第一讲

展开定理　　　　具体型计算

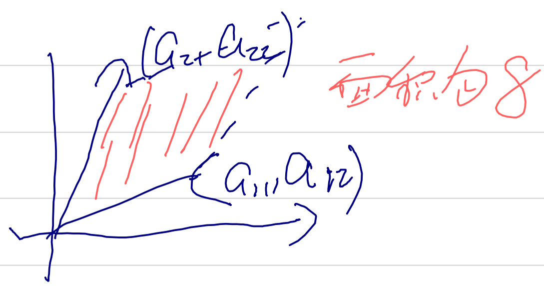
行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$ n阶行列式

$|-2|_{1\times1}$　一阶行列式

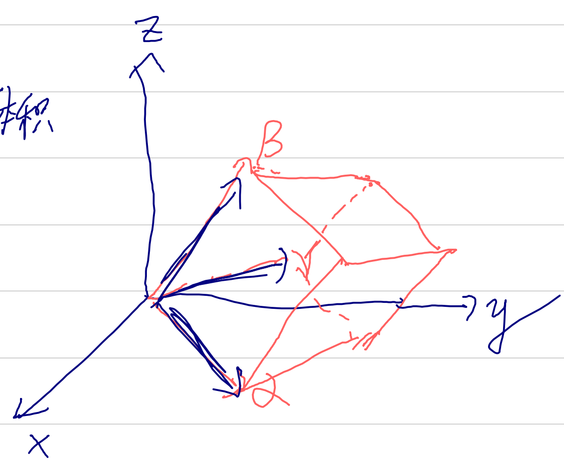
① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$　主对角－次对角

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 = S$ (面积)



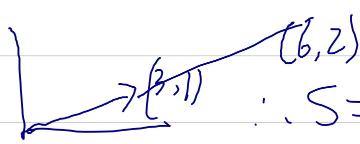
② $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}$ $= V_{体积}$

以 α, β, γ 为棱



$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$



$\therefore S = 0$

当行列式不为0时，称线性无关（有S）

当为0时，线性相关

④ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & & \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} = V$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ 只有面积，此时 $V=0$

展开定理

1 余子式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ & & a_{ij} & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} \to (n-1)(n-1) \text{ 叫 } a_{ij} \text{ 的余子式}$$

2、代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

A_{ij}：代数余子式

3、按某一行(列)展开

$$|A| = \left\{ a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \right.$$

元素与代数余子式相乘，再相加

例：$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$

$= 34\times 8 + 1\times(-24) + 34\times 8 = 520$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1\times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8$ $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1\times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -1\times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24$

例：$\begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix} = \underset{0}{a_{21}\cancel{A_{21}}} + a_{22}A_{22} + \underset{0}{a_{23}\cancel{A_{23}}}$

$= 有 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 我 & 生 \\ 你 & 幸 \end{vmatrix}$

$=$ 我有幸一生有你

展开定理：

①用尽一切办法 —7大性质

②让某行(列)出现尽可能多的0元素

1、行列互换，其值不变，即$|A| = |A^T|$、e.g $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 11 & 0 & 5 \end{vmatrix}^T \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

2、行列式中，某行(列)全为0，则行列式为0

3、行列式某行(列)元素有公因子$k(k\neq 0)$，则k可提到行列式外面（倍乘性质）

$k(i)$ 第i行乘k，$k[j]$ 第j列乘k （只乘一行） $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ - & & - \end{vmatrix} \Rightarrow k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$

4、行列式中某行(列)元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和（单行可拆）其余一样 $\begin{vmatrix} a & \cdots \\ a+b & \cdots \\ - & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \cdots \\ a & \cdots \\ - & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \cdots & a \\ b & \cdots & b \\ a & \cdots & a \end{vmatrix}$

5、行列式中两行(列)互换，行列式的值反号 e.g. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$（换一次多个负号）

6、行列式中两行(列)元素相等(或相应成比例)，则行列式为0
(与2一样是线性相关)

7、倍加性质：行列式中某行(列)的k倍加到另一行(列)，行列式值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix}$$

例 1.1

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix}$$

ANS: 用同一展开值

hint: 搞为 0

① − ②（第二行的 −1 倍加到第一行）

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} \xrightarrow[{[4]-2[1]}]{\substack{[2]+[1] \\ [3]-[1]}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 14 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$([i]+k[j])$

只剩 $a_{11}A_{11}$

$= 1 \times (-1)^{1+1} M_{11}$

①−5③

②−2③

$$\begin{vmatrix} -8 & -33 & 0 \\ 2 & -17 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 33 \\ -2 & 17 \end{vmatrix}$$

$= 136 + 66 = 202$

例 1.7

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & \vdots & a & & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

每行只有一个 a

（行和相等）每一行元素和都一样

每行元素之和均为 $a+(n-1)b$

$[1] + \sum_{i=2}^{n} [i]$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} [a+(n-1)b]$$

$= 1 \times (a-b)(a-b)\cdots(a-b) \times [a+(n-1)b]$

$= \square \times (a-b)^{n-1}$

$(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$

(1) 当 $a=0, b=1$ 时

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 1 & & & \ddots & \\ 1 & & & & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

行和相等

$a=\lambda-a$ 时

$$\begin{vmatrix} \lambda-a & b & b & b & \cdots & b \\ b & \lambda-a & & & & \\ b & & \lambda-a & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ b & & & & & \lambda-a \end{vmatrix}$$

四、四个重要行列式

1、上下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2、副对角线行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{2,n-1} & \\ a_{n1} & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$ （只多个 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

3、两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} A_{m\times m} & 0 \\ 0 & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{mm} \\ B_{nn} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

4、范德蒙行列式

有1，代为0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

e.g.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

x_n^{n-1}

$\prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$

找大的列，减去所有小的列的元素，再连乘

若4阶 $=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$

第二讲：

①抽象型计算 e.g. $\underset{\uparrow\ \text{抽象}}{\alpha} = \underset{\uparrow\ \text{具体}}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}$

例2.1、 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为4维列向量，且

抽象

$|\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3| = n$

$|\alpha_1,\beta+\gamma,\alpha_2,\alpha_3| = m$

则 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta| =$ ______ ?

可拆性

换2次，$(-1)^2$

$$m = |\alpha_1,\beta+\gamma,\alpha_2,\alpha_3| = |\alpha_1,\beta,\alpha_2,\alpha_3| + |\alpha_1,\gamma,\alpha_2,\alpha_3|$$

互换性质

$$= |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| - |\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|$$

$$= |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| - n$$

$$\therefore |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta| = m+n$$

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,3\beta| = 3m+3n$$

② 克拉默法则：若n个方程 n个未知量 构成非齐次方程组
(Cramer)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e.g. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ 系数行列式 $= -3 \neq 0$

若系数行列式不为0，则方程组有唯一解 且

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ i = 1,2,\cdots,n$$

$x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-3}$

把哪列换为 b_1, b_2

$x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-3}$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=0 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

第一个解改第一列

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{9}{8}$$

$$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-8}=-\frac{3}{4}$$

例 2.10：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同实数：

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1 \\ \vdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1 \end{cases}$$

求解

范德蒙二阶第2列

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq 0$$

因 $a_1,\cdots,a_n$ 互不相同，$|A|\neq 0$，∴有唯一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{|A|}{|A|}=1$$

因为第一列都为1

$$\because \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_2=\frac{|A_2|}{|A|}$ 把第二列换为1 $=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}}{|A|}$ ∵任意2列成比例，行列式=0

$=0$

$\therefore x_3, x_4 \cdots x_n$ 都是换为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_j=0$

$\therefore$ ANS：$[1,0,\cdots,0]^T$

第3讲

矩阵的基本概念与运算：重点：

metrics $\begin{pmatrix} 98 & 2 \\ 2 & 96 \end{pmatrix}$ 一系统性信息, system information

矩阵：$k\begin{pmatrix} 98 & 2 \\ 2 & 96 \end{pmatrix}$ 每个都乘k　　行列式 $k\begin{vmatrix} 98 & 4 \\ 2 & 96 \end{vmatrix}$ ⇒ 面积　只乘k

如 $A_{3\times3} \Rightarrow |2A| = 2^3|A| = 80$　行列式

$|A| = 10$,

$$2\cdot\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot & 2\cdot & 2\cdot \\ 2\cdot & 2\cdot & 2\cdot \\ 2\cdot & 2\cdot & 2\cdot \end{pmatrix} \Rightarrow 2^3\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} 98 & 4 \\ 2 & 96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 97 & 5 \\ 3 & 95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98+97 & 4+5 \\ 2+3 & 96+95 \end{pmatrix}$$

重点：①乘法 AB

矩阵乘法：A：$m\times s$ 矩阵　　AB是 $m\times n$

B：$s\times n$ 矩阵（A的列 = B的行才可乘）

$$A_{m\times s} \times B_{s\times n} = C_{m\times n}$$

e.g. $(a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{is})$ s列 α^T　$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$ s行 β $= \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_{m\times n}$

$\alpha = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{is} \end{pmatrix}$　$\beta = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

都是"+"号

例3.2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ $1-4-3=-6$

$$A^2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 12 & 24 & -12 \\ -18 & -36 & 18 \end{pmatrix}$$

② A^n 第一二三行成比例

$$A=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}(1,2,-1)$，记 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A=\alpha\beta^T$

$$A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=-6\alpha\beta^T=-6A$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{1\times3}}_{\text{是个数}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1} = (-6)_{1\times1} = -6$$

$A^2=(-6)A$

$A^3=A^2\cdot A=-6A^2=(-6)^2A$

$\Rightarrow A^n=(-6)^{n-1}A$

$A^{100}=(-6)^{99}A$

重点2：求逆

$a\cdot b=1 \Rightarrow a=\frac{1}{b}_{\neq 0}, b=\frac{1}{a}_{\neq 0}$; $a=b^{-1}, b=a^{-1}$

$a^{-1}=b, b^{-1}=a$

$AB=E$ 单位阵 $\Rightarrow A^{-1}=B, B^{-1}=A$

$$\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{2\times2} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3} \qquad \begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$$

注：① 求逆 必须是 $n\times n$ 方阵

② $|A|\neq 0$ 行列式不为0

$\Leftrightarrow$ 可逆 组成这个矩阵的向量 线性不相关

求逆矩阵

方法一：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}$

用伴随矩阵

求逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\Rightarrow A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$ A的伴随阵

求A的代数余子式

竖着写

$A\cdot A^{*}$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\\A_{13}&A_{23}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|A|\\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&3\\7&5&1\end{vmatrix} \Rightarrow -1\begin{vmatrix}1&2\\5&1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix}1&2\\7&1\end{vmatrix}+2\times(-1)\times\begin{vmatrix}1&1\\7&5\end{vmatrix}$$

$=9+(-13)+4=0$

$\Rightarrow$ ∴用自己元素×别的行的代数余子式均为0

$$a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=\begin{vmatrix} * \\ a_{i1}\ \cdots\ a_{in} \\ * \end{vmatrix}$$ 余

改 a_{ij} 不影响 A_{ij}

e.g $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

无论多少，A_{ij} 都一样

☆ $k_1A_{i1}+k_2A_{i2}+\cdots+k_nA_{in}=\begin{vmatrix} * \\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_n \\ * \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot A_{11}+1\cdot A_{12}+2\cdot A_{13}$$

用第2行 $2A_{11}+1\cdot A_{12}+3A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$

$1\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+2A_{23}$

第2行余子式，删第一第3行，改第2行：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0$

$1\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}-3A_{23}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

① 见到 $A_{i1}\cdots A_{in}\Rightarrow$ 写 $\begin{vmatrix} * \\ \cdots \\ * \end{vmatrix}$ 除第i行

② $k_1\cdots k_n$ 填在第i行 $\Rightarrow$ 得新行列式

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & & \\ A_{12} & & \\ A_{13} & & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

$$= |A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A\cdot A^* = |A|E = A^*A}$$

若 $|A| \neq 0$

$$\Rightarrow A\cdot \frac{1}{|A|}A^* = E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

先求行列式

①先求 $|A| \neq 0$

②再求 $A^* \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

例3.17 已知 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 写出 A 可逆的一个充要条件，当 A 可逆时，求 A^{-1}

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$， $ad-bc \neq 0$ 可逆

① $|A| = ad-bc \neq 0$

②

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

竖着写：$(-1)^{2+1} = -1$

$$\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

口诀：主对角线元素对调
副————变号

$\frac{1}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}$

$=\frac{1}{1\times2-1\times3}=-1$

例3.18：求 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 （老实算）

① $|A|=2\neq0$，再求9个 A_{ij} ⇒竖着写

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

方法2：初等行变换求逆

$(A|E)\longrightarrow(E|A^{-1})$ 若 $|A|\neq0$ (⇔A可逆) 则A一定可通过若干次行变换变成E

互换
倍乘
倍加

e.g $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{互换}\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}$

倍加 ①×②+②

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

而 $\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}$，但矩阵无所谓

倍乘

$\begin{pmatrix}2&4\\2&5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$$

$P_s\cdots P_2P_1A=E$ $\quad P_s\cdots P_2P_1A\cdot A^{-1}=EA^{-1}$ ⇒ $P_s\cdots P_2P_1E=A^{-1}$

$(A\,\vdots\,E)\Rightarrow(E\,\vdots\,A^{-1})$

例3.14：$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$(A\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

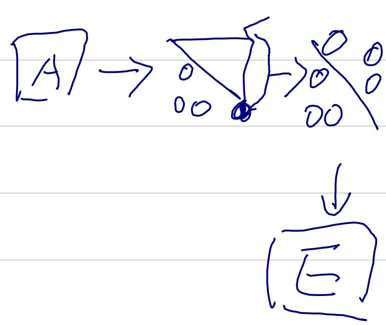
$$\xrightarrow[\text{两行互换}]{①\leftrightarrow②}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③+①}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②+③]{①-2③}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&2&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{2}②}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&0&-1&-2\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-②}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$



第四讲：伴随矩阵，初等矩阵与矩阵方程 ☆

含有未知矩阵的等式

① $AX=B,\ |A|\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}B$

$ax=b,\ a\neq 0 \Rightarrow x=\frac{b}{a}=a^{-1}b$

$A=0 \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} |A|=0$

$A\neq 0 \underset{\Leftarrow}{\nRightarrow} |A|\neq 0$

② $XA=B,\ |A|\neq 0 \Rightarrow X=BA^{-1}$

③ $AXB=C,\ |A|\neq 0,\ |B|\neq 0 \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

P_{63}

例4.12. 伴随阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$

$ABA^{-1}-BA^{-1}=3E$

$\underbrace{(A-E)}_{A}\underbrace{BA^{-1}}_{x}=\underbrace{3E}_{c}$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 是4阶单位矩阵，求 B

解：$(A-E)\frac{1}{3}BA^{-1}=E$

$\Downarrow$

可逆

$(A-E)BA^{-1}=3E$

$B=3(A-E)^{-1}A$

$=3(A-E)^{-1}(A^{-1})^{-1}$

$=3[A^{-1}(A-E)]^{-1}$

$=3(E-A^{-1})^{-1}$

$=3(E-\frac{A^*}{|A|})^{-1}$

$=3(E-\frac{1}{2}A^*)^{-1}$

$=3(\frac{1}{2}(2E-A^*))^{-1}=6(2E-A^*)^{-1}$

$AA^*=|A|E$

$\Downarrow$

$|A||A^*|$

$|\underset{n}{A}\underset{n}{B}|=|\underset{n}{A}||\underset{n}{B}|$

$|kA|=k^n|A|$

$=|A|^nE$

$\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}$，$|A|\neq 0$

※

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\Rightarrow$

$|A^*|=8=|A|^{4-1}=|A|^3$

$|A|=2$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

用 $(A\vdots E)$

$$2E-A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}\times\frac{1}{6},\quad (2E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $6\times(2E-A^*)^{-1}$

$$B=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

第5讲：向量

重点：①线性相关 无关

②内积

正交

线性相关，对 m 个 n 维向量 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ 若存在一组不全为0的数 $k_1k_2\cdots k_m$，使得线性组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则称向量组 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

设 $k_i\neq0$，

$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0 \Rightarrow$ 则 $k_i\alpha_i=-k_1\alpha_1-\cdots-k_m\alpha_m$

若系数不为0，$\alpha_i=-\frac{k_1}{k_i}\alpha_1-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\alpha_m$

多余（可被别的表示）

无关 当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，才有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 成立，线性无关

例5.5. 已知 $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ 线性无关，则下列向量中线性无关的是

法一：定义法

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$$

凑

∴ 不行，系数为1，相关

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$$

不行，相关

法二：

排除：若可逆 ⇔ 线性无关

(D) $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4-\alpha_1)$

$$= \underbrace{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)}_{\text{线性无关}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = 2 \neq 0$$

∴ 总体 $\neq 0$

$$|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4| \neq 0$$

⇔ $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = A$ 可逆

⇔ $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ 线性无关

向量内积：

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)^T \quad \beta = (b_1, b_2 \cdots b_n)^T,$$

则 $\alpha^T\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$

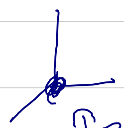
正交：当 $\alpha^T\beta = 0$，称 α, β 为正交向量

模：$\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$

标准正交向量组（两两正交）：$\alpha_i^T \alpha_j \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$，则称 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_i$ 为标准（或单位）正交向量组

$\|a\|=1$时，单位向量

正交矩阵 $\Rightarrow A^TA=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1} \Leftrightarrow$ A的行(列)向量组是(单位)标准正交向量组



只要点不变，旋转都是正交

$\frac{2}{9}+(-\frac{2}{5})+\frac{8}{45}=0$

e.g.

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{2}{3\sqrt5} & \frac13 \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{4}{3\sqrt5} & \frac23 \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt5} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

第一行：$\frac45+\frac{4}{45}+\frac19=\frac{45}{45}=1$

$A^TA=E$　　$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$　　只与自己乘为1

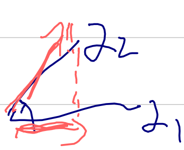
$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$A^T=A^{-1}$

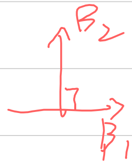
4、施密特标准正交化（正交规范化）

线性无关向量正交化



$\beta_1=\alpha_1$，

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$　投影系数



例5.27

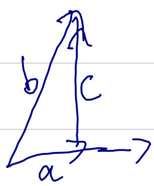
$\alpha_1=(1,1,1)^T$ $\alpha_2=(0,1,1)^T$，将α_1,α_2化成标准向量组

取 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)^T$

$(\alpha_2,\alpha_1)=2$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

舵的模



$a+c=b$
$\therefore b-a=c$

此时β_1与β_2垂直

再单位化：$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

第6讲：线性方程组：重点：①齐次求解

②非齐次求解

③共公体求解

例6.1，求
$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0\end{cases}$$

①写出系数矩阵
$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{pmatrix}$$

②化A为阶梯形（只转行变化）

$$\xrightarrow[④-2①]{②-①\quad ③-4①}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-6&6&15&0\\0&2&-2&10&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-3②\quad ④+②}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&12&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}③]{④-\frac{4}{3}③}\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0 & ①\\ -2x_2+2x_3+2x_4+x_5=0 & ②\\ 3x_4-x_5=0 & ③\end{cases}$$

③在阶梯上任取一列，必线性无关，则剩余位置即为自由变量

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

此时没用第3、4列

则 x_3, x_4 为自由变量

对 ξ_1

由③ $\underset{x_1}{0\times0}+\underset{x_2}{0\times0}+\underset{x_3}{1\times0}+\underset{x_4}{0\times3}+\underset{x_5}{?\times(-1)}=0$

$\Rightarrow ?=0$

取 x_3 x_4

$\xi_1=(-1,1,1,0,0)^T$

$\xi_2=(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3)^T$

$$\boxed{\begin{aligned}\therefore \xi&=k_1\xi_1+k_2\xi_2\\&=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\0\\1\\3\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

再把(,1,0,0)代入②

$0\times0-2\times?+1\times2+0\times2+0\times1=0$

$?=1$

再把(,1,1,0,0)代入①

$1\times?+1\times1+1\times0+0\times(-3)+0\times(-1)=0$

$?=-1$

$\therefore \xi_1=(-1,1,1,0,0)$

对 ξ_2:

由③ $0\times0+1\times3+?\times(-1)=0$

$?=3$

把(0,1,3)代入②

$?\times(-2)+0\times2+1\times2+1\times3=0$

$?=\frac{5}{2}$

把($\frac{5}{2}$,0,1,3)代入①

$?\times1+\frac{5}{2}\times1+0\times0+1\times(-3)+3\times(-1)=0$

$\therefore ?=\frac{7}{2}$

$\therefore \xi_2=(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3)$

例 6.2

$$\begin{cases} \cdots = -1 \\ \cdots = 3 \\ \cdots = 1 \\ \cdots = 7 \end{cases}$$

①写出增广矩阵

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

⋮

② 画阶梯

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ \\ \\ \end{array}$$

③每个台阶任取一项 ∴取 x_1, x_2，则 x_3, x_4 为自由变量

$$\begin{array}{ccccc} & & & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\xi_1 = \left(-\tfrac{3}{7} \quad \tfrac{2}{7} \quad 1 \quad 0\right)$$

$$\xi_2 = \left(-\tfrac{13}{7} \quad \tfrac{4}{7} \quad 0 \quad 1\right)$$

齐次通解

代入②，再代入①

☆ 非齐次通解 = $\boxed{\text{非齐次一个特解}}$ + 齐次通解

令 $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow \xi_{特} = \left(\tfrac{13}{7}, -\tfrac{4}{7}, 0, 0\right)$

$$\therefore \xi = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第七讲

特征值与特征向量

A是n阶矩阵，λ是一个数，若存在n维非0列向量ξ，使得

$$A\xi=\lambda\xi,$$

则称λ是A的特征值

$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq0$ $\Rightarrow \lambda\xi-A\xi=0$，$\xi\neq0$

$(\lambda E-A)\xi=0$，$\xi\neq0$

$(\lambda E-A)X=0$ 有非0解

$$(\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0 \Rightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$$

$\Downarrow \exists x_i\neq0$

$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 相关

(线性无关的话)
∵齐次式结果为0

$\Downarrow$

$|\alpha_1\cdots\alpha_n|=0$ (不可逆)

∴特征方程：$|\lambda E-A|=0$

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2}\cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0$$

例

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$(\lambda E-A)X=0$

$(E-A)X=0$

即
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

初等行变换
$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

只有一个台阶，只取一个阶向

$\xi_1=(0,1,0)$

$\xi_2=(1,0,1)$

∴ $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是对 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的全部特征向量

当 $\lambda_3=-1$ 时，$(-E-A)X=0$ 即

$$\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\xi_3=(1,0,-1)$

$k\xi_3$ 是对 $\lambda_3=-1$ 的全部特征向量

第5课：相似对角化

$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq 0$　　$\square(\ )=$数$(\ )$

$$\left\{\begin{array}{l}|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \text{求出}\lambda_i \\ (\lambda_i E-A)X=0 \Rightarrow \xi_i\end{array}\right.$$

矩阵可对角化：

若∃可逆矩阵P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$，Λ是对角矩阵，则称A可相似对角化，记 $A\sim\Lambda$，称A相似标准形

P可逆，$\boxed{P^{-1}AP=\Lambda} \Leftrightarrow AP=P\Lambda \Leftrightarrow A(\xi_1\cdots\xi_n)=(\xi_1\cdots\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (A\xi_1, A\xi_2, \cdots A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1, \cdots\cdots \lambda_n\xi_n)$

只要线性无关

$\boxed{A\xi_i=\lambda_i\xi_i}$

$P^{-1}AP=\Lambda$ 找不找的到的条件是：$\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n$是否线性无关

---

e.g 若 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$　$\Rightarrow \begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0$

就是P　∴线性无关

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

A的相似对角化

第9讲 二次形　一:化二次型为标准形式

n元变量 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$

x_ix_j 混合项

一般形

$$+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n$$

平方项

$$\cdots$$

$$+a_{nn}x_n^2$$

称为n元二次型 (每项都二次)

例9.5 正交变换二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

解: $f=x^TAx$

$$=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$A=$ 二次型的对应矩阵

主对角线:平方项系数:2 5 5

x_1x_2 系数:4, 分两个2, a_{21} a_{12} 均为 2

x_1x_3 ⋯:-4　-2　-2

x_2x_3 :-8　-4　-4

$\Downarrow$

$\varepsilon_1=(-2,1,0)^T$　$\varepsilon_2=(2,0,1)^T$, $\lambda=1$

$\varepsilon_3=(1,2,-2)^T$, $\lambda=10$

$\varepsilon_1\perp\varepsilon_3 \Leftarrow \varepsilon_1\cdot\varepsilon_3=0$

正交化: $\varepsilon_2\perp\varepsilon_3 \Leftarrow \varepsilon_2\cdot\varepsilon_3=0$

令 $\eta_1=\varepsilon_1=(-2,1,0)^T$

e.g. $f=x_1^2+x_1x_2-x_2x_3$

$$=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&\frac12&0\\\frac12&0&-\frac12\\0&-\frac12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\eta_2=\varepsilon_2-\frac{(\varepsilon_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}(-2,1,0)^T=\left(\frac25,\frac45,1\right)^T$$

投影

只需把 ε_1 和 ε_2 正交化即可

$\Downarrow$

令 $\eta_2=(2,4,5)^T$

再将 $\eta_1,\eta_2,\varepsilon_3$ 单位化

$(-2x)^2+x^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt5}$

$\eta_1=(-2,1,0)^T$

$\eta_2=(2,4,5)^T$

$\xi_3=(1,2,-2)^T$

$\xrightarrow{\text{单位化}}$ $\eta_1^0=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\\ 0\end{pmatrix}$ $\eta_2^0=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt5}\\ \frac{4}{3\sqrt5}\\ \frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$ $\xi_3^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

正交矩阵 $Q=(\eta_1^0\ \eta_2^0\ \xi_3^0)$

转置原则 $(AB)^T=B^TA^T$

$Q^{-1}AQ=\Lambda$

正交矩阵：$Q^T=Q^{-1}$

$$f=X^TAX \xrightarrow{X=QY} (QY)^TA(QY)$$
$$=Y^TQ^TAQY$$
$$=Y^T(Q^{-1}AQ)Y$$
$$=Y^T\underbrace{\Lambda}_{\text{特征值}}Y=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$
$$=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

只含平方项的 标准形

$$X=QY=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\ 0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$f = X^T A X \xrightarrow{X=QY} Y^T \Lambda Y$

一般 标准

① 写出 $A \Rightarrow$ 求出 λ 和 ξ

$$\begin{cases} |\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda_i \\ (\lambda_i E - A)X = 0 \Rightarrow \xi_i \end{cases}$$

② $\xi_i \xrightarrow[\text{单位化}]{\text{正交化}} \eta_i \xRightarrow{\text{拼}}$ 正交阵 $Q = (\eta_1, \cdots, \eta_n)$

③ $Q^T A Q = \Lambda \Rightarrow f \xrightarrow{X=QY} Y^T \Lambda Y$

$Q^T = Q^{-1}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$