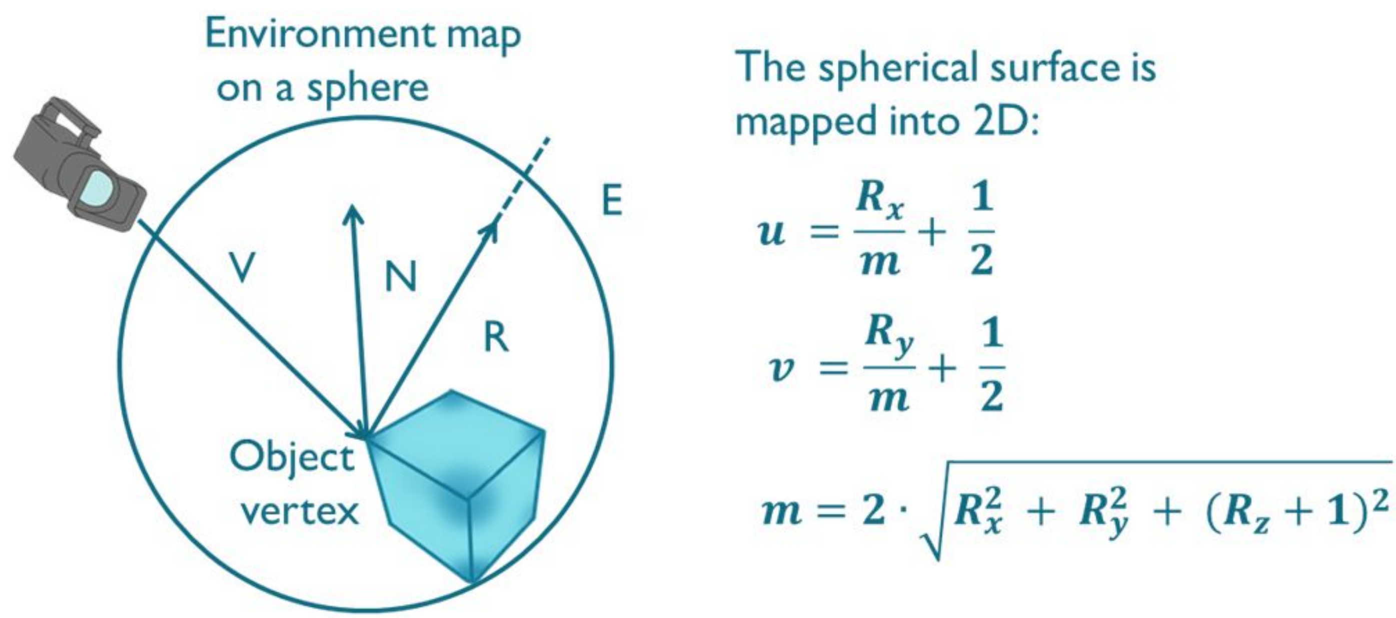


详解球面环境映射 - Spherical Environment Mapping

Jeffrey Z...
不正常代码研究中心—高级研究员

取消关注

常见的环境映射技术有三 Cube Mapping， Spherical Environment Mapping 和 Dual Paraboloid Environment Mapping。

Cube Mapping 是如今最常见的环境映射方法，后续会写一些关于其应用的文章。

今天聊聊 Spherical Environment Mapping。

图1

Spherical Environment Mapping 又称作 Sphere Mapping，是一项非常早期的环境映射技术。它采用单张贴图表示整个环境（没错，是整个环境除了一个点，后面会讲到）。

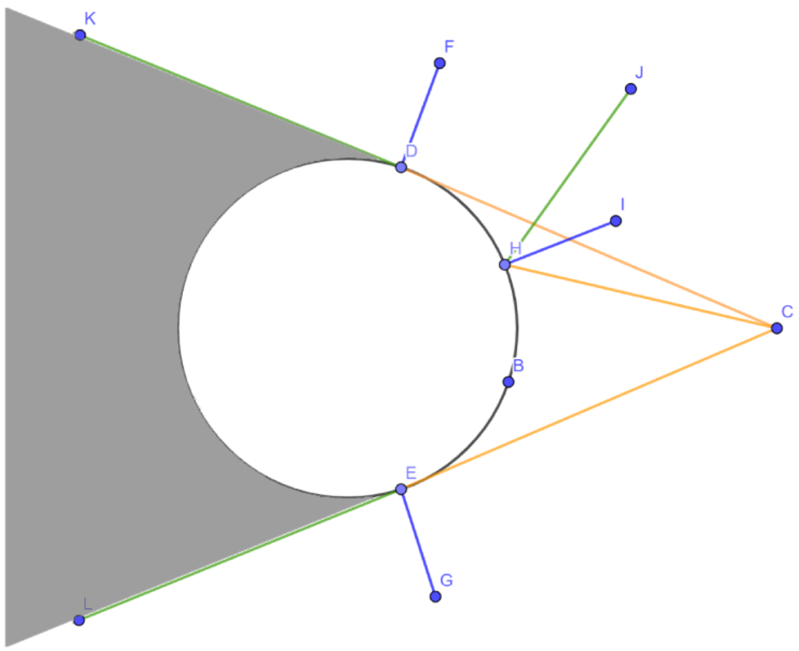


图2 其中蓝色线为球面的法线

上图中有一个球，我们假设这个球能够反射环境，球的右侧有点C，想象点C处有一个相机给球拍照。由于球表面能反射环境，我们通过球面能够得到一张关于环境的照片，但是不包含图中灰色区域。因为灰色区域中的光线无法通过球面反射达到点C处的相机。

确保理解上述过程后，我们接着想象一下点C处的相机不断右移，并且焦距不断变长，最终趋近于正交相机。

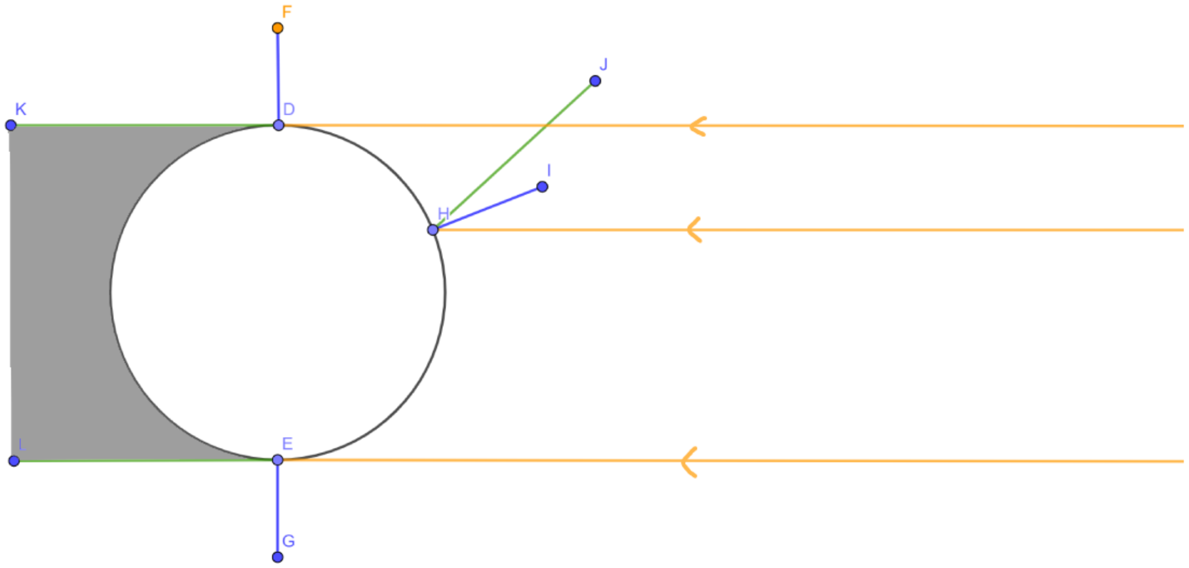


图3

结果会如上图所示。观察上图可以注意到点C不见了，因为它跑到无穷远处了，而从相机指向球面的射线变得平行（原理和用方向光近似太阳的直接光照一样）。如此一来，给球面拍照能够比图2中获得更多的环境信息（灰色区域覆盖的角度范围变小）。

确保理解上述过程后，我们接着想象。想象球体不断缩小，直到趋近于无穷小，同时假设相机的分辨率可以任意高。当球体趋于无穷小后，灰色区域覆盖的环境也会越来越小，最终产生一个盲点，也就是说前文中提到的，单张贴图表示整个环境，除了一个点。

概念模型讲完后，再来看看采样的公式：

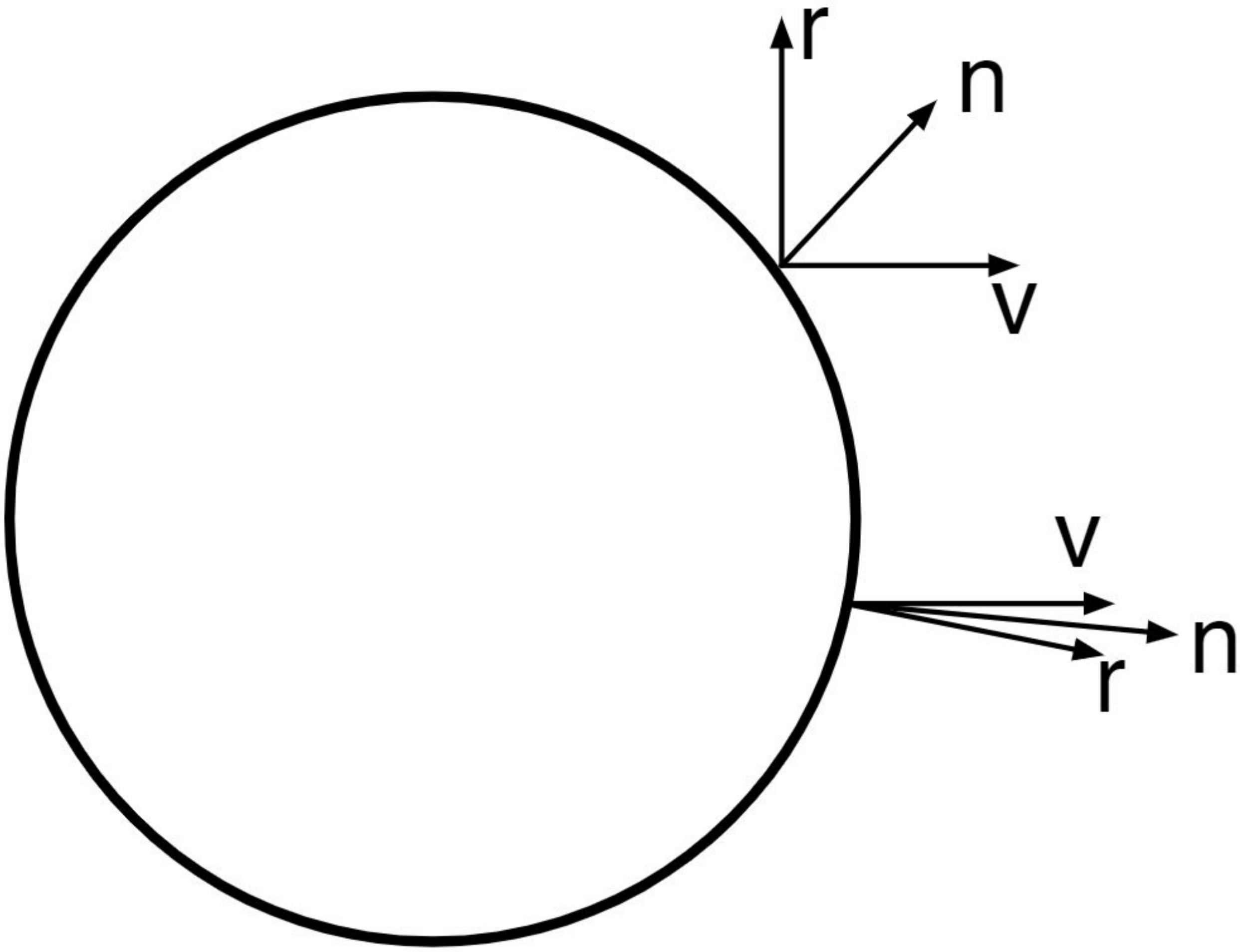
$$u = \frac{r_x}{m} + \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{r_y}{m} + \frac{1}{2}$$

$$m = 2 \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}$$

r为反射向量。

虽然不复杂，并不是一眼望穿，下面说明公式的由来。



以上图所示讲解，假象的反射球表面法线为n，视角方向v，反射向量r。

要理解此处的公式，正确理解视角方向v非常重要。概念模型中，相机最终处于无限远，且正交投影，因此以OpenGL的视口坐标系为例（相机看向-Z轴），此处的v恒定为(0, 0, 1)。

根据反射的原理可以知道，对于没有归一化的法线 n = v + r 。

对于采样而言，r为已知量，(r_x, r_y, r_z)，令其为单位向量。

带入 v 和 r 可得 n = $(r_x, r_y, r_z + 1)$ 。

然后求 n 的模 $|n|$

$$|n| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}$$

我们得到归一化的法线 $n' = \frac{n}{|n|}$ 。

$$n' = (n'_x, n'_y, n'_z)$$

$$n'_x = \frac{r_x}{|n|} = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}}$$

$$n'_y = \frac{r_y}{|n|} = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}}$$

$$n'_z = \frac{r_z + 1}{|n|} = \frac{r_z + 1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}}$$

到这一步，问题变成了已知球面法线坐标，如何获得球面坐标?

这个问题对于位于原点的球面而言非常简单，球面坐标数值等同于法线向量的数值。

例如球面有一点 (x,y,z) ，该点的法线向量即 $(x,y,z)-(0,0,0)=(x,y,z)$ 。

更进一步的讲，对于半径为1的球面坐标数值和归一化法线向量的数值相等。

回过头来再看归一化法线n'，它的三个分量即单位球体表面的坐标值。

我们最终要采样的是二维图，因此z分量就可以抛掉了，只需要x、y分量：

$$n'_x=\frac{r_x}{|n|}=\frac{r_x}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+(r_z+1)^2}}$$

$$n'_y=\frac{r_y}{|n|}=\frac{r_y}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+(r_z+1)^2}}$$

但是这里有个坐标范围的问题， n'_x 和 n'_y 的取值范围是 $[-1,1]$ ，然而贴图的采样坐标是 $[0,1]$ 。要解决这个问题，只需一个函数将取值范围[-1,1]的输入映射为 $[0,1]$ 的输出。通过 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ 变换就可以满足条件，将-1和1分别带入就知道结果正确与否了。

由此我们获得最终的公式：

$$u=\frac{r_x}{2\cdot|n|}+\frac{1}{2}=\frac{r_x}{2\cdot\sqrt{r_x^2+r_y^2+(r_z+1)^2}}+\frac{1}{2}$$

$$v=\frac{r_y}{2\cdot|n|}+\frac{1}{2}=\frac{r_y}{2\cdot\sqrt{r_x^2+r_y^2+(r_z+1)^2}}+\frac{1}{2}$$

再令分母中的 $m=2\cdot\sqrt{r_x^2+r_y^2+(r_z+1)^2}$ 就得到了一开始给出的公式：

$$u=\frac{r_x}{m}+\frac{1}{2}$$

$$v=\frac{r_y}{m}+\frac{1}{2}$$

$$m = 2 \cdot \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}$$

讲到这里，公式只讲了一半，我们知道了如何通过反射向量求采样uv坐标。接下来**推导一下根据采样坐标求反射向量。**

根据前文， $u = \frac{r_x}{2 \cdot |n|} + \frac{1}{2}$ 以及 $v = \frac{r_y}{2 \cdot |n|} + \frac{1}{2}$ 变换后可得：

$\frac{r_x}{|n|} = 2u - 1$ 以及 $\frac{r_y}{|n|} = 2v - 1$

我们已知单位向量 n'

$$n'_x = \frac{r_x}{|n|} = 2u - 1$$

$$n'_y = \frac{r_y}{|n|} = 2v - 1$$

$$n'_z = \frac{r_z + 1}{|n|}$$

单位向量的模为1，将 n'_x n'_y n'_z 代入 $|n'| = \sqrt{(n'_x)^2 + (n'_y)^2 + (n'_z)^2} = 1$ 得到

$(2u - 1)^2 + (2v - 1)^2 + (\frac{r_z + 1}{|n|})^2 = 1$ **（式1）**

已知 $|n| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + (r_z + 1)^2}$

将根号中的平方展开 $|n| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 + 2r_z + 1}$

由于反射向量为单位向量（作为已知量r的假设条件），可知 $|r|=\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}=1$ 。

平方后 $r_x^2+r_y^2+r_z^2=1$ ，带入到 $|n|$ 中，得 $|n|=\sqrt{2r_z+2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{r_z+1}$ **（式2）**。

将**（式2）**代入**（式1）**得

$$(2u-1)^2+(2v-1)^2+(\frac{r_z+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{r_z+1}})^2=1$$

化简

$$(\frac{\sqrt{r_z+1}}{\sqrt{2}})^2=1-(2u-1)^2-(2v-1)^2$$

进一步化简

$$r_z+1=2\cdot[1-(2u-1)^2-(2v-1)^2]$$

继续

$$r_z=2\cdot[1-(4u^2-4u+1)-(4v^2-4v+1)]-1$$

再继续

$$r_z=2-8u^2+8u-2-8v^2+8v-2-1$$

最后整理得到：

$r_z=-8u^2+8u-8v^2+8v-3$ **（式3）**

解决了 r_z 后，还剩下 r_x 和 r_y ，之前已经得知 $\frac{r_x}{|n|}=2u-1$ 和 $\frac{r_y}{|n|}=2v-1$

变换后

$$r_x = |n| \cdot (2u-1)$$

$$r_y = |n| \cdot (2v-1)$$

这里未知变量只有 $|n|$ ，根据 **（式2）** $|n| = \sqrt{2r_z+2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r_z+1}$

代入 r_z 即 **（式3）** 便可得 $|n| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-8u^2+8u-8v^2+8v-3+1}$ ，合并常数 $|n| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-8u^2+8u-8v^2+8v-2}$,从右边根号下再提出一个 $\sqrt{2}$ 与外面的 $\sqrt{2}$ 合并得到

$$|n| = 2 \cdot \sqrt{-4u^2+4u-4v^2+4v-1}$$

综上可得

$$r_x = |n| \cdot (2u-1) = 2 \cdot \sqrt{-4u^2+4u-4v^2+4v-1} \cdot (2u-1)$$

$$r_y = |n| \cdot (2v-1) = 2 \cdot \sqrt{-4u^2+4u-4v^2+4v-1} \cdot (2v-1)$$

至此， r_x 、 r_y 、 r_z 都已求得，下面列到一起以备参考：

$$r_x = 2 \cdot \sqrt{-4u^2+4u-4v^2+4v-1} \cdot (2u-1)$$

$$r_y = 2 \cdot \sqrt{-4u^2+4u-4v^2+4v-1} \cdot (2v-1)$$

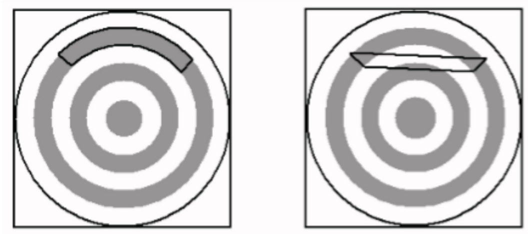
$$r_z = -8u^2+8u-8v^2+8v-3$$

概念和公式都讲完了，说说优缺点。

优点是只需要一张贴图。

但问题也很明显，首先**环境反射的视点固定**，也就是说转动或移动虚拟相机后需要重新生成sphere map才能保证正确。**精度非常不均匀**，我们称假象球朝向拍摄相机一侧为正面的话，**正面的精度高，位于贴图中心区域，背面精度低，位于贴图上圆形靠外侧区域**。关于精度这块的研究总结有一片非常棒的paper，但是忘记名字了，下回看到的时候再补上。

由于映射非线性，采样时线性过滤的结果有误差。如下图所示：



Correct Linear

如今应用场景比较常见的是MatCap，在MatCap的应用中法线是已知量，直接采用view space的normal计算即可

$$u = \frac{n_x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$v = \frac{n_y}{2} + \frac{1}{2}$$

编辑于 2019-09-28

世界因有你更精彩 04-21

您好，我不太理解这句话，"对于采样而言，r为已知量，（Rx,Ry,Rz)。"这里的采样是指哪里？反射向量r不是根据入射向量和法线求出的么？

赞

Jeffrey Zhuang (作者) 回复 世界因有你更精彩 04-22

r就是你要采样的方向，例如你用球面映射做了个天空球（不要在意精度，纯假设），天空球的某个像素该显示什么颜色，需要一个从天空球中心到目标像素的单位向量来做采样，即这里的r，这是已知的。

赞

xiantong 03-05

转动相机后还能用吧，只是精度变了吧?

赞

Jeffrey Zhuang (作者) 回复 xiantong 03-05

但现在基本不会用这个做全景环境映射的，相机固定转动物体的情况下才有应用场景

赞