

TD 1 : ESPACES  $L^p$

**Exercice 1.** Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable positive. Montrer qu'il existe une suite de fonctions étagées mesurables  $(s_n)_n$  telle que

- (1)  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$ ,
- (2)  $s_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $E$ .

**Exercice 2.** (Inégalité de Hölder généralisée)

Soient  $p, q \in [1, +\infty]$  et  $r$  défini par  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Montrer que pour  $f \in L^p(E, \mu; \mathbb{K})$  et  $g \in L^q(E, \mu; \mathbb{K})$  on a :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

**Exercice 3.** Soit  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré tel que  $\mu(E) < \infty$ . Soient  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ . Montrer que l'injection canonique  $j : L^q \rightarrow L^p$  est une application linéaire continue et calculer sa norme.

**Exercice 4.** (1) Soit  $E$  un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  telle que :

- (a) pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{O}_i$  est un ouvert non vide de  $E$ ,
- (b)  $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ,
- (c)  $I$  n'est pas dénombrable.

Montrer que  $E$  n'est pas séparable. (*Indication : raisonner par l'absurde*).

- (2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , on pose  $f_x = \chi_{\mathcal{B}(x,1)}$  où  $\mathcal{B}(x,1) \subset \mathbb{R}^d$  est la boule fermée de centre  $x$  et de rayon 1. En utilisant la famille d'ouverts  $(\mathcal{O}_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  avec

$$\mathcal{O}_x = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d), \|f - f_x\|_\infty < \frac{1}{2} \right\},$$

montrer que  $L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$  n'est pas séparable.

**Exercice 5.** Soit  $1 \leq p < \infty$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$  qui converge simplement presque partout vers une fonction  $f$  de  $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$ . Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f$  dans  $L^p(E, \mu; \mathbb{K})$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$ .

**Exercice 6.** Pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  et pour  $h \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $\tau_h f$  par  $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ .

- (1) Soit  $p \in [1, \infty[$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h$  définit une isométrie de  $L^p = L^p(\mathbb{R}, \lambda)$ .
  - (b) Soient  $g \in C_c(\mathbb{R})$  une fonction continue à support compact. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a - b| < \delta \Rightarrow \|\tau_a g - \tau_b g\|_p < \varepsilon.$$
  - (c) En utilisant la densité de  $C_c(\mathbb{R})$  dans  $L^p$ , montrer que si  $f \in L^p$ , on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$ .

(2) Donner un contre-exemple simple qui montre que le résultat (c) n'est pas valable pour  $L^\infty$ .

**Exercice 7.** Soient  $1 \leq p < +\infty$  et  $1 < q \leq +\infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On suppose  $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}, \lambda)$  avec  $\lambda$  la mesure de Lebesgue.

(1) Montrer que le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(2) Montrer que  $f \star g$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Soient  $f \in L^p(\mathbb{R}, \lambda)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}, \lambda)$  avec  $1 \leq p, q \leq +\infty$  tels que  $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ , avec  $1 \leq r \leq +\infty$ , et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue. Montrer que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que le produit de convolution de  $f$  et  $g$  défini par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$$

est commutatif, appartient à  $L^r(\mathbb{R}, \lambda)$  et vérifie

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Exercice 9.** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha < \beta$ . On pose  $f = \mathbb{1}_{[-\alpha, \alpha]}$  et  $g = \mathbb{1}_{[-\beta, \beta]}$ .

(1) Montrer que le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est bien défini.

(2) Calculer  $f \star g$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

(3) Étudier la régularité de  $f$ ,  $g$  et  $f \star g$ .

**Exercice 10.** (1) Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$  avec  $p \in [1, \infty[$ . Montrer que

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}.$$

(2) Soient  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \lambda)$ . Montrer que  $f \star g$  est  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ .

(3) Soient  $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  et  $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \lambda)$ . Montrer que  $f \star g$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

(4) Soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec  $\text{supp } \rho \subset \overline{B(0, 1)}$ ,  $\rho \geq 0$  sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\|\rho\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho d\lambda > 0$ . On pose

$$\rho_n(x) = C n^d \rho(nx)$$

avec  $C = \|\rho\|_1^{-1}$ .

(a) Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ . Montrer que  $\rho_n \star f$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$ .

(b) Soit  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\rho_n \star f - f\|_p = 0$ .

(c) En déduire que  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$  pour  $p \in [1, \infty[$ . *Indication : on pourra utiliser la densité de  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ .*