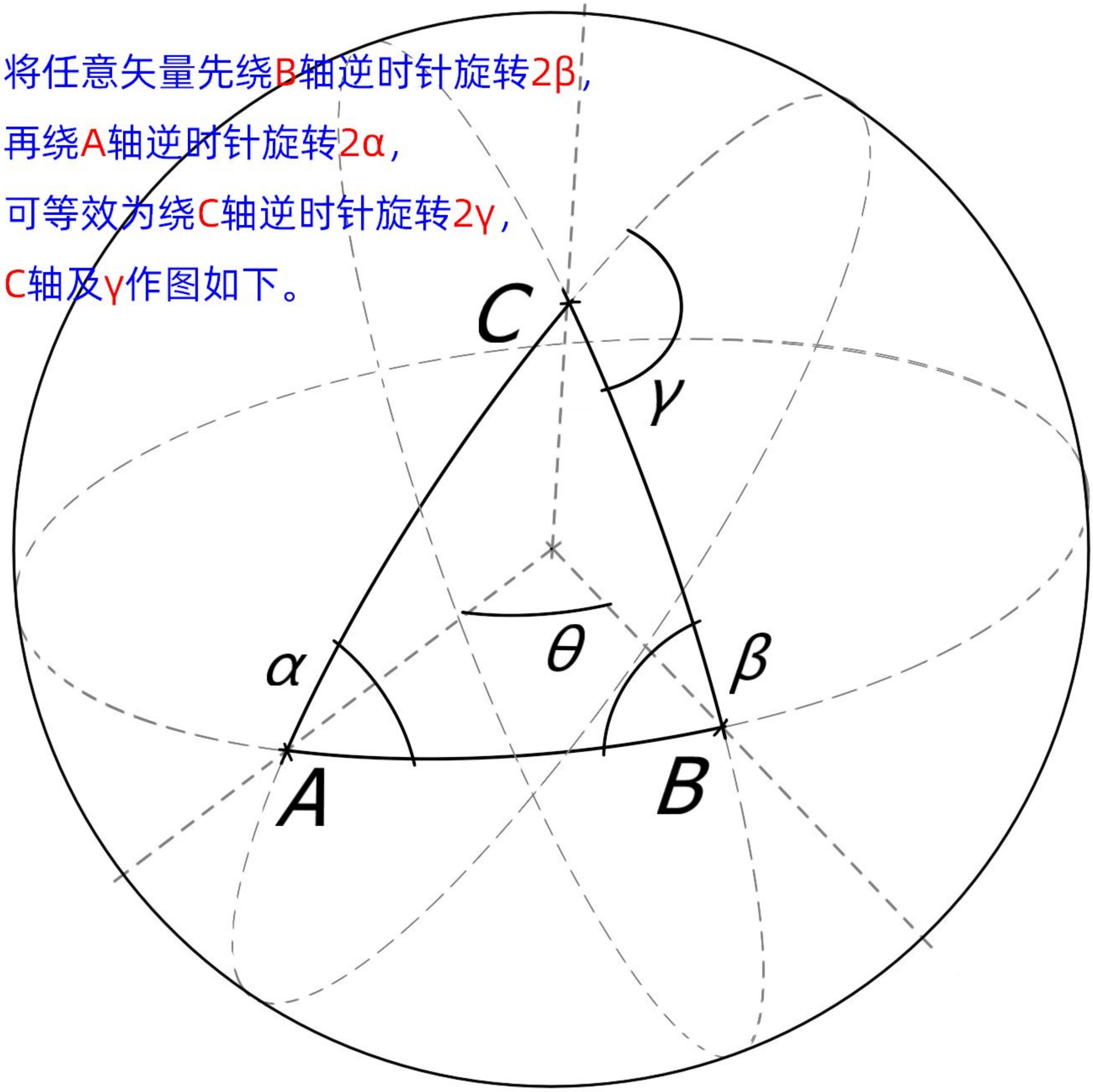


四元数乘法及空间旋转的球面几何表示

Awson
忙到极致麻木就会很轻松了

四元数乘法及空间旋转的球面几何表示

（本文章内容仅涉及：**四元数基本运算、向量叉乘/点积运算、球面三角几何、三角函数**）

本文章结论如标题图片所示（同最后一张图）

要用到的四元数规则：

> 1.基本i、j、k乘法规则

（此处不予阐述，可参考如下）

陈童：奇妙的四元数（上）
15 赞同 · 1 评论 文章

> 2.**单位四元数**的特殊表示：

给定任意单位四元数：

$$A=A_0+A_xi+A_yj+A_zk$$

（单位四元数定义：$A_0^2+A_x^2+A_y^2+A_z^2=1$ ）

根据单位复数的几何表示：

$$Z=cos(\theta)+sin(\theta)\cdot i$$

我们可以类比出

$$A=cos(\theta)+sin(\theta)\cdot\widehat{A}$$

（其中 $\widehat{A}$ 为**一单位虚矢量**，与 $A_xi+A_yj+A_zk$ 成正比）

这正是我们后面将用到的书写形式

(详细证明请参考如下文档中第4部分）

四元数几何意义
www.doc88.com/p-4015133860624.html

> 3.四元数乘积的矢量表示：

任意给定两个四元数

$$a = a_0 + \hat{a} \;\; b = b_0 + \hat{b}$$

其乘积可表示为

$$ab = a_0 b_0 + a_0 \hat{b} + b_0 \hat{a} - \hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{a} \times \hat{b}$$

该乘积可分解为**常量部分**与**虚矢量部分**：

$$ab = （a_0 b_0 - \hat{a} \cdot \hat{b}） + （a_0 \hat{b} + b_0 \hat{a} + \hat{a} \times \hat{b}）$$

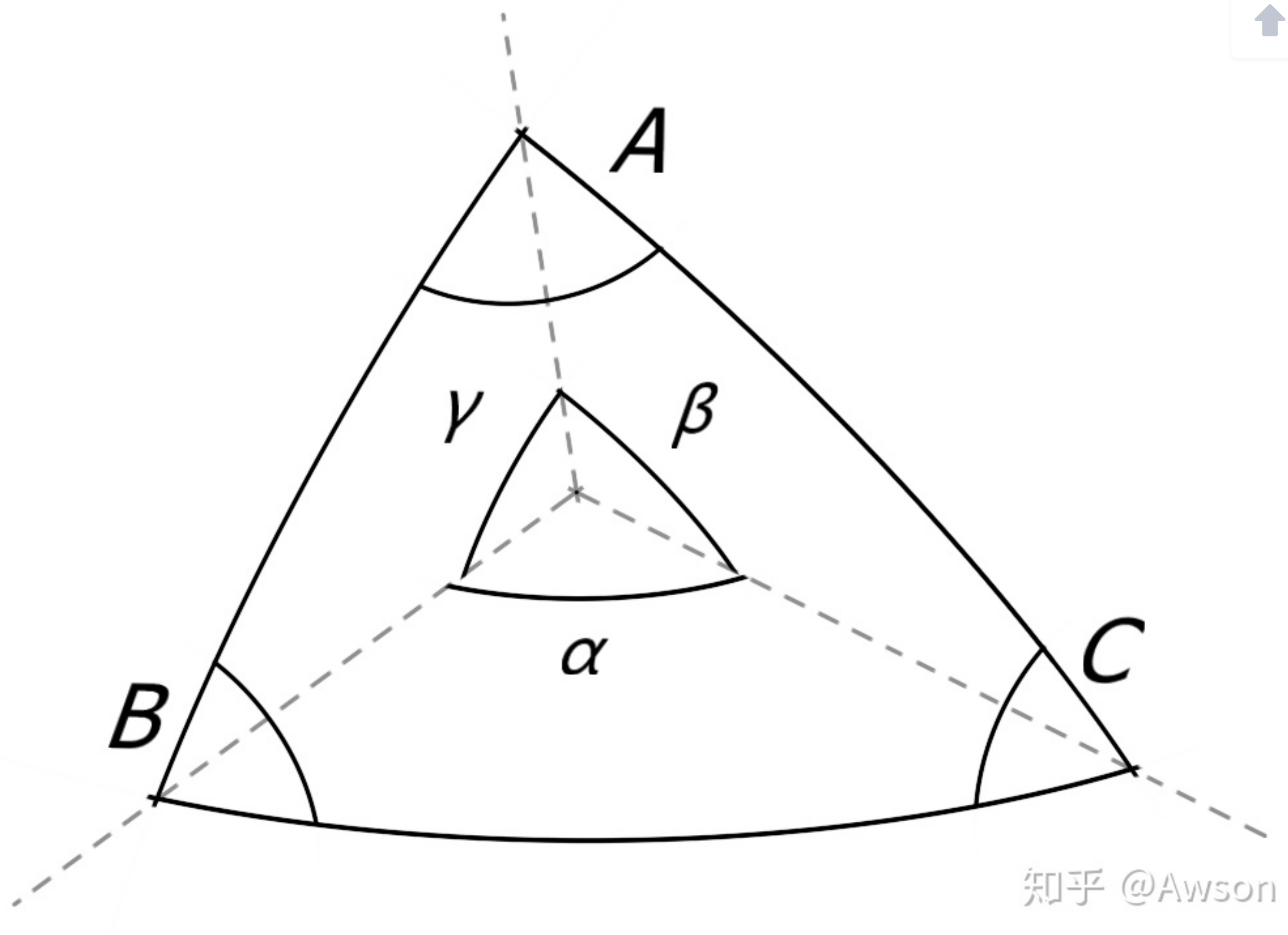
（证明同样参照上述文档中第4部分）

四元数几何意义
www.doc88.com/p-4015133860624.html

要用到的球面几何定理：

> 1.球面三角余弦定理：

给定球面三角形 $\overline{ABC}$ ，边夹角 A、B、C ，矢径夹角 α、β、γ



有如下两组公式定理成立：

$$cos(\alpha) = cos(\beta)cos(\gamma) + sin(\beta)sin(\gamma)cos(A)$$

$$cos(\beta) = cos(\alpha)cos(\gamma) + sin(\alpha)sin(\gamma)cos(B)$$

$$cos(\gamma) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)cos(C)$$

与

$$cos(A) = -cos(B)cos(C) + sin(B)sin(C)cos(\alpha)$$

$$cos(B) = -cos(C)cos(A) + sin(C)sin(A)cos(\beta)$$

$$cos(C) = -cos(B)cos(A) + sin(B)sin(A)cos(\gamma)$$

此处我们选则每组的**第一个公式**将其改写为：

$$cos(A) = \frac{cos(\alpha) - cos(\beta)cos(\gamma)}{sin(\beta)sin(\gamma)}$$

$$cos(\alpha) = \frac{cos(A) + cos(B)cos(C)}{sin(B)sin(C)}$$

以上公式后面将会用到。

（证明请参考该文档52到60页）

https://wenku.baidu.com/view/2b61861f866fb84ae45c8d19.html?sxts=1592639839307
wenku.baidu.com/view/2b61861f866fb84ae45c8d19.h...

结论推导过程如下

考虑两个单位四元数:

$$A = cos(\alpha) + sin(\alpha) \cdot \widehat{A}$$

$$B = cos(\beta) + sin(\beta) \cdot \widehat{B}$$

并将单位虚矢量 $\widehat{A}$、$\widehat{B}$ 之间的夹角记为 θ

其四元数乘积可表示为如下:

常量部分:

$$[cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)cos(\theta)]$$

虚矢量部分:

$$[cos(\beta)sin(\alpha) \cdot \widehat{A} + cos(\alpha)sin(\beta) \cdot \widehat{B} + sin(\alpha)sin(\beta) \cdot \widehat{A} \times \widehat{B}]$$

仅观察**常量部分**，不难看出，与球面几何公式呈现出一定的吻合，区别只是一些正负号。

又考虑到两个单位四元数的乘积仍然是单位四元数，

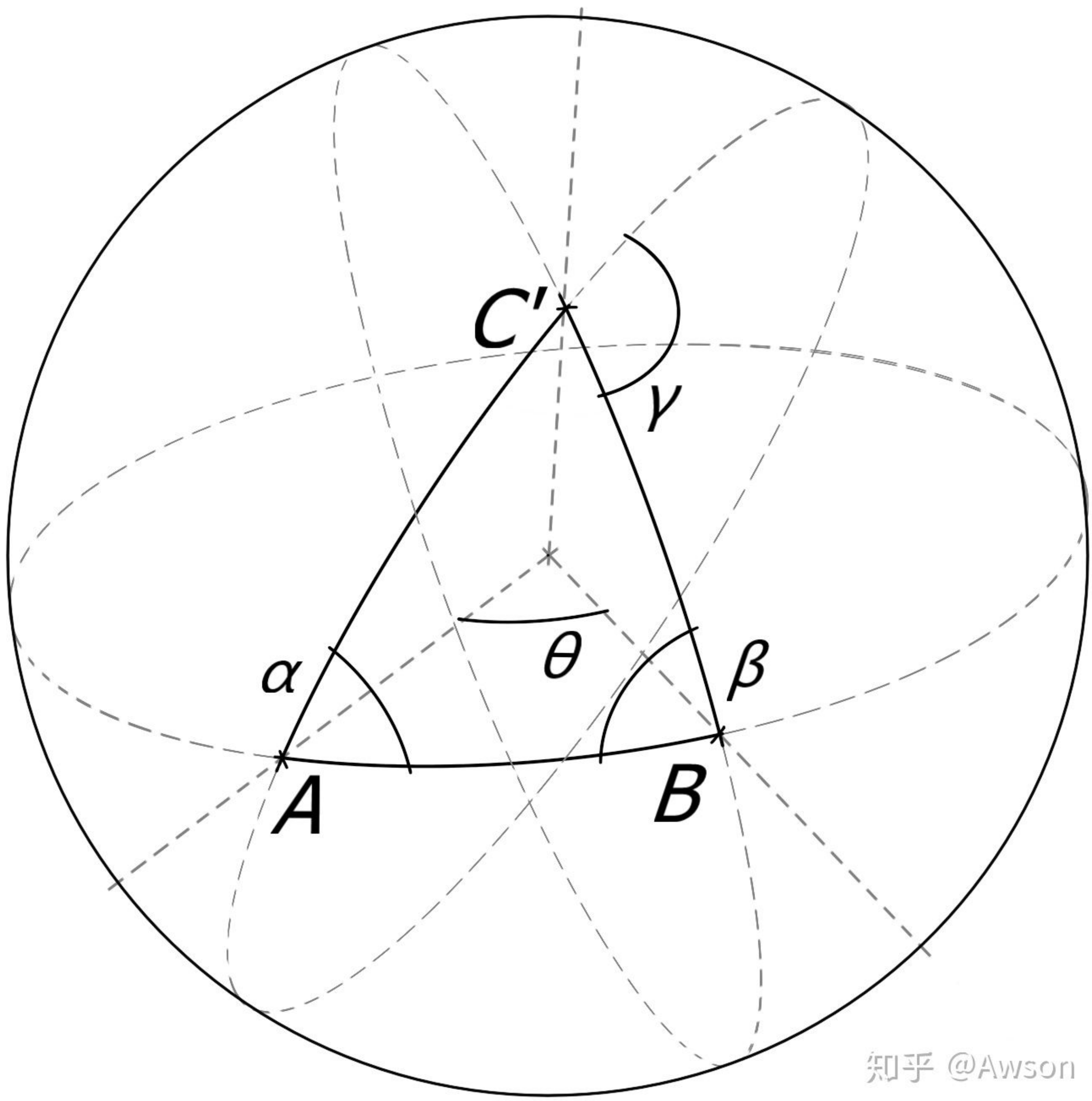
即 AB 的乘积 C 同样也可表示为:

$$AB = C = cos(\gamma) + sin(\gamma) \cdot \widehat{C}$$

故显然我们能够对**常量部分**用球面几何来直观的表示。

通过对球面几何公式进行适当修正。（用 $(\pi-\gamma)$ 来代替公式中的边夹角 C 的值）

我们可以得到如下球面几何模型：



如此简单清晰的有关**常量部分**的几何解释，定会让人惊叹不止，

而倘若这样精妙的几何结构不把**虚矢量部分**也联系到一起的话，

一定会让人抓狂的。

虚矢量部分的证明

验证结果往往比推导结果更加简单。

为此，我们只需要证明四元数乘积 $AB = C$ 的**虚矢量部分**与图中的 C' 满足相同性质即可。

> 具体思路如下：

1.我们先证明 $\widehat{C} \cdot \widehat{A} = C' \cdot \widehat{A}$

2.倘若成功，同理可证： $\widehat{C} \cdot \widehat{B} = C' \cdot \widehat{B}$

3.最后是验证 $\widehat{C}$ 相对于 A、 B 平面的上下位置是否符合图中描述。

利用这三个结果和球面三角全等定理，便能验证**虚矢量部分**。

> 证明如下：

为简化证明，我们将**虚矢量部分**分为两组：

一组**位于**由 $\widehat{A}$ 、 $\widehat{B}$ 所确定的平面上：

$$\frac{cos(\beta)sin(\alpha) \cdot \widehat{A} + cos(\alpha)sin(\beta) \cdot \widehat{B}}{sin(\gamma)}$$

另一组**垂直于** $\widehat{A}$ 、 $\widehat{B}$ 所确定的平面，**计算点积时可舍去**：

$$\frac{sin(\alpha)sin(\beta) \cdot \widehat{A} \times \widehat{B}}{sin(\gamma)}$$

计算 $\widehat{C} \cdot \widehat{A}$ 点积，我们有：

$$\widehat{C} \cdot \widehat{A} = \frac{cos(\beta)sin(\alpha) \cdot \widehat{A} \cdot \widehat{A} + cos(\alpha)sin(\beta) \cdot \widehat{B} \cdot \widehat{A}}{sin(\gamma)}$$

$$= \frac{cos(\beta)sin(\alpha) \cdot 1 + cos(\alpha)sin(\beta) \cdot cos(\theta)}{sin(\gamma)}$$

借助球面几何公式 $\left[cos(\theta) = \frac{-cos(\gamma) + cos(\beta)cos(\alpha)}{sin(\beta)sin(\alpha)}\right]$ 抵消 $cos(\theta)$ 项：

我们有：

$$\widehat{C}\cdot\widehat{A}=\frac{cos(\beta)sin(\alpha)^2sin(\beta)-cos(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma)+cos(\alpha)^2sin(\beta)cos(\beta)}{sin(\gamma)sin(\beta)sin(\alpha)}$$

$$=\frac{cos(\beta)sin(\beta)-cos(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma)}{sin(\gamma)sin(\beta)sin(\alpha)}$$

$$=\frac{cos(\beta)-cos(\alpha)cos(\gamma)}{sin(\gamma)sin(\alpha)}$$

而 $C'\cdot\widehat{A}$ 的乘积正好为 C' 与 $\widehat{A}$ 夹角的余弦值，结合球面几何公式，正好是

$$C'\cdot\widehat{A}=\frac{cos(\beta)-cos(\alpha)cos(\gamma)}{sin(\gamma)sin(\alpha)}$$

故 $\widehat{C}\cdot\widehat{A}=C'\cdot\widehat{A}$ **成立**

同理可证 $\widehat{C}\cdot\widehat{B}=C'\cdot\widehat{B}$

1、2的证明已经完成，接下来是3的证明：

考虑垂直组 $\frac{sin(\alpha)sin(\beta)\cdot\widehat{A}\times\widehat{B}}{sin(\gamma)}$ 中叉积的顺序， $\widehat{C}$ 显然只位于图中AB的某一侧。

考虑 α、 β、 γ 都大于0情况，此时 $\widehat{C}$ 与 C' 位于同一侧，则约束已经确定，

无论 α、 β 怎样变动， $\widehat{C}$ 与 C' 始终位于同一侧，1、2推论， $\widehat{C}$ 与 C' 必重合。

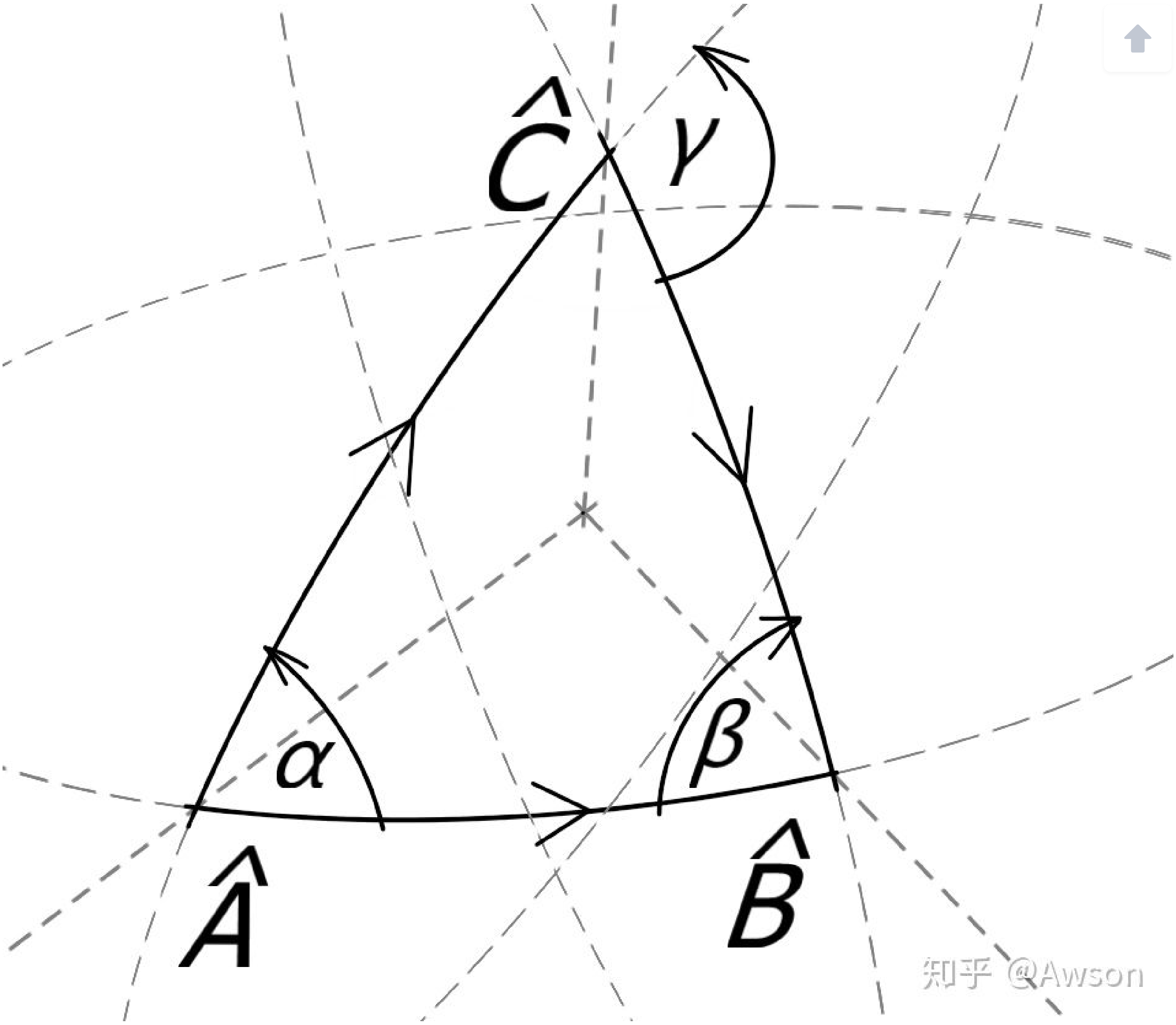
验证结束：

整理小结：

给定两个单位四元数 A、 B ，

根据其对应转角 α、 β 和单位虚矢量 $\widehat{A}$、 $\widehat{B}$ ，在单位球面中标注出来。

借助球面几何，可以很直观的找到 $AB=C$ 乘积的单位虚矢量 $\widehat{C}$ 及其转角 γ 。



验证四元数旋转公式

将单位四元数中的转角设为 $\pi/2$ ，我们能够得到

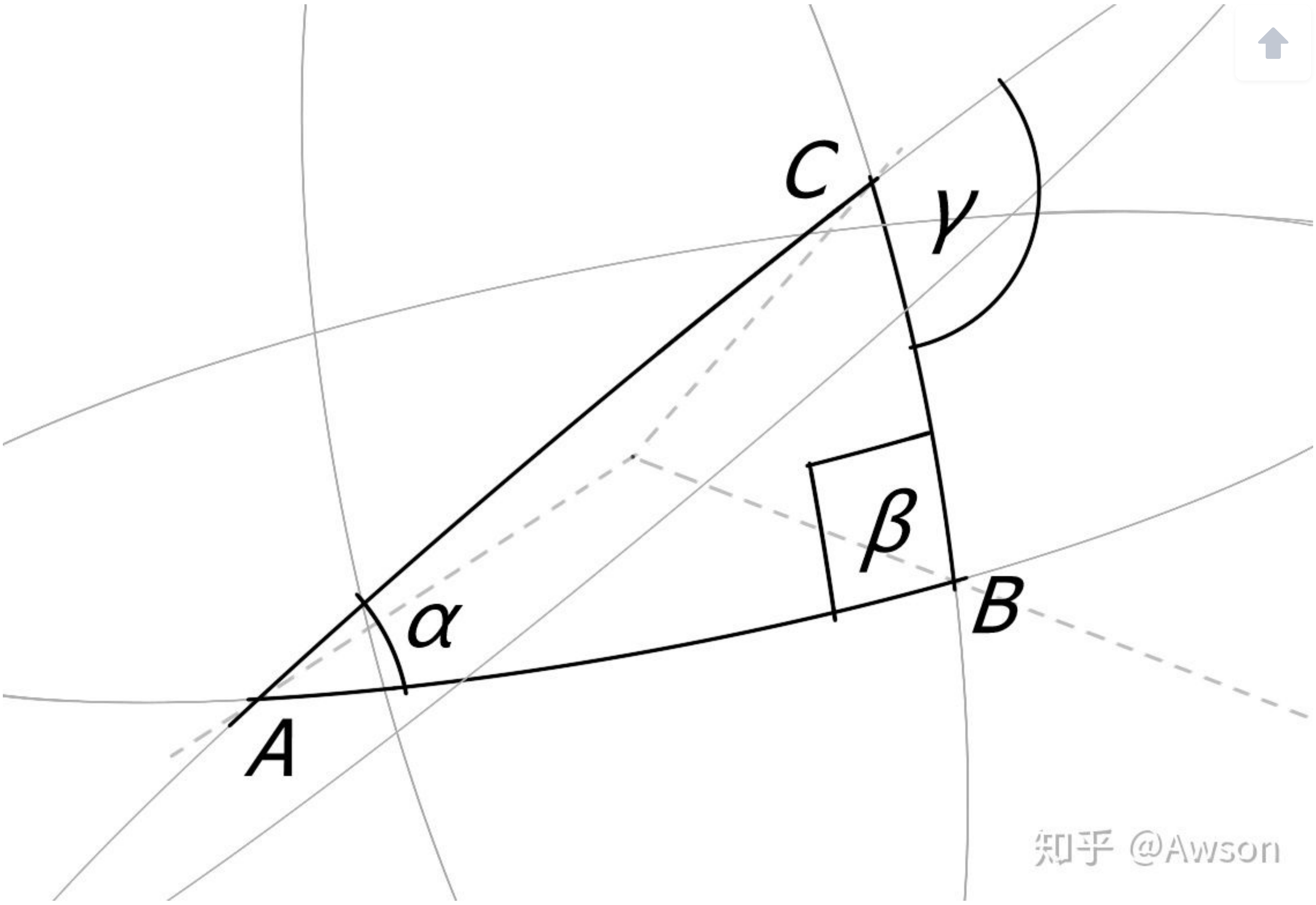
$$B=0+1\cdot\widehat{B}=\widehat{B}$$

该式子只含**虚矢量部分。**

故之后的所有**单位矢量**我们均用转角为 $\pi/2$ 的四元数来表示：

考虑四元数乘积 $AB=C$ ，

借助球面几何表示，我们有：

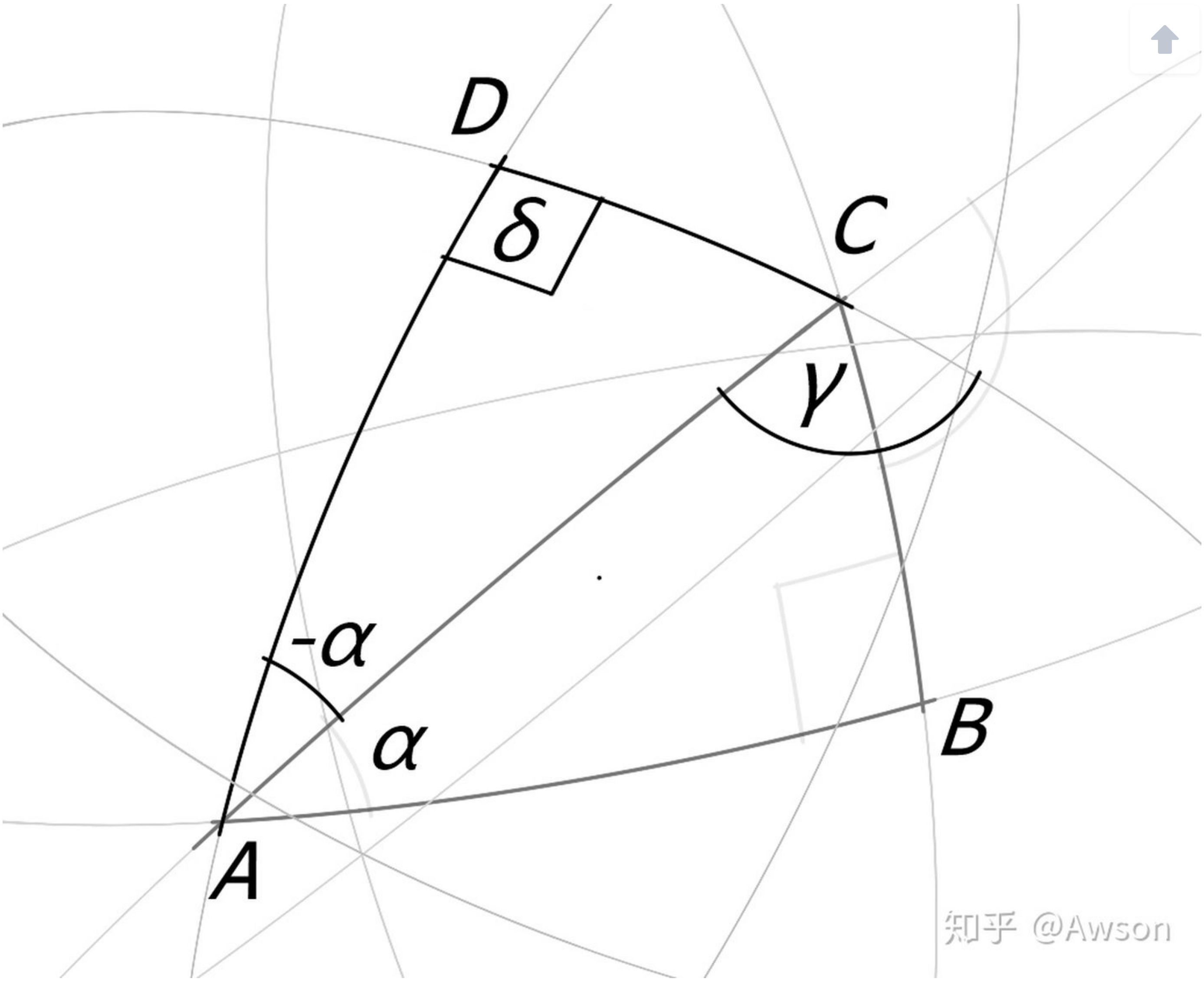


对单位四元数 A 取 A^{-1} ，我们有:

$$A^{-1} = cos(-\alpha) + sin(-\alpha) \cdot \widehat{A}$$

同样考虑四元数乘积 $ABA^{-1} = CA^{-1} = D$ ，

借助球面几何表示，我们有：



显然弧 $\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{AB}$ 间夹角为 2α， $\angle B=\angle D$

即球面三角形 ΔABC 与 ΔACD 全等。

故 ABA^{-1} 将虚矢量 $\widehat{B}$ 绕虚矢量 $\widehat{A}$ 逆时针旋转 2α。

验证完成。

引申结论

考虑将矢量D先绕 $\widehat{B}$ 轴旋转2β，再绕 $\widehat{A}$ 轴旋转2α，得到矢量E，则该旋转表达式为：

$$E=ABDB^{-1}A^{-1}$$

利用公式：

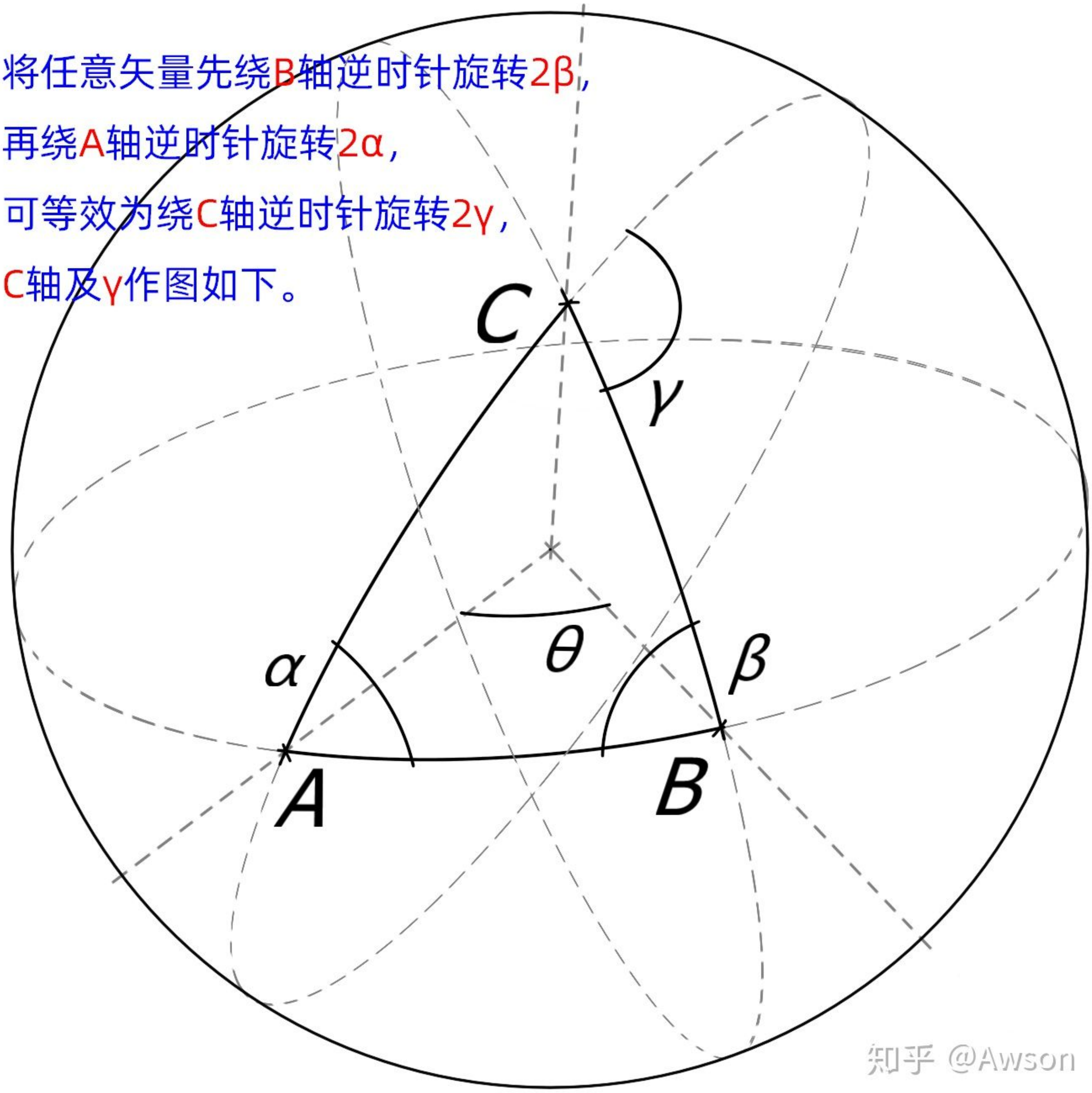
$$AB=C，\ C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

得出：$E = CDC^{-1}$

即这两次绕不同轴、不同转角的旋转可合成为一次旋转操作，

即绕 $\widehat{C}$ 轴旋转2γ。

如标题图所示：



编辑于 2020-08-29