

MCMF

최백준 choi@startlink.io

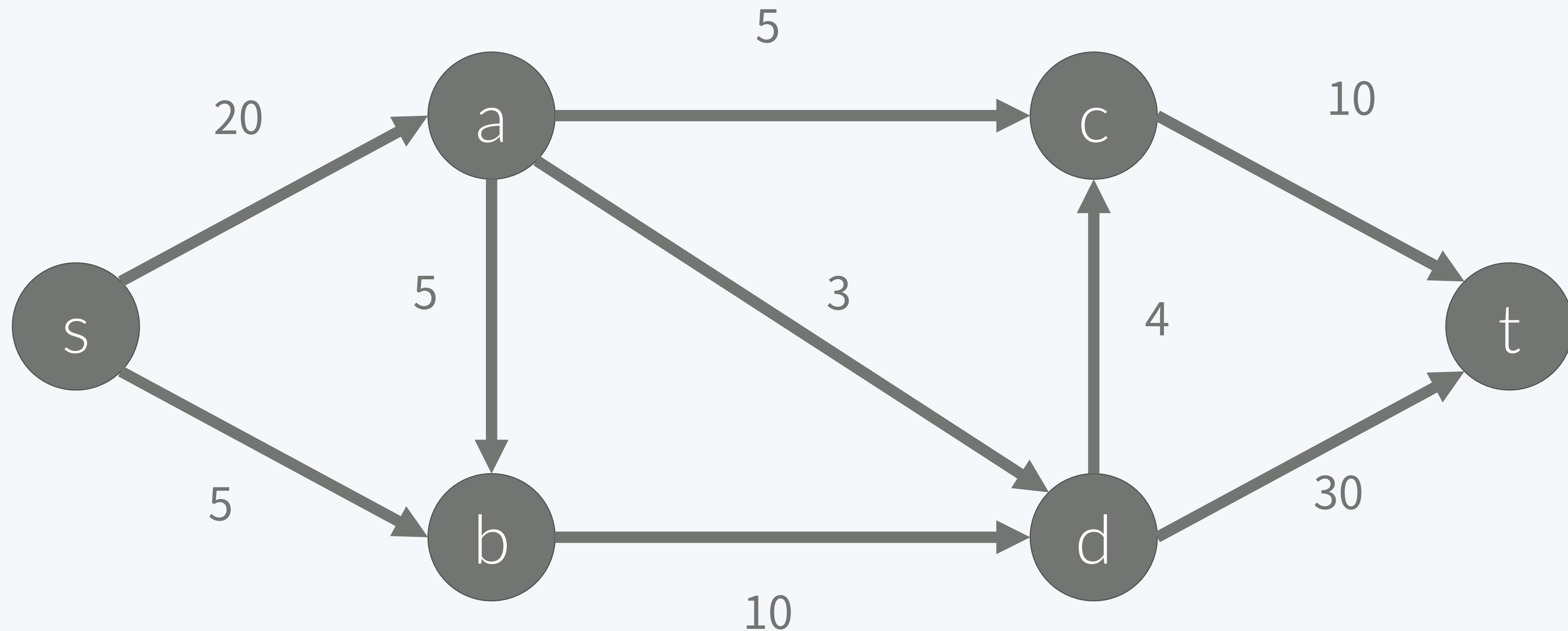
MCMF

최대 유량

Maximum Flow

3

- 각 간선이 나타내는 것은 흐를 수 있는 양
- s에서 t로 최대 얼마나 흐를 수 있는가?

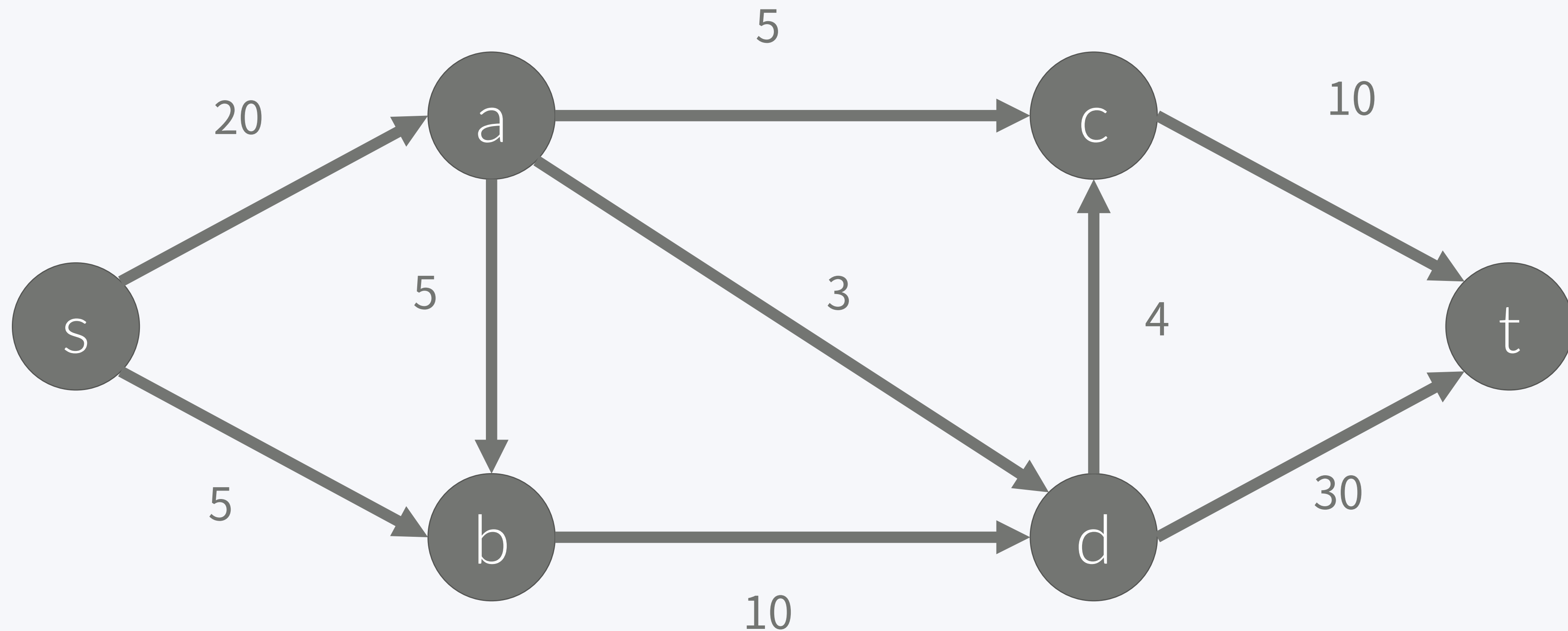


최대 유량

Maximum Flow

4

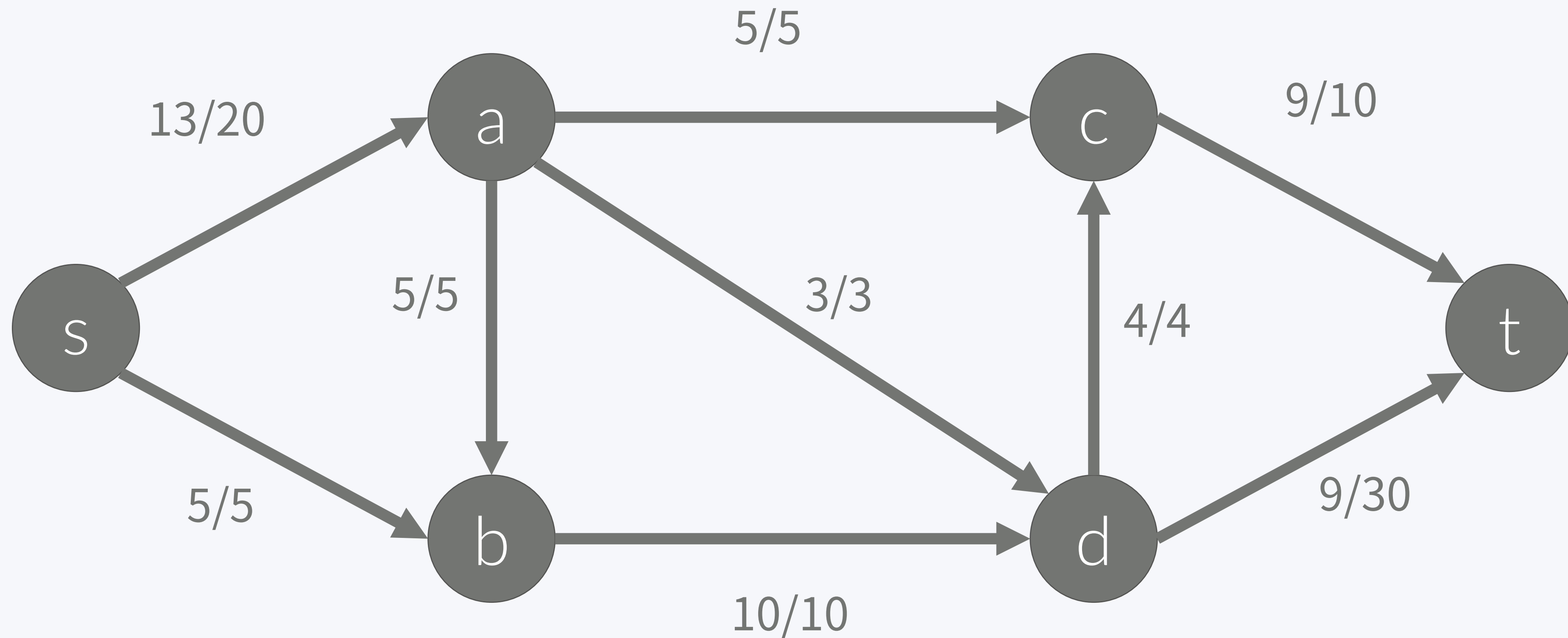
- 간선에 나타나있는 것: capacity
- 실제 그 간선을 따라서 흐른 양: flow



최대 유량

Maximum Flow

- flow/capacity



최대 유량

Maximum Flow

6

- 그래프 G 에서
- $u \rightarrow v$ 간선의 용량: $c(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 흐른 양: $f(u, v)$

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

7

- 그래프 G 에서
- $u \rightarrow v$ 간선의 용량: $\text{cap}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 흐른 양: $\text{flow}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 비용: $\text{cost}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 총 비용: $\text{flow}(u, v) * \text{cost}(u, v)$

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

8

- 그래프 G 에서
- $u \rightarrow v$ 간선의 용량: $\text{cap}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 흐른 양: $\text{flow}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 비용: $\text{cost}(u, v)$
- $u \rightarrow v$ 간선의 총 비용: $\text{flow}(u, v) * \text{cost}(u, v)$
- $v \rightarrow u$ 간선의 비용: $\text{cost}(v, u) = -\text{cost}(u, v)$

최대 유량

Maximum Flow

9

- 세가지 속성을 만족해야 한다
- Capacity constraint
 - $f(u, v) \leq c(u, v)$
- Skew symmetry
 - $f(u, v) = -f(v, u)$
 - $u \rightarrow v$ 로 x 를 보냈으면, $v \rightarrow u$ 로는 $-x$ 를 보낸다고 한다
- Flow conservation
 - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$
 - u 와 연결된 모든 간선의 흐른양의 합은 0이다
 - Skew symmetry에 의해서 음수를 저장했기 때문

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

10

- Total cost
- $\frac{1}{2} \sum_{(u,v) \in V \times V} \text{cost}(u, v) * \text{flow}(u, v)$

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

11

- 최소 비용 유량 문제에서
- capacity 제한이 사라지면?
 - 최단 거리 문제
- 모든 cost가 0이라면?
 - 최대 유량 문제

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

12

- 각 노드 v 는 balance를 가지고 있다.
- 노드 v 의 balance $\rightarrow b(v)$
- $b(v) > 0$: v 는 supply 노드
- $b(v) == 0$: v 는 shipping 노드
- $b(v) < 0$: v 는 demand 노드

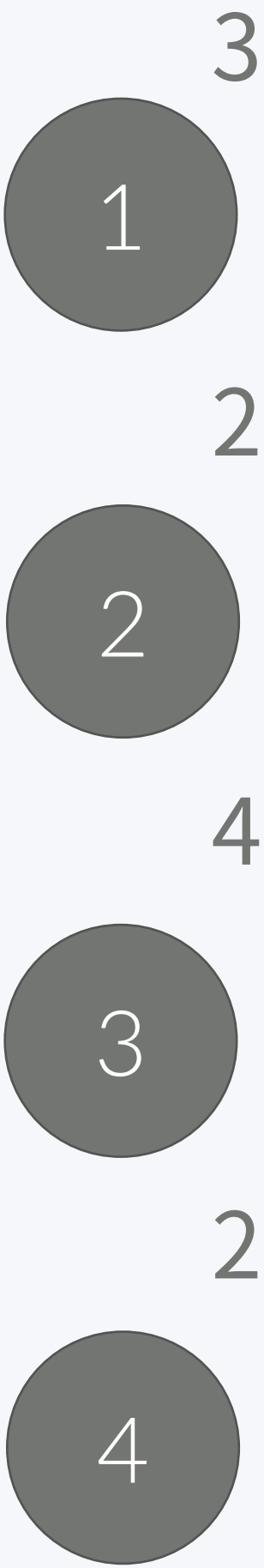
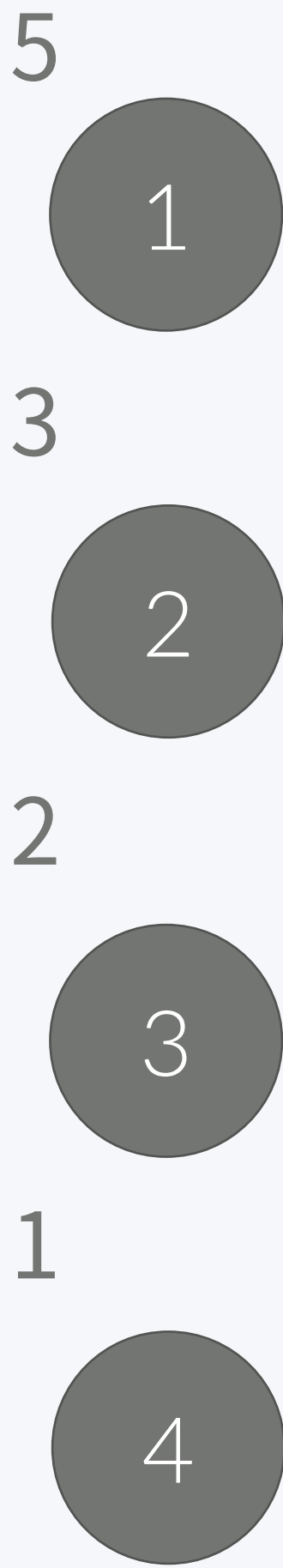
책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>

- 온라인 서점: M개
- 사람: N명
- 각 사람이 사려고 하는 책의 개수 $A[i]$
- 서점이 가지고 있는 책의 개수 $B[i]$
- 서점 $i \rightarrow$ 사람 j 로 배송비 $C[i][j]$

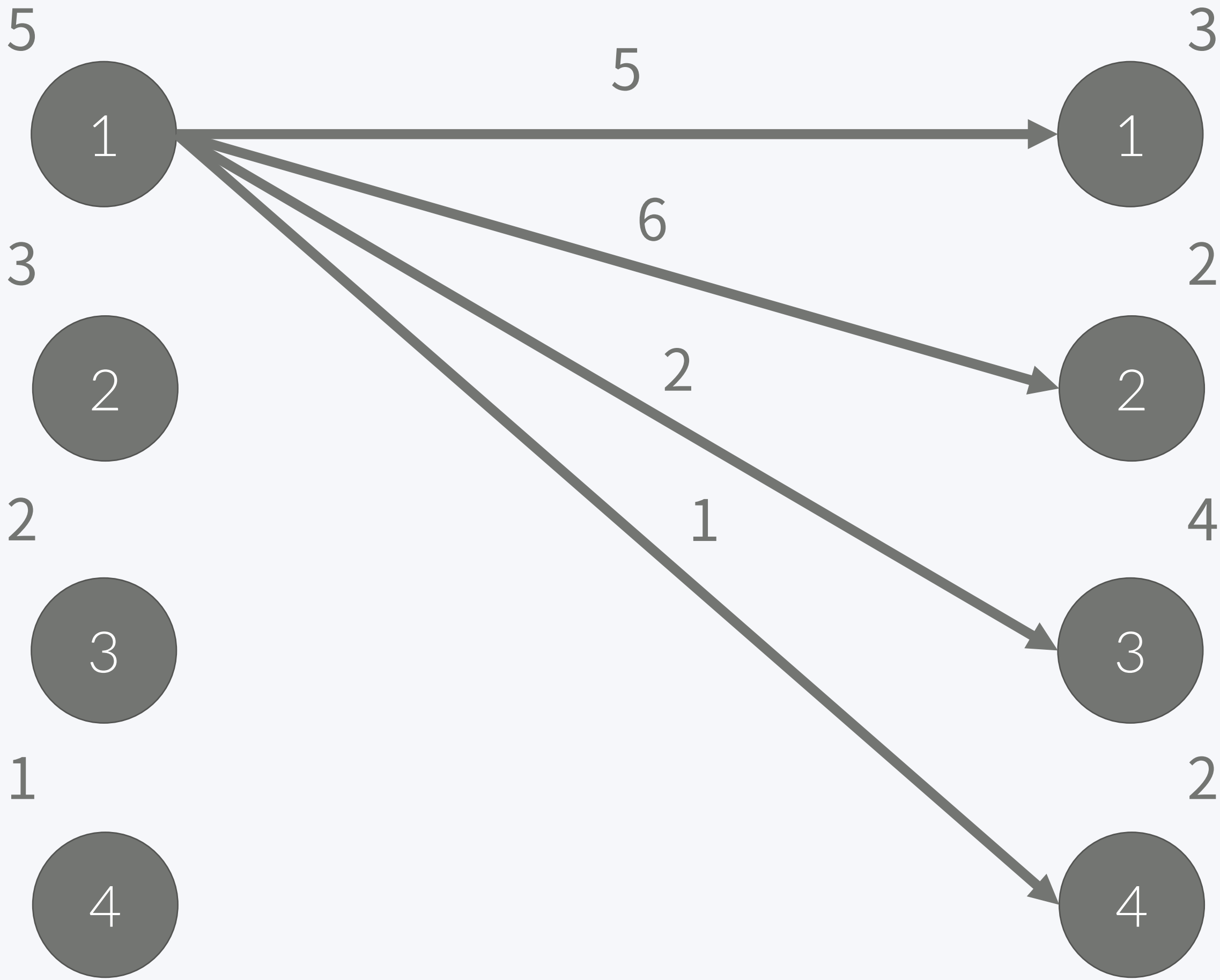
책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>



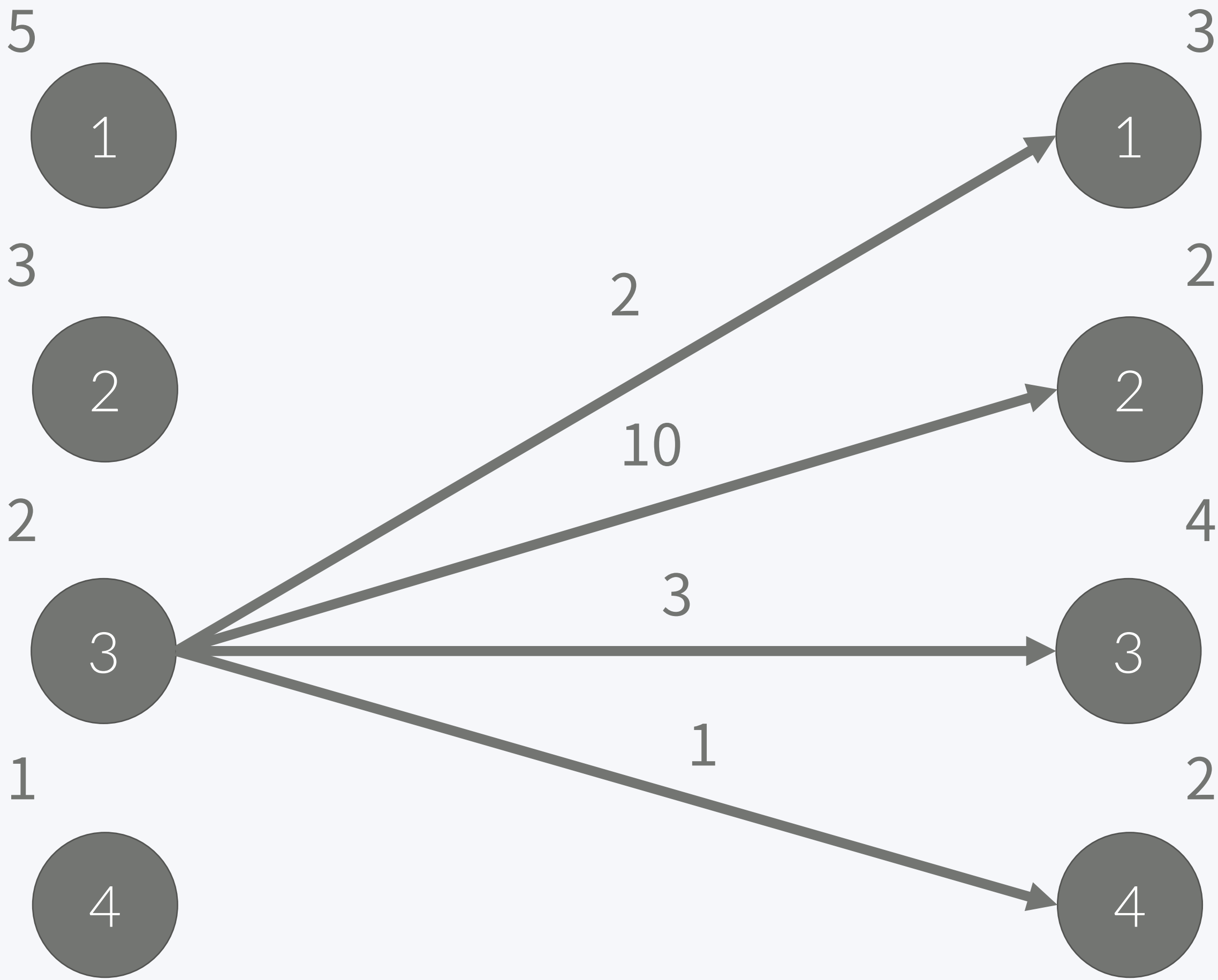
책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>



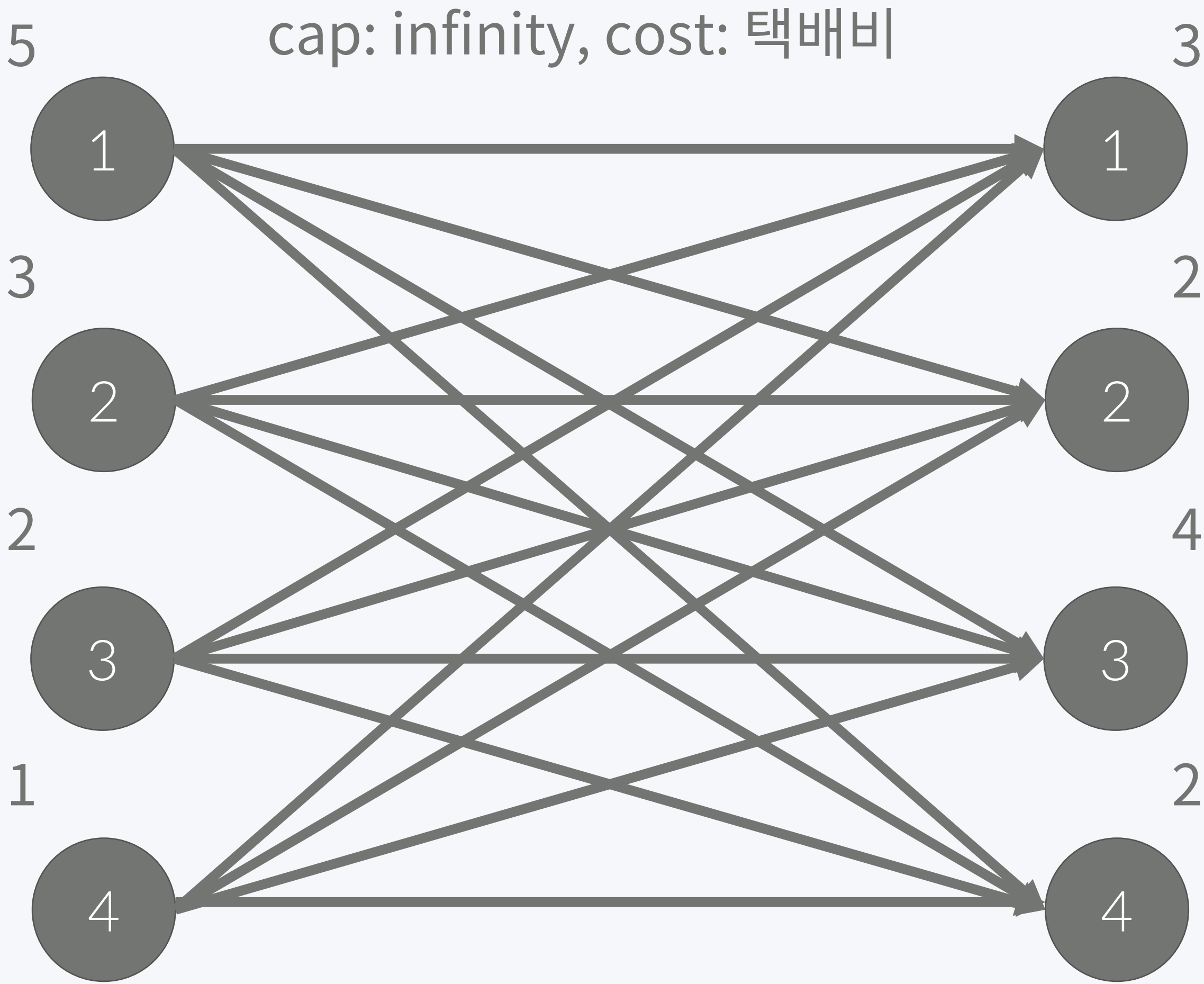
책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>



책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>

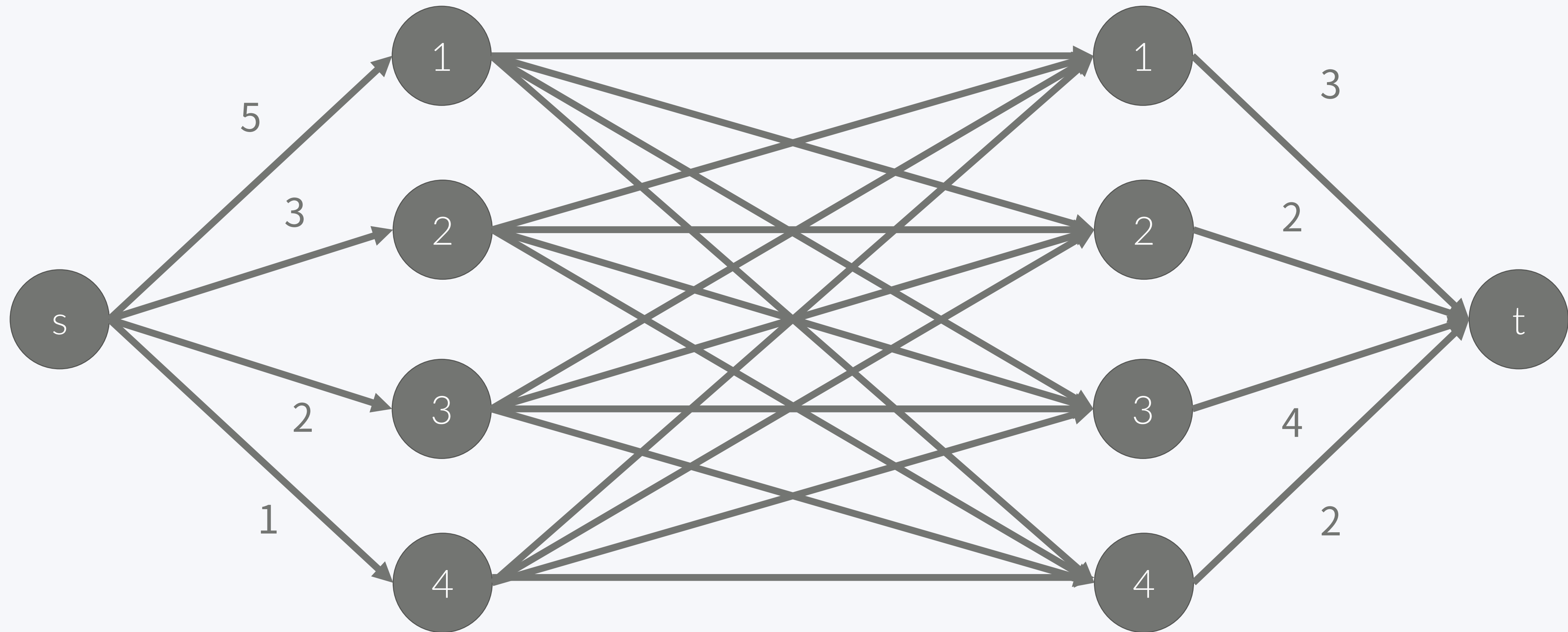


책 구매하기

18

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>

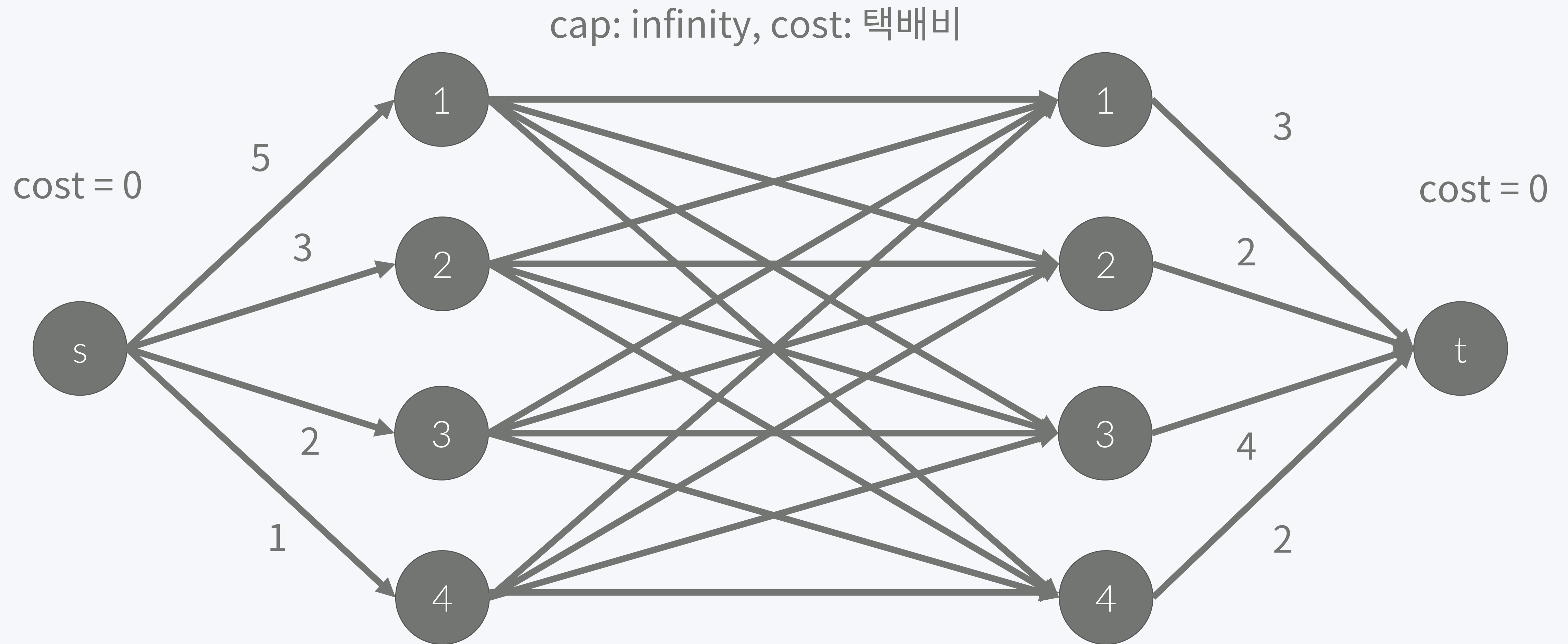
cap: infinity, cost: 책배비



책 구매하기

19

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>



책 구매하기

<https://www.acmicpc.net/problem/11405>

- 이런 문제가 최소 비용 유량 문제

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

21

- 푸는 방법
- Cycle Canceling
- Successive Shortest Path Algorithm

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

- $b_i > 0$ 이면 소스와 연결 cap: b_i , cost: 0
- $b_i < 0$ 이면 싱크와 연결 cap: b_i , cost: 0
- Edmond-karp 방법으로 문제를 풀지만
- Augmenting path를 shortest path 알고리즘으로 찾는다.
- 이 방법은 negative cost cycle이 없을 때만 사용할 수 있다.

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

23

- Negative Edge를 포함할 수 있기 때문에, Bellman-ford 또는 SPFA를 사용해야 한다.

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

24

- SPFA를 사용: <http://boj.kr/8088293b57aa458ba648025786cb293c>

최소 비용 유량

Minimum Cost Flow

25

- Dijkstra를 이용할 수도 있다.
- $\text{potential}[i] = \text{source} \rightarrow i$ 까지 최단거리
- 를 이용하면 음수 가중치가 있을 때 dijkstra를 사용할 수 있다.
- 소스: <http://boj.kr/0027d315fc274d449472f88f140fab81>

책 구매하기 2

<https://www.acmicpc.net/problem/11406>

- 이 문제는 최대 유량 문제이다
- 소스: <http://boj.kr/35f7ff75fd024e5890f41b10b85a6e70>

책 구매하기 3

<https://www.acmicpc.net/problem/11407>

- 이 문제는 최소 비용 유량 문제이다.
- 서점-사람의 capacity와 cost가 입력으로 주어진다.
- 소스: <http://boj.kr/85d885b2b82b4b06becfc47e49e35882>

열혈강호 5

<https://www.acmicpc.net/problem/11408>

- 이 문제는 최소 비용 유량 문제이다.
- 소스: <http://boj.kr/820e2840425342cd83a7f4464cb33dd7>

열혈강호 6

<https://www.acmicpc.net/problem/11409>

- 이 문제는 최대 비용 유량 문제이다.
- 최대 비용은 비용에 -1을 곱해서 구할 수 있다
- 소스: <http://boj.kr/3673d643b4184410b616e52044e1ca6a>

선발명단

30

<https://www.acmicpc.net/problem/3980>

- 왼쪽: 선수
- 오른쪽: 포지션
- 선수-포지션 cost: -능력치, capacity: 1

선발명단

<https://www.acmicpc.net/problem/3980>

- Bellman-ford: <http://boj.kr/29c9353ecaab427ea3cba843bd926f61>
- SPFA: <http://boj.kr/02e03417ca5048a8a0fd02bc59ed2c81>
- Dijkstra: <http://boj.kr/63b5f73084bf4ed2b0377853f077fa3d>

최고의 팀 만들기

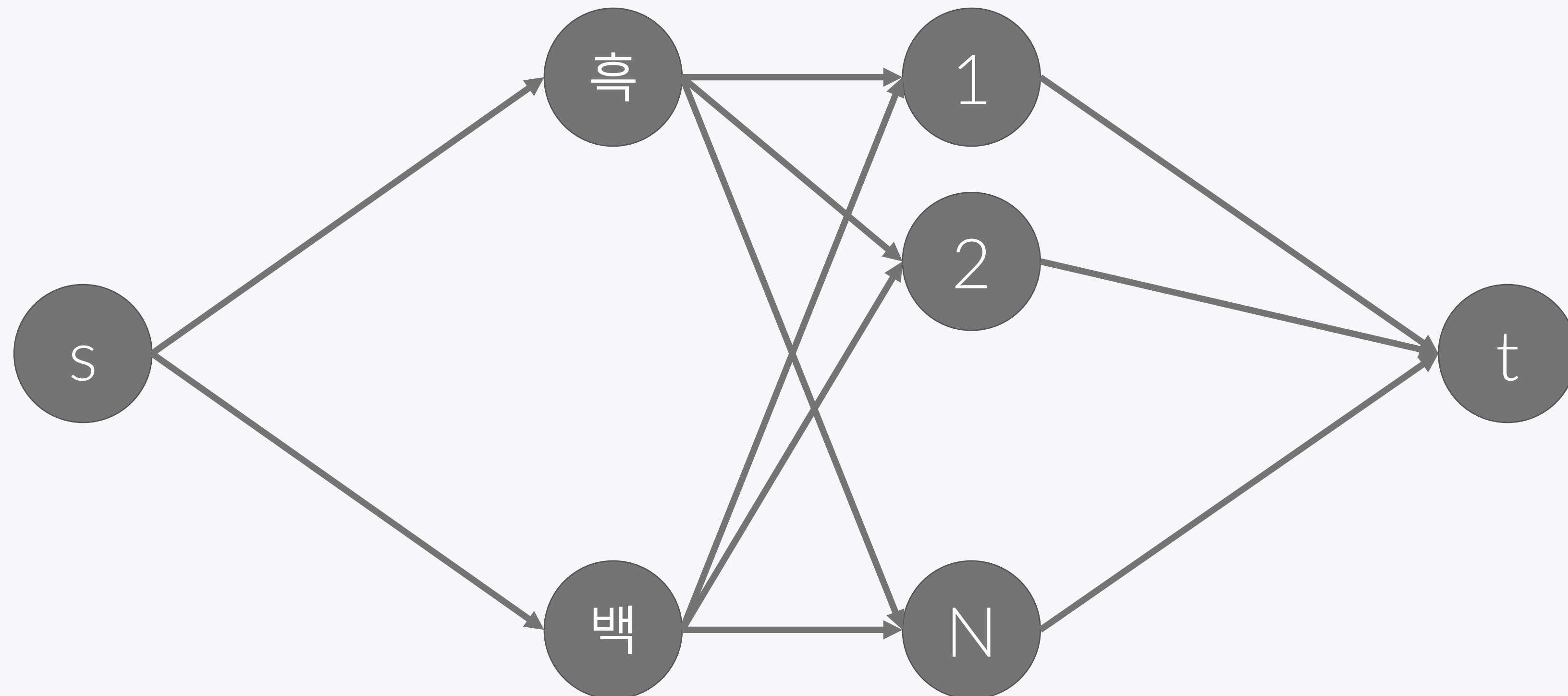
<https://www.acmicpc.net/problem/1633>

- 사람: N명
- 각 사람이 흑,백으로 플레이할 때 능력치가 주어짐
- 흑팀: 15명
- 백팀: 15명
- 흑 플레이어 능력치의 합 + 백 플레이어 능력치의 합의 최대값 찾기

최고의 팀 만들기

33

<https://www.acmicpc.net/problem/1633>

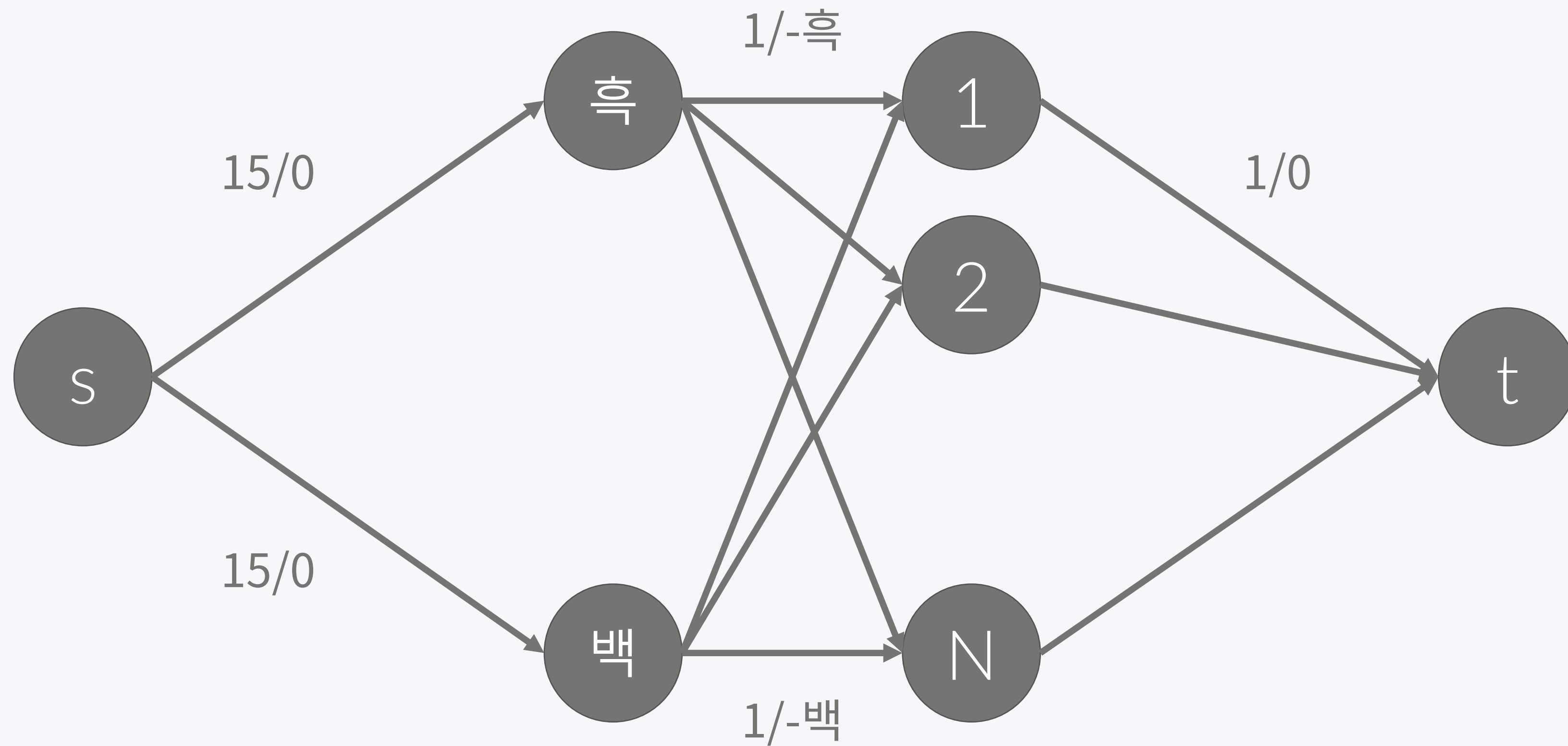


최고의 팀 만들기

34

<https://www.acmicpc.net/problem/1633>

- cap/cost



최고의 팀 만들기

35

<https://www.acmicpc.net/problem/1633>

- 소스: <http://boj.kr/4801de2462c045178af2fa8c75cdf9b1>

풍선

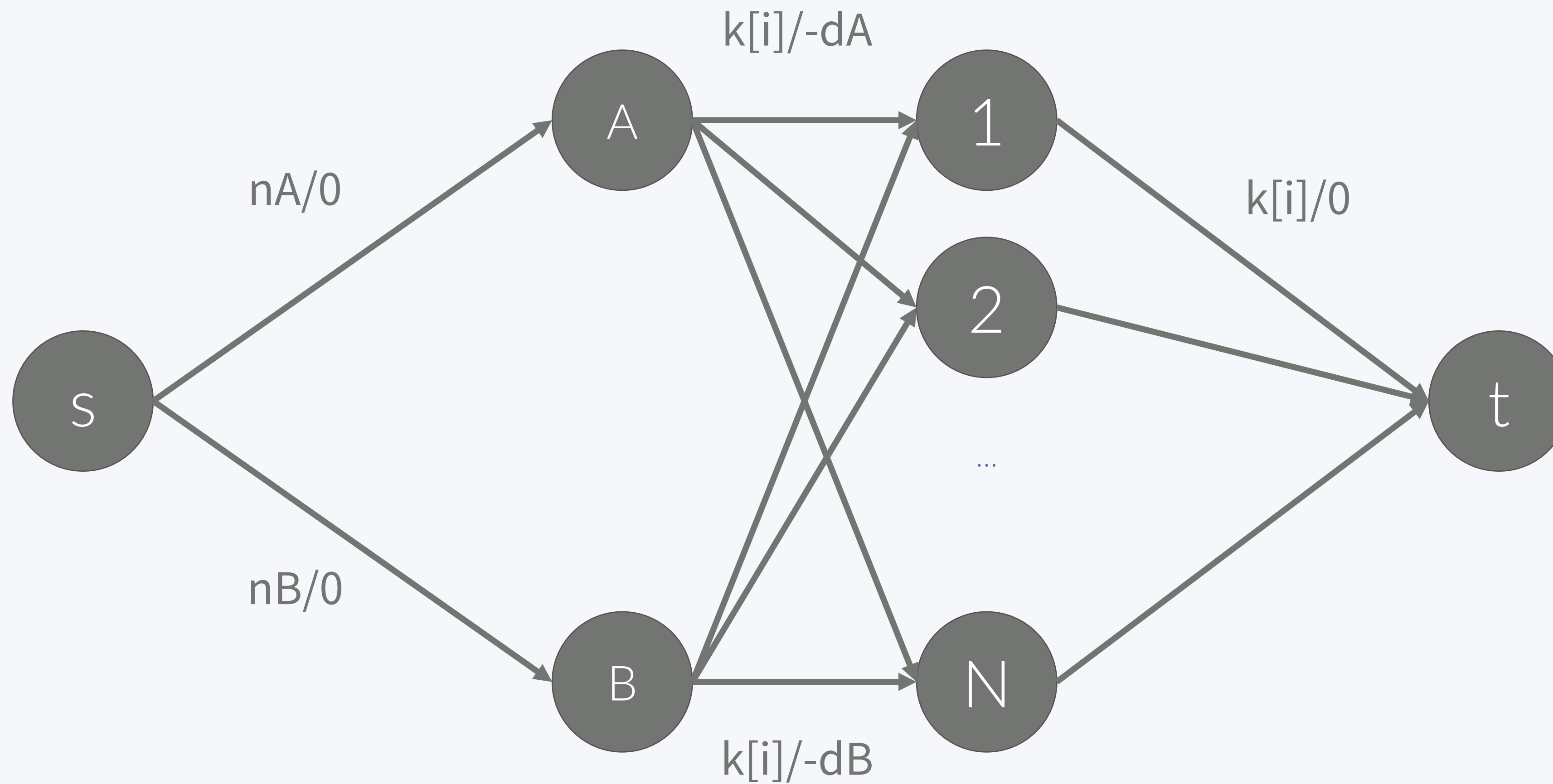
<https://www.acmicpc.net/problem/4716>

- 팀 N명
- 방 A: 풍선 A개
- 방 B: 풍선 B개
- 각 팀: 받아야 하는 풍선의 개수, 방 A와의 거리, B와의 거리가 주어진다.
- 이동 거리의 최소값을 구하는 문제

풍선

<https://www.acmicpc.net/problem/4716>

- cap/cost



풍선

<https://www.acmicpc.net/problem/4716>

- 소스: <http://boj.kr/7cf5e871d925465bb928d8ac11053c57>

<https://www.acmicpc.net/problem/1585>

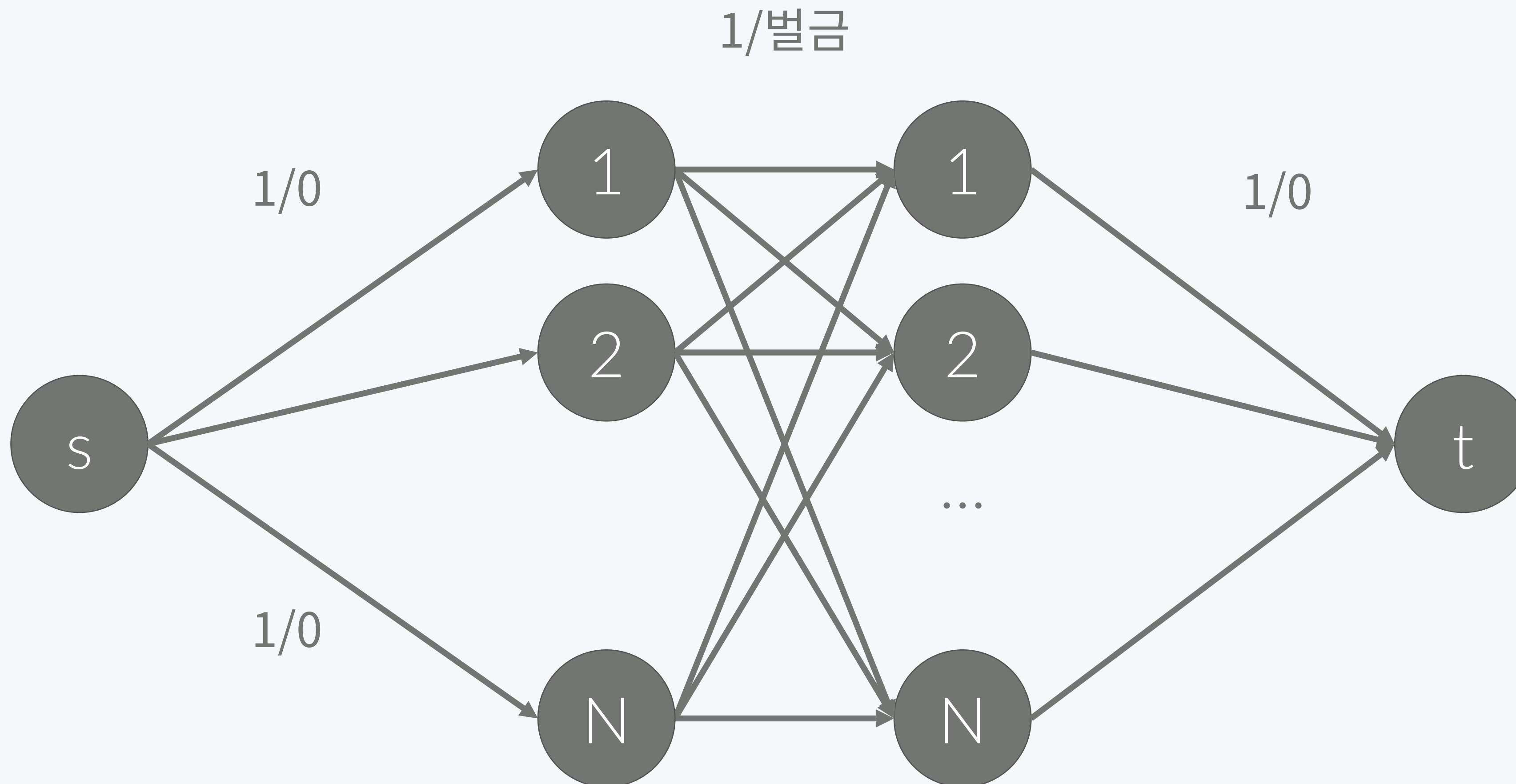
- 차가 N개
 - 각 차가 터널을 들어가는 시간과 나가는 시간이 N개 있다.
 - 어떤 차가 언제 들어가고 언제 나갔는지를 적절히 정해서
 - 벌금을 최소/최대로 하는 것
-
- 터널을 통과하는데 걸린 시간: S, 기준 시간: T
 - 벌금 = $\text{Min}((T-S)^2, F)$

경찰

40

<https://www.acmicpc.net/problem/1585>

- cap/cost



경찰

<https://www.acmicpc.net/problem/1585>

- 소스: <http://boj.kr/db6438e59db74c3a8c47c7c72d2cd2b7>

왕복 여행

<https://www.acmicpc.net/problem/2311>

- 그래프에서 $1 \rightarrow N \rightarrow 1$ 로 왕복여행을 하는데
- 소요되는 최소 시간을 구하는 문제
- 같은 간선은 한 번만 지나갈 수 있다.

왕복 여행

43

<https://www.acmicpc.net/problem/2311>

- 1 -> N으로 가는 최단 경로 2개를 찾는 문제가 된다.
- 이 때, 같은 도로는 최대 1번만 가능
- 최단 경로 1개
 - Dijkstra
- 최단 경로 2개
 - edge의 capacity = 1, cost = 원래 edge의 가중치
 - source -> 1, N -> sink
 - capacity = 2, cost = 0
 - MCMF!

왕복 여행

44

<https://www.acmicpc.net/problem/2311>

- 소스: <http://boj.kr/407ab5442a0c481483ff64448a132846>

제독

45

<https://www.acmicpc.net/problem/3640>

- 그래프에서
- 같은 간선, 정점을 사용하지 않는 1 -> v로 가는 최단 경로 2개 구하는 문제

제독

<https://www.acmicpc.net/problem/3640>

- 왕복 여행 문제와 다르게 같은 정점도 방문할 수 없다.
- 따라서, 정점을 2개로 나눠서 사이의 capacity를 1로 둔다.

제독

<https://www.acmicpc.net/problem/3640>

- 소스: <http://boj.kr/eef9a9b9431c47288469ef45425935cf>

Concert Hall Scheduling

48

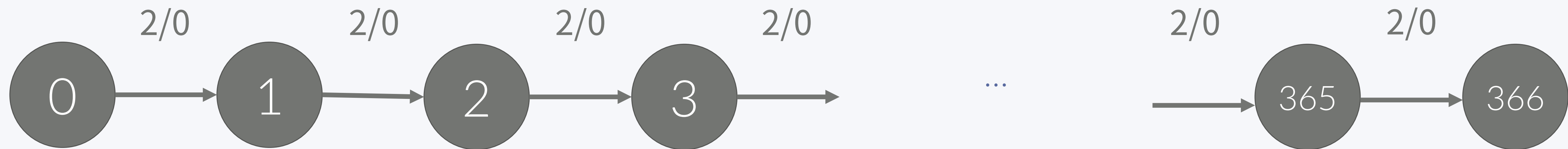
<https://www.acmicpc.net/problem/3938>

- 방 2개
- 두 방은 똑같이 생겨서 차이가 없다.
- 각 방에서 하루에 콘서트 1개만 열 수 있다.
- 예약은 $[i, j]$ w 원과 같은 형식
- i 일 ~ j 일 까지 총 w 원에 예약하겠다.
- 예약은 일부만 받을 수 없다. 받거나, 거절하거나
- 기간동안 같은 방을 사용해야 한다.
- 최대 이익 구하기

Concert Hall Scheduling

49

<https://www.acmicpc.net/problem/3938>

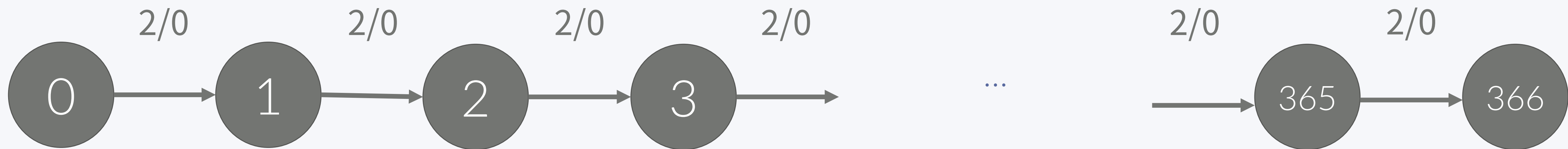


Concert Hall Scheduling

50

<https://www.acmicpc.net/problem/3938>

- 예약: $i \rightarrow j$ 일까지 w 원
- $i \rightarrow j$ 가 아니고 $i \rightarrow j+1$ 을 cap 1, cost $-w$ 로 연결해야 한다.
- 왜 $j+1$ 이냐면, 한 방에서 하루에 공연을 1번만 할 수 있기 때문

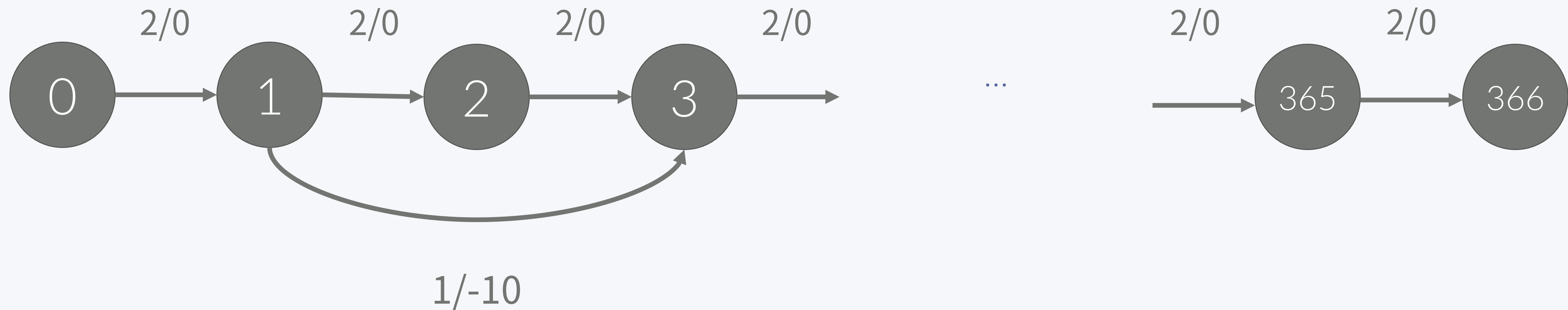


Concert Hall Scheduling

51

<https://www.acmicpc.net/problem/3938>

- 1 -> 2, 10원



Concert Hall Scheduling

52

<https://www.acmicpc.net/problem/3938>

- 소스: <http://boj.kr/c5dd8b219d7d409da109922ed549ae2a>

Crazy Bits

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 12비트 수를 저장하는 레지스터가 N개 있다.
- `swap(i,j,d)`
- i번 레지스터의 j번째 비트와 d방향에 있는 비트를 교환
- 0: up, 1: right, 2: down, 3: left
- `swap(2,3,1)`
 - 2번 레지스터의 3번과 4번 비트 swap
- `swap(6,4,2)`
 - 6번 레지스터의 4번 비트와 7번 레지스터의 4번 비트 swap

Crazy Bits

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 현재 저장되어있는 수와
- 저장되어야할 수가 주어졌을 때
- swap 호출의 최소값

Crazy Bits

55

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 이 문제는 책 배송문제로 변형해서 풀 수 있다.
- 3비트 컴퓨터라고 가정
- $[2, 3] \Rightarrow [6, 2]$
- 010 110
- 011 010

Crazy Bits

56

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 010 110
- 011 010
- 양쪽에서의 1의 위치가 중요하다.
- 010 110
- 011 010
- 010 120
- 023 030
- 비트를 바꾸는 것이 아니고, 몇 번째 1인지를 표시

Crazy Bits

57

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

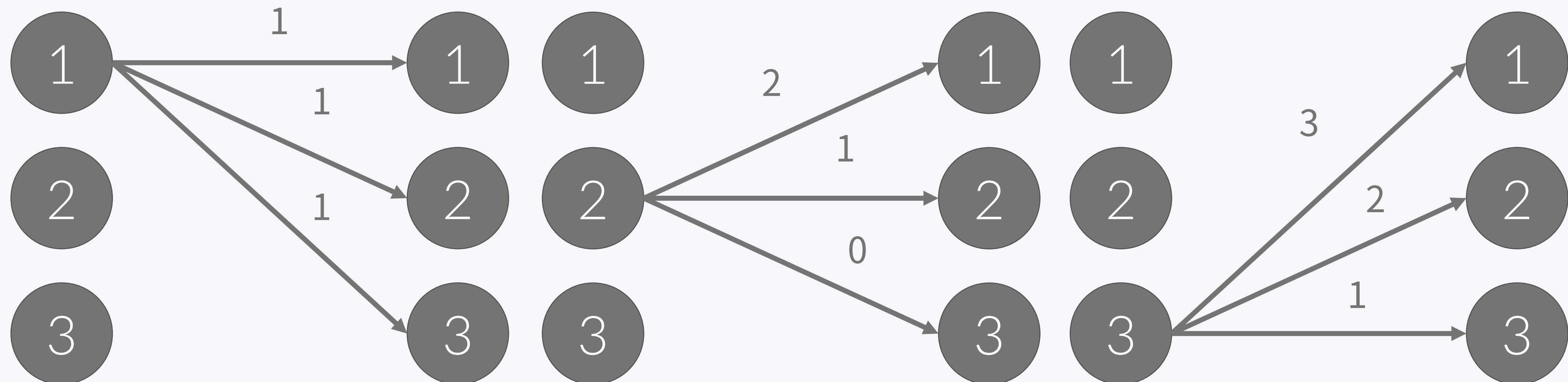
- 010 120
- 023 030
- 비트를 바꾸는 것이 아니고, 몇 번째 1인지를 표시
- 왼쪽에 있는 1이 한 칸씩 이동해서 오른쪽 위치로 이동하는 문제로 변형할 수 있다.

Crazy Bits

58

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 010 120
- 023 030
- 비트를 바꾸는 것이 아니고, 몇 번째 1인지를 표시
- 왼쪽에 있는 1이 한 칸씩 이동해서 오른쪽 위치로 이동하는 문제로 변형할 수 있다.

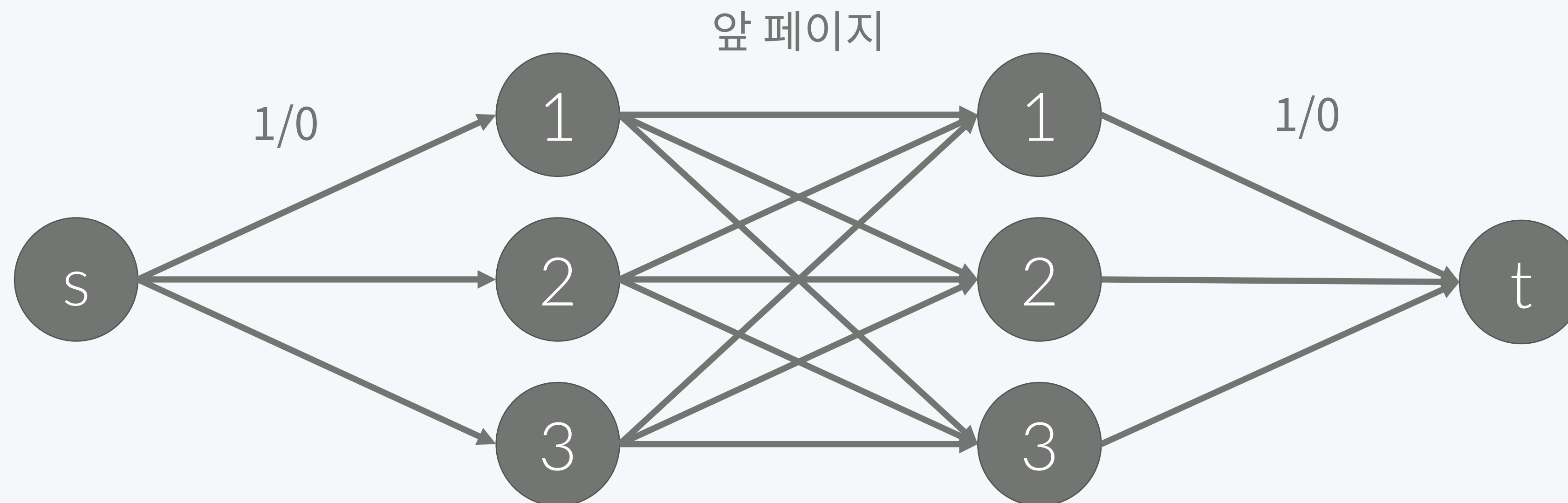


Crazy Bits

59

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- cap/cost



Crazy Bits

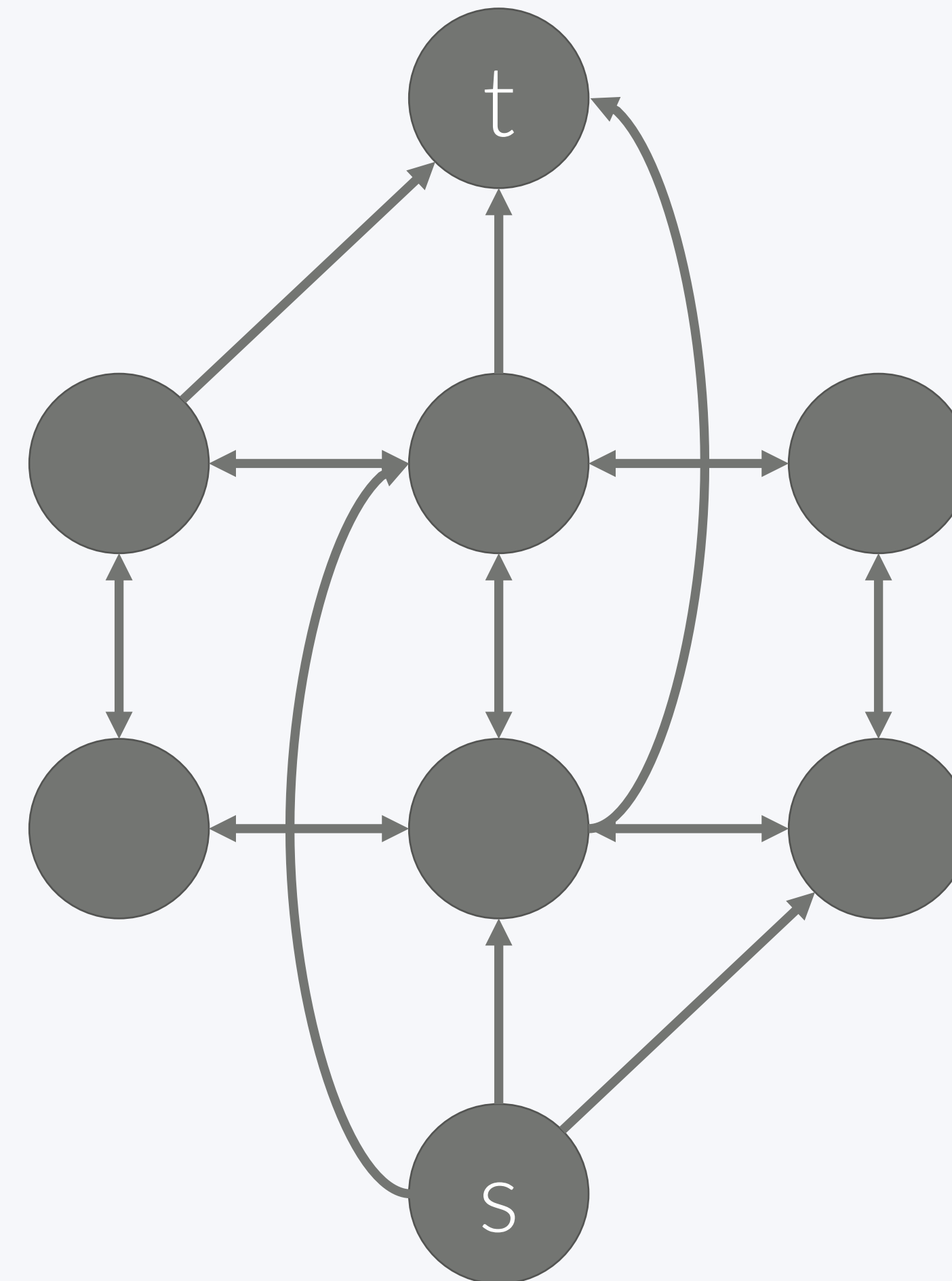
<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 소스: <http://boj.kr/0a3edde1c8e54858afef51bee3dfa860>

Crazy Bits

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- $12 \cdot n$ 을 이용해서 풀 수 있다.
- 인접한 칸은 이동할 수 있기 때문에
- capacity = inf, cost = 1로
- 원래 비트가 1인 곳을 소스와 연결
- 마지막에 비트가 1이어야하는 곳을 싱크와 연결



Crazy Bits

<https://www.acmicpc.net/problem/6267>

- 소스: <http://boj.kr/a6a4bd1d963d4964b8b993702b28d80d>

Job Postings

<https://www.acmicpc.net/problem/7154>

- 총 N 개의 알바 공고
- 총 M 명의 학생
- 각각의 알바가 몇 명의 학생을 뽑는지 주어진다.
- 각 학생은 자기가 하고 싶은 알바를 하고싶은 순서대로 4개 결정
- 학생-알바 사이에는 만족도가 존재함 (학년, 하고싶은 순서에 따라 다름, 문제에 나와있음)
- 만족도가 최대가 되게 학생에게 알바를 시키는 문제

Job Postings

64

<https://www.acmicpc.net/problem/7154>

- 소스: <http://boj.kr/1a1d4ed0ee214bf98dbf40095347a8e5>

제주도 관광

<https://www.acmicpc.net/problem/9413>

- 시작과 도착이 정해져있지 않기 때문에
- 모든 도시를 소스로, 모든 도시를 싱크로
- 방문 도시의 최대 개수이기 때문에
- 정점을 반으로 나누고 cost를 1로
- 간선은 $cap = 1$, $cost = 0$

제주도 관광

<https://www.acmicpc.net/problem/9413>

- 소스: <http://boj.kr/68b244bc67ac4656987003a08ff6cab2>

칙칙폭폭

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

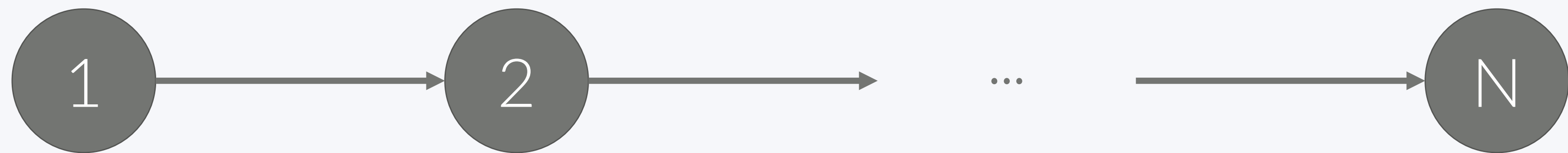
- 도시 1 -> 도시 2 -> ... -> 도시 N 기차가 있다
- 최대 P명이 탈 수 있다.
- $i < j$ 인 (i, j) 쌍에 대해서
- $i \rightarrow j$ 로 가려고 하는 사람의 수 $A[i][j]$ 와
- 그 때 1인당 기차 요금 $C[i][j]$ 가 주어진다.
- 기차가 낼 수 있는 최대 수익 구하기

칙칙폭폭

68

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭



칙칙폭폭

69

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭



칙칙폭폭

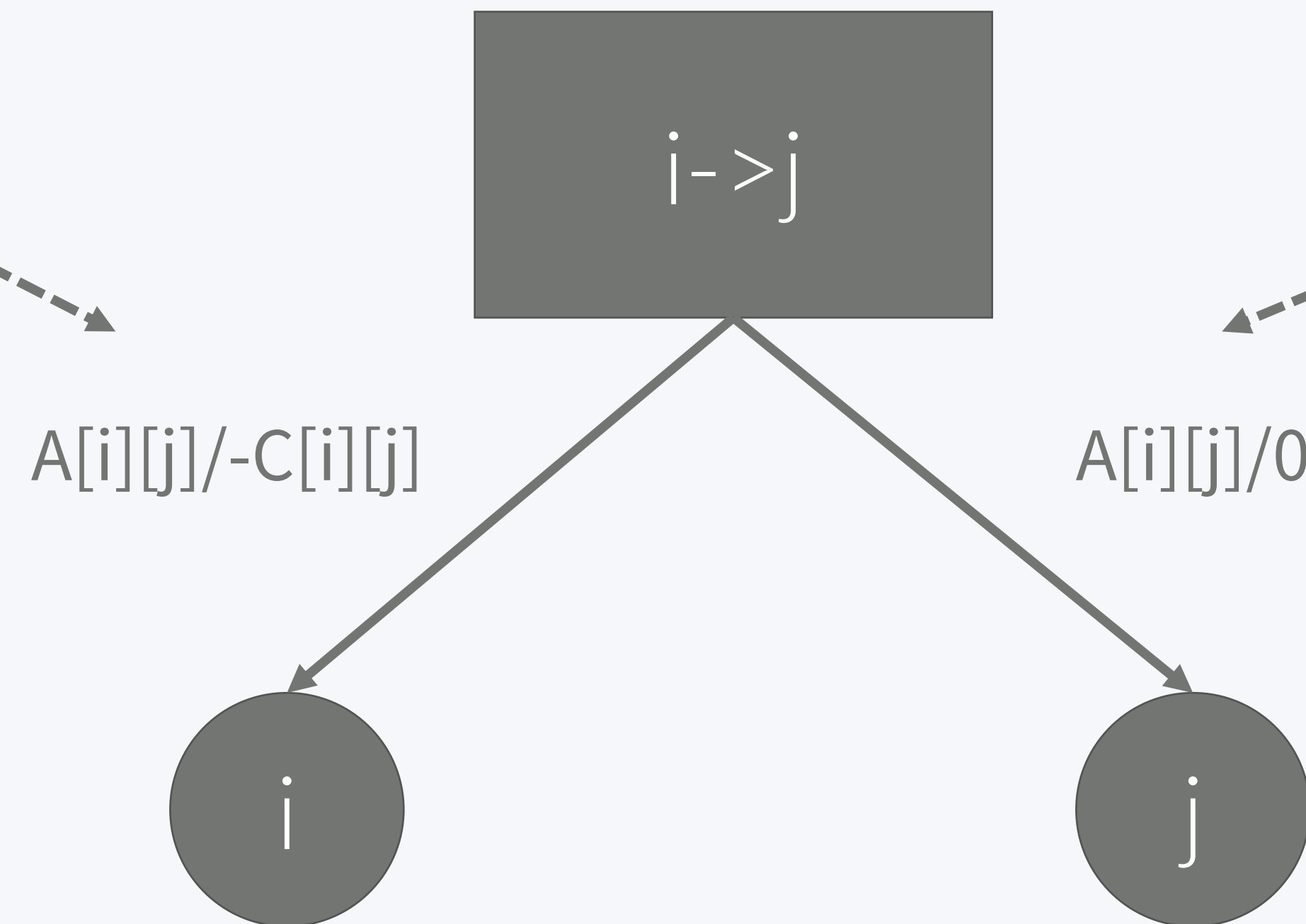
70

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭

탈 수 있는 사람

탈 수 없는 사람

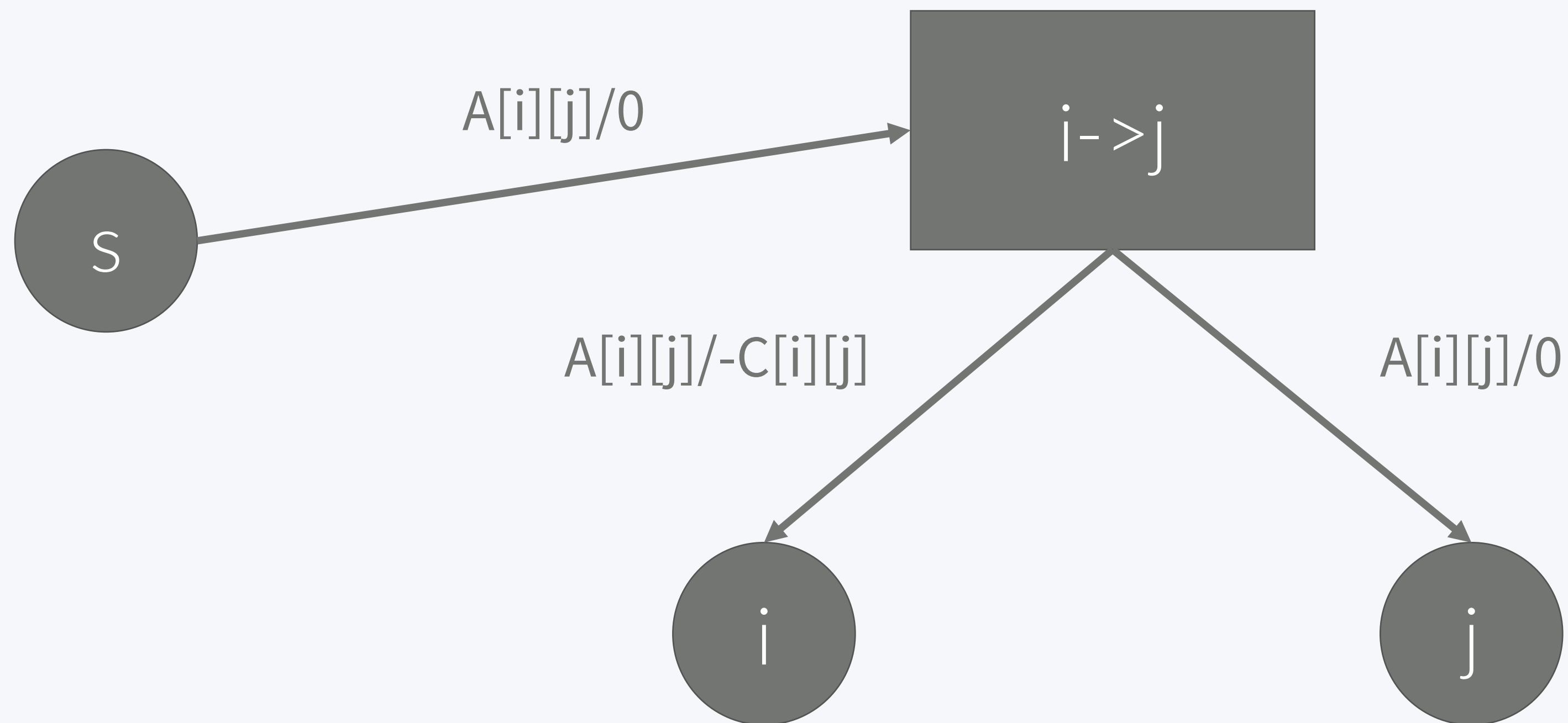


칙칙폭폭

71

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭

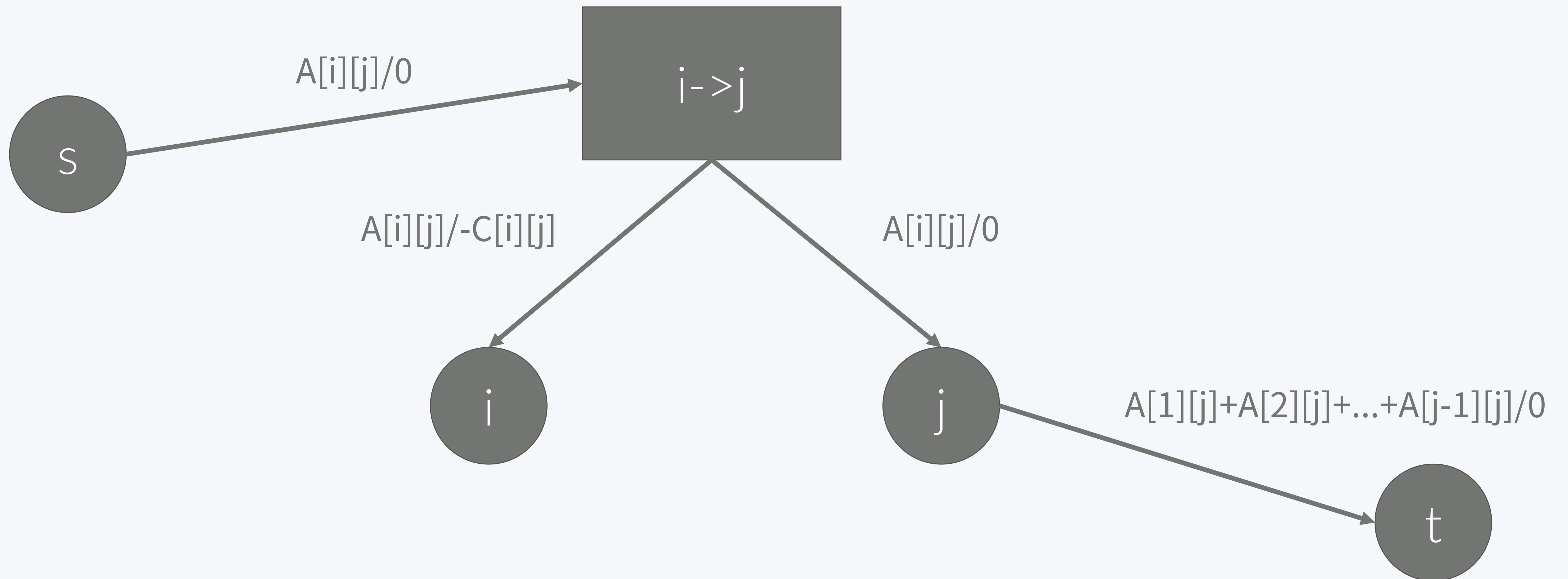


칙칙폭폭

72

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭

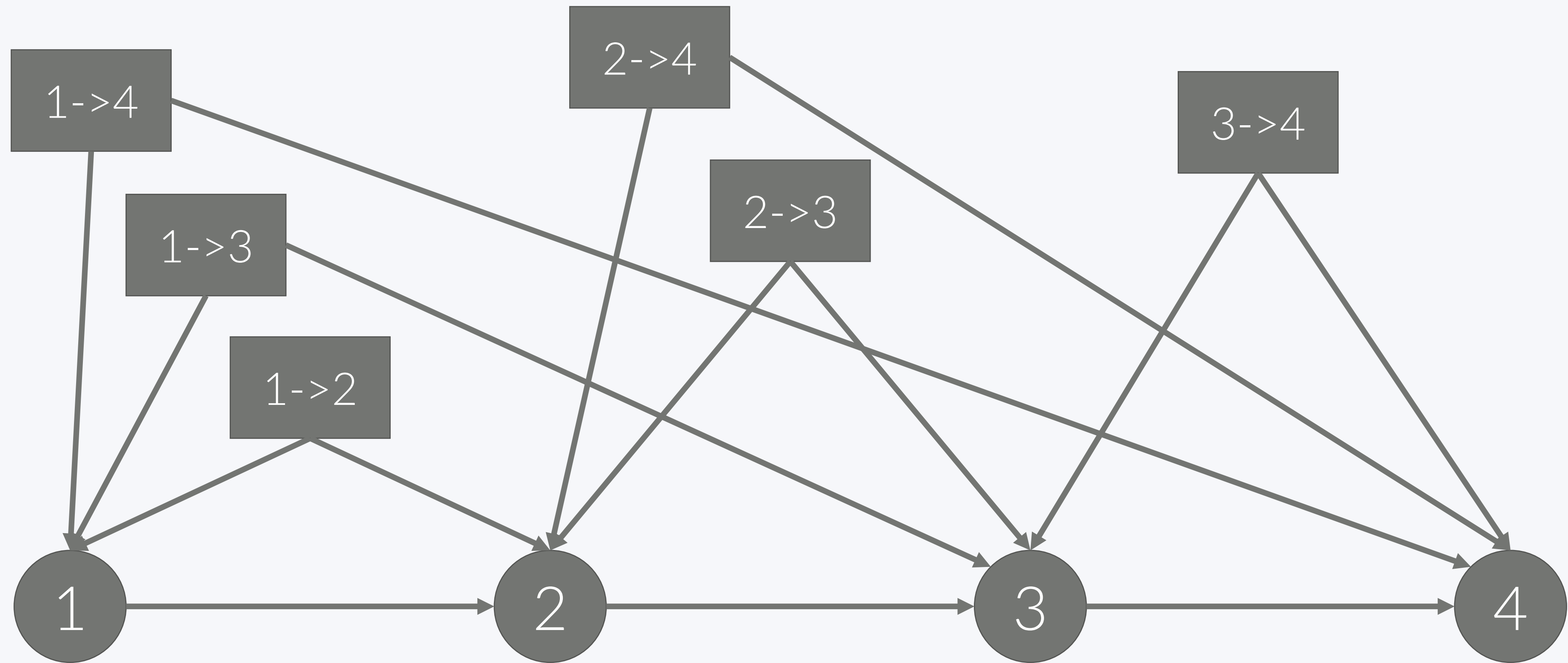


칙칙폭폭

73

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 기차가 칙칙폭폭

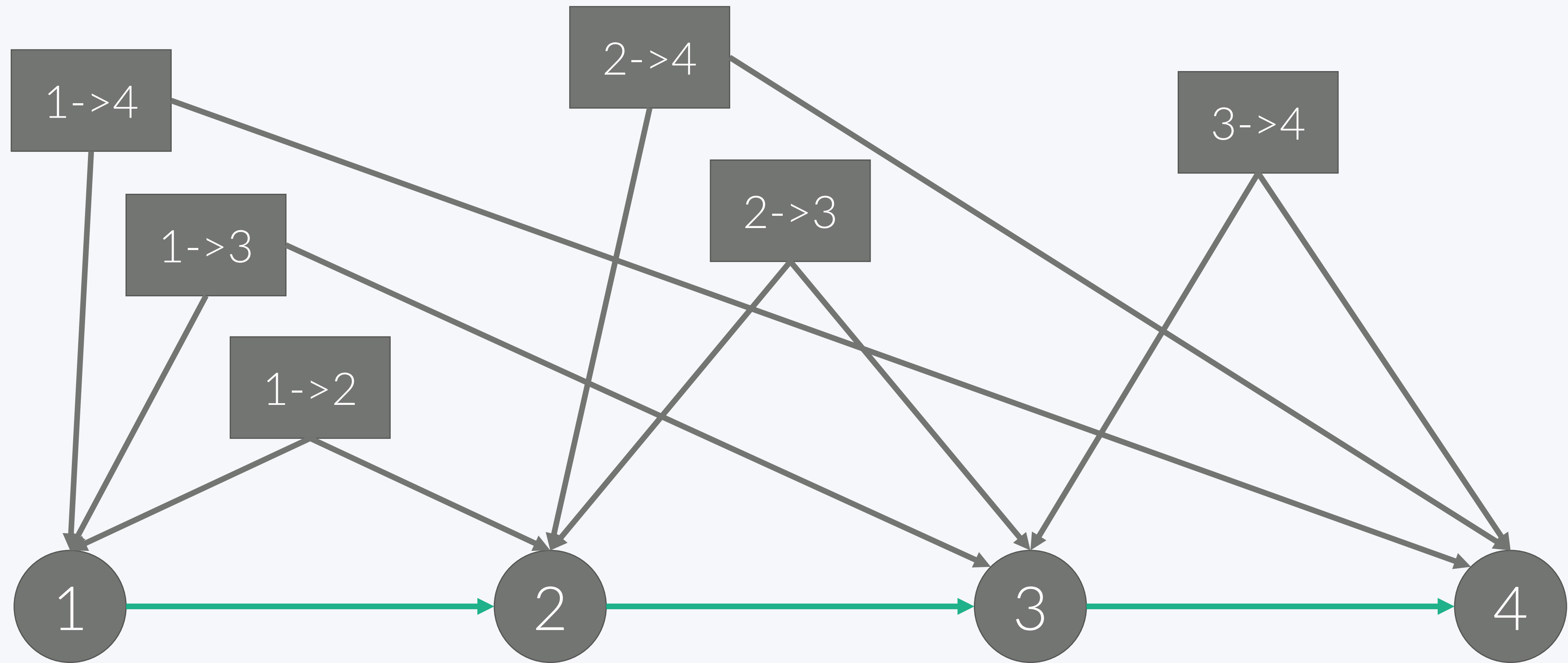


칙칙폭폭

74

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- capacity = P, cost = 0

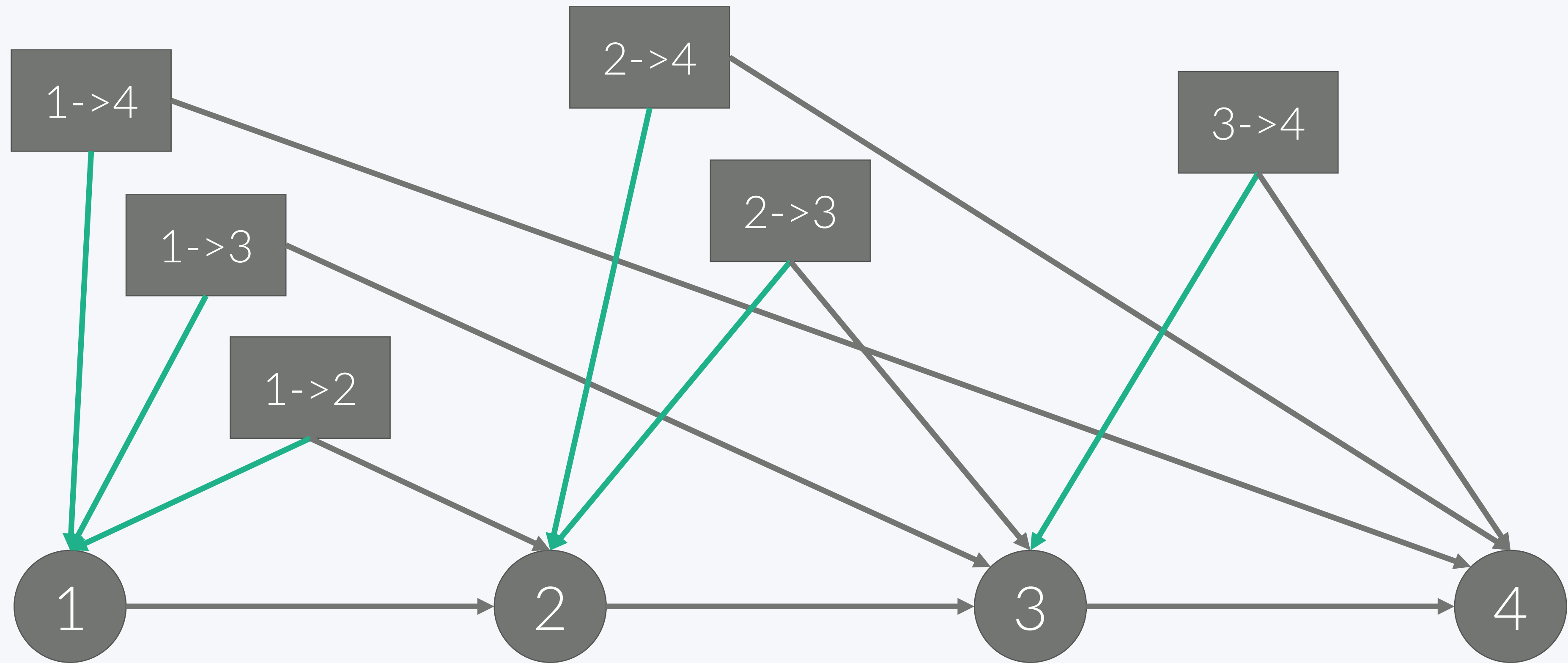


칙칙폭폭

75

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- capacity = $A[i][j]$, cost = $-C[i][j]$

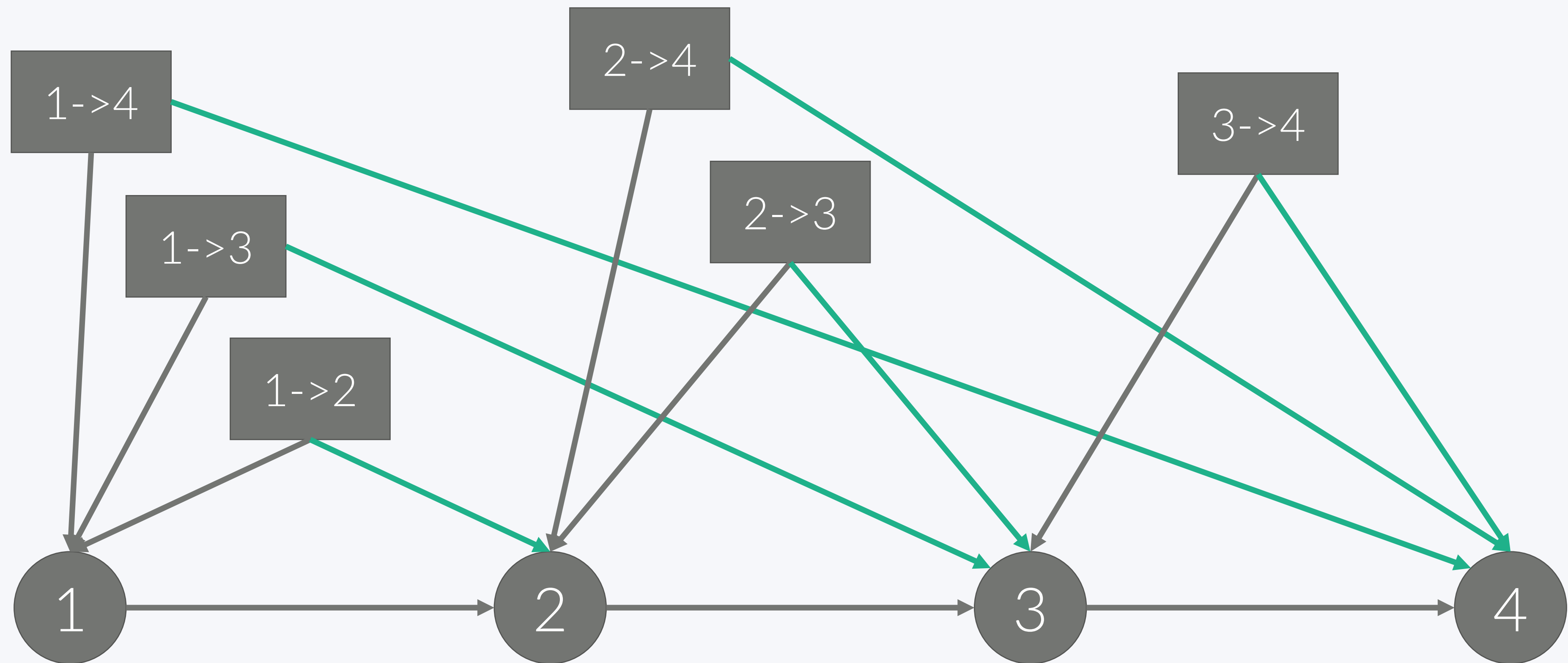


칙칙폭폭

76

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

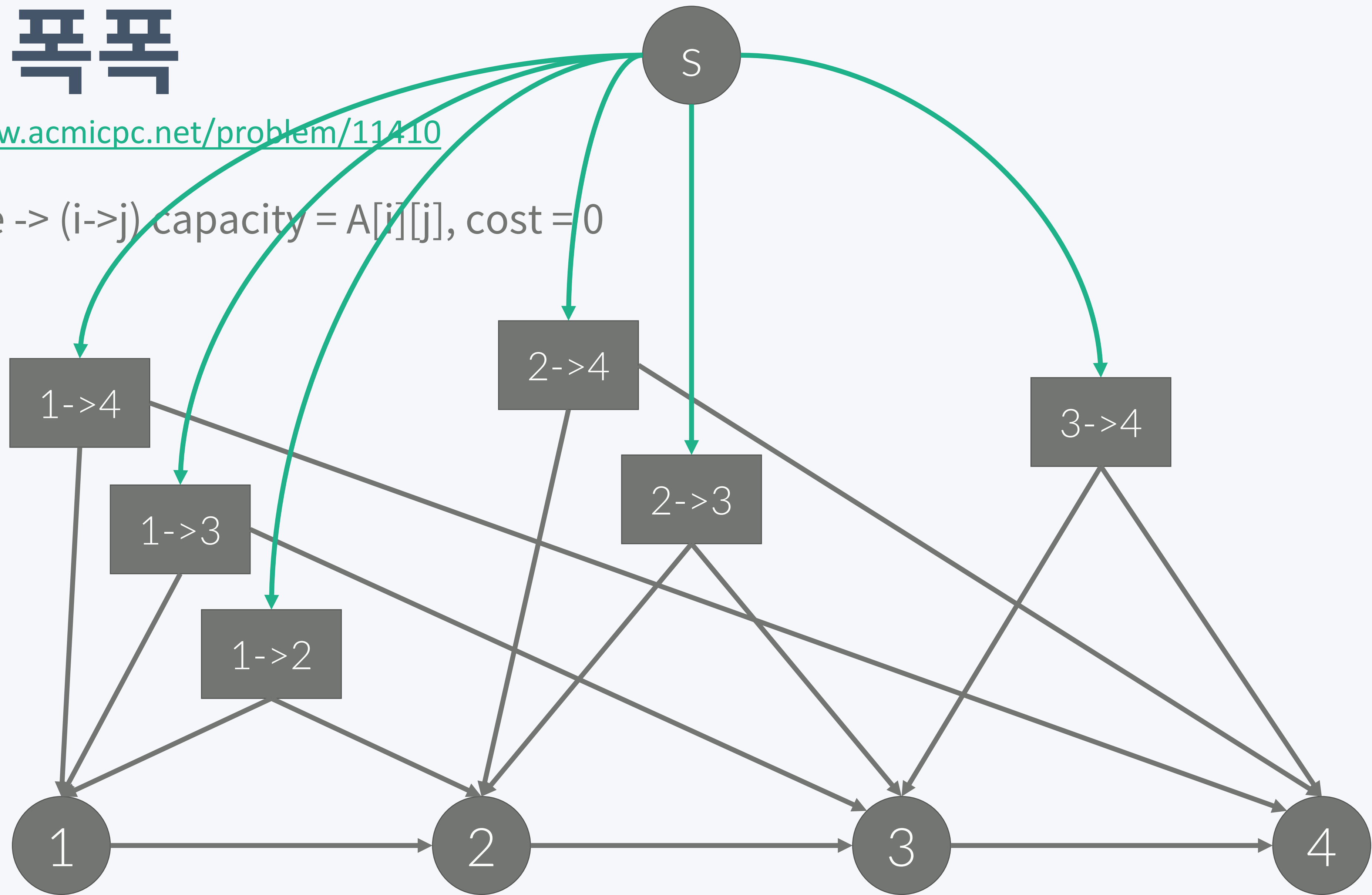
- capacity = $A[i][j]$, cost = 0



칙칙폭폭

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

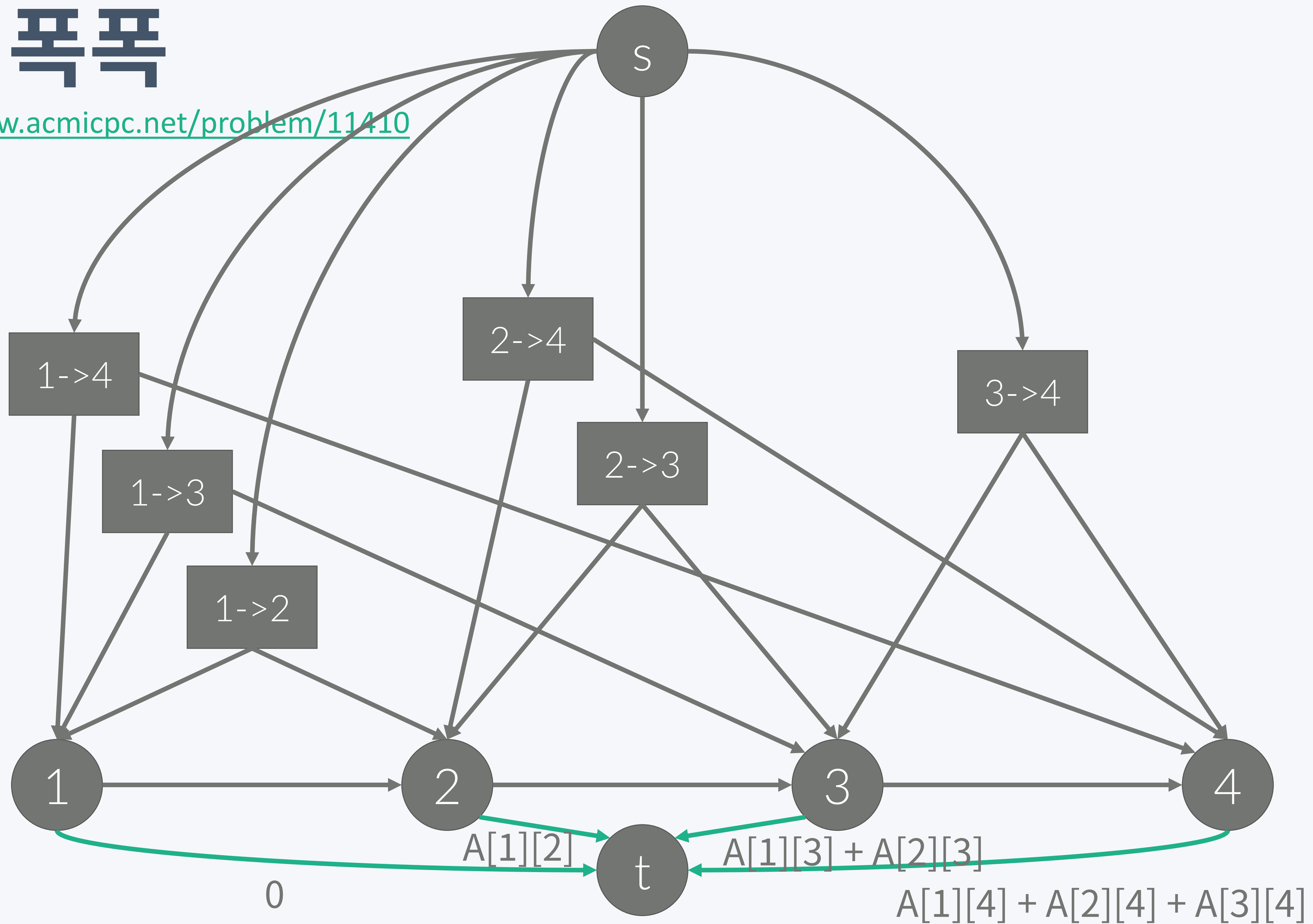
- Source $\rightarrow (i \rightarrow j)$ capacity = $A[i][j]$, cost = 0



칙칙폭폭

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

78



칙칙폭폭

79

<https://www.acmicpc.net/problem/11410>

- 소스: <http://boj.kr/f2fcf14989c147439e0cb601c2705254>

Train Tickets

<https://www.acmicpc.net/problem/11122>

- 총 M명을 태울 수 있는 기차가
- 도시 1에서 출발해서 2, 3, ..., N-1을 거쳐서 N에 도착해야 한다.
- $\text{Cost}[i][j] = i \rightarrow j$ 로 가는 티켓 비용
- $\text{Demand}[i][j] = i \rightarrow j$ 로 가고 싶어하는 사람의 수
- $\text{Office}[i][j] = i \rightarrow j$ 로 가려고 하는 공무원의 수
- 최대 이익을 구하는 문제

Train Tickets

<https://www.acmicpc.net/problem/11122>

- 절대로 M명을 넘어서 기차에 태울 수 는 없다.
- 항상 공무원은 공짜로 태워야 하고, 모두 태워야 한다.
- $i \rightarrow j$ 로 Office[i][j]명이 가고 싶어하면, 꼭 태워줘야한다는 얘기
- 승객은 중간에 내릴 수 없다.
- 공무원 + 승객이 M을 넘을 수 없다.

Train Tickets

<https://www.acmicpc.net/problem/11122>

- 칙칙폭폭과 같은 문제이지만
- 역 $i \rightarrow$ 역 $i+1$ 로 가는 edge의 capacity를
- $P -$ 역 $i+1$ 에 도착해야 하는 공무원의 수로 바꿔서 풀 수 있다.

Train Tickets

<https://www.acmicpc.net/problem/11122>

- 소스: <http://boj.kr/28807d1ae63d4e13a5a6a229b263edc4>

Catering

<https://www.acmicpc.net/problem/10786>

- 케이터링 업체에 K개 팀이 있다.
 - 예약이 N개가 있다.
 - 예약을 모두 처리하기 위한 최소 비용 구하기
-
- 입력으로 주어지는것: $A[i][j]$
 - i 번 위치 \rightarrow j 번 위치로 가는 비용 ($i < j$)
-
- 회사: 1번 위치
 - $2 \sim N+1$: 예약한 곳

Catering

85

<https://www.acmicpc.net/problem/10786>

- 3 2
- 40 30 40
- 50 10
- 50
- 회사: 1, 예약: 2, 3, 4
- 1->2, 1->3, 2->4
- $40+30+10 = 80$

Catering

86

<https://www.acmicpc.net/problem/10786>

- 3 2
- 10 10 10
- 20 21
- 21
- 회사: 1, 예약: 2, 3, 4
- 1->2, 2->3, 1->4
- $10+20+10 = 40$

Catering

87

<https://www.acmicpc.net/problem/10786>

- 소스: <http://boj.kr/cd630cfcabd84d27b896e9f693aca841>