球谐函数介绍（Spherical Harmonics）

浦夜

尽量不用各种术语来讲清楚SH（Spherical Harmonics）系数，以及SH在简单光照描述上的应用。 科普向。

SH，球谐函数，归根到底只是一组基函数，至于这组基函数是怎么来的，不管他。

其实大家小学二年级学过泰勒展开和傅里叶变换的话，对基函数应该是非常了解的。

....

比如三角函数基函数：

或者也可以随便乱写一个基函数：

$$y_0 = 555$$

$$y_1 = \frac{1}{x} + tan(x)$$

$$y_2 = x^3 - 666$$

$$y_3 = sin(4x)$$

....

有了基函数，就可以把任意一个函数，描述成几个基函数的加权和了。

例如

$y \approx 0.1y_0 + 0.3y_1 + 0.8y_2 + 0.001y_3 + \ldots$

这时候，就相当于是把一个原始函数

$y = f(x)$

变成了一组系数:

0.1, 0.3, 0.8, 0.001, ...

一般的，能用的基函数个数越多，表达能力就越强。

本质上是一个有损压缩。有点像个密码本，你一本我一本，上面写了基函数的定义，这样传密码的时候只要传几个系数就可以了，系数传到我这儿，我能复原出y = f(x)，只是没那么准确了。

这里用的是二维直角坐标系，拓展到极坐标系的基函数也可以随便举个例子：

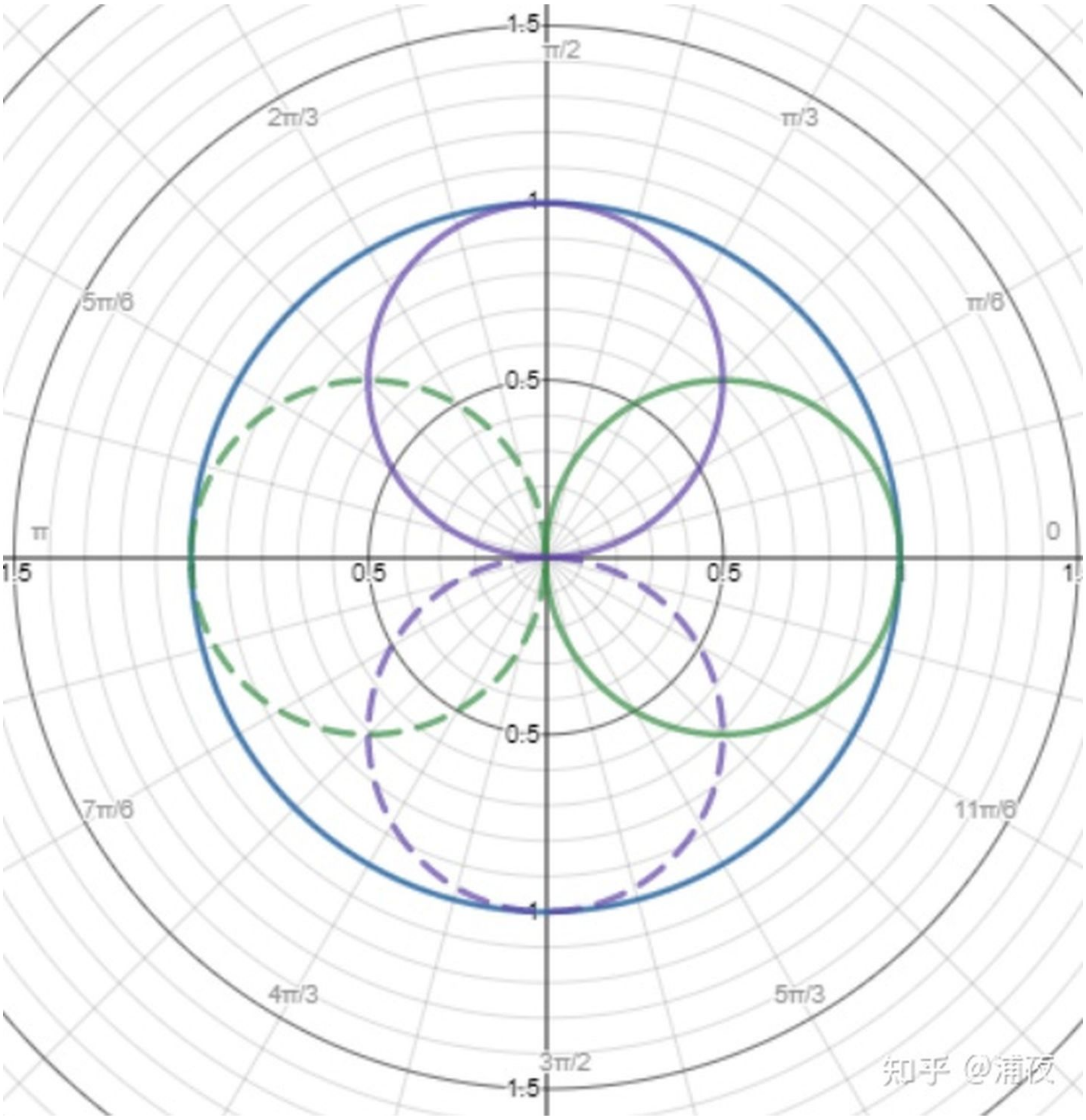
例如：

$r_0 = 1$ （蓝色）

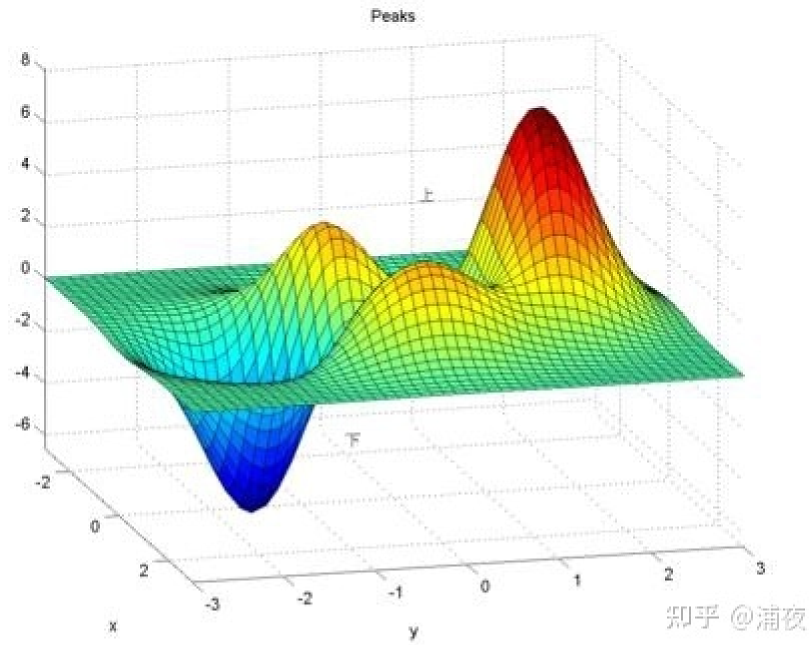
$r_1 = cos\theta$ （绿色）

$r_2 = sin\theta$ （紫色）

$r3 = \ldots$



三维也是一样的，三维直角坐标系的函数可能长这样



直角坐标系的基长这样

$z_0=f_0(x,y)$

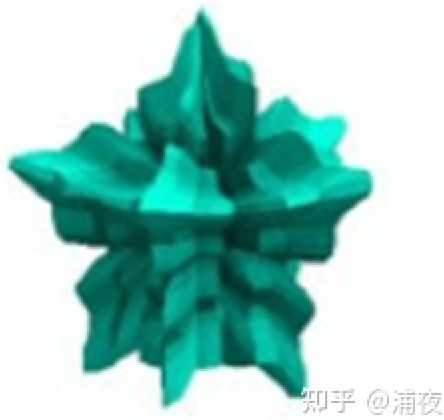
$z_1=f_1(x,y)$

$z_2=f_2(x,y)$

...

对应的，三维直角坐标系也可以拓展到三维球面坐标系。

而三维球面坐标系上的函数画出来可能是这样的：



球面坐标系的基长这样：

$$r_0 = f_0(\theta,\ \varphi)$$

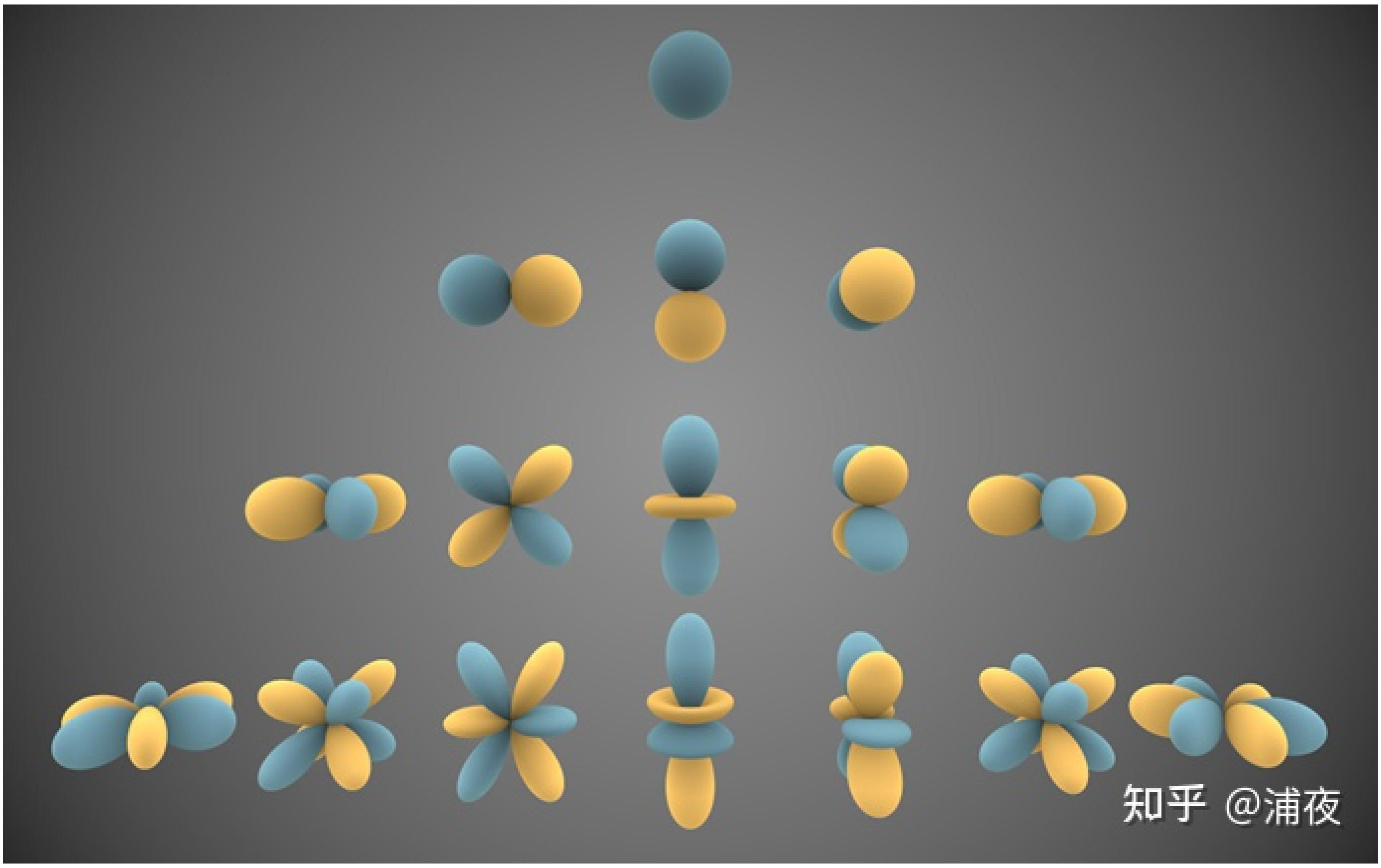
$$r_1 = f_1(\theta,\ \varphi)$$

$$r_2 = f_2(\theta,\ \varphi)$$

...

最有名的球面基函数就是球谐函数了。球谐函数有很多很好的性质，比如正交性，旋转不变性（这边就不介绍了）。正交性说明每个基函数都是独立的，每个基函数都不能用别的基函数加权得到。

SH的基函数长这样（其中蓝色表示正数，黄色表示负数），一般尝试了解过SH的同学都见过这个图：



表达式长这样：

$$y_l^m(\theta,\varphi)=\begin{cases}\sqrt{2}K_l^m\cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), & m>0\\ \sqrt{2}K_l^m\sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta), & m<0\\ K_l^0P_l^0(\cos\theta), & m=0\end{cases}$$

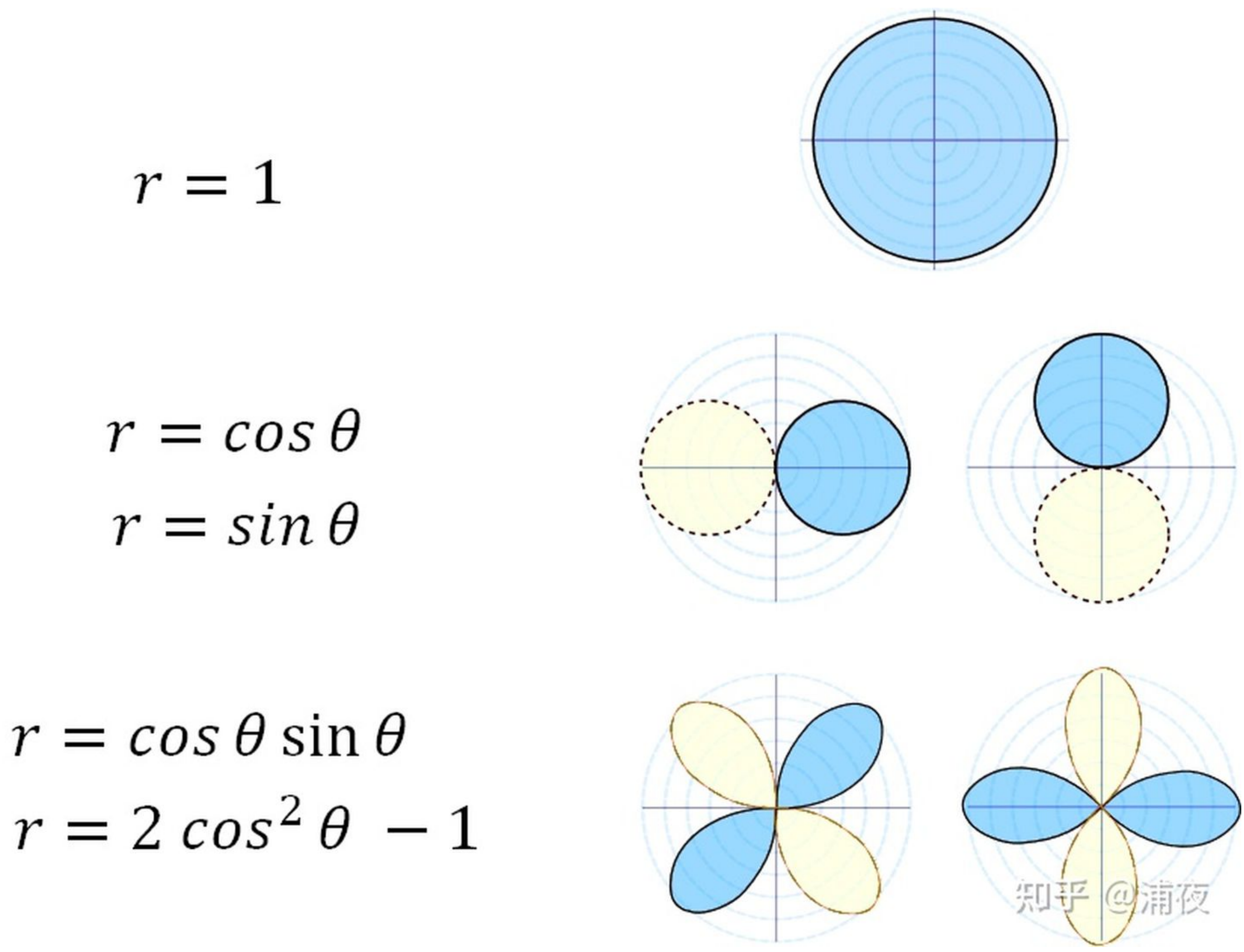
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}(P_l(x))$$

$$K_l^m=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}$$

其实退化到二维来看，还是很简单的，二维的SH差不多长这样，蓝色表示正数，黄色表示负数：

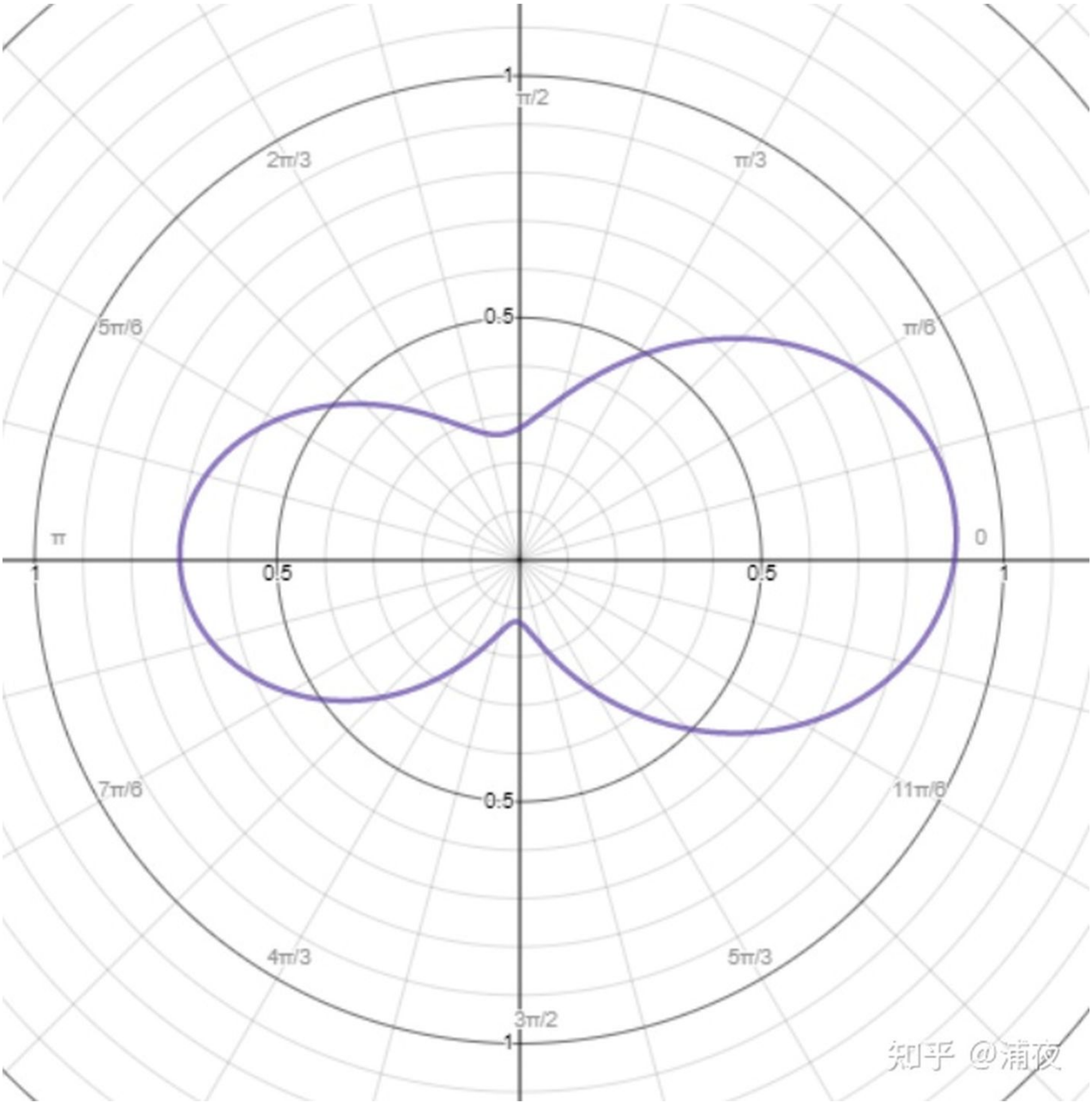
（具体系数不太准确仅用于示意...）



像这样是不是就特别简单了，em，看这个波瓣长得似乎有点三维SH的意思了嘛。

（可以思考一个小问题：为啥二维情况下第三排的基函数只有cos平方，没有sin平方呢？）

假如有一个极坐标的函数长这样：



他可以表示为

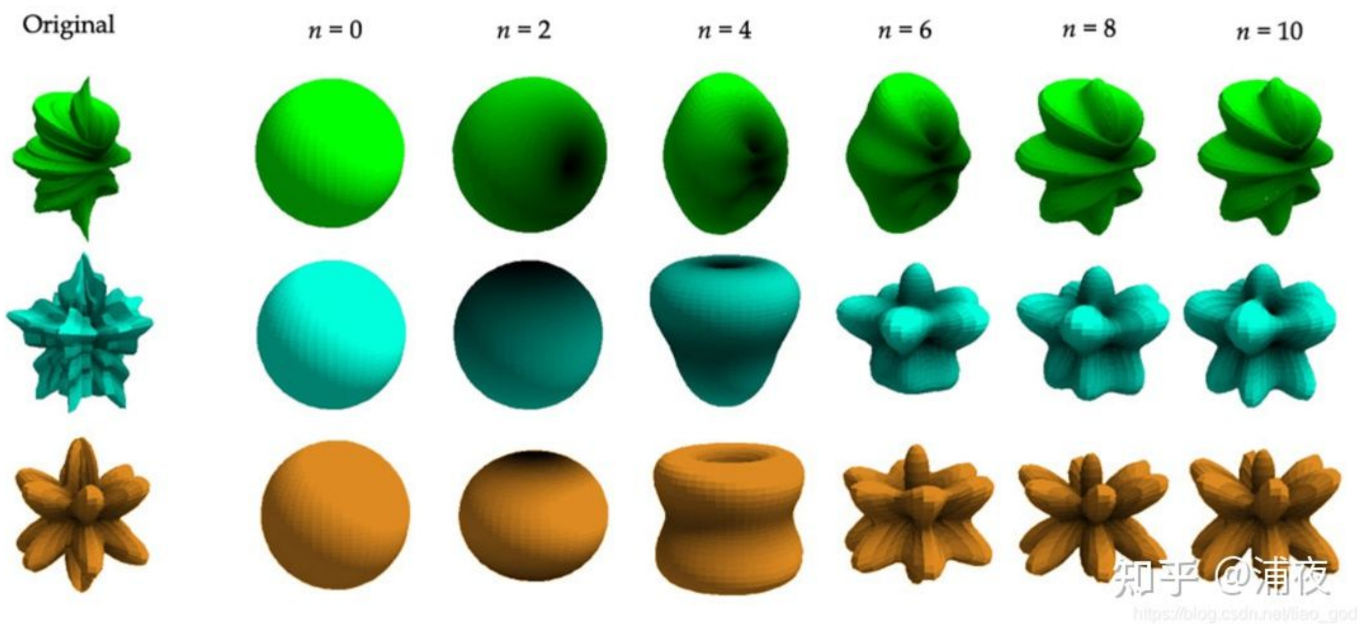
$$r = 0.5 + 0.1cos\theta + 0.07sin\theta + 0.05cos\theta sin\theta + 0.3(2cos^2\theta - 1)$$

只记系数，这个函数就压缩为了：

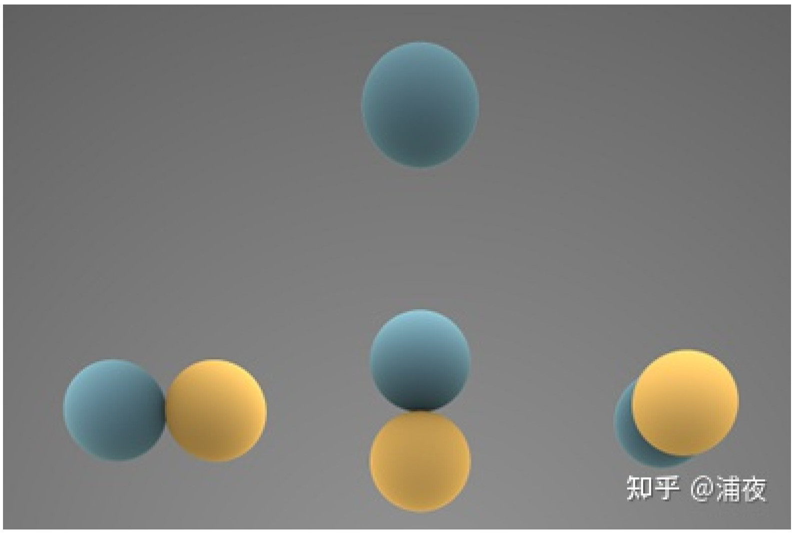
0.5， 0.1， 0.07， 0.05， 0.3

回到三维的情况这几个数字其实就是SH系数啦。

当SH的系数用的越多，那么表达能力就越强，跟原始的函数就越接近

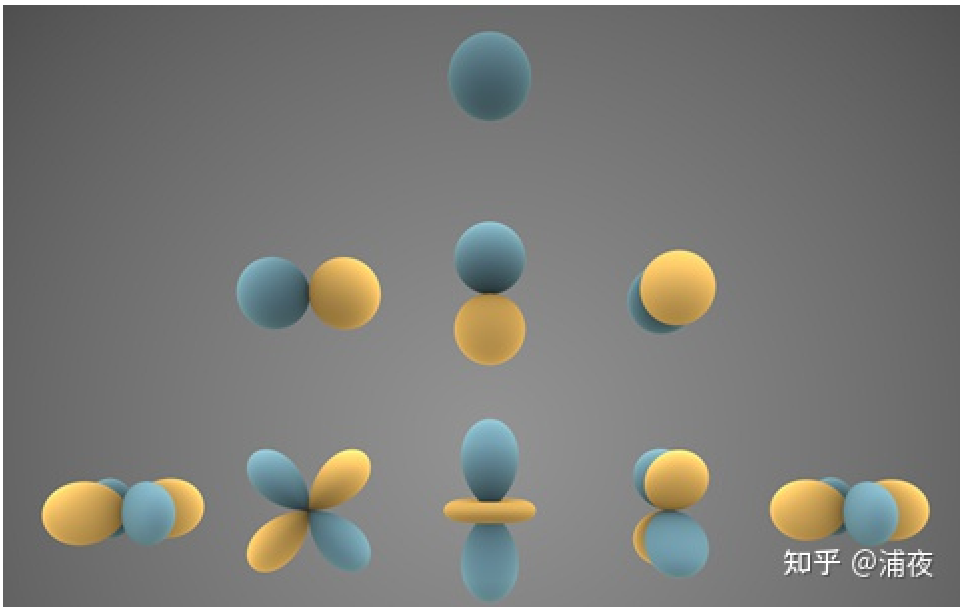


当用来描述不同方向光照的SH基函数我们一般用到二阶或者三阶，二阶是4个系数：



拓展到rgb，就是4 * 3 = 12个系数

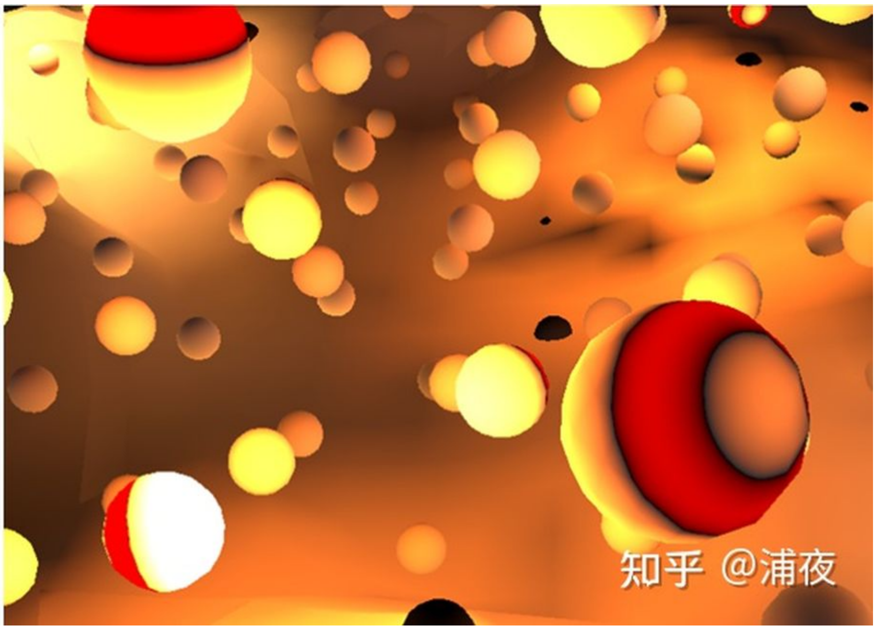
三阶是9个系数：



拓展到rgb，就是9 * 3 = 27个系数

空间中的每个Probe带一组SH系数，就可以描述这个位置的大致光照情况了。

为啥不用更高阶的SH？一方面是因为更多的系数会带来更大的存储压力、计算压力，而一般描述变化比较平滑的环境漫反射部分，用3阶SH就足够了；另一方面则是因为SH的物理含义不是特别好理解，高阶SH容易出现各种花式Artifact，美术同学一般都会认为这种表现属于bug。



那有没有更直观物理含义更好理解的基函数的？也有的，比如SG，有空再写。。。

编辑于 02-19