

ИНСТИТУТ СИСТЕМНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

На правах рукописи

Крапошин Матвей Викторович

**Математическое моделирование сжимаемых течений  
с использованием гибридного метода аппроксимации  
конвективных потоков**

Специальность 05.13.18 —  
Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

Диссертация на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
академик РАН,  
доктор физико-математических наук, профессор  
Иванников Виктор Петрович

Москва — 2016

# Оглавление

<b>Введение . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1. Численное моделирование сжимаемых течений методом конечного объёма . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1. Математическая постановка рассматриваемых задач механики жидкости и газа . . . . .	19
1.1.1. Течение сжимаемого теплопроводного газа . . . . .	20
1.1.2. Течение несжимаемой неизотермической среды . . . . .	21
1.1.3. Течение гомогенной смеси жидкостей и газов . . . . .	22
1.1.4. Течения областях с подвижными границами . . . . .	26
1.1.5. Стационарные течения . . . . .	26
1.2. Аппроксимация уравнений механики жидкости и газа методом конечного объёма . . . . .	27
1.3. Схемы аппроксимации слагаемых в уравнении переноса . . . . .	31
1.3.1. Аппроксимация производных по времени . . . . .	33
1.3.2. Аппроксимация источниковых слагаемых . . . . .	34
1.3.3. Аппроксимация диффузационных слагаемых . . . . .	34
1.3.4. Аппроксимация конвективных слагаемых . . . . .	35
1.3.5. Учёт криволинейной геометрии на неструктурированных сетках . . . . .	37
1.4. Методы решения систем дифференциальных уравнений механики жидкости и газа . . . . .	40
1.4.1. Годуновские методы . . . . .	42

1.4.1.1.	Схема Русанова . . . . .	45
1.4.1.2.	Схемы расщепления вектора потоков . . . . .	45
1.4.1.3.	Схема Курганова — Тадмора . . . . .	47
1.4.1.4.	Недостатки характеристических методов . . . . .	49
1.4.2.	Методы расщепления . . . . .	49
1.5.	Сопоставление характеристических методов и методов расщепления . . . . .	57
1.6.	Резюме . . . . .	59
<b>2.</b>	<b>Гибридный метод моделирования сжимаемых течений . . . . .</b>	<b>62</b>
2.1.	Описание гибридного метода . . . . .	62
2.1.1.	Выбор вида функции-переключателя . . . . .	67
2.1.2.	Уравнение для давления . . . . .	68
2.1.3.	Расширение гибридного метода на случай течения гомогенных смесей . . . . .	71
2.2.	Программная реализация гибридного метода . . . . .	75
2.2.1.	Структура конечно-объёмной библиотеки OpenFOAM	77
2.2.2.	Реализация программ-«решателей» и связь со стандартными библиотеками . . . . .	86
2.2.3.	Применение гибридного метода в некоторых специальных задачах . . . . .	89
2.3.	Резюме . . . . .	91
<b>3.</b>	<b>Результаты моделирования . . . . .</b>	<b>94</b>
3.1.	Результаты моделирования сжимаемых однофазных течений . . . . .	95
3.1.1.	Распространение волны в прямом канале (задача Сода) . . . . .	95
3.1.2.	Моделирование распада разрыва при большом перепаде давления . . . . .	98
3.1.3.	Обтекание плоского клина . . . . .	109
3.1.4.	Обтекание обратного уступа сверхзвуковым потоком . . . . .	111
3.1.5.	Обтекание прямого уступа сверхзвуковым потоком . . . . .	114

3.1.6. Течение в сверхзвуковом сопле при наличии прямого скачка уплотнения в закритической части . . . . .	117
3.2. Результаты моделирования несжимаемых течений . . . . .	119
3.2.1. Дозвуковое течение ламинарного вязкого потока в канале круглого сечения (течение Пуазейля) . . . . .	119
3.2.2. Обтекание цилиндра . . . . .	121
3.2.2.1. Обтекание цилиндра в ламинарном режиме	121
3.2.2.2. Обтекание цилиндра турбулентным потоком	122
3.2.3. Течение струй газов со смешением . . . . .	126
3.3. Моделирование распространения акустических волн . . . . .	130
3.3.1. Моделирование акустических волн, порождаемых пульсирующей сферой . . . . .	130
3.3.2. Моделирование акустических волн, порождаемых колеблющейся сферой . . . . .	132
3.4. Промышленные верификационные и модельные задачи . . .	134
3.4.1. Истечение струи газа из сверхзвукового сопла . . . . .	134
3.4.2. Истечение квазиравновесной расширяющейся струи плазмы в область низкого давления . . . . .	138
3.4.3. Моделирование системы генерации газа подушки безопасности . . . . .	142
3.4.4. Моделирование течения в высокоскоростном компрессоре . . . . .	146
3.4.5. Модель гидродинамики водокольцевого насоса . . . . .	151
3.5. Вопросы реализации . . . . .	153
3.5.1. Сеточная сходимость . . . . .	153
3.5.2. Влияние выбора функции-переключателя . . . . .	156
3.5.3. Масштабируемость . . . . .	162
3.6. Развитие и стороннее применение гибридного метода . . . . .	164
3.6.1. Исследование неустойчивости сверхзвукового пограничного слоя . . . . .	164

3.6.2. Моделирование газов с реальным уравнением состояния	167
3.7. Резюме . . . . .	168
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>Список сокращений и обозначений . . . . .</b>	<b>170</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>173</b>

# Введение

Диссертация посвящена разработке и реализации гибридного численного метода аппроксимации конвективных слагаемых при моделировании сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха. Особенностью предложенного метода является комбинирование численного метода Курганова — Тадмора для численного решения гиперболических уравнений и метода расщепления для слабосжимаемых течений, позволившее расширить область применения комбинируемых методов для широкого класса приложений. Выполненный обзор (см. разделы 1.3 и 1.4) современных численных схем решения уравнений гидро-, аэро- и газодинамики основанных на использовании метода конечного объёма, дал возможность проанализировать преимущества и недостатки рассмотренных подходов и сформулировать пожелания к гибридному методу. Предложенный в работе метод реализован в виде программных модулей на языке C++ для использования в составе конечно-объёмной библиотеки OpenFOAM . Продемонстрированы примеры применения метода на ряде валидационных и промышленных задач.

**Актуальность.** Бурный рост вычислительных мощностей с одной стороны и устойчивое развитие математических моделей и численных методов механики сплошных сред с другой стороны обеспечивают в настоящее время постоянный рост значимости численного моделирования при решении многих задач проектирования и эксплуатации в различных отраслях — атомном машиностроении, космической энергетике, био и медицинских технологиях, станкостроении, автомобилестроении, аэрокосмической

промышленности и пр. В отдельных отраслях развитие численных методов позволило произвести практически полную замену экспериментальных стендов инструментарием численного моделирования. Такой бурный прогресс в использовании возможностей вычислительного эксперимента стал также возможен во многом благодаря развитию пакетов прикладных программ, позволяющих решать междисциплинарные задачи средствами единого инструмента.

Универсальность и широта решаемых пакетом классов задач может быть сегодня одним из важнейших показателей успешности внедрения численного моделирования в промышленность. При этом существует немало областей, в которых математические постановки задач являются сходными, но при этом методы их решения принципиально различаются. С одной стороны, необходимость использования узкоспециализированных методов для каждой прикладной области является сдерживающим фактором в решении мультидисциплинарных задач. С другой стороны, необходимость разработки всё более универсальных программ и методов является вызовом и подталкивает к сопряжению различных методов и поиску способов их интеграции в единые модели.

Специфика численного метода может определяться множеством параметров.

1. Прикладная область — прочность конструкций, динамика жидкости и газа, задачи теплообмена, и пр.
2. Уровень разрешения — системный, макроскопический (CFD), микроскопический (DNS), молекулярный, атомарный и т.д.
3. Требования к скорости вычислений и затратам вычислительных ресурсов — требующие персональных ЭВМ, рабочих станций, вычислительных кластеры.

Таким образом, специфика предметной области, уровень детализации

при моделировании явления и наличие ограничений на время выполнения расчётов накладывают ограничения на выбор численного метода. На практике это означает, что круг решаемых промышленных задач ограничен возможностями имеющегося набора численных методов.

Так даже в рамках одного метода, чрезвычайно популярного в решении задач гидро-, аэро- и газодинамики — интегро-интерполяционного метода (или метода конечного объёма), решаемые задачи сегодня распадаются на два больших класса:

- моделирование дозвуковых течений (когда локальная скорость среды существенно меньше скорости распространения акустических возмущений, а распространение акустических волн в расчётной области можно считать мгновенным);
- расчёт около- и сверхзвуковых течений.

Для каждого из этих направлений используются свои методы и соответствующие разностные схемы, обеспечивающие допустимое качество решения. Качество разностных схем характеризуется следующими основными параметрами: порядок аппроксимации, монотонность, устойчивость, уровень диссипативности, вычислительная трудоёмкость алгоритма.

Для первого случая (дозвуковые течения) стандартом де-факто стали методы расщепления переменных, для второго случая — методы приближённого решения задачи Римана (задачи о распаде разрыва), называемые также годуновскими или характеристическими методами, либо их упрощённые модификации. Попытки применения первого подхода для решения задач второго класса приводят, как правило, к появлению либо немонотонного решения, либо к численному решению с нарушением закона о неубывании энтропии. Использование же второго подхода при решении задач первого класса также сопряжено с определёнными трудностями, связанными, как правило, с устойчивостью получаемого решения и высокими вычислительными трудозатратами. Отдельного рассмотрения заслужива-

ют вопросы практического использования обоих подходов: выбор условий применимости, влияние топологии расчетных сеток, численные схемы аппроксимации потоков и т.д. Кроме того, с точки зрения реализации алгоритма интегрирования уравнений метод расщепления является более универсальным чем методы годуновского типа.

При этом крайне востребованным являются направления численного моделирования, в которых оба класса задач имеют место – динамика плазмы, течения с пульсирующими источниками массы, энергии и импульса, двухфазные течения и пр.

*Следовательно, разработка и реализация метода, позволяющего исследовать как дозвуковые, так и около- и сверхзвуковые течения в рамках единого подхода является актуальной задачей. Решение этой задачи является шагом в сторону повышения универсальности математических моделей и расширения области применимости численных методов моделирования в промышленности.*

**Целью работы** является разработка гибридного численного метода, позволяющего решать задачи гидро-, аэро- и газодинамики сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха с автоматическим переключением между решением, получаемым на основе метода приближённого решения задачи Римана, и решением, получаемым с помощью метода расщепления.

**Задачами работы** являются

1. анализ возможностей численного решения уравнений гидро-, аэро- и газодинамики характеристическими методами и методами расщепления операторов;
2. поиск путей построения требуемого гибридного метод на основе рассмотренных методов;
3. выбор комбинируемых схем и способа их комбинирования;
4. реализация гибридного метода.

Комбинируемые схемы, на основе которых разрабатывается гибридный метод, должны удовлетворять следующим критериям, подтверждаемым либо строго математическим либо эмпирическим способом:

- консервативность;
- отсутствие “численных” осцилляций (монотонность);
- условная устойчивость по поточному числу Куранта;
- безусловная устойчивость схемы в дозвуковых течениях по отношению к акустическому критерию Куранта;
- безусловная устойчивость схемы при моделировании диффузионных процессов;
- параллелизм и высокая степень масштабируемости;
- возможность проведения расчёта на неструктурированных сетках.

Реализованный гибридный метод должен быть валиден на задачах с известным аналитическим решением или по открытому экспериментальному данным.

**Методы исследования** состоят в аппроксимации и численном анализе математических моделей, описывающих движение сплошных жидких и газообразных сред — систем дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих базовые законы классической механики сплошной среды: уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности, уравнения баланса энергии.

**Достоверность результатов** обеспечивается:

1. выбором корректных допущений, использованием фундаментальных законов сохранения — массы, импульса и энергии, записанных в форме систем дифференциальных уравнений в частных производных;

2. использованием консервативной аппроксимации базовых уравнений, исследованием сеточной сходимости в валидационных задачах;
3. выполнением общефизических качественных закономерностей в тестовых задачах;
4. сравнением результатов исследования с известными аналитическими, экспериментальными и расчётными данными.

### **Основные положения выносимые на защиту**

- Гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых для моделирования сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха, обеспечивающий неосциллирующее решение как при высоких числах Маха, так и при моделировании несжимаемых течений, включая расчёт распространения акустических волн.
- Реализация гибридного метода решения уравнений Навье – Стокса для сжимаемых течений на основе открытой библиотеки OpenFOAM, включая возможность использования её встроенного функционала — моделирование турбулентности, стационарные решения, параллельное выполнение задач, изменение формы расчётной области и пр.
- Результаты применения разработанного метода для решения большого числа модельных, экспериментальных и промышленных задач, включая расчёт сжимаемых и несжимаемых течений, распространения акустических волн, динамики плазмы, двухфазных течений и пр.

**Научная новизна** работы состоит в следующем.

- Разработан новый численный метод моделирования течений сжимаемых сред в широком диапазоне числе Маха. В основу метода положены два известных подхода: метод расщепления, применяемый

для расчёта несжимаемых вязких течений, и метод годуновского типа (схема Курганова — Тадмора), применяемый для расчёта сжимаемых течений при высоких числах Маха. Предложенный гибридный метод позволяет сочетать преимущества обоих подходов и использовать в расчётах единый критерий устойчивости — поточное число Куранта.

- Гибридный метод реализован в виде самостоятельных приложений на основе открытой платформы OpenFOAM, расширяющих её функционал.
- Разработанные модели, алгоритмы и программы использованы для решения задачи о моделировании течения в пространстве водокольцевого насоса двухфазной среды в новой постановке: с учётом сжимаемости среды и нелинейного уравнения состояния.

**Практическое значение** работы состоит в возможности использования разработанного численного метода для решения широкого круга прикладных задач газо-, гидро- и аэродинамики — расчёта течений однокомпонентных, многокомпонентных и двухфазных сжимаемых сред. Реализация предложенного метода в рамках открытой платформы OpenFOAM позволяет существенно сократить время разработки новых моделей за счёт возможности использования имеющихся стандартных алгоритмов и библиотек, а также повысить универсальность численных моделей. Предложенный подход позволяет вести разработку новых моделей в пакете OpenFOAM с сохранением принципов связывания давления, плотности и скорости, заложенных в алгоритмы PISO и SIMPLE.

Это также снижает затраты на решение вопросов организации технологического процесса решения конкретных прикладных задач — подготовки исходных данных, параллельного выполнения кода, обработки результатов. В частности, использование платформы OpenFOAM позволяет расширить область применения предложенного метода для:

- быстрого поиска стационарных решений;
- задач с изменением геометрии области течения и подвижными (деформируемыми) сетками;
- моделирования турбулентных течений.

Возможности применения гибридного метода продемонстрированы для четырёх групп модельных и прикладных задач:

- численное моделирование сжимаемых однофазных течений в области транс- и сверхзвуковых чисел Маха;
- численное моделирование несжимаемых однофазных течений;
- моделирование распространения акустических волн;
- решение промышленных задач (моделирование высокоскоростного микрокомпрессора, системы генерации газа подушек безопасности и водокольцевого насоса).

Тестирование метода на большом числе модельных, экспериментальных и промышленных задач позволило сделать следующие эмпирически обоснованные выводы о преимуществе использования гибридного метода по сравнению с методом расщепления и схемой Курганова – Тадмора:

- а) снятие ограничения на шаг по времени по акустическому числу Куранта при моделировании дозвуковых (несжимаемых) течений;
- б) повышенная устойчивость численной схемы (особенно на ячейках произвольной формы плохого качества) за счёт использования неявной схемы решения уравнения для давления.

**Апробация работы.** Материалы работы докладывались и обсуждались на конференциях, семинарах, НТС и рабочих группах:

- XL Академические Чтения по Космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, 26-29 января 2016г.
- Семинар «Свободное ПО для решения задач механики сплошных сред» конференции “Облачные вычисления. Образование. Исследования. Разработка. 2015” , г. Москва, 3-4 декабря 2015 г.
- 11<sup>th</sup> OpenFOAM Worksop. Portugal, Guimaraes, June 26 - 30, 2016.
- Подсекция № 1 Секции № 2 НТС ФГУП ЦНИИмаш, г. Королёв, 7 июля 2016 г.
- 3<sup>rd</sup> International Rotating Equipment Conference, Germany, Dusseldorf, 14 - 15 September, 2016.

**Личный вклад.** Работа полностью выполнена автором, в том числе выполнен обзор подходов к численному моделированию сжимаемых течений, предложен и реализован гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых, выполнено тестирование реализации предложенного метода на перечисленных выше задачах. Из работ, выполненных совместно с другими авторами, в диссертацию включены только части, выполненные соискателем непосредственно.

**Публикации автора.** Основные результаты работ отражены в публикациях, в том числе в журналах из списка ВАК и индексируемых в международных системах цитирования:

- Применение НРС-технологий для решения пространственных задач мультифизики / Васильев В.А., Крапошин М.В., Ницкий А.Ю., Юсакин А.В. // *Вычислительные методы и программирование*. — 2011. — Vol. 12, no. 1. — Рп. 160–169

- Direct numerical simulation of internal gravity wave attractor in trapezoidal domain with oscillating vertical wall / Kravoshin M., Brouzet C., Dauxois T. et al. // *Proceedings of ISP RAS*. — 2014. — Vol. 26, no. 5. — Pp. 117–142
- *M. Kravoshin, A. Bovtikova, S. Strijhak.* Adaptation of Kurganov – Tadmor Numerical Scheme for Applying in Combination with the PISO Method in Numerical Simulation of Flows in a Wide Range of Mach Numbers // *Procedia Computer Science*. — 2015. — Vol. 66. — Pp. 43–52
- *M. Kravoshin, M. Kalugin, S. Strijhak, I. Evdokimov.* Numerical study of characteristic modes and frequencies of flow in high speed compressors. — 3rd Internation Rotating Equipment Conference Technical Paper. — 2016
- *M.B. Kravoshin.* Возможности гибридного метода аппроксимации конвективных потоков при моделировании течений сжимаемых сред // *Труды Института системного программирования РАН*. — 2016. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 267–326

**Структура и объём диссертации.** Диссертация изложена на 182 страницах, включая 90 рисунков и 17 таблиц. Материал работы включает в себя введение, 3 главы, заключение и список литературы из 94 позиций. Работа поддержана грантом Министерства Образования и Науки РФ RFMEFI60714X0090, грант № 14.607.21.0090.

# Глава 1

## Численное моделирование сжимаемых течений методом конечного объёма

Подавляющее большинство процессов, исследуемых в механике сплошных сред, описываются конвективно-диффузионным уравнением (1.1), которое связывает изменение некоторого удельного свойства  $\beta$  в объёме среды плотности  $\rho$  с конвективным потоком этого свойства  $\vec{U}\rho\beta$ , диффузионным потоком  $D_\beta\nabla\beta$  и распределёнными по этому объёму источниками и стоками  $S_B$ . Успех численного моделирования в задачах гидро-, аэро- и газодинамики во многом зависит от точности аппроксимации решения данного уравнения.

$$\frac{\partial\rho\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U}\rho\beta) = \nabla \cdot (D_\beta\nabla\beta) + S_B \quad (1.1)$$

Частным случаем уравнения конвекции-диффузии (1.1) является уравнение конвективного переноса:

$$\frac{\partial\rho\beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U}\rho\beta) = 0 \quad (1.2)$$

Данное уравнение является аналогом теоремы переноса Рейнольдса [6], позволяющей связать изменение некоторого экстенсивного свойства  $B$  материального элемента ( $CM$ ), переносимого векторным полем  $\vec{U}$ , с изменением количества этого свойства в контрольном объёме ( $CV$ ), переносимом векторным полем  $\vec{U}_\Gamma$  [6, 7]:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CM} \rho\beta dV = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho\beta dV + \oint_{\partial CV} \beta(\vec{U} - \vec{U}_\Gamma)\rho \cdot d\vec{S} \quad (1.3)$$

*Экстенсивным* называется свойство, которое пропорционально количеству вещества и обладает аддитивностью (например, импульс и внутренняя энергия), в то время как *интенсивное* свойство не зависит от количества вещества, его величина не является аддитивной — например, скорость и удельная внутренняя энергия.

Для корректной постановки задачи, уравнение (1.1) должно быть дополнено начальными и граничными условиями для искомой функции  $\beta(t, \vec{x})$ :

$\beta(0, \vec{x}) = \beta_0(\vec{x})$   
 $\left. \left( a \frac{\partial \beta}{\partial \vec{n}} + b \beta \right) \right|_{\vec{x} \in \Gamma} = \psi(t, \vec{x})$ , где  $\Gamma$  — это внешняя граница исследуемой части сплошной среды, а  $\vec{n}$  — внешняя нормаль на границе.

Для многих известных практических приложений решение задач гидро- аэро- и газодинамики сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных, аналогичных (1.1), имеющей вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{Q}, \quad (1.4)$$

Где,  $\mathbf{U}$  — вектор неизвестных искомых величин, описывающих состояние системы;  $\mathbf{F}(\mathbf{U}), \mathbf{G}(\mathbf{U}), \mathbf{H}(\mathbf{U})$  — вектор потоков этих величин,  $\mathbf{Q}$  — вектор источников. Например, в случае течения идеального газа

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{U} \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho U_x \\ \rho \vec{U} U_x + \vec{i} p \\ \rho U_x e + U_x p \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho U_y \\ \rho \vec{U} U_y + \vec{j} p \\ \rho U_y e + U_y p \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho U_z \\ \rho \vec{U} U_z + \vec{k} p \\ \rho U_z e + U_z p \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Здесь  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  - вектора базиса системы координат.

Решение этой задачи численным способом подразумевает осуществление выбора подхода по крайней мере на следующих двух этапах:

1. выбор способа аппроксимации слагаемых каждого из уравнений общей системы (1.4);
2. выбор метода решения всей системы в целом.

## 1.1. Математическая постановка рассматриваемых задач механики жидкости и газа

Предметом исследования в гидро-, аэро- и газодинамике являются подвижные, деформируемые и текучие среды, молекулярная и субмолекулярная структура которых не рассматривается, в соответствии с чем они называются сплошными [8, 9]. Для описания таких сред используются базовые законы сохранения, сформулированные для макроскопических свойств замкнутых систем или элементов сред (контрольных масс) [8, 9]:

1. закон сохранения массы (1.10), выражающий фактически условие замкнутости,
2. закон баланса импульса (1.11), связывающий изменение импульса с действующими силами,
3. закон баланса полной энергии (1.12), приравнивающий скорость изменения энергии системы к сумме подводимой извне к системе тепловой мощности и мощности действующих объёмных и поверхностных сил.

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho) \right) dV = 0, \quad (1.10)$$

$$\frac{dP}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \rho \vec{U}) \right) dV = \int_V \rho \vec{F}_b dV + \int_S \hat{\Pi} \cdot \vec{dS}, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = \int_V \left( \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho e) \right) dV &= \int_S -\vec{q} \cdot \vec{dS} + \\ &+ \int_V q_V dV + \int_V \vec{F}_b \cdot \vec{U} dV + \int_S \hat{\Pi} \cdot \vec{U} \cdot \vec{dS}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $M$  - масса элемента среды,  $\rho$  - плотность элемента среды,  $\vec{U}$  - скорость движения элемента среды,  $V$  - произвольный объём,  $\hat{\Pi}$  - тензор напряжений элемента жидкости,  $e$  - полная энергия элемента среды,  $\vec{q}$  - вектор теплового потока через границу объёма,  $q_V$  - объёмный источник тепла,  $\vec{F}_b$  - массовая сила, действующая на элемент среды,  $S$  - поверхность охватывающая объём  $V$ .

Эти законы, сформулированные для контрольной массы, обязательны при постановке задач моделирования гидро-, аэро- и газодинамики в приближении сплошности среды. При этом в зависимости от конкретного приложения или объекта исследования этот набор уравнений может дополняться новыми.

В данной работе рассматриваются следующие постановки задач: течение сжимаемого совершенного вязкого теплопроводного газа в отсутствие массовых сил, течение несжимаемой неизотермической среды, течение многокомпонентной смеси сжимаемых газов, течение гомогенизированной двухфазной сжимаемой смеси. Во всех случаях предполагается что жидкости Ньютоновские [8], а теплопроводность описывается законом Фурье [8].

### 1.1.1. Течение сжимаемого теплопроводного газа

В случае течения совершенного вязкого газа без действия массовых сил система уравнений (1.10), (1.11), (1.12) приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho) = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \rho \vec{U}) = \nabla \cdot \hat{\Pi}, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho e) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\hat{\Pi} \cdot \vec{U}), \quad (1.15)$$

$$\hat{\Pi} = - \left( p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{U} \right) I + \eta \left( \nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T \right), \quad (1.16)$$

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T, \quad (1.17)$$

$$e = u(p, T) + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U}, \quad (1.18)$$

$$du = C_v dT, \quad (1.19)$$

$$\lambda = \lambda(p, T), \quad (1.20)$$

$$\eta = \eta(p, T), \quad (1.21)$$

$$C_v = C_v(p, T), \quad (1.22)$$

Здесь  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $p$  - давление,  $I$  - единичный тензор,  $\eta$  - коэффициент динамической вязкости,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $\mu$  - удельная молярная масса,  $T$  - температура,  $u$  - внутренняя энергия,  $C_v$  - удельная изохорная теплоёмкость.

Система уравнений (1.13) - (1.22) дополняется начальными условиями (распределением искомых функций в пространстве расчётной области в начальный момент времени) и граничными условиями (распределением искомых функций или их производных на границе расчётной области).

### 1.1.2. Течение несжимаемой неизотермической среды

Данной постановке задачи не рассматривается в работе явно, тем не менее, она является предельным случаем сжимаемого течения в условиях, когда скорость среды существенно меньше скорости звука и является хорошей аппроксимацией в таких задачах, как течение стратифицированных сред или естественная конвекция. При течении несжимаемой неизотермической среды с учётом предположения о независимости теплоёмкости от

температуры и давления уравнение неразрывности (1.13) вырождается в условие несжимаемости, в уравнении сохранения импульса можно избавиться от плотности, уравнение сохранения полной энергии можно представить в виде уравнения переноса температуры [10]:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \vec{U}) = \nabla \cdot \frac{\Pi}{\rho} \quad (1.24)$$

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} T) \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \hat{\Pi} : (\nabla \vec{U})^T \quad (1.25)$$

### 1.1.3. Течение гомогенной смеси жидкостей и газов

Данный случае находит широкое применение на практике — течения в ракетных двигателях, смешение струй в двигателях внутреннего сгорания, взаимодействие микроструй воды и горячего газа при старте ракетносителей и пр.

В случае течения многокомпонентной смеси газов или многофазной смеси система уравнений (1.10), (1.11), (1.12) записывается для каждой компоненты или фазы, обладающих собственной массой (плотностью), импульсом (скоростью) и энергией (удельной энергией). Кроме того, для каждой компоненты или фазы балансовые уравнения дополняются замыкающими соотношениями, аналогичными тем, что были указаны для совершенного газа (1.16)-(1.22). Дополнительно вводится условие аддитивности масс компонент в элементарном физическом объёме смеси:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i \int_V \rho_i^0 dV, \quad (1.26)$$

где  $\rho_i^0$  — объёмная концентрация (средняя плотность) каждой компоненты смеси, равная отношению массы  $i$ -й компоненты к объёму, занимаемому всей смесью. В отличие от средней плотности, используется также истинная (термодинамическая) плотность  $\rho_i$  — как отношение массы компоненты к занимаемому ей объёму (то есть объёму без остальных примесей).

По аналогии с другими удельными свойствами, для описания состояния смеси вводятся объёмная доля компоненты (фазы)

$$\alpha_i = \frac{V_i}{\sum_j V_j}, \quad (1.27)$$

представляет собой отношение объёма, занимаемого компонентой, к общему объёму смеси, и массовая доля компоненты (фазы)

$$Y_i = \frac{M_i}{\sum_j M_j}, \quad (1.28)$$

отношение массы компоненты к общей массе смеси. Из определений объёмной и массовой долей следует, что в каждом элементарном физическом объёме сумма объёмных или массовых долей должна быть равна 1.

Массовая и объёмная доли связаны друг с другом через истинную плотность  $\rho_i$ :

$$Y_i = \frac{\rho_i^0}{\rho} = \alpha_i \frac{\rho_i}{\rho}.$$

Решение полной системы уравнений, образованной соответствующими законами движения для каждой из компонент, чрезвычайно трудоёмко и неоправданно для многих прикладных задач. Поэтому в промышленных приложениях зачастую используется приближение смеси, позволяющее описать «среднее» движение смеси, осреднив массу, импульс и энергию индивидуальных компонент потока по некоторому правилу, например, по массе:

$$\vec{U} = \frac{\sum_i \rho_i^0 \vec{U}_i}{\rho} = \sum_i Y_i \vec{U}_i,$$

$$e = \frac{\sum_i \rho_i^0 e_i}{\rho} = \sum_i Y_i e_i.$$

Удобство использования осреднения по массе состоит в аддитивности конвективной части уравнений массы, энергии и импульса, что позволяет описать движение смеси уравнениями (1.10), (1.11), (1.12). Индивидуальная скорость движения каждой компоненты смеси раскладывается на две

составляющие: среднюю  $\vec{U}$  скорость смеси и относительную  $\vec{U}_{r,i}$  скорость компоненты:

$$\vec{U}_i = \vec{U} + \vec{U}_{r,i}.$$

Изменение любого интенсивного свойства  $\beta_i$  фазы или компоненты смеси  $i$  (включая массовую долю  $Y_i$ ) выражается как:

$$\frac{\partial \rho_i^0 \beta_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U}_i \rho_i^0 \beta_i) = \frac{\partial \rho Y_i \beta_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho Y_i \beta_i) + \nabla \cdot (\vec{U}_{r,i} \rho Y_i \beta_i).$$

Сложив левые части уравнений балансов для всех компонент, можно записать выражение для изменения произвольного интенсивного свойства  $\beta$  смеси при движении её компонент:

$$\frac{\partial \rho \beta}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho \beta) + \sum_i \nabla \cdot (\vec{U}_{r,i} \rho Y_i \beta_i).$$

Правая часть балансного соотношения выводится, исходя из средних свойств смеси (давления, температуры и пр.), которые записываются аналогично (1.16)-(1.22), с той лишь разницей, что эти параметры теперь зависят не только от термодинамического состояния, но и от состава смеси.

Для замыкания системы уравнений в гомогенном приближении необходимо задаться способом вычисления относительных скоростей движения компонент системы (смеси). Для этого часто (особенно в динамике газа и плазмы) используется диффузионное приближение, связывающее скорость компоненты с градиентом её плотности:

$$\vec{U}_{r,i} \rho Y_i = D_i \nabla \rho_i^0,$$

либо с градиентом её массовой доли

$$\vec{U}_{r,i} \rho Y_i = \rho \tilde{D}_i \nabla Y_i.$$

где  $D_i$  и  $\tilde{D}_i$  – коэффициенты пропорциональности между диффузионным потоком и градиентом плотности либо массов доли соответственно.

Записав балансовые соотношения для смеси и пренебрегая слагаемыми второго порядка, получим систему уравнений, описывающую движение многокомпонентной смеси в гомогенном приближении (также принимая

что смесь является ньютоновской жидкостью и подчиняется закону Фурье распространения теплоты и закону Фика диффузационного обмен вещества) (1.29)-(1.40).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho) = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \rho \vec{U}) = \nabla \cdot \hat{\Pi}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho e) = \sum_i \nabla \cdot (e_i \rho \tilde{D}_i \nabla Y_i) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\hat{\Pi} \cdot \vec{U}), \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho Y_i) = \nabla \cdot (\rho \tilde{D}_i \nabla Y_i), \quad (1.32)$$

$$\hat{\Pi} = - \left( p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{U} \right) I + \eta \left( \nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T \right), \quad (1.33)$$

$$\rho^{-1} = \sum_i \frac{Y_i}{\rho_i(p, T)}, \quad (1.34)$$

$$e = u(p, T) + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U}, \quad (1.35)$$

$$du = \left( \sum_i Y_i C_{v,i} \right) dT, \quad (1.36)$$

$$\lambda = \lambda(p, T, Y_i) i = 1..n, \quad (1.37)$$

$$\eta = \eta(p, T, Y_i), i = 1..n, \quad (1.38)$$

$$\tilde{D}_i = \tilde{D}_i(p, T, Y_i), i = 1..n, \quad (1.39)$$

$$C_v = C_v(p, T, Y_i). \quad (1.40)$$

### 1.1.4. Течения областях с подвижными границами

Практический интерес представляют задачи с подвижными границами расчётной области — расчёт течений в компрессорах, турбинах и прочих аппаратах с круговым движением элементов проточной части, камеры двигателей внутреннего сгорания, задачи взаимодействия потока и конструкции и др.

При этом система уравнений либо дополняется граничными условиями, учитывающими движение границ, либо дополнительными слагаемыми, возникающими при описании течения в неинерциальной системе отсчёта, например, в уравнении баланса импульса это центробежные силы и сила Кориолиса.

### 1.1.5. Стационарные течения

Ещё одним важным классом задач, рассматриваемым в данной работе, является поиск стационарных и квазистационарных решений — исследование распределения полей давления, температуры и скорости в установленныхся режимах, вычисление интегральных характеристик при оптимизации конструкции и т.д.

В этом случае в системе уравнений (1.4) обнуляются все слагаемые, отвечающие за изменение состояния во времени и она принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \mathbf{Q}$$

Использование численных методов разрабатываемых для исходной системы (1.4) в этом случае становится излишне ресурсоёмким и требуются специальные алгоритмы или схемы поиска численного решения, удовлетворяющего стационарным уравнениям.

## 1.2. Аппроксимация уравнений механики жидкости и газа методом конечного объёма

Выбор способа (метода) аппроксимации слагаемых в уравнении (1.1) в составе общей системы (1.4) во многом ограничивается областью практического применения численного метода. Известные методы можно разделить на сеточные, бессеточные и комбинированные, включающие в себя свойства как первых, так и вторых.

Методы первой группы объединяет в определённой степени схожий подход к решению уравнения переноса (1.1) — расчётная область разбивается на элементы, в которых выбираются точки для определения значений искомой функции (физического свойства) и правило интерполяции этой функции и ей производных в этих точках. В соответствии с выбором этого правила составляется дискретный аналог производных по пространству и времени уравнения (1.1).

Методы второй группы характеризуются использованием лагранжевого подхода к решению задач расчёта переноса — расчётная область представляет собой пространство, заполненное подвижными элементами, которые «переносят» исследуемые свойства среды или производные от них. Состояние среды определяется интерполяцией по ближайшим известным подвижным элементам.

Третья группа объединяет возможности первой и второй для разрешения различных слагаемых (например — перенос осуществляется методом частиц, а диффузионные процессы рассчитываются методом конечных элементов).

К первой группе относятся метод конечных разностей (МКР) [11], метод конечных элементов (МКЭ) [12, 13], метод конечного объёма (МКО) [11, 6], метод спектральных элементов [14, 15], разрывный метод Галёркина [16, 17] и пр. К второй группе относятся такие подходы как метод сглажен-

ных частиц [18], вихревые методы [19, 20], метод дискретных элементов [21] и т.д. Наконец к последней группе можно отнести такие методы как метод конечных элементов с частицами [22], метод “вихрь в ячейке” и др.

В настоящее время при решении промышленных задач наиболее распространёнными являются три метода — МКР, МКЭ и МКО. Каждый из этих методов благодаря своим особенностям имеет свою устоявшуюся область применения. Можно отметить следующие преимущества и недостатки этих методов:

1. МКР — относительная простота аппроксимации дифференциальных операторов разностными, в том числе высокого порядка, сложность применения в областях с криволинейной геометрией, необходимость явного контроля консервативности;
2. МКЭ — высокий порядок аппроксимации, сложность обеспечения локальной консервативности схемы;
3. МКО — консервативный по построению метод, но имеющий низкий порядок (до 2-го) аппроксимации, наличие численной диффузии, относительная простота реализации.

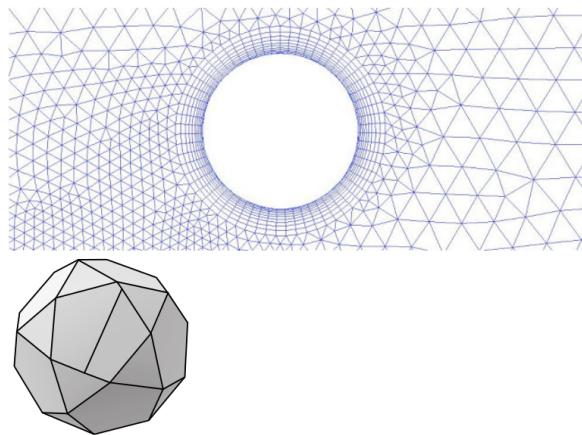
В данной работе для решения описанных выше задач (раздел 1.1) был выбран метод конечного объёма, как наиболее полно отвечающий нуждам вычислительной гидро-, аэро- и газодинамики за счёт заложенного в метод принципа консервативности и близости аппроксимирующих соотношений базовым законам сохранения, выраженным в математической форме.

В основе данного метода лежат следующие четыре теоремы:

- обобщённая теорема переноса Рейнольдса [6];
- теорема Остроградского — Гаусса;
- теорема о среднем;
- формула Тейлора.

При аппроксимации уравнений методом конечного объёма балансовые уравнения формулируются в интегральном виде. Переход от баланса экстенсивных свойств замкнутых систем к балансу интенсивных свойств в контрольных объёмах производится с помощью обобщённой теоремы переноса Рейнольдса

В пространстве выбирается область, охватываемая замкнутой поверхностью, в объёме которой будут численно решаться балансовые уравнения. Эта область разбивается на неперекрывающиеся объёмы, вообще говоря, произвольной формы, рис. 1.1.



*Рис. 1.1. Дискретизация расчётной области в методе конечного объёма. Сверху - пример неструктурированной сетки расчётной области вокруг круга, состоящей из треугольных и четырёхугольных элементов. Снизу - пример произвольного пространственного контрольного объёма.*

Искомая непрерывная функция заменяется набором дискретных значений, соответствующих средним значениям в каждом таком объёме.

$$\langle \beta \rangle = \frac{1}{V} \int_V \beta dV$$

Для аппроксимации слагаемых, содержащих производные по времени, используем соотношение:

$$\int_V \frac{\partial \beta}{\partial t} dV = V \left\langle \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\rangle,$$

а для аппроксимации источниковых слагаемых — соотношение

$$\int_V S_B dV = V \langle S_B \rangle.$$

Затем с помощью теоремы Остроградского — Гаусса уравнения записанные для каждого контрольного объёма в дивергентной форме для всей области преобразуются следующим образом:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{U}\beta) dV = \sum_f \langle \vec{U}\beta \rangle_f \cdot \vec{S}_f,$$

$$\int_V \nabla \cdot (D_\beta \nabla \beta) dV = \sum_f \langle D_\beta \nabla \beta \rangle_f \cdot \vec{S}_f,$$

Здесь индекс  $f$  означает вычисление соответствующего значения на поверхности ячейки (face). Для описания элементов сетки и ячеек, используются следующие обозначения и величины (рис. 1.2):

- $P$  — центр данной ячейки;
- $N$  — ячейка-сосед;
- $f$  — грань;
- $\vec{C}$  — центр ячейки;
- $V$  — объём ячейки;
- $\vec{C}_f$  — центр грани;
- $\vec{S}_f$  — площадь грани умноженная на нормаль к ней;
- $\vec{d}_{PN}$  — вектор соединяющий две соседние ячейки.

Предполагается, что средние значения функции соответствуют центрам контрольных объёмов (при осреднении по объёму) либо центрам граней (при осреднении по поверхности).

Для вычисления средних значений функции на границе ячейки используется аппроксимирующее соотношение (коэффициенты которого могут быть получены с помощью формулы Тейлора), связывающее значения

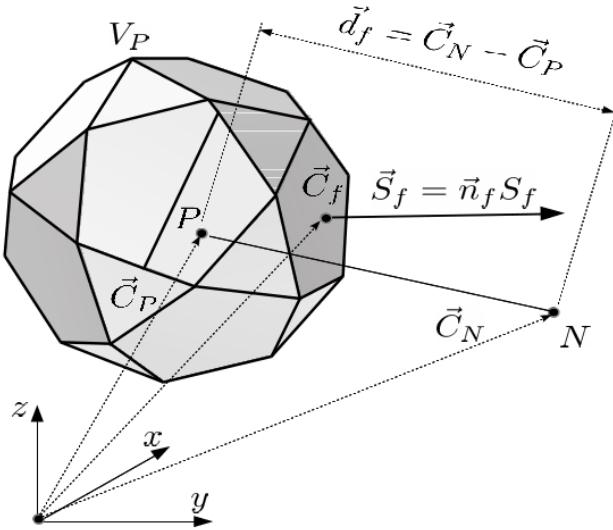


Рис. 1.2. Обозначения элементов расчётной сетки в методе конечного объёма

в центрах граней со значениями в центрах объёмов:

$$\langle \beta \rangle_f \approx \sum_i w_i \langle \beta \rangle_i$$

Для приближённого вычисления производных по времени используются конечно-разностная аппроксимация, например схемы первого порядка точности:

$$V \left\langle \frac{\partial \rho \beta}{\partial t} \right\rangle \approx V \frac{\rho^n \beta^n - \rho^o \beta^o}{\Delta t}$$

В результате аппроксимации получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений в узлах сетки (центрах контрольных объёмов).

### 1.3. Схемы аппроксимации слагаемых в уравнении переноса

В результате аппроксимации (замены дифференциальных операторов их разностными аналогами) получается соответствующий дискретный

аналог уравнения (1.1). Полученное дискретное уравнение обладает свойствами, в определённой мере наследуемыми (но необязательно) от свойств разностных аналогов отдельных дифференциальных операторов исходного уравнения: порядок аппроксимации, монотонность, диссипативность, сходимость, консервативность, устойчивость. [23].

Повышение порядка аппроксимации ведёт к приближению численного решения к аналитическому, но с другой стороны — как правило ухудшает монотонность и, возможно, устойчивость. С другой стороны, обеспечение монотонности зачастую приводит к росту диссипативности и снижению порядка аппроксимации. Таким образом, исследователь сталкивается с необходимостью поиска компромисса между порядком аппроксимации, монотонностью, диссипативностью и устойчивостью.

Ещё одной проблемой, стоящей перед исследователем, является выбор способа учёта значений искомой функции в правой части дискретизированного уравнения. В случае выбора явной схемы условие устойчивости будет налагать более жёсткие ограничения на шаг по времени, при этом вычислительные затраты на один шаг по времени будут меньше, чем в случае выбора неявной схемы. С другой стороны, выбор неявной схемы часто позволяет получить безусловно устойчивый метод, а значит, позволит использовать более крупный шаг интегрирования по времени по сравнению с условно устойчивой схемой. При этом затраты на выполнение одного шага существенно возрастают. Кроме того, использование неявной схемы связано с проблемой решения получающейся системы уравнений, которая также предполагает поиск эффективного численного метода:

- если исходная система уравнений нелинейная, то потребуется либо её линеаризация, либо реализация метода решения системы нелинейных алгебраических уравнений;
- если же система уравнений линейная (или была линеаризована), то проблема выбора способа решения системы всё равно остаётся акту-

альной:

- требуется выполнение условия сходимости итерационного процесса поиска решения системы, поскольку число неизвестных обычно велико и прямые методы неприменимы;
- в зависимости от типа разреженной системы уравнений (симметричная/несимметричная) необходимо подобрать наиболее эффективный способ её решения (метод би-сопряжённых градиентов, многосеточные методы и пр.);
- если же система уравнений будет заполненной, то большинство современных реализаций итерационных методов проявивших себя при решении разреженных матриц будут неэффективны для её решения.

### 1.3.1. Аппроксимация производных по времени

Производные по времени в методе конечного объёма аппроксимируются с помощью схем первого или второго порядков. Схемой первого порядка является схема Эйлера:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \beta dV \approx \frac{V^n \rho^n \beta^n - V^o \rho^o \beta^o}{\Delta t}$$

Согласно [10], данная схема является ограниченной и устойчивой. В то же время она обладает достаточно высокой схемной вязкостью, что создаёт необходимость использования крайне малого шага по времени при необходимости моделирования таких явлений как например распространение акустических возмущений. Вторым положительным свойством схемы является простота её реализации.

Для снижения численной диффузии, можно использовать схемы второго порядка, например схему Адамса – Башфорта [10]:

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \beta dV \approx \frac{3V^n \rho^n \beta^n - 4V^o \rho^o \beta^o + V^{oo} \rho^{oo} \beta^{oo}}{\Delta t}$$

Данная схема считается неограниченной [10] и может приводить к «паразитным» осцилляциям, поэтому вместо неё обычно используется схема Кранка — Николсона [10].

### 1.3.2. Аппроксимация источниковых слагаемых

При аппроксимации источниковых слагаемых методом конечного объёма используется простейшая квадратурная формула — берётся значение источника в центре контрольного объёма:

$$\int_V S_B dV \approx V^n S_B^n(\vec{C})$$

В неявных методах имеется возможность повысить устойчивость схемы за счёт линеаризации источниковых слагаемых. Если известно, что величина источника  $S_B$  проопорциональна искомой величине  $\beta$  (т.е.  $S_B = \beta S_\beta$ ) то в разностном аналоге соответствующего дифференциального уравнения это можно использовать для «улучшения» свойств матрицы — диагонального преобладания в результирующей системе уравнений. При этом необходимо учитывать знак источника — такая неявная дискретизация целесообразна только если к результирующей системе уравнений прибавляется неотрицательное слагаемое  $S_\beta \geq 0$  :

$$\int_V \beta S_\beta dV \approx V^n \beta^n S_\beta^n.$$

### 1.3.3. Аппроксимация диффузионных слагаемых

Дискретизация диффузионного слагаемого производится в методе конечного объёма с использованием теоремы Остроградского — Гаусса и формулы конечных разностей для вычисления градиента по нормали в каждой грани ячейки:

$$\int_V \nabla \cdot (D_\beta \nabla \beta) dV \approx \sum_f \left( \frac{D_\beta}{|\vec{x}_N - \vec{x}_P|} \right)_f |\vec{S}_f| (\beta_N^n - \beta_P^n)$$

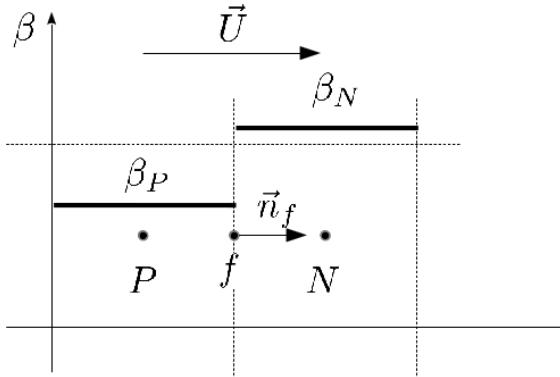
В случае равномерной ортогональной сетки эта схема соответствует схеме центральных разностей и обладает вторым порядком аппроксимации по пространству. При решении нестационарных уравнений неявная схема является безусловно устойчивой.

### 1.3.4. Аппроксимация конвективных слагаемых

В выбранном МКО для аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых и производных по пространству и времени уравнения (1.1) используется формула Тейлора, которая теоретически позволяет получить любой порядок аппроксимации. При этом в случае необходимости получения монотонного решения скалярного уравнения переноса с помощью однородной линейной схемы, *теорема Годунова*[24] ограничивает порядок аппроксимации первым порядком. Это в свою очередь приводит к необходимости учёта таких свойств как *диссипативность* (численная диффузия) и дисперсия, приводящим к «размытию» волн и сдвигу фазы численного решения. В свою очередь, эти свойства могут оказаться на качестве численного решения. Таким образом, процесс выбора или разработки численной схемы всегда связан с поиском компромисса между различными свойствами численного решения.

Ещё одним важным (в первую очередь для уравнений конвективного переноса) свойством численной схемы является **устойчивость**. Как известно, схема может быть безусловно устойчивой, условно устойчивой и безусловно неустойчивой. Так для уравнения конвективного переноса (1.2), примером безусловно устойчивой схемы является противопоточная схема аппроксимации, примером безусловно неустойчивой является «сопоточная» схема, а примером условно устойчивой является схема центральных разностей, рис. 1.3

В практических приложениях используется комбинация противопоточной схемы и схемы центральных разностей для достижения наилучшего соотношения устойчивость/монотонность/диссипативность/сходимость.



$$\beta_f^{CD} = \beta_P \frac{|\vec{C}_f - \vec{C}_P|}{|\vec{C}_N - \vec{C}_P|} + \beta_N \frac{|\vec{C}_N - \vec{C}_f|}{|\vec{C}_N - \vec{C}_P|}$$

$$\beta_f^{UD} = pos(sgn(\vec{U}_f \cdot \vec{n}_f))\beta_P + neg(sgn(\vec{U}_f \cdot \vec{n}_f))\beta_N$$

Рис. 1.3. Иллюстрация безусловно устойчивого противопоточного метода и условно устойчивого метода центральных разностей для конвективного переноса. На рисунке приведены выражения для вычисления значений функции  $\beta$  на границе  $f$  методом центральных разностей  $\beta_f^{CD}$  и противопоточным методом  $\beta_f^{UD}$ .

Для получения такой «компромиссной» схемы вместо монотонности используются условия уменьшения или ограничения полной вариации (TVD и TVB соответственно), позволяющие разделить аппроксимацию искомой функции при вычислении конвективных потоков на две составляющих: а) монотонную, безусловно устойчивую, но высокодиссипативную противопоточную схему первого порядка и б) низкодиссипативную нелинейную TVD (или TVB) схему повышенного порядка (начиная со 2-го). Например, для вычисления функции  $\beta$  на грани  $f$  (см. рис. 1.3) можно записать такое выражение:

$$\beta_f = \beta_f^{LO} + \Psi(R_f) (\beta_f^{HO} - \beta_f^{LO}),$$

где  $\beta_f^{LO}$  — значение  $\beta$ , вычисленное в точке  $f$  методом низкого порядка (в данном случае  $\beta_f^{LO} = \beta_P$ ),  $\beta_f^{HO}$  — значение  $\beta$  вычисленное в точке  $f$ , методом высокого порядка,  $\Psi(R_f)$  — функция-ограничитель, обеспечивающая нужный порядок точности при сохранении TVD-свойств схемы [25, 26]. Ограничитель  $\Psi(R_f)$  зависит от градиента функции  $\beta$  в трёх ячейках сетки — двух вверх по потоку и одной вниз по потоку относительно выбранной грани  $f$ :

$$R_f = \frac{\beta_W - \beta_P}{\beta_P - \beta_N},$$

где  $\beta_W$  — значение функции  $\beta$  в точке  $W$  (не показана на рис. 1.3) вверх по потоку относительно точки  $P$ . В зависимости от  $R_f$ , функция  $\Psi(R_f)$  принимает значения из определённой области ([25]), что обеспечивает TVD-свойство и заданный порядок схемы. Примеры наиболее распространённых функций-ограничителей и область в которой обеспечивается свойство TVD при сохранении второго порядка аппроксимации, показаны на рис. 1.4, [27].

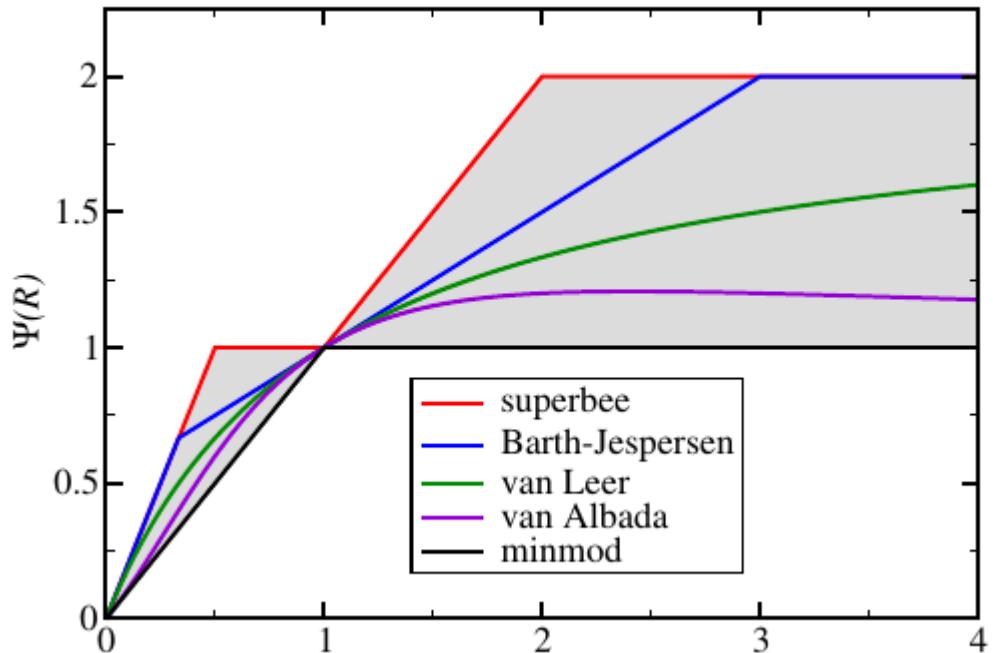


Рис. 1.4. Примеры наиболее часто используемых функций-ограничителей [27].

### 1.3.5. Учёт криволинейной геометрии на неструктурированных сетках

Приведённые выше дискретные аналоги слагаемых уравнения конвекции-диффузии (1.1) даны для «дискретизированной» геометрии, удовлетворяющей определённым условиям:

- геометрические примитивы, описывающие поверхности (грани) и контуры (ребра), охватывающие вычислительные объёмы (ячейки),
  - линейные;
- положение точки вычисления среднего значения функции в каждом контрольном объёме приходится на его центр;
- положение точки вычисления среднего значения функции в каждой грани приходится на её центр;
- вектор, соединяющий центры соседних ячеек, и нормаль к их общей грани параллельны;
- вектор, соединяющий центры соседних ячеек проходит через центр общей грани;
- кроме того, неявно предполагается «одномерность» течения при вычислении потоков на границах ячеек.

Также существуют ограничения на дискретизацию расчётной области, связанные с точностью интерполяции и обусловленностью линейных алгебраических систем: желательно, чтобы

- 1) размеры элементов (контрольных объёмов) были одинаковы во всех направлениях;
- 2) расстояния между центрами контрольных объёмов не менялись резко от одного к другому.

Таким образом, геометрию расчётной области, «идеальную» для решения уравнений переноса методом конечного объёма можно охарактеризовать как ортогональную, прямоугольную и равномерную.

На практике соблюдение всех вышеперечисленных условий является скорее исключением, чем правилом, и чаще всего возможно при решении модельных одномерных или двумерных задач. Исследование же течений в реальных условиях чаще всего сопряжено с необходимостью дискретизации

расчётной области, ограниченной криволинейными поверхностями. В этом случае обычно возможны два подхода:

1. использование локальной системы координат для каждого вычислительного элемента (аналогично МКЭ);
2. введение явных коррекций, учитывающих отклонение геометрии сетки от «идеальной».

Первый подход является предпочтительным при использовании структурированных сеток с заранее известным набором типов элементов — обычно гексаэдров и тетраэдров. Недостатком подхода является сложность построения сеток с использованием определённых типов ячеек.

Преимущества первого подхода заключаются, во-первых, в простоте реализации процедур явной коррекции, а во-вторых в возможности использования расчётных сеток с произвольной формой контрольных объёмов, что существенно упрощает процесс их построения инженером. Эти преимущества достигаются за счёт снижения сходимости и ограниченности решения.

Можно выделить следующие параметры, характеризующие качество расчётной сетки и непосредственно оказывающие влияние на численное решение:

1. скособоченность, см. рис. 1.5;
2. неортогональность, см. рис. 1.6;
3. масштабность, см. рис. 1.7;
4. равномерность весов интерполяции, см. рис. 1.8.

Скособоченность сеточных линий приводит к снижению порядка аппроксимации при интерполяции и вычислении конвективных слагаемых, возникновению дополнительной числовой диффузии ([10]), поскольку

происходит некорректная замена производных в разложении по формуле Тейлора для производной по направлению между двумя центрами ячеек.

Неортогональность приводит к неправильному вычислению дифференциональных слагаемых вследствие несовпадения направления нормали к поверхности, вдоль которой вычисляется производная в соответствии с теоремой Гаусса — Остроградского, и направления, соединяющего центры прилежащих ячеек, вдоль которого определяются веса интерполяции. При умеренных углах между этими направлениями возможна явная коррекция, которая, тем не менее, может приводить к неограниченности решения.

Высокая масштабность приводит к искажению результатов в дифференциональных задачах вследствие значительных различий между градиентами в разных направлениях. Кроме того, при использовании сеток с высокой масштабностью снижается скорость сходимости процесса итерационного решения симметричных СЛАУ, таких как многосеточный метод или метод сопряжённых градиентов с предобуславливанием.

Наконец, сильная неравномерность весов интерполяции может скаться на свойствах матрицы и, как результат, привести к медленной сходимости при решении системы линейных алгебраических уравнений.

## **1.4. Методы решения систем дифференциальных уравнений механики жидкости и газа**

Постановка задач гидро- аэро- и газодинамики включает в себя решение систем уравнений, включающих уравнения изменения массы, импульса и энергии и уравнение состояния. Выбор способа совместного решения этих уравнений уже является самостоятельной задачей численного моделирования, и, как результат, он оказывает влияние на характеристики получаемого численного решения и его соответствие исходной системе.

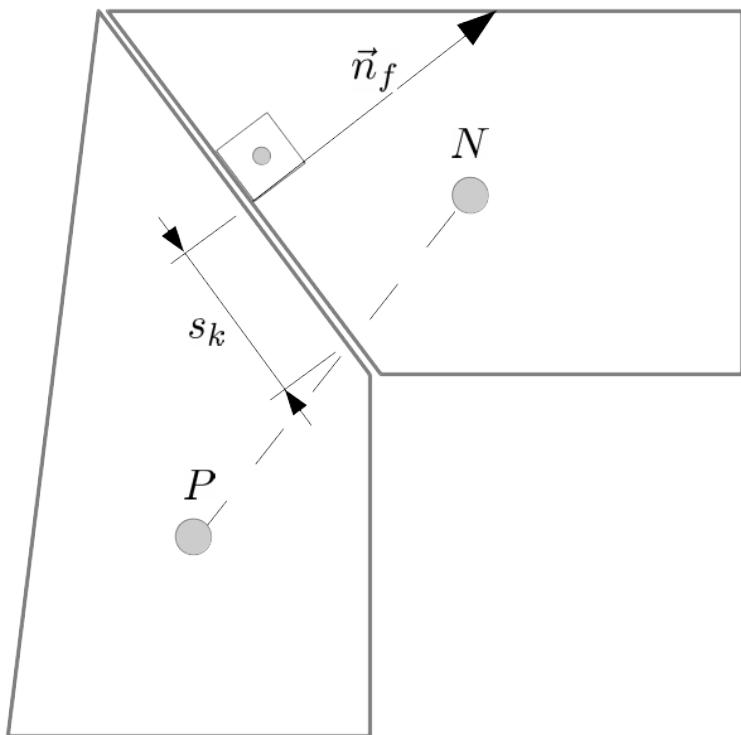


Рис. 1.5. Геометрическая иллюстрация определения скособоченности

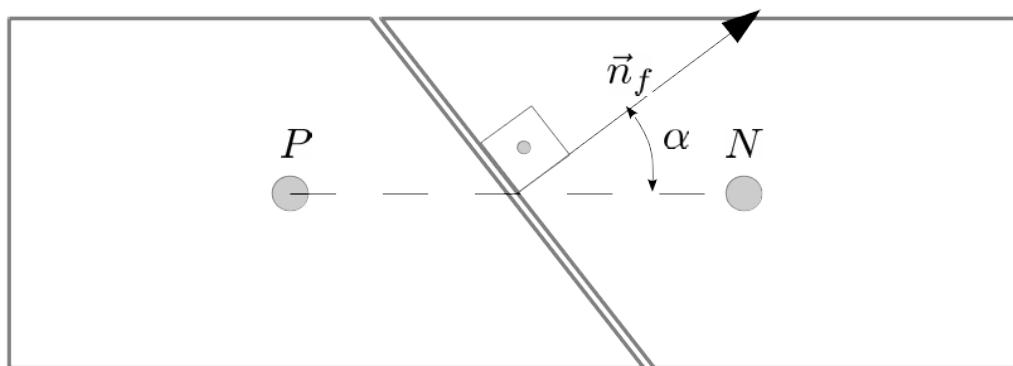


Рис. 1.6. Геометрическая иллюстрация определения неортогональности

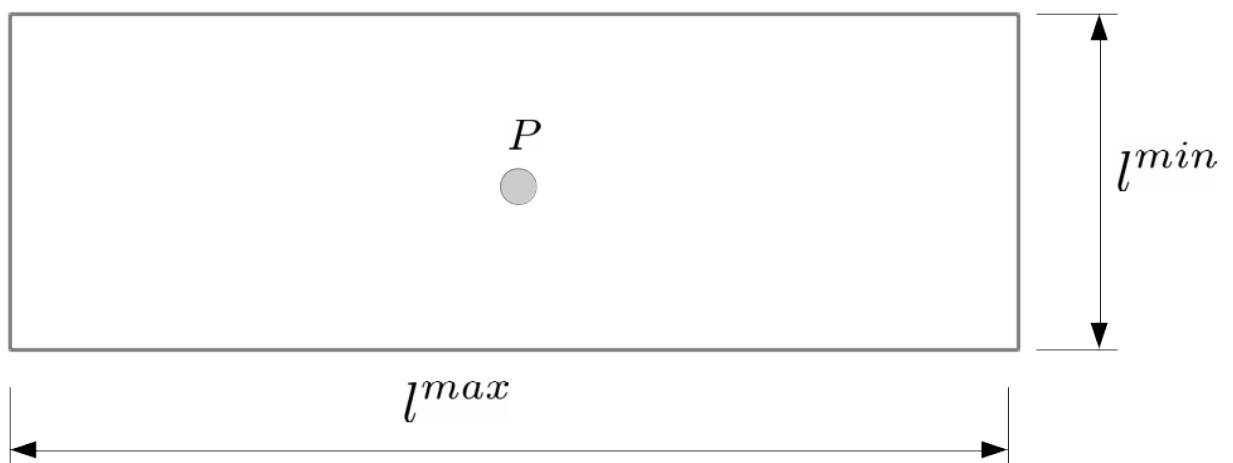


Рис. 1.7. Геометрическая иллюстрация определения масштабности

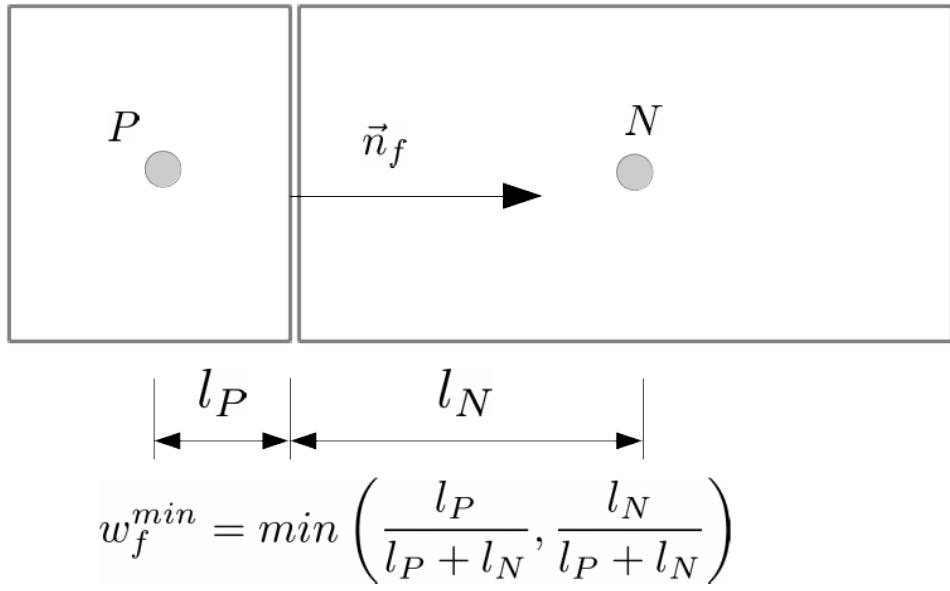


Рис. 1.8. Геометрическая иллюстрация определения равномерности весов интерполяции. Внизу приведены формулы для вычисления весов интерполяции линейным способом. Если расстояние между центрами ячеек и центром грани одинаковое, то веса должны быть равны 1/2.

Среди методов, используемых в рамках метода конечного объёма, можно выделить два наиболее часто используемых типа согласно классификации О.М. Белоцерковского, [28]:

- годуновские методы или характеристические методы;
- методы расщепления.

#### 1.4.1. Годуновские методы

В основе этой группы методов, применяющихся в первую очередь для решения систем гиперболических уравнений, лежит приближённое решение задачи Римана для исходной системы уравнений в упрощённой постановке — например, в одномерном линеаризованном приближении.

Суть метода состоит в анализе исходной системы ДУЧП и поиске т.н. инвариантов Римана и их характеристических скоростей, позволяющих свести нахождение решения исходной задачи к решению системы независимых ДУЧП [29, 30].

Данное направление развития численных методов является в настоящее время одним из «флагманов» при решении гиперболических задач в настоящее время. Можно выделить следующие этапы, необходимые для успешного применения методов этого класса для решения задач гидро- аэро- и газодинамики.

1. Записать исходную систему уравнений в консервативных переменных в векторном виде — см. уравнение (1.4).
2. Решить задачу о нахождении собственных чисел (характеристических скоростей) этой системы (или её линеаризованного аналога). При необходимости, найти правые и левые вектора (инварианты Римана). В результате будет получена новая система уравнений с явно заданными скоростями распространения сигнала [29].
3. Решить точно или приближённо новую задачу, рис. 1.9.
4. Использовать это новое решение для получения разностных схем в исходной задаче.

Важной особенностью данных методов является возможность явного учёта направления распространения волн для построения монотонных схем для случаев, в которых сигнал в соседних ячейках может распространяться в различных направлениях (в отличие от простейшего случая, рис. 1.9) - см. рис. 1.10.

Из приближённого решения задачи Римана для одномерного движения идеального газа следуют три скорости распространения возмущений  $U + c$ ,  $U$  и  $U - c$ , где  $U$  — локальная скорость среды,  $c$  — скорость распространения акустических возмущений, соответствующих характеристикам системы. По известным состояниям среды в двух соседних ячейках можно приближённо вычислить конвективные потоки на их общей грани. В случае дозвукового течения возмущения распространяются в обе стороны от разрыва, что соответствует разнонаправленным характеристикам (см. рис.

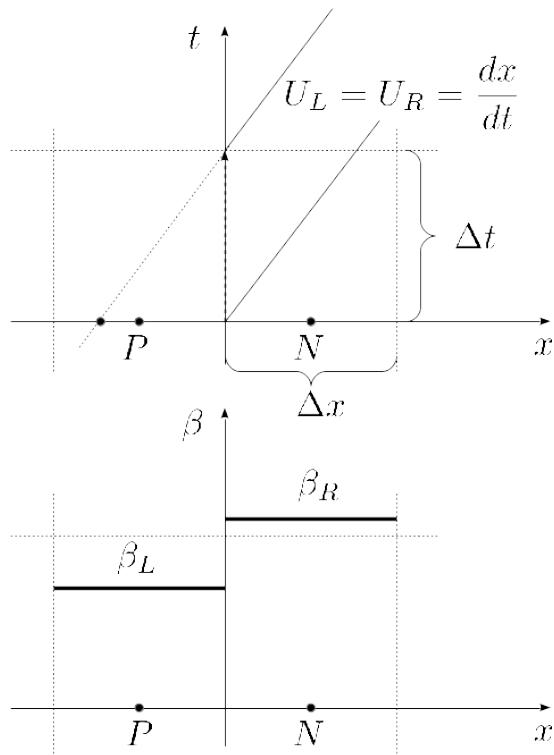


Рис. 1.9. Метод характеристик для одномерного уравнения переноса с одной скоростью распространения возмущений

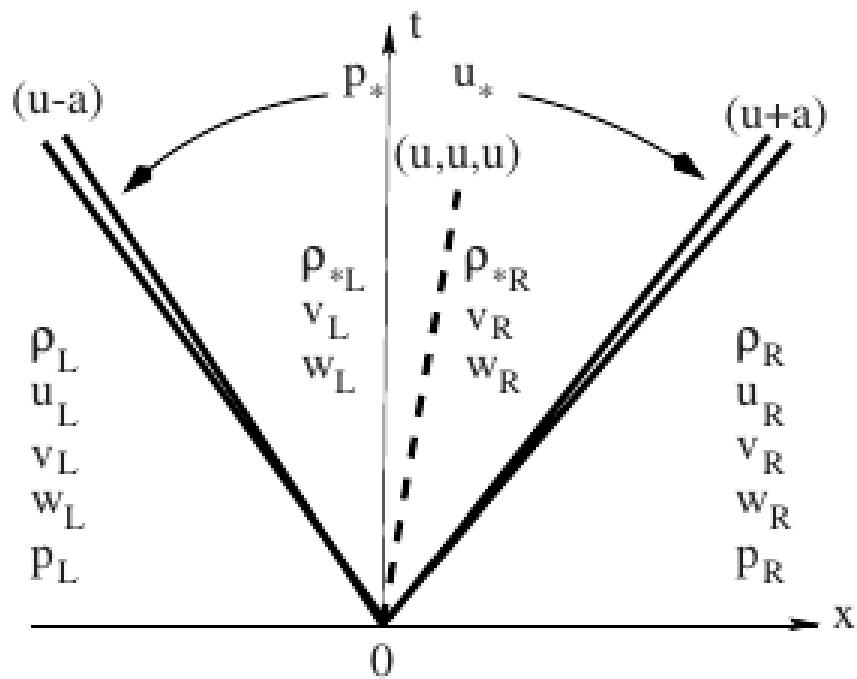


Рис. 1.10. Характеристики при плоском движении идеального газа. Точка "0" соответствует центру грани между ячейками "P" и "N"

1.10). Особый интерес представляет область параметров, соответствующая «треугольнику» между состояниями R и L, обозначаемая  $\star$ .

Если не учитывать контактный разрыв, как было предложено Хартеном, Лаксом и ван Лилем [31, 32], то поток в области между характеристиками  $S_L$  и  $S_R$  может быть рассчитан как взвешенная сумма правового и левого состояний:

$$F_f^{HLL} = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L},$$

где  $S_L$  — максимальная скорость распространения сигнала, соответствующая состоянию в объёме слева,  $S_R$  — максимальная скорость распространения сигнала, соответствующая состоянию в объёме справа,  $F_L$  — конвективный поток, рассчитанный по состоянию слева,  $F_R$  — конвективный поток, рассчитанный по состоянию справа.

#### 1.4.1.1. Схема Русанова

Данная схема [33] является самой простой и предполагает учет распространения только одной, самой быстрой волны:

$$S^+ = S_L = S_R = \max(|u_L - c_L|, |u_R - c_R|, |u_L + c_L|, |u_R + c_R|)$$

Выражение для потока в промежуточной области принимает вид [33]:

$$F_f^R = \frac{1}{2} (F_L + F_R) - \frac{1}{2} S^+ (U_R - U_L)$$

Схема крайне проста в реализации и является одной из наиболее надёжных, хотя и уступает по точности как схеме HLL, так и другим известным схемам (HLLC, КИР).

#### 1.4.1.2. Схемы расщепления вектора потоков

Широкую известность приобрели явные методы решения уравнений газодинамики, схожие с методами решения задачи Римана, но при этом предлагающие более простые способы вычисления потоков — схемы расщепления вектора потоков, такие как CUSP [34, 35], AUSM [36, 37].

В этих методах вектор конвективных потоков разбивается на две составляющих — прямую  $F_f^+$  и обратную  $F_f^-$ , сумма которых даёт общий поток  $F_f$  свойства  $\beta$  через грань  $f$ :

$$F_f = F_f^+ + F_f^-.$$

Величины прямого и обратного потоков вычисляются с учётом локальных значений числа Маха в ячейках справа и слева. Разделение потоков может также осуществляться по конвективным слагаемым уравнений решаемых уравнений, как это делается например в схеме AUSM [36, 37]:

$$F_f = F_f^{(c)} + F_f^{(p)}.$$

Где  $F_f^{(c)}$  — вклад в поток за счёт конвективного механизма переноса и вычисляемый относительно локальной скорости звука на границе ячейки,  $F_f^{(p)}$  — вклад в поток градиента давления. Разделение на прямое (справа) и обратное (слева) направление осуществляется по величине числа Маха и давления, вычисляемых на границе между ячейками  $M^+$  и  $M^-$ ,  $p^+$  и  $p^-$ . Значения потоков справа и слева от границы между ячейками (прямое и обратное направления) вычисляются как функции-полиномы от числа Маха в соответствующей ячейке — см. [36, 37].

Являющиеся альтернативой характеристическим методам, эти методы предоставляют более простые и универсальные способы вычисления конвективных потоков искомых величин, что позволяет (потенциально) повторно использовать эти методы для решения широкого класса задач с минимальным изменением аппроксимирующих выражений.

Их основным общим недостатком является использование явных схем, что сужает область их применения, снижает общую устойчивость (робастность) методов.

### 1.4.1.3. Схема Курганова — Тадмора

Среди годуновских методов получила широкое распространение схема Курганова — Тадмора и её аналог схема Курганова — Ноэль — Петрова [38, 39, 40].

Эту схему можно отнести к характеристическим методам с расщеплением потоков, поскольку для вычисления потоков также используется разделение на прямое и обратное направление, хотя по заверениям самих авторов, все выражения были получены без использования решения задачи Римана.

Процесс построения аппроксимирующих выражений для конвективных потоков в схеме Курганова — Тадмора включает следующие этапы (для одномерного случая):

1. Вычислить локальные скорости распространения сигнала в каждом объёме по значениям в центре объёма.
2. Используя максимальные и минимальные скорости распространения сигнала для каждой пары ячеек, ввести «новую» сетку в окрестностях границ между ячейками. Новые границы находятся смещением старых границ с максимальной и минимальной скоростями распространения сигнала за заданный шаг по времени  $\Delta t$ .
3. Вычислить конвективные потоки на границах новых смещённых ячеек.
4. Решить уравнение переноса на новой (смещённой) сетке, используя вычисленные величины потоков.
5. Отобразить новое решение на исходную (несмещённую) сетку.

Применение этой процедуры позволило получить следующее аппроксимирующее выражение для конвективных потоков через грань  $f$ :

$$F_f = F_f^+ + F_f^-,$$

$$F_f^+ = \alpha_f^+ a_f^+ \beta_f^+ - \omega_f \beta_f^+,$$

$$F_f^- = \alpha_f^- a_f^- \beta_f^- + \omega_f \beta_f^-,$$

$$a_f^{max} = max(c_f^+ |\vec{S}_f| + \vec{U}_f^+ \cdot \vec{S}_f, c_f^- |\vec{S}_f| + \vec{U}_f^- \cdot \vec{S}_f),$$

$$a_f^{min} = min(-c_f^+ |\vec{S}_f| + \vec{U}_f^+ \cdot \vec{S}_f, -c_f^- |\vec{S}_f| + \vec{U}_f^- \cdot \vec{S}_f),$$

$$\alpha_f^+ = \frac{a_f^{max}}{a_f^{max} - a_f^{min}},$$

$$\alpha_f^- = \frac{a_f^{min}}{a_f^{max} - a_f^{min}}$$

$$\omega_f = -a_f^{min} \alpha_f^+$$

Нетрудно заметить, что получившееся выражение аналогично схеме HLL, раздел 1.4.1, со способом вычисления локальных скоростей [41]. Если же брать максимальную скорость распространения звука, то схема Курганова-Тадмора упрощается до центральной схемы Тадмора, аналогичной схеме Рusanova - см. раздел 1.4.1.1.

Подводя итоги, можно сказать что эта схема обладает преимуществами и недостатками, свойственными другим характеристическим методами с расщеплением потоков — она достаточно универсальна для решения широкого спектра задач и при этом требует малого шага по времени при скоростях, существенно меньших скорости звука.

#### 1.4.1.4. Недостатки характеристических методов

Несмотря на такие вполне очевидные преимущества этого класса методов, как возможность обеспечения монотонности решения (за счёт явного вычисления скоростей распространения сигнала), максимальная близость численного решения к аналитическому, и, следовательно, в определённой степени сведение процесса получения аппроксимирующих соотношений для конвективных потоков при решении задач газодинамики до рутинного уровня, есть и ряд недостатков:

- Изменение формулировки задачи означает необходимость кардинального изменения всей численной схемы (поскольку нужно заново привести схему к консервативному виду, найти собственные значения и, если требуется векторы и т.д.)
- Найти точное аналитическое решение задачи Римана сложно, что приводит к необходимости поиска приближённых решений, линеаризации системы и пр.
- С учётом предыдущего пункта, распространение задачи на трёхмерный случай существенно усложняет процедуру построения численного решения, вносит ограничения на свойства расчётных сеток.
- Как правило, все эти методы являются явными, что делает их условно устойчивыми и не позволяет выполнять интегрирование по времени с достаточно большим шагом с целью повышения производительности в промышленных приложениях.

#### 1.4.2. Методы расщепления

В отличии от методов, так или иначе основанных на решении задачи Римана, использующих явные схемы (см. разделы 1.4.1), этот класс методов хорошо зарекомендовал себя в задачах численного моделирования

несжимаемых течений, к которым можно отнести такие важные направления как конвекция, течение стратифицированных жидкостей и прочие случаи, в которых локальная скорость среды существенно меньше скорости звука. Использование явных характеристических методов в таких задачах представляется затруднительным, поскольку матрица Якоби системы уравнений газовой динамики (1.4) становится плохо обусловленной.

Суть методов расщепления [6, 42, 43, 28] заключается в разделении влияния различных слагаемых на изменение импульса в расчётной ячейке. Обычно отделяется вклад градиента давления (и других величин, таких как соленость, разница температур и пр.) от пространственного переноса импульса (конвекция и диффузия).

При реализации метода вводятся прогнозное и корректирующее значение скорости и давления среды:

$$\vec{U} = \vec{U}^* + \vec{U}',$$

$$p = p^* + p'.$$

Представим уравнение сохранения импульса (1.23) в дискретном виде:

$$V \frac{\vec{U}^n - \vec{U}^o}{\Delta t} + \sum_f \phi_f \vec{U}_f^n - \sum_f \left( \nu \frac{\partial \vec{U}^n}{\partial \vec{n}} \right)_f |\vec{S}_f| = -\frac{1}{\rho} \sum_f p \vec{S}_f, \quad (1.41)$$

где  $\phi_f = \vec{U}_f^n \cdot \vec{S}_f$  - объёмный поток через грань  $f$ .

Разделим вклад от различных операторов дискретного уравнения сохранения импульса (1.41), отдельно будут собраны:

- $A$  - коэффициенты матрицы при значениях скорости в центрах ячеек (первая производная по времени), диагональный вклад от конвекции и диффузии;
- $\vec{H}(\vec{U}^n)$  недиагональные коэффициенты матрицы и все явные источники за исключением градиента давления;

- $-\frac{1}{\rho} \nabla p^n$  градиент давления.

В тех случаях, когда в задаче есть источники импульса, требующие отдельного рассмотрения, вынесем их вклад в  $\vec{Q}^n$ .

$$A\vec{U}^n = \vec{H}(\vec{U}^n) + \vec{Q}^n - \nabla p^n \quad (1.42)$$

В этом полудискретном уравнении:  $A$  - массив, содержащий в себе сумму вкладов в баланс импульса ячейки (диагональ матрицы) от дискретизации первой производной по времени, конвективных и диффузионных потоков и неявных источников,  $\vec{H}(\vec{U})$  - сумма вкладов в баланс импульса ячейки от соседних ячеек (недиагональные элементы матрицы),  $\vec{Q}$  - явные источники импульса (внешние силы),  $\nabla p$  - вклад в баланс импульса от градиента давления.

Сопоставив данное уравнение с определением прогноза и коррекции скорости, получаем следующие выражения для их вычисления:

$$\vec{U}^* = \frac{1}{A} \left( \vec{H}(\vec{U}) + \vec{Q} - \nabla p^* \right),$$

$$\vec{U}' = -\frac{1}{A} \nabla p'.$$

Записав уравнение неразрывности (1.23) в интегральном виде и с учётом разложения скорости на прогнозную и коррекционную составляющую, получаем алгебраическое уравнение для коррекции давления:

$$\sum_f \left( \frac{1}{A} \left( \vec{H}(\vec{U}) + \vec{Q} - \nabla p^* \right) \right)_f \cdot \vec{S}_f - \sum_f \left( \frac{1}{A} \nabla p' \right)_f \cdot \vec{S}_f = 0.$$

Существует два возможных способа решения дискретного аналога задачи.

- Сопряжённый (монолитный) — уравнение для коррекции давления (ур-ие неразрывности) решается единой системой совместно с реше-

нием уравнения сохранения импульса. В этом случае схема становится полностью неявной и позволяет использовать любые шаги по времени. При этом существуют следующие недостатки: а) интенсивное использование оперативной памяти (на хранение общей матрицы требуется намного больше места, чем для матрицы для каждого уравнения) и б) увеличение вычислительных затрат при решении итерационным способом.

- Итерационный — уравнения для коррекции давления и баланса импульса решаются последовательно до достижения сходимости.

Последний способ реализован в алгоритмах под названиями SIMPLE и PISO, причём PISO является расширением алгоритма SIMPLE. В случае алгоритма SIMPLE (рис. 1.11), связывание поле скорости и давления осуществляется следующим образом.

1. Формируется дискретный аналог уравнения баланса импульса.
2. В случае необходимости ускорения сходимости выполняется неявная релаксация.
3. Формируется уравнение неразрывности (коррекции скорости и давления).
4. Решается уравнение неразрывности, корректируются скорости сре- ды.
5. При необходимости выполняется явная релаксация поля давления.
6. Если процесс не сошёлся, то всё повторяется сначала.

Отличие PISO от SIMPLE состоит в том, что дискретное уравнение баланса импульса формулируется только один раз, в то время как уравнение коррекции скорости и давления формируется несколько раз (рис. 1.12).

Практика использования данного метода показала более высокую скорость сходимости по сравнению с базовым SIMPLE.



Рис. 1.11. Блок-схема алгоритма связывания скорости и давления SIMPLE

Существуют и другие методы, основанные на SIMPLE (SIMPLE-R, SIMPLE-C), комбинирующие PISO и SIMPLE (PIMPLE), их описание и



Рис. 1.12. Блок-схема алгоритма связывания скорости и давления PISO

сравнение можно найти в [44, 45].

Использование методов расщепления позволяет достаточно точно рассчитывать и предсказывать сложные явления [2]. Кроме того, перспектива использования этого метода как стандартной и универсальной про-

цедуры является крайне заманчивой для разработчиков промышленных пакетов.

Впоследствии методы расщепления получили развитие при решении большого числа задач вычислительной гидродинамики — стратифицированные течения, течения со свободной конвекцией, многофазные течения как в многожидкостном, так и одножидкостном приближении, сжимаемые течения в том числе для случая многокомпонентных реагирующих смесей. Пример алгоритма PISO для течения совершенного газа показан на рис. 1.13.

Тем не менее, практика использования этого метода показала, что несмотря на в целом удовлетворительные интегральные результаты и высокую устойчивость схем, методы типа PISO или SIMPLE, адаптированные для сжимаемых схем, подвержены нефизичным, «паразитическим» осцилляциям.

### **Недостатки метода**

Анализ данного метода с позиций численного решения задачи Римана показывает, что поскольку в методе расщепление не учитываются акустические способы распространения сигнала, численная схема может быть осциллирующей и соответствовать некоторой комбинации схемы центральных разностей и противопоточной (а в худшем случае - «сопоточной»). Таким образом, данный метод требует определённой доработки для получения физически адекватного решения в случае моделирования сжимаемых течений.

Попытки разработки подобных гибридных схем, улучшающих метод расщепления, уже предпринимались, например в работе [46] предлагается использование схемы AUSM<sup>+</sup> совместно с алгоритмом PISO. Несмотря на многообещающие результаты, представленные в статье, найти исходный код реализации предложенной методики не удалось. Кроме того, по всей видимости, у подобной гибридной методики PISO/AUSM<sup>+</sup> есть следующие недостатки: 1) сложность реализации и 2) наличие подгоночных коэффи-

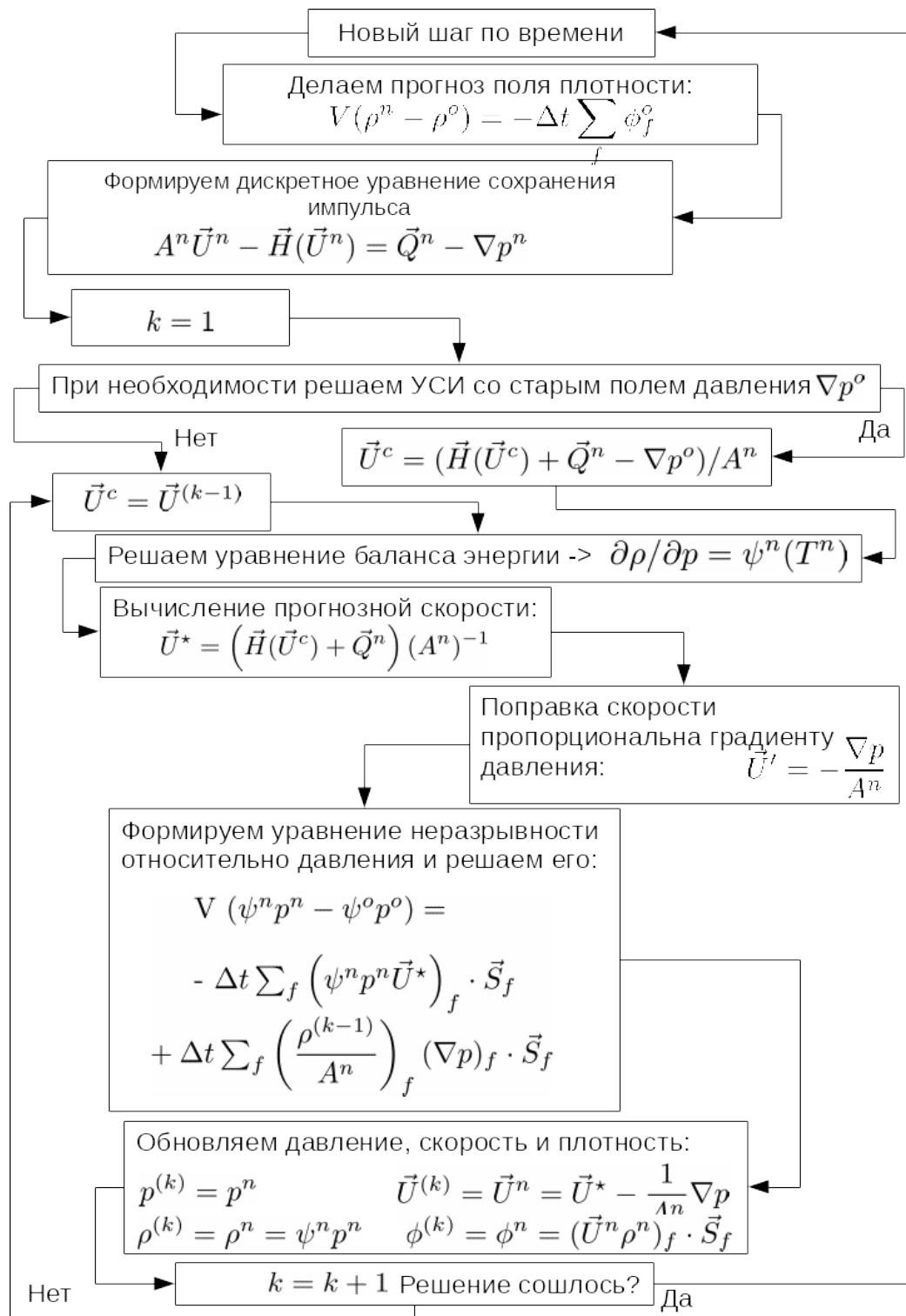


Рис. 1.13. Блок-схема алгоритма связывания скорости и давления PISO для сжимаемых течений

циентов — полуэмпирических констант модели, таких как число Маха на бесконечности. Кроме того, не ясно каким образом достигается расщепление вектора потоков для величин, отличных от плотности среды (импульс

и энергия).

## 1.5. Сопоставление характеристических методов и методов расщепления

Для сравнения методов введём следующие критерии, характеризующие устойчивость численных схем:

- поточный критерий Куранта

$$Co = \frac{|\vec{U}| \Delta t}{\Delta x} \quad (1.43)$$

- характеристический критерий Куранта

$$CCo = \frac{(|\vec{U}| + c) \Delta t}{\Delta x} \quad (1.44)$$

- акустический критерий Куранта (1.45);

$$ACo = \frac{c \Delta t}{\Delta x} \quad (1.45)$$

- диффузионный критерий Куранта (1.46).

$$DCo = \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \quad (1.46)$$

Для удобства свяжем поточный критерий Куранта и характеристический критерий Куранта через локальное число Маха  $Ma$ :

$$Co = CCo \left( 1 + \frac{1}{Ma} \right)^{-1}$$

Также свяжем диффузионный критерий устойчивости с поточным критерием Куранта через локальное число  $Pe$ :

$$\begin{aligned} DCo &= \frac{Co}{Pe}, \\ Pe &= \frac{U \Delta x}{D}. \end{aligned}$$

где  $D$  - коэффициент диффузии.

Таким образом, поточный критерий Куранта можно рассматривать как обезразмеренный шаг по времени.

Представим области применимости обоих методов графически в виде диаграммы (рис. 1.14), отложив по горизонтали локальное число Маха  $Ma$  для конвективных процессов (верх диаграммы) и локальное число Пекле  $Pe$  для диффузионных процессов (низ диаграммы). По вертикали вверх откладывается поточное число Куранта для исследования влияния конвективных процессов (верх диаграммы), во вертикали вниз откладывается поточное число Куранта для исследования влияния диффузионных процессов (низ диаграммы).

Область устойчивости как годуновских явных методов, так и методов расщепления типа PISO/SIMPLE ограничена величиной поточного числа Куранта равной 1, поэтому в данном сравнении условия, связанные с выходом в область  $Co > 1$  не рассматриваем.

В случае доминирования диффузионных процессов область устойчивости явных методов ограничена условием  $DCo < 1/2$ , неявные же методы безусловно устойчивы. Связав поточное число Куранта с диффузионным через число Пекле, получаем что в области чисел  $Pe$  от 0 до 2 устойчивость явного метода будет определяться в первую очередь критерием  $DCo$ , приводя к снижению шага по времени по сравнению с неявными схемами аппроксимации диффузионных слагаемых (как например в методах расщепления). Особенно это может быть заметно в задачах, целью которых является исследование конвективных течений, но с учётом сильной диффузии. Область устойчивости явных методов закрашена красным цветом, неявных - штриховкой.

В случае конвективных процессов область устойчивости явных методов зависит от максимальной скорости распространения возмущения ( $|\vec{U}| + c$ ) и закрашена голубым цветом. По мере роста числа Маха  $Ma$  от 0 до  $\inf$  скорость распространения возмущений ( $|\vec{U}| + c$ ) стремится от

скорости звука к скорости потока. Это указывает на неэффективность явных характеристических методов в задачах с  $Ma < 1$  - по мере того как число Маха стремится к 0, шаг по времени будет всё сильнее определяться акустическим числом Куранта  $ACo$ , что неизбежно приведёт к росту вычислительных затрат.

С другой стороны, методы расщепления (область, закрашенная косой штриховкой), обладающие устойчивостью при выполнении условия  $Co < 1$  страдают от другого недостатка — паразитических осцилляций при малых шагах, позволяющих разрешать акустические колебания. Если шаг по времени достаточно мал, то численная диффузия, ранее подавлявшая возмущения, возникавшие из-за неправильной аппроксимации распространения акустического сигнала  $c$ , исчезает, и схема теряет монотонность. Из общих соображений можно предположить что шаг по времени должен быть таким, чтобы самый быстрый сигнал распространялся на расстояние, превышающее длину хотя бы одной ячейки, а лучше — двух. Если первое условие наложить на диаграмму рис. 1.14, то получаем, что с одной стороны  $Co < 1$ , но с другой стороны его величина должна быть больше  $\frac{1}{1 + Ma^{-1}}$  что приводит к сужению области применимости схемы с ростом  $Ma$ . Более того, если требуется, чтобы сигнал пробегал хотя бы две ячейки, то схема перестаёт быть полезной уже при  $Ma = 1$ .

## 1.6. Резюме

Проведённый "эвристический" анализ методов решения уравнений гидро-, аэро- и газодинамики показал следующие важные различия между такими широко используемыми классами методов как неявные, основанные на расщеплении операторов, и явные, основанные на приближённом решении задачи распада разрыва (задачи Римана) или расщеплении вектора потока. В первом случае методы пригодны в основном для решения дозвуковых задач, а также в условиях поиска квазистационарного решения, либо

интегрирования по времени с акустическим числом Куранта значительно большим единицы; в других условиях (около- и сверхзвуковые течения, течения с акустическим числом Курантом меньшим 1) методы расщепления операторов подвержены паразитным осцилляциям. Во втором случае методы предназначены для решения задач, в которых скорость потока сопоставима по порядку либо превышает локальную скорость звука. При этом поскольку устойчивость методов этого класса зависит не только от локальной скорости потока, но и от скорости звука и скорости диффузионных процессов (коэффициентов диффузии), их использование при дозвуковых скоростях становится зачастую нецелесообразным в связи с необходимостью существенного снижения шага по времени, приводящей к пропорциональному росту вычислительных затрат на выполнение интегрирования на заданном интервале времени. Кроме того, использование методов второй группы зачастую ограничено либо структурированными сетками, либо сетками с ячейками гексэдральной или тетраэдральной формы. Таким образом, при постановке задачи инженер или исследователь вынужден искать компромисс между устойчивостью решения, его монотонностью, объёмом вычислительных затрат и трудозатратами на построение расчётной сетки.

Качественный анализ метода расщепления с позиций, используемых для построения явных методов на основе решения задачи Римана либо расщепления вектора потоков показывает принципиальную невозможность построения неосциллирующего решения с помощью методов типа PISO / SIMPLE основываясь только на локальной скорости потока. Получение монотонного решения в методе расщепления было бы возможным только после введения явного учёта распространения акустических возмущений в интерполирующие соотношения, что в итоге можно было бы рассматривать как адаптацию метода Курганова — Тадмора или расщепления вектора потока для решения уравнений переноса неявным способом.

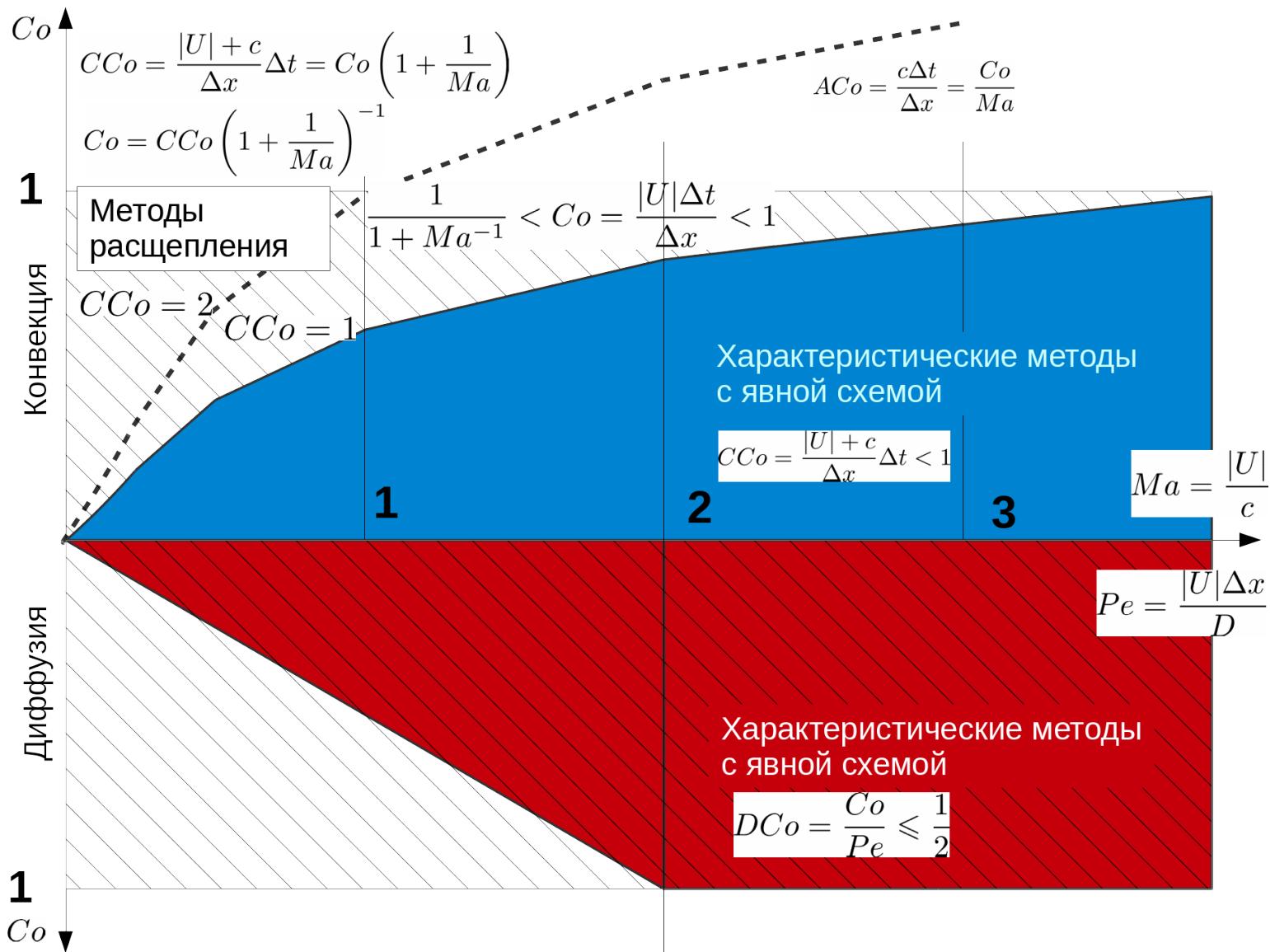


Рис. 1.14. Сравнение областей применимости и устойчивости характеристических методов и методов расщепления

## Глава 2

# Гибридный метод моделирования сжимаемых течений

Данная глава содержит описание предложенного гибридного метода и его реализации в пакете OpenFOAM.

### 2.1. Описание гибридного метода

Как было сказано выше в первой главе, рассмотренные методы решения уравнений гидро- аэро- и газодинамики обладают одним важным недостатком — область их применения жестко ограничена числом Маха потока и/или локальным акустическим числом Куранта.

- В первом случае при использовании явных методов на основе решения задачи Римана или расщепления вектора потоков решение будет либо терять устойчивость при низких числах Ma, либо понадобится крайне малый шаг по времени, что приведёт к высоким вычислительным затратам и, как следствие, сделает эти методы малопригодными для подобного рода задач.
- С другой стороны, использование неявных методов расщепления ( PISO/SIMPLE ) может приводить к появлению нефизических осцилляций численного решения, вплоть до потери устойчивости схемы при

высоких числах Маха. Такое поведение метода не только значительно снижает его практическую ценность для случаев, в которых необходимо учёт сжимаемости, но и делает его полностью непригодным для исследования течений с высокими скоростями или акустическими колебаниями.

Решением может быть использование гибридной схемы, в которой алгоритмы PISO/SIMPLE для неявного интегрирования базовых уравнений сохранения массы (1.13), импульса (1.14) и энергии (1.15) используются совместно с соответствующими схемами для неосциллирующей дискретизации конвективных слагаемых.

В качестве неосциллирующей была взята схема Курганова — Тадмора (а точнее — её версия Курганова — Ноэль — Петровой, или сокращённо KNP), которая с одной стороны уже имеет явную реализацию в пакете OpenFOAM [47] и была неоднократно протестирована, а с другой стороны — достаточно проста для использования в составе гибридной схемы.

Ещё одним крайне важным свойством этой схемы является независимость получения аппроксимирующих выражений для потоков физических величин от характеристик исследуемой системы уравнений [39]. Т.е. нет необходимости в поиске инвариантов Римана и использовании разложения решения по характеристикам для вычисления потоков.

Для модификации схемы КТ/KNP требуется сопоставление обозначений схемы, используемых в [38, 39, 40] со стандартными обозначениями, применяемыми в методе конечного объёма. Для этого обратимся к рис. 2.1. Точкой  $P$  обозначен центр некоторого произвольного контрольного объёма, для которого рассматриваются балансовые соотношения для массы, импульса и энергии. В одномерном случае центр этого объёма имеет координату  $X_j$ . Запишем выражения для потоков на правой границе этого объёма. Нормаль направлена вдоль оси  $X$  от точки  $P$  к точке  $N$ , положение центра грани —  $X_{j+1/2}$ , положение центра соседнего объёмов  $N$  —  $X_{j+1}$ .

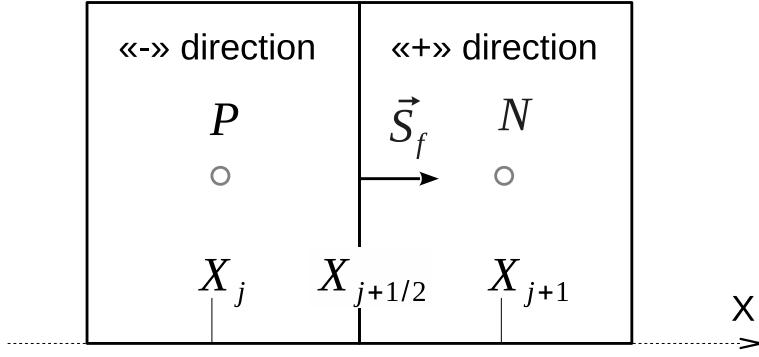


Рис. 2.1. Сопоставление обозначений, принятых в методе конечных разностей (схеме Курганова – Тадмора) и методе конечного объёма.

Согласно схеме КТ/КНР [38, 39, 40] поток величины  $\beta$  через грань можно представить как взвешенную сумму потоков в положительном и отрицательном направлениях. При этом в потоки входит не только макроскопическая скорость движения среды, но и акустические (звуковые) скорости распространения возмущений:

$$\begin{aligned} \beta(X_{j+1/2})\phi(X_{j+1/2}) = & \frac{a_{j+1/2}^+ f(\beta_{j+1/2}^-) - a_{j+1/2}^- f(\beta_{j+1/2}^+)}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + \\ & + \frac{a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} (\beta_{j+1/2}^+ - \beta_{j+1/2}^-). \end{aligned}$$

Для совместимости со стандартными обозначениями, принимаемыми в МКО при работе с неструктурированными сетками [47], введём соответствующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_f^{max} &= a_{j+1/2}^+, \quad a_f^{min} = -a_{j+1/2}^-, \quad \alpha_f^P = \frac{a_f^{max}}{a_f^{max} + a_f^{min}}, \quad \alpha_f^N = \frac{a_f^{min}}{a_f^{min} + a_f^{max}}, \\ \beta_f^P &= \beta_{j+1/2}^-, \quad \beta_f^N = \beta_{j+1/2}^+, \quad \phi_f^P = f(\beta_{j+1/2}^-), \quad \phi_f^N = f(\beta_{j+1/2}^+), \quad \omega_f = \alpha_f^P a_f^{min}. \end{aligned}$$

Получаем выражение для конвективного потока величины  $\beta$  через грань  $f$ :

$$\beta_f \phi_f = \alpha_f^P \phi_f^P \beta_f^P + \alpha_f^N \phi_f^N \beta_f^N + \omega_f (\beta_f^P - \beta_f^N),$$

Или после перегруппировки слагаемых получаем выражение:

$$\beta_f \phi_f = \beta_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}) + \beta_f^N (\alpha_f^N \phi_f^N - \alpha_f^P a_f^{min}). \quad (2.1)$$

Таким образом, аппроксимирующее выражение (2.1) для конвективного потока включает в себя перенос потоком  $\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}$ , учитывающим перенос свойства  $\beta$  акустическим способом из ячейки  $P$  в ячейку  $N$ , и потоком  $\alpha^N \phi^N - \alpha_f^P a_f^{min}$ , учитывающим перенос свойства  $\beta$  акустическим способом из ячейки  $N$  в ячейку  $P$ .

Вычисление значений на грани слева и справа  $\beta_f^P$  и  $\beta_f^N$  выполняется с использованием соответствующих потоков  $\phi_f^P$  и  $\phi_f^N$  и схемы интерполяции второго порядка с ограничителем. Обычно в качестве ограничителя используются TVD схемы — типа схем vanLeer , Minmod , vanAlbada и др. Для получения неявной схемы полагаем, что значения  $\beta_f^P$  и  $\beta_f^N$  берутся с нового слоя по времени, а значения потоков  $\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}$  и  $\alpha^N \phi^N - \alpha_f^P a_f^{min}$  с текущего.

Идея гибридного метода состоит во введении такого переключателя, который бы по мере приближения к дозвуковому диапазону скоростей (см. рис. 1.14) переключал бы аппроксимирующие выражения для потоков от вида (2.1) к стандартному виду, использующемуся в методе конечного объёма совместно с алгоритмами типа PISO/SIMPLE:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{U} \beta) dV = \int_S \vec{dS} \cdot \vec{U} \beta = \sum_f \beta_f (\vec{U}_f \cdot \vec{S}_f) = \sum_f \beta_f \phi_f, \quad (2.2)$$

Где  $\beta$  — некоторая переносимая величина, индекс  $f$  — номер грани на поверхности ячейки,  $\vec{S}_f$  — произведение вектора нормали грани на её площадь. Величины, имеющие индекс  $f$ , интерполируются на поверхность грани.

Ожидается, что предлагаемый метод на основе PISO и КТ/KNP с одной стороны будет удовлетворять требованиям монотонности, а с другой — позволит моделировать течения в широком диапазоне чисел Маха  $0 < M < 6$ . При этом моделирование в диапазоне малых чисел Маха ( $M < 0.5$ ) без учёта распространения акустических волн станет возможным с акустическим критерием Куранта, значительно превышающим 1. При снижении локального акустического числа Куранта до значений, меньших 1,

возможность разрешения акустических волн должна восстанавливаться.

Гибридный метод, дающий возможность моделирования течений в широком диапазоне чисел Маха, в том числе с малыми шагами по времени, должен включать в себя процедуру, позволяющую комбинировать свойства алгоритмов PISO/SIMPLE и схемы КТ/KNP для совместного решения уравнений сохранения массы, импульса и энергии.

Для построения такой процедуры требуется выполнить следующие шаги.

1. Представить массовые потоки в виде (2.1) согласно схеме КТ/KNP .
2. Ввести некоторую функцию смешивания, которая позволит «переключаться» между несжимаемой и сжимаемой формулами потоков.
3. Записать уравнения сохранения массы, импульса и энергии в полу-дискретном виде, пригодном для получения уравнения для давления.
4. Применить схемы PISO/SIMPLE для интегрирования дискретных уравнений, в которых конвективные слагаемые аппроксимируются с помощью функции-переключателя и схемы КТ/KNP (2.1).

Использование такого подхода существенно упрощает не только реализацию схемы в OpenFOAM , но и позволяет осуществлять подключение стандартных библиотек с помощью встроенных функций (например, реализующих модели турбулентности) без их изменения.

Для “смешивания” дозвуковой ( PISO/SIMPLE ) и сверхзвуковой ( КТ/KNP ) формулловок согласно пункту 2 предыдущей процедуры, предлагается ввести новые массовые потоки  $\Phi_f^P$  и  $\Phi_f^N$  с использованием функции смешения  $\kappa_f$ , осуществляющей линейное смешение потоков из

формулы (2.1):

$$\Phi_f^P = \kappa_f \rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min})$$

$$\Phi_f^N = \rho_f^N (\alpha_f^N \phi_f^N - \alpha_f^P a_f^{min}) + (1 - \kappa_f) \rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min})$$

Функция  $\kappa_f$  должна быть такой, чтобы по мере возрастания влияния сжимаемости переключатель  $\kappa_f$  стремился к 1, и тогда потоки  $\Phi_f^P$  и  $\Phi_f^N$  становились соответствующими массовым потокам, рассчитываемым по схеме КТ/KNP. При приближении же  $\kappa_f$  к 0 поток  $\Phi_f^N$  должен стремиться к потоку несжимаемой жидкости, вычисляемому методами PISO/SIMPLE, а поток  $\Phi_f^P$  будет стремиться к 0.

### 2.1.1. Выбор вида функции-переключателя

Вид функции  $\kappa_f$  может зависеть от ряда требований к искомому решению и параметров решаемой задачи. В работе предложено два варианта, показавших свою эффективность в валидационных и промышленных случаях.

В настоящий момент вид функции-переключателя выбирается исходя из следующих общих соображений.

- Поле функции  $\kappa_f$  должно зависеть от величин, характеризующих «сжимаемость» среды на гранях ячеек (см. рис. 1.14).
- Если среда существенно сжимаема, то переключатель должен быть равен 1.
- Если среда близка к несжимаемой, то переключатель должен быть близок 0.
- Функция должна быть непрерывной и монотонной, чтобы осуществлять «гладкое и однозначное смешение» двух способов аппроксимации потоков.

- Под “существенно сжимаемым” будем называть следующее состояние потока: локальное число Маха больше или равно 1, либо при  $Ma < 1$  акустическое число Куранта  $ACo < 1$ ; в остальных случаях будем считать течение близким к несжимаемому.

Для оценки диапазона сжимаемого и несжимаемого состояний в гибридной модели можно использовать следующие параметры, определённые в центрах граней расчётной сетки:

локальное число Маха:

$$Ma_f = \frac{|\vec{U}_f \cdot n_f|}{c_f}$$

локальный акустический критерий Куранта:

$$ACo_f = \frac{c_f \Delta t}{|\vec{C}_f^N - \vec{C}_f^P|}$$

Исходя из общих требований к виду функции и имеющегося набора полей-индикаторов состояния среды, предложены следующие виды переключателя  $\kappa_f$ :

$$\kappa_f = \min\left(\frac{Ma_f}{ACo_f}, 1\right)$$

и

$$\kappa_f = \min\left(\frac{1}{ACo_f^n}, 1\right)$$

где  $n$  — целое положительное число.

Использование схемы КТ вместо КНР ведёт к изменению вида конвективных слагаемых, но принцип построения гибридного метода сохраняется.

### 2.1.2. Уравнение для давления

Выведем уравнение для давления аналогично стандартной процедуре, используемой в методах расщепления типа PISO/SIMPLE (см. раздел 1.4.2) - разделим искомые переменные на прогнозные и корректирующие

значения и используем уравнение состояния для связи плотности и давления.

Перепишем уравнение неразрывности (1.13) с учётом аппроксимирующих соотношений (2.1):

$$V \frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \sum_f (\rho_f^N (\alpha_f^N \phi_f^N - \alpha_f^P a_f^{min})) + \sum_f (\rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min})) = 0 \quad (2.3)$$

Подставив в объёмные потоки  $\phi_f^N$  и  $\phi_f^P$  выражение для скорости среды в соответствии с методом расщепления (1.42) и использовав уравнение состояния идеального газа, получим уравнение для давления, аналогичное полученному в 1.4.2 для сжимаемого течения:

$$\begin{aligned} & V \frac{\psi^n p^n - \psi^o p^o}{\Delta t} + \\ & \sum_f \left( \psi_f^N p_f^N \left( \alpha_f^N \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^N \cdot \vec{S}_f - \alpha_f^P a_f^{min} \right) - \left( \frac{\rho \nabla p}{A} \right)_f^N \cdot \vec{S}_f \right) + \\ & \sum_f \left( \psi_f^P p_f^P \left( \alpha_f^P \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^P \cdot \vec{S}_f + \alpha_f^P a_f^{min} \right) - \left( \frac{\rho \nabla p}{A} \right)_f^P \cdot \vec{S}_f \right) = 0 \end{aligned}$$

Алгоритм решения аналогичен методу расщепления 1.4.2 для сжимаемых течений, блок-схема решения приведена на рис. 2.2.

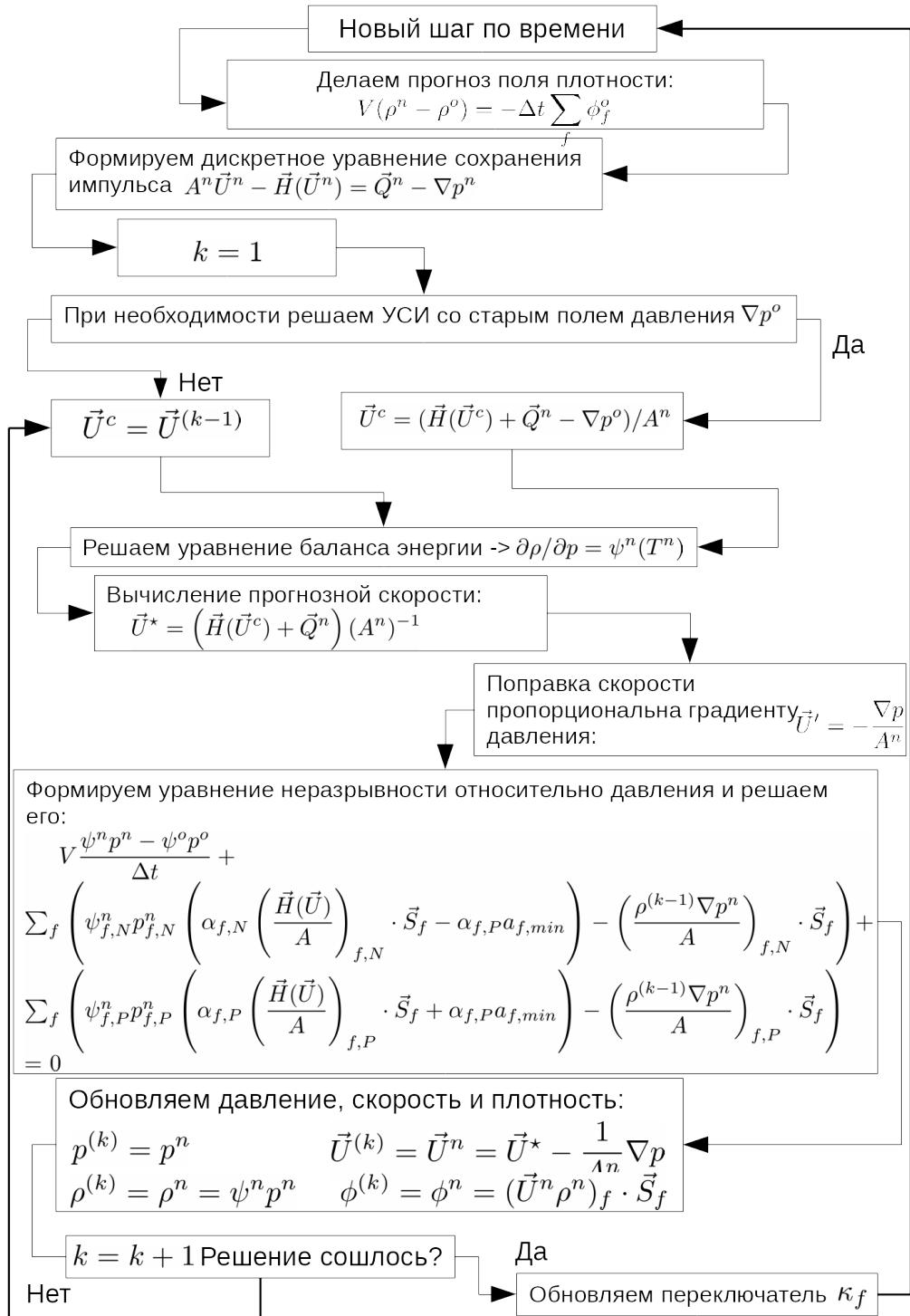


Рис. 2.2. Блок-схема интегрирования уравнений при использовании гибридного метода KIT и PISO

### 2.1.3. Расширение гибридного метода на случай течения гомогенных смесей

При моделировании динамики многокомпонентных газовых сред в диффузионном приближении, система уравнений (1.13), (1.14), (1.15) дополняется уравнениями переноса массовых долей компонент смеси. Эти уравнения налагают дополнительные ограничения на численное решение — возникает требование к ограниченности поля массовых долей компонент смеси и требование согласованности переноса массовых долей компонент смеси с переносом энергии смеси.

Первое требование означает не только необходимость обеспечения ограниченности массовой доли каждой компоненты в ячейке (от 0 до 1), но и ограниченность суммы массовых долей, которая также не должна превышать 1. Выполнение этого требования обеспечивается за счёт использования специальных схем аппроксимации конвективных слагаемых. Например, в OpenFOAM используется схема MULES [48, 49] обеспечивающая выполнение этого требования.

Для использования совместно с предложенным гибридным методом схема была адаптирована аналогично тому, как реализуются схемы второго порядка с ограничителем. Алгебраические выражения (весовые коэффициенты) для аппроксимации конвективного переноса массовых долей разбиваются на два слагаемых, одно из которых соответствует противопоточному методу, а второе — разнице между противопоточным методом и выбранным методом второго порядка с ограничителем, умноженной на некоторый коэффициент  $\theta$ . В случае равенства коэффициента  $\theta$  нулю схема превращается в противопоточную (первого порядка точности), при равенстве единице — схема тождественна выбранной пользователем.

Второе требование означает что перенос массовых долей должен быть согласован с переносом энергии смеси — иными словами это означает, что поток энергии смеси, вызываемый среднемассовым движением, дол-

жен быть равен сумме потоков энергий компонент смеси при их переносе. Несоблюдение данного условия приведёт к нарушению базовых законов термодинамики, что выразится в таких эффектах, как передача теплоты от холодного тела к горячему или изменение температуры смеси при равновесной диффузии газов. Одним из простых решений данной проблемы является использование схем, которые будут обеспечивать согласованность коэффициентов реконструкции при аппроксимации потоковых слагаемых. Иными словами, коэффициенты реконструкции аппроксимации потоковых слагаемых будут одинаковыми для всех величин из заданного списка (например — энталпия смеси и массовые доли её компонент). В МКО такими схемами являются центрально-разностная и противопоточная.

Нелинейные же схемы с ограничителями зависят также от градиента исследуемой величины. Поскольку градиент энергии смеси и градиенты массовых долей её компонент могут различаться, то применение ограничителей может приводить к возникновению "паразитных" перетоков теплоты. При этом если обеспечить согласованность (равенство) значений ограничителей для переноса массовых долей смеси и её энергии, условие согласования энергетических и массовых потоков выполнится автоматически.

Таким образом, предлагается следующая процедура решения.

1. Воспользуемся полем  $\theta$ , которое используется для ограничения конвективных потоков массовых долей  $i$ -й компоненты смеси:

$$\phi_f Y_{i,f} = \phi_f Y_{i,f}^{UD} + \theta_f \phi_f (Y_{i,f}^{HO} - Y_{i,f}^{UD}).$$

Величина поля  $\theta$  меняется от 0 до 1, переключая схему аппроксимации между противопоточной (назовём её UD) и заранее выбранной схемой высокого порядка с ограничителем (назовём её HO) соответственно.

2. Выполним анализ распределения массовых долей компонент смеси и вычисление поля  $\theta$  как минимум из всех значений для каждого поля концентрации.

3. Выполним перенос массовых долей методом конечного объёма.
4. Вычислим конвективные потоки энергии смеси с использованием поля  $\theta$  как ограничителя для синхронизации потоков энергии с переносом массовых долей.
5. Выполним перенос энергии смеси.

Данная процедура гарантирует согласованность переноса энергии смеси и её компонент; валидация на тестовых примерах показывает потери теплоты на уровне тысячных долей градуса Кельвина.

В случае, если компонентами смеси являются среды различного агрегатного состояния, то необходимо говорить о многофазном приближении. Плотность смеси вычисляется в соответствии с выражением:

$$\rho = \left( \frac{Y_{Liq}}{\rho_{Liq}} + \frac{Y_{Gas}}{\rho_{Gas}} \right)^{-1},$$

$Y_{Liq}$  и  $Y_{Gas}$  - массовые доли жидкости и газа двухфазной смеси.

Изоэнтропийная скорость распространения возмущений в такой среде вычисляется как

$$c = \sqrt{\gamma \frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho^2} \left( \frac{Y_{Liq}}{\rho_{Liq}^2} \frac{\partial \rho_{Liq}}{\partial p} + \frac{Y_{Gas}}{\rho_{Gas}^2} \frac{\partial \rho_{Gas}}{\partial p} \right)^{-1}}$$

В этом в случае в приближении гомогенной смеси жидкости и газа (см. раздел 1.1.3) уравнение состояния будет немонотонной функцией относительно объёмной доли одной из фаз (см. рис. 2.3). Это приводит к тому, что скорость распространения акустических возмущений, т.е. скорость звука, в гомогенной двухфазной смеси будет немонотонно меняться в пределах расчётной области от заранее известных термодинамических значений (350 м/с и 1500 м/с в случае пара и воды) чистых субстанций до довольно малых величин порядка 20 м/с при атмосферном давлении и комнатной температуре и объёмных долях компонент около 0.5.

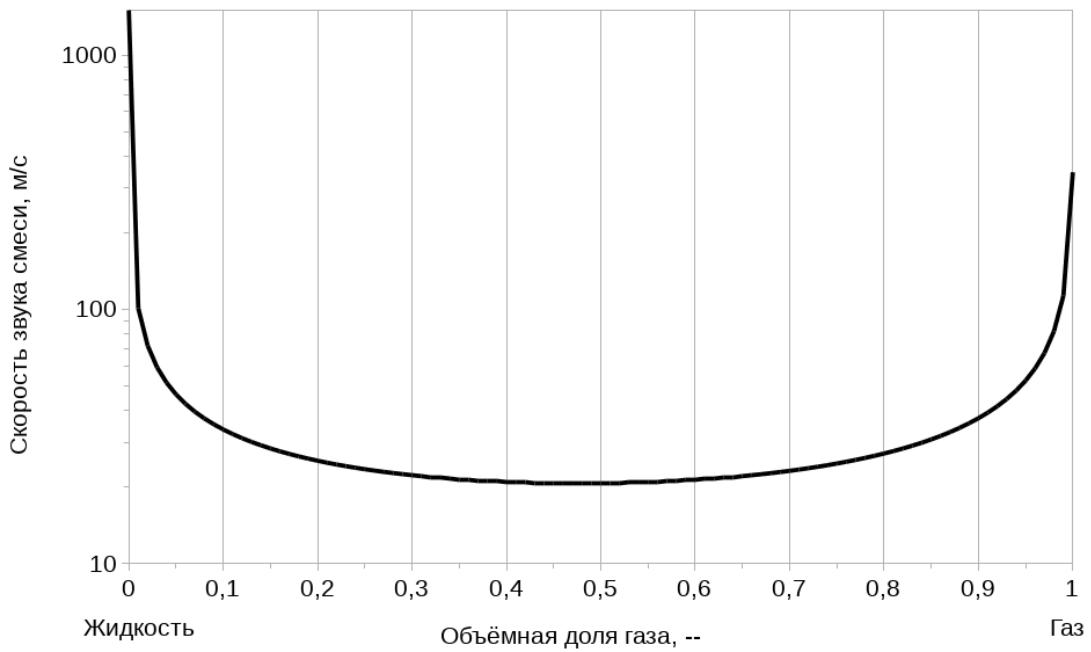


Рис. 2.3. Влияние состава смеси (объёмной доли тяжёлой компоненты) на скорость распространения акустических возмущений (скорость звука)

Задачи такого типа иногда решаются с помощью Volume Of Fluid или VoF метода [50], который обеспечивает устойчивость решения при малых скоростях. Тем не менее, при высоких скоростях, когда локальная скорость потока становится сопоставимой с "гомогенной" скоростью звука, использование VoF или LS методов уже не является оправданным. В этих условиях целесообразно использование гибридного метода для решения задачи течения двухфазной жидкости. Для замыкания модели использовалось аналитическое выражение для скорости звука. Уравнение для давления модифицировалось в соответствии с изменением уравнения состояния.

Модификация уравнения для давления состоит в следующем.

1. Из поля плотности выделяется слагаемое, отвечающее за расширение/скатие при изменении давления:

$$\rho = \hat{\rho} + \psi \cdot p,$$

тогда величина  $\hat{\rho} = \rho - \psi \cdot p$ .

2. Подставив это выражение в уравнение для давления (2.3), получим уравнение для давления для случая смеси с нелинейным уравнением

состояния:

$$\begin{aligned}
 & V \frac{\psi^n p^n - \psi^o p^o}{\Delta t} + V \frac{\hat{\rho}^n - \hat{\rho}^o}{\Delta t} + \\
 & \sum_f \left( \hat{\rho}_f^N \left( \alpha_f^N \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^N \cdot \vec{S}_f - \alpha_f^P a_f^{min} \right) \right) + \\
 & \sum_f \left( \hat{\rho}_f^P \left( \alpha_f^P \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^P \cdot \vec{S}_f + \alpha_f^P a_f^{min} \right) \right) + \\
 & \sum_f \left( \psi_f^N p_f^N \left( \alpha_f^N \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^N \cdot \vec{S}_f - \alpha_f^P a_f^{min} \right) - \left( \frac{\rho \nabla p}{A} \right)_f^N \cdot \vec{S}_f \right) + \\
 & \sum_f \left( \psi_f^P p_f^P \left( \alpha_f^P \left( \frac{\vec{H}(\vec{U})}{A} \right)_f^P \cdot \vec{S}_f + \alpha_f^P a_f^{min} \right) - \left( \frac{\rho \nabla p}{A} \right)_f^P \cdot \vec{S}_f \right) = 0.
 \end{aligned}$$

## 2.2. Программная реализация гибридного метода

Одним из указанных преимуществ МКО является простота его реализации и связанная с этим в свою очередь потенциально возможная высокая степень модульности структуры программных сред. Эти качества достигаются за счёт следующих свойств метода (впрочем, это также может являться и ограничением метода):

- сходство свойств операций сложения слагаемых исходных дифференциальных уравнений и их дискретных аналогов;
- использование компактного шаблона аппроксимации слагаемых позволяет оперировать с неструктуризованными сетками из ячеек произвольной формы;
- стандартизированная процедура получения численной модели из математической, позволяющая исследователю концентрироваться только

на необходимых частях процесса разработки, не прибегая к детальному исследованию всех тонкостей реализации метода;

- возможность отделения численного метода и его реализации от физических исходных данных (геометрия, начальные и граничные условия, физические константы и пр.).

Вышеуказанная стандартная процедура разработки модели включает в себя следующие шаги, необходимые для получения численной модели методом МКО с расщеплением переменных.

1. Представить исследуемую проблему в “математическом” виде, включающем в себя уравнения, записанные в дивергентной форме. В этих уравнениях следует выделить конвективные и диффузационные потоки.
2. С помощью теоремы Остроградского — Гаусса и формулы Тейлора, а также различных схем интерполяции, получить дискретный аналог исходной системы уравнений.
3. Предложить и реализовать процедуру последовательного решения СЛАУ, соответствующих каждому из исходных уравнений.
4. Используя разработанное приложение и созданную расчётную область, выполнить необходимые расчёты.

Примером универсальной платформы, реализующей метод конечного объёма, является пакет OpenFOAM , средствами которого была реализована численная модель сжимаемого течения с гибридным способом аппроксимации конвективных потоков.

## 2.2.1. Структура конечно-объёмной библиотеки OpenFOAM

Выбранный в качестве основы для реализации предложенного гибридного метода пакет OpenFOAM является объектно-ориентированной реализацией МКО и позволяет максимально разделить этапы разработки численных моделей. Пакет OpenFOAM [51, 52, 53] написан на языке программирования C++ [54] и использует все его основные возможности — инкапсуляцию, полиморфизм и наследование [54].

Как библиотека, OpenFOAM является средством для интегрирования функций на линейных пространственных сетках с использованием квадратурных формул первого порядка. В основе лежит набор функций для аппроксимации уравнения конвекции-диффузии методом конечного объёма. Данное уравнение, записанное в интегральном виде, является частным случаем обобщённой теоремы переноса Рейнольдса, которая используется для формулирования физических законов в виде интегральных балансовых соотношений, связывающих изменение количества некоторого свойства в объёме с конвективным и диффузионным потоками через границы и объёмными источниками и стоками внутри самого объёма.

Полагается, что операторы исходного уравнения линейны, каждый оператор может быть аппроксимирован отдельно от других, а аппроксимация всего уравнения тождественна сумме аппроксимаций составляющих его операторов. Кроме того, в рамках приложений OpenFOAM предполагается, что исходная задача может быть численно решена с использованием метода расщепления по переменным (физическим процессам) — иными словами, если имеется система дифференциальных уравнений в частных производных, то для их интегрирования на каждом шаге по времени можно воспользоваться процедурой последовательного решения каждого из них, “замораживая” решение остальных.

Использование модульной структуры и объектно-ориентированной

парадигмы программирования в OpenFOAM позволяют гибко локализовать направление разработки в зависимости от поставленной задачи, разделив основные этапы численного моделирования:

- ввод и вывод данных;
- работа с сеткой;
- параллельная обработка данных;
- аппроксимация дифференциальных операторов;
- аппроксимация математических моделей;
- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- работа с форматами данных;
- пре- и пост- процессинг.

При этом пользователю пакета предлагается несколько уровней взаимодействия с библиотекой:

- на уровне запуска приложений;
- на уровне создания и модификации приложений;
- на уровне создания и модификации библиотек.

Поскольку целью работы является аппроксимация математической модели сжимаемого течения, то реализация гибридного метода состоит в создании отдельного приложения OpenFOAM, использующего встроенные библиотеки и соответствующего стандартной процедуре интегрирования уравнений.

- Все уравнения, описывающие сплошную среду внутри расчётной области, записываются в интегральном виде, аналогичном (1.3).

- Дискретизация на границе расчётной области описывается стандартными средствами и включает три типа условий: Дирихле (I-го рода), Неймана (II-го рода) и смешанное. Тип граничных условий зависит от постановки и выбирается пользователем.
- В пределах временного шага каждое уравнение дискретизируется независимо от других и по-членно. Способ дискретизации каждого слагаемого выбирается пользователем. Способ связывания уравнений задаётся разработчиком программы.
- Расширение возможностей разработанной модели осуществляется с помощью стандартных интерфейсов подключения динамических библиотек — таких как модели турбулентности, теплофизики или средства пост-процессинга.

Пакет OpenFOAM состоит из следующих структурных частей:

- Библиотеки, реализующие функции для дискретизации уравнений переноса МКО и некоторые наиболее часто используемые модели МСС, см. табл. 2.1.
- Приложения, реализующие вспомогательные функции и некоторые модели сплошных сред, см. табл. 2.2.

*Таблица 2.1. Стандартные библиотеки OpenFOAM*

№	Название	Описание
1	edgeMesh	Работа с каркасной сеткой
2	finiteVolume	Конечно-объёмная дискретизация
3	fvOptions	Пользовательские объёмные источники
4	mesh	Генерация сеток
5	OpenFOAM	Базовый функционал
6	postProcessing	Пост-процессинг

7	regionCoupled	Библиотека для связывания физических подобластей
8	sampling	Обработка результатов
9	thermophysicalModels	Термодинамические библиотеки
10	triSurface	Работа с триангулированными поверхностями
11	combustionModels	Модели горения
12	dynamicFvMesh	Конечно-объёмная подвижная сетка
13	engine	Модели ДВС
14	fvAgglomerationMethods	Методы для многосеточных решателей
15	genericPatchFields	Базовые типы граничных условий
16	meshTools	Утилиты для работы с сеткой
17	OSspecific	Системные команды
18	Pstream	Параллельные вычисления
19	sixDoFRigidBodyMotion	Библиотека движения сетки по закону твёрдого тела с 6-ю степенями свободы
20	topoChangerFvMesh	Библиотека движения сетки с изменением топологии
21	dynamicMesh	Функционал для движения сетки
22	fileFormats	Форматы данных
23	fvMotionSolver	Движение узлов сетки
24	lagrangian	Перенос частиц
25	ODE	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений
26	parallel	Параллельные вызовы
27	randomProcesses	Случайные процессы
28	renumber	Оптимизация адресации матриц
29	surfMesh	Работа с поверхностной сеткой
30	transportModels	Модели определяющих соотношений среды

*Таблица 2.2. Стандартные группы приложений-“решателей”OpenFOAM*

№	Название	Описание
1	DNS	Прямое численное моделирование
2	basic	Решение простейших уравнений в частных производных
3	combustion	Задачи с горением
4	compressible	Сжимаемые турбулентные течения
5	discreteMethods	Молекулярная динамика
6	electroMagnetics	Задачи магнитной гидродинамики
7	financial	Решение уравнения Блэка – Шоулза
8	heatTransfer	Течения с теплообменом и учётом плавучести
9	incompressible	Несжимаемые ламинарные и турбулентные течения
10	lagrangian	Задачи в лагранжевых переменных
11	multiphase	Течения многофазных сред
12	stressAnalysis	Статическая прочность

Исходный код стандартного приложения-решателя, разрабатываемого в рамках OpenFOAM содержит по крайней мере следующие файлы:

- файл исходного кода с описанием главной процедуры (точки входа);
- файл настроек и опций компиляции;
- список компилируемых файлов и имя исполняемого файла (приложения).

Для создания приложения, реализующего численное решение простейшего уравнения переноса (1.1) средствами OpenFOAM требуется в исходном коде:

1. инициализировать время моделирования и сетку (расчётную область);
2. инициализировать поле искомой величины;
3. объявить цикл по времени (или номеру итерации в случае стационарного решения);
4. в цикле указать список операторов, использующихся для формирования дискретного уравнения, аналогичного исходному см. листинг 2.1;
5. решить получившуюся систему линейных алгебраических уравнений.

*Листинг 2.1. Запись команд для дискретизации уравнения конвекции-диффузии*

```

1      solve
2      (
3          fvm :: ddt( beta )
4          + fvm :: div( phi , beta )
5          - fvm :: laplacian( Dbeta , beta )
6      );

```

Каждый оператор записи соответствует дискретному аналогу линейного дифференциального оператора, входящего в исходное уравнение (см. табл. 2.3).

*Таблица 2.3. Некоторые стандартные операторы OpenFOAM*

№	Название	Описание
1	fvc::	Пространство имён для функций, осуществляющих явное вычисление операторов численного дифференцирования
2	fvm::	Пространство имён для функций, осуществляющих вычисление матрицы реконструкции операторов численного дифференцирования

3	<code>ddt(...)</code>	Аппроксимация первой производной по времени $\frac{d}{dt} \int_V \beta dV$
4	<code>div(...)</code>	Аппроксимация конвективного слагаемого $\int_{\partial V} \beta \vec{U} \cdot \vec{dS}$
5	<code>laplacian(...)</code>	Аппроксимация диффузионного слагаемого $\int_{\partial V} D \nabla \beta \cdot \vec{dS}$
6	<code>Sp(...)</code>	Аппроксимация источникового слагаемого $\int_V S_p \beta dV$
7	<code>Su(...)</code>	Аппроксимация источникового слагаемого $\int_V S_u dV$

Если в рамках разрабатываемой модели требуется решать систему из связанных уравнений (например, уравнения неразрывности и импульса (1.23) для несжимаемой среды), то в этом случае в цикл по времени помещаются дополнительные циклы, например PISO 1.4.2, в которых метод итераций решаются два или более уравнений, например, см. листинг 2.2.

*Листинг 2.2. Пример программы для решения уравнений Навье – Стокса в несжимаемом ламинарном приближении с использованием OpenFOAM*

```

1      fvVectorMatrix UEqn
2      (
3          fvm::ddt(U)
4          + fvm::div(phi, U)
5          - fvm::laplacian(nu, U)
6      );
7
8      solve(UEqn == -fvc::grad(p));
9
10     // --- PISO loop
11
12     for (int corr=0; corr<nCorr; corr++)
13     {
14         volScalarField rAU(1.0/UEqn.A());
15
16         volVectorField HbyA("HbyA", U);
17         HbyA = rAU*UEqn.H();

```

```

18     surfaceScalarField phiHbyA
19     (
20         "phiHbyA",
21         ( fvc::interpolate(HbyA) & mesh.Sf() )
22         + fvc::interpolate(rAU)*fvc::ddtCorr(U, phi)
23     );
24
25     adjustPhi(phiHbyA, U, p);
26
27     for (int nonOrth=0; nonOrth<=nNonOrthCorr; nonOrth++)
28     {
29         fvScalarMatrix pEqn
30         (
31             fvm::laplacian(rAU, p) == fvc::div(phiHbyA)
32         );
33
34         pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);
35         pEqn.solve();
36
37         if (nonOrth == nNonOrthCorr)
38         {
39             phi = phiHbyA - pEqn.flux();
40         }
41     }
42
43     #include "continuityErrs.H"
44
45     U = HbyA - rAU*fvc::grad(p);
46     U.correctBoundaryConditions();
47 }
```

Наконец, если дискретизуемое уравнение содержит слагаемые, которые могут включаться или выключаться в зависимости от действий пользователя, используется механизм динамического вызова, который позволяет переопределять способ вычисления того или иного оператора для определённого случая. Например, в листинге 2.2 приведён пример численной

схемы для ламинарного течения. В то же время, при моделировании турбулентных течений методом усреднения уравнений Навье — Стокса по Рейнольдсу, во многих случаях диффузионное слагаемое остаётся одного вида

$$(\mu + \mu_t) (\nabla U + (\nabla U)^T),$$

меняется только способ расчёта турбулентной вязкости  $\mu_t$ . В этом случае дискретное уравнение сохранения импульса в OpenFOAM будет задано соответственно записи листинга 2.3.

*Листинг 2.3. Пример дискретизации уравнений Навье — Стокса в несжимаемом турбулентном приближении с использованием OpenFOAM*

```

1      fvVectorMatrix UEqn
2      (
3          fvm::ddt(U)
4          + fvm::div(phi, U)
5          + turbulence->divDevReff(U)
6      );
7
8      UEqn.relax();
9
10     if (momentumPredictor)
11     {
12         solve(UEqn == -fvC::grad(p));
13     }

```

где `turbulence->divDevReff(U)` возвращает вклад диффузионного слагаемого в баланс импульса с учётом модели турбулентности.

Этот механизм также используется для выбора способа аппроксимации конвективных и диффузионных потоков и градиентов искомых величин в расчётной области.

## 2.2.2. Реализация программ-«решателей» и связь со стандартными библиотеками

Предложенный гибридный метод и его модификации для случаев течения многокомпонентных и двухфазных гомогенных сред был реализован с использованием открытой библиотеки OpenFOAM в виде самостоятельных приложений-«решателей», см. рис. 2.4.

Разработанные приложения расширяют существующий функционал стандартных моделей OpenFOAM и разделяются на три группы в соответствии с принятым в OpenFOAM способом классификации (рис. 2.4), полное описание их возможностей приложений приведено в табл. 2.4.

1. Сжимаемые и несжимаемые течения — решатели `pisoCentralFoam`, `rhoPisoCentralFoam` и `pisoCentralDyMFoam`.
2. Сжимаемые течения реагирующих сред (совершенных газов) — решатель `reactingCentralFoam`.
3. Гомогенная двухфазная модель течения двух сжимаемых сред — решатели `twoPhaseMixingCentralFoam` и `twoPhaseMixingCentralDyMFoam`.

*Таблица 2.4. Описание разработанных приложений для численного моделирования сжимаемых сред гибридным методом*

№	Название	Описание
1.	<code>pisoCentralFoam</code>	Модель ламинарного или турбулентного течения сжимаемой среды (совершенный газ) при числах Маха от 0 до 6 с возможностью переключения между стационарной или нестационарной численной схемой.

2.	<code>rhoPisoCentralFoam</code>	Модель ламинарного или турбулентного течения сжимаемой среды с уравнением состояния реального газа при числах Маха от 0 до 6 и с возможностью переключения между стационарной или нестационарной численной схемой.
3.	<code>pisoCentralDyMFoam</code>	Нестационарная модель ламинарного или турбулентного течения сжимаемой среды (совершенный газ) при числах Маха от 0 до 6 с возможностью моделирования случаев в условиях подвижной расчётной области.
4.	<code>reactingCentralFoam</code>	Модель ламинарного или турбулентного течения сжимаемой многокомпонентной среды (совершенный газ) при числах Маха от 0 до 6 и учётом кинетики химических превращений составляющих потока.
5.	<code>twoPhaseMixingCentralFoam</code>	Модель ламинарного или турбулентного течения гомогенной двухфазной сжимаемой смеси.
6.	<code>twoPhaseMixingCentralDyMFoam</code>	Модель ламинарного или турбулентного течения гомогенной двухфазной сжимаемой смеси моделирования случаев в условиях подвижной расчётной области.

Реализация гибридного метода позволила сохранить стандартную структуру приложения OpenFOAM, в котором настройки аппроксимации и возможности зависят от выбора пользователя, программист же только определяет список решаемых балансных уравнений и взаимосвязь между ними.

В зависимости от набора используемых стандартных библиотек

OpenFOAM , меняются дополнительные возможности разработанных приложений. Например, выбор модели турбулентности осуществляется стандартными средствами OpenFOAM и по сути вносит изменения в дискретизацию диффузионных слагаемых в уравнениях изменения импульса и энергии. Отдельные версии приложений, поддерживающие работу с подвижной сеткой ( `dynamicFvMesh` ) позволяют осуществлять решение задач в случаях с движущейся расчётной областью.

Каждое из разработанных приложений при работе проходит через следующие этапы.

- Инициализация искомых и вспомогательных полей.
- Цикл по времени.
  - Вычисление величины нового шага по времени.
  - Прогноз поля плотности по предыдущим значениям массовых потоков.
  - Прогноз поля скоростей среды.
  - Цикл связи скорости, давления и температуры.
    - \* Решение уравнения баланса энергии, записанного в терминах энталпии.
    - \* Обновление поля температуры по текущему полю энталпии.
    - \* Обновление поля сжимаемости по текущему полю давления.
    - \* Формирование и решение уравнения для давления (уравнения неразрывности).
    - \* Коррекция полей плотности и скорости в соответствии с новым полем давления.
  - Обновление поля функции-переключателя.

### 2.2.3. Применение гибридного метода в некоторых специальных задачах

Разработанный метод позволяет использовать имеющееся программное обеспечение без изменения основных частей исходного кода. Реализация численного метода показала возможность использования следующих встроенных библиотек OpenFOAM.

- Расчёт течений в областях с меняющимися границами, включая круговое движение отдельных частей сеток с несовпадающими сеточными линиями.
- Поиск стационарных решений.
- Моделирование турбулентных течений методами RANS и LES.

В зависимости от специализации приложения (численной модели) общий алгоритм решения может дополняться следующими блоками.

**Поиск стационарного решения.** Вместо вычисления шага по времени вычисляется поле локального времени в каждой ячейке в соответствии с выбранным пороговым значением числа Куранта.

В случае, если динамика развития процесса не представляет интереса, гибридный метод может быть использован для нахождения стационарного состояния равновесного состояния с помощью итерационного алгоритма. В этом случае решение будет стремиться к состоянию, в котором конвективные и диффузионные потоки будут уравновешены объёмными источниками.

Для получения такого алгоритма, физический шаг по времени  $\delta t$  заменяется на фиктивный шаг по времени  $\Delta\tau$ , величина которого зависит от ячейки в которой рассматривается балансное соотношение. В этом случае частные производные по времени из балансных уравнений приобретают смысл объёмных источников, величина которых стремится к 0 по мере развития итерационного процесса - см. [55].

Так, дискретный аналог уравнения переноса некоторой величины  $\beta$  приобретает вид:

$$V \frac{\rho^* \beta^n - \rho^o \beta^o}{\Delta\tau} + \sum_f (\beta^n \phi^{P,o})_f + \sum_f (\beta^n \phi^{N,o})_f = V \dot{\beta} + \sum_f (\rho D_i \nabla \beta_i^n)_f \cdot \vec{S}_f \quad (2.4)$$

Величина фиктивного шага  $\Delta\tau$  выбирается индивидуально в каждой ячейке исходя из критерия устойчивости, значения которого нужно достичь в локальной ячейке. В связи с этим метод называется LTS - Local Time Stepping [55].

**Движение расчётной области.** При движении расчётной области меняются массовые потоки вещества через грани ячеек. Поэтому между этапами перемещения сетки и решения уравнения для прогноза плотности необходимо обновить относительные массовые потоки.

Реализация гибридного метода с использованием алгоритма PISO на основе библиотеки OpenFOAM позволила решить проблему универсальности использования уже существующих стандартных возможностей, таких как учёт движения границ расчётной области.

По умолчанию уравнение конвекции-диффузии (1.3) дискретизируется в OpenFOAM в предположении о подвижности сеточных линий. Как следует из уравнения, для описания изменения интенсивного свойства  $\beta$  в этих условиях необходимо знать поле скоростей движения узлов сетки  $\vec{U}_\Gamma$ . Таким образом, выбор способа движения сетки и аппроксимации конвективных потоков  $(\vec{U}_\Gamma)_f \cdot \vec{S}_f$  ложится на пользователя, а сама процедура аппроксимации выполняется стандартными средствами библиотеки, снимая с разработчика необходимость разработки численной схемы заново для этого случая.

В OpenFOAM учёт движения границ расчётной области может осуществляться различными способами [45, 56, 57, 58].

- Движение всей расчётной области по закону твёрдого тела.

- Деформация сеточных линий внутри расчётной области в соответствии с заданной деформацией внешних границ.
- Движение частей расчётной области по закону твёрдого тела с интерполяцией данных на границах с несовпадающими сеточными линиями.
- Изменение топологии — добавление новых объёмов (или целых слоёв), дробление или слияние элементов.

Вне зависимости от выбранного способа учёта движения расчётной области, его реализация осуществляется в соответствии с обобщённой теоремой переноса Рейнольдса (см. главу 1) и методом расщепления, позволяющим обновить поле массовых потоков, давления и плотности после изменения сетки (как геометрии, так и топологии), см. 1.4.2.

### **Моделирование турбулентности в потоке**

Учёт турбулентности в стандартных приложениях (численных схемах) OpenFOAM осуществляется за счёт включения дополнительного источникового слагаемого в уравнение баланса импульса. Вид данного источника зависит от реализации выбранной пользователем модели, подключение интерфейса осуществляется аналогично примеру, приведённому в листинге для стандартного приложения 2.3.

## **2.3. Резюме**

На основе выполненного анализа методов, был предложен гибридный метод, построенный следующим способом – подстановкой выражений, аппроксимирующих потоки в методе Курганова – Тадмора в выражения для вычисления массовых потоков в методе расщепления. Для плавного переключения между неявной версией метода Курганова – Тадмора и методом расщепления в зависимости от локальных параметров потока используется линейное смешение (взвешивание) потоковых выражений из обоих методов.

Полученная схема позволяет выполнять устойчивый счет единым алгоритмом в широком диапазоне чисел Маха — от 0 до 6. Расчёт течений при числе Маха менее единицы остаётся устойчивым при акустических числах Куранта существенно выше 1 (порядка 100-200 или более). Предложенный гибридный метод был расширен для решения задач расчёта многокомпонентного течения газов и течения двухфазной сжимаемой смеси. Данный гибридный метод был реализован в виде самостоятельных программных модулей ("решателей") на базе открытой конечно-объёмной библиотеки OpenFOAM. За счет использования стандартного функционала библиотеки OpenFOAM в разработанных программных модулях, возможности их расширения для решения многих прикладных задач существенно упрощены и реализуются обычными средствами OpenFOAM, используемыми в других встроенных приложениях пакета. Примером могут служить такие возможности, как подвижные сетки, поиск стационарного решения, внедрение акустических аналогий, трассировка облака частиц, изменение замыкающих соотношений для теплофизических и термодинамических величин.

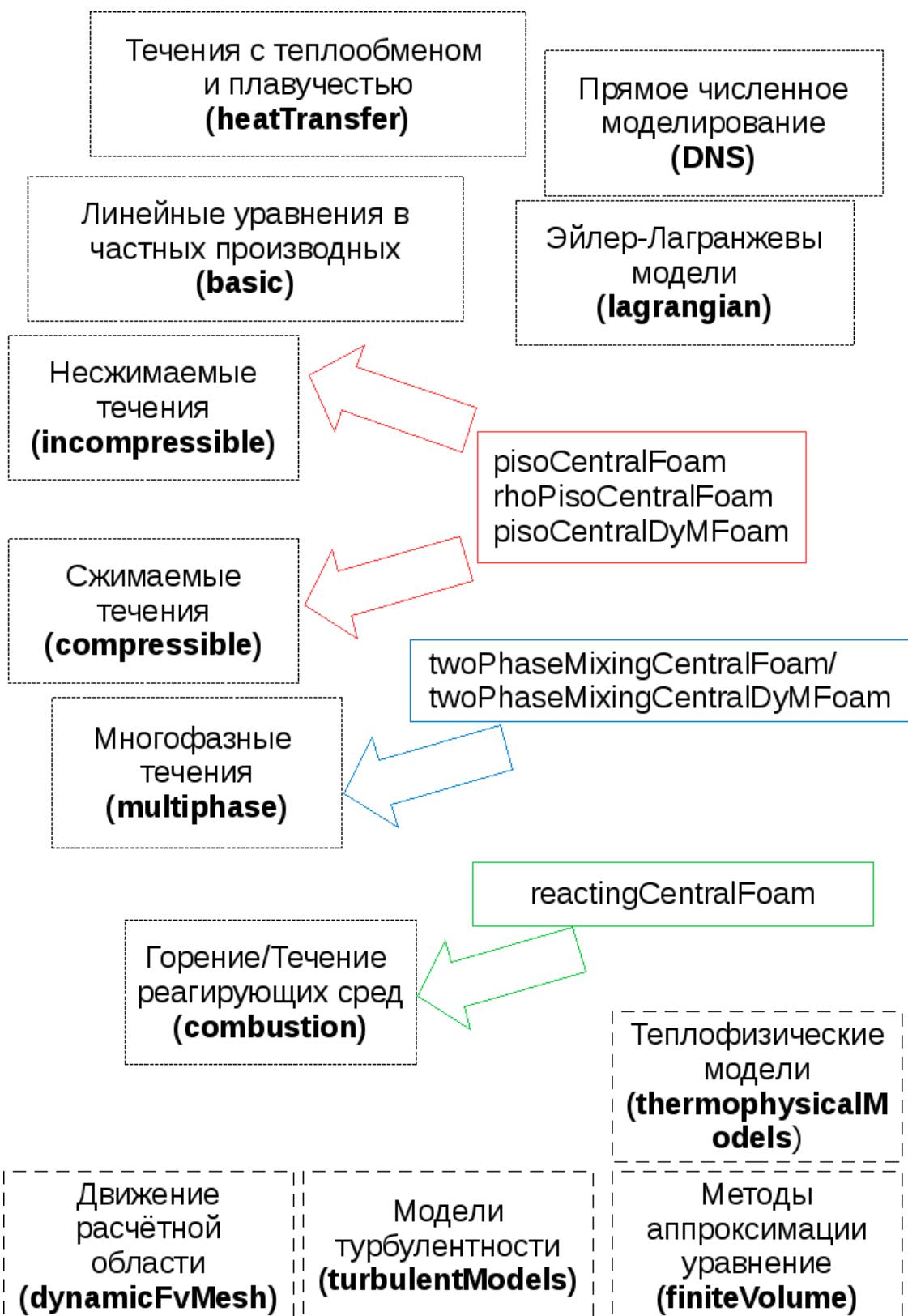


Рис. 2.4. Приложения-решатели, реализующие гибридный метод и расширяющие стандартный набор моделей пакета OpenFOAM

## Глава 3

# Результаты моделирования

В целях апробации гибридного метода были рассмотрены следующие группы задач:

1. **Валидационные задачи** для случая сжимаемого течения. В эту группу входят задачи с относительно простой геометрией, имеющие либо аналитическое решение, либо эталонные данные из эксперимента, либо результаты численного моделирования с помощью других численных методов или пакетов. Всего в эту группу входят следующие классы задач: а) распространение волны в прямом канале (задача Сода); б) обтекание плоского клина; в) обтекание обратного уступа сверхзвуковым потоком; г) обтекание прямого уступа сверхзвуковым потоком; д) течение в сверхзвуковом сопле при наличии прямого скачка уплотнения в закритической части.

2. **Валидационные задачи** для случая несжимаемого течения:

- а) дозвуковое течение ламинарного вязкого потока в канале круглого сечения;
- б) обтекание цилиндра в ламинарном режиме;
- в) обтекание цилиндра турбулентным потоком;
- г) течение струй газов со смешением.

3. **Моделирование распространения акустических колебаний.**

**4. Промышленные задачи:** а) моделирование истечения струи газа из сверхзвукового сопла; б) расчёт истечения квазиравновесной расширяющейся струи плазмы в вакуум; в) моделирование течения в высокоскоростном компрессоре; г) моделирование систем генерации газа в подушках безопасности д) моделирование гидродинамики водокольцевого насоса.

В отдельном разделе рассматриваются вопросы эффективности реализации гибридного метода — сеточная сходимость, влияние выбора функции смешения численных схем, масштабируемость алгоритма.

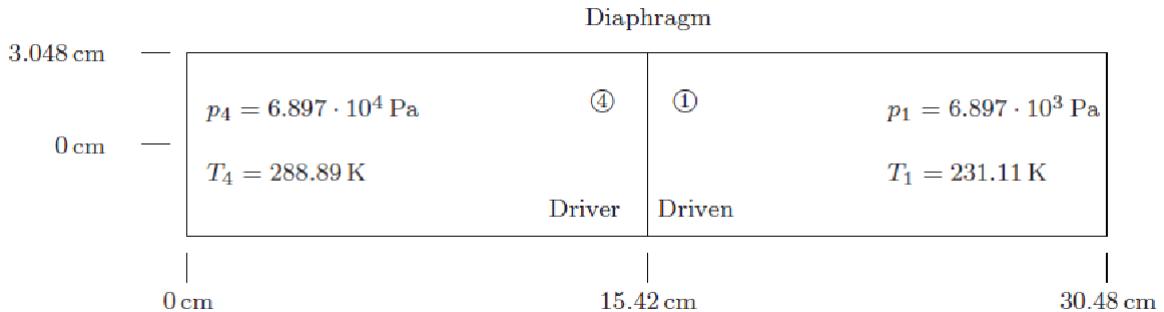
Завершается глава обзором примеров успешного применения разработанного гибридного метода другими авторами — см. работы [59] и [60].

### 3.1. Результаты моделирования сжимаемых однофазных течений

#### 3.1.1. Распространение волны в прямом канале (задача Сода)

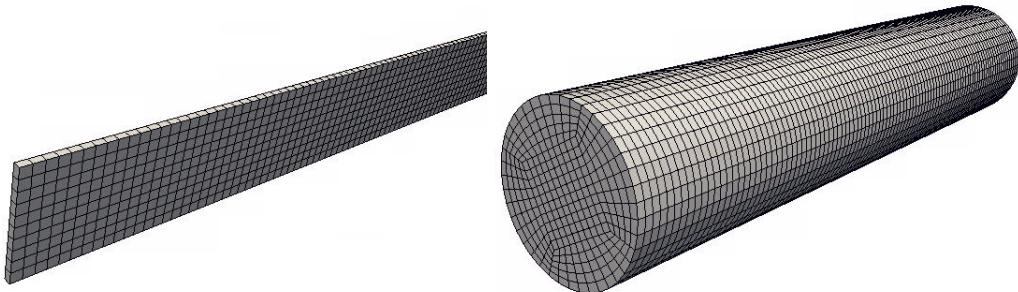
Рассматривается случай распространения ударной волны в цилиндрическом канале (ударной трубе). Волна создаётся расширением сжатого совершенного нетеплопроводного невязкого газа с высоким давлением и температурой в область, заполненную газом с более низкими давлением и температурой. На рис. 3.1 представлена схема рассматриваемой задачи. Газ слева и справа от перегородки находится при разных температурах и давлениях. Задача является одномерной и имеет аналитическое решение [61]. В начальный момент времени области с разным давлением разделены диафрагмой, в момент разрыва диафрагмы начинается распространение волны сжатия в сторону газа низкого давления, волны разрежения в сторону газа высокого давления, а также движение контактного разрыва. В зависимости от соотношения давлений в правой и левой частях ударной трубы перетекание газа может происходить со звуковой и дозвуковой ско-

ростями. При тестировании решателя `pisoCentralFoam` моделировались оба этих случая.



*Рис. 3.1. Схема расчетной области для случая распространения волны в канале*

Тестирование решателя `pisoCentralFoam` проводилось в одномерной (количество ячеек — 100), двумерной (1000 ячеек), осесимметричной двумерной (1000 ячеек) и полностью трёхмерной постановке (30000 ячеек) с целью определения влияния размерности задачи на результат. На рис. 3.2 показаны расчётные сетки для двумерного (3.2a) и трёхмерного (3.2b) случаев.



(a) Двумерная расчётная сетка  
для задачи Сода (b) Трёхмерная расчётная сетка  
для задачи Сода

*Рис. 3.2. Варианты расчётной сетки для задачи Сода*

Расчёты проводились до момента времени  $t = 0.00025$ . Как показали результаты, распределение давления по оси трубы практически не зависит от размерности задачи. На рис. 3.3 и 3.4 приводится сравнение результатов, полученных по одномерному расчёту с аналитическим решением. Из представленных графиков видно отсутствие осцилляций и хорошее соглашение между результатом, полученным с помощью разработанного метода, и

аналитическим решением. Вторым важным результатом является совпадение решения, полученного с использованием гибридного метода и исходной схемы Курганова – Тадмора (см. рис. 3.5).

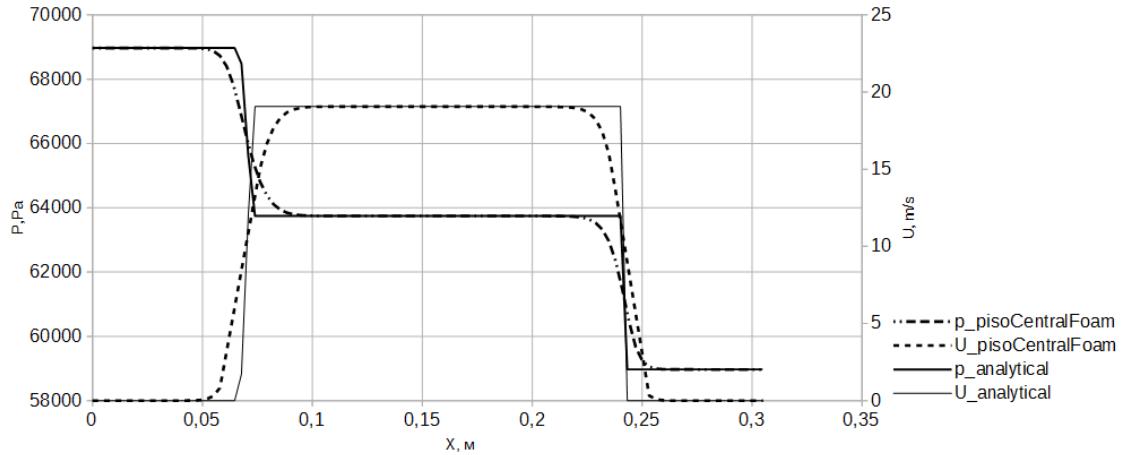


Рис. 3.3. Сравнение расчётного и аналитического распределения давления и скорости вдоль оси трубы для случая докритического течения. Обозначения: «analytical» – аналитическое решение, «pisoCentralFoam» – численное решение, полученное с помощью реализации гибридного метода в OpenFOAM.

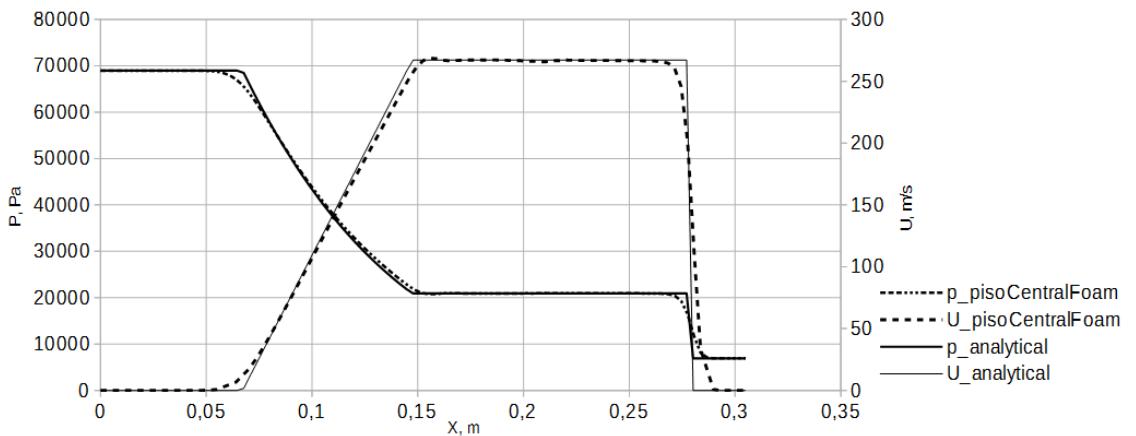


Рис. 3.4. Сравнение расчётного и аналитического распределения давления и скорости вдоль оси трубы для случая критического течения. Обозначения: «analytical» – аналитическое решение, «pisoCentralFoam» – численное решение, полученное с помощью реализации гибридного метода в OpenFOAM.

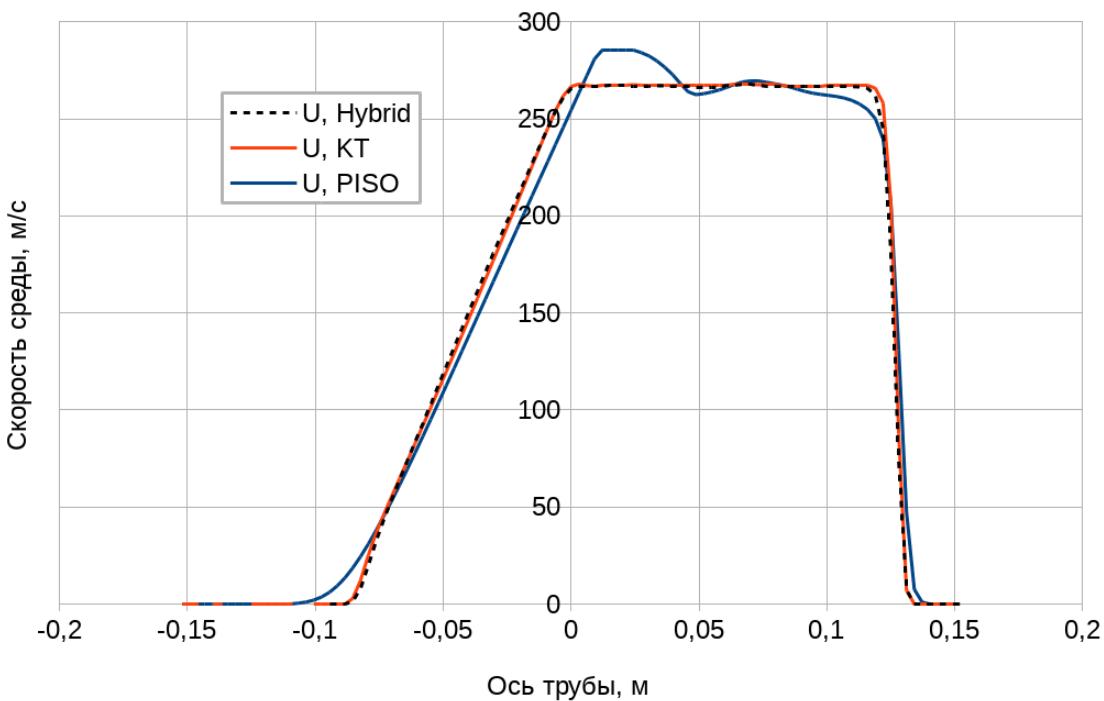


Рис. 3.5. Сравнение результатов расчётов задачи Сода, полученных с помощью схемы PISO (кривая «PISO»), стандартной схемы KT/KNP (кривая «KT») и гибридного метода (кривая «Hybrid»)

### 3.1.2. Моделирование распада разрыва при большом перепаде давления

С целью более детального исследования таких свойств гибридной схемы аппроксимации потоков как сходимость, монотонность и диссипативность, были взяты тестовые задачи одномерного распада разрыва из работы [29]. Всего рассматриваются пять случаев (см. табл. 3.1).

1. Модифицированная задача Сода - один из наиболее распространённых случаев, включающий в себя движущуюся влево волну разрежения, движущуюся вправо ударную волну и расположенный между ними контактный разрыв.
2. Данный случай также называется задачей “123” и представляет собой расходящееся движение двух волн разрежения с находящимся между ними контактным разрывом. Данная задача представляет собой особенную сложность в виду малых значений давления (вакуума) в

Таблица 3.1. Параметры исследуемых расчетных случаев распада разрывов

№	1	2	3	4	5
$\rho_L$	1.0	1.0	1.0	1.0	5.99924
$u_L$	0.0	-2.0	0.0	0.0	19.5975
$p_L$	1.0	0.4	1000.0	0.01	460.894
$T_L$	2.5	1.0	2500.0	0.025	192.063
$\rho_R$	0.125	1.0	1.0	1.0	5.99242
$u_R$	0.0	2.0	0.0	0.0	-6.19633
$p_R$	0.1	0.4	0.01	100.0	46.0950
$T_R$	2.0	1.0	0.025	250.0	19.23
$t_e$	0.25	0.15	0.012	0.035	0.035

области контактного разрыва.

3. Данный случай является наиболее сложным из представленных, поскольку отношение давлений в двух состояниях составляет 1:100000. Решение состоит из волны разрежения, движущейся влево, ударной волны, движущейся вправо, и контактного разрыва между ними.
4. Этот тест аналогичен предыдущему (отношение давлений составляет 1:10000), решение представляет собой ударную волну, движущуюся влево, волну разрежения, движущуюся вправо, и контактный разрыв.
5. Последний тест является комбинацией решения предыдущего и №2 и описывает столкновение двух ударных волн.

По условиям задачи [29] длина расчётной области  $L = 1$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Для получения  $\gamma = 1.4$ , положим адиабатную теплоёмкость  $C_p$  равной 1.4, а изохорную теплоёмкость  $C_v$  равной 1.0. Тогда индивидуальная газовая  $R/\mu$  постоянная должна быть равна 0.4, а “нормированная” молярная масса - 20875. Для получения скоростей звука, рассчитанных в приближении совершенного газа и соответствующих исходным данным [29], температуры состояний слева и справа были также пересчитаны (см. табл. 3.1).

В результате сравнения численного решения, полученного с использованием гибридного метода и двух способов вычисления конвективных

потоков в неявной схеме — Русанова (Тадмора) и HLL (Курганова), с аналитическим решением в [29], установлено что:

1. решения, полученные с помощью гибридного метода, качественно и количественно слабо отличаются от соответствующих явных схем Годуновского типа при малом числе Куранта;
2. гибридный метод является более диссипативным по сравнению с явными схемами;
3. среди двух способов аппроксимации конвективных слагаемых в качестве предпочтительного можно выбрать схему Русанова (Тадмора), как обеспечивающую лучшую монотонность при сохранении приемлемого уровня диссипативности.

Нормы ошибок, получаемых при использовании неявной и явной схем, становятся близкими при величине шага по времени, соответствующем числу Куранта  $0.005 - 0.01$ . При таких значениях числа Куранта преимущества явной схемы (низкая диссипативность, высокая производительность) перед неявной очевидны. Ситуация меняется кардинально при росте поточного числа Куранта (и, соответственно, характеристического числа Куранта). Найдём значения параметров схемы, позволяющие получать численное решение, наиболее близкое к аналитическому для поточного числа Куранта, равного 0.5, в задаче №3. Среди параметров схемы будем варьировать следующие:

- 1) число внешних итераций ( $No$ ) — итераций, связывающих плотность, давление и скорость по алгоритму SIMPLE;
- 2) число внутренних итераций ( $Ni$ ) — итераций, связывающих плотность, давление и скорость по алгоритму PISO;
- 3) учёт/неучёт баланса энергии на внутренних итерациях;

4) способ прогноза поля скорости по текущему полю давления перед внутренними итерациями.

Для сравнения приведём значения нормы  $L_1$  ошибки стандартной явной схемы Тадмора при характеристическом числе  $CCo = 0.5$  (поточное число Куранта порядка 0.25, что на 40% меньше, чем для неявной схемы):

- Density 0,06.
- Velocity 1,00.
- Pressure 22,98.
- Energy 32,61.

Результаты варьирования вышеперечисленных параметров схемы приведены в таблице 3.2. Видно, что при числе  $Co = 0.5$  ( $CCo$  порядка 0.9) норма ошибки может быть снижена за счёт введения внешних итераций (случай  $No = 3$ ,  $Ni = 1$ ,  $Co = 0,5$ , w/o PISO energy update). При решении этой же задачи с характеристическим числом Куранта 0.5, соответствующим значению, использовавшемся для явной схемы, норма ошибки неявной схемы падает ещё ниже:

- Density 0,05.
- Velocity 0,11.
- Pressure 3,33.
- Energy 21,40.

Как показало исследование, число внешних итераций  $No$  может критически влиять на решение, в отличие от числа внутренних итераций  $Ni$ . Лучше всего влияние числа итераций на сходимость решения продемонстрировать графически - см. рис. 3.6 – 3.8. Из рис. 3.6 и 3.7 видно что решение, получаемое с использованием явной схемы, осциллирует при  $CCo=0.5$ .

Впрочем, дополнительные исследования показали наличие осцилляций явной схемы и при вдвое меньшем числе ССо. Неявная же схема позволяет получить монотонное решение, правда за счёт использования достаточного числа внешних итераций (фактически — за счёт падения производительности). Небольшие осцилляции скорости (рис. 3.7) практически исчезают при снижении характеристического числа Куранта до 0.5 (см. рис. 3.8).

Таким образом, исследование влияния параметров алгоритма гибридного метода показало следующее.

- 1) Число внешних итераций существенно влияет на точность при поточном числе Со. Для достижения наиболее точных результатов при поточном числе Куранта больше 0.1 требуется по крайней мере 2-3 внешних итерации.
- 2) Влияние внутренних итераций невелико.
- 3) При числе внешних итераций 3 или более точность гибридного метода выше точности явного метода, особенно при высоких значениях числа Куранта.
- 4) Чем выше число Куранта (поточное или характеристическое), тем эффективнее использование неявной схемы. Например, при ССо=0.5 осцилляции скорости в явной схеме хорошо различимы, тогда как в неявной они практически отсутствуют. При использовании неявной схемы и ССо=0.9 осцилляции присутствуют, но они заметно ниже, чем в явной схеме при ССо=0.5, см. рис. 3.7 и рис. 3.8.

*Таблица 3.2. Влияние параметров алгоритма неявного гибридного метода на норму ошибки: Со — поточное число Куранта, No — число внешних (outer) итераций, Ni — число внутренних (inner) итераций, w/o PISO energy update — без обновления энергии во внутреннем цикле PISO, w/ PISO energy update — с обновлением энергии во внутреннем цикле PISO*

---

Со=0,5 No=1 w/o PISO energy update

	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	—	0,47	0,47
Velocity L1	—	3,76	3,85
Pressure L1	—	84,14	86,38
Energy L1	—	171,48	176,33
Co=0,5 No=1 w/ PISO energy update			
	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	—	0,36	0,31
Velocity L1	—	2,11	1,70
Pressure L1	—	46,80	36,88
Energy L1	—	108,62	99,67
Co=0,5 No=2 w/o PISO energy update			
	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	0,09	0,10	0,10
Velocity L1	0,73	0,45	0,46
Pressure L1	18,15	11,20	11,22
Energy L1	56,44	42,83	44,59
Co=0,5 No=2 w/ PISO energy update			
	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	—	0,08	0,07
Velocity L1	—	0,32	0,30
Pressure L1	—	8,18	7,69
Energy L1	—	38,52	36,09
Co=0,5 No=3 w/o PISO energy update			
	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	0,06	0,07	0,06
Velocity L1	0,21	0,22	0,23
Pressure L1	5,58	5,91	6,04
Energy L1	29,52	29,88	31,26

Co=0,5 No=3 w/ PISO energy update

	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	—	0,07	0,06
Velocity L1	—	0,23	0,24
Pressure L1	—	6,01	6,18
Energy L1	—	31,80	32,35

Co=0,25 No=2 w/o PISO energy update

	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	0,08	—	—
Velocity L1	0,56	—	—
Pressure L1	12,83	—	—
Energy L1	40,19	—	—

Co=0,25 No=2 w/ PISO energy update

	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	—	0,05	—
Velocity L1	—	0,14	—
Pressure L1	—	3,97	—
Energy L1	—	24,17	—

Co=0,25 No=3 w/o PISO energy update

	Ni=1	Ni=2	Ni=3
Density L1	0,05	—	—
Velocity L1	0,11	—	—
Pressure L1	3,33	—	—
Energy L1	21,40	—	—

Co=0,25 No=3, w/ momentum Predictor

	Ni=1
Density L1	0,06
Velocity L1	0,14
Pressure L1	3,76
Energy L1	22,07

Co=0,125 No=3 w/o PISO energy update

Ni=1		
Density L1	0,03	
Velocity L1	0,07	
Pressure L1	2,23	
Energy L1	15,23	

Co=0,05 No=3 w/o PISO energy update

Ni=1		
Density L1	0,02	
Velocity L1	0,06	
Pressure L1	1,45	
Energy L1	10,87	

Co=0,02 No=3 w/o PISO energy update

Ni=1		
Density L1	0,02	
Velocity L1	0,06	
Pressure L1	1,17	
Energy L1	9,26	

Co=0,01 No=3 w/o PISO energy update

Ni=1		
Density L1	0,02	
Velocity L1	0,06	
Pressure L1	1,08	
Energy L1	8,75	

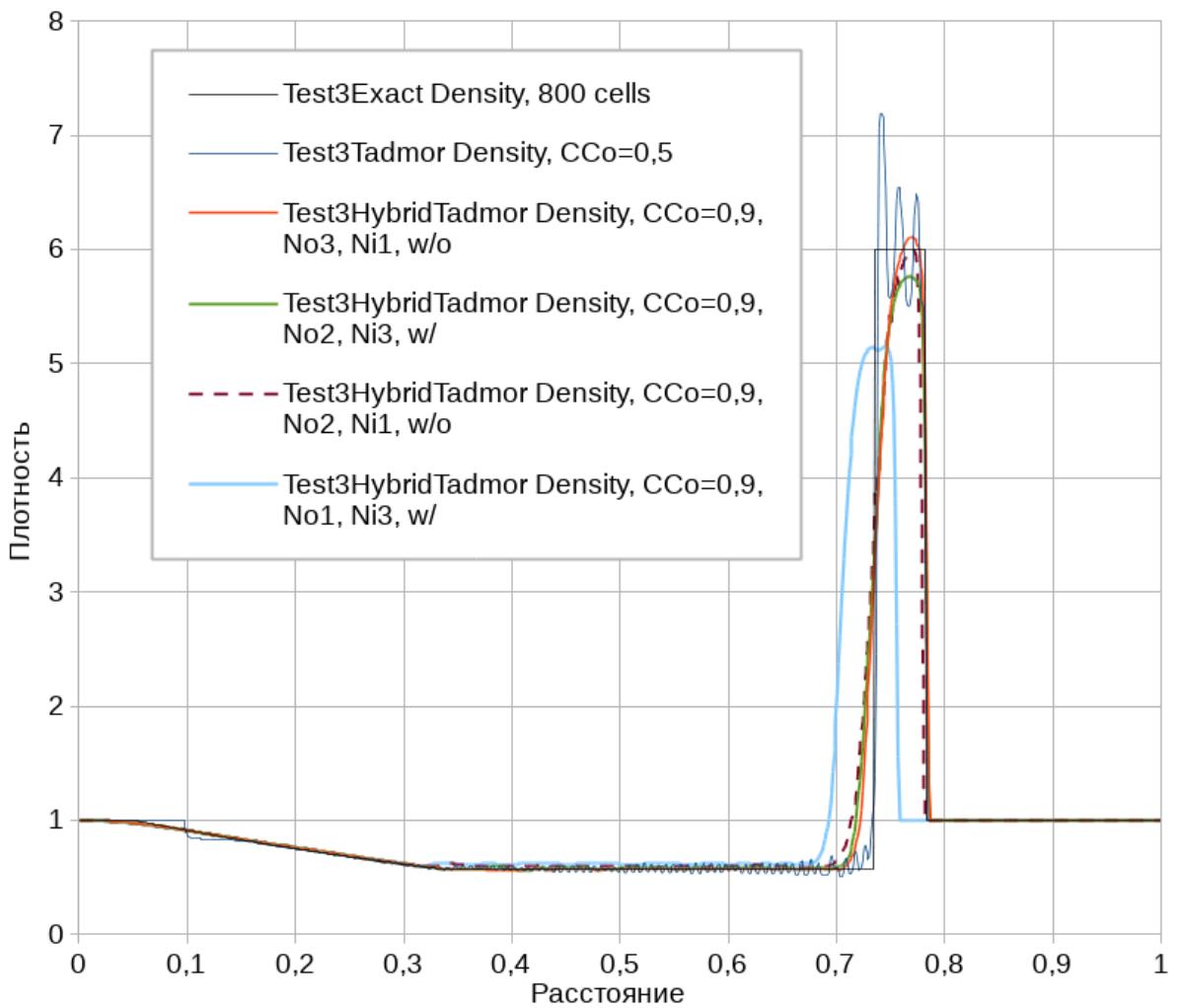


Рис. 3.6. Влияние параметров алгоритма интегрирования на распределение поля плотности в задаче №3. Для сравнения также показано точное решение (чёрная линия) и решение, полученное явной схемой (синяя линия).

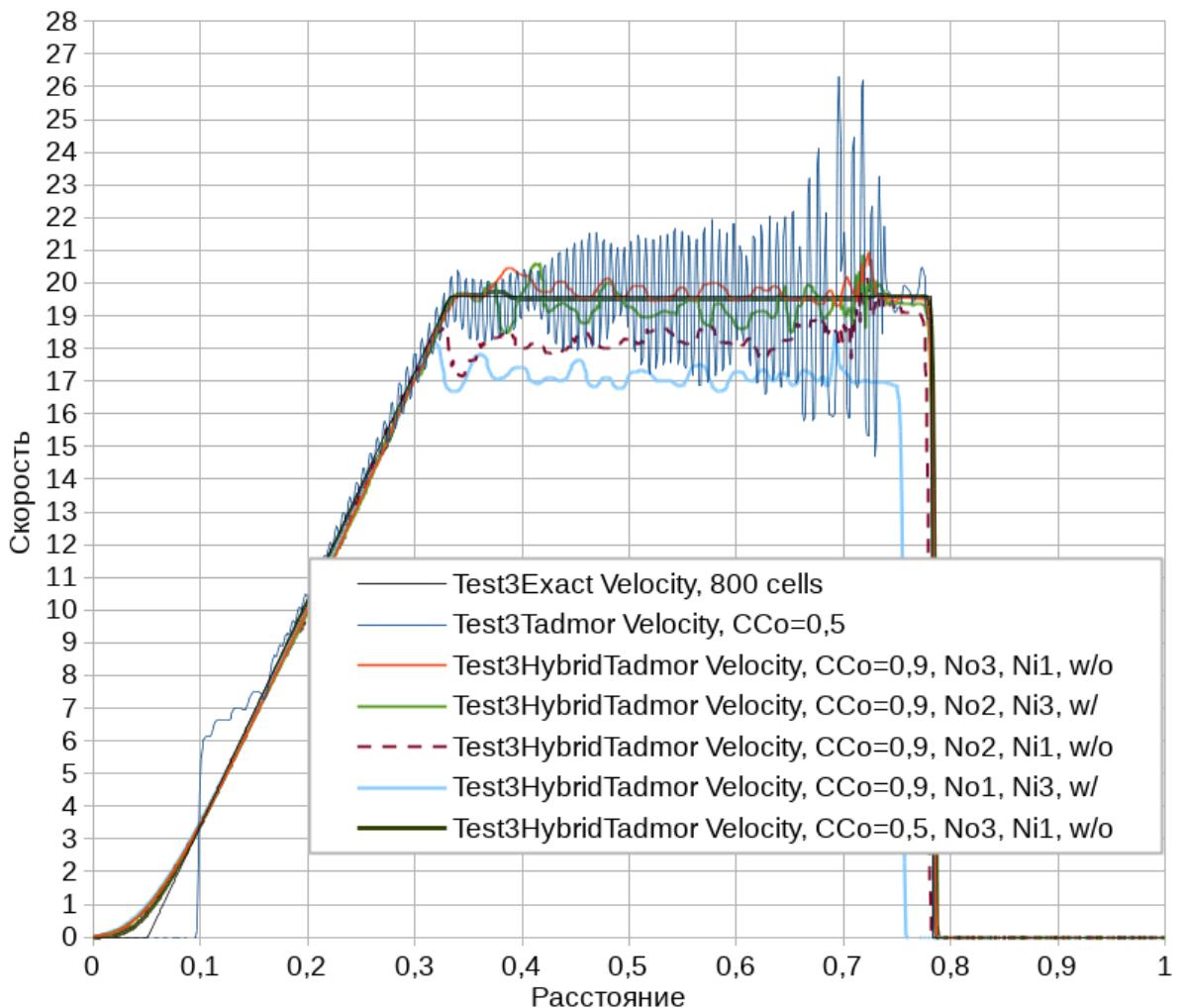


Рис. 3.7. Влияние параметров алгоритма интегрирования на распределение поля плотности в задаче №3. Для сравнения также показано точное решение (чёрная линия) и решение, полученное явной схемой (синяя линия).

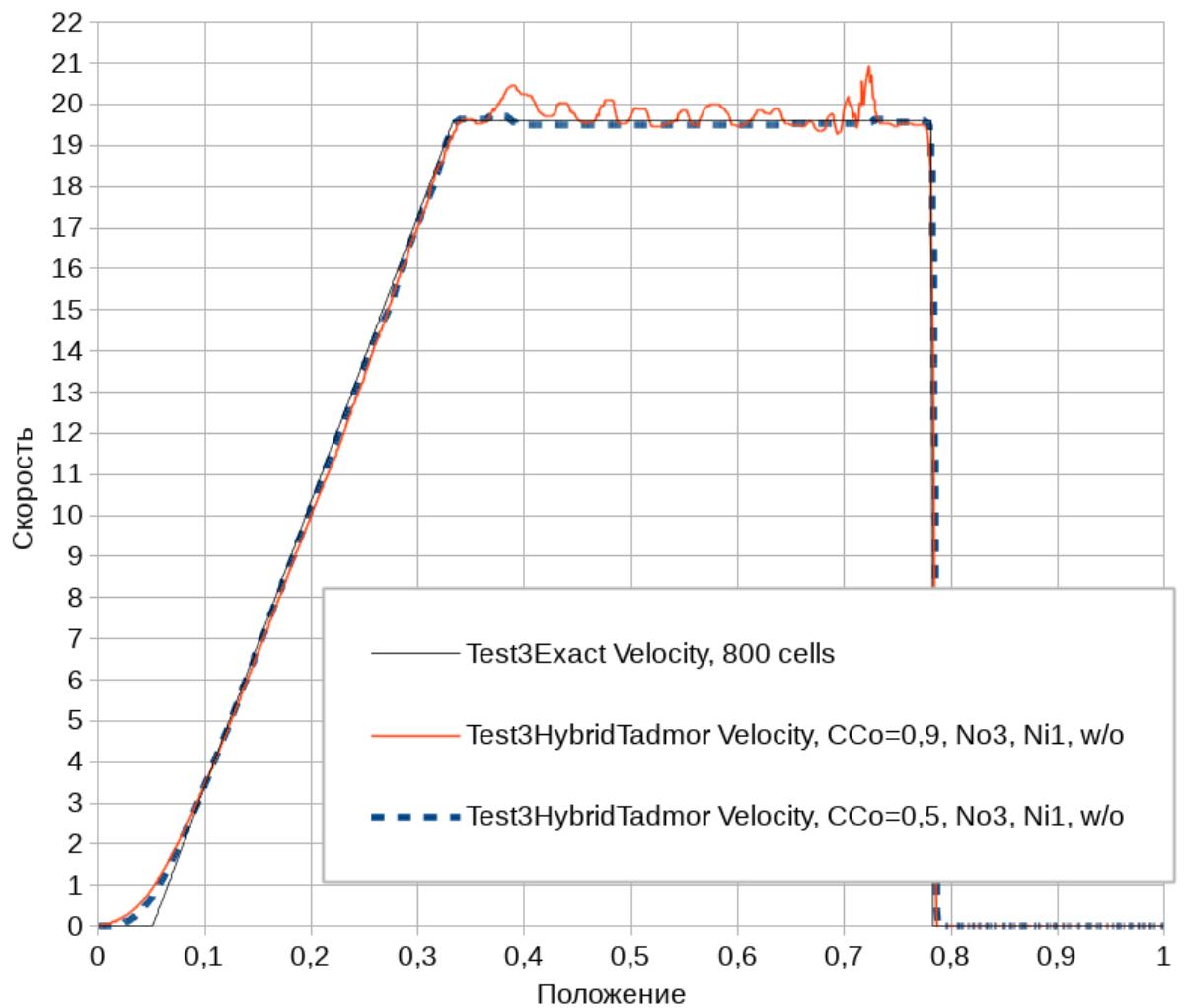


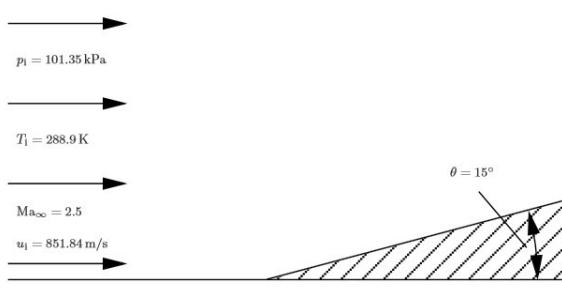
Рис. 3.8. Влияние характеристического числа Куранта на распределение поля плотности в задаче №3. Для сравнения также показано точное решение (чёрная линия).

### 3.1.3. Обтекание плоского клина

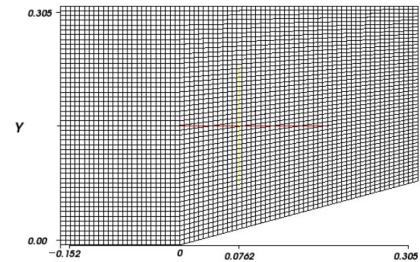
Рассматривалось сверхзвуковое обтекание плоского клина (см. рис. 3.9). Исходные данные брались в [7]. Число Маха набегающего потока  $M=2.5$ . Рабочая среда – сухой воздух, молярная масса – 28.96 г/моль, удельная газовая постоянная – 287.05 Дж/кг/К. Газ считается идеальным. Давление и температура в набегающем потоке – 101350 Па и 288.9 К.

Изобарная теплоёмкость  $C_p = 1004$  Дж/кг/К, показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ , скорость звука  $c = \sqrt{\gamma RT} = 340.73$  м/с, скорость набегающего потока  $U = M \cdot c = 851.84$  м/с, динамическая вязкость среды 0 мкПа·с (идеальный газ), число Прандтля  $Pr = 1$ .

Как известно, для данной задачи существует приближенное аналитическое решение в рамках теории косых скачков уплотнения (см. [7]). Таким образом, с помощью данной задачи можно проверить возможности схемы по воспроизведению скачков уплотнения: их положений и степени «размытости», что позволяет в целом оценить близость численного решения к аналитическому. В качестве параметра, характеризующего близость численного решения к аналитическому, рассматривалось число Маха, скачкообразно меняющееся при прохождении через скачок уплотнения. С этой целью были расставлены точки отбора расчётных значений параметров потока, отстоящие на 0.05 м по координате  $Y$  от твёрдой стенки.



(a) Начальные и граничные условия



(b) Сетка в расчётной области

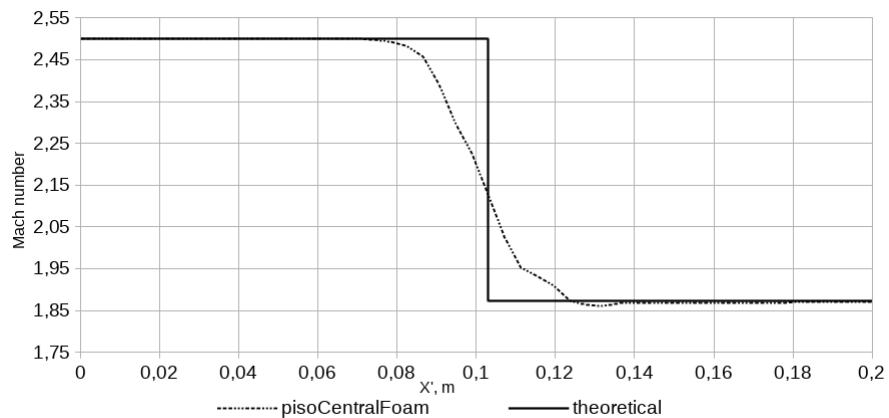
Рис. 3.9. Расчётная схема для случая набегания потока на клин

Для данного случая строилась двухблочная двумерная сетка (рис. 3.9a). Первый блок представлял собой прямоугольник размерами  $0.1522 \times$

0.3048 м, второй (над клином) – прямоугольную трапецию высотой 0.3048м, равной нижнему основанию, и с боковой стороной, наклонённой к оси ОХ на  $15^\circ$ . Для проверки сходимости проводилось моделирование при трёх уровнях сгущения сетки. Первоначальное разбиение блоков на ячейки:  $75 \times 50$  ячеек (первый блок –  $25 \times 50$ ; второй блок –  $50 \times 50$ ). Для получения более грубой и более точной сеток количество ячеек на каждый блок уменьшалось и увеличивалось в 1.5 раза от базового разрешения соответственно. Помимо этого изучалось влияние порядка аппроксимации производных по времени по времени на сходимость решения. Рассматривались неявные схемы первого и второго порядка. Поле давления, показывающее положение скачка уплотнения представлено, на рис. 3.10.



*Рис. 3.10. Поле давления при обтекании косого уступа сверхзвуковым потоком*



*Рис. 3.11. Сравнение численного и точного решения для случая набегания потока на клин*

Анализ проведённых расчётов позволяет сделать вывод о том, что использование схемы второго порядка, хоть и приближает численное решение к теоретической зависимости, может приводить к появлению осцилляций. Поведение гибридного метода также оказалось идентичным схеме Кургана — Тадмора.

### 3.1.4. Обтекание обратного уступа сверхзвуковым потоком

В качестве третьего тестового примера рассматривалась классическая задача из теории отрывных течений — плоское сверхзвуковое обтекание обратного уступа. На рис. 3.12 представлена схематичная картина течения. Поток при прохождении кромки уступа расширяется, образуя веер волн разрежения. Наличие препядствия в виде горизонтальной поверхности за уступом обуславливает отрыв вязкого потока. Присоединение потока ведёт к образованию  $\lambda$ -образного скачка уплотнения.

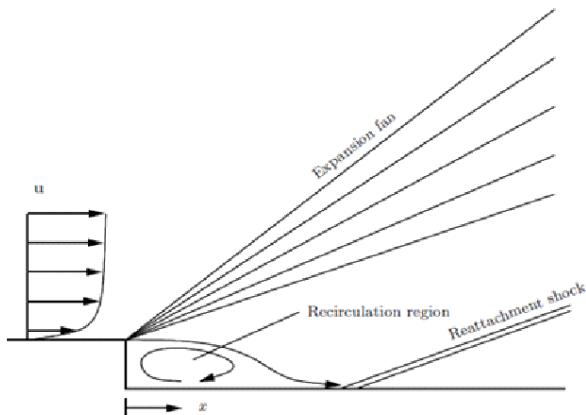


Рис. 3.12. Схема течения при сверхзвуковом обтекании обратного уступа

Исходные данные брались из [62]. Число Маха набегающего потока  $M = 2.5$ . Рабочая среда — сухой воздух, молярная масса — 28.96 г/моль, удельная газовая постоянная — 287.05 Дж/кг/К. Газ считается совершенным. Использовалась стандартная  $k - \omega$  SST модель турбулентности [63]. Задание параметров турбулентности  $k, \omega$  на входе расчетной области про-

изводилось посредством известных зависимостей:  $k = 3/2(U \cdot I)^2$ , где  $U$  — средняя скорость течения, а  $I$  — интенсивность турбулентности, принятая равной 5%;  $\omega = \varepsilon/(k \cdot \mu)$ , где диссипация кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon = C_\mu^{3/4} \cdot k^{3/2}/l$ ,  $l = 0.07L$ , где  $L$  — характерный размер, а коэффициент  $C_\mu$  принимается равным 0.09.

Статическое давление в набегающем потоке — 13316.6 Па, давление торможения — 227527 Па, температура торможения — 344.44 К.

Изобарная теплоёмкость  $C_p = 1005$  Дж/кг/К, показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Скорость звука среды  $c = \sqrt{\gamma(R/\mu)T} = 248$  м/с. Скорость набегающего потока  $U = M \cdot a = 620$  м/с. Динамическая вязкость среды принималась равной 18.27 мкПа·с. Число Прандтля  $Pr = 0.7$ .

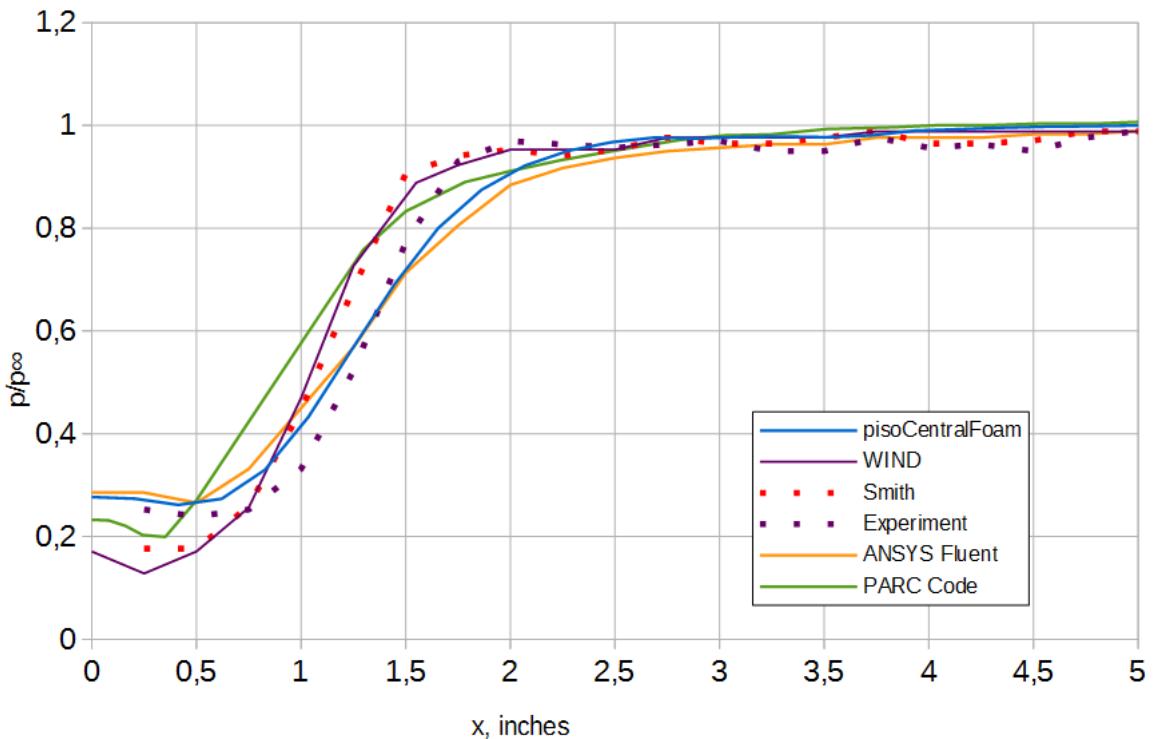
Высота уступа 0.01125 м, расстояние от уступа до входного сечения 0.1016 м, до выходного сечения: 0.3048 м, расстояние до верхней границы расчётной области 0.1475 м. Диапазон характерных для течения чисел Рейнольдса:  $7 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^6$ .

Строилась трёхблочная двумерная сетка. Каждый из блоков представлял собой прямоугольник; первый блок примыкал к уступу своей левой стороной и насчитывал 240x40 ячеек, второй располагался над уступом (104x112 ячеек), третий располагался над первым блоком и замыкал расчётную область (240x112 ячеек). На всех твёрдых поверхностях задавалось граничное условие прилипания,  $k$  и  $\omega$  аппроксимировались при помощи пристеночных функций.

Результаты моделирования сравнивались с опытными данными по обтеканию обратного уступа той же геометрии, представленными в работе [64], а также с расчётыми данными, полученными в кодах PARC,WIND и ANSYS Fluid Dynamics. Расчёт проводился до момента времени 0.06с, к которому режим течения можно считать установившимся.

На рис. 3.13 представлены графики распределения давления за уступом в расчёте, в эксперименте и в расчётах других авторов. Давление отнесено к статическому давлению перед уступом, а горизонтальная координата

отсчитывается от стенки уступа в дюймах.



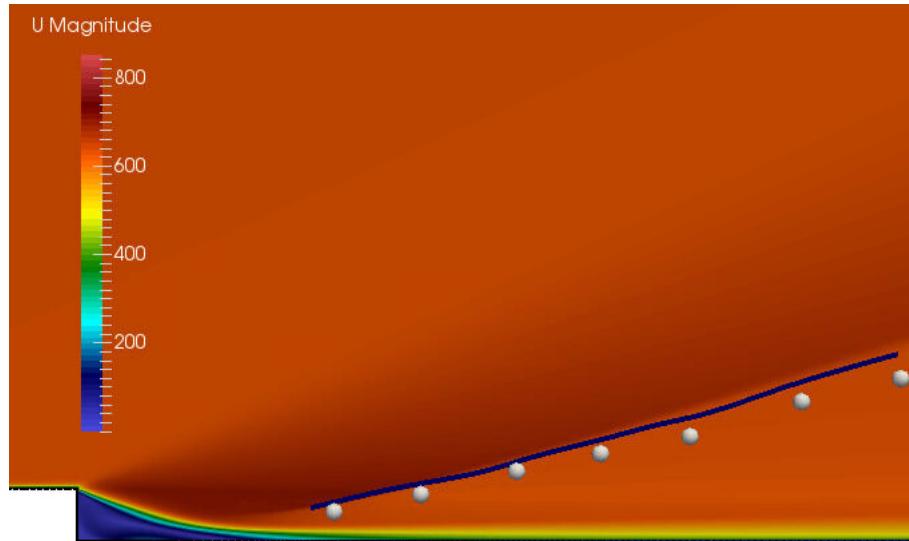
*Рис. 3.13. Сравнение распределения давления за обратным уступом*

Как видно из графика, модель, реализованная в pisoCentralFoam приводит к результатам, наиболее близким к получаемым с помощью ANSYS [62] и эксперименту, указанному в [62]. В то же время положение кривой, полученной с помощью разработанной модели, несколько отличается от экспериментальных данных из источника [64] и результатов с помощью кодов WIND и PARC [65], предсказываемое давление в отрывной зоне несколько завышено.

Следует отметить, что распределение давлений, которое приводится в руководстве пользователя ANSYS [62], в отчёте [64] найдено не было.

Для наглядной оценки адекватности воспроизведения пространственных характеристик среды при сверхзвуковом обтекании со скачками уплотнения выполнено сравнение с имеющимися экспериментальными и расчётными данными. На рис. 3.14 представлена картина течения, полученная с помощью разработанной модели, реализованной в pisoCentralFoam, в сравнении с экспериментальным [64] и расчётным положением скачка уплот-

нения, полученным в коде PARC [65]. Как видно из рисунка, положение скачка уплотнения лежит достаточно близко как к экспериментальным, так к расчёты данным.



*Рис. 3.14. Сравнение положений скачка уплотнения, вызванного присоединением потока. Серыми точками показано экспериментальное положение скачка уплотнения, синей линией – результат расчёта кодом PARC [65]*

### 3.1.5. Обтекание прямого уступа сверхзвуковым потоком

Рассматривается сверхзвуковое течение идеального газа в канале с резким сужением (рис. 3.15). Данная задача является классическим тестом для методов моделирования сверхзвуковых течений (см. [66]). В начальный момент времени по всему пространству канала скорость, давление и температура распределены равномерно. Физические свойства среды были нормированы таким образом, чтобы при температуре  $T = 1$  К и скорости  $U = 3$  м/с, наблюдалось сверхзвуковое течение с  $Ma = 3$ .

Границные условия следующие.

- На уступе (заштрихован) – условие непротекания для скорости, условие адиабатичности для температуры (нулевой градиент), условие непроницаемости для давления (нулевой градиент).

- На верхней горизонтальной и нижней (вдоль отрезка NX1) горизонтальной границах – условие проскальзывания для скорости (нормальная скорость равна 0, нулевой градиент для тангенциальной), условие адиабатичности для температуры, условие непроницаемости для давления.
- На входе в расчётную область (левая вертикальная граница) – фиксированные значения скорости (3 м/с), давления (1 Па), температуры (1 К).
- На выходе из расчётной области (правая вертикальная граница) – нулевые нормальные производные для скорости, давления и температуры

Физические свойства газа подобраны так, чтобы в начальный момент времени число Маха потока в горизонтальном направлении равнялось 3, а показатель адиабаты ( $C_p/C_v$ ) – 7/5:

- Молярная масса: 11640.3 г/моль.
- Адиабатическая теплоёмкость 2.5 Дж/кг/К.
- Число Прандтля 1.

Параметры разбиения расчётной области сеткой приведены в табл. 3.3. Расчет проводился до момента времени  $t = 4$  с. Сравнивалось положение «ножки»  $\lambda$ -скакка и наличие/отсутствие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, которая наблюдалась во многих работах при воспроизведении данного случая. При корректной дискретизации в момент времени  $t = 4$  с, положение ножки  $\lambda$ -скакка должно находиться на передний край уступа ( $X=60$  см).

Данный случай использовался для тестирования масштабируемости модели и исследования сеточной сходимости по времени и пространству.

Таблица 3.3. Параметры разбиения расчётной области

№ п.п.	Отрезок	Число отрезков, грубая сетка	Число отрезков, средняя сетка	Число отрезков, улучшенная сетка	Число отрезков, мелкая сетка
1.	NX1	96	192	384	768
2.	NX2	384	768	1536	3072
3.	NY1	32	64	128	256
4.	NY2	128	256	512	1024
		Число ячеек в расчётной сетке			
5.		60 тыс.	250 тыс.	1 млн.	4 млн.

Результаты сеточной сходимости приводятся только для средней, улучшенной и мелкой сеток. Параметры грубой сетки приведены для справки.

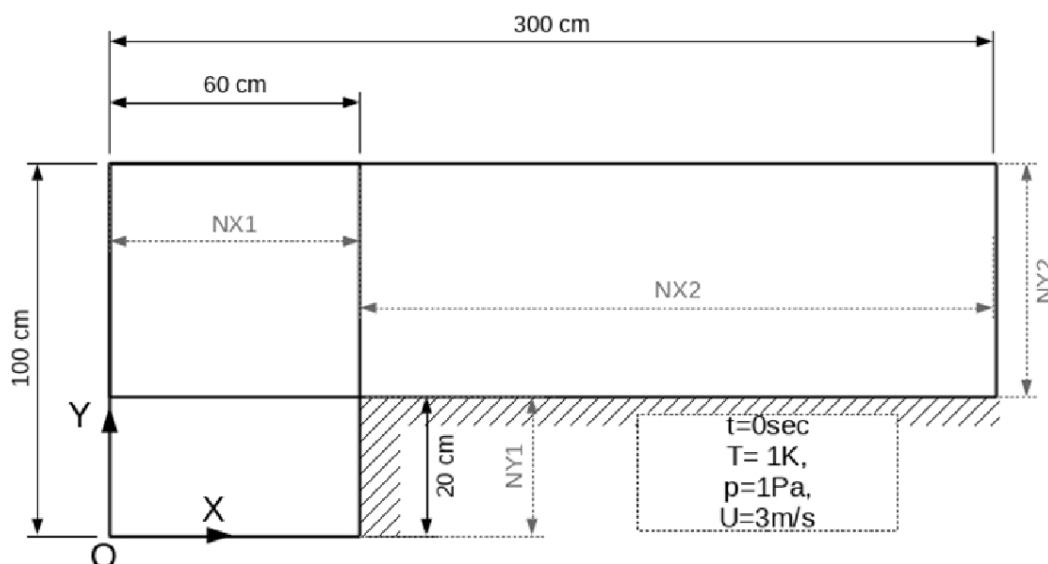
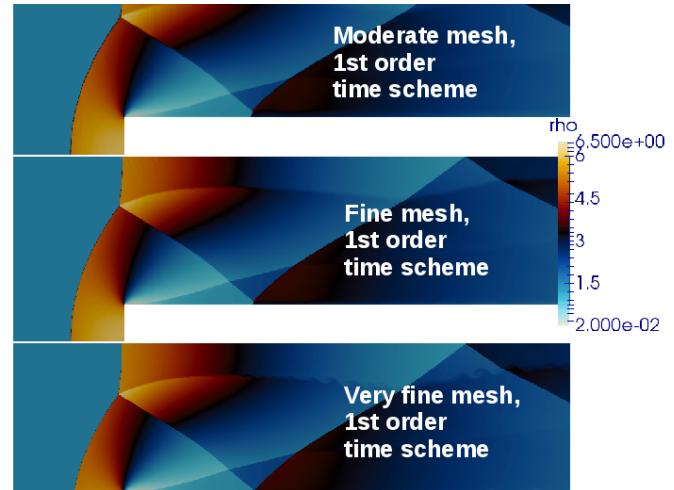


Рис. 3.15. Схема расчётной области и разбиения на блоки

Из расчётов видно, что вне зависимости от степени измельчения расчётной сетки, положение «ножки»  $\lambda$  — скачка соответствует положению уступа (рис. 3.16). При этом в случае использования схемы первого порядка по времени, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца начинает проявляться только на самой мелкой сетке (4 млн ячеек), в то время как использование схемы второго порядка аппроксимации по времени позволяет воспроизво-

дить этот эффект и на заметно более грубой сетке (1 млн ячеек) — рис. 3.17.



*Рис. 3.16. Сравнение картин течения (поле плотности) для «средней» сетки, улучшенной сетки и мелкой сетки в момент времени  $t = 4$  с. Первый порядок аппроксимации по времени и 2-й порядок аппроксимации по пространству.*



*Рис. 3.17. Сравнение картин течения (плотности) для случая, посчитанного с первым порядком аппроксимации по времени на самой мелкой сетке (Very fine mesh) и случая, посчитанного со вторым порядком аппроксимации по времени на более грубой сетке (Fine mesh) в момент времени  $t = 4$  с.*

### 3.1.6. Течение в сверхзвуковом сопле при наличии прямого скачка уплотнения в закритической части

Рассматривалась задача о течении в простейшем сверхзвуковом сопле, геометрия которого задавалась комбинацией двух усеченных конусов. Начальные данные соответствовали расчетному случаю из [62]. Результаты сравнивались с приближённым аналитическим решением, основанным на законах изоэнтропического течения идеального газа и теории прямых скачков уплотнений [7, 62], и с расчетом в ANSYS Fluid Dynamics.

Схема сопла и структура установившегося течения изображены на рис. 3.18. Отношение площадей на входе и на выходе к критическому сечению принималось равным 3, длина сопла — равной 2 м (для удобства оперирования с обезразмеренной координатой скачка).

Поскольку существующее аналитическое решение справедливо лишь для одномерного случая (идентичные параметры течения по всему поперечному сечению сопла), была создана квазиодномерная расчетная сетка с прямоугольным сечением в плоскости перпендикулярной оси направлению течения (по одной ячейке в направлениях OY, OZ; ось OX расположена по оси симметрии сопла). Количество ячеек по оси X полагалось равным 100.

Границные условия определялись давлениями на входе и на выходе, которые принимались равными 300 и 175 кПа соответственно, на стенках ставилось ГУ проскальзывания для достижения одномерности при использовании в формате OpenFOAM. Течение принималось идеальным.

Таким образом, постановка задачи была максимально приближена к формулировке задачи, соответствующей аналитическому решению.

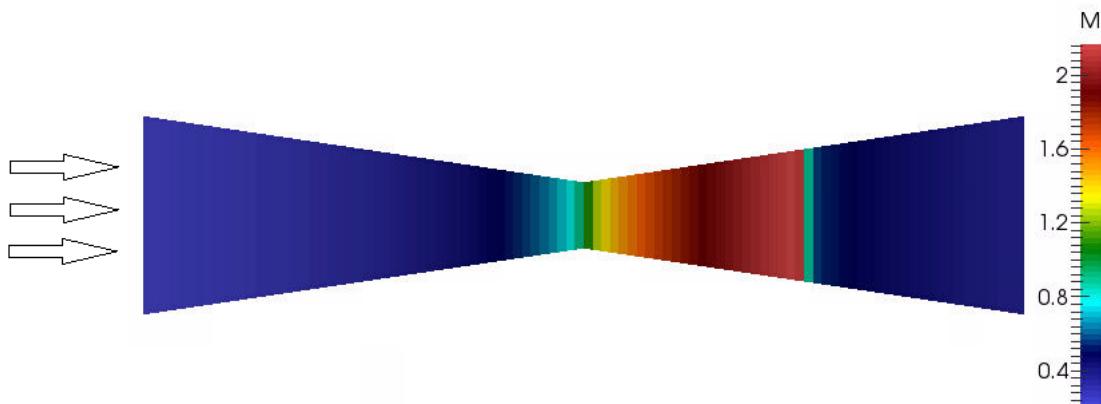


Рис. 3.18. Принципиальная расчётная схема и картина установившегося течения в сопле.

Сравнение распределения числа Маха по длине сопла с аналитическим решением представлено на рис. 3.19. Графики практически полностью совпадают, исключая небольшие расхождения в области скачка уплотнения, которые могут быть объяснены схемной диффузией.

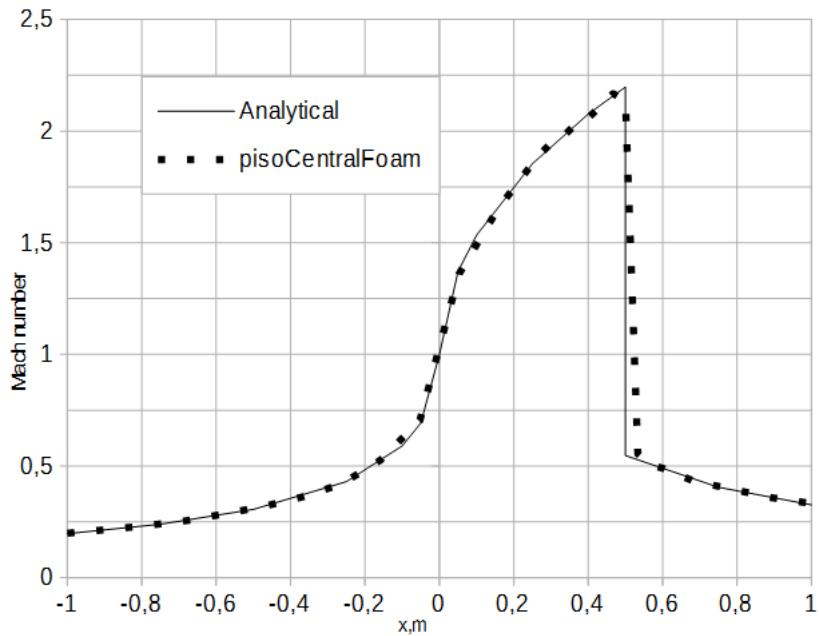


Рис. 3.19. Сравнение расчётного и теоретического распределений числа Маха по длине сопла.

## 3.2. Результаты моделирования несжимаемых течений

### 3.2.1. Дозвуковое течение ламинарного вязкого потока в канале круглого сечения (течение Пуазейля)

С помощью данного расчётного случая проверяется корректность воспроизведения диффузионных слагаемых в уравнении сохранения импульса (тензора вязких напряжений) при малых числах Маха. Поскольку для данного случая известно аналитическое решение, то можно оценить количественно разницу между точным и приближённым решениями. Для постановки задачи принимается, что число  $Re = 200$ , вязкость вычисляется из физических данных, задаваемых при постановке начальных и краевых условий.

Принимается, что граничные условия соответствуют нормальным условиям: скорость на входе  $U = 0,68369$  м/с; давление на выходе  $P = 101325$  Па; температура —  $25^{\circ}\text{C}$ ; газ — воздух. Профиль скорости на входе

в исследуемую область равномерный.

В соответствии с указанными параметрами среды задаются число Прандтля  $\text{Pr} = 0.73$ , динамическая вязкость  $\eta = 1.85 \cdot 10^{-5}$  Па · с, теплоемкость  $C_p = 1007$  Дж/кг/К, молярная масса  $\mu = 28.96$  г/моль.

Расчёчная область представляет собой сектор цилиндрического канала с длиной, существенно превышающей диаметр канала для получения ламинарного профиля на выходе. Для достижения заданного значения критерия  $\text{Re}$ , диаметр расчётной области выбирается равным 4.6 мм. Длина канала полагалась равной 161 мм. Расчёчная область разбивается на 23 отрезка по радиусу и 1610 отрезков по длине.

Результаты сравнения численного решения, полученного с помощью настоящей модели, на выходе из расчётной области с аналитическим решением (см. например [67, 62]) для ламинарного профиля представлены на рис. 3.20. Число Маха составляло 0.002. Расчёт вёлся с шагом по времени 30-40 мкс, что соответствует акустическому критерию Куранта примерно 1300.

Анализ сеточной сходимости приведён в разделе 3.5.1.

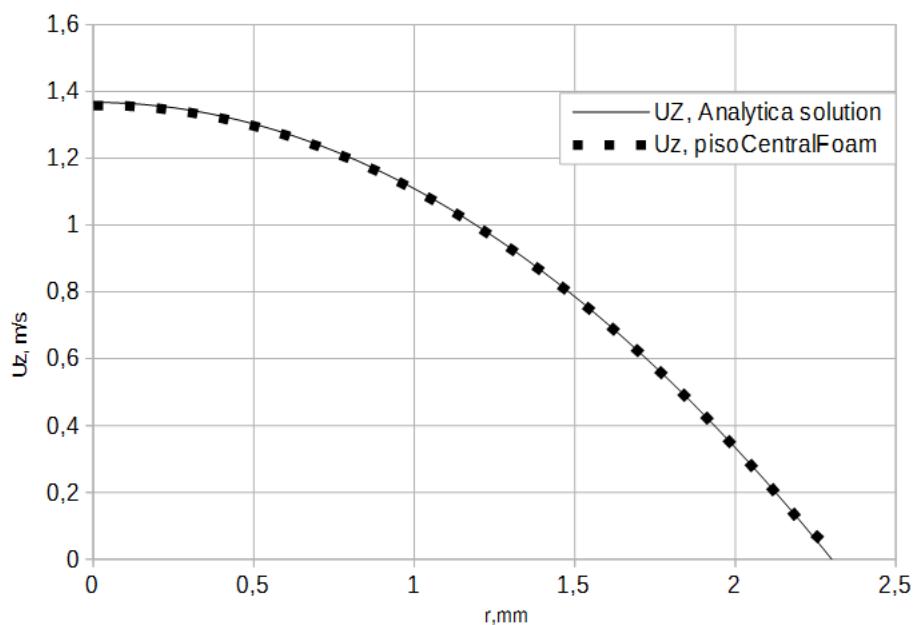


Рис. 3.20. Сравнение аналитического и расчётного распределений  $U_z$  по радиусу канала круглого сечения расчета.

### 3.2.2. Обтекание цилиндра

С помощью данного теста исследуется пригодность реализованной модели для моделирования дозвуковых течений для такого широко известно случая, как течение вокруг плохообтекаемых тел. Исследование проводится для двух случаев — ламинарного течения и турбулентного обтекания. Исследование последнего случая особенно важно в свете поставленной в работе цели обеспечения использования уже имеющейся в OpenFOAM библиотеки моделей турбулентности без её изменения.

#### 3.2.2.1. Обтекание цилиндра в ламинарном режиме

В случае ламинарного обтекания за основу берутся результаты расчётов, полученные в работе [68]. Сравнение проводится для двух значений числа Маха – меньше 0.1 и 0.3, которые соответствуют двум предельно допустимым случаям – “глубокий” дозвук (полностью несжимаемое течение) и сжимаемое течение. Число Re равно 100. В качестве давления и температуры выбираются близкие к нормальным условия – 101325 Па и 300 К соответственно, рабочая среда – воздух, молярная масса – 28.9 г/моль.

Таким образом, плотность среды при этих условиях будет равна 1.17 кг/м<sup>3</sup>, изобарная теплоемкость принимается равной 1004 Дж/кг/К, следовательно, показатель адиабаты равен 1.4. Скорость звука в среде  $c = 347.6 \text{ м/с}$ , динамическая вязкость среды взята равной 18.5 мкПа·с, число Прандтля  $Pr = 0.73$ . Диаметр цилиндра определяется по заданной скорости на входе и числу Re.

Приняв  $U = 10 \text{ м/с}$ , что соответствует числу Маха 0.029, получаем значение диаметра цилиндра 0.000157 м (0.157 мм). Приняв  $U = 100 \text{ м/с}$ , что соответствует числу Маха 0.29, получаем значение диаметра цилиндра 0.0157 мм.

В качестве интегрального критерия проверки правильности результатов расчёта выступало значение коэффициента сопротивления. В таблице

Таблица 3.4. Значения коэффициента лобового сопротивления цилиндра полученные различными методами [68]

Автор	Cd
pisoCentralFoam	1.37
ACL2008-4	1.365
Sharman 2005	1.33
Mene-01	1.37
Kang 2003	1.33
Ding 07	1.356

3.4 приведено сравнение коэффициентов сопротивления, полученных при помощи гибридного метода с другими численными и экспериментальными исследованиями, приведёнными в [68].

### 3.2.2.2. Обтекание цилиндра турбулентным потоком

Моделируется обтекание одиночного цилиндра (рис. 3.21), результаты сопоставляются с исследованием [69]. Помимо сопоставления с экспериментом, было выполнено сравнение с расчетом по несжимаемой и по сжимаемой дозвуковой моделям, имеющимся в OpenFOAM.

Рабочая среда – воздух, условия – близкие к нормальным (давление 101325 Па и температура 300 К), плотность –  $1.18 \text{ кг}/\text{м}^3$ , кинематическая вязкость –  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ , скорость звука – около 330 м/с. Скорость набегающего потока в экспериментах принималась близкой к 10 м/с, т.е. число Маха было меньше 0.1 – глубоко дозвуковое течение. В ходе экспериментов измерялось значение силы лобового сопротивления  $F_d$  по её значению рассчитывался коэффициент лобового сопротивления  $C_d$ .

На первом этапе моделирования для отладки модели расчёты проводились в несжимаемом приближении. Расчёт проводился до наступления установившегося режима течения. Турбулентность учитывалась с использованием модели  $k - \omega$  SST [63]. Были рассмотрены варианты расчётных сеток с низким разрешением вблизи поверхности цилиндра ( $y^+ \approx 100$ , расчёты проводились с использованием пристеночных функций), так и сеток

с высоким разрешением вблизи поверхности цилиндра ( $y^+ \approx 1$ , пристеночные функции не используются). По полученным результатам для дальнейшего исследования был выбран второй вариант сетки (см. рис. 3.22).

На границах расчётной области задавались следующие граничные условия:

- 1) на входе — значение скорости, интенсивности кинетической энергии, частоты диссипации кинетической энергии турбулентности и температуры (для сжимаемых случаев);
- 2) на выходе — значение давления;
- 3) на поверхности цилиндра — нулевое значение скорости (условие прилипания), пристеночная функция или нулевое значение для кинетической энергии турбулентности и её частоты диссипации;
- 4) на верхней и нижней границах расчётной области — условие проскальзывания.

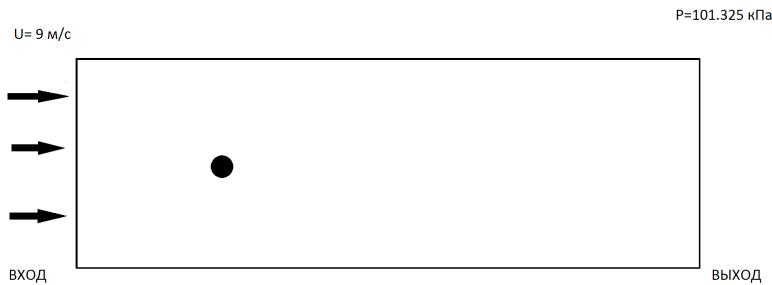
Внутри расчётной области в начальный момент времени температура и скорость задавались равными температуре и скорости на входе, давление — равным давлению на выходе.

При наступлении установившегося режима течения в расчётной области наблюдался периодический отрыв вихрей от поверхности цилиндра и образование за цилиндром вихревой дорожки (т. н. дорожки Кармана).

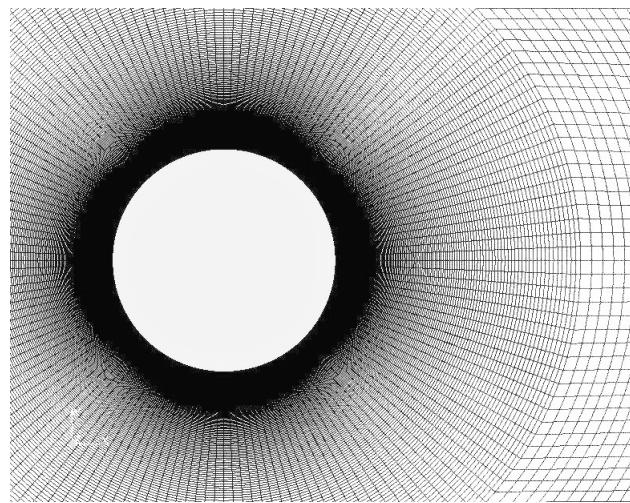
Вследствие отрыва вихрей значение коэффициента лобового сопротивления  $C_d$  колеблется во времени. Поэтому в качестве результатов рассматривалось усреднённое по времени значение  $C_d$  на интервале времени после наступления установившегося режима течения.

Моделирование проводилось для случая обтекания цилиндра с диаметром 12.22 см при числе Рейнольдса ( $Re$ ), равном  $7.3 \cdot 10^4$  (отсюда скорость набегающего потока  $U = 9$  м/с). Интенсивность кинетической энергии турбулентности в эксперименте изменялась путем установки на входе

решеток с разной формой и размером ячеек и составляла в рассмотренном случае 0.7 % (рис. 3.23). Результирующее значение  $C_d$  в эксперименте составило 1.22.



*Рис. 3.21. Постановка задачи и схематическое изображение расчетной области. Размеры расчётной области превышали диаметр цилиндра в десятки раз в вертикальном и горизонтальном направлениях.*



*Рис. 3.22. Расчётная сетка.*

На втором этапе были проведены расчеты с помощью гибридного метода. Расчеты проводились на сетке с  $y^+ \approx 0.8$ , пристеночные функции не использовались. Результаты сравнения эксперимента, расчёта несжимаемым решателем `pimpleFoam`, стандартным сжимаемым решателем `rhoPimpleFoam`, а также разработанным в данной работе решателем `pisoCentralFoam` приведены в табл. 3.5.

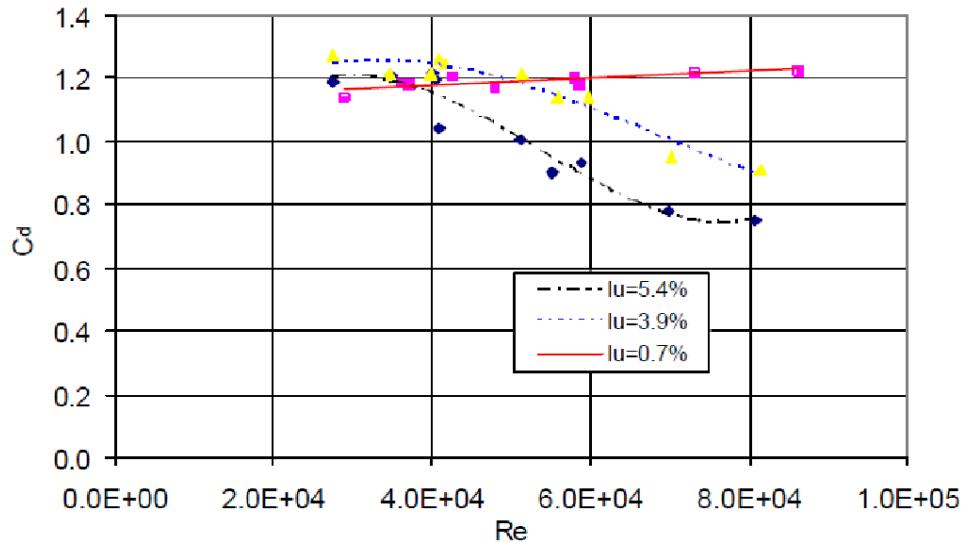


Рис. 3.23. Экспериментальные данные по обтеканию одиночного цилиндра.

Используются следующие обозначения:

- pimpleFoam — моделирование течения несжимаемой среды при помощи алгоритма PIMPLE;
- pisoCentralFoam — гибридный метод моделирования;
- rhoPimpleFoam — стандартный метод PISO моделирования слабосжимаемых сред.

Таблица 3.5. Результаты расчетов коэффициента лобового цилиндар в турбулентном режиме с помощью различных моделей

№	Модель	Значение $C_d$
1	Эксперимент	1.22
2	pimpleFoam	1.15
3	pisoCentralFoam	1.07
4	rhoPimpleFoam	1.12

Результаты показывают принципиальную возможность подключения стандартных библиотек OpenFOAM к разработанному решателю. Экспериментальный разброс значений коэффициента лобового сопротивления существенно больше разброса, полученного численным способом.

### 3.2.3. Течение струй газов со смешением

Предложенный гибридный метод был расширен на случай движения многокомпонентной смеси совершенных газов (см. раздел 1.1.3).

Данный подход был реализован в виде отдельного решателя OpenFOAM (см. раздел 2.1.3) и протестирован на простейшей задаче ламинарного смешения двух газов. Для сравнения были взяты результаты расчётов полученные с помощью схемы AUSM [70].

В данном случае рассматривается смешение двух различных газов, текущих в 2D канале (см. рис. 3.24). Свойства газа в верхней струе соответствуют азоту ( $N_2$ ) текущему со скоростью 0.1 м/с, нижней струи — водороду ( $H_2$ ) текущему со скоростью 0.3 м/с. Длина расчётной области составляет 1.2 м, высота — 0.16 м. Давление на выходе — 100 кПа, температура обеих струй на входе 300 К. Моделирование производится до достижения стационарного состояния.

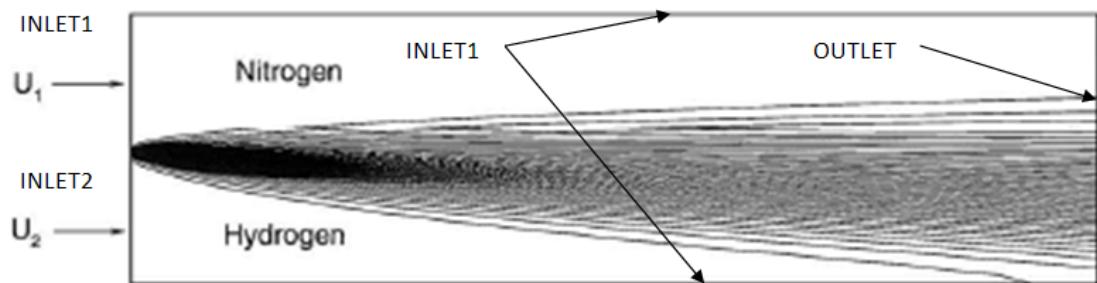
Физические свойства сред были взяты следующими:

- Азот  $N_2$ : молярная масса 28 г/моль, удельная изобарная теплоёмкость 1040 Дж/кг/К, число Прандтля 0.73, динамическая вязкость 17 мкПа·с, коэффициент теплопроводности 0.026 Вт/м/К.
- Водород  $H_2$ : молярная масса 2 г/моль, удельная изобарная теплоёмкость 15000 Дж/кг/К, число Прандтля 0.73, динамическая вязкость 8.9 мкПа·с, коэффициент теплопроводности 0.172 Вт/м/К.

Описание граничных условий и их типы приведены в таблице 3.6. Расчёты сравнивались с результатами моделирования с помощью схемы AUSM, представленными в [70]. Распределения плотности смеси и скорости смеси построены на расстоянии 0.7 м от входа в расчётную область и представлены на рис. 3.25.

Анализ распределения полей плотности и скорости на рис. 3.25 показывает отсутствие осцилляций при смешении двух компонент движущихся

с разной скоростью и близость полученного решения к схеме AUSM. Таким образом, по крайней мере в стационарном приближении схема обеспечивает отсутствие осцилляций для многокомпонентных дозвуковых течений. Перетокки энергии, не обусловленные постановкой задачи, также отсутствуют.



$$U_1 = 0.1 \text{ m/s}, U_2 = 0.3 \text{ m/s}$$

*Рис. 3.24. Схема течения в рассматриваемой задаче о смешении двух газов.*

*Таблица 3.6. Границные условия*

Поле	Вход азота (inlet1)	Вход водорода (inlet2)	Выход смеси (outlet)	Стенки (walls)
Давление, Pa	Условие по- стоянного потока	Условие по- стоянного потока	Полное давление 100кПа	Условие непрони- цаемо- сти
Массовая доля, N <sub>2</sub>	Фиксирован- ное значение, 1	Фиксирован- ное значение, 0	Условие свободного выхода	Условие непро- ницае- мости компо- ненты
Массовая доля, H <sub>2</sub>	Фиксирован- ное значение, 0	Фиксирован- ное значение, 1	Условие свободного выхода	Условие непро- ницае- мости компо- ненты
Скорость среды/ком- поненты, m/s	Фиксирован- ное значение, 0.1	Фиксирован- ное значение, 0.3	Условие свободного выхода	Условие про- скальзы- вания
Температура среды/ком- поненты, K	Фиксирован- ное значение, 300	Фиксирован- ное значение, 300	Условие свободного выхода	Условие адиаба- тично- сти

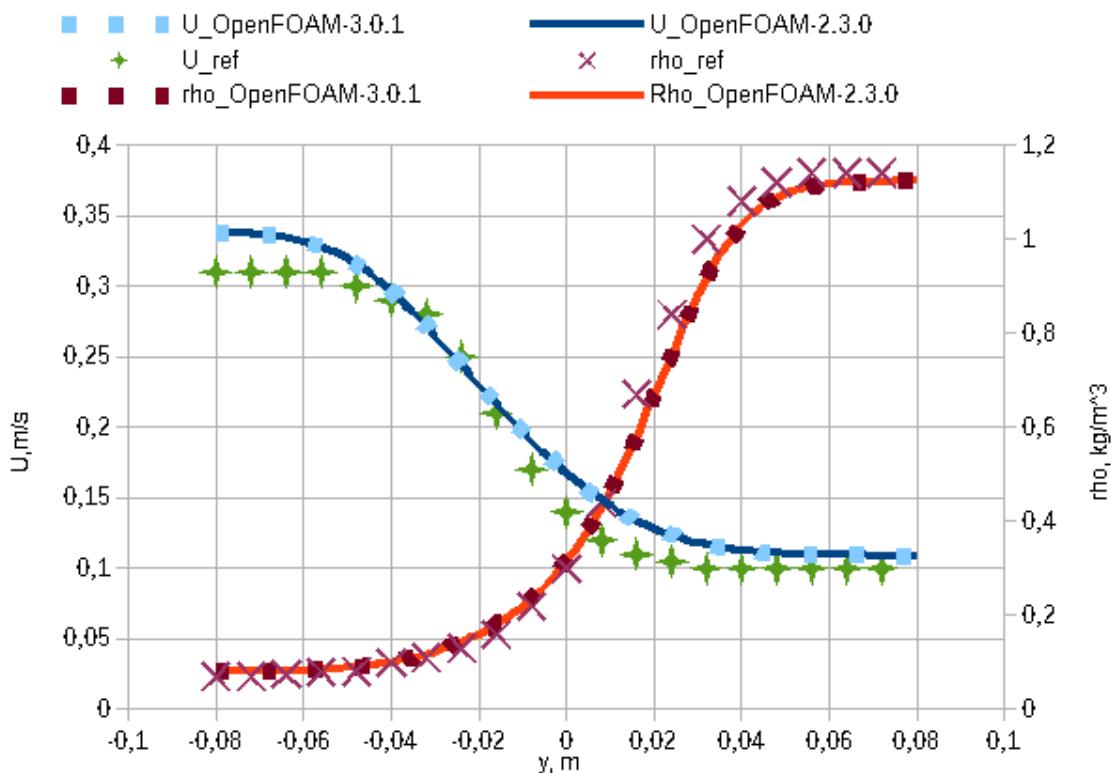


Рис. 3.25. Сравнение распределения плотности (ось справа) и скорости смеси (ось слева), полученные для задачи смешения струй различными методами и в различных пакетах ( $U_{\text{OpenFOAM-3.0.1}}$  — скорость смеси, гибридный метод, OFv3.0.1,  $U_{\text{OpenFOAM-2.3.0}}$  — скорость смеси, гибридный метод OFv2.3.0,  $U_{\text{ref}}$  — скорость смеси, AUSM,  $\rho_{\text{OpenFOAM-3.0.1}}$  — плотность смеси, гибридный метод, OFv3.0.1,  $\rho_{\text{OpenFOAM-2.3.0}}$  — плотность смеси, гибридный метод OFv2.3.0,  $\rho_{\text{ref}}$  — плотность смеси, AUSM).

### 3.3. Моделирование распространения акустических волн

Одним из важных отличий методов, относящихся к классу решения задачи о распаде разрыва (или схожих с ними), от методов расщепления является возможность непосредственного учёта распространения акустических волн. Методы второго типа либо «размазывают» решение, теряя информацию, либо порождают численные осцилляции.

Тестирование гибридного метода на задачах о распространении акустических возмущений позволяет определить степень его пригодности для решения подобных задач, или, иными словами — «близость» свойств метода к «исходному» методу Курганова — Тадмора в акустическом диапазоне. Кроме того, тестирование позволит качественно «оценить» дисперсионные и диссипативные свойства схемы [71]. Для тестирования были отобраны два случая с аналитическим решения однородного волнового уравнения, соответствующие монополю и диполю [72].

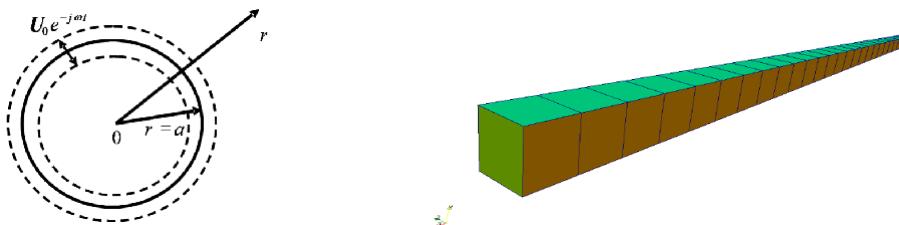
#### 3.3.1. Моделирование акустических волн, порождаемых пульсирующей сферой

В первом случае рассматриваются колебания плотности (давления) среды, производимые изменением радиуса сферы по гармоническому закону, см. рис. 3.26а. Акустическое давление, возникающее в этом случае, вычисляется согласно следующему закону [73]:

$$p(r, t) = \frac{A}{r} e^{-j(\omega t - kr)}$$

где амплитуда вычисляется как

$$A = \rho_0 c U_0 a e^{-jka}$$



(a) Схема излучения акустических волн монополем "дышащая" сфера  
 (b) Расчётная схема для моделирования монополя

Рис. 3.26. Принципиальная схема и расчётная сетка монополя

при условии совпадения направления излучения с радиус-вектором наблюдателя.

Для построения расчётной модели была сформирована область, включающая в себя сегмент поверхности сферы, представляющий собой телесный угол. На «узкой» стороне сегмента задавалась скорость движения поверхности сферы, на противоположной стороне – условие свободного распространения волны. На остальных гранях – условие симметрии, см рис. 3.26б. Далее в расчётной области (см рис. 3.26а и 3.26б) выбиралась точка, в которой сравнивалась динамика пульсации давления с аналитическим выражением. Константы среды и параметры движения выбирались следующими:  $U = 5 \text{ м/с}$ ;  $\rho_0 = 1.2922 \text{ кг/м}^3$ ;  $c = 330.7 \text{ м/с}$ ;  $a = 0.1 \text{ м}$ ;  $\omega = 1000 \text{ рад/с}$ .

Необходимо понимать, что аналитическое решение было получено для распространения акустических волн в стоячей среде (однородное волновое уравнение), в то время как численное решение получено для уравнений Эйлера. Это означает, что между двумя решениями должен присутствовать сдвиг по времени и, значит, для их корректного сравнения требуется совместить оба временных ряда данных. Различие между аналитической и расчётной временными зависимостями обусловлено первым периодом колебаний, на котором численная модель вынуждена преодолевать «начальную инерцию» среды.

Было определено, что диссипативные и дисперсионные свойства схемы становятся пренебрежимо малыми при использовании более чем 20 яче-

ек на длину волны и акустическом числе Куранта меньшем 0,5. В этих условиях решение стремится к аналитическому, см. рис. 3.27.

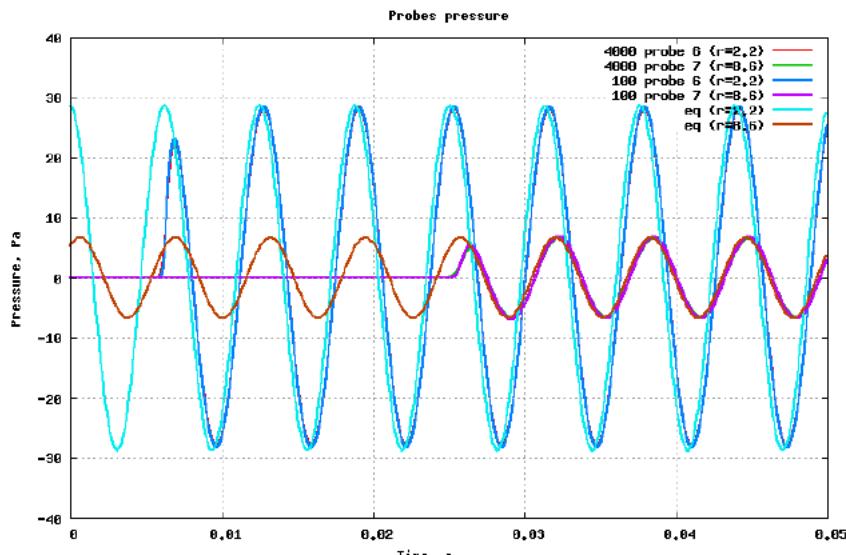


Рис. 3.27. Сравнение аналитического и численного решения в различных точках и с различным сеточным разрешением для случая пульсирующей сферы

### 3.3.2. Моделирование акустических волн, порождаемых колеблющейся сферой

Второй тест является расширением предыдущего на трёхмерный случай (см. рис. 3.28а). Расчётная область представляет собой «дольку» шара, из центра которой вырезан шар малого диаметра. На поверхности последней задан гармонический закон колебаний вдоль выбранной оси, на внешней поверхности, находящейся вдали от сферы, — условие свободного распространения волны. Результаты сравнения представлены на рис. 3.29, качественная картина распространения волн дана на рис. 3.28б. Как видно из рисунка, присутствует расхождение по фазе между численным и аналитическим решением, которое как и в первом случае объясняется начальными условиями и соответствующим им начальным возмущением.

Хорошее совпадение с аналитическим решением при задании соответствующего сеточного разрешения, выбранного на основе выводов из предыдущего раздела, позволяет говорить о принципиальной возможно-

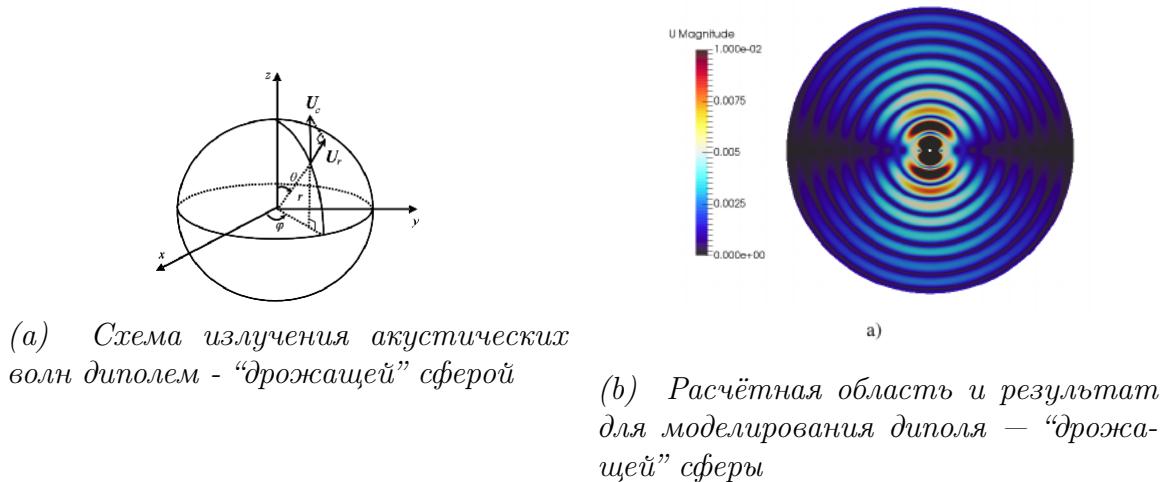


Рис. 3.28. Принципиальная схема и расчётная сетка диполя

сти прогнозирования погрешности численной схемы в зависимости от шага по пространству и времени. Данное свойство является критическим при использовании что в промышленных приложениях.

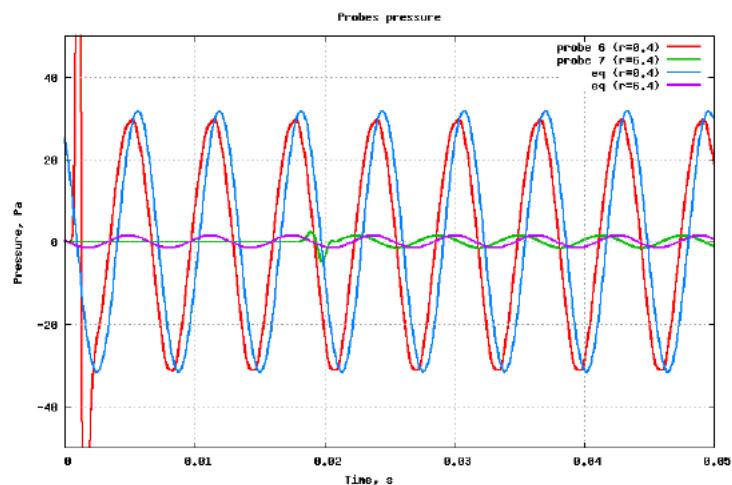
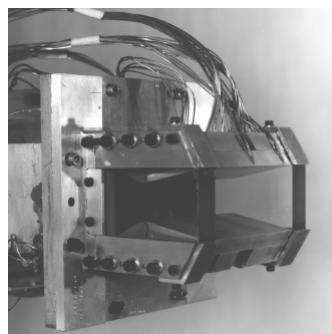


Рис. 3.29. Сравнение аналитического и численного решения в различных точках для случая "дрожащей" сферы.

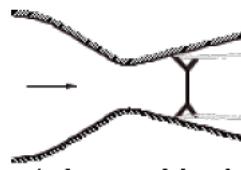
## 3.4. Промышленные верификационные и модельные задачи

### 3.4.1. Истечение струи газа из сверхзвукового сопла

Объектом исследования в данном расчётном случае является плоское двумерное сверхзвуковое сопло [74, 75], истечение через которое детально исследовалось как экспериментальным, так и расчётным способом в NASA, см. рис. 3.30а и 3.30б. Коэффициент расширения сопла (отношение площади выходного сечения к критическому) составляет 1.797, проектное отношение давления – 8.78. Эксперименты показали, что при отношении давлений меньше проектного, поток перерасширен и подвержен неустойчивым срывам пограничного слоя, сопровождающим образованием ударных волн.



(a) Сопло NASA



(b) Схематическое изображение перерасширенного сопла с отрывом

Рис. 3.30. Геометрия и схематическое изображение моделируемого сопла

Исследуемой средой является сухой воздух при температуре  $T = 300$  К. Физические свойства следующие – число Прандтля 0.7, динамическая вязкость  $\eta = 18.27$  мкПа·с, удельная изобарная теплоёмкость  $C_p = 1005$  Дж/кг/К, молярная масса  $\mu = 28.96$  г/моль, коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0.024$  Вт/м/К.

Были построены сетки трёх типов:

- двумерная четырёхугольная сетка, порядка 200 тысяч элементов;
- двумерная треугольная сетка, порядка 800 тысяч элементов;

- трёхменная тетраэдralная сетка, порядка 5500 тысяч элементов.

Расчётная область включала в себя верхнюю часть сопла (рассматривалось симметричное течение) и объём на выходе. Сеточное расширение выбиралось равномерным. Турбулентные свойства течения воспроизводились с помощью  $k - \omega SST$  [63] модели и пристеночных функций, величина  $y^+$  не превышала 3. В качестве граничных условий задавались полное давление и температура на входе в расчётную область и полное давление на выходе. Для моделирования выбран режим с отношением давлений 5.02.

Для учёта смены режима на выходной границе применялось смешанное граничное условие – если число Маха в прилегающих ячейках было равно или превышало 1, то задавалось условие свободного выхода, иначе – полное давление среды на бесконечности. Расположение и обозначение граничных условий показано на рис. 3.31, описание граничных условий дано в табл. 3.7.

Качественная картина течения показана на рис. 3.32 для двух различных типов сетки (четырёхугольная и треугольная). Сравнение расчётных данных [74] с гибридным методом показано на 3.33, сравнение расчётных и экспериментальных данных [75] показано на рис. 3.34.

Сопоставление экспериментальных и расчётных данных показывает их хорошую согласованность для сеток трёх разных типов, что позволяет говорить о наличии сеточной сходимости. Положительным аспектом является «схожесть» картин течения, полученных на четырёхугольной и треугольной сетках с примерно одинаковой длиной рёбер, позволяет надеяться на слабую зависимость получаемого результата от топологии расчётных сеток.

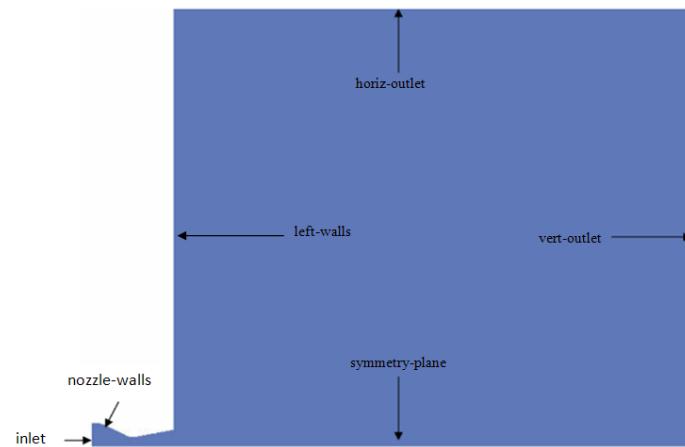


Рис. 3.31. Расчётная область модели сопла

Таблица 3.7. Список граничных условий

Граница / поле	P, Па	U, м/с	T, К	k, Дж/кг	$\omega, ^{-1}$
inlet	Полное давление, 101325 Па	Условие свободного входа	294.44	Интенсивность турбулентности	Турбулентная длина смешения
nozzle-walls	Условие непроницаемости	Условие прилипания	Условие адиабатичности	Пристеночная функция	Пристеночная функция
symmetry-plane	Условие симметрии	Условие симметрии	Условие симметрии	Условие симметрии	Условие симметрии
vert-outlet	Условие свободного выхода или полное давление	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода
horiz-outlet	Условие свободного выхода или полное давление	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода	Условие свободного выхода
left-walls	Условие непроницаемости	Условие прилипания	Условие адиабатичности	Пристеночная функция	Пристеночная функция

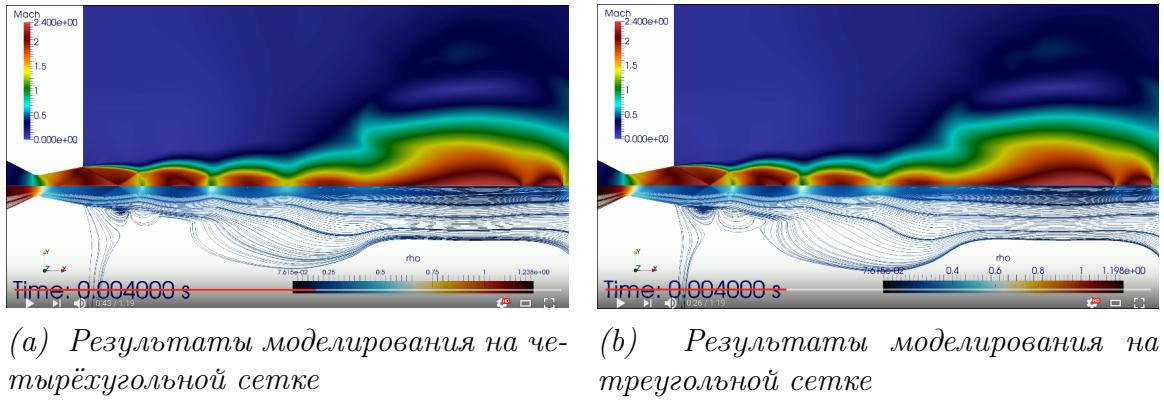


Рис. 3.32. Мгновенное поле числа Маха и линии тока, раскрашенные по полю плотности

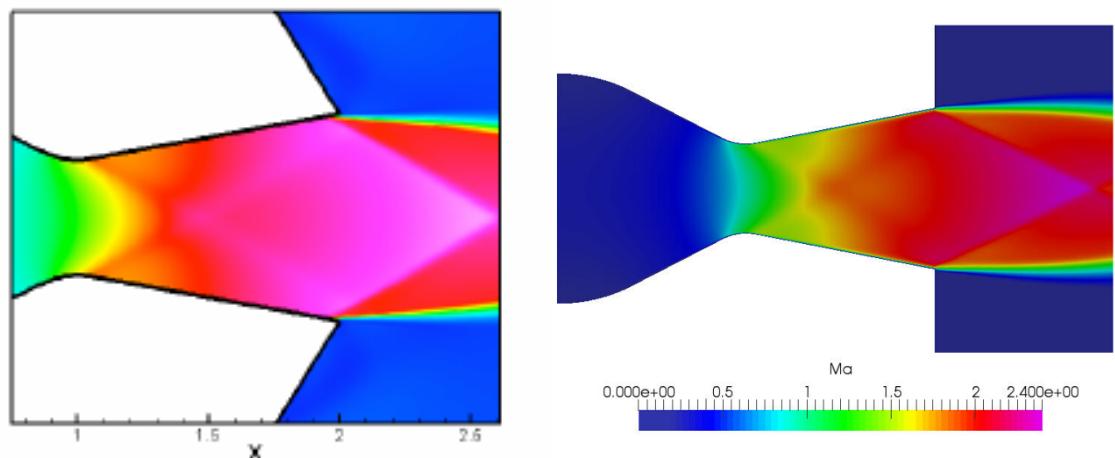


Рис. 3.33. Сравнение визуализации числа Маха в сопле, полученной численным методом в [74] (слева), и в настоящей работе (справа)

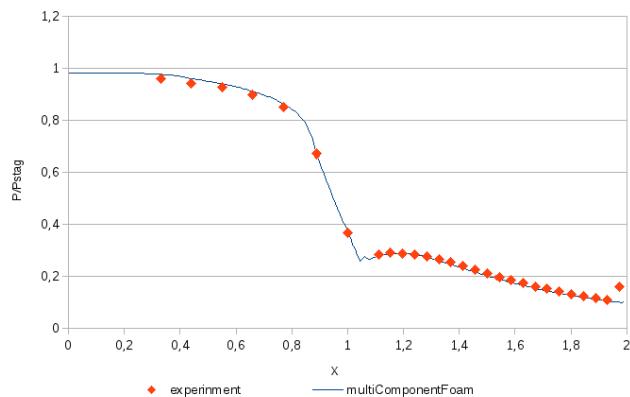


Рис. 3.34. Сравнение экспериментального (ромбы) и расчётного (линия) распределения давления по стенке сопла

### 3.4.2. Истечение квазиравновесной расширяющейся струи плазмы в область низкого давления

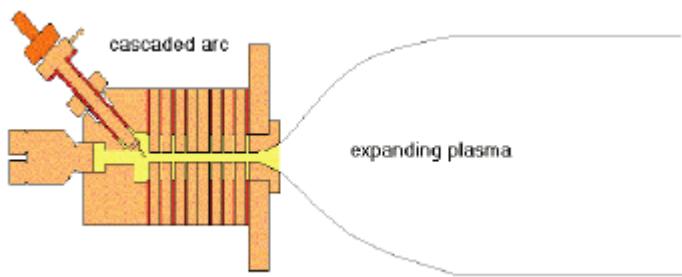
Одним из важных приложений, в которых гибридный метод может оказаться эффективным, является моделирование механики плазмы. Этот тип течений характеризуется большими градиентами плотности, скорости, давления и температуры как в пространстве, так и во времени (пульсации). Впрочем, даже в случае стационарных задач эти течения характеризуются экстремально широкими диапазонами изменения термодинамических параметров — в сотни и тысячи раз, что, несомненно, является «вызовом» для численных методов.

Для тестирования гибридного метода был взяты результаты эксперимента и соответствующих расчётов [76, 77], выполненных средствами коммерческого пакета Fluent. Данный эксперимент проводился в университете г. Эйндховен и позволяет оценить применимость приближения сплошной среды для указанного класса задач.

Опуская подробности формирования высокотемпературной плазмы, отметим, что расчётная область представляет собой цилиндрический канал малого сечения, который расширяется в цилиндрический канал широкого сечения, заканчивающийся цилиндрической щелью, так что в разрезе стенки широкой части образуют «уступ» (рис. 3.35).

В канал малого сечения поступает горячая плазма аргона ( $\text{Ar}$ ) при  $M = 1$ , которая, переходя в канал большого сечения, расширяется до давления 20-100 Па и, огибая уступ, проходит к выходу. Для сравнения с расчётом из эксперимента доступны данные по распределению скоростей и температуры вдоль оси канала. Диаметр последнего участка перед расширением составляет 6 мм, его длина 10 мм, из которых последние 5 мм приходятся на конический раструб с углом раствора  $45^0$ , так что диаметр канала перед областью свободного течения 16 мм Согласно постановке задачи [76] известны температура газа плазмы (9283 К, или 0.8 эВ), число Маха ( $M$

= 1) и расход — 3 SLM. Исходя из этих параметров вычисляется скорость потока на входе и давление.



*Рис. 3.35. Схематическое описание установки для генерации плазмы*

Качественная картина течения (поле плотности) приведена на рис. 3.36. Сравнение экспериментальных и расчётных картин течения показано на рисунках 3.37, 3.38, 3.39 3.40.

Данная задача решалась в стационарной постановке, что позволило сэкономить время вычислений в несколько раз для такого относительно сложного случая с изменением температуры и давления в 10 и 100 раз. Результаты расчётов показывают в первую очередь хорошее совпадение с математической моделью, заложенной в коммерческий пакет Fluent.

Кроме того, видно хорошее качественное совпадение с экспериментальными данными для случая с внешним давлением 100Па — наличие “горба” в профиле температуры и “полки” в профиле скорости.

При этом расхождение с экспериментальными данными можно объяснить не только некорректностью выбора предположения о сплошности среды, но и граничными условиями, неопределённость которых связана с погрешностью экспериментальных данных. Последняя же составляет порядка 10 % по согласно оценке авторов эксперимента.

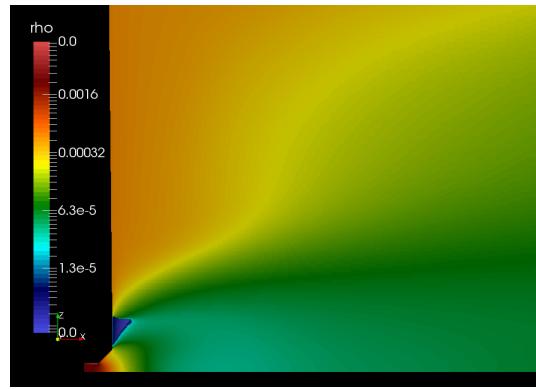


Рис. 3.36. Поле плотности (в логарифмическом масштабе) плазмы Ar при стационарном расширении в вакуум 20 Па

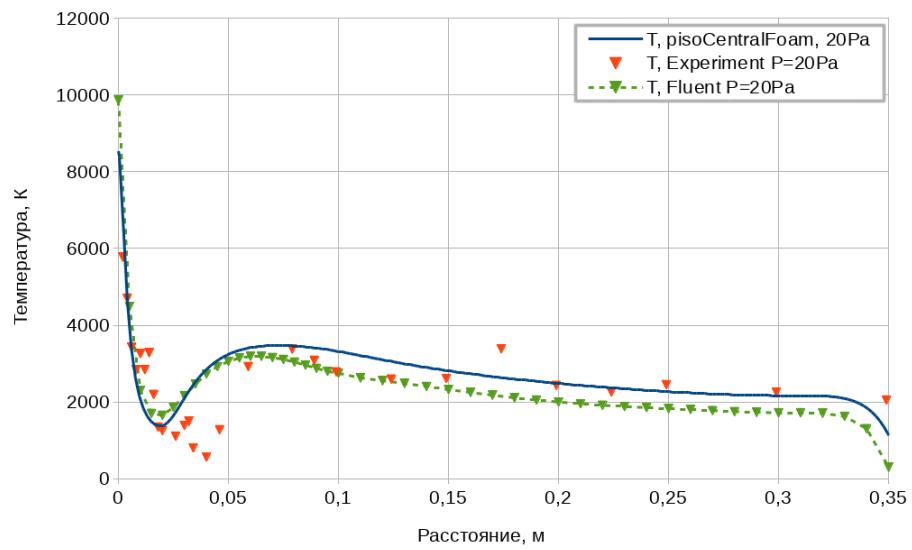


Рис. 3.37. Поле температуры при давлении на выходе 20 Па

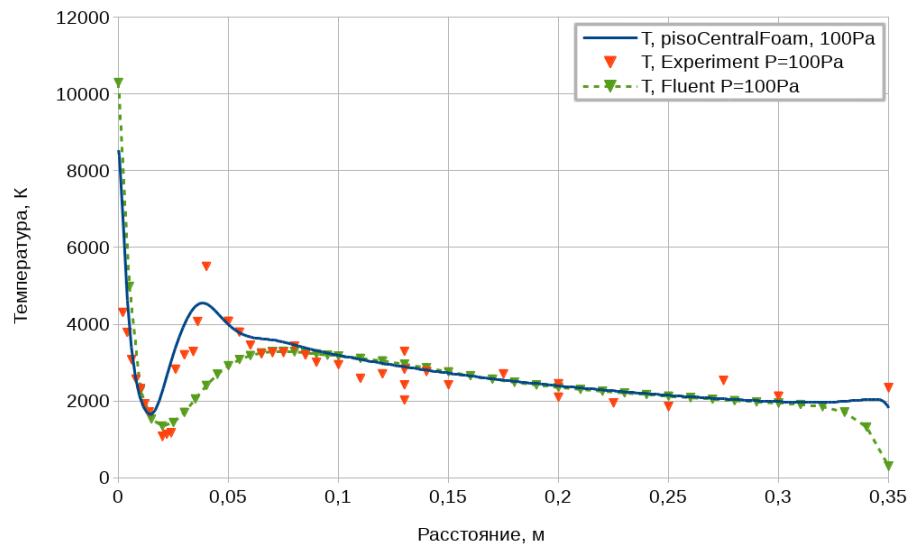


Рис. 3.38. Поле температуры при давлении на выходе 100 Па

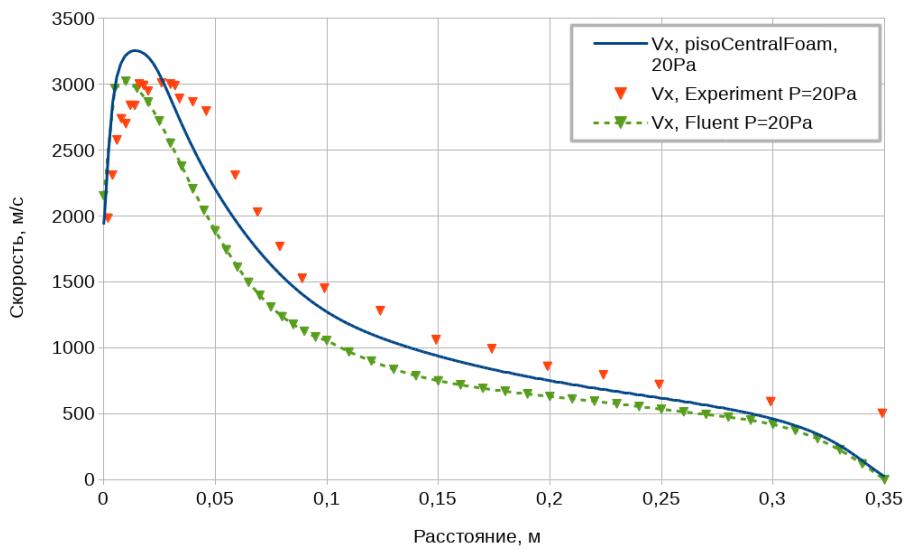


Рис. 3.39. Поле скорости при давлении на выходе 20 Па

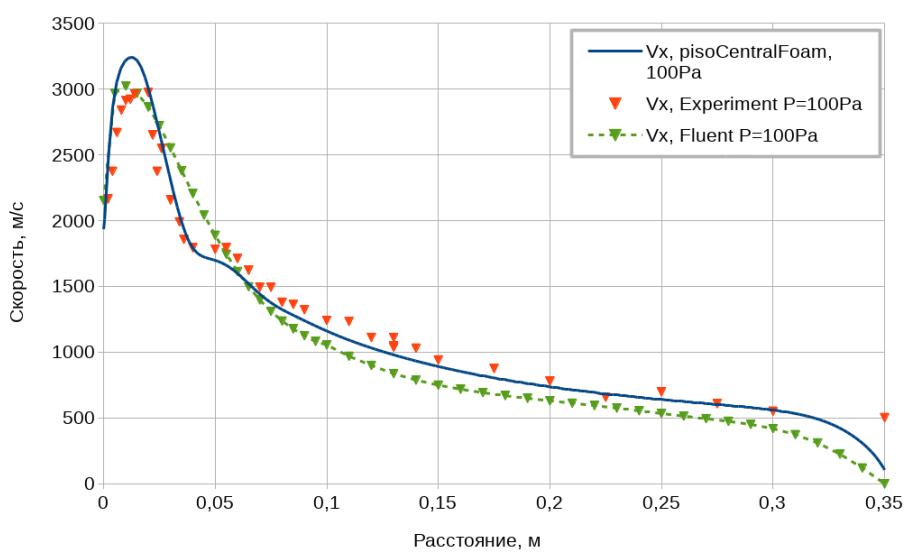


Рис. 3.40. Поле скорости при давлении на выходе 100 Па

### 3.4.3. Моделирование системы генерации газа подушки безопасности

Данная работа выполнялась с целью качественной оценки пригодности разработанного метода для решения стационарных задач, характеризуемых высокими значениями числа Маха и для исследования масштабируемости алгоритма на задачах промышленного класса.

В качестве объекта исследования выступает модель системы генерации газа, использовавшаяся для исследования структуры течения при сверхзвуковом расширении газа, используемого для надувания подушек безопасности.

Для воспроизведения характерных сверхзвуковых свободных струй модель газогенератора была помещена в специальный герметичный корпус (рис. 3.41) и прифланцевана к устройству подачи сжатого воздуха гиперзвукового канала H2K DLR Института аэродинамики и гидромеханики (г. Кёльн). Типовой газогенератор состоит из двух полых цилиндров, находящихся друг в друге, так что между цилиндрами возникает кольцевой зазор. Через внутренний цилиндр сжатый воздух направляется через центральное отверстие (глухое окно) в кольцевой зазор. Там воздух распределяется по периметру и выходит из цилиндра большего диаметра через набор отверстий, выточенных в обечайке, в форме расширяющихся сверхзвуковых свободных струй (см. рис. 3.42).

При реальном применении свободные струи ответственны за правильное раскрытие самой подушки безопасности во время аварии. Воздушный мешок для исследования потоков не использовался с целью обеспечения оптической доступности исследуемой области и стационарного режима движения потоков. В данной опытной установке поток свободных струй выводился через герметичный корпус и вытяжной канал H2K. Отверстия равномерно располагались четырьмя симметричными рядами по 10 отверстий в каждом ряду по периметру внешнего цилиндра. Описание системы изме-

рения поля скорости методом PIV представлено в [78, 79].

Численное моделирование выполнялось средствами пакета STAR CD с параметрами близкими к реальным в работе [80].

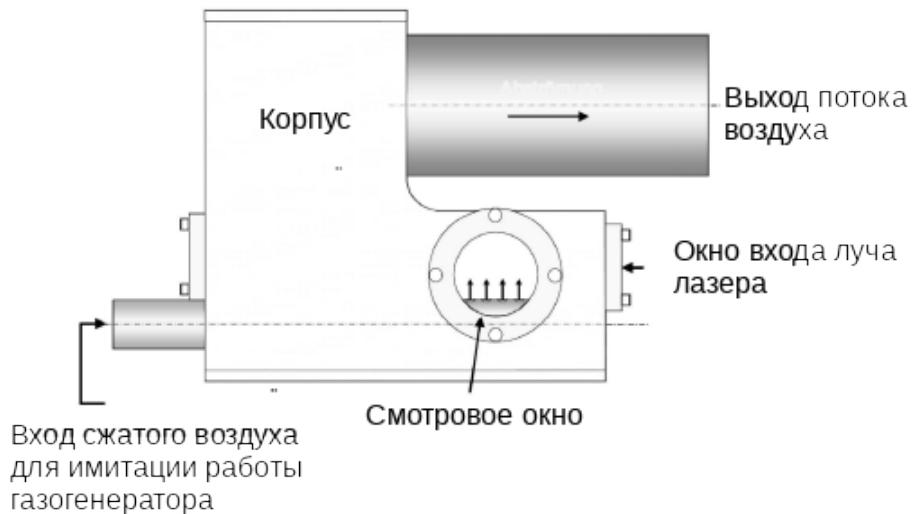


Рис. 3.41. Принципиальная схема экспериментальной установки PIV и размещения в ней исследуемого участка системы генерации газа подушек безопасности

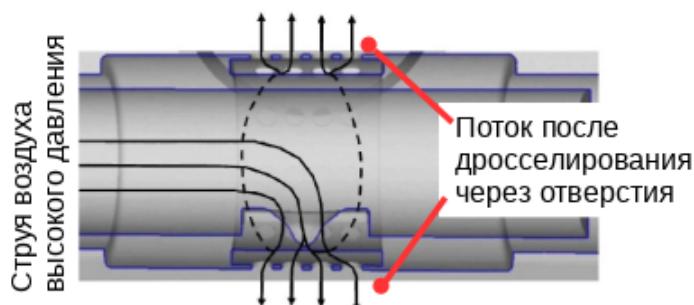
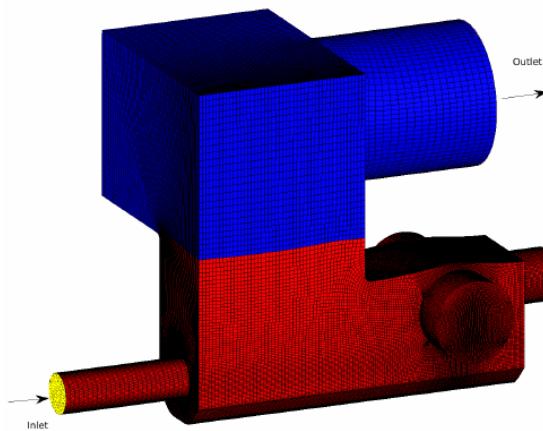


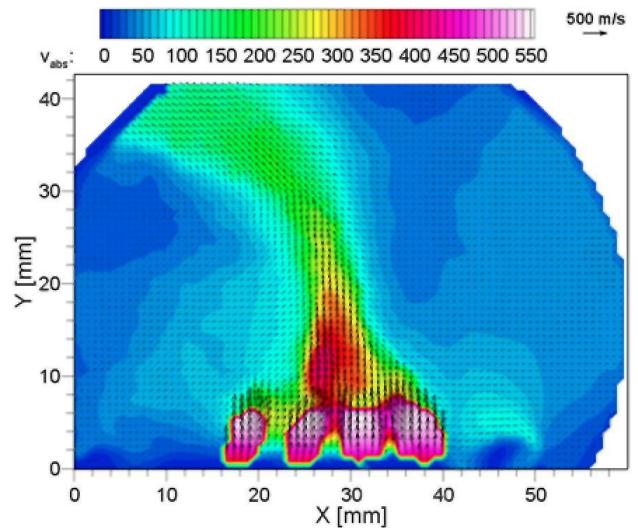
Рис. 3.42. Схема течения потока газа в рассматриваемом участке системы генерации газа подушек безопасности

Расчётная сетка представлена на рис. 3.43. Расчёты проводились для случая стационарного течения с давлением 20 бар и температурой 350 К перед дросселирующими отверстиями и давлением на бесконечности - 1 бар. Экспериментально измеренное мгновенное и усреднённое по времени распределения скоростей показаны на рисунках 3.44 и 3.45. Расчётоное поле скорости, полученное с помощью пакета StarCD, [78] — на рис. 3.46, результаты моделирования с помощью стационарной версии гибридного метода (OpenFOAM) показаны на рис. 3.47.

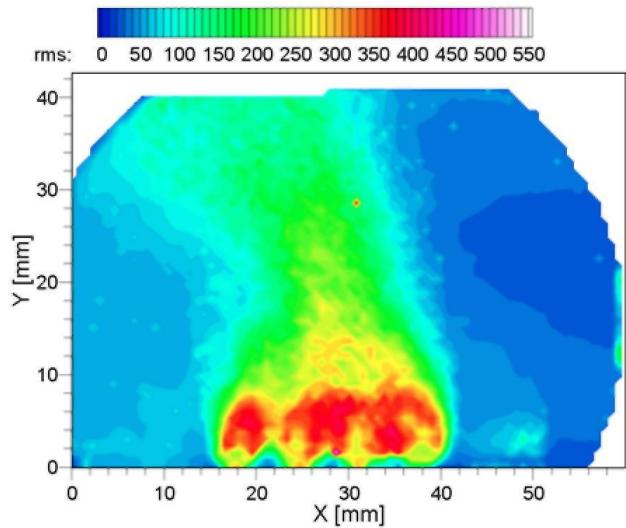
Даже несмотря на достаточно неточное описание постановки задачи, данное в [78], можно говорить об удовлетворительном качественном соответствии результатов расчётов, полученных по моделям StarCD и OpenFOAM (реализация гибридного метода). Кроме того, сравнивались результаты нестационарного моделирования для постановки задачи, описанной в [80]. Сравнение показало хорошее качественное совпадение распределения числа Маха в сечении расчётной области, полученного различными методами.



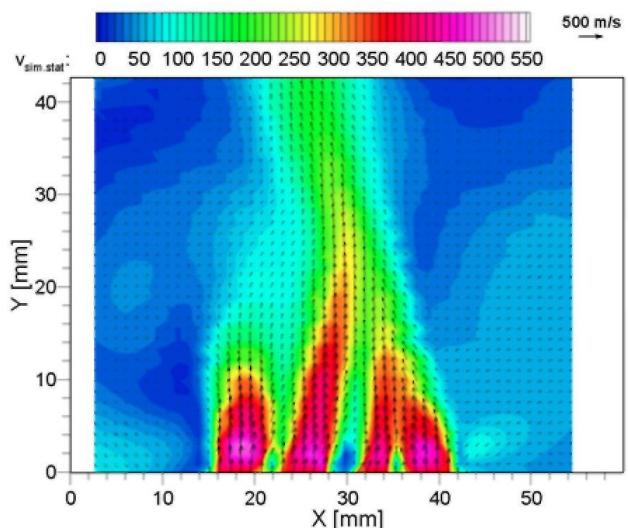
*Рис. 3.43. Расчётная сетка моделируемой области системы генерации газа подушки безопасности*



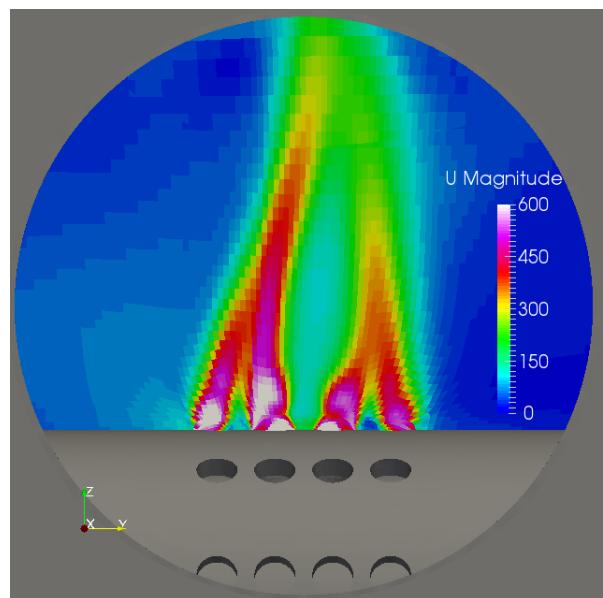
*Рис. 3.44. Мгновенное экспериментально измеренное поле скоростей в модели генератора газа подушки безопасности*



*Рис. 3.45. Усреднённое по времени экспериментально измеренное поле скоростей в модели генератора газа подушки безопасности*



*Рис. 3.46. Расчётное мгновенное поле скоростей вычисленное с помощью пакета StarCD*



*Рис. 3.47. Расчётное усреднённое поле скоростей вычисленное с помощью OpenFOAM (реализация гибридного метода)*

### 3.4.4. Моделирование течения в высокоскоростном компрессоре

Гибридный метод также был доработан для моделирования течений в устройствах с подвижными частями. Использование стандартного алгоритма PISO позволило выполнить процедуру интегрирования уравнений на подвижной сетке аналогично имеющимся в OpenFOAM моделям [56]. Реализованный метод был валидирован на стандартном тесте ERCOFTAC, см. [81, 82]. На рис. 3.48b, представлены результаты сравнения разработанного метода, стандартной модели OpenFOAM и эксперимента для обезразмеренного давления в радиальном зазоре компрессора (рис. 3.48a).

Тестирование модели на задаче ERCOFTAC позволяет говорить о качественно удовлетворительном совпадении результатов расчётов и эксперимента. При этом наблюдающиеся различия могут быть связаны с рядом причин, которые требуют рассмотрения в отдельном исследовании - «трёхмерность» течения, влияние «модельного» числа Маха на расчёт, выбор модели турбулентности и пр.

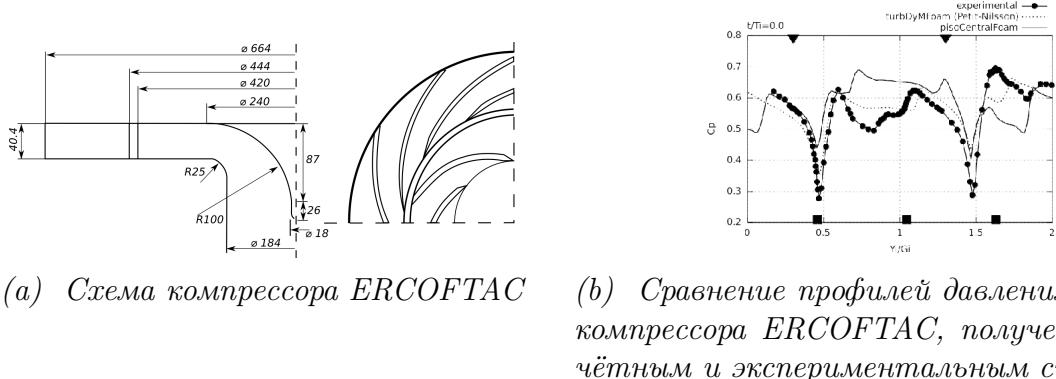


Рис. 3.48. К валидации гибридного метода на тесте базы данных ERCOFTAC для случая решения задач моделирования течений в центробежных компрессорах

Далее с использованием гибридного метода было исследовано течение и интегральные характеристики высокоскоростного микрокомпрессора [83], конструкция которого представлена на рис. 3.49. С целью оценки применимости гибридного метода для решений задач турбомашиностроения,

на рабочей характеристике компрессора (см. рис. 3.50) была выбрана точка с известными экспериментальными параметрами (см. 3.8), в которой были получены поля газодинамических величин в проточной части — давления, плотности, температуры и скорости.

По известным газодинамическим полям были рассчитаны мощность, снимаемая с вала, и коэффициент повышения давления. Величина коэффициента повышения давления была сопоставлена с характеристикой для трёх вариантов сеточного разрешения (см. табл. 3.9). Получено что с увеличением плотности сетки расчётная характеристика стремится к проектной.

С целью более детального анализа были использованы статистический метод ортогональной декомпозиции (ОД), позволяющий выделять характерные пространственные моды и временные частоты в распределениях нестационарных полей газодинамических величин. POD и схожие статистические методы анализа, являются аналогами модальных методов анализа конструкций, применяемых для выявления собственных форм и частот колебаний конструкций [84, 85, 86]. Совместное использование таких статистических методов анализа для конструкций и проточных частей позволит проектировать конструкции так, чтобы избегать возникновения резонансных явлений и связанных с ними разрушений.

С другой стороны, эти методы могут использоваться для тестирования численных схем — если для заданного течения заранее известны моды и соответствующие им частоты, то их отсутствие может вполне сигнализировать о недостаточном качестве численной схемы.

В работе использовалась реализация алгоритма POD, выполненная в Институте Системного Программирования РАН с применением фреймворка Apache Spark, вычисления проводились на специальном оборудовании, оптимизированном для данного типа вычислений [87].

Анализ мод течения в модели компрессора показал наличие характерных частот, соответствующих лопаточным частотам ротора и статора — моды № 0, № 5 и № 7 или оборотным частотам, моды № 1 и № 3 (рис. 3.51 и

3.52, 3.53. Визуализация соответствующих мод показана на рис. 3.52 и 3.53 для мод № 0 и № 3 соответственно. Статистический анализ показывает, что даже на относительно грубой сетке основные частоты, характерные для данного типа машин, — оборотная, лопаточная импеллера и лопаточная диффузора могут быть разрешены с использованием гибридного метода.



Рис. 3.49. Схематическое изображение проточной части рассматриваемого компрессора (слева) и построенной блочно-структурной сетки (справа).

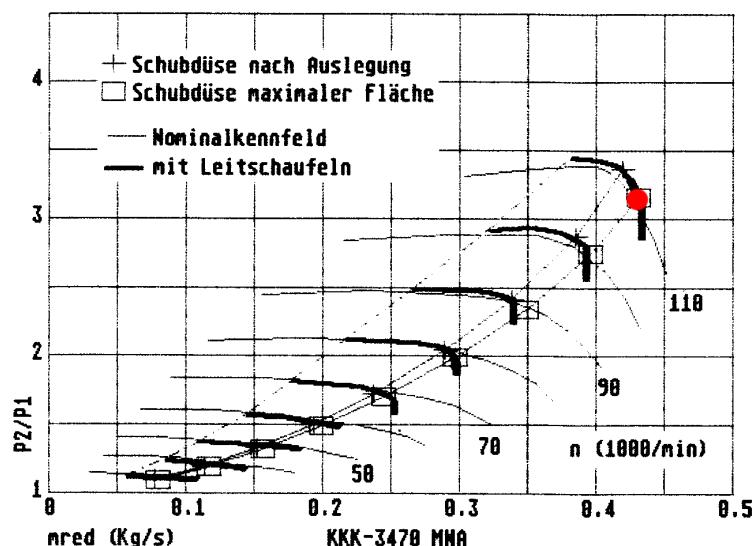


Рис. 3.50. Характеристика компрессора. Красным цветом обозначена выбранная рабочая точка.

Таблица 3.8. Параметры рабочей точки характеристики компрессора выбранной для моделирования

Характеристика	Значение
Рабочее тело	воздух
Температура на входе	293 К
Давление на входе	101325 Па
Массовый расход	0.42 кг/с
Частота вращения	108000 об/мин

Таблица 3.9. Влияние густоты расчётной сетки на расчётный коэффициент повышения давления

Сетка	Отношение давлений
Грубая	3.75
Средняя	3.30
Измельчённая	3.20

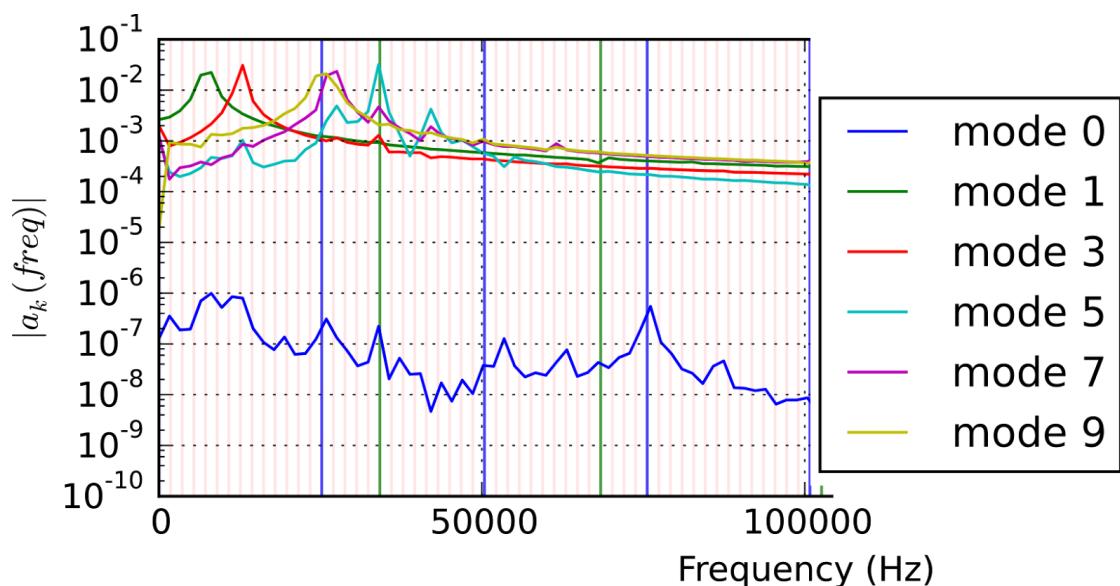


Рис. 3.51. Характерные моды течения в микрокомпрессоре. Синими вертикальными линиями отмечены частоты относящиеся к ротору, зелёными — относящиеся к статору. Частота вращения 108000 об/мин

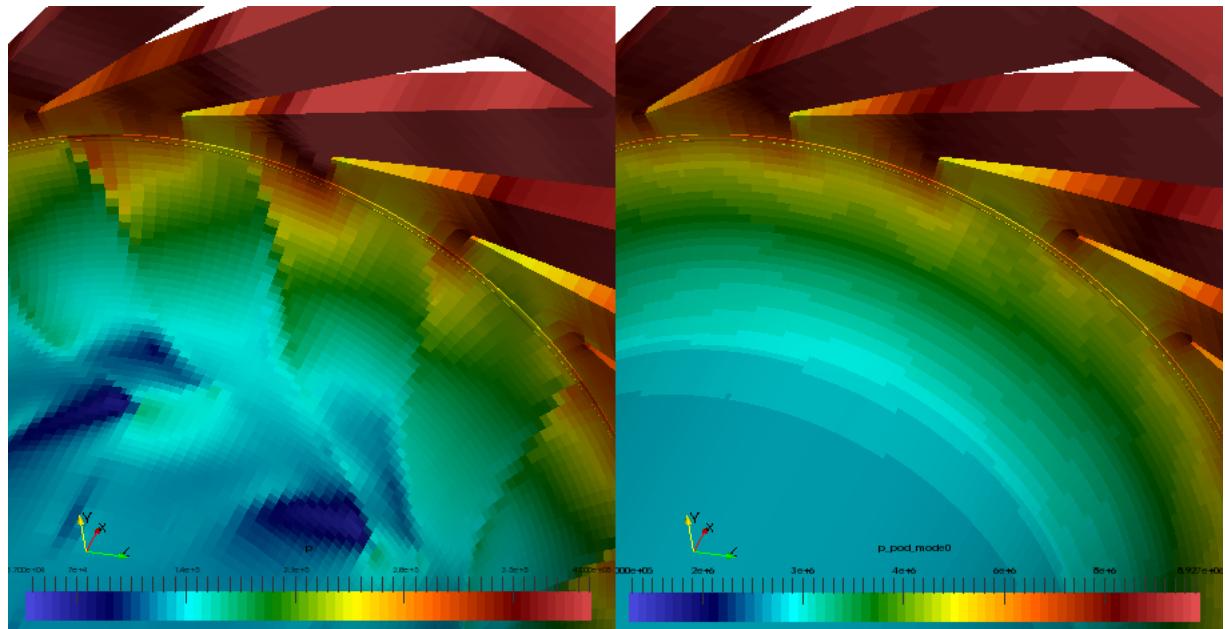


Рис. 3.52. Распределение мгновенного поля давления (слева) вблизи диффузора и его 0-я мода (справа)

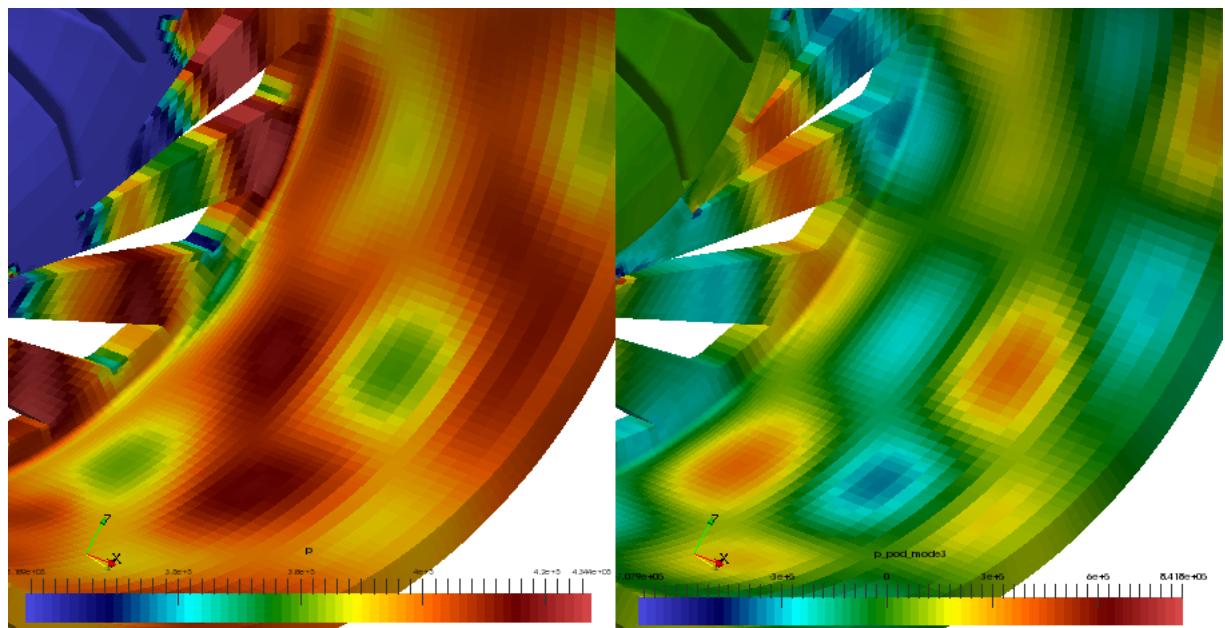


Рис. 3.53. Распределение мгновенного поля давления (слева) вблизи диффузора и его 3-я мода (справа)

### 3.4.5. Модель гидродинамики водокольцевого насоса

Ещё одним важным направлением, заслуживающим интереса, является возможность применения гибридного метода для моделирования двухфазных течений в гомогенном сжимаемом приближении. Такие модели могут быть полезными для первичной оценки интегральных характеристик устройств со смешением потоков сред с большим отношением плотностей (например, вода и воздух). Кроме того, сжимаемые модели позволяют оценить пульсации давления и следовательно, уровень шума, что также является актуальной инженерной задачей.

Одним из приложений таких гомогенных моделей является моделирование водокольцевых насосов, которые используются в энергетике для создания разрежения высокой степени.

Моделирование таких устройств обычно осуществляется либо в несжимаемом приближении [88, 89, 90] либо с использованием уравнений состояний (например — политропное), не учитывающих изменения реальных свойств смеси в зависимости от её состава. Тем не менее, корректный учёт скорости распространения акустических возмущений может быть критически важным для анализа шумности таких машин.

Принцип работы насоса (рис. 3.54) относительно прост и базируется на двух законах — законе сохранения массы и законе сохранения импульса. Ротор машины размещён с эксцентрикитетом относительно статорной части, имеющей цилиндрическую форму. При вращении ротора жидкость в рабочей части за счёт центробежных сил «разбрасывается» к периферии, образуя между валом ротора и межфазной поверхностью жидкий кольцевой канал переменного сечения. При проталкивании прокачиваемой среды (газа) лопастями ротора через расширяющуюся часть жидкого кольцевого канала происходит расширение среды и, как следствие, создаётся разрежение на всасе. Затем кольцевой канал сужается и проталкивание газа через него приводит к росту давления на выходе из насоса.

В работе в качестве модели для тестирования решателя была выбра-

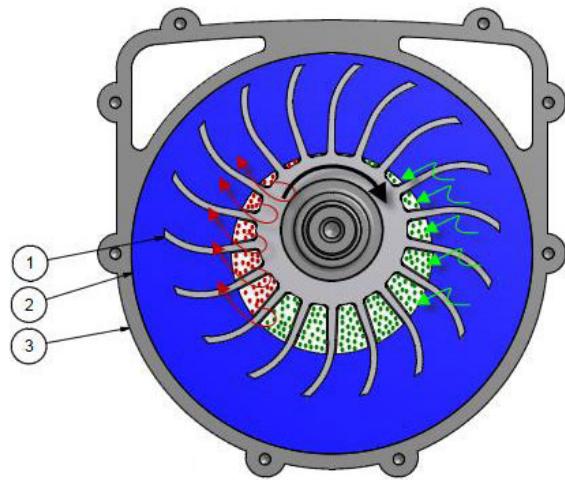


Рис. 3.54. Схема работы и устройства рабочей части водокольцевого насоса. Синим цветом показана жидкость создающая сужающийся-расширяющийся канал, белым цветом — пространство для прохождения прокачиваемого газа, зелёными точками — входящий поток среды, красными точками — уходящий поток среды

на конструкция, близкая к реальной, переданная Dr. Jörn Beilke [91]. Для соединения подвижных и неподвижных частей модели использовались поверхности интерполяции данных. Для этого между соответствующими частями создавался зазор, который выбирался либо исходя из конструкторской документации, либо из соображений снижения времени расчёта (чем тоньше слой, тем больше время счёта). В начальный момент времени расчётная область была «залита» жидкостью согласно её предполагаемому положению при работе на номинальной мощности. Скорость вращения вала увеличивалась ступенчатой функцией от 0 до 200 рад/с, давление на всасе снижалось с 100 кПа до 60 кПа. В результате расчёта были получены распределения полей давления, скорости и объёмной и массовых долей в водокольцевом насосе (рис. 3.55). Сделана оценка подачи при скорости вала 200 рад/с, перепаде давлений 40 кПа —  $5 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Сравнивая данную оценку с экспериментальной величиной для перепада 40 кПа —  $16 \text{ м}^3/\text{ч}$  при скорости вращения вала 298 рад/с (см [91]), можно сделать вывод о качественно правильном воспроизведении явлений с помощью данной модели, поскольку:

- переход с частоты вращения 298 рад/с до 200 рад/с при сохранении перепада должен снизить подачу по крайней мере на 1/3;

- величина зазора между вращающимся ротором и подводящими/отводящими патрубками в натурном идеии значительно меньше чем заданная в модели (в несколько раз), что, очевидно, сказывается на увеличении модельных протечек.

Качественный анализ течения выполненный по разработанной модели (раздел 2.1.3), учитывающей немонотонную зависимость скорости звука от объёмной доли газа, показывает наличие трансзвуковых зон в областях с объёмной долей воздуха около 50 %, рис. 3.55.

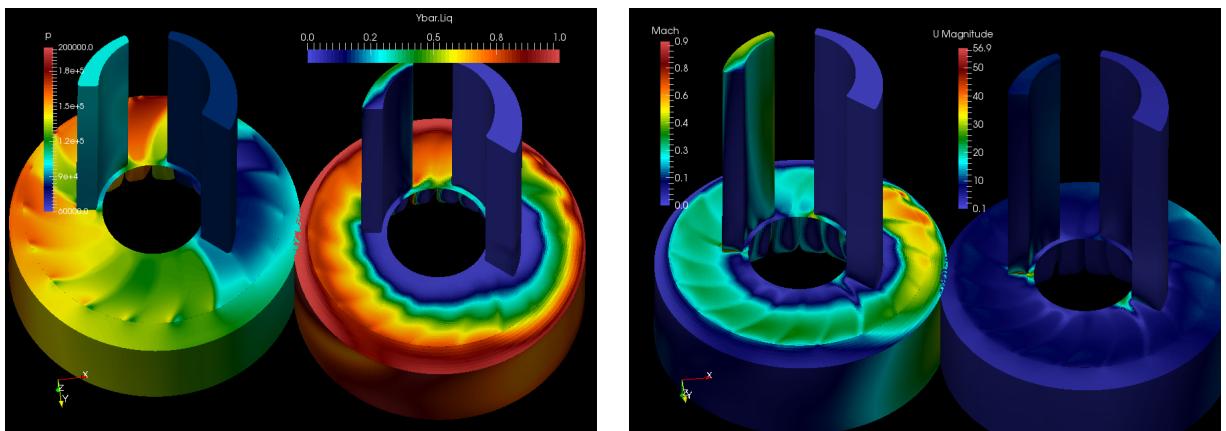


Рис. 3.55. Качественная картина течения в водокольцевом насосе, слева направо: поле статического давления, поле объёмной доли жидкости, эффективное число Маха, поле модуля скорости.

Таким образом, учет сжимаемости и «немонотонного» уравнения состояния в модели течения показывает, что даже при сравнительно малых скоростях среды могут наблюдаться эффекты, характерные для транс- и сверхзвуковых течений и связанные с ними явления.

## 3.5. Вопросы реализации

### 3.5.1. Сеточная сходимость

С целью количественного исследования свойств схемы, используемой в гибридном методе, был проведён анализ сеточной сходимости. Сеточная

сходимость была исследована для следующих задач, имеющих либо аналитическое решение либо, “эталонное” экспериментальное значение исследуемой характеристики.

1. Дозвуковое течение в канале круглого сечения (раздел 3.2.1), результаты — см. табл. 3.10. В данной задаче сравнивались расчётное и аналитическое распределения продольных компонент поля скорости по радиусу. Для сравнения использовалась норма  $L_1$ . Из табл. 3.10 видно, что схема имеет второй порядок аппроксимации, поскольку сгущение сетки в два раза приводит к падению погрешности аппроксимации в четыре раза.
2. Сверхзвуковое обтекание наклонного уступа (раздел 3.1.3), результаты показаны на рис. 3.56. В данном тесте сходимость оценивалась качественно — видно, что с ростом числа ячеек угол наклона кривой Ma в области скачка растёт, приближаясь к вертикали, соответствующей аналитическому решению.
3. Сверхзвуковое обтекание обратного уступа (раздел 3.1.4) — см. рис. 3.57. Результат проведённого исследования сеточной сходимости, представлен на рис. 3.57. Видно, что по выбранному интегральному критерию схема обладает вторым порядком точности по пространству, поскольку решение сходится к экспериментальному при измельчении сетки в области отрыва по каждому направлению, при этом изменение нормы ошибки пропорционально квадрату изменения размера ячейки.
4. Течение в сверхзвуковом сопле при наличии прямого скачка уплотнения в закритической части (раздел 3.1.6), результаты показаны на рис. 3.58. На данном примере сеточная сходимость исследована количественно для случая с разрывом. Как видно из рис. 3.58, погреш-

нность аппроксимации (норма  $L_1$ ) падает пропорционально сгущению сетки, что соответствует схеме первого порядка.

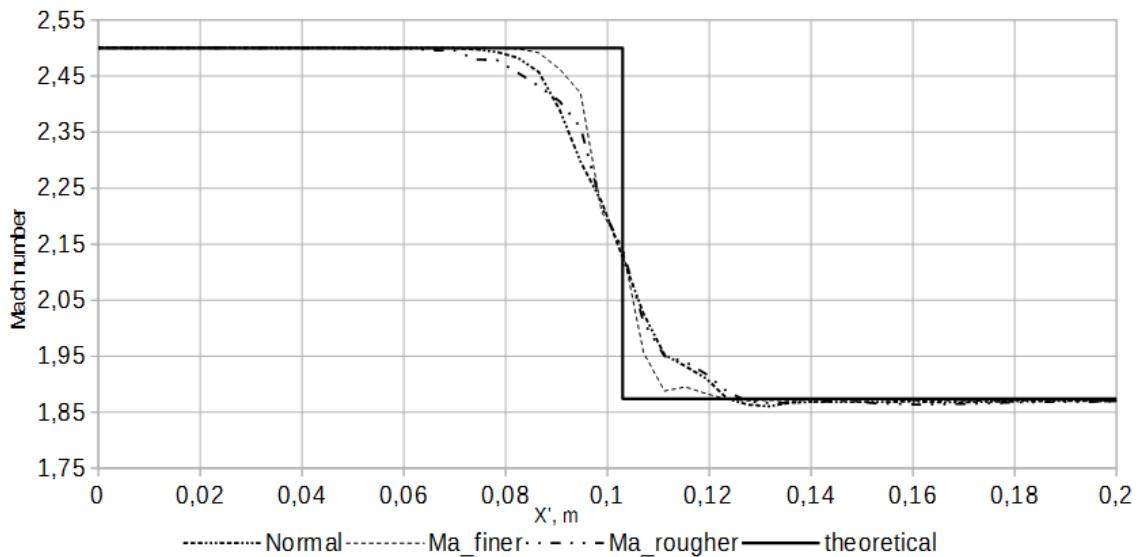


Рис. 3.56. Сеточная сходимость численного решения для случая набегания потока на клин

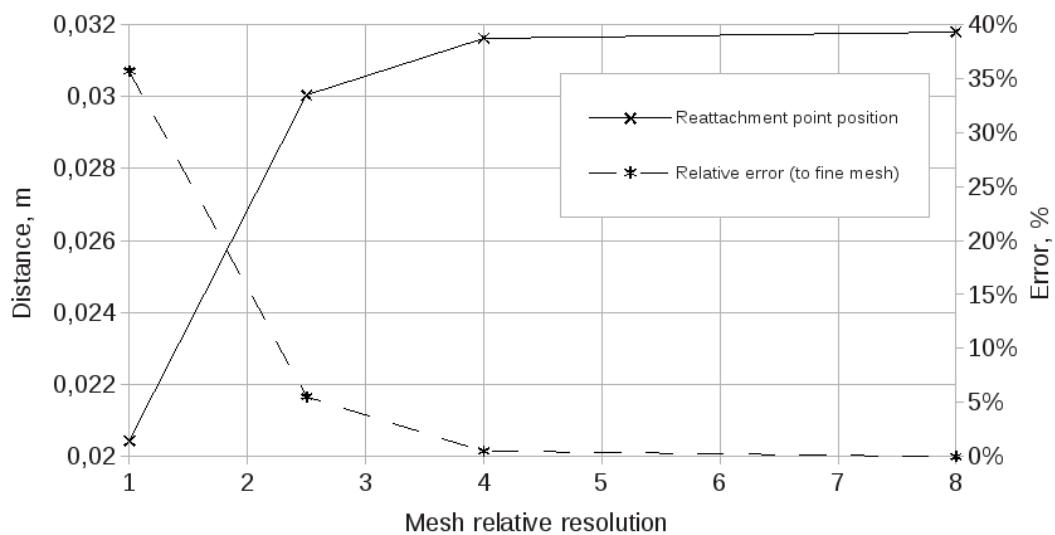


Рис. 3.57. Сеточная сходимость разработанного метода на примере случая обтекания обратного уступа. Пунктирной линией со звёздочками показана относительная ошибка (по сравнению с экспериментом) положения точки присоединения потока (шкала измерений находится справа). Сплошной линией с крестами показано абсолютное положение точки присоединения потока за уступом (шкала измерений слева). По горизонтальной оси отложен относительный масштаб сетки.

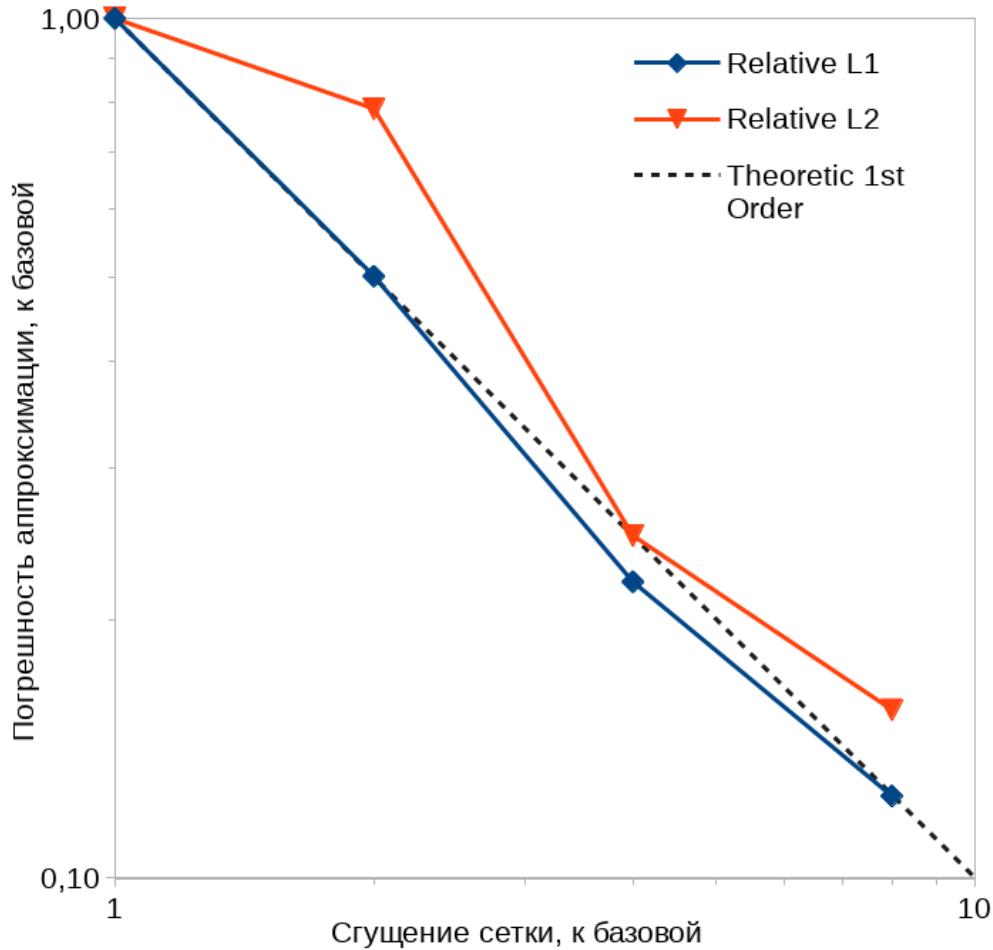


Рис. 3.58. Сеточная сходимость разработанного метода на примере случая течения в сверхзвуковом сопле с ударной волной. Наклон, соответствующий первому порядку показан пунктиром.

Таблица 3.10. Сеточная сходимость гибридного метода для задачи моделирования ламинарного течения в круглом канале

Число разбиений по высоте	10	20	40
Погрешность в норме $L_1$	0.0068	0.0017	0.00041

### 3.5.2. Влияние выбора функции-переключателя

В разделе 2.1.1 было предложено два вида функции-переключателя для смешения аппроксимирующих выражений из метода КТ/KNP и стандартного метода PISO . Как тестирование и валидация гибридного метода, так и расчётные исследования проводились в основном с использованием способа № 1:

$$\kappa_f = \min\left(\frac{Ma_f}{ACo_f}, 1\right)$$

В то же время представляет интерес влияние выбора вида функции на решение. Рассмотрим как выбор функции-переключателя может сказаться на решении на примере задачи Сода (раздел 3.1.1). На рис. 3.59 показано распределение числа Маха вдоль оси канала в момент времени  $t = 0.00025$  с. Также на рисунке показано распределение функции смешения по длине канала. Из рисунка видно, что при течениях со скоростями, близкими к трансзвуковым или выше, выбор функции будет слабо влиять на решение.

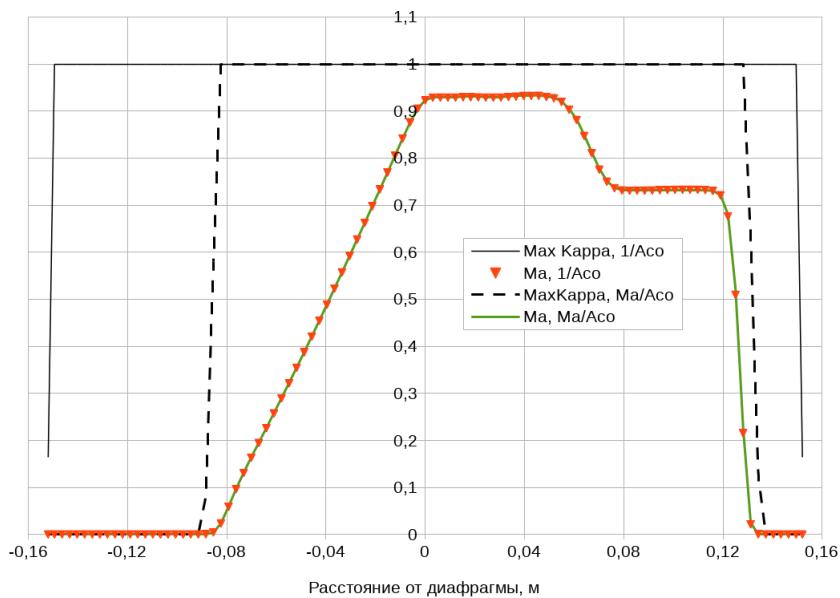


Рис. 3.59. Сравнение распределения числа Маха по длине канала, рассчитанного гибридным методом с использованием различных функций смешения

Иным образом картина будет складываться в дозвуковых задачах, в особенности в области контактного разрыва. Для демонстрации влияния выбора функции на решение был выбран случай распространения волны в канале постоянного сечения при докритическом перепаде давления (см. раздел 3.1.1).

Сравнивались следующие случаи:

- $\kappa_f = \min\left(\frac{Ma_f}{ACo_f}, 1\right)$ , обозначается как "Std" на рисунках;
- $\kappa_f = \min\left(\frac{1}{ACo_f^2}, 1\right)$ , обозначается как "AACo" на рисунках;

- $\kappa_f = \min\left(\frac{1}{ACo_f}, 1\right)$ , обозначается как "Aco" на рисунках;
- стандартная схема PISO (сжимаемое течение без переключения схем), обозначается как "Piso" на рисунках.

Сравнивались результаты расчётов в момент времени  $t = 0.00025\text{c}$  для режимов, рассчитанных с четырьмя значениями фиксированного шага интегрирования по времени:

1.  $\Delta t = 10^{-7} \text{ c}$ , акустический критерий Куранта равен  $\approx 0.011$ ;
2.  $\Delta t = 10^{-6} \text{ c}$ , акустический критерий Куранта равен  $\approx 0.11$ ;
3.  $\Delta t = 10^{-5} \text{ c}$ , акустический критерий Куранта равен  $\approx 1.11$ ;
4.  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ c}$ , акустический критерий Куранта равен  $\approx 2.8$ .

Результаты расчётов (распределение скорости среды вдоль канала) для трёх схем смешивания и стандартной схемы PISO показаны на рисунках 3.60, 3.61, 3.62 и 3.63. Из рисунков видно, что при переходе акустического числа Куранта через 1 схема становится подвержена осцилляциям в области контактного разрыва. При этом если сравнивать со стандартной схемой PISO (см. рис. 3.63), качественно величина пульсаций в гибридном методе меньше чем в PISO. Кроме того, исходя из сравнения графиков 3.60 и 3.61 можно заключить, что первый вид функции-переключателя является предпочтительным. Из рисунков 3.64 и 3.65 видно что за счёт учёта локального числа Маха функция-переключатель первого типа быстрее стремится к значениям, соответствующим стандартной схеме в дохзвуковых задачах с большим значением акустического критерия Куранта.

Сравнение со стандартной схемой КТ/KNP не проводится, поскольку при  $ACo < 1$  решение совпадает с гибридным методом, а при  $ACo > 1$  нарушается критерий устойчивости схемы КТ/KNP.

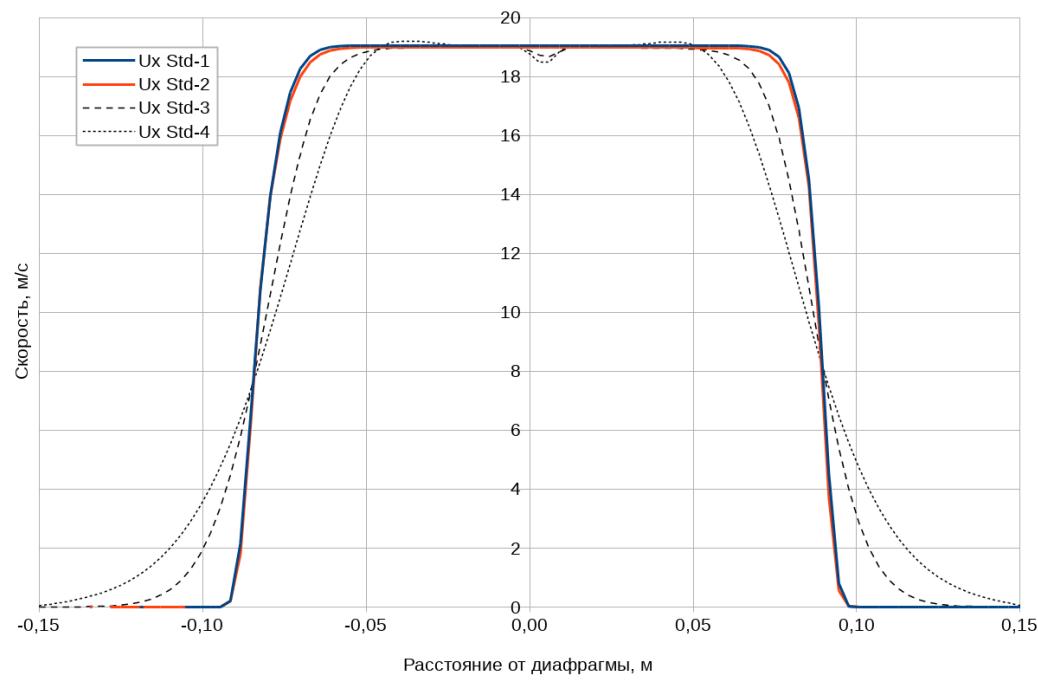


Рис. 3.60. Распределение скорости среды вдоль канала для функции смещивания "Std" и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

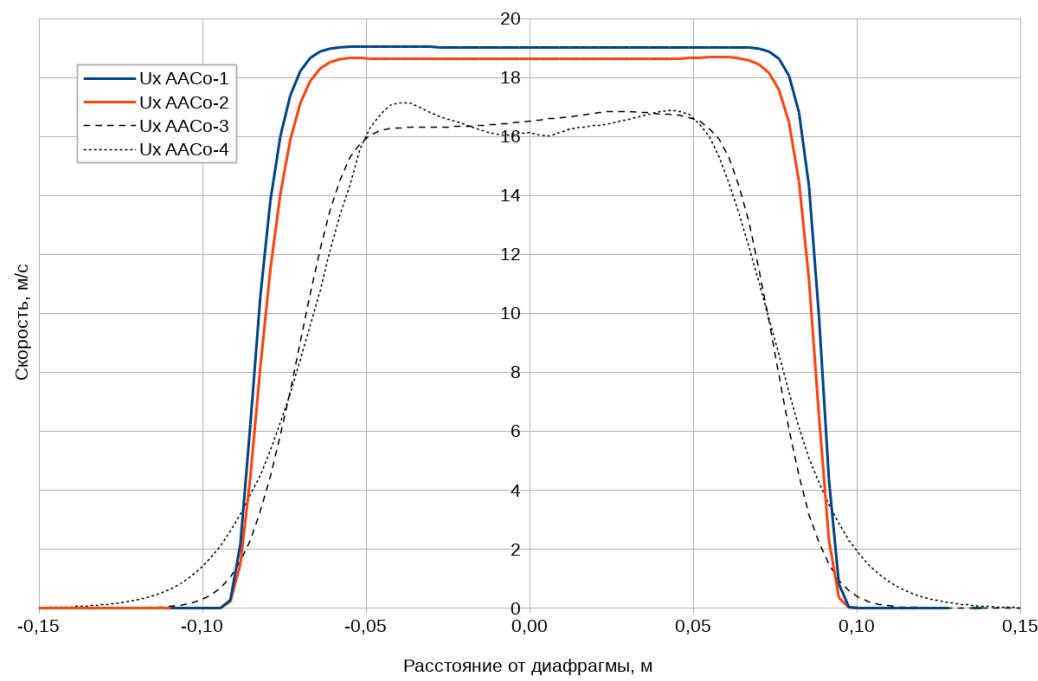


Рис. 3.61. Распределение скорости среды вдоль канала для функции смещивания "AACo" и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

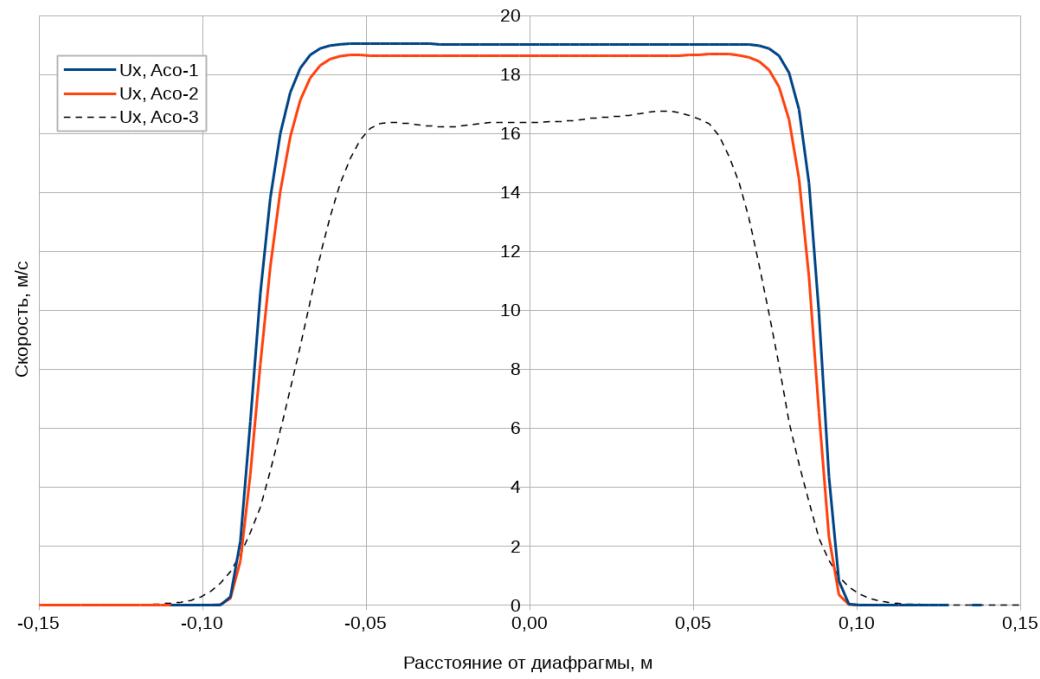


Рис. 3.62. Распределение скорости среды вдоль канала для функции смещивания "ACo" и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

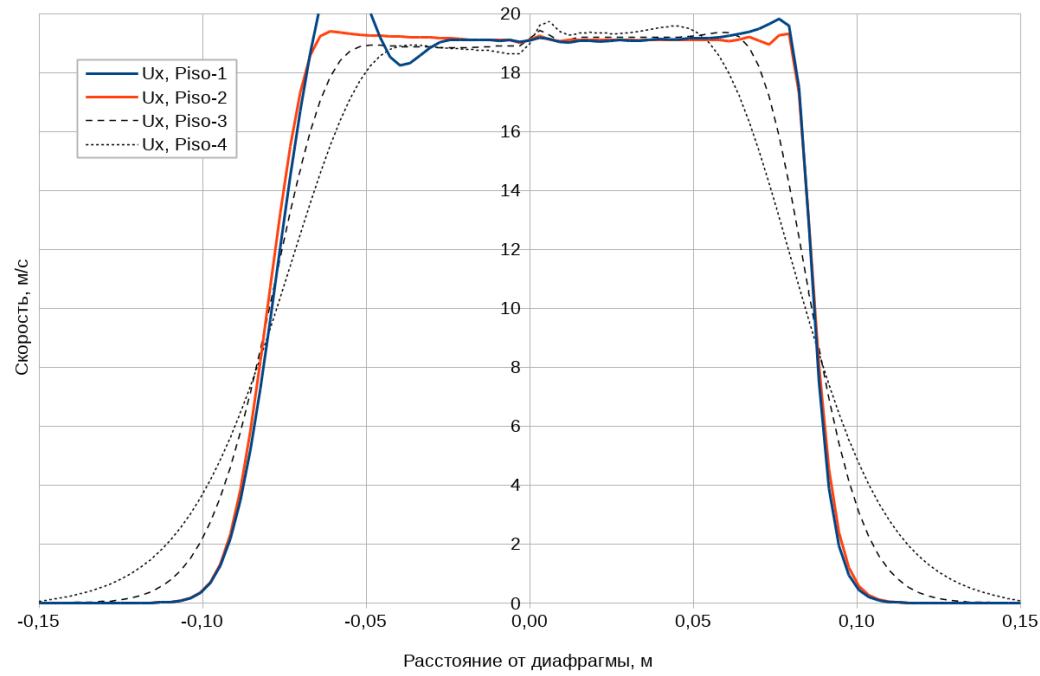


Рис. 3.63. Распределение скорости среды вдоль канала полученное стандартной моделью PISO и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

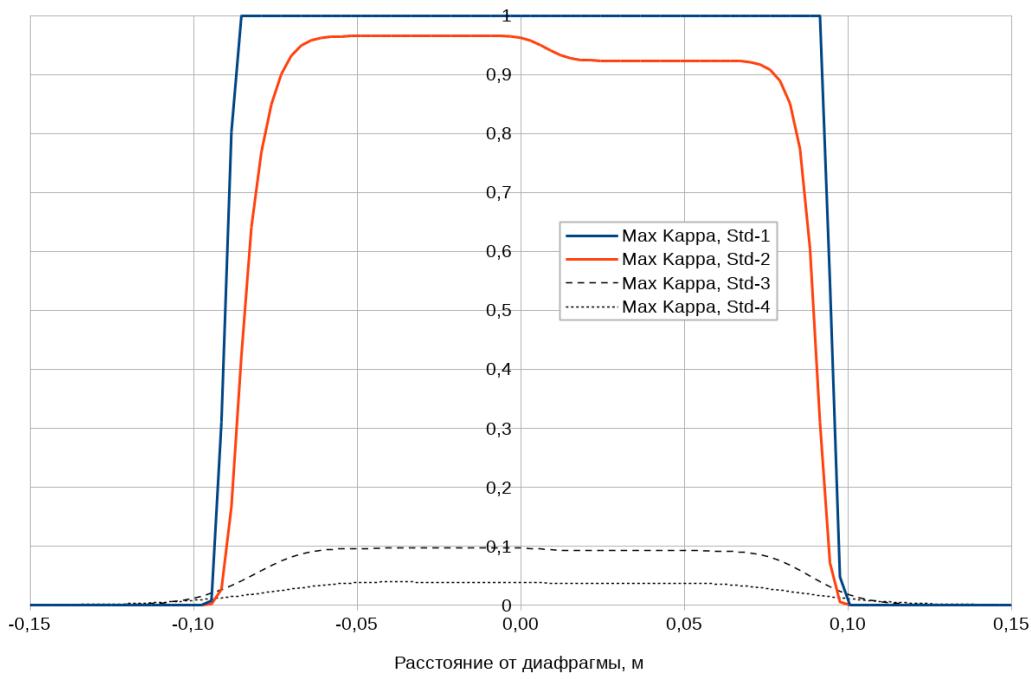


Рис. 3.64. Распределение функции-переключателя вдоль канала для функции смешивания "Std" и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

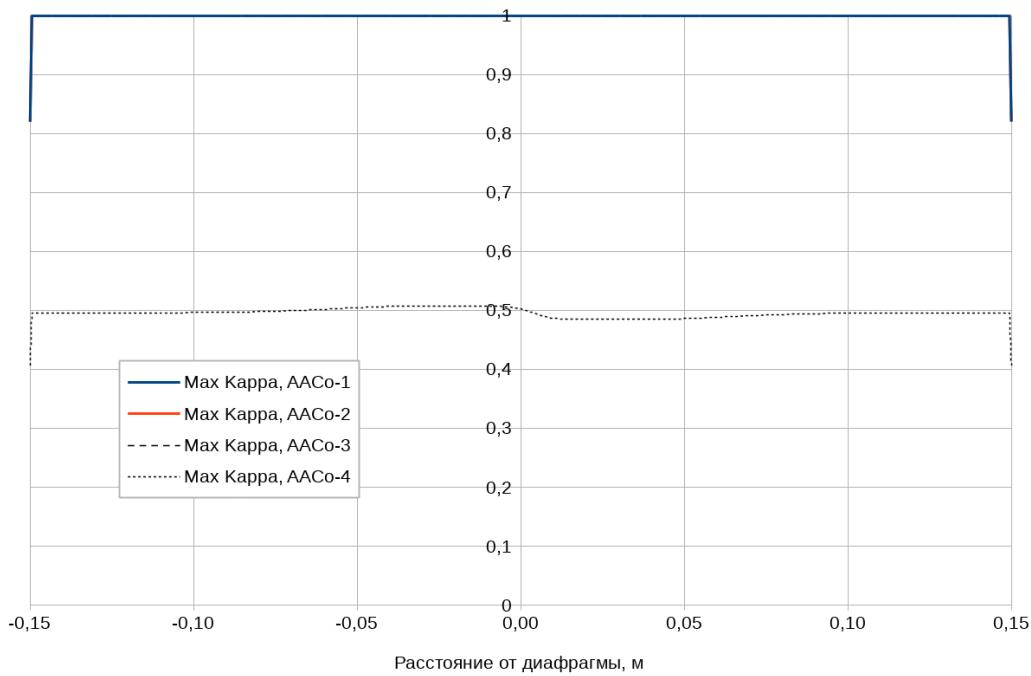


Рис. 3.65. Распределение функции-переключателя вдоль канала для функции смешивания "AACo" и четырёх значений шага интегрирования по времени: синяя кривая -  $\Delta t = 10^{-7}$  с  $ACo \approx 0.011$ , красная кривая -  $\Delta t = 10^{-6}$  с  $ACo \approx 0.11$ , чёрный штрих -  $\Delta t = 10^{-5}$  с  $ACo \approx 1.11$ , чёрный пунктир -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$  с  $ACo \approx 2.8$

### 3.5.3. Масштабируемость

Одним из преимуществ реализации предложенного метода с использованием открытой библиотеки OpenFOAM является возможность повторного использования уже разработанного функционала этой платформы, в том числе — инструментария параллельных вычислений. Как промышленная платформа пакет OpenFOAM хорошо зарекомендовал себя при решении задач с применением суперкомпьютеров с распределённой памятью (технология MPI). Исследование масштабирования выполнялось на машине BL2x220, входящей в состав вычислительного сервиса ИСП РАН - [www.unihub.ru](http://www.unihub.ru). Проведённые расчёты показали линейную масштабируемость на задачах умеренных размеров (2-4 миллиона ячеек) на числе вычислительных ядер до 144.

Масштабируемость реализации гибридного метода была рассмотрена с использованием следующих задач.

1. Обтекание уступа сверхзвуковым потоком - см. раздел [3.1.5](#). Исследование масштабируемости (рис. [3.66](#)) решателя показало удовлетворительное ускорение на сетке 1 млн ячеек и сверхлинейное ускорение для сетки 4 млн. ячеек. Сверхлинейное ускорение связано с невозможностью размещения всех данных численной модели (4 млн ячеек) в кэше процессора в однопроцессорном режиме расчета, что привело к завышенному относительному ускорению.
2. Моделирование системы генерации газа подушки безопасности - см. раздел [3.4.3](#), см. рис. [3.67](#).

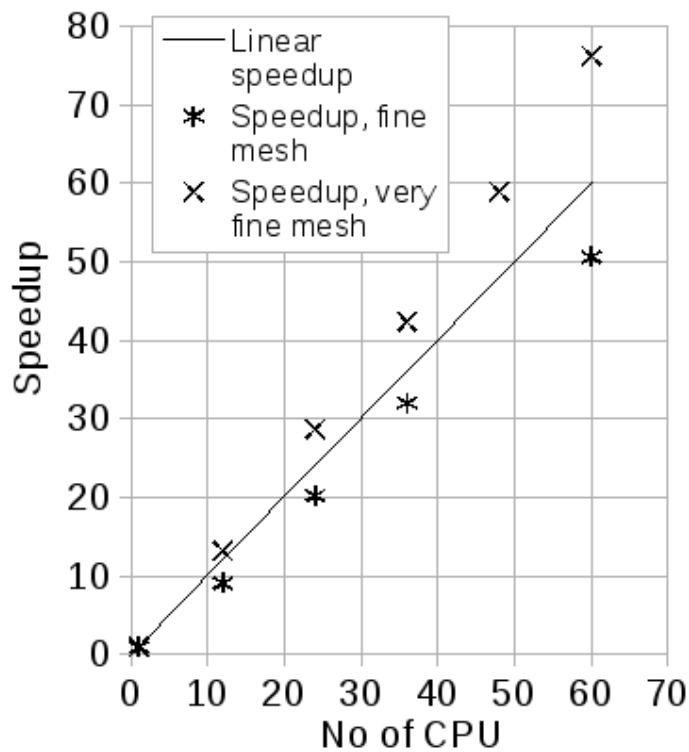


Рис. 3.66. Масштабируемость разработанного решателя для задачи набегания сверхзвукового потока на прямой уступ, сетки 1 млн (fine) 4 млн (very fine) ячеек, 2D течение.

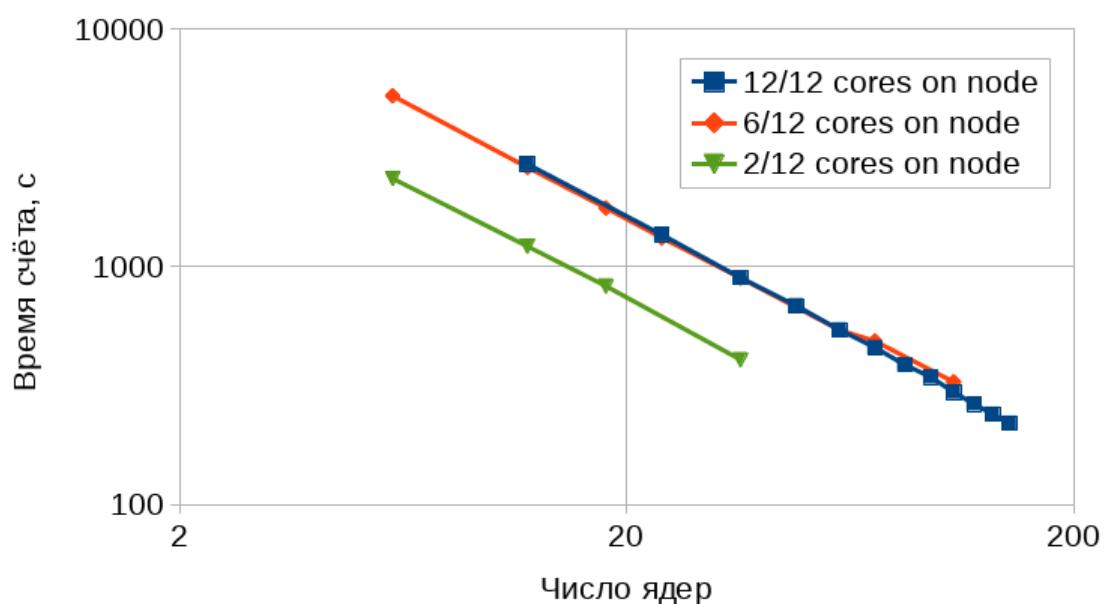


Рис. 3.67. Масштабируемость разработанного решателя для задачи моделирование сверхзвукового течения в газогенераторе подушки безопасности, сетка 2.7 млн ячеек.

## 3.6. Развитие и стороннее применение гибридного метода

С момента публикации описания гибридного метода [3, 92], метод получил применение в диссертационной работе [59] и развитие в численных исследованиях [60].

### 3.6.1. Исследование неустойчивости сверхзвукового пограничного слоя

Диссертационная работа [59] посвящена экспериментально-расчётному исследованию устойчивости сверхзвуковых пограничных слоёв газов с учётом инжекционного подвода газовых сред. В работе изучается влияние параметров среды, подводимой в пограничный слой со стороны стенки через пористое тело (см. рис. 3.68) — её массового расхода и молярной массы — на развитие пограничного слоя вниз по потоку. Данное направление является актуальным при проектировании гиперзвуковых прямоточных воздушно-реактивных двигателей. Автор диссертации исследовал механику пограничного слоя при подводе дозвуковых струй как средствами экспериментальной установки, так и с помощью реализации гибридного метода для многокомпонентных течений.

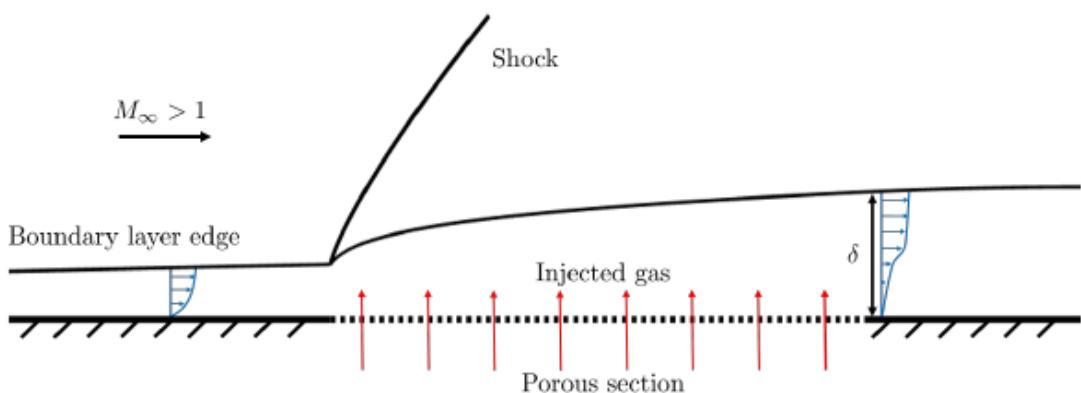


Рис. 3.68. Принципиальная схема течения и изменения профиля скорости в пристеночном слое (показан синим цветом) при инжекции газа со стороны стенки

Всего рассматривалось несколько впрыскиваемых сред:

- Не — газ, в 7 раз легче чем основная среда;
- $N_2$  — газ, сопоставимый с основной средой;
- RC218 — газ в 7 раз тяжелее основной среды.

Для каждого из газов был проварирован расход инжектируемой среды и измерена толщина пограничного слоя в конце участка инжекции. Результаты эксперимента были сопоставлены с расчётом (см. рис. 3.69). Было получено хорошее количественное совпадение для случаев инжекции Не и  $N_2$ , для газа RC218 различия были значительными. Имеющиеся различия полностью объясняются используемой в текущей реализации модели диффузии массы компонент, а именно — допущением о равенстве числа Sc единице (что означает равенство коэффициента диффузии коэффициенту динамической вязкости). Автор исследовал сеточную сходимость как на модельных задачах диффузии, так и в условиях, описывающих экспериментальную установку. Визуальное сравнение расчётных и экспериментальных полей плотности показано на рис. 3.70.

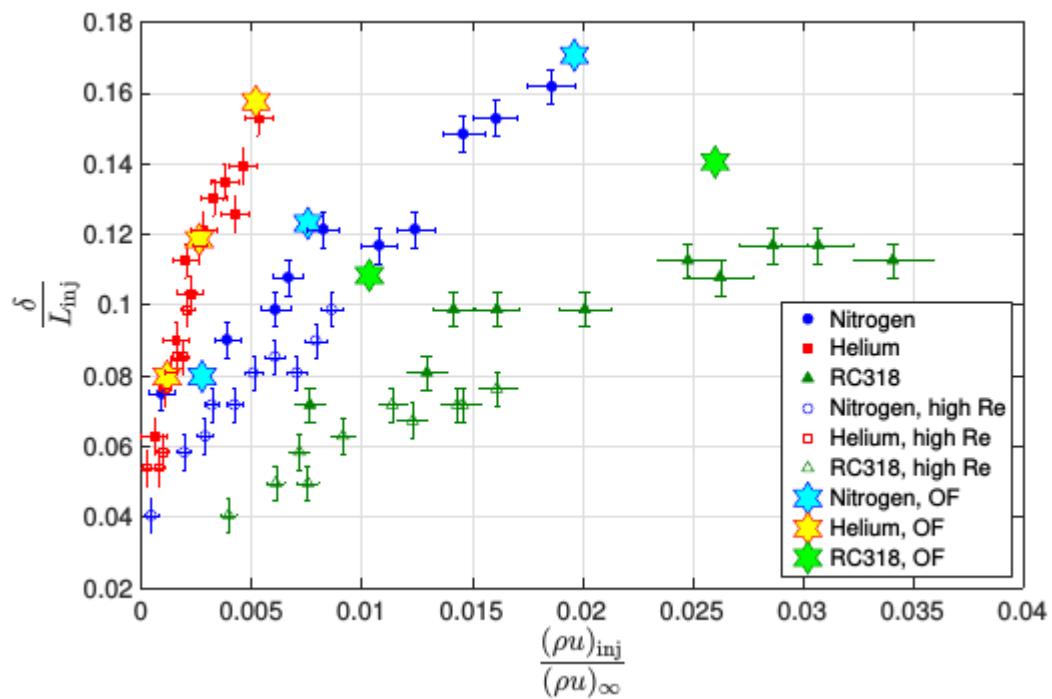


Рис. 3.69. Влияние типа инжектируемой среды и её массовой скорости на толщину пограничного слоя. Сравнение экспериментальных и расчётных данных.

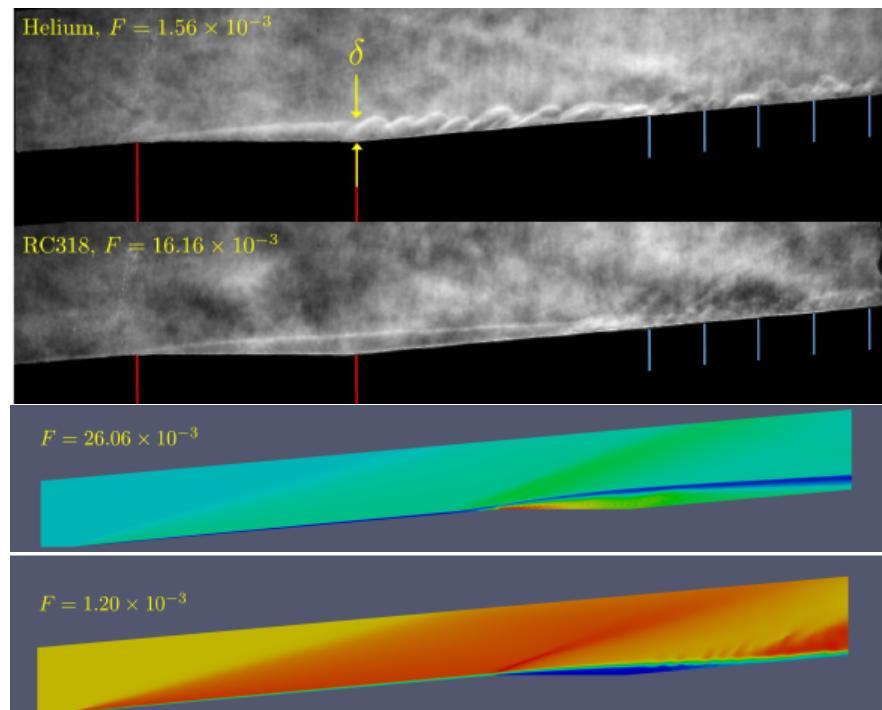


Рис. 3.70. Сравнение экспериментальных и расчётных полей плотности

### 3.6.2. Моделирование газов с реальным уравнением состояния

Предложенный в данной работе метод был доработан и расширен коллективом авторов из Мюнхенского технического университета для решения задач расчёта сжимаемых течений сред с реальным уравнением состояния [60].

Метод был расширен на следующие случаи с уравнениями состояния:

- уравнения состояния Пенга-Робинсона [93]

$$p = \frac{RT}{v - b_{PR}} - \frac{a_{PR}(T)}{v^2 + 2vb_{PR} - b_{PR}^2}$$

- уравнения состояния Соав-Редлих-Квонга [94]

$$p = \frac{RT}{v - b_{SRK}} - \frac{a_{SRK}(T)}{v \cdot (v + b_{SRK})}$$

Авторы успешно провели валидацию расширенной версии гибридного метода на задаче течения в сверхзвуковом сопле [61] (см. рис. 3.71) и тестирование на задаче течения со свободной сверхзвуковой струёй (см. рис. 3.72).

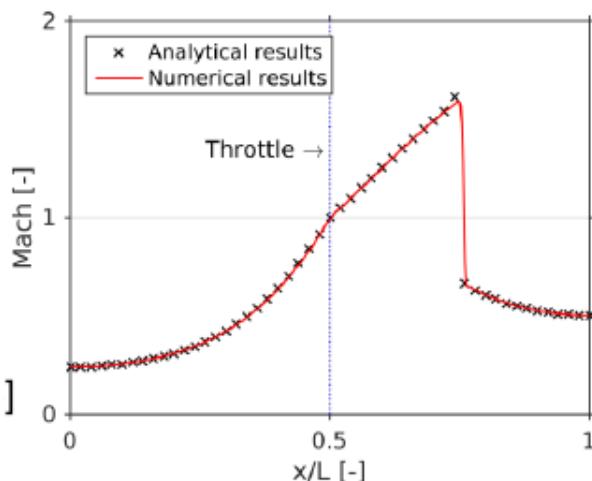


Рис. 3.71. Сравнение аналитического и численного решения (распределение числа Маха по оси сопла)

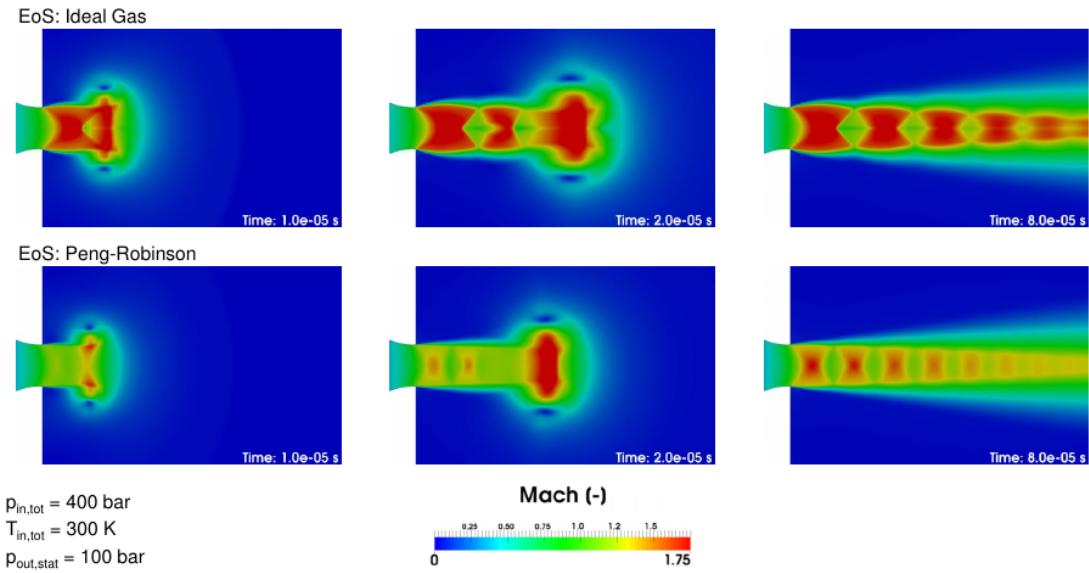


Рис. 3.72. Сравнение аналитического и численного решения (распределение числа Маха по оси сопла)

### 3.7. Резюме

Тестирование реализации метода показало его качественную и количественную адекватность как на валидационных задачах, так и в примерах промышленного использования. Был рассмотрен широкий ряд валидационных тестов из трёх областей: сжимаемые течения при транс- и сверхзвуковых числах Маха, несжимаемые течения, моделирование распространения акустических волн. Среди прикладных промышленных задач были отобраны следующие случаи: модель устройства разворачивания подушек безопасности, течение в высокоскоростном микропрессоре, модель водокольцевого насоса. Метод нашёл применение в области исследования гиперзвуковых летательных аппаратов и развитие в области исследования газодинамики течения сред с реальным уравнением состояния.

# Заключение

1. Разработан гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях гидро- и газодинамики, основанный на комбинировании стандартной схемы PISO, разработанной для численного моделирования слабосжимаемых и несжимаемых течений, и схемы Курганова — Тадмора для моделирования сжимаемых течений. Выполненные вычислительные эксперименты показывают что предложенный метод позволяет моделировать течения вязких сжимаемых сред в широком диапазоне чисел Маха — от 0 до 4–6; при этом устойчивость метода определяется единственным условием — величиной поточного числа Куранта.

2. Предложенный гибридный метод реализован в виде программ, расширяющих стандартные возможности открытой библиотеки OpenFOAM и предназначенных для моделирования течений однофазных сжимаемых сред, смесей сжимаемых газов и двухфазных смесей. Реализация метода осуществлена по лицензии GPL, исходный код находится в открытом доступе. Метод внедрён в практику математического моделирования различными научными коллективами для решения актуальных прикладных задач.

3. Разработанный программный комплекс, основанный на новом гибридном методе, позволил исследовать гидродинамику двухфазной среды водокольцевого вакуумного насоса, описываемую математической моделью сжимаемой гомогенной смеси с уравнением состояния, учитывающим немонотонную зависимость скорости звука в смеси от её состава.

# Список сокращений и обозначений

## Сокращения

ДУЧП	<u>Д</u> ифференциальные <u>У</u> равнения в <u>Ч</u> астных <u>П</u> роизводных
МКО	<u>М</u> етод <u>К</u> онечного <u>О</u> бъёма
МКР	<u>М</u> етод <u>К</u> онечных <u>Р</u> азностей
МКЭ	<u>М</u> етод <u>К</u> онечных <u>Э</u> лементов
МСС	<u>М</u> еханика <u>С</u> плошных <u>С</u> ред
ОД	<u>О</u> ртогональная <u>Д</u> екомпозиция
ОДУ	<u>О</u> быкновенные <u>Д</u> ифференциальные <u>У</u> равнения
CFD	<u>C</u> omputational <u>F</u> luid <u>D</u> ynamic
CM	<u>C</u> ontrol <u>M</u> ass
CV	<u>C</u> ontrol <u>V</u> olume
DNS	<u>D</u> irect <u>N</u> umerical <u>S</u> imulation
FVS	<u>F</u> lux <u>V</u> ector <u>S</u> plitting
LS	<u>L</u> evel <u>S</u> et Method
LES	<u>L</u> arge <u>E</u> ddy <u>S</u> imulation
LTS	<u>L</u> ocal <u>T</u> ime <u>S</u> tepping
MULES	<u>M</u> ultidimensional <u>Uiversal <u>L</u>imiter with <u>E</u>xplicit <u>S</u>olution</u>
PISO	<u>P</u> ressure <u>I</u> mplicit with <u>S</u> plitting <u>O</u> perators
POD	<u>P</u> roper <u>O</u> rthogonal <u>D</u> ecomposition
RANS	<u>R</u> eynolds <u>A</u> veraged <u>N</u> avier- <u>S</u> tokes Equations
RCM	<u>R</u> andom <u>C</u> hoice <u>M</u> ethod
SIMPLE	<u>S</u> emi- <u>I</u> mplicit <u>M</u> ethod for <u>P</u> ressure <u>L</u> inked <u>E</u> quations
SLM	<u>S</u> tandard <u>L</u> itre per <u>M</u> inute

TV	<u>Total Variation</u>
TVB	<u>Total Variation Bounded</u>
TVD	<u>Total Variation Diminishing</u>
VoF	<u>Volume of Fluid</u> Method

## Обозначения

$\alpha_i$	Объёмная доля $i$ -й компоненты	—
$\rho$	Поле плотности	$\text{кг}/\text{м}^3$
$\lambda$	Коэффициент теплопроводности	$\text{Вт}/\text{м}/\text{К}$
$\eta$	Коэффициент динамической вязкости	$\text{кг}/\text{м}/\text{К}$
$\mu$	Удельная молярная масса вещества	$\text{кг}/\text{моль}$
$\nu$	Кинематическая вязкость	$\text{м}^2/\text{с}$
$\phi$	Объёмный поток через поверхность	$\text{м}^3/\text{с}$
$\psi$	Сжимаемость среды	$\text{с}^2/\text{м}^2$
$\gamma$	Показатель адиабаты	—
$\hat{\Pi}$	Тензор нормальных и вязких напряжений	Па
$p$	Давление	Па
$c$	Скорость звука	$\text{м}/\text{с}$
$C_d$	Коэффициент лобового сопротивления	—
$C_v$	Удельная изохорная теплоёмкость	$\text{Дж}/\text{кг}/\text{К}$
$C_p$	Удельная изобарная теплоёмкость	$\text{Дж}/\text{кг}/\text{К}$
$D$	Коэффициент диффузии	$\text{м}^2/\text{с}$
$I$	Единичный тензор	—
$E$	Энергия	Дж
$M$	Масса	кг
$Ma$	Число Маха	—
$Re$	Число Рейнольдса	—
$Pe$	Число Пекле	—
$Co$	Число Куранта	—
$Sc$	Число Шмидта	—

$\vec{q}$	Тепловой поток	$\text{Вт}/\text{м}^2$
$\vec{n}$	Вектор нормали	—
$\vec{C}$	Радиус-вектор центра геометрического примитива	м
$\vec{P}$	Импульс	$\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$
$\vec{F}$	Вектор массовых сил	Н
$R$	Универсальная газовая постоянная	$\text{Дж}/\text{моль}/\text{К}$
$T$	Температура	К
$t$	Время	с
$V$	Объём	$\text{м}^3$
$S$	Площадь	$\text{м}^2$
$\vec{U}$	Поле скорости	$\text{м}/\text{с}$
$Y_i$	Массовая доля $i$ -й компоненты	—
$e$	Удельная полная энергия	$\text{Дж}/\text{кг}$
$u$	Удельная внутренняя энергия	$\text{Дж}/\text{кг}$
$h$	Удельная энталпия	$\text{Дж}/\text{кг}$

## Индексы

$X^o$	Предыдущий слой времени
$X^n$	Текущий слой времени
$X^{oo}$	Слой времени, предшествующий предыдущему
$X_f$	Величина вычисляемая в центрах граней конечно-объёмной сетки
$X_P$	Величина вычисляемая в центре контрольного объёма
$X_N$	Величина вычисляемая в центре соседнего к.о.

## Литература

1. Применение НРС-технологий для решения пространственных задач мультифизики / Васильев В.А., Крапошин М.В., Ницкий А.Ю., Юсекин А.В. // *Вычислительные методы и программирование*. — 2011. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 160–169.
2. Direct numerical simulation of internal gravity wave attractor in trapezoidal domain with oscillating vertical wall / Kraposhin M., Brouzet C., Dauxois T. et al. // *Proceedings of ISP RAS*. — 2014. — Vol. 26, no. 5. — Pp. 117–142.
3. M. Kraposhin, A. Bovtrikova, S. Strijhak. Adaptation of Kurganov – Tadmor Numerical Scheme for Applying in Combination with the PISO Method in Numerical Simulation of Flows in a Wide Range of Mach Numbers // *Procedia Computer Science*. — 2015. — Vol. 66. — Pp. 43–52.
4. M. Kraposhin, M. Kalugin, S. Strijhak, I. Evdokimov. Numerical study of characteristic modes and frequencies of flow in high speed compressors. — 3rd Internation Rotating Equipment Conference Technical Paper. — 2016.
5. M.B. Крапошин. Возможности гибридного метода аппроксимации конвективных потоков при моделировании течений сжимаемых сред // *Труды Института системного программирования РАН*. — 2016. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 267–326.
6. Ferziger Joel H., Perić Milovan. Computational Methods for Fluid Dynamics. — Springer Science + Business Media, 2002. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>.
7. White Frank M. Fluid Mechanics. — McGraw-Hill College, 2006.
8. Лойцянский Л.Г. Механика Жидкости и Газа. — М.: Дрофа, 2003.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. — М.: Наука, 1970.

10. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows: Ph.D. thesis / Department of Mechanical Engineering: Imperial College of Science, Technology and Medicine. — 1996.
11. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
12. *M. Секулович.* Метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1993.
13. *И.Ф. Образцов, Л.М.Савельев, Х.С. Хазанов.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высшая школа, 1985.
14. *Fischer Paul F., Rønquist Einar M.* Spectral element methods for large scale parallel Navier—Stokes calculations // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1994. — jan. — Vol. 116, no. 1-4. — Pp. 69–76. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(94\)80009-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(94)80009-X).
15. *Fischer Paul F.* An Overlapping Schwarz Method for Spectral Element Solution of the Incompressible Navier—Stokes Equations // *Journal of Computational Physics*. — 1997. — may. — Vol. 133, no. 1. — Pp. 84–101. — URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1997.5651>.
16. *Cockburn Bernardo, Shu Chi-Wang.* Runge—Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // *Journal of Scientific Computing*. — 2001. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 173–261. — URL: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1012873910884>.
17. *Галанин М. П., Савенков Е. Б., Токарева С. А.* Решение задач газовой динамики с ударными волнами rkdg-методом // *Математическое моделирование*. — 2008. — Vol. 20, no. 11. — Pp. 55–65.
18. *Shaofan Li, Kam Liu Wing.* Meshfree Particle Methods. — Springer, 2004.
19. *Дынникова Г.Я.* Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: Ph.D. thesis / НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова. — 2011.
20. *И.К. Марчевский, Г.А. Щеглов.* Моделирование динамики вихревых структур высокопроизводительным методом вихревых элементов // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. — 2013. — Vol. 9. — Pp. 26–36.
21. *Munjiza Ante.* The Combined Finite-Discrete Element Method. — Wiley, 2004.

22. Large time-step explicit integration method for solving problems with dominant convection / S. R. Idelsohn, N. Nigro, A. Limache, E. Onate // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2012. — Vol. 217. — Pp. 168–185.
23. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — Москва "Наука" 2010.
24. C.K. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сб.* — 1959. — Vol. 47(89), no. 3. — Pp. 271–306. — URL: <http://mi.mathnet.ru/msb4873>.
25. Sweby P. K. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1984. — Vol. 21, no. 5. — Pp. 995–1011. — URL: <http://www.jstor.org/stable/2156939>.
26. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. et al. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
27. Berger Marsha, Aftosmis Michael, Muman Scott. Analysis of Slope Limiters on Irregular Grids // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), 2005. — jan. — URL: <http://dx.doi.org/10.2514/6.2005-490>.
28. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. — Второе edition. — М.: Физматлит, 1994.
29. Toro Eleuterio F. Rieman Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction. — Third edition. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/b79761>.
30. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва "Физматлит" 2001.
31. Harten Ami. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. — 1983. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 357–393. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999183901365>.
32. Harten Amiram, Lax Peter D., van Leer Bram. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM*

*Rev.* — 1983. — Jan. — Vol. 25, no. 1. — P. 35–61. — URL: <http://dx.doi.org/10.1137/1025002>.

33. *Rusanov V.V.* Calculation of Interaction of Non-Steady Shock Waves with Obstacles // *J. Comput. Math. Phys.* — 1961. — Vol. 1. — Pp. 267–279.
34. *Jameson Antony.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1, artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence // *International Journal of Computational Fluid Dynamics.* — 1995. — Vol. 4. — Pp. 171–218.
35. *Jameson Antony.* Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1, artificial diffusion and discrete shock structure // *International Journal of Computational Fluid Dynamics.* — 1995. — Vol. 4. — Pp. 171–218.
36. *Liou Meng-Sing, Christopher J. Steffen Jr.* A New Flux Splitting Scheme // *Journal of Computational Physics.* — 1993. — Vol. 107. — Pp. 23–39. — URL: [http://users.ices.utexas.edu/~roystgnr/393N/papers\\_1/AUSM.pdf](http://users.ices.utexas.edu/~roystgnr/393N/papers_1/AUSM.pdf).
37. *Liou Meng-Sing.* A sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up for all speeds // *Journal of Computational Physics.* — 2006. — may. — Vol. 214, no. 1. — Pp. 137–170. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2005.09.020>.
38. *Kurganov Alexander, Tadmor Eitan.* New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations // *Journal of Computational Physics.* — 2000. — may. — Vol. 160, no. 1. — Pp. 241–282. — URL: <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6459>.
39. *Kurganov Alexander, Noelle Sebastian, Petrova Guergana.* Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton–Jacobi equations // *SIAM Journal on Scientific Computing.* — 2001. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 707–740. — URL: <http://129.81.170.14/~kurganov/Kurganov-Noelle-Petrova.SISC-01.pdf>.
40. *Kurganov Alexander, Petrova Guergana.* Central-upwind schemes on triangular grids for hyperbolic systems of conservation laws // *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* — 2005. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 536–552.

41. *Davis S. F.* Simplified Second-Order Godunov-Type Methods // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1988. — may. — Vol. 9, no. 3. — Pp. 445–473. — URL: <http://dx.doi.org/10.1137/0909030>.
42. *Patankar S.V.* // *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. — 1980.
43. *Issa Raad I.* Solution of the Implicitly Discretized Fluid Flow Equation by Operator Splitting // *J. Comput. Phys.* — 1986. — Vol. 62. — Pp. 40–65.
44. *R. Yin W.K. Chow.* COMPARISON OF FOUR ALGORITHMS FOR SOLVING PRESSURE-VELOCITY LINKED EQUATIONS IN SIMULATING ATRIUM FIRE // *International Journal on Architectural Science*. — 2003. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 24–35.
45. *Aguerreña Horacio J., Damiána Santiago Márquez, Gimeneza Juan M., M.Nigro Norberto.* MODELING OF COMPRESSIBLE FLUID PROBLEMS WITH OPENFOAM USING DYNAMIC MESH TECHNOLOGY. — Mecánica Computacional Vol XXXII, págs. 995-1011 (artículo completo), Argentina. — 2013.
46. A hybrid pressure-density-based algorithm for the Euler equations at all Mach number regimes / C. M. Xisto, J. C. Páscoa, P. J. Oliveira, D. A. Nicolini // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2011. — nov. — Vol. 70, no. 8. — Pp. 961–976. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/fld.2722>.
47. Implementation of semi-discrete, non-staggered central schemes in a colocated, polyhedral, finite volume framework, for high-speed viscous flows / Christopher J. Greenshields, Henry G. Weller, Luca Gasparini, Jason M. Reese // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2009. — Pp. n/a–n/a. — URL: <http://dx.doi.org/10.1002/fld.2069>.
48. *Wardle Kent E., Weller Henry G.* Hybrid Multiphase CFD Solver for Coupled Dispersed/Segregated Flows in Liquid-Liquid Extraction // *International Journal of Chemical Engineering*. — 2013. — Vol. 2013. — Pp. 1–13. — URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/128936>.
49. *Bohorquez P.* Computational continuum mechanics for sediment transport in free-surface flow. — ETS Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga, 29013, Málaga, Spain. — URL: [http://powerlab.fsb.hr/ped/kturbo/OpenFOAM/Berlin2008/SessionVB/OSCIC-08\\_BohorquezPatricio.pdf](http://powerlab.fsb.hr/ped/kturbo/OpenFOAM/Berlin2008/SessionVB/OSCIC-08_BohorquezPatricio.pdf).

50. *Rusche H.* Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions: Ph.D. thesis / Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering. — 2002.
51. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques / H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, C. Fureby // *Computers in Physics*. — 1998. — Vol. 12, no. 6. — P. 620. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.168744>.
52. OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox, User Guide, ver. 2.4.0, 2015. — May.
53. OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox, Programmer's Guide, ver. 2.4.0, 2015. — May.
54. *Stroustrup Bjarne*. The C++ Programming Language. — Fourth edition. — Addison-Wesley, 2013.
55. *van Buuren René*. Time integration methods for compressible flow: Ph.D. thesis / Faculty of Mathematical Sciences: Universiteit Twente. — 1999.
56. *Jasak Hrvoje, Tukovic Zeljko*. DYNAMIC MESH HANDLING IN OPEN-FOAM APPLIED TO FLUID-STRUCTURE INTERACTION SIMULATIONS. — V European Conference on Computational Fluid Dynamics , ECCOMAS CFD 2010, Lisbon, Portugal. — 2010.
57. *Piscaglia F., Montorfano A., Onorati A.* A Compressible Dynamic Solver for the Simulation of Turbulent Flows in IC Engine Geometries. — International Multidimensional Engine Modeling User's Group Meeting at the SAE Congress. — 2015.
58. *Beaudoin Martin, Jasak Hrvoje*. Development of a Generalized Grid Interface for Turbomachinery simulations with OpenFOAM. — Open Source CFD International Conference 2008, Berlin, Germany. — 2008.
59. *Schmidt Bryan E.* On the Stability of Supersonic Boundary Layers with Injection: Ph.D. thesis / California Institute of Technology. — 2016.
60. *Banholzer Matthias, Pfitzner Michael*. A Hybrid Semi Implicit Solver Using Real-Gas Thermodynamics Applicable To a Wide Range of Mach Numbers. — 11th OpenFOAM Workshop, Guimaraes, Portugal. — 2016.
61. *Anderson John D.* Modern compressible flow. With historical perspective. — Third edition. — McGraw-Hill, New-York, 2003.

62. ANSYS Verification Manual, Release 15.0, 2010.
63. *Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. Begell. — Turbulence, Heat and Mass Transfer 4: Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, Antalya, Turkey, Publisher: 2003 Begell House, Inc. — 2003.
64. *Smith Howard E.* The Flow Field and Heat Transfer Downstream of a Rearward Facing Step in Supersonic Flow: Tech. Rep. ARL 67-0056: University of Dayton, Ohio, 1967. — March.
65. *D. Garrard G., J. Phares W.* Calibration of the PARC Program for Propulsion-Type Flows: Tech. Rep. AEDC-TR-90-7: ARNOLD ENGINEERING DEVELOPMENT CENTER ARNOLD AFB TN, 1990. — July.
66. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. — Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010.
67. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. — М.: Наука, 1970.
68. *Liang Chunlei, Premasuthan Sachin, Jameson Antony.* High-order accurate simulation of low-Mach laminar flow past two side-by-side cylinders using spectral difference method // *Computers & Structures*. — 2009. — Vol. 87, no. 11–12. — Pp. 812 – 827. — Fifth {MIT} Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794909000054>.
69. *Liu Xianzhi.* — Wind loads on multiple cylinders arranged in tandem with effects of turbulence and surface roughness. — Master's thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Louisiana State University, 2003.
70. *Edwards Jack R., Liou Meng-Sing.* Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Flows at All Speeds // *AIAA Journal*. — 1998. — sep. — Vol. 36, no. 9. — Pp. 1610–1617. — URL: <http://dx.doi.org/10.2514/2.587>.
71. *Germanos R. A. C., de Souza L. F.* ANALYSIS OF DISPERSION ERRORS IN ACOUSTIC WAVE SIMULATIONS // *Thermal Engineering*. — 2006. — July. — Vol. 5, no. 1.
72. *Kim Yang-Hann.* Sound Propagation: An Impedance Based Approach. — Wiley, 2010.

73. Fundamentals of Acoustics / Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders. — Wiley, 1999.
74. *Abdol-Hamid Khaled .S., Elmiligui Alaa, Hunter Craig A.* Numerical Investigation of Flow in an Over-expanded Nozzle with Porous Surfaces. — 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. — 2005.
75. *S.C.Asbury, C.A.Hunter.* Static Performance of a Fixed-Geometry Exhaust Nozzle Incorporating Porous Cavities for Shock-Boundary Layer Interaction: Tech. Rep. NASA / TM-1999-209513: NASA / Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1999. — August.
76. Flow dynamics and invasion by background gas of a supersonically expanding thermal plasma / R Engeln, S Mazouffre, P Vankan et al. // *Plasma Sources Sci. Technol.* — 2001. — Oct. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 595–605. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0963-0252/10/4/308>.
77. Stationary supersonic plasma expansion: continuum fluid mechanics versus direct simulation Monte Carlo method / S E Selezneva, M I Boulos, M C M van de Sanden et al. // *Journal of Physics D: Applied Physics.* — 2002. — jun. — Vol. 35, no. 12. — Pp. 1362–1372. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/35/12/312>.
78. *Voges M., Klinner J., Willert C., Blumcke E.* PIV MEASUREMENTS IN INTERACTING SUPERSONIC FREE JETS UNDER PRESSURIZED CONDITIONS. — 2007. — September.
79. *Klinner J., Willer C., Glumm Marc-Stefan, Blumcke E.* TIME RESOLVED VISUALIZATION OF DENSITY-GRADIENTS WITHIN THE FLOW FIELD OF AIRBAG GAS GENERATORS. — Fachtagung “Lasermethoden in der Strömungsmesstechnik”, Karlsruhe. — 2008. — September.
80. Airbag Gasgenerator CFD / Stand der Arbeiten. — ingenieurburo beilke, 14.10.2015, Dresden. — 2015.
81. *Petit O., Nilson H., Page M., Beaudoin M.* The ERCOFTAC Centrifugal Pump OpenFOAM Case-Study. — Proceedings of the 3rd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problem in Hydraulic Machinery and Systems, Brno, Czech Republic. — 2009.
82. *Combes J.F.* Test Case U3: Centrifugal Pump with a Vaned Diffuser. — ERCOFTAC Seminar and Workshop on Turbomachinery Flow Prediction VII. — 1999.

83. Wittig K. Konstruktion einer Gasturbine fuer Modellflugzeuge und Dokumentation der Auslegungsrechnungen. — Muenchen. — 1993.
84. Rochuon N., Trébinjac I., Billonnet G. An extraction of the dominant rotor-stator interaction modes by the use of Proper Orthogonal Decomposition (POD) // *Journal of Thermal Science*. — 2006. — jun. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 109–114. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11630-006-0109-4>.
85. Leonida NICULESCU Mihai, Sterian DANAILA. Unsteady effects at the interface between impeller-vaned diffuser in a low pressure centrifugal compressor // *INCAS BULLETIN*. — 2013. — mar. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 71–86. — URL: <http://dx.doi.org/10.13111/2066-8201.2013.5.1.8>.
86. Fjällman Johan, Mihaescu Mihai, Fuchs Laszlo. Analysis of 3 Dimensional Turbine Flow by Using Mode Decomposition Techniques // Volume 2D: Turbomachinery. — ASME International, 2014. — jun. — URL: <http://dx.doi.org/10.1115/GT2014-26963>.
87. Kalugin Michael D., Strijhak Sergei V. IMPLEMENTATION OF POD AND DMD METHODS IN APACHE SPARK FRAMEWORK FOR SIMULATION OF UNSTEADY TURBULENT FLOW IN THE MODEL COMBUSTOR // *ECCOMAS Proceedings*. — 2016. — June.
88. Flow Simulations by a Particle Method Using Logarithmic Weighting Function / K. Kakuda, J. Toyotani, S. Matsuda et al. // *SL*. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 154–161.
89. Flow Simulations in a Liquid Ring Pump Using a Particle Method / K. Kakuda, Y. Ushiyama, S. Obara, K. Katagiri // *CMES*. — Vol. 66, no. 3. — Pp. 215–226.
90. Ding Hui, Jiang Yu, Wu Hao, Wang Jian. TWO PHASE FLOW SIMULATION OF WATER RING VACUUM PUMP USING VOF MODEL. — ASME/JSME/KSME 2015 Joint Fluids Engineering Conference, Volume 1: Symposia, Seoul, South Korea. — 2016.
91. Strömungssimulation Flüssigkeitsringpumpe / Projekt 1. — ingenieurburo beilke, 28.09.2015, Dresden. — 2015.
92. Git repository for hybrid KT/PISO OpenFOAM solvers sources. — <https://github.com/unicfdlab>.

93. *Peng Ding-Yu, Robinson Donald B.* A New Two-Constant Equation of State // *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*. — 1976. — feb. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 59–64. — URL: <http://dx.doi.org/10.1021/i160057a011>.
94. *Soave Giorgio.* Equilibrium constants from a modified Redlich-Kwong equation of state // *Chemical Engineering Science*. — 1972. — jun. — Vol. 27, no. 6. — Pp. 1197–1203. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0009-2509\(72\)80096-4](http://dx.doi.org/10.1016/0009-2509(72)80096-4).