球谐光照——球谐函数

chopper
北京大学 计算机硕士

早在1877年，Norman Macleod Ferrers就专门写了一本书来介绍球谐函数，后面物理学家把实数球谐函数扩展到复平面上，在复变函数论中作为“特殊函数”来研究，它在物理以及计算化学上有重要的应用，我们主要讨论它在计算机图形渲染上的应用。

球谐函数是拉普拉斯方程的分离 r 变量后，角度部分通解的正交项，那本篇文章就从拉普拉斯方程开始介绍，直至找到我们想要的球谐函数。球谐函数有复数形式和实数形式，我们只关心它的实数形式。

球谐函数有两条重要的性质，正交完备性和旋转不变性。球谐函数构成的函数组，作为正交基，对信号进行投影和重建，例如[7]介绍的辐射度环境贴图，通过9个系数就可以模拟一张环境贴图的漫反射信号，无论是存储还是计算，都有显著的优势。当然，本篇文章希望从数学的角度，来介绍球谐函数，也受限于个人的数学能力，会忽略了一些复杂的推导过程。

文章目录：

球谐始源

球谐函数是拉普拉斯方程的分离 r 变量后，角度部分通解的正交项。这部分将从拉普拉斯方程开始逐项推导，得到最终我们想要知道的球谐函数。内容主要参考“姚端正,梁家宝. 数学物理方法-第4版”和“顾樵. 数学物理方法”两本书。

球面坐标可以表示为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

三维空间下的拉普拉斯（Laplace）方程可以表示为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

把球面坐标代入拉普拉斯方程（参见“Laplacian in Spherical Coordinates”），可以得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{3}$$

我们的目标就是求解拉普拉斯方程的解。首先，把表示距离的变数r跟表示方向的变数θ和φ分离，即

$$f(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi) \tag{4}$$

$Y(\theta,\varphi)$表示角度部分，把等式（4）代入等式（3）可以得到

$$\frac{Y}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = 0$$

等式两边乘以r^2/RY，并移项，可得

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}$$

左边是r的函数，跟θ和φ无关；右边是θ和φ的函数，跟r无关。两边相等，显然是不可能的。除非两边实际上是同一个常数，通常把这个参数记为$l(l+1)$

。即

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l\left(l+1\right)$$

这就分解为两个方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)-l\left(l+1\right)R=0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l\left(l+1\right)Y=0 \qquad (5)$$

当然，我们只关心角度部分的解，即方程（5）的解，这个方程也称为**球函数方程**。进一步采用分离变数法，以

$$Y\left(\theta,\varphi\right)=\Theta\left(\theta\right)\Phi\left(\varphi\right)$$

代入球函数方程，得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+l\left(l+1\right)\Theta\Phi=0$$

在方程两边乘以$\sin^2\theta/\Phi\Theta$并移项，即可得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l\left(l+1\right)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

左边是θ的函数，跟φ无关；右边是φ的函数，跟θ无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数，这个常数记作λ，

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+l\left(l+1\right)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=\lambda$$

这就又分解为两个常微分方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}+\lambda \Phi=0 \tag{7}$$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right)+\left[l\left(l+1\right) \sin ^2 \theta-\lambda\right] \Theta=0 \tag{8}$$

对于常微分方程（7），它有一个隐含的“自然的周期条件”（$\Phi\left(\varphi+2\pi\right)=\Phi\left(\varphi\right)$），两者构成本征值问题。即

$$\lambda=m^2,(m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{9}$$

它的周期解用复数形式，可以表示为

$$\Phi\left(\varphi\right)=e^{i m \varphi}, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{10}$$

> 严格来说，这里忽略了常数项，且是两个cos和sin函数的混合，或者是两个正负虚数的混合，但不影响最终的通解。

复数形式在复变函数论里面，有一个如下所示的转换关系，它们都是复平面上坐标的不同表现形式。由于本篇文章并不是为了严格的数学理论推导，而是为了梳理球谐函数在计算机上从理论到应用这条线，最终我们采用的是实数形式的球谐函数，所以看看就可以了。

$$\cos m \varphi+i \sin m \varphi=e^{i m \varphi}$$

再看常微分方程（8），它可以改写为

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right)+\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{\sin ^2 \theta}\right] \Theta=0$$

设$x=\cos \theta$,则

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=\frac{\partial\Theta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

代入上式，化简可得

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\left[l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \tag{11}$$

这个方程就是**l次连带勒让德方程**，也称为**缔合勒让德方程**，其中，$m=0$的特例，即

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Theta}{\partial x}+l\left(l+1\right)\Theta=0 \tag{12}$$

叫作**l次勒让德方程**。

后面只考虑连带勒让德方程，它的解就称为**连带勒让德函数**，只有当$\lambda=l\left(l+1\right)$，$l=0,1,\cdots$时才有有界周期解，用$P_l^m\left(x\right)$表示，即

$$\Theta\left(\theta\right)=P_l^m\left(\cos\theta\right)\left\{m=0,\pm1,\cdots,\pm l\right\} \tag{13}$$

经过数学家论证，连带勒让德函数表示为

$$P_l^m\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l \tag{14}$$

这叫称为**l次m阶连带勒让德函数**，“次”的英文是“degree”，“阶”的英文是“order”。当$m>l$。连带勒让德函数里面有一个$m+l$次导数计算，在计算机上这个很难处理，但是有递归关系[3]，即

$$\begin{cases}\left(l-m\right)P_l^m\left(x\right)=x\left(2l-1\right)P_{l-1}^m\left(x\right)-\left(l+m-1\right)P_{l-2}^m\left(x\right)\\ P_m^m\left(x\right)=\left(-1\right)^m\left(2m-1\right)!!\left(1-x^2\right)^{m/2}\\ P_{m+1}^m\left(x\right)=x\left(2m+1\right)P_m^m\left(x\right)\end{cases} \tag{15}$$

> 两个!!表示双阶乘，即 $(2m-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)$ 。

连带勒让德函数的递归关系，保证了计算机实现的基础。

此外，再给一个l次m阶连带勒让德函数的关系等式

$$P_l^m\left(x\right)=\left(-1\right)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}\left(x\right) \tag{16}$$

回到球函数方程（5）的求解，它的 $Y\left(\theta,\varphi\right)$ 通解的复数形式表示为

$$Y\left(\theta,\varphi\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l}P_l^k\left(\cos\theta\right)e^{im\varphi},m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{17}$$

> 严格来说，由于 $\Phi\left(\varphi\right)$ 忽略了常数项，这里也是忽略常数项的情况。

一般的l次m阶球谐函数 $Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)$ 的复数形式可以表示为

$$Y_{lm}\left(\theta,\varphi\right)=P_{lm}\left(\cos\theta\right)e^{im\varphi},m=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{18}$$

> l 表示球谐函数的次数， m 表示球谐函数的阶数

球谐函数的模长可以表示为

$$\left(N_l^m\right)^2=\iint_S Y_{lm}\left(x\right)\left[Y_{lm}\left(x\right)\right]^*\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}2\pi$$

归一化的球谐函数 $Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)$ 的复数形式可以表示为

$$Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)=K_l^mY_{lm}\left(\theta,\varphi\right) \tag{19}$$

其中

$$K_l^m = \frac{1}{N_l^m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \tag{20}$$

注意区分两种数学表示的含义，$Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 表示一般形式的球谐函数，$Y_l^m(\theta,\varphi)$ 表示归一化的球谐函数。

当m>0时采用实数cos部分，当m<0时采用虚数sin部分，则归一化的球谐函数的实数形式可以表示为

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} \sqrt{2}K_l^m\cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta) & m>0 \\ \sqrt{2}K_l^m\sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta) & m<0 \\ K_l^0 P_l^m(\cos\theta) & m=0 \end{cases} \tag{21}$$

根据上述计算公式，可以得到前面4次的球谐函数，为

l	m = -3	m = -2	m = -1	m = 0	m = 1	m = 2	m = 3
0				$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$			
1			$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}y$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}z$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}x$		
2		$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}yx$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}yz$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3z^2-1)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}zx$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}(x^2-y^2)$	
3	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{70}{\pi}}y(3x^2-y^2)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{105}{\pi}}xyz$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{42}{\pi}}y(5z^2-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}z(5z^2-3)$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{42}{\pi}}x(5z^2-1)$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{\pi}}z(x^2-y^2)$	$-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{70}{\pi}}x(x^2-3y^2)$

前4次球谐函数

参见[6]，已经推导出前6次的球谐函数。

球谐函数可视化，前面几次的三维图像如图1所示

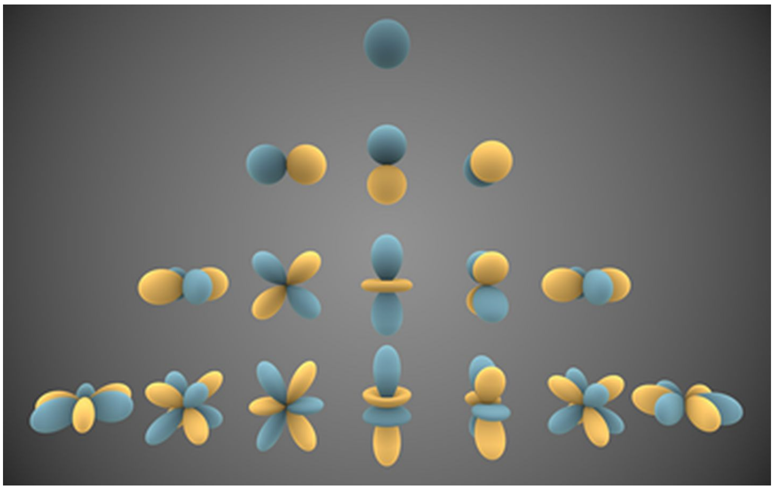

图1. 前4次的球谐函数三维图像

至此，你应该理解两条重要结论：

1. 球谐函数是拉普拉斯方程分离 r 变量后，角度部分通解的正交项（后面介绍正交性）。
2. 如何计算球谐函数，可以参见等式（15）（20）（21）。

球谐性质

接着，讨论归一化的球谐函数的性质，它具备两条重要的性质构成了它应用的基石：

- 正交完备性
- 旋转不变性

正交完备性

对于任意两个归一化的球谐函数在球面上的积分有

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi) Y_k^n(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \begin{cases} 0 & m \neq n, or, l \neq k \\ 1 & m = n, l = k \end{cases} \tag{21}$$

这就表示由球谐函数构成的函数组 $\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}$ 是**正交归一化的**。

以某一正交归一函数组为基，把一个给定的函数用这些函数的线性组合来表示，这就是一种重要的展开，这种用正交函数组展开为级数的一个显著的例子就是傅里叶变换。

任意一个球面函数 $f(\theta,\varphi)$ 可以用正交归一的球函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 进行展开，这种展开类似于傅里叶展开，称为**广义傅里叶展开**

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_l^m Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{22}$$

其中，**广义傅里叶系数** C_l^m 为

$$C_l^m=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)\,Y_l^m(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{23}$$

当次数 $l\to\infty$ 的时候，展开的级数和会**平均收敛**于 $f(\theta,\varphi)$ 。换句话说，当次数 l 越大，那么级数和就会越趋近于被展开的函数 $f(\theta,\varphi)$ ，就称 $\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}$ 为完备函数组。平均收敛，并不代表收敛，只是表示趋近于的含义。

从计算机的角度来说，如等式（22）所示的函数展开，n 的取值不可能是无穷大，往往取一个给定系数，则可以确定球谐函数组，例如 $n=2$ ，那么球谐函数组就是

$$\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}=\{Y_0^0,Y_1^{-1},Y_1^0,Y_1^1\}$$

任意给定 n ，得到的球谐函数组的个数为

$$S=1+3+5+\cdots 2n-1=n^2$$

那么，广义傅里叶系数相当于这样一个排列

$$C_0^0,C_1^{-1},C_1^0,C_1^1,C_2^{-2},C_2^{-1},\cdots$$

类似的球谐函数也可以构成这样一个类似的排列，若我们用一个普通的系数 c_k 来表示上面的广义傅里叶系数，用一个函数 $y_k(\theta,\varphi)$ 来表示球谐函数，那么等式（22）可以换成另外一种形式

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{n^2-1}c_k y_k(\theta,\varphi) \tag{24}$$

这种形式的展开与等式（22）是完全一样的，它只是把球谐函数的次数展开，用一个系数来表示，但是它隐藏了一个条件：取的系数个数必需是 n^2 。

回过来，球谐函数组相当于一组正交基，将函数 $f(\theta,\varphi)$ 表示为这组正交基的线性组合，生成线性组合系数的过程就称为**投影**（Projection），例如一个函数可以表示为

$$f(\theta,\varphi)\approx aY_0^0+bY_1^{-1}+cY_1^0+dY_1^1$$

生成系数 $\{a,b,c,d\}$ 的过程，就是投影，等式（23）就确定了投影的方法。相反，利用这组系数和正交基组合，得到原函数的过程，就称为**重建**（Reconstruction）。

投影的过程就是计算函数积分，计算消耗较大，可以采用离线处理来生成广义傅里叶系数；在实时渲染时，就要简单的线性组合，就可以重建原始函数。当然，由于是有限个系数，就必然存在误差。

我们再来看下连带勒让德函数，如图2所示，随着次数的增加，函数的振动频率会越快。对于函数的展开而言，振动频率越大的基底，它就只能表示越高频的信息，往往一个函数里面的高频信息量是较少的。

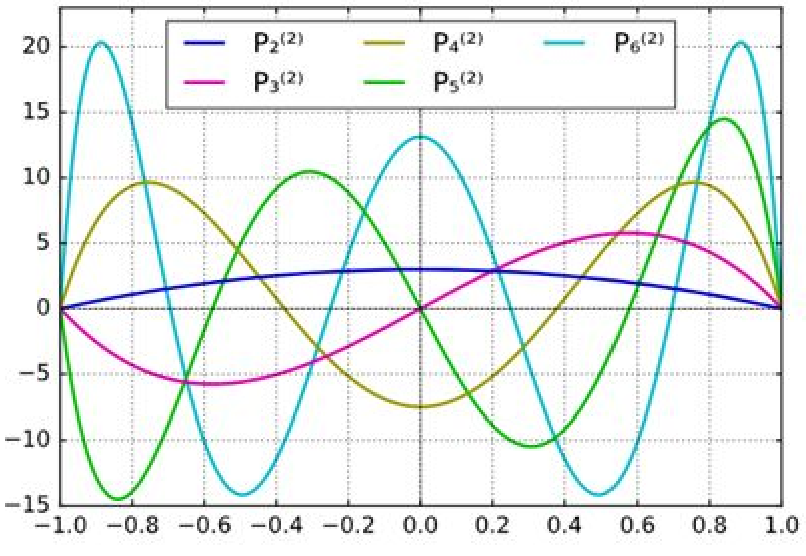

图2. 连带勒让德函数曲线图，次数越大，振频越快

类似的，球谐函数也具备这种随着次数增加，振动频率增加的的特性。它就使得n的取值不需要很大时，就可以得到很好的重建效果，当然只能还原出低频信息。根据Robin[3]得到的数据，如图3所示，当n > 6时，就能还原出整体效果，但是边缘棱角这些高频信息是无法还原出来的。

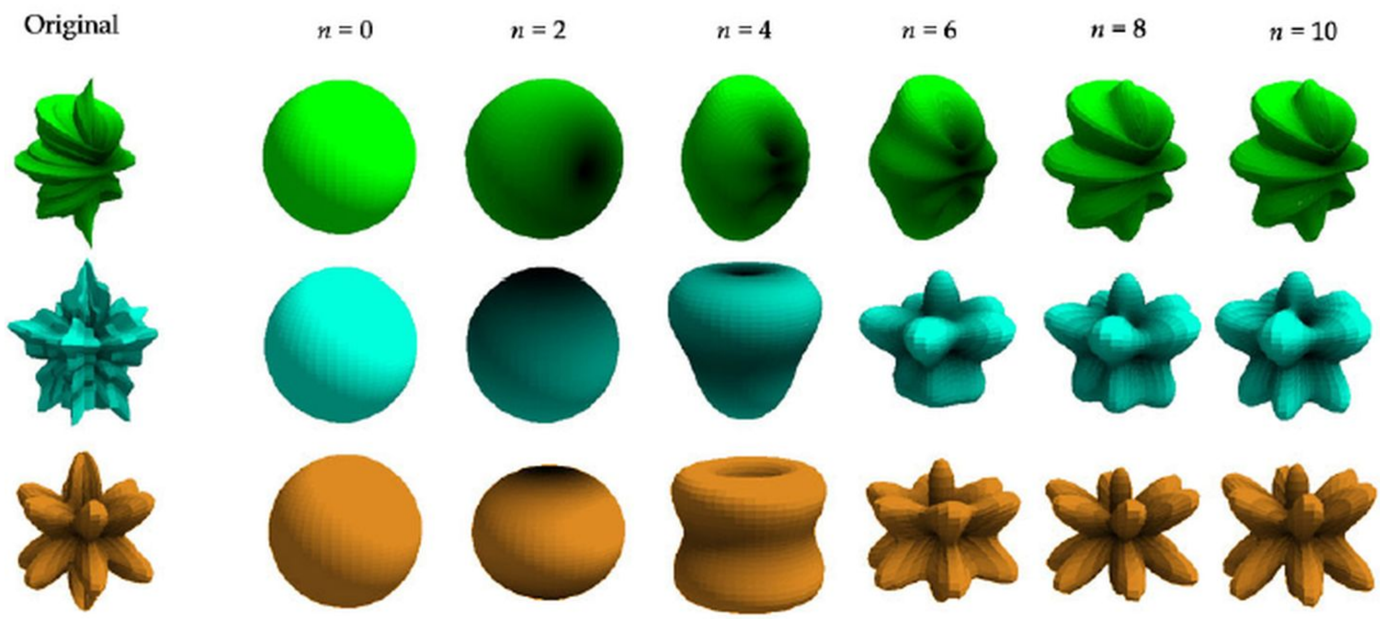

图3. 不同n取值下球谐函数的重建效果

由球谐函数构成的函数组构成正交归一的基底，对球面上的函数进行投影和重建，也就是广义傅里叶展开，数学上的完备性，保证了展开结果会趋近于被展开的函数。

旋转不变性

第一个问题是：什么叫旋转不变性。

任意一个球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$ 可以用球谐函数组作为基底展开，需要根据等式（23）计算广义傅里叶系数 C_l^m 。如果我们对原函数进行旋转操作的话，设旋转变换表示为 $R(\theta,\varphi)$ ，我们就得到了一个新的函数 $f(R(\theta,\varphi))$ 。对新函数进行展开的话，我们需要重新计算广义傅里叶系数，设为 B_l^m ，这就有点为难了。在图形渲染中，广义傅里叶系数的生成是离线实现的，它的消耗很大，这就表示，一旦光源发生了旋转后，由于原函数的改变导致提前生成的系数失效。**旋转不变性，表示原函数发生了旋转，只需要对生成的广义傅里叶系数进行变换，就能保证变换后的系数能等价还原出新函数**。在图形渲染上的表现就是，

当光源发生旋转后，我们只要同步的计算出变换后的广义傅里叶系数，就能保证画面的光照效果不会抖动跳变。旋转不变性，并不是表示源函数发生旋转后，对重建结果没有影响，而是表示通过对系数与匹配的旋转进行变换后，能等价的还原出旋转后的函数。

举个[6]实验的例子，如图4所示，球谐函数表示的光照发生旋转后，仍然能等价重建新的变换函数，但是采用Ambient Cube的方法效果就出现了异常。

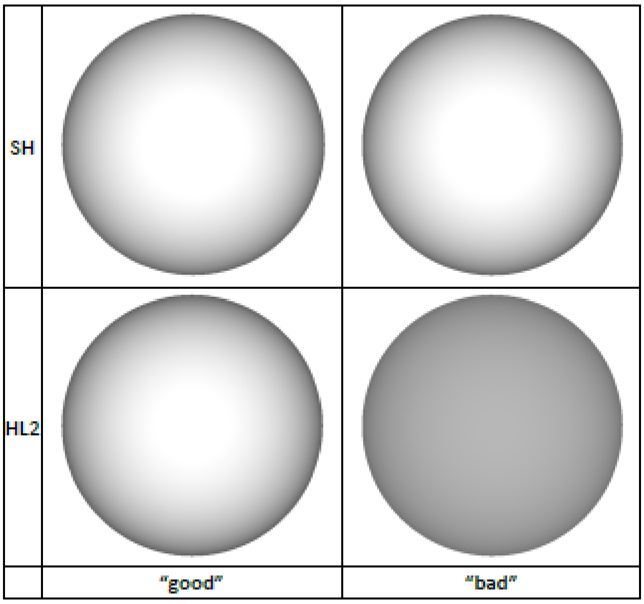

图4. SH表示球谐基底，HL2表示Ambient Cube基底

第二个问题是：怎么对生成的系数进行变换。

针对这个问题，这里写些自己的理解，不做深入的研究。

对于l次球谐函数，就会有2l + 1个系数，表示为

$$C_l = \{C_l^{-l}, C_l^{-l+1}, \cdots, C_l^{l-1}, C_l^l\} \tag{25}$$

设变换矩阵为 R_{SH}^l ，它是一个(2l + 1)*(2l + 1)的矩阵，那么系数的变换就可以表示为

$$B_l^m = \sum_{k=-l}^{k=l} M_l^{m,k} C_l^k \tag{26}$$

或者用向量与矩阵的乘积形式，表示为

$$B_l = C_l \cdot R_{SH}^l \tag{27}$$

那么，经过旋转变换后的函数的展开就可以表示为

$$f\left(R\left(\theta, \varphi\right)\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} B_l^m Y_l^m \left(\theta, \varphi\right) \tag{28}$$

唯一的区别就是，系数由 C_l 变成了 B_l 。

想表达的一点是，系数的变换是基于球谐函数的次数，即第3次球谐函数的系数 B_3 ，只能由第3次球谐函数的系数 C_3 变换而来。

若取前3次的球谐函数构成正交基，函数组共有0，1，2次三类球谐函数，若采用等式（24）的形式，则3个子矩阵需要整合成一个完整的变换矩阵，对于前3次球谐函数的例子，就组成一个9x9的变换矩阵，它的形状如下所示。

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X & X & X \end{pmatrix}$$

9x9的球谐系数变换矩阵

考虑低维的情况[3]。旋转可以用旋转矩阵、欧拉角、四元数等方式表示，任意一个旋转矩阵 R 可以用 $Z_\alpha Y_\beta Z_\gamma$ 型的欧拉角表示，它们间的变换关系[5]表示为

$$\begin{pmatrix} R_{0,0} & R_{0,1} & R_{0,2} \\ R_{1,0} & R_{1,1} & R_{1,2} \\ R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\gamma + s_\alpha c_\beta c_\gamma & -s_\beta c_\gamma \\ -s_\alpha c_\gamma - c_\alpha c_\beta s_\gamma & c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & s_\beta s_\gamma \\ c_\alpha s_\beta & s_\alpha s_\beta & c_\beta \end{pmatrix} \quad (29)$$

> 其中，c表示cos，s表示sin。

有了这个变换关系后，就很容易计算出欧拉角α, β, γ，表示为

$$\sin\beta = \sqrt{1 - R_{2,2}^2}$$
$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{atan2f}\left(R_{2,1}/\sin\beta, R_{2,0}/\sin\beta\right) \\ \beta = \operatorname{atan2f}\left(\sin\beta, R_{2,2}\right) \\ \gamma = \operatorname{atan2f}\left(R_{1,2}/\sin\beta, -R_{0,2}/\sin\beta\right) \end{cases}$$

对于，$R_{2,2} = 1$的退化情况，欧拉角表示为

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{atan2f}\left(R_{0,1}, R_{0,0}\right) \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

那么，相应l次的球谐系数的变换矩阵可以表示为

$$R_{SH}^l(\alpha, \beta, \gamma) = Z_\gamma Y_{-90} Z_\beta Y_{+90} Z_\alpha$$

对于第0次的球谐变换矩阵为

$$R_{SH}^0(\alpha, \beta, \gamma) = (1) \quad (30)$$

其它维度的矩阵推导比较麻烦，就推导了第1次的球谐变换矩阵，它可以表示为

$$R_{SH}^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & -s_\beta s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma - c_\alpha c_\beta s_\gamma \\ -s_\alpha s_\beta & c_\beta & -c_\alpha s_\beta \\ c_\alpha s_\gamma + s_\alpha c_\beta c_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1,1} & -R_{1,2} & R_{1,0} \\ -R_{2,1} & R_{2,2} & R_{2,0} \\ R_{0,1} & -R_{0,2} & R_{0,0} \end{pmatrix}$$

变换矩阵 R^l_{SH} 的计算可以参见附录D3D的实现，实现了前6次的球谐系数的旋转，对于图形渲染来说，已经够用了。

对于高维矩阵的构造方法非常的复杂，采用的是魏格纳d矩阵（Wigner d-matrices），可以参见文献[4]的讨论，网上也有这个算法的高效实现，有兴趣可以研究研究，参见SHTns。

附录

根据等式（15）的递归关系，就可以很容易计算出连带勒让德函数[3]。

根据等式（20）（21），可以计算出球谐函数[3]。

在D3D中实现的球谐系数的旋转D3DXSHRotate的实现为：

参考

[1] 姚端正, 梁家宝. 数学物理方法-第4版..

[2] 顾樵. 数学物理方法.

[3] Robin Green. "Spherical harmonic lighting: The gritty details." Archives of the Game Developers Conference. Vol. 56. 2003.

[4] Joseph Ivanic, and Klaus Ruedenberg. "Rotation matrices for real spherical harmonics. Direct determination by recursion." The Journal of Physical Chemistry 100.15, 6342-6347, 1996.

[5] Wikipea. Euler angles

[6] Peter-Pike Sloan. "Stupid spherical harmonics (sh) tricks." Game developers conference. Vol. 9. 2008.

[7] Ravi Ramamoorthi, and Pat Hanrahan. "An efficient representation for irradiance environment maps." Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. 2001.

编辑于 2020-07-09

季同 2020-07-31

“Laplacian in Spherical Coordinates”中公式(8)等式右项的“1/r^2”应为“2/r”，公式(14)中代入时倒是正确的。推了几遍还以为自己推错了_(:з」∠)_

4

bactlink 回复 季同 02-02

我和你一样，但是那个pdf结果又是对的

赞

yi wang 2020-07-02

为什么球谐函数的三维图和氢原子轨道那么像?

2

不发nature不改名 回复 yi wang 2020-07-02

因为氢原子的薛定谔方程也是一个带有拉普拉斯算符的微分方程，其轨道解也是球协函数

3

杨知守 回复 yi wang 2020-07-03

氢原子轨道的角向部分就是球谐函数

2

张晓宇 2020-07-03

以前想推一下拉普拉斯方程的球面表达，进你这链接一看，难怪推不出。。。

1

HanetakaYuminaga 2020-07-03

最近在学习数学分析，其实“广义傅立叶展开”还有更一般的形式，称为Stone-Weierstrass逼近定理

赞

leinlin 2020-07-02

当时被卡的地方在 拉普拉斯方程为什么能表示光照能量上

赞

龙六一 回复 leinlin 01-05

为什么拉普拉斯方程的解可以表示光照能量啊?

赞