TD 2 : transformée de Fourier

Dans la suite, nous noterons m_d la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$ divisée par $(2\pi)^{d/2}$ et m la mesure m_1. De plus, pour tout $p \in [1, \infty[$, nous noterons $L^p(\mathbb{R}^d) := L^p(\mathbb{R}^d, m_d)$ avec norme $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dm_d(x)))^{1/p}$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La **transformée de Fourier** de f est la fonction

$$\mathcal{F}(f)(t) = \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot t} \, dm_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot t} \, d\lambda_d(x).$$

Exercice 1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes.

(1) Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - \alpha)$.
(2) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, alors $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.
(3) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, alors $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$.
(4) Si $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ and $\lambda > 0$, alors $\hat{g}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

Exercice 2. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes.

(1) $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
(2) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
(3)
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}.$$
Combien vaut $\hat{f}(0)$?

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $\varphi(t) = \hat{f}(t)\cos(\alpha t)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ que l'on explicitera en fonction de f et α. Même question pour $\psi(t) = \hat{f}(t)\sin(\alpha t)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 5. (1) En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $f \star g = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
(2) Resoudre dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ l'équation $f \star f = f$.

Exercice 6. Pour $\alpha > 0$, on pose $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Calculer la transformée de Fourier de f_α.
(2) À l'aide du théorème d'inversion, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{\alpha^2+x^2}$.
(3) Calculer $f_\alpha \star f_\alpha$ et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^2}$.

Auteur : Simona ROTA NODARI
simona.rotanodari@univ-cotedazur.fr

(4) Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 7. Soient X et Y deux espaces métriques, Y complet. Soient X_0 un sous-ensemble dense de X et $f : X_0 \to Y$ une application uniformément continue.

(1) Montrer que l'application f se prolonge en une unique fonction uniformément continue $\tilde{f} : X \to Y$.

(2) Montrer que si $f(X_0)$ est un sous-ensemble dense de Y, alors $\tilde{f}$ est surjective de X dans Y.

Exercice 8. À l'aide de la trasformée de Fourier, calculer les intégrales suivantes.

(1) $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)^2}{t^2}\, dt$.

(2) $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}\, dx,\ a, b > 0$.