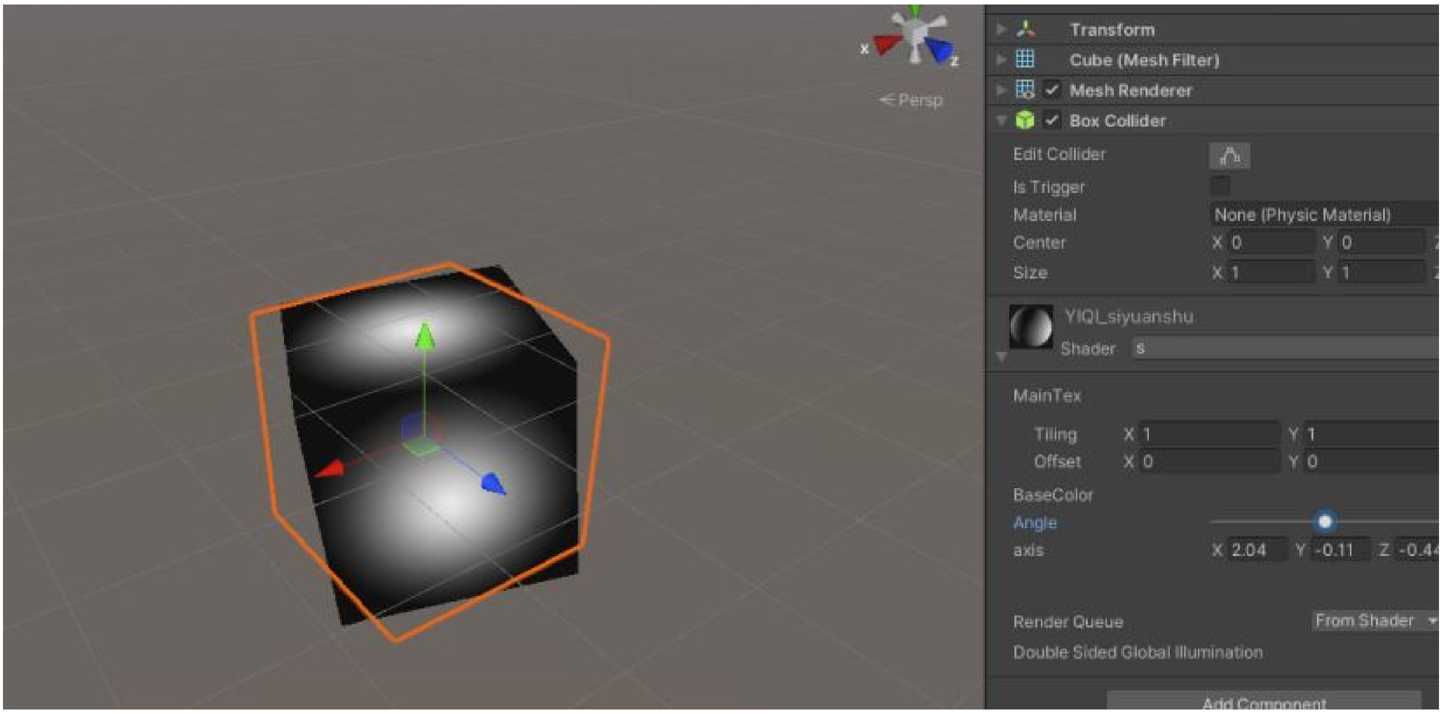


# 造一个四元数的轮子

**nice time**

3D美术，学习图形学中

取消关注

说到旋转，不得不提四元数，unity内置的旋转都是四元数计算，它是比旋转矩阵有更好的性能，相对于欧拉角有非常多的优势。unity也封装好了一个四元数类，也提供了很多好用的方法，但是核心计算封在unity引擎的c++源码里），看它的计算的本质就比较麻烦，为了方便学习，本人决定用c#写了个四元数类并实现一部分方法，以供学习其计算原理。

四元数由2部分构成：实部a，虚部V(后文都用大写来表示此为三维向量)。一个四元数可写成q=[a，V].(实部在前，虚部在后，顺序也可以交换，这取决于你如何去定义它，为了方便本人的习惯，本人是实部在前，虚部在后)。

---

### 四元数的加减法：

$$[a，\quad V]\pm[b,U]=[a\pm b,V\pm U]$$

### 四元数的乘法，即Graßmann积 它不满足交换律(注意下面向量与向量之间点积“•”和叉积“X”)：

$$[a，\quad V]\cdot[b,U]=[ab-V\cdot U,aU+bV+V\times U]$$

**四元数q的共轭四元数q*：**

$$q=[a，\ V]则q*=[a，\ -V]$$

四元数的共轭本质只是把虚部取负即可。

**四元数q的模长|q|：**

$$|[a，\ V]|=\sqrt{a^2+|V|^2}$$

**四元数的逆（四元数没有除法，除法就是乘它的逆）：**

$$[a，\ V]^{-1}=\frac{[a，\ V]}{|[a，\ V]|^2}$$

$$q^{-1}=\frac{q*}{||q||^2}$$

---

**四元数的逆的推导：**

$$令q=[a，\ V]则q*=[a，\ -V]$$

$$则有q.q*=[a，\ V][a，\ -V]=[a^2+|V|^2，\ -V\times V]$$ （**注意点积“•”和叉积“X”**）

$$则有q.q*=[a^2+|V|^2，\ 0]=||q||^2$$ 注意后面是个0向量 不是0

$$因为||q||^2是个常数，故2边同时除||q||^2$$

$$则有\frac{q.q*}{||q||^2}=1（条件是||q||^2不为0）$$

$$看到1了，就可以构造q^{-1}了，我们令1=q\cdot q^{-1}$$

则有 $\frac{q.q*}{||q||^2}=q\cdot q^{-1}$

$$\text{等式2边都同时乘}q^{-1}\text{可得}$$

$$q^{-1}\cdot\frac{q.q*}{||q||^2}=q^{-1}\cdot q\cdot q^{-1}$$

则可得

$$\frac{q*}{||q||^2}=q^{-1}$$

$$\text{（条件是}||q||^2\text{不为0）}$$

四元数的求逆得证.

在求证过程的第二步，我们其实还可以计算
$q*.q=[a，\ -V][a，\ V]=[a^2+|V|^2，\ 0]=||q||^2$

顺便得出 $q.q*=q*.q=||q||^2$ 这里也证明了四元数和四元数的共轭相乘 满足交互律

## 其他性质

**单位四元数**：如果一个四元数的模长为1，则它为单位四元数，它的逆等于它的共轭。

$$||q||^2=1$$

$$q^{-1}=\frac{q*}{||q||^2}$$

则有 $q^{-1}=q*$

由此可见，单位四元数的求逆非常方便。

**纯四元数**： 实部为0的四元数 即为纯四元数，纯四元数的计算更加简单快捷。

$$[0，\ V]\pm[0,U]=[0,V\pm U]$$

$$[0，\ V]\cdot[0,U]=[-V\cdot U,V\times U]$$

$$[0, \ V]^{-1} = \frac{[0, \ V]}{||V||^2}$$

特殊性质:

$$假如 p = [0, \ V], \ q = [0, U]$$

$$若 V//U, 则有 qp = pq 满足交换律$$

$$若 V \perp U, 则 qp = pq * 但不满足 pq = qp*$$

**四元数的旋转:**

一个绕着T轴旋转θ的四元数q可以表示为:

q=[cos（θ/2）,sin（θ/2）*T]

$$故对于任意的一个四元数旋转 q = [a, V]$$

$$它对应的旋转角度 \theta 为 = 2arccos（a）$$

$$对应的旋转轴 T = V/sin(\theta/2)$$

某点v绕着旋转轴U旋转了θ角度，到达了新的点v ‘ 这里令V为原点到v的向量，V’ 为原点到v’ 的向量 有

$$V^{'} = q.V.q^{-1}$$

由于V和V'是三维向量，我们上公式是把V拓展为一个实部为0，虚部为V的纯四元数进行Graßmann积计算

编辑于 06-18