Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Университет ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Дополнительные главы физики

Задача от лектора № 2

Моделирование сферы Блоха

Выполнили студенты группы M32071:

Хапчаев Тимур Русланович

Алейников Иван Витальевич

Проверила:

Ефремова Екатерина Александровна

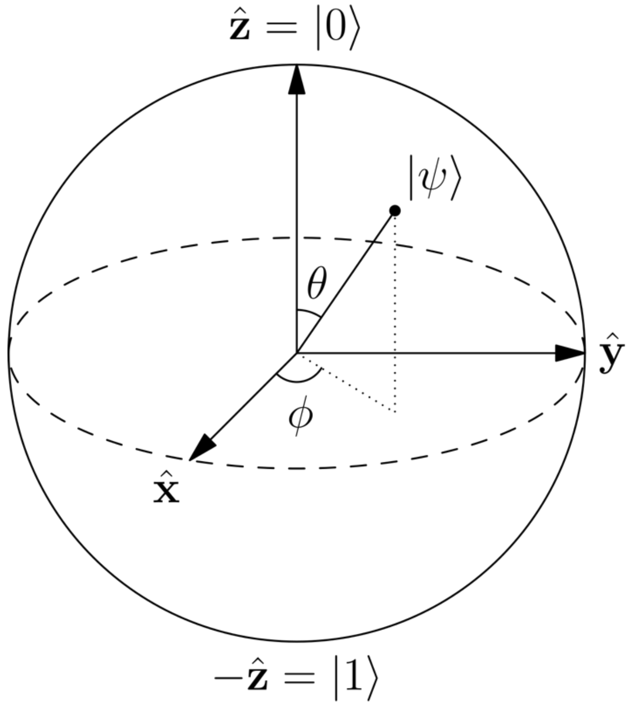
Санкт-Петербург

2023

Задание:

Пользователь задаёт начальное положение на сфере блоха (углы θ и φ), ось вокруг которой будет происходить вращение единичным вектором направления $\vec{n}$ и угол поворота вокруг этой оси α. Программа должна визуализировать начальное положение, заданное пользователем, ось и движение конца вектора состояния по поверхности сферы Блоха и его конечное состояние на сфере Блоха, с указанием вектора состояния.

Решение:



Волновая функция $|\psi >= c_0|0 > + c_1|1 >$, $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$, $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$, описывающая состояние кубита, может быть представлена как суперпозиция двух его базовых состояний $|0 >= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ и $|1 >= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Исходное состояние квантовой системы, состоящей из одного кубита, может быть эквивалентным образом описано с помощью двух вещественных параметров – углов θ и ϕ:

$$|\psi> = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0> + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1> = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Операторы, используемые для поворота сферы Блоха на углы $\theta, -\theta$ вокруг оси y и на углы $\phi, -\phi, \alpha$ вокруг оси z:

$$r_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad r_z(\phi) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\phi}{2}} \end{bmatrix};$$

$$r_y(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad r_z(-\phi) = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{bmatrix};$$

$$r_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix};$$

1. В момент запуска программы кубит находится в состоянии $|0>= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
2. Вектор начального состояния кубита (состояния, введённого пользователем) получается из состояния $|0>$ путём последовательного применения операторов $r_y(\theta)$ и $r_z(\phi)$:

   $$|\psi>= r_z(\phi)\big(r_y(\theta)\big|0>\big),$$

   где $|\psi>$ – начальное состояние, задаваемое пользователем, а $|0>$ – состояние $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Выполняется проверка длины вектора $\vec{n}$, введённого пользователем, если данная величина не равна 1, то программа завершается аварийно.
4. Выполняется алгоритм вращения вектора состояния кубита вокруг оси, задаваемой вектором единичной длины $\vec{n}$ на угол α.

Алгоритм вращения вектора состояния кубита вокруг оси, задаваемой вектором единичной длины $\vec{n}$ на угол α выглядит следующим образом:

1) С помощью функции `cartesian_to_polar` определяются сферические координаты вектора, введённого пользователем (далее – углы $\theta_{\vec{n}}$ и $\phi_{\vec{n}}$);

2) Вектор $\vec{n}$ сопоставляется с осью z с помощью последовательного выполнения операторов $r_z(-\phi_{\vec{n}})$ и $r_y(-\theta_{\vec{n}})$;

3) Выполняется вращение вектора состояния кубита на угол α вокруг оси z (сопоставленной с вектором единичной длины $\vec{n}$: $r_z(\alpha)$;

4) Последовательно выполняются операторы $r_y(\theta_{\vec{n}})$ и $r_z(\phi_{\vec{n}})$, приводящие сферу Блоха в изначальное состояние, только с повёрнутым вектором состояния кубита относительно вектора $\vec{n}$ на угол α.

Таким образом, последовательность применяемых операторов к начальному вектору состояния кубита можно определить следующим образом:

$$\left|\psi' >= r_z(\phi_{\vec{n}}) r_y(\theta_{\vec{n}}) r_z(\alpha) r_y(-\theta_{\vec{n}}) r_z(-\phi_{\vec{n}})\right|\psi >,$$

где $|\psi' >$ – конечное состояние кубита, а $|\psi >$ – начальное состояние кубита.

Пример использования программы:

Входные параметры: $\theta = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{2}, \vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \alpha = \pi.$

Вывод программы, где чёрная стрелка – это ось, задаваемая вектором единичной длины $\vec{n}$, зелёная стрелка – начальное положение, задаваемое пользователем, синяя стрелка – конечное положение после поворота):