c8fedc>

# 돌 게임

## Combinatorial Game

46

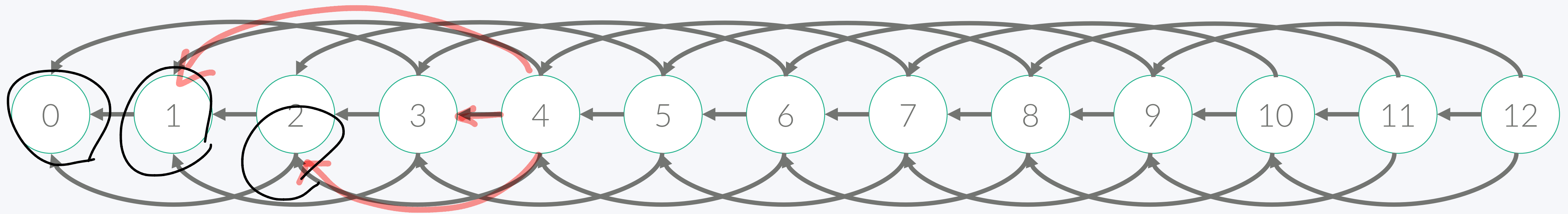
- 두 플레이어 A와 B가 있다
- 돌 21개가 탁자 위에 있다
- 한 번에 돌을 1, 2, 3개 가져갈 수 있다 (적어도 1개의 돌은 가져가야 함)
- A가 먼저 게임을 시작하고, 턴을 번갈아가면서 게임을 한다
- 마지막 돌을 가져가는 사람이 게임을 이긴다
  - 즉, 돌을 가져갈 수 없는 사람이 게임을 진다

# 돌 게임

47

## Combinatorial Game

- $G = (X, F)$
- $X =$  정점 (위치)
- $F =$  함수,  $F(x) \subset X$
- $F(x) = x$ 에서 이동할 수 있는 위치
- $F(x)$ 가 비어있다면 끝나는 위치



# The Sprague-Grundy Function

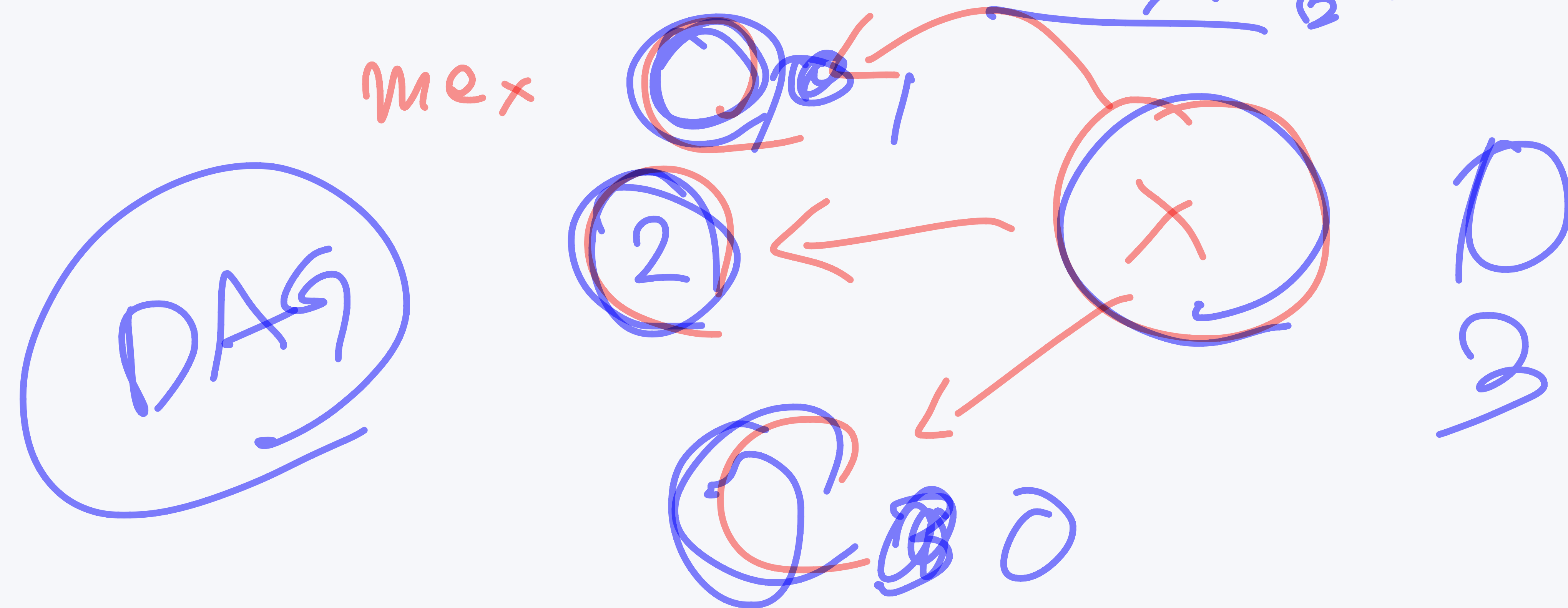
The Sprague-Grundy Function

- $g(x) = \min\{n \geq 0, n \neq g(y) \text{ for } y \in F(x)\}$

- $g(x)$ 는  $x$ 의 다음 위치  $y$ 의  $g(y)$ 에 포함되지 않는 가장 작은 정수

응기 마는 정수

max

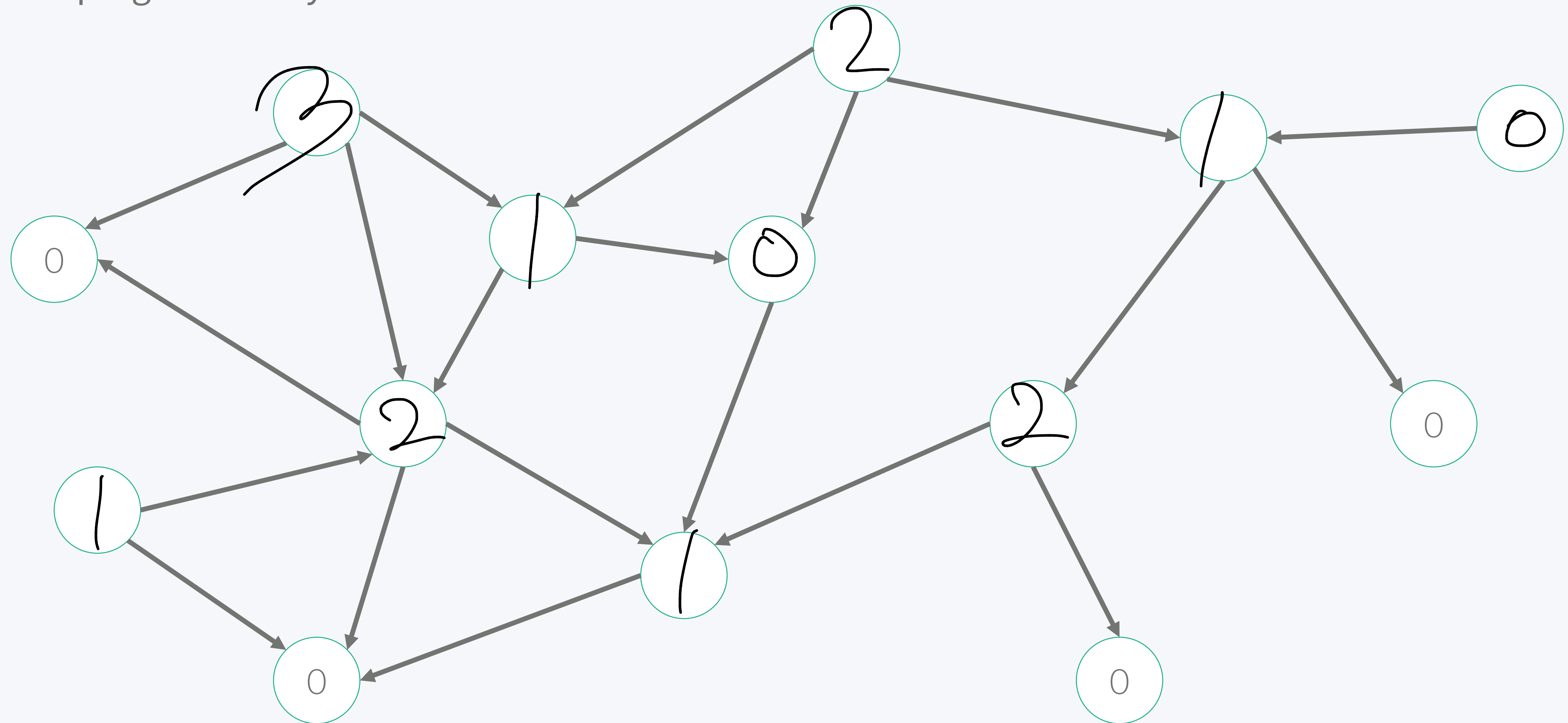




# The Sprague-Grundy Function

The Sprague-Grundy Function

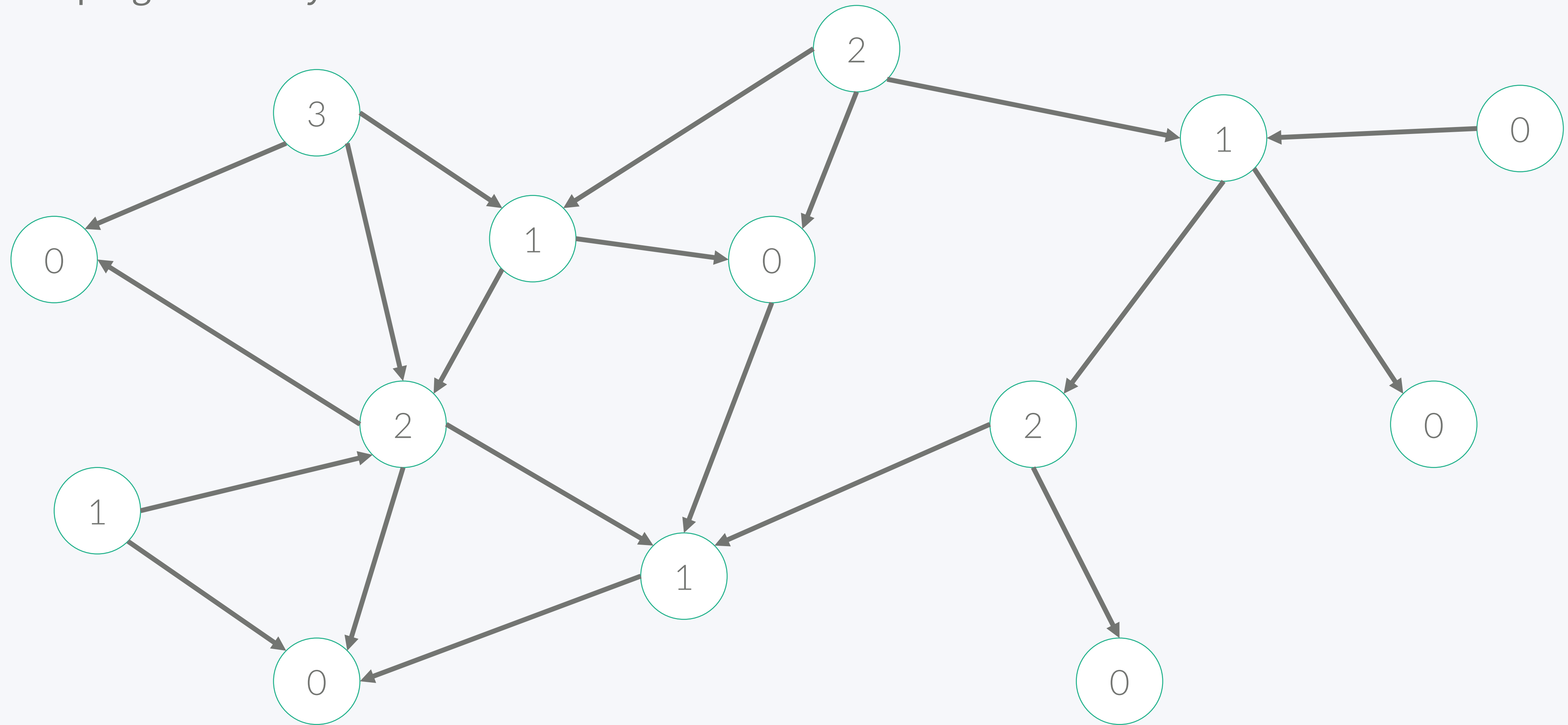
49



# The Sprague-Grundy Function

The Sprague-Grundy Function

50



# 돌 게임

## Combinatorial Game

- The Sprague-Grundy Function

$$g(x) = x \bmod 4$$

51

Handwritten callout: 1, 2, 3

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2  | 3  | 0  | 1  | 2  | 3  |    |    |

# 돌 게임

Combinatorial Game

- The Sprague-Grundy Function

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2  | 3  | 0  | 1  | 2  | 3  | 0  | 1  |

# The Sprague-Grundy Function

53

## The Sprague-Grundy Function

- 게임이 여러 개로 구성된 경우에는
- 각 게임의 Sprague-Grundy Function 값을 XOR 한 값이 Sprague-Grundy Function 의 값이다
- XOR한 값이 0이면 P-위치 (L)
- 0이 아니면 N-위치 (W)

# 님 게임 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11868>

$$g(i) = i$$

54

- 님 게임을 돌 더미 하나 있는 것을 게임 하나라고 생각하자
- 그럼 각각 하나 하나에 대해서 Sprague-Grundy Value를 계산해보자

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ~  | ~  | ~  | ~  |    |    |    |    |



# 님 게임 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11868>

- 님 게임을 돌 더미 하나 있는 것을 게임 하나라고 생각하자
- 그럼 각각 하나 하나에 대해서 Sprague-Grundy Value를 계산해보자

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |

# 님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태



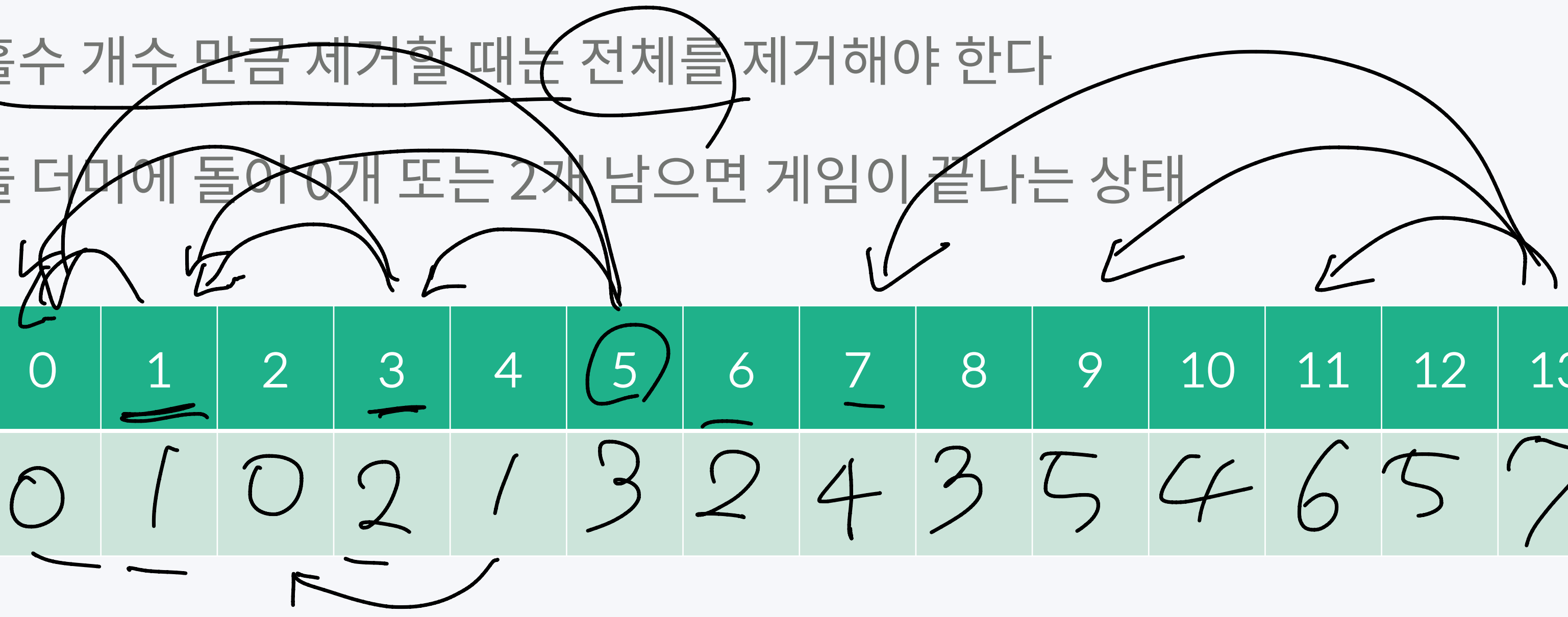
# 님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

$g(2k-1)$

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태

|      |   |          |   |          |   |          |          |          |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|---|----------|---|----------|---|----------|----------|----------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| i    | 0 | <u>1</u> | 2 | <u>3</u> | 4 | <u>5</u> | <u>6</u> | <u>7</u> | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| g(i) | 0 | 1        | 0 | 2        | 1 | 3        | 2        | 4        | 3 | 5 | 4  | 6  | 5  | 7  |    |    |    |    |



# 님 게임 홀짝

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 짝수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거할 수 없다.
- 홀수 개수 만큼 제거할 때는 전체를 제거해야 한다
- 돌 더미에 돌이 0개 또는 2개 남으면 게임이 끝나는 상태

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4  | 6  | 5  | 7  | 6  | 8  | 7  | 9  |

# 님 게임 홀짝

59

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- $g(2k) = k-1$
- $g(2k-1) = k$

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4  | 6  | 5  | 7  | 6  | 8  | 7  | 9  |

# 님 게임 홀짝

60

<https://www.acmicpc.net/problem/11871>

- 소스: <http://boj.kr/1f342458c64e46bcb0051c3fd1c9d457>

# 님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

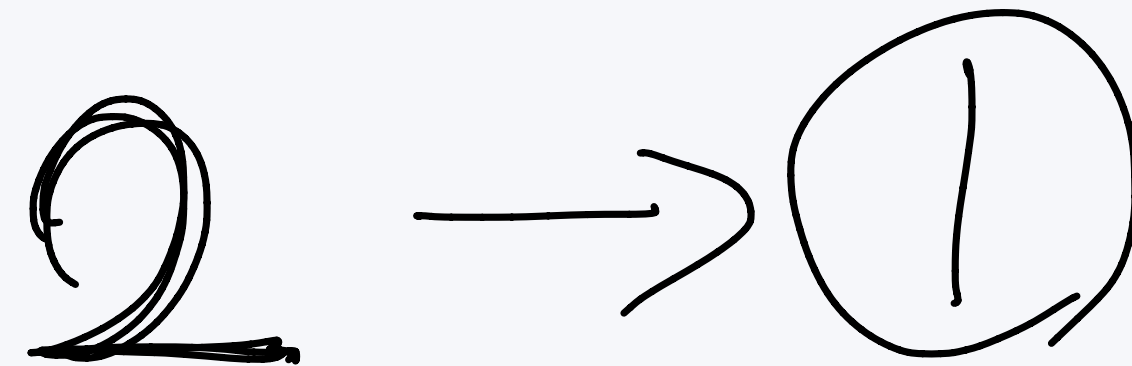
- 님 게임과 같은데 규칙이 있다.
- 돌 더미 하나를 선택해 돌을 하나 이상 제거한다.
- 돌이 적어도 2개 있는 돌 더미 하나를 선택한 다음, 두 개의 비어있지 않은 돌 더미로 나눈다.  
(돌은 제거할 수 없다)

# 님 게임 나누기

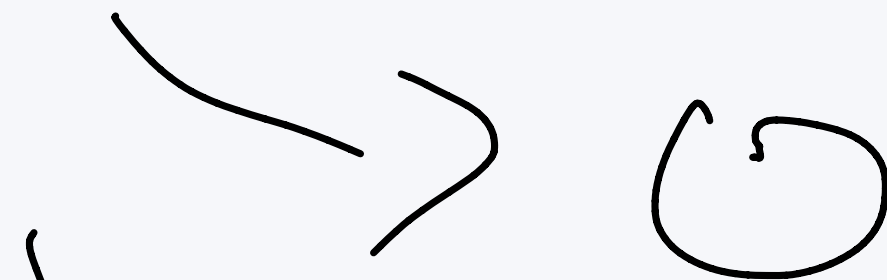
<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- $g(0) = 0$
- $g(1) = 1$

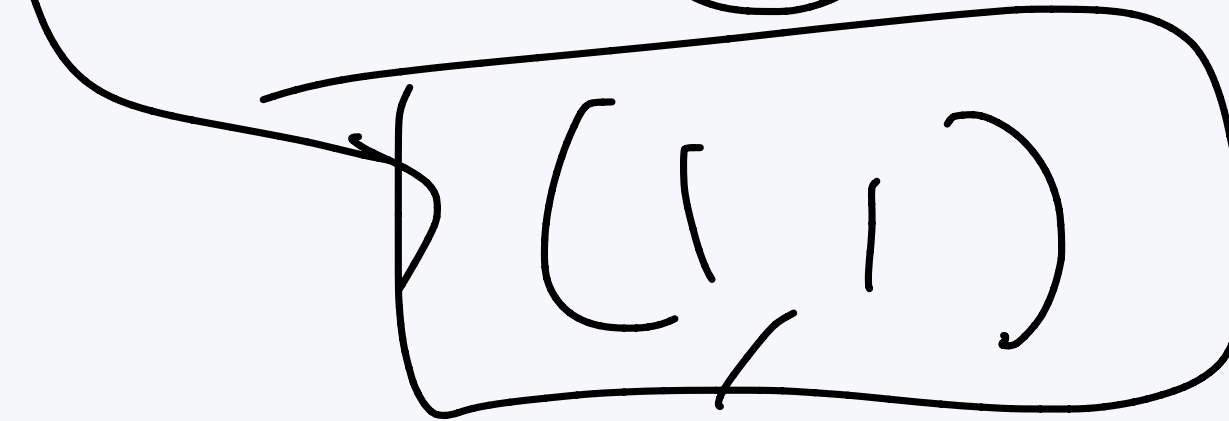
$$g(2) = 2$$



$$g(1) = 1$$



$$g(0) = 0$$



$$g(1) \wedge g(1) = 0$$

| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| g(i) | 0 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |



- 3은 가능한 방법이
- 0, 1, 2, (1, 2) 이다
- $go(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, (1, 2) \Leftarrow g(1) \text{ xor } g(2) = 1 \text{ xor } 2 = 3$
- $g(3) = 4$

[illegible]



# 님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

- $g(4k+1) = 4k+1$
- $g(4k+2) = 4k+2$
- $g(4k+3) = 4k+4$
- $g(4k+4) = 4k+3$

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| i    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| g(i) | 0 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 | 6 | 8 | 7 | 9 | 10 | 12 | 11 | 13 | 14 | 16 | 15 | 17 |

# 님 게임 나누기

<https://www.acmicpc.net/problem/11872>

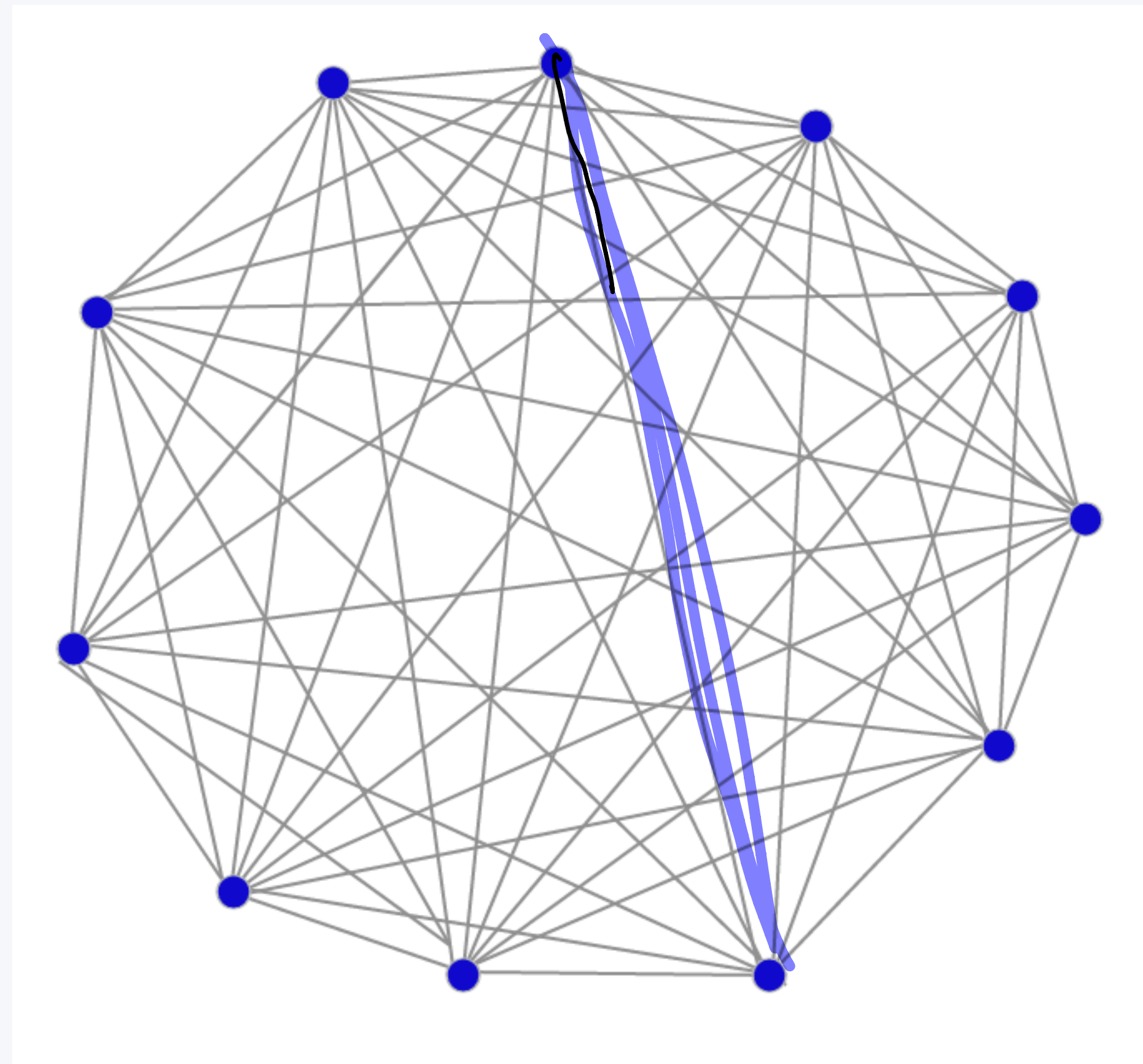
- 소스: <http://boj.kr/3622da2013364c1f865353e9f6913f8b>

# 다각형 게임

67

<https://www.acmicpc.net/problem/13034>

- 이런 다각형에서

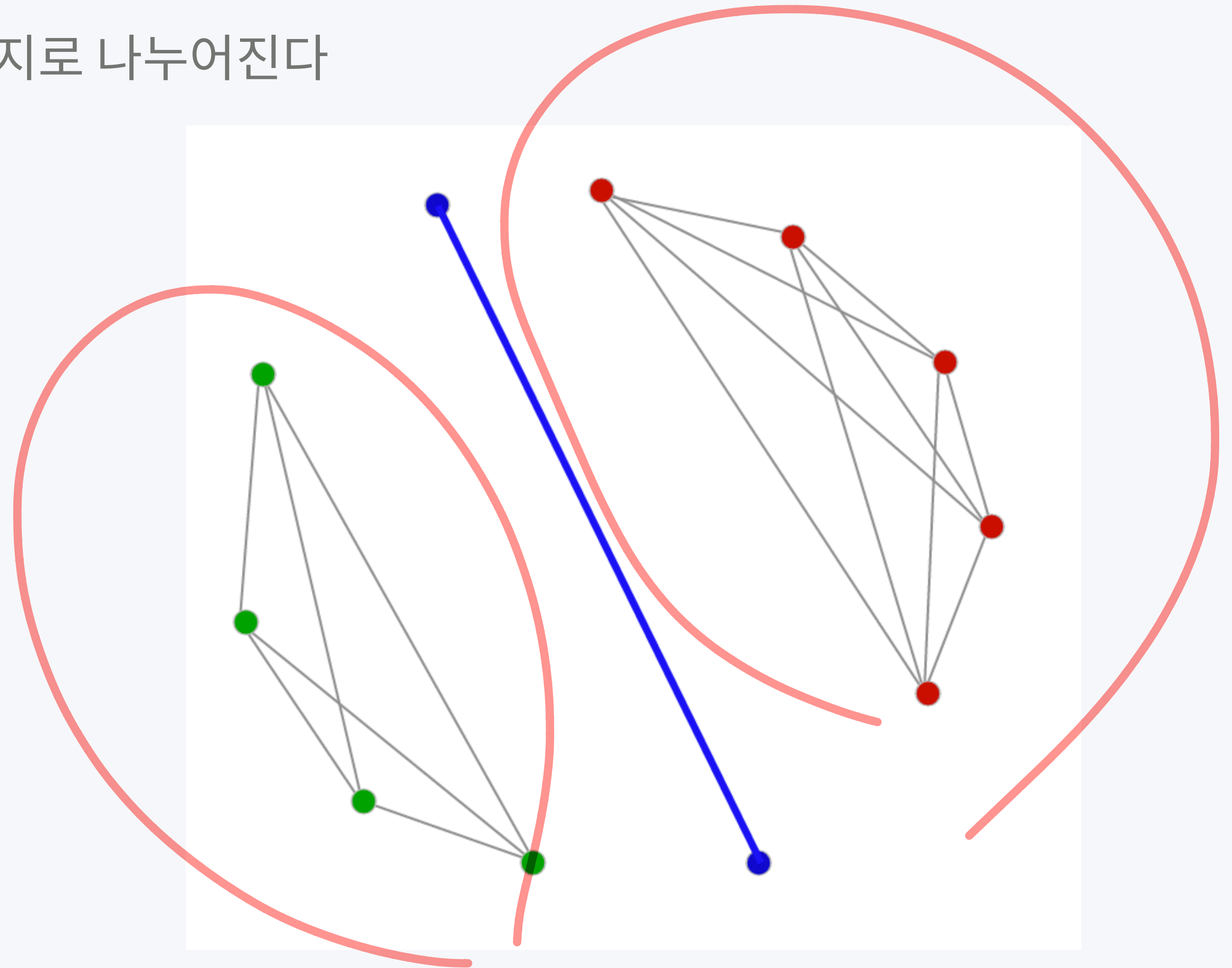
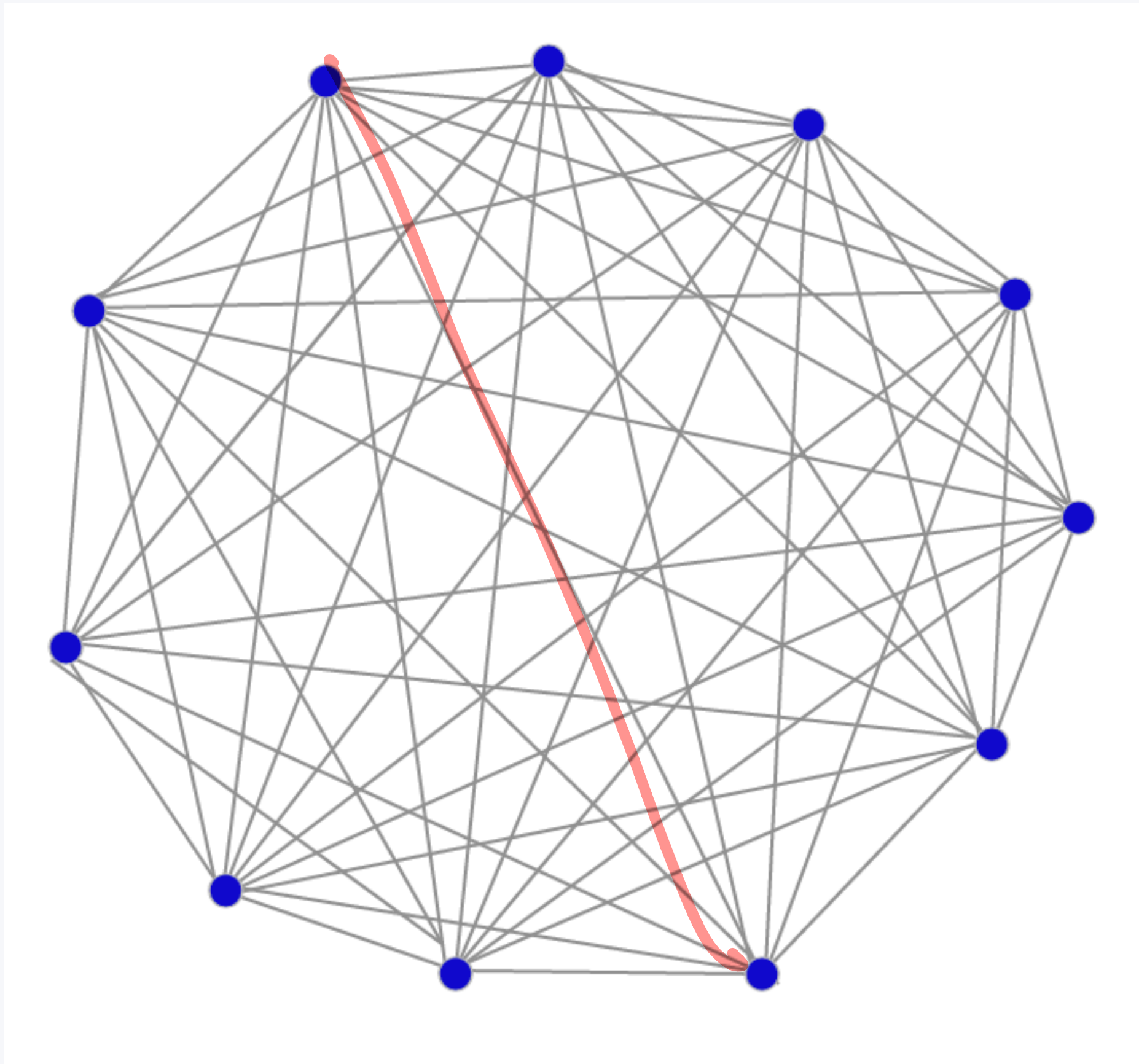


# 다각형 게임

68

<https://www.acmicpc.net/problem/13034>

- 이런 다각형에서 선분을 그으면 이렇게 두 가지로 나뉘어진다



# 다각형 게임

<https://www.acmicpc.net/problem/13034>

- 1번 선과  $i$ 번 선을 이으면
- 두 개의 게임  $i$ 와  $N-2-i$ 로 나누어 진다
- $g(N)$ 는  $g(i) \wedge g(N-2-i)$ 에 포함되지 않은 가장 작은 0보다 크거나 같은 정수

# 다각형 게임

[http://www.math.ucla.edu/~tom/Game\\_Theory/comb.pdf](http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/comb.pdf)

70

<https://www.acmicpc.net/problem/13034>

- 소스: <http://boj.kr/b7a6b5499b104999b8ca484973dc95df>

