L M M J V L

Conjuntos Finitos y Conjuntos Infinitos

medida
\# elem

| Finitos | → ACB, A≅B

| Infinitos | → - cuadrados perfectos, - Multiplos de 17

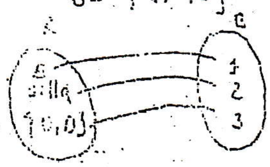
Conjuntos Equivalentes

Los conjuntos A y B se dicen equivalentes si existe una biyección $f: A \to B$

Ejemplo.

$A = \{5, \text{silla}, \{0,0\}\}$

$B = \{1,2,3\}$



f es biyectiva

$A \cong B$

Conjunto Finito

Se dice que un conjunto A es finito si es equivalente a $\{1,2,3,\dots,n\}$ para algun $n \in \mathbb{N}$

Eje:

$A = \{5, \text{silla}, \{0,0\}\}$

$I_3 = \{1,2,3\}$

$A \cong I_3 \therefore A$ Finito

Eje:

A = Estudiantes presentes en el aula

Conjunto Infinito

Un conjunto es infinito si no es finito.

" No todos los conjuntos infinitos son contables

1 → Un conjunto se dice contablemente infinito si es equivalente con $\mathbb{N}$

2 → Un conjunto se dice contable si es finito o contablemente infinito.

Daver Limachi

Principio de casillas

Sean A y B conjuntos finitos no vacíos tal que $|A|>|B|$ entonces no existe una inyección de A en B

Nota → si A y $\{1,2,\dots,n\}$ son equivalentes, al valor de n se le llama cardinalidad de A y se simboliza $|A|=n$

Conjunto Potencia (conjunto de Partes) $\mathbb{P}(A)$

Sea A un conjunto: $2^A = \{B / B \subseteq A\}$

Ejei. $A = \{a,b\}$

$2^A = \{\phi, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}$

$A = \{1,2,3\}$

$2^A = \{\phi, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

Teo → El conjunto $2^{\mathbb{N}}$ es INCONTABLE

Prueba, por R.A.A. reducción al absurdo

Supongamos que $2^{\mathbb{N}}$ es CONTABLE entonces $2^{\mathbb{N}}$ es contablemente infinito

⇒ Existe $f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ biyectiva tal que $f(i) = S_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

Luego $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, S_2, S_3, \dots\}$

construyamos el conjunto

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$$

D Está en $2^{\mathbb{N}}$ por ser subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces $D = S_K$ para algún $K \in \mathbb{N}$

la pregunta es $K \in S_K$?

Supongamos que sí

$$K \in S_K \Rightarrow K \notin D \Rightarrow K \notin S_K \Rightarrow \Leftarrow$$

Supongamos que no

$$K \notin S_K \Rightarrow K \in D \Rightarrow K \in S_K \Rightarrow \Leftarrow$$

$2^{\mathbb{N}}$ es incontable

ALFABETO

Un alfabeto Σ es un conjunto finito distinto de vacío.
A sus elementos los llamaremos símbolos o letras

Eje:

Alfabeto Web $= \{@, \#, .com, .net, .bo, -, /, .edu \}$

$\Sigma_1 = \{ \emptyset, x, \div, r, * \}$

$\Sigma_2 = \{$ moto, auto, micro, camion $\}$

$\Sigma_3 = \{ \Delta, \diamond, \square, O \}$

$\Sigma_4 = \{ *, \delta, \circ, p, r \}$

Palabra

Una palabra sobre Σ es una sucesión finita de simbolos de Σ (σ_i).
Es decir si w es una palabra:

$$\boxed{w = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \dots \sigma_n ; \quad \sigma_i \in \Sigma}$$

Eje:

$\Sigma = \{a, b\}$

$w_1 = abab$ $\qquad w_4 = aaa$

$w_2 = bba$ $\qquad w_5 = bba$

$w_3 = aba$ $\qquad w_6 = baa$

Palabra Vacía

Sucesión vacía de simbolos $\boxed{\lambda = (\ )}$

Longitud

Si $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$; $\sigma_i \in \Sigma$, el entero n es la longitud de la palabra w

$\boxed{\text{notacion de longitud} = n = |w|}$

La única palabra de notación longitud cero es λ, es decir $\boxed{|\lambda| = 0}$

Notaciones

Σ^* conjunto de todas las palabras sobre Σ

Σ^+ " " " " " " " exepto λ

Σ^K conjunto de todas las palabras sobre Σ de longitud igual a K

$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$

$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

$\Sigma^K = \{ w \in \Sigma^* / |w| = K \}$

$\Sigma^1 = \{ w \in \Sigma^* / |w| = 1 \}$

$\Sigma^0 = \{ w \in \Sigma^* / |w| = 0 \} = \{\lambda\}$

Denotamos por $|w|_a$ al número de concurrencias de "a" en la palabra w

Ejemplo $\rightarrow$ $\Sigma = \{a, b\}$

$A = \{\lambda, b, bb, bbb, \ldots\}$

$B = \{\lambda, ab, abb, abbb, \ldots\}$

$C = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$

$D = \{\lambda, b, bb, bbb, \ldots aa, aba, aab, baa, \ldots ababab, aaaab, abaaa, bababaa$

Escribir cada conjunto por comprensión

$A = \{w \in \Sigma^* / w = b^n ; n \geq 0\} = \{b^n : n \geq 0\}$

$A = \{w \in \Sigma^* / |w|_a = 0 \vee |w| = 0\} = \{w \in \Sigma^* / |w| = n \quad n \in \mathbb{N} \quad |w|_b = n\}$

$B = \{w \in \Sigma^* / w = ab^n \wedge n \geq 1 \vee w = \lambda\}$

$C = \{w \in \Sigma^* / w = a^n b^n : n \geq 0\}$

$D = \{w \in \Sigma^* / |w|_a = \text{par}\} = \{w \in \Sigma^* / |w|_a = 0 \ (\text{mod } 2)\}$

Concatenación

Sea $u_i, v_j \in \Sigma^*$, es decir $u_i = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i$ y $v_j = \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_J$

$$uv = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_i \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_J$$

Propiedades

1 $\rightarrow$ $uv \neq vu$
2 $\rightarrow$ $(uv)w = u(vw)$
3 $\rightarrow$ $u\lambda = u = \lambda u$
4 $\rightarrow$ $|uv| = |u| + |v|$
5 $\rightarrow$ $|uv|_a = |u|_a + |v|_a$

Ejemplo $\rightarrow$ Sea $\Sigma = \{a, b\}$

$u = aaa \qquad v = bbb \qquad w = aba$

1 $\rightarrow$ $aaabbb \neq bbbaaa$
2 $\rightarrow$ $(aaabbb)aba = aaa(bbbaba)$
3 $\rightarrow$ $aaa\lambda = aaa = \lambda aaa$
4 $\rightarrow$ $|aaabbb| = 6$
5 $\rightarrow$ $|aaabbb|_a = 3 = |aaa|_a + |bbb|_a = 3 + 0 = 3$

PRINCIPIO DE INDUCCION PARA Σ^*

Sea L un conjunto de palabras sobre Σ con las propiedades:

> i) $\lambda \in L$
> ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$
> (Suponer el antecedente $\Rightarrow$ demostración condicional)
>
> Entonces $L = \Sigma^*$

Definicion de longitud

$$| \ | : \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$|\lambda| = 0$$
$$|wa| = |w| + 1$$

$\forall w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

w = palabra $\wedge$ a = simbolo de Σ

Ejemplo de Induccion

Eje $\rightarrow$ Demostrar formalmente $|uv| = |u| + |v|$, $\forall u, v \in \Sigma^*$

Sea $L = \{ v \in \Sigma^* \ / \ |uv| = |u| + |v| \}$

// cualquier palabra "v" que construya $|uv| \Rightarrow v \in L$

i) $\lambda \in L$?

$|u\lambda| = |u| = |u| + 0 = |u| + |\lambda|$ $\quad \therefore \lambda \in L$

ii) Sea $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$ --- por demostrar

$\underbrace{|uw| = |u| + |w|}_{H.I.}$

p.d. $\rightarrow |u(wa)| = |u| + |wa|$

$$\begin{aligned}
|u(wa)| &= |(uw)a| \\
&= |uw| + 1 \\
&= (|u| + |w|) + 1 \quad H.I. \\
&= |u| + (|w| + 1) \\
&= |u| + |wa|
\end{aligned}$$

$\therefore wa \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$ //

Demostrar $\quad |uv|_a = |u|_a + |v|_a \quad \forall\, u,v \in \Sigma^*$

$$L = \{ v \in \Sigma^* \,/\, |uv|_a = |u|_a + |v|_a \}$$

i) $\lambda \in L$?

$$|u\lambda|_a = |u|_a = |u|_a + 0 = |u|_a + |\lambda|_a$$

$\therefore \; \lambda \in L$

ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

pod: $\; |u(wa)|_a = |u|_a + |(wa)|_a$

$$\begin{aligned}
|u(wa)|_a &= |(uw)a|_a \\
&= |uw|_a + 1 \\
&= (|u|_a + |w|_a) + 1 \\
&= |u|_a + (|w|_a + 1) \\
&= |u|_a + |wa|_a
\end{aligned}$$

$\therefore \; wa \in L$

Entonces $\quad L = \Sigma^*$

INVERSA

Si $w = a_1, a_2 \dots a_n \in \Sigma^n$ a la palabra $\boxed{w' = a_n \dots a_2 a_1}$ se le llama inversa o transpuesta de w

Ejemplo $\Sigma = \{a, b\}$

$w = babba$
$w' = abbab$

otra definición:

$$' : \Sigma^* \to \Sigma^*$$

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \\ (wa)' = aw' & \forall w \in \Sigma^*, \; a \in \Sigma \end{cases}$$

Ejemplo
Sea $\Sigma^* = \{a, b\}$ y $w = bbab$ $w' = ?$

$w' = (bbab)'$
$w' = b(bba)'$
$= ba(bb)'$
$= bab(b')$
$= babb$ //

Demostrar Formalmente

$|w'| = |w| \quad \forall w \in \Sigma^*$

$L = \{w \in \Sigma^* \,/\, |w'| = |w|\}$

i) $\lambda \in L$

$|\lambda'| = |\lambda| \quad \therefore \lambda \in L$

ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

H.I $=$ $|w'| = |w|$

p.d $= |(wa)'| = |aw'|$
$= |a| + |w'|$
$(H.I) = |w'| + |a| \quad \therefore wa \in L$
$= |w| + |a| \quad$ Entonces $L = \Sigma^*$
$= |wa|$

POTENCIA DE UNA PALABRA

$$w^n = \underbrace{ww \ldots w}_{n\text{ - veces}}$$

$w^1 = w$
$w^0 = \lambda$

Por recurrencia

$w^0 = \lambda$
$w^{n+1} = w w^n$

PROPIEDADES

a $\rightarrow$ $|w^n| = n|w|$
b $\rightarrow$ $w^m w^n = w^{m+n}$
c $\rightarrow$ $(w^m)^n = w^{m.n}$
d $\rightarrow$ $\lambda^n = \lambda$

Ejemplo

$w^1 = w$
$w^0 = \lambda$
$w = bab$
$w^3 = bab\,bab\,bab$

$w = bab$
$w^3 = (bab)^3 = (bab)(bab)^2$
$= (bab)(bab)(bab)^1$
$= (bab)(bab)(bab)(bab)^0$
$= bab\,bab\,bab\,\lambda$
$= bab\,bab\,bab$ //

$w' = (XVY)'$ por eso no
$w' = YVX$

$w' = (XVY)'$
$w' = y'v'x'$

Demostraciones

- → Demostrar: $(xy)' = y'x'$

$L = \{ y \in \Sigma^* \mid (xy)' = y'x' \}$

i) $\lambda \in L$?

$(x\lambda)' = x' = \lambda x' = \lambda' x'$

$\therefore \lambda \in L$

ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

p.d. $(x(wa))' = (wa)'x$

H.I. $= (xy)' = y'x'$.

$(x(wa))' = ((xw)a)'$

$= a(xw)'$

$= a(w'x')$

$= (aw')x'$

$= (wa)'x'$

$\therefore wa \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$ //

- Demostrar $|w^n| = n|w|$

$\forall w \in \Sigma^*$

$L = \{ n \in \mathbb{N} \mid |w^n| = n|w| \}$

i) $1 \in L$?

$|w^1| = |w|$

$= 1 \cdot |w|$

$\therefore 1 \in L$

ii) $n+1 \in L$?

$|w^{n+1}| = |w^n w|$ // $w^{n+1} = ww^n$

$= |w^n| + |w|$

$= n|w| + |w|$

$= |w|(n+1)$

$= (n+1)|w|$

$\therefore n+1 \in L$

entonces $L = \Sigma^*$

- Demostrar $w^m w^n = w^{m+n}$

$L = \{ n \in \mathbb{N} \mid w^m w^n = w^{m+n} \}$

i) $1 \in L$?

$w^m w^1 = w^m w$

$= w^{m+1}$

ii) $(n+1) \in L$?

$w^m w^{n+1} = w^m w^n w$

$= (w^m w^n) w$

$= (w^{m+n}) w$

$= w^{(m+n)} w$

$= w^{(m+n)+1}$

$= w^{m+(n+1)}$

$\therefore n+1 \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$ //

- Demostrar: $(w^m)^n = w^{m \cdot n}$

$L = \{ n \in \mathbb{N} \mid (w^m)^n = w^{m \cdot n} \}$

i) $1 \in L$?

$(w^m)^1 = w^m$

$= w^{m \cdot 1}$

$\therefore 1 \in L$

ii) $n+1 \in L$?

$(w^m)^{n+1} = w^{m(n+1)}$

$= w^m w^{mn}$

$= w^{m(n+1)}$

$\therefore n+1 \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$

- Demostrar $|w^n| = n|w|$

Sea $L = \{ w \in \Sigma^* \, / \, |w^n| = n|w| \}$

i) $\lambda \in L$?

$\lambda^n = n|0| = n|\lambda|$

$\therefore \lambda \in L$

ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

Supongamos $|w^n| = n|w| \wedge a \in \Sigma$

p.d. $|(wa)^n| = n|wa|$

$$\begin{aligned}
|(wa)^n| &= |(wa)^n (wa)^0| \\
&= |(wa)^n \cdot \lambda| \\
&= |w^n a^n| \\
&= |w^n| + |a^n| \\
&= n|w| + n|a| \\
&= n(|w| + |a|) \\
&= n(|wa|)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} w^1 = w \\ w^0 = \lambda \\ w^{n+1} = ww^n \end{cases}$$

Prefijo, Sufijo, Subpalabras

Sean $v, z \in \Sigma^*$

→ Se dice que v es prefijo de z y se escribe $\underline{v \text{ pref } z}$ si y solo si existe $u \in \Sigma^*$ tal que $z = vu$

→ Se dice que v es sufijo de z y se escribe $\underline{v \text{ suf } z}$ si y solo si existe $u \in \Sigma^*$ tal que $z = uv$

→ Se dice que v es subpalabra de z y se escribe $\underline{v \text{ subp } z}$ si y solo si existe $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ tales que $z = u_1 v u_2$

$z = aaaabbbb$

$pref = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, aaaab, aaaabb, aaaabbb, aaaabbbb\}$

$z = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$

$v = a_1 \cdots a_j$

$Suf = \{\lambda, b, bb, bbbb, abbbb, aabbbb, aaabbbb, bbb\}$

$sub = \{\lambda, aa, aaa, aaaa, bbbb, aaaab, aaaabb, aaaabbb, aaaabbbb,$
$abbbb, aabbb \ldots$

Supongamos $\boxed{x \text{ pref } y \wedge y \text{ pref } x \Rightarrow x = y}$

$(\exists u_1)(u_1 \in \Sigma^* / y = x u_1) \wedge (\exists u_2)(u_2 \in \Sigma^* / x = y u_2) \Rightarrow$

$(\exists u_1, u_2)(u_1, u_2 \in \Sigma^* / x = (x u_1) u_2) \Rightarrow$

$(\exists u_1, u_2)(u_1, u_2 \in \Sigma^* / x = x (u_1 u_2)) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 u_2 = \quad u_1 = \lambda \wedge u_2 = \lambda$

$y = x u_1 \qquad x = y u_2$

$y = x \lambda \qquad x = y \lambda$

$y = x \qquad x = y$

$U \text{ pre } W$

$Y + Z$

$X = \underset{pre}{Y} \underset{suf}{Z} \qquad W = \underset{pre}{U} A$

λ

Supongamos: $\underline{x \text{ pref } y \wedge y \text{ pref } z \Rightarrow x \text{ pref } z}$ |

$x \text{ pref } y \wedge y \text{ pref } z \Rightarrow (\exists u_1)(u_1 \in \Sigma^* / y = x u_1) \wedge (\exists u_2)(u_2 \in \Sigma^* / z = y u_2)$

$\Rightarrow (\exists u_1, u_2)(u_1, u_2 \in \Sigma^* / z = (x u_1) u_2)$

$\Rightarrow (\exists u_1, u_2)(u_1, u_2 \in \Sigma^* / z = x (u_1 u_2))$ $\boxed{// u_3 = u_1 u_2}$?

$\Rightarrow (\exists u_3)(u_3 \in \Sigma^* / z = x u_3) \Rightarrow \underline{x \text{ pref } z} \; //$

LENGUAJES

Un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*

Eje, $\emptyset$ es lenguaje (porque el vacio es subconjunto de un conjunto)

Σ^* es lenguaje (Σ^* es subconjunto de Σ^*)

Σ es lenguaje

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Sigma^* = \{\lambda, a, b, ba\ ba, bb, baa, aba, abb\}$

$L_1 = \{\lambda$

$L_2 = \{baa, bb\}$

$L_3 = \{a^n : n \geq 0\}$

$L_4 = \{w \in \Sigma^* / w = a^n \quad n \geq 0\}$ ... y mucho mas.

$L_5 = \{a^n b^n : n \geq 0\}$

Hay lenguaje Finitos e infinitos !

Operaciones

Sea $A, B \subseteq \Sigma^*$

UNION $\rightarrow$ $A \cup B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \vee w \in B\}$

INTERSECCION $\rightarrow$ $A \cap B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \wedge w \in B\}$

DIFERENCIA $\rightarrow$ $A - B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \wedge w \notin B\}$

COMPLEMENTO $\rightarrow$ $A^c = \{w \in \Sigma^* / w \notin A\}$

CONCATENACION $\rightarrow$ $AB = \{w \in \Sigma^* / w = xy \wedge x \in A \wedge y \in B\}$

TRANSPOSICION $\rightarrow$ $A' = \{w' \in \Sigma^* / w \in A\}$

ESTRELLA DE KLEENE $\rightarrow$ $A^* = \{w \in \Sigma^* / w = w_1 w_2 \dots w_k$ para algún $k \in \mathbb{N} \wedge$ para algunos $\dots w_k \in L\}$

Ejercicios

1. Sea $\Sigma = \{a, b\}$

$L_1 = \{a, ab\}$ $\quad$ $L_2 = \{\lambda, a, ba\}$

Hallar

a) $L_1 \cup L_2 = \{\lambda, a, ab, ba\}$

b) $L_1 \cap L_2 = \{a\}$

c) $L_1 - L_2 = \{ab\}$

d) $L_2 - L_1 = \{\lambda, ba\}$

e) $L_1^{I} = \{ba, a\}$

f) $L_2^{I} = \{ab, a, \lambda\}$

g) $L_1 L_2 = \{a, aa, aba, abba\}$

H) $L_1^2 = L_1 L_1 = \{aa, aab\}$

I) $L_1^* = \{\overset{0}{\lambda}, \overbrace{a, ab}^{1}, \overbrace{aa, aab, aba, abab}^{2}, aaa, aaab \ldots$

$L_1^* = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup \ldots$

$L_1^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^i$

2. Sean $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ Demostrar

a) $\boxed{A\phi = \phi A = A}$ $\quad$ por R.A.A

$1 \Rightarrow A\phi \neq \phi A$ $\quad$ // se niega lo que se quiere demostrar

Sea $w \in A\phi \Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in \phi$ $\quad$ // se halla

$\Rightarrow \Leftarrow$

Se halla la contradicción

Entonces $A\phi = \phi A$ //

b) Demostrar $A\{\lambda\} = \{\lambda\}A = A$ $A\{\lambda\} = A$

$$\underbrace{\underbrace{A\{\lambda\} \subseteq A}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{A[X] \subseteq A\{\lambda\}}_{\mathrm{II}}}$$ $\longrightarrow$?

$\mathrm{I} \rightarrow$ p.d. $\underline{w \in A\{\lambda\}} \Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in \{\lambda\}$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y = \lambda$

$\Rightarrow w = x\lambda \wedge x \in A$

$\Rightarrow w = x \wedge x \in A$

$\Rightarrow \underline{w \in A}$

$\mathrm{II} \rightarrow$ p.d. $w \in A \subseteq A\{\lambda\}$

$\underline{w \in A} \Rightarrow w = x \wedge x \in A$

$\Rightarrow w = x\lambda \wedge x \in A$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y = \lambda$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in \{\lambda\}$

$\Rightarrow \underline{w \in A\{\lambda\}}$

Entonces $A\{\lambda\} \subseteq A \wedge A \subseteq A\{\lambda\}$ //

c) Demostrar $\boxed{A(BC) = (AB)C}$

p.d. $\underbrace{A(BC) \subseteq (AB)C}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{(AB)C \subseteq A(BC)}_{\mathrm{II}}$

$\mathrm{I} \rightarrow \underline{w \in A(BC)} \Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in (BC)$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge (y = jk \wedge j \in B \wedge k \in C)$

$\Rightarrow w = xjk \wedge x \in A \wedge j \in B \wedge k \in C$

$\Rightarrow w = uk \wedge (u = xj \wedge x \in A \wedge j \in B) \wedge k \in C$

$\Rightarrow w = uk \wedge u \in (AB) \wedge k \in C$

$\Rightarrow \underline{w \in (AB)C}$ $\therefore A(BC) \subseteq (AB)C$ //

$\mathrm{II} \rightarrow w \in \underline{(AB)C} \Rightarrow w = xy \wedge x \in (AB) \wedge y \in C$

$\Rightarrow w = jky \wedge j \in A \wedge \underline{k \in B} \wedge \underline{y \in C}$

$\Rightarrow w = ju \wedge j \in A \wedge (u = ky \wedge k \in B \wedge y \in C)$

$\Rightarrow w = ju \wedge j \in A \wedge u \in (BC)$

$\Rightarrow \underline{w \in A(BC)}$

Entonces $A(BC) \subseteq (AB)C \wedge (AB)C \subseteq A(BC)$ //

d) Demostrar $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Sea $\underbrace{(A\cup B)C \subseteq AC \cup BC}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{AC \cup BC \subseteq (A\cup B)C}_{\mathrm{II}}$

I → p.d. $w \in (A\cup B)C \Rightarrow w \in (AC \cup BC)$

sea $w \in (A \cup B)C \Rightarrow w = xy \wedge x \in (A\cup B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow w = xy \wedge (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow (w = xy \wedge x \in A \wedge y \in C) \vee (w = xy \wedge x \in B \wedge y \in C)$

$\Rightarrow (w \in AC) \vee (w \in BC)$

$\Rightarrow w \in AC \cup BC$

$\therefore (A\cup B)C \subseteq AC \cup BC$ //

II → sea $w \in (AC \cup BC) \Rightarrow w \in AC \vee w \in BC$

$\Rightarrow (w = xy \wedge x \in A \wedge y \in C) \vee (w = xy \wedge x \in B \wedge y \in C)$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C))$

$\Rightarrow w = xy \wedge (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow w \in (A\cup B)C$

Entonces

$(A\cup B)C \subseteq AC \cup BC \wedge AC \cup BC \subseteq (A \cup B)C$ //

e) Demostrar $A(B\cup C) = AB \cup AC$

Sea $\underbrace{A(B\cup C) \subseteq AB \cup AC}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{AB \cup AC \subseteq A(B\cup C)}_{\mathrm{II}}$

I →
sea $w \in A(B\cup C) \Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in (B\cup C)$

$\Rightarrow (w = xy \wedge x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C)$

$\Rightarrow (w = xy \wedge x \in A \wedge y \in B) \vee (w = xy \wedge x \in A \wedge y \in C)$

$\Rightarrow w \in AB \vee w \in AC$

$\Rightarrow w \in AB \cup AC$

II → Sea $AB \cup AC \Rightarrow w \in AB \vee w \in AC$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C))$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in A) \wedge (y \in B \vee y \in C))$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C))$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in A \wedge y \in B\cup C$

$\Rightarrow w \in A(B\cup C)$

Entonces $A(B\cup C) \subseteq AB \cup AC$ $\wedge$ [illegible] //

③ $P, Q, R \subseteq \Sigma^*$ Demostrar

a) Demostrar $\boxed{(P \cup Q)' = P' \cup Q'}$

p.d. $\underbrace{(P \cup Q)' \subseteq P' \cup Q'}_{\text{I}} \wedge \underbrace{P' \cup Q' \subseteq (P \cup Q)'}_{\text{II}}$

I sea $w' \in (P \cup Q)'$ $\overset{\text{transpuesta}}{\Rightarrow} w \in (P \cup Q)$

$\overset{\text{unión}}{\Rightarrow} w \in P \vee w \in Q$ $\therefore (P \cup Q)' \subseteq P' \cup Q'$ //

$\overset{\text{transp}}{\Rightarrow} w' \in P' \vee w' \in Q'$

$\overset{\text{unión}}{\Rightarrow} w' \in P' \cup Q'$

II sea $w' \in P' \cup Q' \Rightarrow w' \in P' \vee w' \in Q'$

$\Rightarrow w \in P \vee w \in Q$

$\Rightarrow w \in (P \cup Q)$

$\Rightarrow w' \in (P \cup Q)'$

Entonces $(P \cup Q)' \subseteq P' \cup Q' \wedge P' \cup Q' \subseteq (P \cup Q)'$ //

b) Demostrar $\boxed{(PQ)' = Q'P'}$

p.d. $\underbrace{(PQ)' \subseteq Q'P'}_{\text{I}} \wedge \underbrace{Q'P' \subseteq (PQ)'}_{\text{II}}$

I Sea $w' \in (PQ)' \Rightarrow w \in (PQ)$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in P \wedge y \in Q$

$\Rightarrow w' = (xy)' \wedge x' \in P' \wedge y' \in Q'$

$\Rightarrow w' = y'x' \wedge x' \in P' \wedge y' \in Q'$

$\Rightarrow w' \in Q'P'$

II Sea $w' \in Q'P' \Rightarrow w' \in Q'P'$

$\Rightarrow w' = y'x' \wedge y' \in Q \wedge x' \in P'$

$\Rightarrow w' = (xy)' \wedge y' \in Q \wedge x' \in P'$

$\Rightarrow w = xy \wedge y \in Q \wedge x \in P$

$\Rightarrow w \in PQ$

$\Rightarrow w' \in (PQ)'$

Entonces se demuestra $(PQ)' = Q'P'$

c) $(P \cup Q)^2 = P^2 \cup (PQ) \cup (QP) \cup Q^2$ Demostrar

P.d

$(P \cup Q)^2 \subseteq P^2 \cup (PQ) \cup (QP) \cup Q^2$ } (I)

$\wedge$

$P^2 \cup (PQ) \cup (QP) \cup Q^2 \subseteq (P \cup Q)^2$ } (II)

(I) sea $w \in (P \cup Q)^2 \Rightarrow w \in (P \cup Q)(P \cup Q)$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in (P \cup Q) \wedge y \in (P \cup Q)$

$\Rightarrow w = xy \wedge (x \in P \vee x \in Q) \wedge (y \in P \vee y \in Q)$

$\Rightarrow w = xy \wedge (x \in P \wedge (y \in P \vee y \in Q) \vee x \in Q \wedge (y \in P \vee y \in Q))$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in P \wedge y \in P) \vee (x \in P \wedge y \in Q) \vee (x \in Q \wedge y \in P) \vee (x \in Q \wedge \cdots$

$\Rightarrow$ $(w = xy \wedge x \in P \wedge y \in P) \vee (w = xy \wedge x \in P \wedge y \in Q)$

$\vee (w = xy \wedge x \in Q \wedge y \in P) \vee (w = xy \wedge x \in Q \wedge y \in Q)$

$\Rightarrow w \in PP \vee w \in PQ \vee w \in QP \vee w \in QQ$

$\Rightarrow w \in P^2 \cup PQ \cup QP \cup Q^2$

(II) Sea $w \in P^2 \cup PQ \cup QP \cup Q^2 \Rightarrow w \in P^2 \vee w \in PQ \vee w \in QP \vee w \in Q^2$

$\Rightarrow w \in PP \vee w \in PQ \vee w \in QP \vee w \in QQ$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in P \wedge y \in P) \vee (x \in P \wedge y \in Q) \vee (x \in Q \wedge y \in P)$

$\vee (x \in Q \wedge y \in Q))$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in P) \wedge (y \in P \vee y \in Q) \vee x \in Q \wedge (y \in P \vee y \in Q))$

$\Rightarrow w = xy \wedge ((x \in P \vee x \in Q) \wedge (y \in P \vee y \in Q))$

$\Rightarrow w = xy \wedge x \in P \cup Q \wedge y \in P \cup Q$

$\Rightarrow w \in (P \cup Q)^2$

Entonces se demuestra $(P \cup Q)^2 = P^2 \cup (PQ) \cup (QP) \cup Q^2$ //

Igualdad de conjuntos

Se dice que en un conjunto A es igual a B $(A=B)$ si y solo si

$$\boxed{(A=B) \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Demostracion : $A=B$

$$\forall x ; [x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$
$$\Longleftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)$$
$$\Longleftrightarrow (x \in (A \subset B)] \wedge [x \in (B \subset A)]$$
$$\Longleftrightarrow x \in [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$
$$\Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A \;//$$

Teorema a $\rightarrow$ $\forall A$, se cumple que $\phi \subset A$

$\forall x$: $x \in \phi \longrightarrow x \in A$ sí $v(x \in \phi) = F$

$F \longrightarrow V$ entonces el valor de verdad de

$F \longrightarrow F$ $x \in A$ puede ser V o F

Observe que $v(x \in \phi \rightarrow x \notin A)$ no puede ser V porque ningun elemento pertenece a ϕ. //

Teorema b $\rightarrow$ $\forall A$, se cumple que $A \subset A$

sí $v(x \in A \rightarrow x \in A) = V$

sí $v(x \in A) = V \Rightarrow V \rightarrow V = V$

sí $v(x \in A) = F \Rightarrow F \rightarrow F = V$

En cualquier caso sale verdadero

Ademas $A \subset A \Longleftrightarrow \forall x: (x \in A \longrightarrow x \in A)$

$$\Longleftrightarrow \sim x \in A \vee x \in A$$
$$\Longleftrightarrow V$$

Propiedades de la inclusion

① Antisimetria: Si $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \longrightarrow A = B$

② Transitividad: Si $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \longrightarrow A \subset C$

COMPLEMENTO DE CONJUNTOS

1 → $\boxed{\text{Involución } (A^c)^c = A \quad \text{Demostrar}}$

$$
\begin{aligned}
x \in (A^c)^c &\Rightarrow x \notin A^c \\
&\Rightarrow \sim x \in A^c \\
&\Rightarrow \sim x \notin A \\
&\Rightarrow \sim\sim x \in A \\
&\Rightarrow x \in A
\end{aligned}
$$

//

2 → $\boxed{\text{Demostrar } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

p.d $\underbrace{(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c}_{\text{II}}$

I) sea $w \in (A \cap B)^c$

$$
\begin{aligned}
w \in (A \cap B)^c &\Rightarrow w \notin (A \cap B) \\
&\Rightarrow \sim (w \in A \wedge w \in B) \\
&\Rightarrow \sim w \in A \vee \sim w \in B \\
&\Rightarrow w \in A^c \vee w \in B^c \\
&\Rightarrow w \in A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

II) sea $w \in A^c \cup B^c$

$$
\begin{aligned}
w \in A^c \cup B^c &\Rightarrow w \in A^c \vee w \in B^c \\
&\Rightarrow w \notin A \vee w \notin B \\
&\Rightarrow \sim w \in A \vee \sim w \in B \\
&\Rightarrow \sim (w \in A \wedge w \in B) \\
&\Rightarrow (w \in A \cap B)^c
\end{aligned}
$$

Entonces demostramos $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ //

* Demostrar: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\text{p.d. } \underbrace{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}_{\text{I}} \wedge \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)}_{\text{II}}$$

(I) Sea $w \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow w \in A \wedge w \in (B \cup C)$

$\Rightarrow w \in A \wedge (w \in B \vee w \in C)$

$\Rightarrow (w \in A \wedge w \in B) \vee (w \in A \wedge w \in C)$

$\Rightarrow (w \in A \cap B) \vee (w \in A \cap C)$

$\Rightarrow w \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(II) Sea $w \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow w \in (A \cap B) \vee w \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (w \in A \wedge w \in B) \vee (w \in A \wedge w \in C)$

$= w \in A \wedge (w \in B \vee w \in C)$

$= w \in A \wedge (w \in B \cup C)$

$= w \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore$ Entonces demostramos $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ //

★ Demostrar $\boxed{A \cup A = A}$

$x \in (A \cup A) \Rightarrow x \in A \vee x \in A$ $\qquad$ // $\overline{\underline{P \vee P \Rightarrow P}}$ //

$= x \in A$

//

★ Demostrar $\boxed{A \cup \phi = \phi \cup A = A}$

$x \in (A \cup \phi) \Rightarrow x \in A \vee \overbrace{x \in \phi}^{F}$.

$\Rightarrow x \in A \vee F$

$\Rightarrow x \in A$

//

Demostrar $\boxed{A \subseteq A \cup B}$ □J□

p.d. $w \in A \Rightarrow w \in A \cup B$

$$\boxed{\frac{p}{p \vee q}}$$

Sea $w \in A \Rightarrow w \in A \vee w \in B$

$= w \in A \cup B$

Entonces $A \subseteq A \cup B$

Demostrar $\boxed{A \cap \phi = \phi}$ Sea $A \subseteq \Sigma^*$

por R.A.A.

$A \cap \phi \neq \phi$

Sea $A \cap \phi \Rightarrow w \in A \wedge w \in \phi$

$\Rightarrow w \in \phi$

$$\boxed{\frac{p \wedge q}{p}}$$

$$\boxed{\frac{p \wedge q}{q}}$$

$\therefore$ Entonces $A \cap \phi = \phi$

Demostrar $\boxed{A - A = \phi}$

Sea $A \subseteq \Sigma^*$

por R.A.A.

$A - A \neq \phi$

Sea $x \in A - A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin A$

$\Rightarrow\!\Leftarrow$

se halla la contradicción.

Entonces

$\therefore$ $A - A = \phi$

//

★ Demostrar $A \cap B \subseteq A$

$$\boxed{\frac{p \wedge q}{p} \quad \text{ó} \quad \frac{p \wedge q}{q}}$$

$p + q = p - (r * q)$

Sea $\omega \in A \cap B \Rightarrow \omega \in A \wedge \omega \in B$

$\Rightarrow \omega \in A$

Demostrado

★ Demostrar $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Sea $\underbrace{A \cup B \subseteq B}_{\text{I}} \wedge \underbrace{B \subseteq A \cup B}_{\text{II}}$

I sea $\omega \in A \cup B \Rightarrow \omega \in A \vee \omega \in B$

$\Rightarrow \omega \in B$

II Sea $\omega \in B \Rightarrow \omega \in B \vee \omega \in A$

$\Rightarrow \omega \in A \vee \omega \in B$

$\Rightarrow \omega \in A \cup B$

★ Demostrar $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

p.d $\underbrace{A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)}_{\text{I}} \wedge \underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)}_{\text{II}}$

I Sea $\omega \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow \omega \in A \wedge \omega \in (B \cup C)$

$\Rightarrow \omega \in A \wedge (\omega \in B \vee \omega \in C)$

$\Rightarrow (\omega \in A \wedge \omega \in B) \vee (\omega \in A \wedge \omega \in C)$

$\Rightarrow (\omega \in A \cap B) \vee (\omega \in A \cap C)$

$\Rightarrow \omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

II Sea $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \omega \in (A \cap B) \vee \omega \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (\omega \in A \wedge \omega \in B) \vee (\omega \in A \wedge \omega \in C)$

$\Rightarrow \omega \in A \wedge (\omega \in B \vee \omega \in C)$

$\Rightarrow \omega \in A \wedge (\omega \in B \cup C)$

$\Rightarrow \omega \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore$ Entonces

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Diferencia de Conjuntos

$A - B \neq B - A$ // No es conmutativa

Demostrar: $A - B = A \cap B^c$

p.d. $\underbrace{A-B \subseteq A \cap B^c}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A \cap B^c \subseteq A-B}_{\text{II}}$

I Sea $w \in A-B \Rightarrow w \in A \wedge w \notin B$

$\Rightarrow w \in A \wedge w \in B^c$

$= w \in A \cap B^c$

II Sea $w \in A \cap B^c \Rightarrow w \in A \wedge w \in B^c$

$\Rightarrow w \in A \wedge w \notin B$

$\Rightarrow w \in A \wedge w \notin B$

$\Rightarrow w \in A - B$

∴ Entonces

$A - B = A \cap B^c$ //

Demostrar $A - (A-B) = A \cap B$

p.d. $\underbrace{A-(A-B) \subseteq A \cap B}_{\text{I}} \wedge \underbrace{A \cap B \subseteq A-(A-B)}_{\text{II}}$

I Sea $w \in A-(A-B) \Rightarrow w \in A \wedge w \notin (A-B)$

$\Rightarrow w \in A \wedge \sim(w \in A \wedge w \notin B)$

$\Rightarrow w \in A \wedge (w \notin A \vee w \in B)$

$\Rightarrow \underbrace{(w \in A \wedge w \notin A)}_{F} \vee (w \in A \wedge w \in B)$

$\Rightarrow w \in A \wedge w \in B$

$\Rightarrow w \in A \cap B$

II Sea $w \in A \cap B \Rightarrow w \in A \wedge w \in B$

$\Rightarrow (w \in A \wedge w \notin A) \vee (w \in A \wedge w \in B)$

$\Rightarrow w \in A \wedge (w \notin A \vee w \in B)$

$\Rightarrow w \in A \wedge \sim(w \in A \wedge \sim w \in B)$

$\Rightarrow w \in A - (A-B)$ ∴

Demostrar $L \cup \phi = L$

p.d. $\underbrace{L \cup \phi \subseteq L}_{\mathrm{I}} \wedge \underbrace{L \subseteq L \cup \phi}_{\mathrm{II}}$

$\boxed{V \vee F = V}$

I Sea $w \in L \cup \phi \Rightarrow w \in L \vee \underbrace{w \in \phi}_{\text{Falso}}$

$\Rightarrow w \in L$

II Sea $w \in L \Rightarrow w \in L \vee w \in \phi$

$\Rightarrow w \in L \cup \phi$

$\boxed{\dfrac{p}{p \vee q}}$

Entonces por I y II

$L \cup \phi = L$

Demostrar $L \cap \phi = \phi$

p.d R.A.A. → 1 → Negar lo que se quiere demostrar

→ 2 → Buscar una contradicción

→ 3 → Establecer lo que se quería demostrar

Sea $L \cap \phi \neq \phi$

Sea $x \in L \cap \phi \Rightarrow x \in L \wedge x \in \phi \Rightarrow \underbrace{x \in \phi}_{\text{Falso}}$

$\Rightarrow\Leftarrow$

∴ Entonces

$L \cap \phi = \phi$

1. Demostrar $L_1 \cap (L_2 - L_3) = (L_1 \cap L_2) - (L_1 \cap L_3)$

P.d. $L_1 \cap (L_2 - L_3) \subseteq (L_1 \cap L_2) - (L_1 \cap L_3)$ (I)

$\wedge$

$(L_1 \cap L_2) - (L_1 \cap L_3) \subseteq L_1 \cap (L_2 - L_3)$ (II)

(I) sea $w \in L_1 \cap (L_2 - L_3) \Rightarrow w \in L_1 \wedge w \in (L_2 - L_3)$

$\Rightarrow w \in L_1 \wedge (w \in L_2 \wedge w \notin L_3)$

$\Rightarrow F \vee [w \in L_1 \wedge w \in L_2 \wedge w \notin L_3]$

$\Rightarrow (F \wedge w \in L_2) \vee [w \in L_1 \wedge (w \in L_2 \wedge w \notin L_3)]$

$\Rightarrow ((w \in L_1 \wedge w \notin L_1) \wedge w \in L_2) \vee [w \in L_1 \wedge (w \in L_2 \wedge w \notin L_3$

$\Rightarrow [(w \in L_1 \wedge w \in L_2) \wedge w \notin L_1] \vee [(w \in L_1 \wedge w \in L_2) \wedge w \notin L_3]$

$\Rightarrow$

$(w \in L_1 \wedge w \in L_2) \wedge (w \notin L_1 \vee w \notin L_3)$

$\Rightarrow w \in (L_1 \cap L_2) \wedge \sim (w \in L_1 \wedge w \in L_3)$

$\Rightarrow w \in (L_1 \cap L_2) - (L_2 \cap L_3)$

② Demostrar $(L_1 \cup L_2) - L_3 = (L_1 - L_3) \cup (L_2 - L_3)$

p.d. $\underbrace{(L_1 \cup L_2) - L_3 \subseteq (L_1 - L_3) \cup (L_2 - L_3)}_{\mathrm{I}} \;\wedge\; \underbrace{(L_1 - L_2) \cup (L_2 - L_3) \subseteq (L_1 \cup L_2) - L_3}_{\mathrm{II}}$

I sea $w \in (L_1 \cup L_2) - L_3 \Rightarrow w \in (L_1 \cup L_2) \wedge w \notin L_3$

$\Rightarrow (w \in L_1 \vee w \in L_2) \wedge w \notin L_3$

$\Rightarrow (w \in L_1 \wedge w \notin L_3) \vee (w \in L_2 \wedge w \notin L_3)$

$\Rightarrow w \in (L_1 - L_3) \cup (L_2 - L_3)$

II sea $w \in (L_1 - L_3) \cup (L_2 - L_3) \Rightarrow w \in (L_1 - L_3) \vee w \in (L_2 - L_3)$

$\Rightarrow (w \in L_1 \wedge w \notin L_3) \vee (w \in L_2 \wedge w \notin L_3)$

$\Rightarrow (w \in L_1 \vee w \in L_2) \wedge w \notin L_3$

$\Rightarrow w \in (L_1 \cap L_2) - L_3$

∴ Entonces

$(L_1 \cap L_2) - L_3 = (L_1 - L_3) \cup (L_2 - L_3)$ //

Orden Lexicográfico

Cualquier lenguaje infinito puede ser ordenado lexicográficamente, en consecuencia se puede poner en biyectividad con los números naturales lo cual es muy importante.

$$f: \mathbb{N} \to L \quad f \text{ bigectiva}$$

¿Cómo?

1 → Se supone un orden en el alfabeto
2 → Entre dos palabras de distinta longitud la de menor longitud precede a la de mayor longitud
3 → Entre dos palabras de la misma longitud:
Se factoriza hasta el 1er simbolo diferente exclusive y la precedencia se decide, en base a los 1ros simbolos de la 2da parte de la factorización

Ejemplo → $L = \{a, b, ab, ac, acb, abc, c, aa, cba\}$ $\Sigma = \{a, b, c\}$

palabra			
	a, b, c	ab, ac, aa	acb, abc, cba
	Lon = 1	Lon = 2	Lon = 3

biyección $f: \mathbb{N} \to L$ (biyección)

1 → a	4 → aa	7 → abc
2 → b	5 → ab	8 → acb
3 → c	6 → ac	9 → cba

Representación Finita de Lenguajes

- LENG. FINITOS –
- LENG. Infinitos. ?

* Cualquier representación "UTILIZARÁ" algunos simbolos

* lenguajes diferentes tienen representaciones diferentes

Representación	Lenguajes
Σ ↓	Σ
Σ^*	Σ^*
Σ^* Se puede ordenar lexicograficamente	en 2^{Σ^*} Están todos los lenguajes sobre Σ
$f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$ $f \to$ biyectiva	$2^{\mathbb{N}}$ es incontable
Σ^* Es contablemente infinito	2^{Σ^*} es "Incontable"

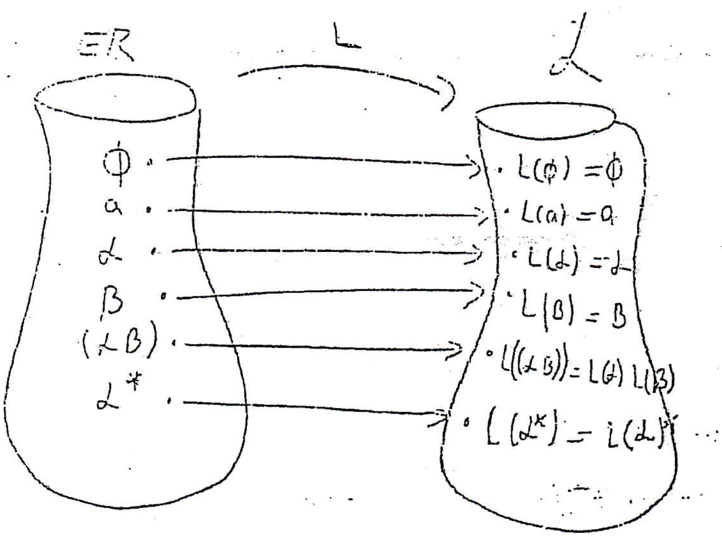
Expresiones Regulares (E R)

Las expresiones regulares (ER) sobre un alfabeto Σ son todas las palabras sobre $\Sigma \cup \{), (, \emptyset, \cup, * \}$ tal que cumple:

1 → $\emptyset$ y cada símbolo de Σ es una ER
2 → Si α y β son ER entonces $(\alpha\beta)$ es una ER
3 → Si α y β son ER entonces $(\alpha \cup \beta)$ es una ER
4 → Si α es una ER entonces α^* es una ER
5 → Nada más es una ER a menos que provenga de 1 – 4

Ejemplo → $\Sigma = \{a, b\}$

$\emptyset$	ER	a^*	ER	$(b \cup a^*)^*$	ER
a	ER	b^*	ER	$(b^* \cup a^*)^*$	ER
b	ER	$(b \cup a^*)$	ER	$(ab)^*$	ER
		$(b^* a)$	ER		



- $L(\emptyset) = \emptyset$
- $L(a) = \{a\}$
- $L((\alpha\beta)) = L(\alpha) L(\beta)$
- $L((\alpha \cup \beta)) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

$$L(a^*) = (a)^* = \{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$$

Ej: Sea $\alpha = (a \cup b)^*$; $L(\alpha) = ?$

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L((a \cup b)^*) = L((a \cup b))^* \\ &= (L(a) \cup L(b))^* \\ &= \{a, b\}^* \\ &= \{\lambda, a, b, aa, bb, ab, ba, \dots\} = \Sigma^* \end{aligned}$$

Definicion

Un lenguaje es regular si y solo si es generado por una expresion regular

Teorema La clase de lenguajes regulares tiene las sgtes. 3 propiedades:

1 → $\emptyset \in R$ y si $a \in \Sigma$ entonces $\{a\} \in R$

2 → Si $A, B \in R$ entonces $A \cup B$, AB, $A^* \in R$

3 → Si S es un conjunto de lenguajes conteniendo al $\emptyset$, a cada $\{a\}$ para $a \in \Sigma$ y cerrado bajo "$\cup$", concatenado, "$*$" entonces $R \subseteq S$

Ejemplo 1 → Sea $\alpha = b^* a b^* a b^*$ Escribir $L(\alpha)$ por comprensión

$$L(\alpha) = L(b^* a b^* a b^*)$$
$$= L(b^*) L(a) L(b^*) L(a) L(b^*)$$
$$= L(b)^* L(a) L(b)^* L(a) L(b)^*$$
$$= \{b\}^* \{a\} \{b\}^* \{a\} \{b\}^*$$
$$= \{w \in \Sigma^* / w = b^m a b^n a b^p \wedge m, n, p \geq 0\} //$$

(2) $\alpha = (a \cup b)^* b (a \cup b)^*$ Escribir $L(\alpha)$ por comprensión

$$L(\alpha) = L((a \cup b)^* b (a \cup b)^*)$$
$$= L((a \cup b)^*) L(b) L((a \cup b)^*)$$
$$= L((a \cup b))^* L(b) L((a \cup b))^*$$
$$= (L(a) \cup L(b))^* L(b) (L(a) \cup L(b))^*$$
$$= \{a, b\}^* \{b\} \{a, b\}^* //$$

$L = \{w \in \Sigma^* / w = xby \wedge x, y \in \{a, b\}^*\}$

(3) $\alpha = (a \cup c) b^*$ Escribir $L(\alpha)$ por comprensión

$$L(\alpha) = L((a \cup c) b^*)$$
$$= L((a \cup c)) L(b)^*$$
$$= (L(a) \cup L(c)) L(b)^*$$
$$= \{a, c\} \{b\}^*$$

$\therefore$ $L = \{w \in \Sigma^* / acb^n, n \geq 0\} //$

MÓDULOS

Eje: Correa Transportadora

- Correa
  1 → Mueve a la derecha
  2 → Mueve a la izquierda
  3 → Parada

- Control
  1 → hacia arriba
  2 → hacia abajo

- Movimiento

1 → Si la correa esta parada o moviendose a la izquierda y el control hacia abajo entonces la correa se mueve a la izquierda

2 → Si la correa se esta moviendo a la derecha y el control hacia abajo entonces la correa para.

3 → Si el control está hacia arriba la correa se mueve a la derecha independiente del estado actual

- Funcionamiento

símbolos (control)

		−	+
conjunto de estados (correa)	P	Izquierda	Derecha
	I	Izquierda	Derecha
	D	parada	Derecha

Correa : $K = \{P, I, D\}$

Control : $\Sigma = \{+, -\}$

Movimiento

$$\boxed{f(\text{Estado actual}, \text{control}) = \text{sgte. estado}}$$

$f(d, +) = D$

$f(d, -) = P$

$f(i, +) = D$

$f(I, -) = I$

$f(P, +) = D$

$f(P, -) = I$

Definición

Un módulo es una tripleta $D = (K, \Sigma, f)$ donde

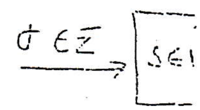
$K \rightarrow$ es un conjunto finito No vacío llamado conjunto de estados

$\Sigma \rightarrow$ es un conjunto finito No vacío llamado alfabeto de entrada

$f : K \times \Sigma \longrightarrow K$, llamada función de transición

Interpretación

Un módulo puede ser interpretado como un dispositivo que en determinados instantes de tiempo recibe señales (símbolos de entrada) que producen cambios en su configuración interna...



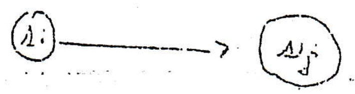
Representación

$K \setminus \Sigma$	σ_1	σ_2	σ_j	...	σ_m
s_1					
s_2					
s_i			s_K		
$\vdots$					
s_n					

donde $s_K = f(s_i, \sigma_j)$

Tabla de transición

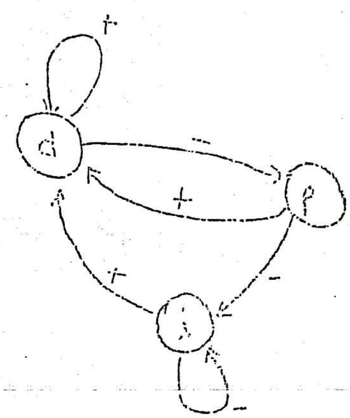
Grafo



sí $f(s_i, \sigma) = s_j$

Ejemplo

$K \setminus \Sigma$	+	-
d	d	p
i	d	i
p	d	i



- Comportamiento Dinámico

$$
\begin{array}{ccccccccc}
t_0 & & t_1 & & t_2 & & \cdots & & t_k \\
s_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & s_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & s_2 & \xrightarrow{\sigma_3} & \cdots & \xrightarrow{\sigma_{k-1}} & s_k
\end{array}
$$

$$s_{i+1} = f(s_i, \sigma_i) \qquad i = 1, 2, \dots, k-1$$

$$s_k = \hat{f}(s_0, \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{k-1})$$

Definición

Una función de estado terminal del módulo $D = (K, \Sigma, f)$ es una única función $\hat{f} : K \times \Sigma^* \to K$ tal que para todo $s \in K$, $w \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$

$$\boxed{\begin{cases} \hat{f}(s, \lambda) = s \\ \hat{f}(s, \sigma w) = \hat{f}(f(s, \sigma), w) \end{cases}}$$

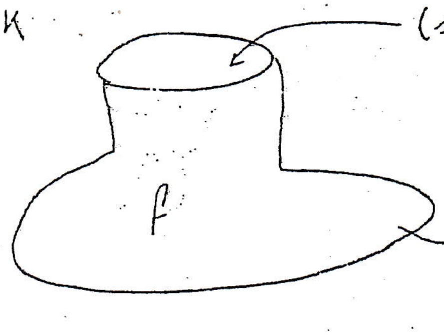
NOTA

① Si $w = \lambda$

$$\underline{\hat{f}(s,\sigma)} = \hat{f}(s, \sigma\lambda) = \hat{f}(f(s,\sigma), \lambda) = \underline{f(s,\sigma)}$$

② Para toda $w \in \Sigma^*$, $\hat{f}$ induce una función $f_w : K \to K$ tal que $f_w(s) = \hat{f}(s, w)\ \forall s \in K$

$f : K \times \Sigma \to K$ $\quad (s, \sigma) \in K \times \Sigma$



$f(s, \sigma) \in K$ un estado

Ejemplo $\longrightarrow$ Un ascensor de 3 pisos

$K \backslash \Sigma$	+	−
p	s	p
s	t	p
t	t	s

$$\hat{f}(p, +++-) = s \;//$$

$$p \xrightarrow{+} s \xrightarrow{+} t \xrightarrow{+} t \xrightarrow{-} s \;//$$

por def.

$$\hat{f}(p, +++-) = \hat{f}(f(p,+), ++-) = \hat{f}(s, ++-)$$
$$= \hat{f}(f(s,+), +-) = \hat{f}(t, +-)$$
$$= \hat{f}(f(t,+), -) = \hat{f}(t, -)$$
$$= f(t,-) = s \;//$$

EJERCICIO

① Demostrar : $\boxed{\hat{f}(s, uv) = \hat{f}[\hat{f}(s,u), v]}$

$\forall\, u, v \in \Sigma^*$

sea $L = \{u \in \Sigma^* / \hat{f}(s, uv) = \hat{f}[\hat{f}(s,u), v],\ v \in \Sigma^*\}$

i) $\lambda \in L$?

sea $\hat{f}(s, \lambda v) = \hat{f}(s, v)$

$= \hat{f}(\hat{f}(s,\lambda), v)$

ii) $w \in L \wedge \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma w \in L$

p.d $\hat{f}(s, (\sigma w) v) = \hat{f}[\hat{f}(s, \sigma w), v]$

$\hat{f}(s, (\sigma w) v) \Rightarrow \hat{f}(s, \sigma(wv))$

$\Rightarrow \hat{f}(f(s,\sigma), wv)$

$= \hat{f}([\hat{f}(s,\sigma), w], v)$ H.I.

$= \hat{f}(\hat{f}(s, \sigma w), v)$

$\therefore$ Entonces $\sigma w \in L$

$L = \Sigma^*$

③ Demostrar

Sea $\tilde{f} : K \times \Sigma^* \to K$ tal que $\forall s \in K, w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

$$\boxed{\begin{cases} \tilde{f}(s,\lambda) = s \\ \tilde{f}(s,w\sigma) = f[\tilde{f}(s,w),\sigma] \end{cases}}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{demostrar } \forall s \in K, u \in \Sigma^* \\ \tilde{f}(s,u) = \hat{f}(s,u) \end{array}}$ sea $L = \{ u \in \Sigma^* / \tilde{f}(s,u) = \hat{f}(s,u) \}$

i) $\lambda \in L$?

$\tilde{f}(s,\lambda) = s = \hat{f}(s,\lambda)$ ∴ $\lambda \in L$

ii) $w \in L \wedge \sigma \in \Sigma \Rightarrow w\sigma \in L$

p.d $\tilde{f}(s,w\sigma) = \hat{f}(s,w\sigma)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s,w\sigma) &= f(\tilde{f}(s,w),\sigma) && \text{def. de } \tilde{f} \\ &= f(\hat{f}(s,w),\sigma) && \text{H.I.} \\ &= \hat{f}(\hat{f}(s,w),\sigma) \\ &= \hat{f}(s,w\sigma) \, // \end{aligned}$$

∴ $w\sigma \in L$

$L = \Sigma^*$

(3) Demostrar

Sea $\bar{f} : K \times \Sigma^* \longrightarrow K^*$ tal que $\forall s \in K$; $w \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{f}(s, \lambda) = \lambda \\ \bar{f}(s, \sigma w) = f(s, \sigma)\, \bar{f}\,[f(s, \sigma), w] \end{array}}$$

$\forall s \in K$, $u \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$

a) $\boxed{\text{Demostrar } \bar{f}(s, \sigma) = f(s, \sigma)}$

?

si $w = \lambda$

$$\bar{f}(s, \sigma w) = f(s, \sigma)\, \bar{f}(f(s, \sigma), w]$$
$$= f(s, \sigma)\, \underbrace{\bar{f}\,[f(s, \sigma), \lambda]}_{\lambda}$$
$$= f(s, \sigma)\lambda$$
$$= f(s, \sigma)$$

$(\in \Sigma$

b) $\boxed{\text{Demostrar } |\bar{f}(s, u)| = |u|}$

Sea $L = \{u \in \Sigma^* / |\bar{f}(s, u)| = |u|\}$

i) $\lambda \in L$?

$$|\bar{f}(s, \lambda)| = |\lambda|$$

ii) $w \in L \wedge \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma w \in L$

$$|\bar{f}(s, w)| = |w|$$

ma $|\bar{f}(s, \sigma w)| = |f(s, \sigma)\, \bar{f}\,[f(s, \sigma), w]|$
$$= |f(s, \sigma)| + |\bar{f}((f(s, \sigma), w)|$$
$$= |f(s, \sigma)| + |w|$$
$$= 1 + |w|$$
$$= |\sigma w|$$

$\therefore \sigma w \in L$

$L = \Sigma^*$

c) Demostrar $\boxed{\bar{f}(1, u\sigma) = \bar{f}(1,u)\hat{f}(1,u\sigma)}$?

sea $L = \{ u \in \Sigma^* \mid [\bar{f}(1,u\sigma) = \bar{f}(1,u)\hat{f}(1,u\sigma)] \}$

i) $\lambda \in L$?

$$\begin{aligned}\bar{f}(1,\lambda\sigma) &= \bar{f}(1,\sigma)\\ &= \lambda \cdot \bar{f}(1,\sigma)\\ &= \bar{f}(1,\lambda)\cdot\bar{f}(1,\sigma)\\ &= \bar{f}(1,\lambda)\, f(1,\sigma)\\ &= \bar{f}(1,\lambda)\,\hat{f}(1,\sigma)\end{aligned}$$

$\therefore \lambda \in L$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{f}(1,\sigma) &= f(1,\sigma)\\ \hat{f}(1,\sigma) &= f(1,\sigma)\end{aligned}}$$

ii) $w \in L \wedge \gamma' \in \Sigma \Rightarrow \gamma' w \in L$

$\bar{f}(1,u\sigma) = \bar{f}(1,u)\hat{f}(1,u\sigma)$ H.I

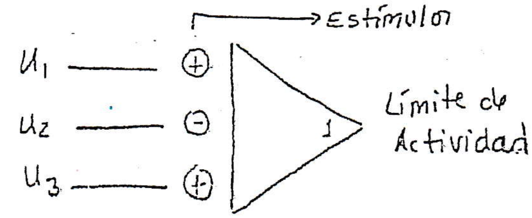
sea $\bar{f}(1,(\gamma' w)\sigma) = \bar{f}(1,\gamma'(w\sigma))$

$$\begin{aligned}&= f(1,\gamma')\,\bar{f}\underbrace{[f(1,\gamma'), w\sigma]}_{H.I.}\\ &= \underbrace{f(1,\gamma')\,\bar{f}(f(1,\gamma'), w)}\,\hat{f}(f(1,\gamma'), w\sigma)\\ &= \bar{f}(1,\gamma' w)\,\hat{f}(f(1,\gamma'), w\sigma)\\ &= \bar{f}(1,(\gamma' w))\,\hat{f}(1,(\gamma' w)\sigma)\end{aligned}$$

$\therefore \gamma' w \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$

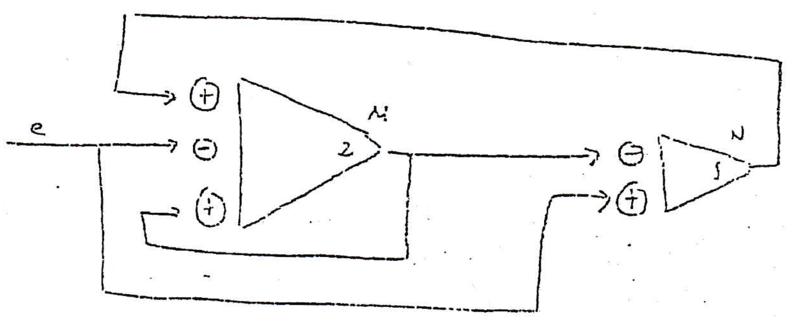
Ejemplo **MODELO DE NEURONA**



$$\lambda(K+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; U_1(K) + U_3(K) - U_2(K) \geq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$k \backslash \bar{z}$	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1

Ej.



$M \to s(k)$

$N \to t(k)$

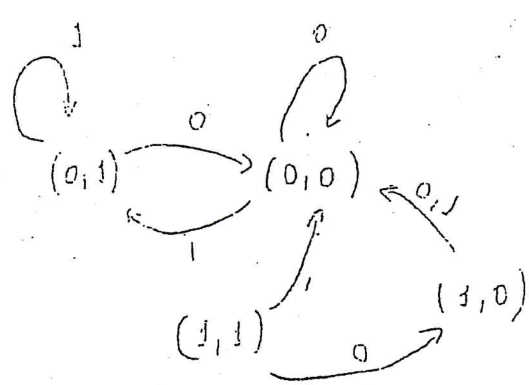
e

$$s(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; t(k) + s(k) - e(k) \geq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$t(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; e(k) - s(k) \geq 1 \\ 0 & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

Para $N \to t(K)$

	$\Sigma \backslash K$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
e(k)	0	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,0)
	1	(0,1)	(0,1)	(0,0)	(0,0)



Ejercicio

$T = \{(0,0), (0,1)\}$

$\hat{f}[(0,0), w] \in T$

- Demostrar $\forall w \in \Sigma^* \to$ por inducción

Definición

Sea $D = (K, \Sigma, f)$ un módulo y sea $s, t \in K$

- Decimos que el estado t es alcanzable a partir del estado s si y solo si existe $w \in \Sigma^*$ tal que

$$\hat{f}(s, w) = t$$

y se escribe $s \xrightarrow{*} t$

- Decimos que el estado t es k-alcanzable a partir del estado s, si y solo si existe $w \in \Sigma^*$ con $|w| = k$ tal que $\hat{f}(s, w) = t$

y se escribe $s \xrightarrow{k} t$

Si es k alcanzable $\to$ decimos que es alcanzable

Ejercicios a demostrar

① Demostrar Si $s \xrightarrow{i} q \wedge q \xrightarrow{j} t$ entonces $s \xrightarrow{i+j} t$

Si $s \xrightarrow{i} q \wedge q \xrightarrow{j} t \Rightarrow (\exists w_1 \in \Sigma^* / \hat{f}(s, w_1) = q \wedge |w| = i) \wedge (\exists w_2 \in \Sigma^* / \hat{f}(q, w_2) = t \wedge |w_2| = j)$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(s, w_1) = q \wedge \hat{f}(q, w_2) = t)$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}[\hat{f}(s, w_1), w_2] = t$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(s, w_1 w_2) = t$

$\Rightarrow \exists y \in \Sigma^* \wedge |y| = \overbrace{|w_1| + |w_2|}^{|w_1 w_2|} \,/\, \hat{f}(s, w_1 w_2) = t$

$\Rightarrow y = i + j \wedge s \xrightarrow{y} t$

$\Rightarrow s \xrightarrow{i+j} t$ //

② Demostrar Si $s \xrightarrow{k} t$ y $k = i + j$ entonces $\exists q \in K$ tal que $s \xrightarrow{i} q \wedge q \xrightarrow{j} t$

Suponemos

$s \xrightarrow{k} t \wedge k = i + j \Rightarrow \hat{f}(s, w) = t \wedge |w| = k \wedge k = i + j$

donde $w = uv \wedge |u| = i \wedge |v| = j$

$\Rightarrow \exists w \in \Sigma^* \wedge |w| = k \wedge k = i + j \,/\, \hat{f}(s, w) = t$

$\Rightarrow \exists w \in \Sigma^* \wedge |w| = i + j \,/\, \hat{f}(s, w) = t$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2, w \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \wedge |w| = i + j \,/\, \hat{f}(s, w) = t$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(s, w_1 w_2) = t$

$\Rightarrow \exists w_1 w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(\hat{f}(s, w_1), w_2) = t$

$\Rightarrow \exists q \in K \wedge \exists w_1 w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(s, w_1) = q \wedge \hat{f}(q, w_2) = t$

$\Rightarrow (\exists w_1 \in \Sigma^* \wedge |w_1| = i \,/\, \hat{f}(s, w_1) = q) \wedge (\exists w_2 \in \Sigma^* \wedge |w_2| = j \,/\, \hat{f}(q, w_2) = t$

$\Rightarrow s \xrightarrow{i} q \wedge q \xrightarrow{j} t$

//

MAQUINAS

* Definición

Una maquina es una quintupla $M = (K, \Sigma, \Delta, f, g)$ donde:

$\Sigma, \Delta \rightarrow$ son alfabetos de entrada y salida respectivamente

si fuese formalmente

Σ es un conjunto finito no vacío de entrada

Δ es un conjunto finito no vacío de salida

K es un conjunto de estados

$f: K \times \Sigma \rightarrow K$ función de transición

$g: K \times \Sigma \rightarrow \Delta$ función de salida

Interpretación

Una máquina se puede interpretar como un dispositivo que en determinados instantes de tiempo recibe señales (simbolos de entrada) que producen cambios en su configuración interna y emite señales (simbolos de salida)

$$\xrightarrow{\sigma \in \Sigma} \boxed{s \in K} \xrightarrow{\gamma \in \Delta}$$

2 Representación

a) Tabla de transición

$K \backslash \Sigma$	$\sigma_1 \dots$	σ_j	$\dots \sigma_m$
s_1			
$\vdots$			
s_i		s_k/γ_k	
$\vdots$			
s_n			

$s_k = f(s_i, \sigma_j)$, ∧

$\gamma_k = g(s_i, \sigma_j)$

b) Grafo

$$s_i \xrightarrow{\sigma/\gamma} s_j$$

$f(s_i, \sigma) = s_j$

∧

$g(s_i, \sigma) = \gamma$

Ejemplo

$K = \{c, p, d\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Delta = \{1, 2\}$

$f(s, a) = c \quad \forall s \in \{c, p, d\}$

$f(c, b) = p$

$f(t, b) = d$ para $t = p \lor t = d$

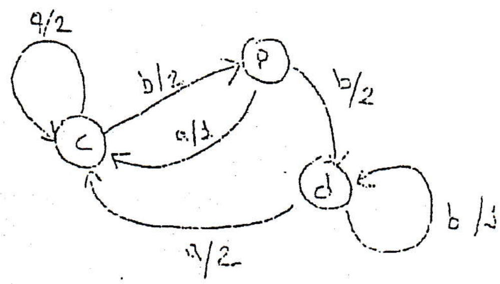
$g(c, \sigma) = 2$ para $\sigma = a$ ó $\sigma = b$

$g(p, a) = 1$

$g(p, b) = 2$

$g(d, \sigma) = 1$ para $\sigma = a$ ó $\sigma = b$

$K \setminus \Sigma$	a	b
c	c/2	p/2
p	c/1	d/2
d	c/1	d/1



Comportamiento Dinámico

$t_0 \qquad t_1 \quad \dots \quad t_k$

$s_0 \xrightarrow{\sigma_0 / S_0} s_1 \xrightarrow{\sigma_1 / S_1} s_2 \quad \dots \quad \xrightarrow{\sigma_{k-1} / S_{k-1}} s_k$

$s_i = f(s_{i-1}, \sigma_{i-1}) \qquad s_i \quad g(s_i, \sigma_i)$

$s_k = \hat{f}(s_0, \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-1})$

$S_0 S_1 S_2 \dots S_{k-1} = \bar{g}(s_0, \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{k-1})$

Definición de Máquina

Sea $M = (K, \Sigma, \Delta, f, g)$ una máquina

* la función de estado terminal de M

$\hat{f} : K \times \Sigma^* \longrightarrow K$

del módulo $D = (K, \Sigma, f)$

* Una función de palabra de salida de M es una única función

$\bar{g} : K \times \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$ tal que

$\forall s \in K$, $\sigma \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$

IMPORTANTE

$$\bar{g}(s, \lambda) = \lambda$$

$$\bar{g}(s, \sigma w) = g(s, \sigma)\, \bar{g}[f(s, \sigma), w]$$

NOTAS

(1) $w = \lambda$ si

$$\underline{\underline{\bar{g}(s, \sigma)}} = \bar{g}(s, \sigma\lambda) = g(s, \sigma)\, \underbrace{\bar{g}[f(s, \sigma), \lambda]}_{\lambda} = g(s, \sigma) \cdot \lambda = \underline{\underline{g(s, \sigma)}}$$

(2) $\forall s \in K$ induce una función $g_s : \Sigma^* \longrightarrow \Delta^*$

$$g_s(w) = \bar{g}(s, w)$$

1) Sea la máquina → ¿Cuál es la palabra de salida correspondiente a la entrada "baba" comenzando el estado "p"?

	a	b
p	r/α	r/β
q	r/α	p/α
r	r/β	p/γ
s	r/γ	p/α

$$p \xrightarrow{b/\beta} r \xrightarrow{a/\beta} r \xrightarrow{b/\gamma} p \xrightarrow{a/\alpha} r \quad \Rightarrow \beta\beta\gamma\alpha$$

Utilizando la función $\bar{g}$

$$\bar{g}(p, baba) = g(p,b)\,\bar{g}[f(p,b), aba]$$
$$= \beta\,\bar{g}(r, aba)$$
$$= \beta\, g(r,a)\,\bar{g}(f(r,a), ba]$$
$$= \beta\beta\,\bar{g}(r, ba)$$
$$= \beta\beta\, g(r,b)\,\bar{g}[f(r,b), a]$$
$$= \beta\beta\gamma\,\bar{g}(p,a) = \beta\beta\gamma\, g(p,a)$$
$$= \beta\beta\gamma\alpha \;//$$

② Demostrar $\boxed{|\bar{g}(1,w)| = |w|}$

Sea $L = \{ w \in \Sigma^* \,/\, |\bar{g}(1,w)| = |w| \}$

i) $\lambda \in L$?

$$|\bar{g}(1,\lambda)| = |\lambda|$$

ii) $w \in L \wedge \sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma w \in L$

$$|\bar{g}(1,\sigma w)| = |\, g(1,\sigma)\,\bar{g}[f(1,\lambda), w]\,|$$
$$= |g(1,\sigma)| + |\,\bar{g}[(f(1,\lambda), w]\,|$$
$$= |g(1,\sigma)| + |w| \qquad \text{H.I}$$
$$= 1 + |w| = |\sigma w|$$

∴ $\sigma w \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$

③ Demostrar $\boxed{\bar{g}(1, uv) = \bar{g}(1,u)\,\bar{g}\left[\hat{f}(1,u), v\right]}$

Sea $L = \{ u \in \bar{Z}^* \,/\, \bar{g}(1, uv) = \bar{g}(1,u)\,\bar{g}\left[\hat{f}(1,u), v\right] \}$

i) $\lambda \in L$?

$$\bar{g}(1,\lambda v) = \bar{g}(1,v)$$
$$= \lambda \cdot \bar{g}(1,v)$$
$$= \bar{g}(1,\lambda)\,\bar{g}(1,v)$$
$$= \bar{g}(1,\lambda)\,\bar{g}\left[\hat{f}(1,\lambda), v\right]$$

ii) $w \in L \wedge \sigma \in \bar{Z} \Rightarrow \sigma w \in L$

$$\bar{g}(1, (\sigma w) v) = \bar{g}(1, \sigma(wv))$$
$$= \bar{g}(1,\sigma)\,\bar{g}\left[f(1,\sigma), wv\right]$$
$$= \bar{g}(1,\sigma)\,\bar{g}\left[f(1,\sigma), wv\right]$$
$$= \bar{g}(1,\sigma)\,\underbrace{\bar{g}(f(1,\sigma), w)\,\bar{g}\left[\hat{f}(f(1,\sigma), w), v\right]}_{H.I.}$$
$$= \bar{g}(1,\sigma)\,\bar{g}\left[\hat{f}(1,\sigma w), v\right]$$

$\therefore \sigma w \in L$

Entonces $L = \bar{Z}^*$

MAL

④ Demostrar $\hat{g} : K \times \Sigma^* \to \Delta$ tal que $\forall s \in K, w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

$$\hat{g}(s, w\sigma) = g[\hat{f}(s, w), \sigma]$$

Demostrar

$\bar{g}(s, u\sigma) = \bar{g}(s, u)\,\hat{g}(s, u\sigma) \quad \forall s \in K, u \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma$

$$L = \{u \in \Sigma^* \mid \bar{g}(s, u\sigma) = \bar{g}(s, u)\,\hat{g}(s, uv)\}$$

i) $\lambda \in L$?

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\bar{g}(s, \lambda\sigma)}} &= \bar{g}(s, \sigma)\\ &= \hat{g}(s, \sigma) = \lambda \cdot \hat{g}(s, \sigma)\\ &= \bar{g}(s, \lambda)\,\hat{g}(s, \sigma)\\ &= \bar{g}(s, \lambda)\,\underline{\underline{\hat{g}(\hat{f}(s, \lambda), \sigma)}}\end{aligned}$$

$\boxed{\hat{f}(s, \lambda) = s}$

ii) $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow aw \in L$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\bar{g}(s, (aw)\sigma)}} &= \bar{g}(s, a(w\sigma))\\ &= g(s, a)\,\bar{g}[f(s, a), w\sigma]\\ &= g(s, a)\,g(f(s, a), w)\,\bar{g}(f(s, a), w\sigma)\\ &= \bar{g}(s, a)\,\hat{g}(f(s, a), w)\,\hat{g}(\hat{f}(s, a), w\sigma)\\ &= \underline{\underline{\bar{g}(s, aw)\,\hat{g}(s, aw\sigma)}}\end{aligned}$$

$\therefore aw \in L$

Entonces $L = \Sigma^*$

SINTESIS ANALISIS VERIFICACION

	I/O	MÁQUINA
SINTESIS	✓	?
ANÁLISIS	?	✓
VERIFICACION	✓	✓

→ la parte mas creativa

Ejemplo sea M la máquina dada por

	a	b
p	q/α	q/α
q	q/β	q/α

- M comenzando en p representa el sgte comportamiento
- El primer símbolo de la palabra de salida es α y cada simbolo sgte es el contrario del simbolo correspondiente de entrada es decir es α si la entrada es b y es β si la entrada es a

AUTOMATAS

Ejemplo → Determinar si existe alguna palabra comenzando o terminando por vocal
En cada instante el dispositivo lee un simbolo c, v, e (consonantes = c

Consonantes : c
Vocales : v
Separadores : e

Puede estar en los sgtes. estados:

I → cuando va iniciar la lectura de una palabra
P → cuando una palabra que está siendo leído comienza por vocal
N → cuando una palabra que está siendo leído no comienza por vocal y el ultimo simbolo leído es una consonante
V → cuando una palabra que esta siendo leida no comienza por vocal pero el último simbolo leido es una vocal
T → cuando una palabra que acaba de leer comienza o termina por vocal

$K \backslash \Sigma$	v	c	e
→ I	P	N	I
P	P	P	T
N	V	N	I
V	V	N	T
T	P	N	I

→ estados finales

estado inicial

{P, T} Estados finales

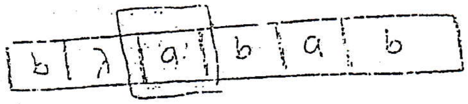
I Estado inicial

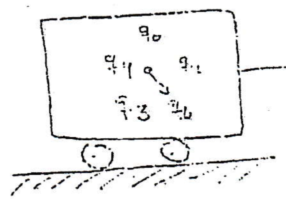
Definición

Un autómata finito Deterministico (AFD) es una quintupla $M = (K, \Sigma, f, i, F)$ donde

K : Conjunto finito No vacio // conjunto de estados
Σ : Conjunto finito No vacio // Alfabeto de Entrada
f : $f : K \times \Sigma \to K$ // función de transición
i : $i \in K$ // Estado Inicial
F : $F \subseteq K$ // Conjunto de estados finales

Interpretación





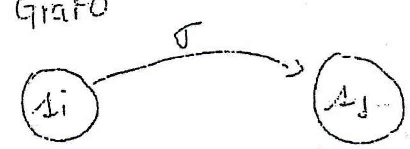
Representación

a) tabla de transición

	$K \backslash \Sigma$	σ_1 ...	σ_j ...	σ_m
ado cial →	s_1			
estado final	s_2			
	s_i	----	s_k	
	s_n			

$$s_k = f(s_i, \sigma_j)$$

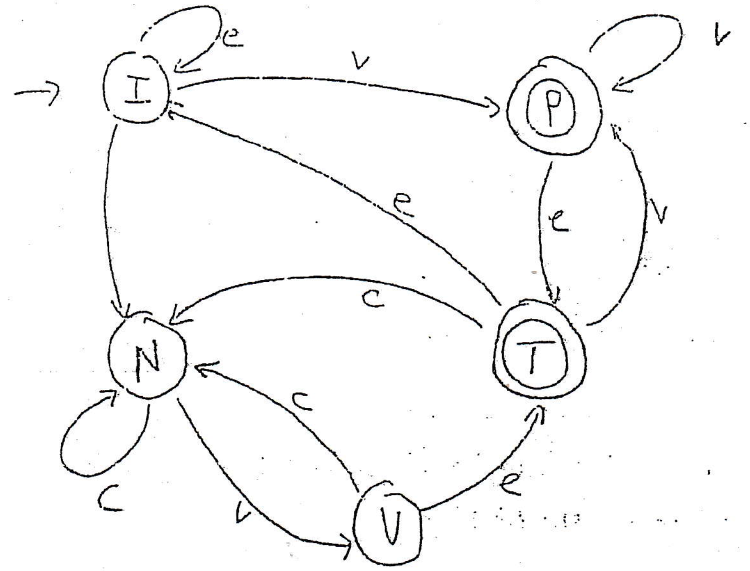
b) Grafo



→ (s_1) si s_i es estado inicial

((s_2)) si s_2 es estado final

Sea $M = (K, \Sigma, f, q, F)$ un AFD



Definición

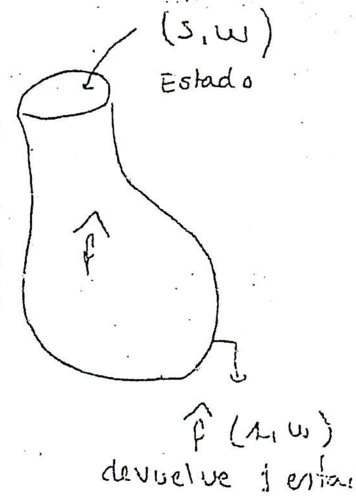
Sea $M = (K, \Sigma, \delta, 1, F)$ un AFD y $\hat{f} : K \times \Sigma^* \to K$
la función de estado terminal que extiende a palabras

→ Si $w \in \Sigma^*$, decimos que M acepta w si y solo si
$\hat{f}(1, w) \in F$ caso contrario rechaza w

→ lenguaje aceptado por M

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \,/\, \hat{f}(1, w) \in F \}$$

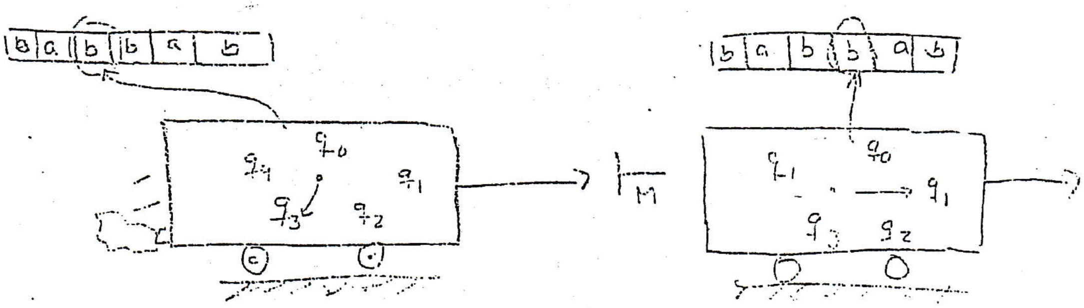
caso contrario se rechaza w



III Configuración

Es lo mas importante, es el estado y el pedazo que le queda leer

Es un elemento de $K \times \Sigma^*$



$(q_3, bbab) \vdash_M (q_1, bab)$

Definición

Sea $M = (K, \Sigma, \delta, 1, F)$ un AFD y sean (q, w) ∧ (q', w')
las configuraciones

$(q, w) \vdash (q', w') \iff w = \sigma w'$ para algún $\sigma \in \Sigma \wedge \delta(q, \sigma) = q'$

$w = bbab$
$w' = bab$

$bbab = \boxed{b}\, bab \wedge \delta(q_2, b) = q_4 \iff (q_2, bbab) \vdash_M (q_4, bab)$

$\vdash_M$ se lee "conduce a" en un paso	
$\vdash_M^*$ se lee "conduce a" en uno o más pasos	

* Sea $w \in \Sigma^*$, decimos que M <u>acepta</u> w si y solo si

$$(s, w) \vdash^*_M (q, \lambda) \quad \text{para} \quad q \in F$$

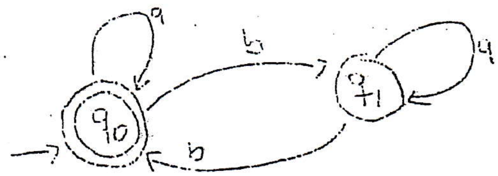
* Caso contrario M <u>rechaza</u> w

* Lenguaje aceptado por M

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* / (s, w) \vdash^*_M (q, \lambda) \wedge q \in F \}$$

<u>Ejemplo</u> Sea M

	a	b
→ q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0



<u>Sol</u>

$w = bba$

$(q_0, bba) \vdash_M (q_1, ba) \vdash_M (q_0, a) \vdash_M (q_0, \lambda)$

∴ $(q_0, bba) \vdash^*_M (q_0, \lambda)$ $\quad q_0 \in F$.

∴ $w \in L(M)$

$w = bb$

$(q, bb) \vdash_M (q_1, b) \vdash_M (q_0, \lambda)$

∴ $q_0 \in F$

∴ $w \in L(M)$

$w = bbbbb$

$(q_0, bbbbb) \vdash_M (q_1, bbbb) \vdash_M (q_0, bbb) \vdash_M (q_1, bb) \vdash (q_0, b)$

$\vdash_M (q_1, \lambda)$

∴ $q_1 \notin F$

∴ $w \notin L(M)$

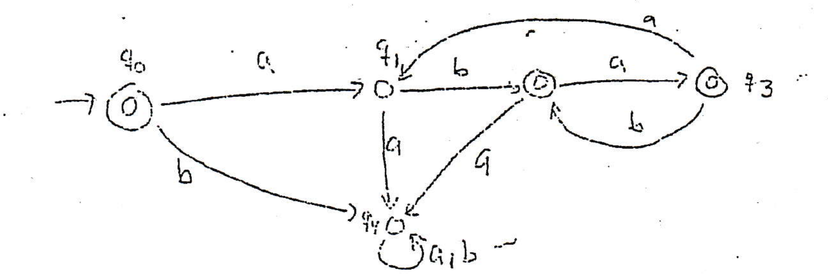
AUTOMATAS FINITOS NO DETERMINISTICO (AFN)

Eje: $(ab \cup aba)^*$

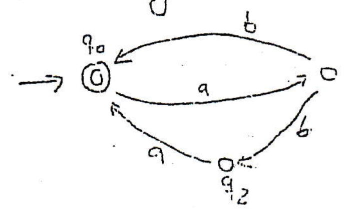
$L = \{\lambda, ab, aba, abab, ababa, abaab, \ldots$

- $* = 0 \Rightarrow \lambda$
- $* = 1 \Rightarrow ab \cup aba$
- $* = 2 \Rightarrow (ab \cup aba)^2 = (ab \cup aba)(ab \cup aba)$

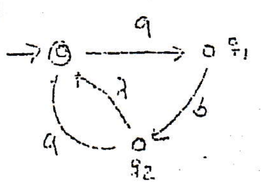
(I) Un autómata finito que acepta este lenguaje es el sgte.



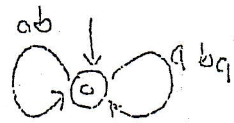
(II)



(III)



(IV)



Estos son 4 ejemplos de automatas no deterministicos porque rompen la definición de función

Definicion

Un autómata finito No deterministico (AFN) es una quintupla $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ donde

K : conjunto de estados

Σ : (conjunto) Alfabeto de Entrada

Δ : es un subconjunto finito de $K \times \Sigma^* \times K$ llamado relación de transición

s : $s \in K$ estado inicial

$F \subseteq K$ conjunto de estados finales

Si $(q, u, q') \in \Delta$

Si esta tripleta esta en Δ significa que estando q y leyendo u desde la cinta pasa al estado q'

Las configuraciones son las mismas del AFD si (q, w) y (q', w') dos conf.

$(q, w) \vdash_M (q', w') \iff w = u w'$, para alguna $u \in \Sigma^*$ $\wedge$ $(q, u, q') \in \Delta$

'conduce a', ...' en un paso'

$\vdash_M^*$ denota la clausura, reflexiva, transitiva de ... o $\vdash_M$

Sea $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN y sea $w \in \Sigma^*$

* Decimos que M acepta a w si y solo si $(s, w) \vdash_M^* (q, \lambda)$; $q \in F$

* lenguaje aceptado por M

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* / (s, w) \vdash_M^* (q, \lambda), q \in F \}$$

Ejercicios

(1) Sea $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN

si $x, y \in \Sigma^*$, $q \in K$

a) $\boxed{\text{Demostrar } (q, x) \vdash_M^* (p, \lambda) \Rightarrow (q, xy) \vdash_M^* (p, y)}$

$(q, x) \vdash_M^* (p, \lambda)$ suponemos que es verdadero.

$(q, x) \vdash_M^* (p, \lambda) \Rightarrow (\exists\ q_0, q_1, q_2, \ldots q_n \in K) \wedge (\exists\ x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \Sigma^*)$

tal que $(q, x) = (q_0, x_0) \vdash_M (q_1, x_1) \ldots$

$\ldots \vdash_M (q_n, x_n) = (p, \lambda)$

//

$(q, x, r$

b) Demostrar $(q, x) \vdash_M^* (p, \lambda)$ $\wedge$ $(p, y) \vdash_M^* (r, \lambda)$
$\Rightarrow (q, xy) \vdash_M^* (r, \lambda)$; $\forall p \in K$

Ya que $(q, x) \vdash_M^* (p, \lambda)$, existe $n \geq 0$, $q_0, \dots, q_n \in K$
y $x_0, \dots, x_n \in \Sigma^*$ tal que

$$(q, x) = (q_0, x_0) \vdash_M (q_1, x_1) \vdash_M \cdots \vdash_M (q_n, x_n) = (p, \lambda)$$

afirmamos que para $i = 0, \dots, n-1$, $(q_i, x_i\, y) \vdash_M (q_{i+1}, x_{i+1}\, y)$
ya que $(q_i, x_i) \vdash_M (q_{i+1}, x_{i+1})$, por definición de $\vdash_M$ existe una
cadena $u_i \in \Sigma^*$ tal que $x_i = u_i\, x_{i+1}$ y $(q_i, u_i, q_{i+1}) \in \Delta$
Tambien $x_i\, y = u_i\, x_{i+1}\, y$, luego $(q_i, x_i\, y) \vdash_M (q_{i+1}, x_{i+1}\, y)$
por lo tanto por definición

$$(q, xy) = (q_0, x_0 y) \vdash_M (q_1, x_1 y) \vdash_M \cdots \vdash_M (q_n, x_n y) = (p, y)$$

Luego $(q, xy) \vdash_M^* (p, y)$
Ya que
$(p, y) \vdash_M^* (r, \lambda)$ y $\vdash_M^*$ es transitiva

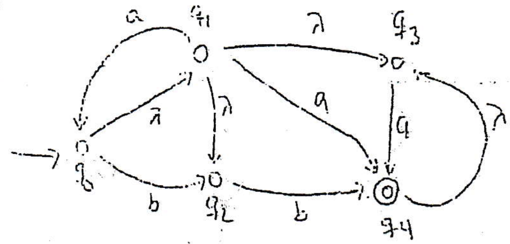
$(q, xy) \vdash_M^* (r, \lambda)$ //

Definición de Equivalencia

Para cada AFN existe u AFD equivalente.

Ejemplo.-

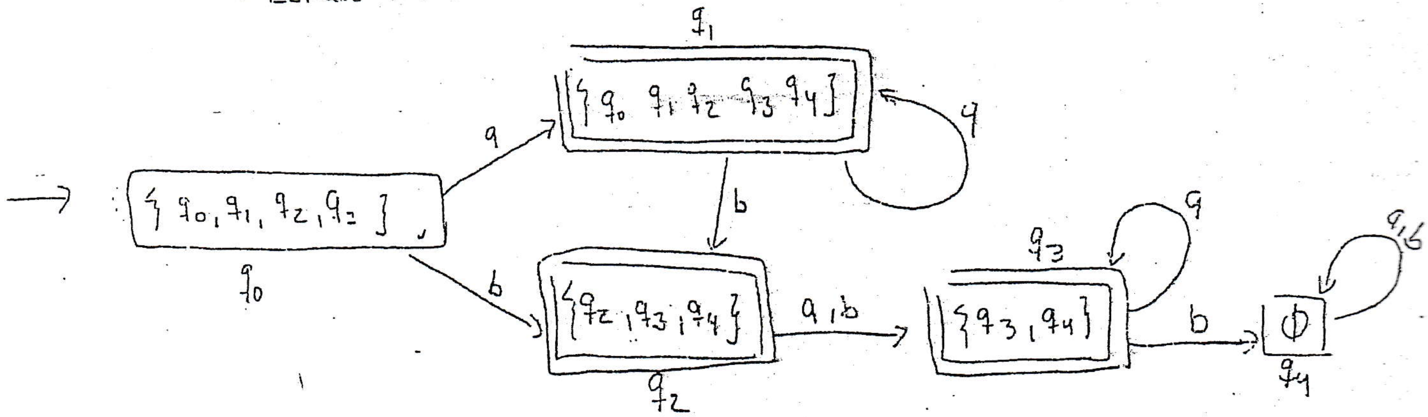
(I)



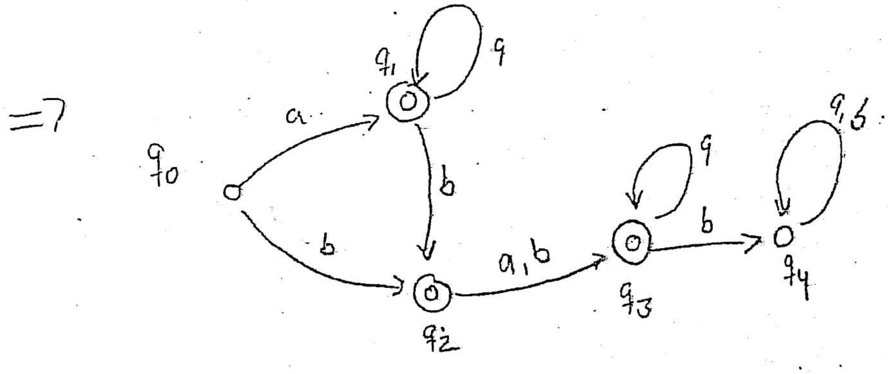
Estado	Entrada λ	Entrada a	Entrada b
$\rightarrow q_0$	q_0, q_1, q_2, q_3	q_0, q_1, q_2, q_3, q_4	q_2, q_3, q_4
q_1	q_1, q_2, q_3	q_0, q_1, q_2, q_3, q_4	q_3, q_4
q_2	q_2	—	q_3, q_4
q_3	q_3	q_3, q_4	—
q_4	q_4, q_3	q_3, q_4	—

Estado Inicial

$\rightarrow$ Estado Final

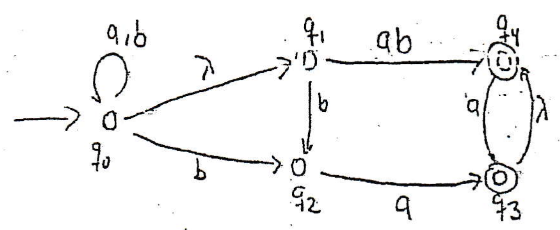


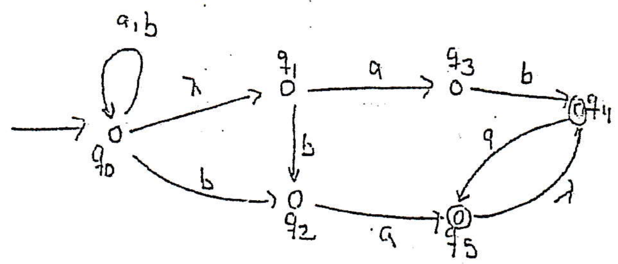
$\Rightarrow$



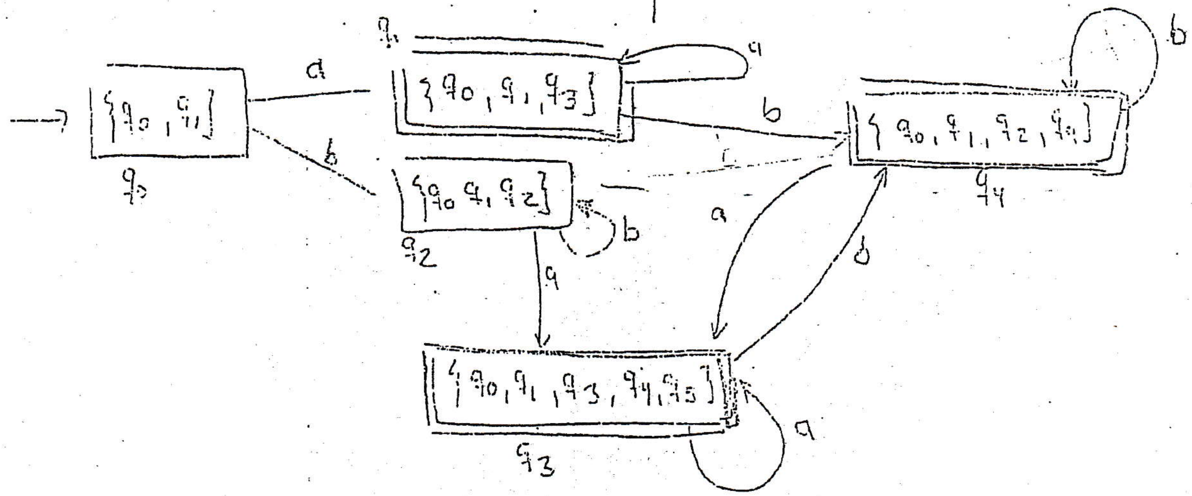
AFD equivalente al AFN

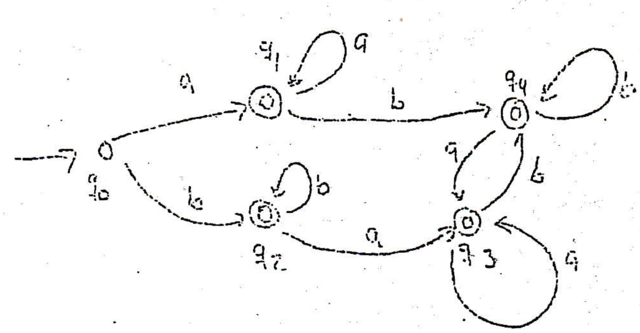
II





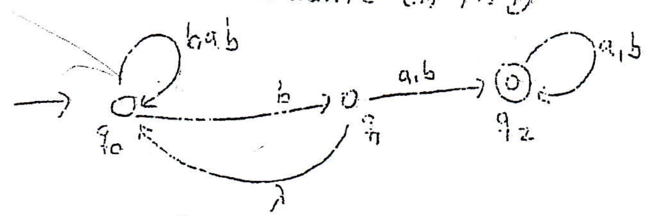
Estados	Entrada λ	Entrada a	Entrada b
→ q_0	q_0, q_1	q_3, q_0, q_1	q_0, q_2, q_1
q_1	q_1	q_3	q_2
q_2	q_2	q_5, q_4	—
q_3	q_3	—	q_4
q_4	q_4	q_5, q_4	—
q_5	q_5	q_4, q_5	—

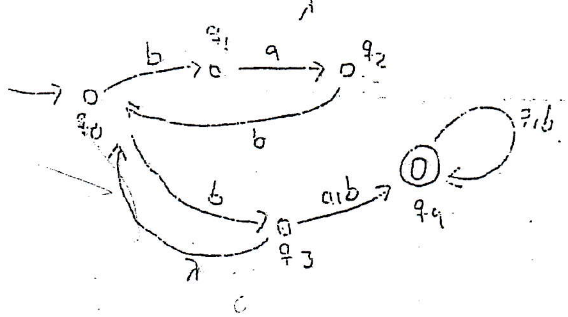




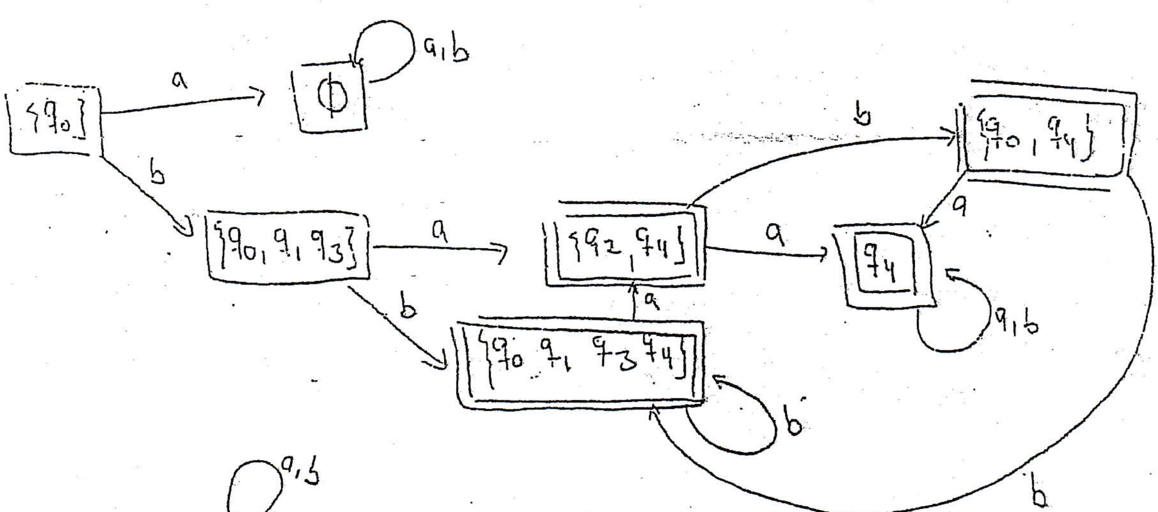
AFD equivalente al AFN

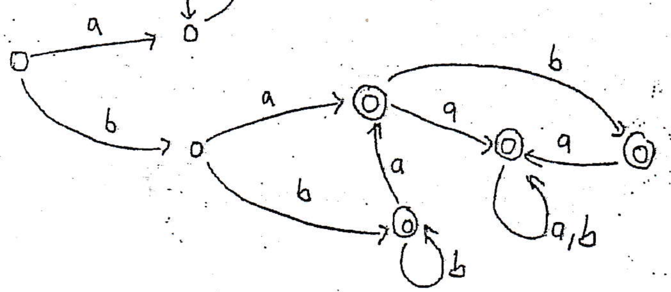
Ejercicio → Simular mediante un AFD





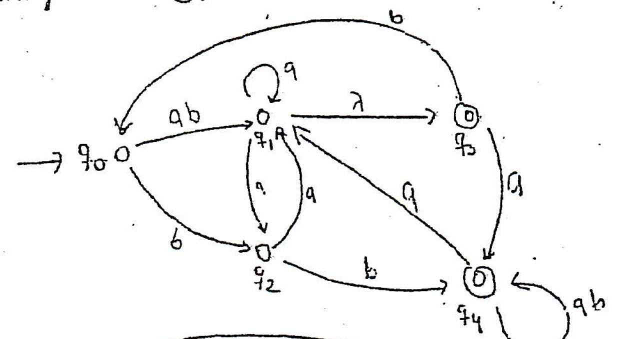
Estados	Entrada λ	Entrada a	Entrada b
→ q_0	q_0	—	q_1, q_0, q_3
q_1	q_1	q_2	—
q_2	q_2	—	q_0
q_3	q_3 q_0	q_4	q_0, q_1, q_3, q_4
q_4	q_4	q_4	q_4

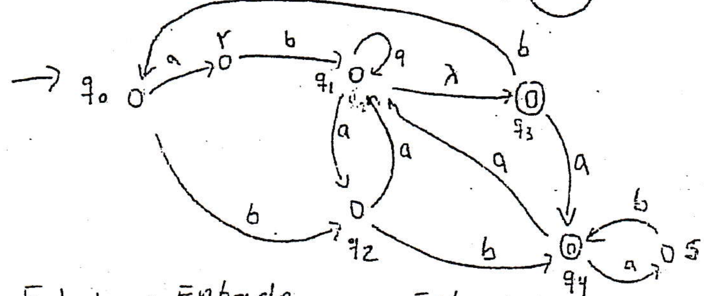




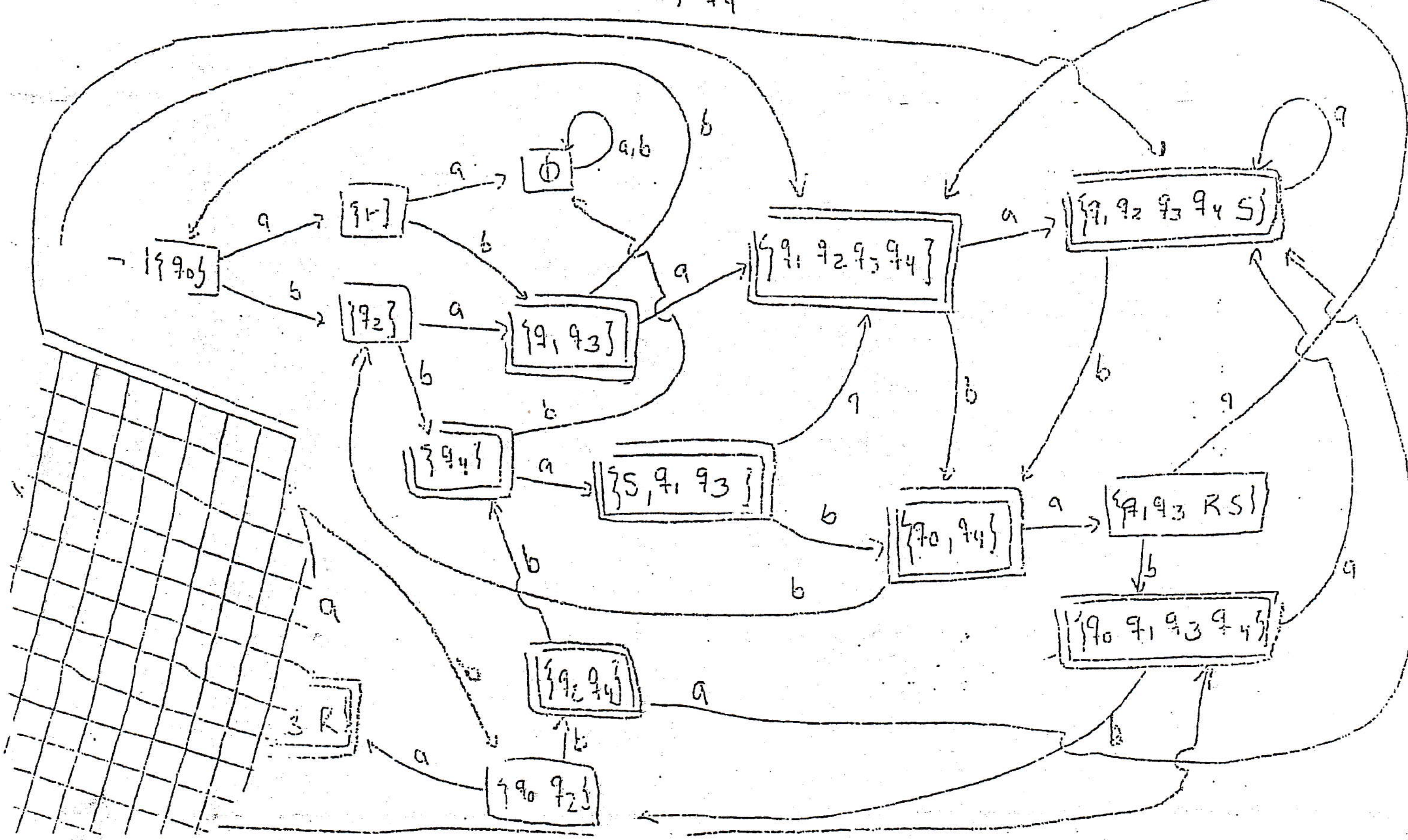
//

Ejemplo Simular





Estados	Entrada λ	Entrada a	Entrada b
→ q_0	q_0	r	q_2
q_1	q_1, b	q_1, q_2, q_3, q_4	q_0
q_2	q_2	q_1, q_3	q_4
q_3	q_3	q_4	q_0
q_4	q_4	S, q_1, q_3	—
r	r	—	q_1, q_3
s	s	—	q_4



Teorema $\longrightarrow$ Para cada AFN existe un AFD equivalente

Prueba: Sea $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN

si $(q, u, q') \in \Delta$ y $|u| \geq 1$, es decir

si $(q, \sigma_1 \sigma_2, \ldots, \sigma_k, q') \in \Delta$ y $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$; $k \geq 2$

Entonces añadimos $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ (estados NO terminales)

a K y (q, σ_1, P_1), (P_1, σ_2, P_2), ... (P_{k-1}, σ_k, q') a Δ

el Nuevo autómata $M' = (K', \Sigma, \Delta', s', F')$ tiene todas sus transiciones

$(q, u, q') \in \Delta'$ con $|u| \leq 1$

Ahora K' es K pero con nuevos estados

$s' = s$

$F' = F$

$\Sigma = \Sigma$

$\Delta' = \Delta$ pero incluye los agregados

OJO
M' y M son equivalentes

Estamos en el NO determinístico

Construimos $M'' = (K'', \Sigma, \delta'', s'', F'')$.

Aquí vamos a empezar a construir el Determinístico

Idea clave $\rightarrow$ Un autómata FN en un determinado instante se encuentra ocupando un conjunto de estados con la entrada correspondiente a .

$K'' = 2^{K'} \longrightarrow$ los nuevos estados son subconjunto de K'

$F'' = \{Q \subseteq K' \,/\, Q \cap F' \neq \emptyset\}$ $\quad Q \longrightarrow ◎ \quad$ o

Idea básica $\rightarrow$ Un movimiento de M'' imita un movimiento de M' (con σ) seguido de algún número de movimientos sin consumir entrada alguna.

formalizando :

$E(q) = \{p \in K' \,/\, (q, \lambda) \vdash_{M}^{*} (p, \lambda)\}$ $\quad$ se refiere a la columna de entrada λ

ó equivalentemente

$E(q) = \{p \in K' \,/\, (q, w) \vdash_{M}^{*} (p, w)\}$

luego

$s'' = E(s) \longrightarrow$ En la primera fila de estado inicial

Para δ'': para cada $Q \subseteq K'$ y para $\sigma \in \Sigma$

$\delta''(Q, \sigma) = \cup \{E(p) : p \in K$ y $(q, \sigma, p) \in \Delta'$, para algún $q \in Q\}$

AFirmamos que $\forall\ w \in \Sigma^{*}$ y $\forall\ q, P \in K'$

$(q, w) \vdash_{M'}^{*} (P, \lambda) \Longleftrightarrow (E(q), w) \vdash_{M''}^{*} (P, \lambda)$; para algún P contenido a P

$M' \approx M''$ es decir

$L(M') = L(M'')$

<u>Prueba</u>

Sea $w \in L(M') \Longleftrightarrow (s', w) \vdash_{M'}^{*} (q, \lambda)$: $q \in F'$

$\Longleftrightarrow (E(s'), w) \vdash_{M''}^{*} (Q, \lambda)$ para algún Q conteniendo a q

$\Longleftrightarrow (s'', w) \vdash_{M''}^{*} (Q, \lambda)$; $Q \in F''$

$\Longleftrightarrow w \in L(M'')$

$\therefore\ L(M') = L(M'')$