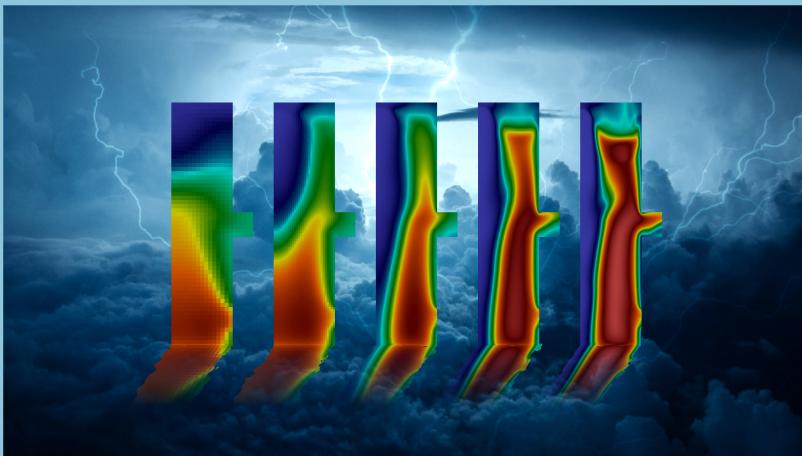


Christian Sander

## Entwicklung eines Simulationsmodells für Schaltlichtbögen in Überspannungsableitern





**Entwicklung eines Simulationsmodells für  
Schaltlichtbögen in Überspannungsableitern**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von Christian Sander

aus Bielefeld

eingereicht am: 09.03.2020

mündliche Prüfung am: 04.09.2020

1. Referent: Prof. Dr-Ing. Michael Kurrat

2. Referent: Assistant Prof. Dr. Petr Kloc

Druckjahr: 2020



---

## Vorwort

*I've yet to see any problem, however complicated, which when you looked at it the right way didn't become still more complicated.*

—Poul Anderson, *Call Me Joe*, April 1957

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2014 bis 2020 während meiner Tätigkeit als Entwickler bei Phoenix Contact.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Kurrat, zum einen, da er mir diese Arbeit als externer Doktorand des Instituts für Hochspannungstechnik und Elektrische Energieanlagen (elenia) der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig ermöglicht hat, zum anderen auch für seine Anregungen und die Betreuung dieser Arbeit. Die langjährige Kooperation zwischen dem Institut und Phoenix Contact habe ich immer als inspirierend empfunden.

Ich danke Herrn Assistant Professor Dr. Petr Kloc für die Begutachtung meiner Arbeit sowie für unseren Austausch über Strahlungsmodellierung und die Berechnung von Absorptionsspektren.

Herrn Rainer Durth danke ich für sein Engagement für die Simulation von Überspannungsableitern, die mir diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht hat. Auch möchte ich Herrn Dr.-Ing. Martin Wetter und Herrn Dr.-Ing. Gernot Finis dafür danken, dass sie mir die Gelegenheit zur Arbeit an diesem Thema gegeben haben. Es ist nicht selbstverständlich, in der Industrie promovieren zu können.

Für das konstruktive Arbeitsklima und die gute Kollegialität möchte ich allen Mitarbeitern der Business Unit Trabtech bei Phoenix Contact danken.

Insbesondere danke ich Herrn Dr. rer. nat. Jan-Erik Schmutz für die vielen anregenden Diskussionen und seine Unterstützung und Geduld, wenn ich mit einem Problem mal nicht weiterkam und feststeckte. Eigentlich müsste ich dir einen Stuhl schenken...

Weiterhin danke ich meinen Korrekturlesern Stefan Jörres und Muhamet Alija.

Dr. Matvey Kravoshin danke ich für die Entwicklung des Strömungslösers, den ich in dieser Arbeit verwendet habe. Insbesondere die Diskussionen zur Integration und Anpassung an meine Problemstellung waren sehr hilfreich.

Meiner Freundin Maren danke ich für die tägliche Unterstützung und Motivation.

## Kurzfassung

Überspannungsschutzgeräte dienen dazu, die maximal auftretenden Spannungen in einem Stromkreis zu begrenzen. Überspannungen können durch Blitz einschläge sowie Schalthandlungen entstehen. Für die energiereichsten Ereignisse werden Überspannungsableiter eingesetzt, die auf Funkenstrecken basieren. Während eines Impulsstroms wird ein Lichtbogenplasma zwischen den Elektroden der Funkenstrecke gezündet, das den Strom führt und somit den Schaltkreis schützt. Die dabei auftretenden hohen Temperaturen und Drücke stellen hohe Anforderungen an die mechanische und thermische Belastbarkeit des Ableiters. Aufgrund der kompakten Bauweise gekapselter Funkenstrecken, der hohen Energiedichte und der Länge der Impulse gestaltet sich eine experimentelle Herangehensweise als schwierig, so dass häufig nur empirisch gearbeitet werden kann. Die Entwicklung von Simulationsmodellen bietet hier die Möglichkeit, detaillierte Erkenntnisse und ein besseres Verständnis über das Verhalten von Lichtbogenplasmen zu gewinnen. Diese Arbeit beschäftigt sich daher mit der Entwicklung eines solchen Simulationsmodells. Dabei werden die wesentlichen Aspekte des Modells beschrieben und untersucht. Ein besonderer Fokus liegt auf den Unterschieden, die sich hier durch die im Vergleich zu anderen Schaltlichtbögen signifikant höheren Energiedichten ergeben. Wesentliche Näherungen, die bei der Simulation thermischer Plasmen häufig genutzt werden, sind nur noch eingeschränkt gültig. Da es sich bei dem Simulationsprogramm um eine Neuentwicklung handelt, wird in einem großen Teil der Arbeit das Konvergenzverhalten des Modells untersucht. Die verwendeten Näherungsmethoden für die Berechnung des Magnetfelds und des Strahlungstransports werden untersucht und bewertet, außerdem erfolgt eine Untersuchung der Wechselwirkung mit den Wänden, die das Lichtbogenplasma begrenzen. Schlussendlich wird ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen gezeigt, um die Genauigkeit des Modells zu bewerten. Es zeigt sich, dass das Modell grundsätzlich zur qualitativen Beschreibung des Systems geeignet ist, jedoch sagt es eine zu hohe Druckentwicklung im Ableiter voraus.



## Abstract

Surge protective devices are used to protect electric circuits from surge voltages and impulses. Overvoltage is created by lightning and load switching. Spark gaps are used to handle high energetic surge impulses. When an overvoltage occurs an arc plasma ignites between the electrodes of the spark gap that carries the current and protects the circuit. The high temperatures and pressures make high demands on the mechanical and thermal stability of the device. An experimental approach is difficult because of the high energy density, the short time scales and the compact construction of encapsulated spark gaps so an empirical approach is often used. The development of simulation models thus gives the opportunity to gain detailed insights and a better knowledge of arc plasma behavior in spark gaps. This work focusses on the development of such a simulation model. A special emphasis is placed on the differences resulting from higher energy densities compared to other switching arcs. Under these conditions the elementary approximations used in the modelling of thermal plasmas are only valid to a limited extent. Because the simulation program is newly developed for these conditions the model's convergence behavior makes up a large part of the thesis. The employed approximative methods for the calculation of the magnetic field and of radiation transport are investigated and evaluated. The interaction with the enclosing walls is investigated in further detail. Finally the simulation is compared with experimental results to test the accuracy of the model. It turns out that the model is suitable for the qualitative description of the system, but it overpredicts the pressure in the arrester.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Überspannungsschutz . . . . .	2
1.2 Arbeiten anderer Autoren . . . . .	5
1.2.1 Eindimensionale und empirische Modelle . . . . .	5
1.2.2 Dreidimensionale Plasmamodelle . . . . .	7
1.2.3 Strahlungsmodellierung . . . . .	10
1.2.4 Wechselwirkung des Plasmas mit der Wand . . . . .	10
1.2.5 Magnetfeld . . . . .	13
1.3 Zielstellung der eigenen Arbeit . . . . .	13
1.4 Gliederung der Arbeit . . . . .	15
<b>2 Grundlagen der Lichtbogensimulation</b>	<b>17</b>
2.1 Bilanzgleichungen . . . . .	17
2.1.1 Massenerhaltungsgleichung . . . . .	21
2.1.2 Impulserhaltungsgleichung . . . . .	22
2.1.3 Energieerhaltungsgleichung . . . . .	23
2.2 Elektrodynamik . . . . .	25
2.3 Thermodynamische und Transporteigenschaften des Plasmas . . . . .	32
2.4 Strahlungsmodellierung . . . . .	39
2.4.1 Physikalische Prozesse . . . . .	40
2.4.2 Strahlungstransportgleichung . . . . .	42
2.4.3 P <sub>1</sub> -Modell . . . . .	44
2.4.4 Optische Absorptionskoeffizienten . . . . .	46
2.4.5 Spektrale Mittelungsverfahren . . . . .	48
2.5 Plasma-Wand Interaktion . . . . .	54
2.5.1 Wärmetransfer . . . . .	54
2.5.2 Polymerabbrand . . . . .	55
2.5.3 Fußpunktmodellierung und Elektrodenabbrand . . . . .	59
2.5.4 Thermodynamische Eigenschaften der Festkörper . . . . .	68
<b>3 Modellbeschreibung</b>	<b>73</b>
3.1 Finite-Volumen-Methode . . . . .	73
3.2 Strömungslöser . . . . .	76
3.3 Randbedingungen . . . . .	77

---

3.4 Modellierung des Zündkreises . . . . .	82
3.5 Durchschlagsmodellierung . . . . .	84
<b>4 Untersuchung der Plasmamodellierung</b>	<b>87</b>
4.1 Auswahl der Modellgeometrie . . . . .	87
4.2 Beschreibung und Charakterisierung des Plasmaverhaltens . . . . .	88
4.3 Fehlermaß zur Bewertung der Genauigkeit der Näherungsverfahren	91
4.4 Magnetfeld . . . . .	93
4.5 Räumliche Konvergenz . . . . .	96
4.5.1 Netzverfeinerung . . . . .	96
4.5.2 Eindimensionales Netz . . . . .	103
4.5.3 Schlussbemerkungen . . . . .	105
4.6 Strahlung . . . . .	106
4.6.1 Konvergenzverhalten des spektral aufgelösten Modells . . . . .	107
4.6.2 Konvergenz der Band- und Gruppenmodelle . . . . .	110
4.6.3 Vergleich zwischen Netzgröße und Strahlungsmodellen . . . . .	115
4.6.4 Schlussbemerkungen . . . . .	116
4.7 Einfluss der Grenzschichtmodellierung . . . . .	117
4.7.1 Wärmeleitung in die Polymerwände . . . . .	117
4.7.2 Elektrodenmodellierung . . . . .	119
<b>5 Verifikation anhand einer Modellgeometrie</b>	<b>127</b>
5.1 Beschreibung der Modellgeometrie . . . . .	127
5.2 Ergebnisse . . . . .	129
5.3 Reduzierter Strahlungsfaktor . . . . .	132
5.4 Einfluss der Eindringtemperatur . . . . .	134
5.5 Höhere Amplituden . . . . .	137
5.6 Schlussbemerkungen . . . . .	139
<b>6 Zusammenfassung</b>	<b>141</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>153</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>157</b>





# 1 Einführung

Wird ein Gas sehr stark aufgeheizt, so ionisieren die im Gas enthaltenen Atome und geben Elektronen frei. Dieser Aggregatzustand wird als Plasma bezeichnet. Es zeichnet sich dadurch aus, dass freie Ladungsträger vorhanden sind und eine Quasineutralität gegeben ist, in der das Plasma auf makroskopischer Ebene elektrisch neutral geladen ist. Auf mikroskopischer Ebene treten dabei sehr starke elektrische Felder auf, so dass sich die Bewegung der Teilchen im Plasma signifikant von der Bewegung der Teilchen eines Gases unterscheidet. Durch die freien, beweglichen Ladungsträger wird ein Plasma elektrisch leitfähig. Plasma macht den größten Teil der Materie im Universum aus, da es sowohl in Sternen wie auch im interstellaren Raum vorkommt. Auf der Erde kommt es in natürlicher Form in der Atmosphäre und in Blitzentladungen vor.

Aus technischer Sicht gibt es vielfältige Anwendungsmöglichkeiten von Plasmen. Aufgrund der elektrischen Leitfähigkeit wird Plasma in Form von Schaltlichtbögen genutzt, um hohe Ströme zu tragen und zu schalten. Dabei erreicht das Plasma sehr hohe Temperaturen bis zu einigen 10 000 K. Die Möglichkeit, durch Energieeintrag sehr hohe Temperaturen zu erzeugen, findet Anwendung beim Schweißen, bei Plasmabrennern, in Hochdruckentladungslampen und in der Fusionsforschung, in der Temperaturen in der Größenordnung von  $10^8$  K erreicht werden. Kalte Plasmen, in denen nur die Elektronen hohe Temperaturen aufweisen, finden vielfältige Anwendungen in der Medizin, in Niederdruckentladungslampen, in der Oberflächenbearbeitung, in der Abgasreinigung und in Vakuumschaltern.

Die extremen Bedingungen in einem Plasma machen es schwierig, mit experimentellen Methoden Einblicke in das Verhalten des Plasmas zu gewinnen. Auch die vielfältigen physikalischen Prozesse und komplexen Wechselwirkungen in einem Plasma erschweren das intuitive Verständnis, so dass es starke Interessen gibt, mit Hilfe von Simulationsmodellen ein besseres Verständnis der Plasmadynamik zu gewinnen. Diesem Ziel kommt der Fortschritt in der Entwicklung von leistungsstarken Computern zugute, so dass es inzwischen möglich ist, dreidimensionale Simulationsmodelle routinemäßig einzusetzen, um das Verhalten von thermischen Plasmen zu modellieren. Gegenüber experimentellen Methoden bieten Simulationen den Vorteil, dass der Zustand des Plasmas orts- und zeitaufgelöst verfolgt werden kann und darauf aufbauend das Verständnis der Plasmadynamik verbessert

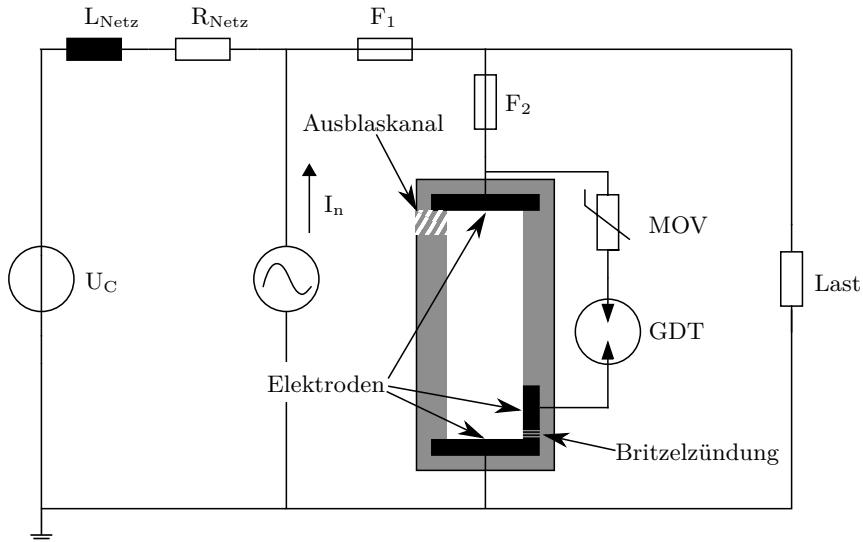
werden kann, wodurch konkrete Verbesserungsmöglichkeiten in der Entwicklung abgeleitet werden können. Gleichzeitig muss aber durch Validierungsexperimente sichergestellt werden, dass das Simulationsmodell die Realität mit hinreichender Genauigkeit abbilden kann.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Simulation eines Plasmas in Überspannungsableitern. Hier wird ein Schaltlichtbogen genutzt, um die bei Blitzeinschlägen auftretenden hohen Stromimpulse abzuleiten, und somit empfindliche elektrische Anlagen vor der Zerstörung zu schützen. In der Einleitung wird zunächst das Prinzip von Überspannungsableitern erläutert, anschließend werden der Stand der Forschung und die Ziele sowie die Strukturierung der Arbeit dargestellt.

## 1.1 Überspannungsschutz

Überspannungsschutzgeräte (ÜSG) dienen dazu, die maximal auftretenden Spannungen in einem Stromkreis zu begrenzen. Überspannungen können durch Blitzeinschläge sowie Schalthandlungen entstehen. Bei einem Blitzeinschlag kommt es zu Impulsströmen von bis zu einigen 10 kA. Das ÜSG wird parallel zu dem zu schützenden Stromkreis geschaltet (siehe Abbildung 1.1). Beim Auftreten eines Impulsstroms geht das ÜSG in einen leitfähigen Zustand über, so dass der größte Teil des Stroms durch das ÜSG fließt. Aufgrund des niedrigen Widerstands ist dieses in der Lage, den Impulsstrom  $I_n$  zerstörungsfrei zu tragen und dabei die Spannung auf verträgliche Werte zu begrenzen. Nach dem Impulsstrom muss das ÜSG wieder hochohmig werden, um einen dauerhaften Kurzschluss des Versorgungsnetzes zu verhindern. Der nach dem Impulsstrom auftretende Strom aus dem Netz wird als Netzfolgestrom bezeichnet.

Für die energiereichsten Ereignisse werden Überspannungsableiter eingesetzt, die auf Funkenstrecken basieren. Um sensiblere Niederspannungsanlagen zu schützen, werden mehrstufige Schutzkonzepte angewendet, bei denen die inneren Zonen jeweils für niedrigere Energien und Schutzpegel ausgelegt sind. Hier kommen Metall-Oxid-Varistoren (MOV) (mittlere Energien, hohe bis niedrige Schutzpegel) sowie Suppressordioden (niedrige Energien, niedrige Schutzpegel) zum Einsatz. In dieser Arbeit werden Funkenstrecken betrachtet, die anderen Schutzkonzepte werden daher nicht weiter erläutert.



**Abb. 1.1:** Prinzipschaubild der Funktionsweise und Beschaltung eines Überspannungsableiters am Beispiel einer gekapselten Funkenstrecke mit Zündkreis.

In einer Funkenstrecke wird während eines Impulsstroms ein gut leitfähiges Lichtbogenplasma zwischen den Elektroden gezündet, das den Strom führt und somit die parallel liegenden Verbraucher schützt. Um die Begrenzungsspannung niedrig zu halten, wird ein zusätzlicher Zündkreis verwendet, der dafür sorgt, dass sich das Plasma zwischen den Elektroden bei wesentlich niedrigeren Spannungen als der dielektrischen Durchschlagsspannung bildet. Je nach Zielanwendung kommen hier verschiedene Schaltungen zum Einsatz, so z.B. Hochspannungszündungen bei kurzen Überschlagsstrecken oder kapazitive Ansteuerungen bei gestapelten Funkenstrecken. In dieser Arbeit wird eine weitere Zündschaltung verwendet, die sogenannte Britzelzündung. Hier wird parallel zu den Haupteletroden eine Reihenschaltung aus einer schlecht leitfähigen Verbindung im Inneren der Brennkammer, einem MOV und einem gasgefüllten Ableiter (engl. Gas Discharge Tube (GDT)) verwendet.

Abbildung 1.2 zeigt den  $8/20 \mu\text{s}$ -Stoßstromimpuls eines Prüfgenerators (ohne hinterlegtem Netz) und den resultierenden Spannungsverlauf eines gekapselten Ab-

leiters mit einer Britzelzündung. Bei einer auftretenden Überspannung wird zunächst der GDT leitfähig, so dass ein Strom über den MOVs und die schlecht leitfähige Verbindung fließen kann. Dieser führt zu einer starken Erhitzung im Bereich zwischen der Zündelektrode und der daneben liegenden Haupteletrode, so dass sich an dieser Stelle ein Plasma bildet, dass die schlecht leitfähige Verbindung überbrückt. Durch den Energieeintrag in dieses Plasma kommt es zu einer Druckzunahme, die dazu führt, dass das Plasma sich ausbreitet und einen Kontakt zwischen den Haupteletroden herstellt. Dieser neu entstandene Pfad ist wesentlich besser leitfähig als der Pfad über den Zündkreis, da der MOV einen hohen Spannungsabfall verursacht. Daher fließt der Strom anschließend über den Hauptpfad, die Spannung bricht ein und der MOV wird entlastet. In der Hauptstromphase wird der größte Teil der Energie innerhalb der Funkenstrecke umgesetzt und die Temperatur und der Druck steigen schlagartig an. Gegen Ende des Impulses sinkt die eingebrachte elektrische Leistung, so dass das Plasma abkühlen kann. Es kommt zur Wiederverfestigung und die Isolation des ÜSG wird wiederhergestellt. Im dargestellten Fall findet die Wiederverfestigung so schnell statt, dass die Kondensatoren des Prüfgenerators nicht vollständig entladen werden können und eine Restspannung verbleibt. Bei angeschlossenem Netz schwingt die Spannung nach Verlöschen des Plasmas auf die Netzspannung ein.

Moderne Funkenstrecken nutzen einen gekapselten Aufbau, bei dem der im Plasma aufgebaute Druck langsam über einen engen Ausblaskanal abgebaut wird. Im Plasma wird, bedingt durch die hohe Temperatur, sehr viel Energie in Form von Strahlung abgegeben. Die intensive Strahlung führt zum Abbrand des Kammerwandmaterials, welches als vergleichsweise kaltes Gas in das Plasma eindringt und somit zur Kühlung beiträgt. Die Leitfähigkeit sinkt mit niedrigeren Temperaturen, in Kombination mit dem eingeprägten Strom folgt daraus ein höherer Spannungsabfall. Dieser Effekt wird genutzt, um das Netzfolgestromlöschverhalten des Ableiters zu verbessern. Gleichzeitig führt der Materialabbrand zu einem Alterungsprozess in gekapselten Funkenstrecken, da mit jedem Impuls weiteres Wandmaterial abbrennt und sich der Brennkanal aufweitet. So kann sich das Plasma weiter ausdehnen, wodurch der effektiv wirksame leitfähige Querschnitt des Plasmas und damit dessen Leitwert steigt. Durch das abgeschlossene Volumen und durch den Materialabbrand kann der Druck in der Brennkammer mehrere 100 bis 1000 bar erreichen. Die Kapselung muss daher in der Lage sein, diesem

Druck mechanisch standzuhalten. Der Ausblaskanal muss so gestaltet sein, dass kein leitfähiges Plasma aus der Kapselung austritt, um Kurzschlüsse und Brände zu vermeiden.

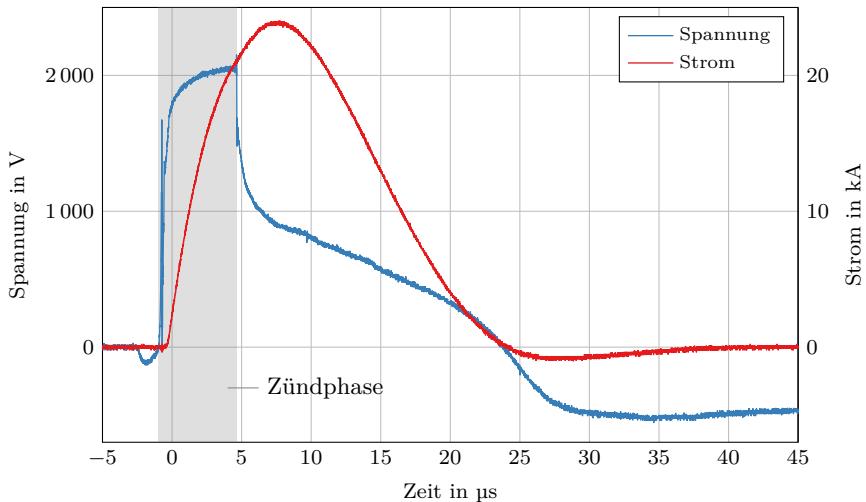
Ältere Überspannungsschutzgeräte auf Basis von Funkenstrecken verzichten häufig auf die Kapselung, was dazu führt, dass Plasma aus dem Gerät geblasen wird und ein Überdruck im Schaltschrank entstehen kann. Weiterhin weisen solche Ableiter häufig eine niedrige Netzfolgestromlöschfähigkeit auf, was bei ungeeigneter Wahl der Überstromschutzeinrichtung  $F_1$  dazu führen kann, dass diese auslöst und den Schaltkreis stromlos schaltet, sofern keine kleiner ausgelegte Vorsicherung  $F_2$  verbaut ist. Ein hoher Netzfolgestrom kann den Ableiter stärker belasten als der eigentliche Impulstrom und somit die Alterung des Ableiters beschleunigen. Moderne ÜSGs weisen daher eine hohe Netzfolgestromlöschfähigkeit aus, so dass kein signifikanter Anteil des Stroms durch das Netz gespeist wird. Ein Teil der Energie des Impulses wird jedoch in der Netzinduktivität  $L_{\text{Netz}}$  gespeichert, welche sich nach dem Impuls entladen muss. Daher fließt auch bei Funkenstrecken mit hoher Netzfolgestromlöschfähigkeit und entsprechender Phasenlage des Netzes ein geringer Netzfolgestrom, der sich nicht vermeiden lässt.

## 1.2 Arbeiten anderer Autoren

Der größte Teil der bisher publizierten Arbeiten im Bereich der Simulation von thermischen Plasmen betrachtet Anwendungsbereiche mit wesentlich geringerer Energiedichte und geringeren Drücken. Nennenswert sind hier Niederspannungsschaltgeräte, Schweißlichtbögen, Plasmuschneider, Plasmareaktoren und elektro-thermische Beschleuniger. Dieser Fokus lässt sich primär mit der größeren wirtschaftlichen Bedeutung dieser Anwendungsfelder erklären.

### 1.2.1 Eindimensionale und empirische Modelle

Die ersten physikalischen Beschreibungen von Lichtbögen stammen von Elenbaas [Ele34] und Heller [Hel35]. Sie stellen Differentialgleichungen für Lichtbögen in Quecksilberdampflampen auf, mit denen der Temperaturverlauf und das elektrische Verhalten des Lichtbogens modelliert wird. Damit ergibt sich bereits ein einfaches qualitatives Modell.



**Abb. 1.2:** Exemplarischer Spannungsverlauf über einer Funkenstrecke bei Belastung mit einem 8/20  $\mu\text{s}$ -Stoßstromimpuls ohne hinterliegendem Netz. Der Verlauf teilt sich in drei Bereiche, die Zündphase, in der der Strom über den Zündkreis fließt, die Hauptstromphase und die Löschphase, in der es zur Wiederverfestigung kommt. Da der verwendete Prüfgenerator eine nichtideale Stromquelle darstellt, geht der Strom zurück auf null und es stellt sich die Restspannung der Kondensatoren im Prüfgenerator ein.

Wird ein Lichtbogen durch Außenwände eingeengt, so kühlt die Wechselwirkung mit der Wand den Lichtbogen und stabilisiert ihn. Dieser wandstabilisierte Lichtbogen zeichnet sich durch einen verhältnismäßig konstanten, hohen Temperaturverlauf im Inneren und einen steilen Temperaturgradienten in der Nähe der Wand aus, da das Plasma hier durch abbrennendes Material gekühlt wird. Dieser Fall wird in der Literatur durch ein *Zwei-Zonen-Modell* beschrieben, das den Lichtbogen in eine heiße Plasmazone und eine kalte Randzone einteilt [Nie78; Ibr80; KL84]. Dann wird über Energie- und Masseflussbilanzen die Dynamik des Systems berechnet. Hier können Wärmeleitung und Strahlung sowie Abbrandmodelle berücksichtigt werden. Dieses Modell stellt somit einen Spezialfall eines eindimensionalen Lichtbogenmodells dar, in dem eine grobe Modellierung der physikalischen Prozesse stattfinden kann. Der Vorteil eines solchen Modells liegt in der einfachen Zugänglichkeit, so dass wichtige Effekte im Lichtbogen leichter verstanden wer-

den können. Mithilfe eines solchen Modells können Prognosen gemacht werden, es eignet sich aber nur für sehr einfache Geometrien.

Im Weiteren wurden empirische Modelle entwickelt, die das elektrische Verhalten eines Lichtbogens beschreiben. Cassie [Cas39] und Mayr [May43] entwickelten die bekanntesten, die die Veränderung des Leitwertes als Bilanz aus zugeführter und abgeföhrter Leistung beschreiben. Damit lässt sich das Verhalten eines Lichtbogens in der Berechnung von Schaltkreisen einfach modellieren. Nachteilig ist jedoch die Notwendigkeit, die Modellparameter auf jeden spezifischen Anwendungsfall kalibrieren zu müssen. Außerdem bieten diese Modelle keinen Einblick in das physikalische Verhalten des Lichtbogens und eignen sich nicht zur Prognose.

Basierend auf den Modellen von Cassie und Mayr wurden viele Erweiterungen entwickelt [BZP95; TWV97; SS00; Gua+05], die zum Teil bessere Ergebnisse liefern, jedoch grundsätzlich den gleichen Limitierungen unterworfen sind.

### 1.2.2 Dreidimensionale Plasmamodelle

Allen bisher diskutierten Modellen ist gemeinsam, dass sie sich nicht für beliebige dreidimensionale Geometrien anwenden lassen, und aufgrund der jeweils angenommenen Vereinfachungen empirisch ermittelte Faktoren benötigen, um das Lichtbogenverhalten nachzubilden. Die Entwicklung leistungsfähiger Computer hat es ermöglicht, das räumliche und zeitliche Verhalten zu modellieren, so dass es seit Beginn des 21. Jahrhunderts möglich ist, beliebige dreidimensionale Geometrien zu berechnen. Solche Modelle kommen häufig ohne geometrieabhängige Kalibrationsfaktoren aus und ermöglichen daher die Prognose des Plasmaverhaltens bei unbekannten Geometrien. Dennoch bleibt die Rechenzeit problematisch und viele Publikationen beschäftigen sich mit der Verbesserung der Rechengeschwindigkeit und der Vereinfachung der Modelle [Rüt14; RGF12; Gon+12].

Ein ausführlicher Überblick über die Modellierung von thermischen Plasmen findet sich bei Pfender und Heberlein [PH07]. Sie diskutieren die Materialeigenschaften von Plasmen und deren physikalische Hintergründe, sowohl für Plasmen im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE) als auch für zwei-Temperatur-Plasmen, bei denen die Elektronen eine andere Temperatur als die schweren Teilchen aufweisen. Weiterhin diskutieren sie verschiedene Lichtbogenmodelle und den

Energietransport an den Elektroden.

Gleizes, Gonzalez und Freton beschreiben die Modellierung von thermischen Plasmen anhand von industriellen Anwendungsbeispielen[GGF05]. Hierfür werden zunächst die erforderlichen Modelle präsentiert, anschließend wird auf Schweißprozesse, Plasmafackeln mit Pulverinjektion als Beschichtungsverfahren und auf Leistungsschalter eingegangen.

Ein Überblick über die Modellierung von Plasmastrahlern findet sich bei Trelles et al. [Tre+09]. Die Autoren beschreiben die Vorgänge an Anode und Kathode und betrachten insbesondere den Rückzündungsvorgang bei beblasenen Lichtbögen.

Ein großer Teil der veröffentlichten Arbeiten beschäftigt sich mit Schaltlichtbögen in Leistungsschaltern. In diesen wird der Lichtbogen an sich öffnenden Kontakten gebildet und wandert anschließend über Laufschienen in einen metallischen Löschblechstapel. Wichtige Fragestellungen sind hier die Bewegung des Lichtbogens in der Schaltkammer [Swi+04] sowie der Übergang auf die Löschblechpakete[Mut09; Rüt14], die durch Kühlung und die an den Grenzschichten auftretenden Spannungsabfälle zur Löschung des Lichtbogens beitragen. Auch die Rückzündung des Lichtbogens in bereits durchquerten Bereichen ist hier von großer Bedeutung.

Rümpfer untersucht sowohl wandstabilisierte und frei brennende Lichtbögen sowie Niederspannungsschaltgeräte [Rüm09]. Er betrachtet die Modellierung der Strahlung und den Einfluss von Metalldampf.

Yang et al. untersuchen den Einfluss von Metalldampf in Niederspannungsleistungsschaltern[Yan+10]. Hierzu verwenden sie ein Modell, dass die unterschiedlichen Vorgänge an Anode und Kathode beschreibt und vergleichen die Ergebnisse mit Aufnahmen einer Hochgeschwindigkeitskamera.

Ein weiterer Teil der Publikationen bezieht sich auf Schweißlichtbögen. Hier ist besonders die Interaktion des Plasmas mit dem Schweißgut von Interesse. Murphy et al. beschäftigen sich mit dem Einfluss des Metalldampfes aus den Elektroden und des Schutzgases auf den Schweißvorgang [Mur+09] sowie mit Entmischungsvorgängen der verschiedenen Spezies im Plasma[Mur01].

Im Bereich des Überspannungsschutzes gibt es bisher nur wenige Arbeiten, die sich mit der Simulation von thermischen Plasmen beschäftigen. Nennenswert ist

hier die Arbeit von Pospiech [Pos01], der einen Lichtbogen im einseitig offenen Rohr untersucht und hierzu ein Zwei-Zonen Modell verwendet. Dafür werden einige Eigenschaften von Polyoxymethylen (POM) berechnet, das auch in dieser Arbeit als Wandmaterial zum Einsatz kommt. Der größte Teil seiner Arbeit konzentriert sich jedoch auf experimentelle Untersuchungen, auch im Hinblick auf das Verhalten eines Ableiters am Spannungsnetz.

Ait-Amar et al. modellieren einen Überspannungsableiter, der als Löscherprinzip einen Löscherblechstapel verwendet [Ait+09]. Daraus folgt ein zu Leistungsschaltern analoges Verhalten. Zur Strahlungsmodellierung wird das Diskrete-Ordinaten-Modell (DO-Modell) verwendet, die Autoren verzichten jedoch auf die Modellierung des Materialabbrands an den Wänden. Weiterhin nutzen sie Strömungssimulationen, um das Strömungsverhalten im Abströmbereich hinter den Löscherblechen zu untersuchen.

Frolov et al. untersuchen einen Mehrkammerableiter für Hochspannungsanwendungen [Fro+15; Chu+16]. Hierzu berechnen sie zunächst die Eigenschaften von Plasmen bestehend aus Luft, Kupfer, Wolfram, Eisen und Silikongummi. Allerdings verwenden sie ein sehr einfaches Plasmamodell, dass die Druckabhängigkeit der Eigenschaften des Plasmas, magnetische Kräfte und den Strahlungstransport vernachlässigt. Der Einfluss des Materialabbrands wird über die Zusammensetzung des Plasmas nur indirekt berücksichtigt, so dass die kühlende Wirkung des Materialabbrands nicht berücksichtigt wird. Dennoch gelingt es, qualitative Ergebnisse zu erzielen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen Plasmen in gekapselten Funkenstrecken und anderen Schaltlichtbögen sind die auftretenden Drücke, die Werte im Bereich von bis zu 1000 bar annehmen können. Ähnlich hohe Drücke finden sich sonst nur in elektrothermischen Beschleunigern, in denen ein Projektil durch ein dahinter gezündetes Plasma beschleunigt wird (siehe [GB93; ZBD01; Zol+93]). Solche Beschleuniger finden Anwendung bei der Nachbildung der Auswirkungen von Mikrometeoriten auf Satelliten sowie im militärischen Bereich. Hier werden Projektilgeschwindigkeiten im Bereich einiger  $\text{km s}^{-1}$  erreicht. Die Plasmadynamik ist grundsätzlich vergleichbar, mit dem Unterschied, dass kein Projektil verwendet wird und dass das abströmende Plasma in gekapselten Funkenstrecken über verengte Kanäle gedämpft und abgekühlt wird.

### 1.2.3 Strahlungsmodellierung

Der Modellierung der Strahlung kommt in thermischen Plasmen eine große Bedeutung zu, da die Strahlung einen wesentlich größeren Beitrag zum Energie- transfer leistet als die Wärmeleitung. Gleichzeitig ist die korrekte Behandlung der Strahlung sehr schwierig, da die Emissions- und Absorptionsspektren komplexe Strukturen zeigen, die mit der derzeitig verfügbaren Rechenleistung in transienten, dreidimensionalen Rechnungen nicht fein genug aufgelöst werden können. Bei Normaldruck und den üblicherweise vorkommenden Ausdehnungen des Plasmas kann das Plasma als optisch dünn angesehen werden. In diesem Fall tritt die Strahlung nahezu ungehindert aus dem heißen Kern des Plasmas aus und signifikante Absorption findet nur im Rand des Lichtbogens statt. Dies hat zur Entwicklung der Nettoemissionskoeffizienten geführt, die die Strahlungsemision unter Annahme einer konstanten Lichtbogentemperatur annähern. Dabei kommt es zur Vernachlässigung der Absorption in den Wandbereichen und der Strahlungseinfall auf die Wände wird nicht abgebildet. Unabhängig von diesen Nachteilen wird die Methode aufgrund ihrer einfachen Anwendbarkeit und der kurzen Rechenzeit von vielen Autoren angewendet. Seit einiger Zeit wird jedoch zunehmend das P<sub>1</sub>-Modell, das auch in dieser Arbeit benutzt wird, sowie das DO-Modell verwendet. Eine große Schwierigkeit stellt dabei die spektrale Vereinfachung des Strahlungsspektrums dar. Ausführliche Diskussionen zu diesem Themengebiet finden sich bei Peyrou et al. [Pey+12] sowie bei Nordborg und Iordanidis [NI08] und Reichert, Gonzalez und Freton [RGF12]. Ein weiteres Themengebiet ist der Einfluss von Metallen im Plasma auf den Strahlungstransport (siehe [Gle+93; Pet+14; ABC10]). Erhöhte Metallkonzentrationen führen zu stärkerer Emission im Plasmakern und somit zu einer Absenkung der Plasmatemperatur.

### 1.2.4 Wechselwirkung des Plasmas mit der Wand

Die intensive Strahlung des Plasmas führt zu Wechselwirkungen zwischen dem Plasma mit der umschließenden Wand. Dabei wird ein Teil des Wandmaterials dissoziiert. Die in das Plasma eindringende Masse reduziert den mittleren Energiegehalt pro Teilchen und kühlt somit das Plasma. Dieser Effekt ist von hoher Bedeutung bei der Wiederverfestigung, der Druckentwicklung und den Strömungsverhältnissen und wird daher in vielen Publikationen untersucht.

Einen Überblick über frühe Arbeiten geben C. B. Ruchti und L. Niemeyer [CL86], die schon ein Leistungsbilanzmodell nutzten, um die Abbrandrate zu bestimmen. Dieses basiert auf der Leistungsbilanz zwischen der einfallenden Strahlung und der Verdampfungsenthalpie des Wandmaterials. Da ein Zwei-Zonen-Modell verwendet wurde, war ein Kalibrationsfaktor  $\theta$  erforderlich, der den für den Abbrand relevanten Anteil der Strahlung angibt. Ähnliche Bilanzmodelle werden sehr häufig verwendet (siehe z.B. [Dom+97; God+00; RSZ11]).

Arabi et al. [Ara+14] und Petchanka et al. [Pet+16] modellieren die Wandverformung durch das abbrennende Material, um das Alterungsverhalten nach mehreren Impulsen zu berechnen. Petchanka et al. zeigt außerdem die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Druckabhängigkeit der Enthalpie in der Bilanzgleichung. Dabei ergeben sich wesentlich bessere Ergebnisse unter Berücksichtigung dieser beiden Effekte und die Autoren schlussfolgern daher, dass diese Effekte berücksichtigt werden müssen. Während des ersten Impulses zeigt sich jedoch kein signifikanter Unterschied durch die Wandverformung.

Tanaka et al. [Tan+08] und Nakagawa et al. [Nak+15] verwenden ein Abbrandmodell basierend auf den Hertz-Knudsen und Clausius-Clapeyron Gleichungen. Dabei werden verschiedene Polymere als Wandmaterialien untersucht und miteinander verglichen, es werden jedoch keine Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen zur Validierung dieses Abbrandmodells gezeigt.

Ma et al. [Ma+09] untersuchen eine Spaltgeometrie mit Laufschienenelektroden und betrachten die Auswirkung des Polymerabbrands auf die Lichtbogenbewegung. Sie beobachten eine Beschleunigung der Lichtbogenbewegung durch den höheren Druck sowie eine Reduktion der Rückzündungswahrscheinlichkeit aufgrund der niedrigeren elektrischen Leitfähigkeit des Polymergeases.

Der Übergang zwischen dem Plasma und den Elektroden wird durch zusätzliche Effekte wie den Elektronentransport beeinflusst, so dass sich hier je nach Anordnung sehr unterschiedliches Verhalten ausbilden kann. Rümpler [Rüm09] argumentiert, dass das Energiebilanzmodell nicht direkt auf Elektroden übertragen werden kann und verwendet daher ein einfaches empirisches Modell, dass mit einer Verdampfungsrate arbeitet, die proportional zur Stromdichte angesetzt wird.

Die Bewegung eines Lichtbogens auf Laufschielen nach Öffnung eines Kontaktes wird von Rong et al. [Ron+09b] untersucht. Die Autoren verwenden ein Energiebilanzmodell wie bei Polymerwänden, zusätzlich berücksichtigen sie jedoch weitere Effekte in der Energiebilanz wie die Elektrodenfallspannung, die Austrittsarbeit, die Aufheizung der Kathode durch Ionenbombardement und die der Anode durch Elektroneneinfang. Die Elektrodenfallspannungen betragen 17,5 V an der Kathode und 2,5 V an der Anode. In diesem Modell trägt das Ionenbombardement mehr zum Elektrodenabbrand bei als die Strahlung. Die Simulationsrechnungen werden mit Hochgeschwindigkeitskameraaufnahmen verglichen und es zeigen sich gute Übereinstimmungen in der Lichtbogenbewegung und der Lichtbogenspannung, wenn die Erosion der Elektroden berücksichtigt wird.

Yang et al. [Yan+10] bauen auf der Arbeit von Rong et al. [Ron+09b] auf. Im Vergleich zu der vorhergehenden Arbeit wird die Behandlung der Fallgebiete weiter erläutert. Die Autoren verwenden an der Kathode eine verringerte effektive elektrische Leitfähigkeit, die den Spannungsabfall abbildet. Sie verwenden eine konstante Elektrodenfallspannung an der Kathode von 14,6 V für Stromdichten größer als  $10^8 \text{ A m}^{-2}$  mit einer maximalen Elektrodenfallspannung von 22,6 V bei  $10^4 \text{ A m}^{-2}$ . An der Anode wird das LTE-Diffusionsmodell von Lowke und Tanaka [LT06] verwendet. Sie zeigen weiterhin, dass die Berücksichtigung von Eisen, dass die Leitfähigkeit bei niedrigen Temperaturen erhöht, notwendig ist, um gute Ergebnisse zu erhalten. Die Simulationen an einer Laufschielenanordnung mit einem Löschblech werden mit Hochgeschwindigkeitskameraaufnahmen verglichen und zeigen eine gute Übereinstimmung bei den Unterschieden zwischen Anode und Kathode.

Neben diesen vereinfachenden Elektrodenmodellen existieren zahlreiche tiefer greifende Formulierungen, die die verschiedenen Spezies im Plasma berücksichtigen, um die Grenzschicht zwischen dem Plasma und der Elektrode sowie den Wärmetransport und den Elektrodenabbrand besser zu verstehen. Aufgrund ihrer Komplexität und der häufig unvollständigen publizierten Materialdaten werden diese Modelle hier nicht weiter erläutert. Dennoch wird später auf einige dieser Arbeiten verwiesen, um die physikalischen Hintergründe der vereinfachten Modelle zu begründen.

### 1.2.5 Magnetfeld

Das vom Stromfluss erzeugte Magnetfeld koppelt über die Lorentzkraft mit der Strömung im Plasma und führt zur Einschnürung des Lichtbogens. Bei den hier betrachteten Niederfrequenzanwendungen werden induktive Effekte im Allgemeinen vernachlässigt, so dass magnetostatisch gerechnet wird. Je nach Anwendungsbereich kommen zusätzlich noch Permanentmagnete oder außerhalb des Plasmas liegende Leiter zum Einsatz, die bei der Berechnung berücksichtigt werden müssen. Eine weitere Herausforderung stellt die korrekte Berechnung der Randbedingung des Magnetfelds dar, die prinzipiell im Unendlichen auf null gesetzt werden kann. Aufgrund der endlichen Ausdehnung der Geometrie treten jedoch Verzerrungen des Magnetfeldes auf, die durch eine hinreichend große Entfernung des Randes zu den stromtragenden Elementen minimiert werden können. Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung der Feldwerte auf dem Rand durch das Biot-Savart-Gesetz. Neben dieser häufig genutzten Formulierung existieren zahlreiche weitere, wie z.B. die magnetostatische Moment-Methode [LCM14] oder die T-T0-Phi-Methode für ferromagnetische Materialien[Ron+09a]

## 1.3 Zielstellung der eigenen Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Simulationsmodell zu entwickeln, dass die spezifischen Herausforderungen von Überspannungsschutzgeräten berücksichtigt.

Die hohen Drücke in ÜSGs bedingen einen effizienten Energietransfer zwischen den Teilchen im Plasma, so dass davon ausgegangen wird, dass sich das Plasma im LTE befindet. Zur Vereinfachung wird in dieser Arbeit durchgängig mit einem Einzelfluidmodell gearbeitet.

Da Plasmasimulationen bisher nur unzureichend auf Überspannungsableiter angewendet wurden, liegt der Fokus dieser Arbeit auf der grundlegenden Betrachtung des Plasmaverhaltens und der Modellierung selbst. Eine wichtige Frage stellt hier das Konvergenzverhalten der Methoden dar, da numerische Fehler von systematischen Modellierungsfehlern getrennt werden müssen. Daher wird insbesondere die räumliche Konvergenz in dieser Arbeit genauer betrachtet.

Die Strömung des Plasmas ist entscheidend für das Verhalten des Überspannungsableiters und muss daher berücksichtigt werden. In der Arbeit wird davon abgese-

hen, empirische Turbulenzmodelle zu verwenden, da die Wahl des bestmöglichen Turbulenzmodells schwer zu begründen ist. Physikalisch genauere Verfahren wie die Large-Eddy-Simulation oder die Direkte Numerische Simulation werden aufgrund der erforderlichen Rechenleistung nicht angewendet.

Bedingt durch den hohen Druck ergeben sich Unterschiede in der Strahlungsmodellierung im Vergleich zu den üblicherweise verwendeten Modellen. Dies wird daher ebenfalls genauer untersucht. Ausgehend von der Zusammensetzung eines Luftplasmas werden dazu zunächst Absorptionsspektren berechnet, die dann anschließend genutzt werden, um den Strahlungstransport im  $P_1$ -Modell zu untersuchen. Insbesondere werden Näherungsverfahren zur Vereinfachung der spektralen Abhängigkeit des Strahlungstransports bewertet. Hierbei beschränkt sich diese Arbeit jedoch auf die Absorptionskoeffizienten von Luftplasmen.

Dem Materialabbrand kommt aufgrund seines Einflusses auf die Plasmadynamik eine vergleichsweise hohe Bedeutung zu und er wird daher genauer untersucht. Es werden verschiedene Modelle in ihren Auswirkungen auf den Materialabbrand, die Wärmebilanzen und Temperaturentwicklungen an den Oberflächen sowie deren Einflüsse auf das Plasma miteinander verglichen.

Weiterhin wird in dieser Arbeit eine Methode implementiert, um die Berechnung des Magnetfelds zu vereinfachen. Diese basiert zum Teil auf dem hybriden Modell von Freton et al. [Fre+11]. Die magnetische Advektion wird vernachlässigt.

In den Blitzschutznormen werden verschiedene Prüfimpulse definiert, die in der Entwicklung genutzt werden, um die Funktionsfähigkeit von ÜSGs zu testen. In dieser Arbeit wird ein als 8/20  $\mu\text{s}$ -Impuls bezeichneter Stoßstromimpuls verwendet. Die Bezeichnung leitet sich aus der Anstiegszeit und der Rückenhalbwertszeit des Impulses ab. Der 8/20  $\mu\text{s}$ -Impuls bildet Schalthandlungen und weiter entfernte Blitzeinschläge ab. Direkte Blitzeinschläge werden durch den 10/350  $\mu\text{s}$ -Impuls beschrieben, der etwa 20-mal mehr Energie in den Ableiter einbringt und eine Länge von etwa 1 ms aufweist. Aufgrund der im Vergleich langen Zeitspanne beschränkt sich diese Arbeit auf den 8/20  $\mu\text{s}$ -Impuls, um die Rechenzeit zu begrenzen. Gleichermaßen gilt für die Berechnung von Netzfolgeströmen, die einen wesentlich längeren Berechnungszeitraum erfordern und daher nicht für die Entwicklung eines Simulationsmodells geeignet sind. Die Anwendung des Simulationsmodells auf lange Impulse ist jedoch prinzipiell möglich, wenn die hohe Rechenzeit akzeptabel ist.

## 1.4 Gliederung der Arbeit

Der weitere Teil dieser Arbeit gliedert sich in vier Kapitel, eine Zusammenfassung und einen anschließenden Ausblick. Der Inhalt des **zweiten Kapitels** erläutert die notwendigen Grundlagen der Lichtbogenphysik. Dabei werden die grundlegenden Erhaltungsgleichungen, die Elektrodynamik sowie die Strahlungsmodellierung vorgestellt. Die Eigenschaften des Plasmas werden erläutert. Die Interaktion des Plasmas mit den Polymerwänden und den Elektroden wird aufgrund der großen Bedeutung dieser Effekte genauer betrachtet.

**Kapitel 3** befasst sich mit der Modellierung und Implementierung der im vorangegangenen Kapitel vorgestellten physikalischen Modelle, darunter die Beschreibung des Zündkreises und der Zündung, sowie die Wahl der korrekten magnetischen Randbedingung. Außerdem wird die Finite-Volumen-Methode (FVM) vorgestellt, die essenziell zur Lösung des Modells ist. Dabei wird auch der im Strömungslöser verwendete Algorithmus skizziert.

Im **vierten Kapitel** wird das entwickelte Modell an einer Beispielgeometrie untersucht. Dabei findet zunächst eine Charakterisierung des Plasmaverhaltens und eine Betrachtung des Konvergenzverhaltens statt. Anschließend folgt eine Untersuchung der verschiedenen Methoden zur Strahlungsmodellierung sowie eine Betrachtung der Elektrodenmodellierung.

Das **fünfte Kapitel** vergleicht Simulations- mit Messergebnissen an einem Testaufbau, um Aussagen zur Genauigkeit des Modells treffen zu können. Dabei werden der Spannungsverlauf sowie der Druckverlauf verglichen und Abweichungen dieser Größen diskutiert.



## 2 Grundlagen der Lichtbogensimulation

In diesem Kapitel werden die grundlegenden physikalischen Effekte eines Lichtbogenplasmas beschrieben. Zunächst werden hierzu die Bilanzgleichungen eines magnetohydrodynamischen Modells für den Fall eines einphasigen Plasmas aufgestellt. Dabei werden die zugrundeliegenden Annahmen und Näherungen betrachtet. Anschließend werden die verwendeten Gleichungen der Elektrodynamik hergeleitet. Ein großer Aspekt stellt die Beschreibung des Strahlungstransports im Plasma sowie die Interaktion der Strahlung mit den Wänden dar. Sämtliche hier dargestellten Zusammenhänge beziehen sich auf ein ruhendes Inertialsystem.

### 2.1 Bilanzgleichungen

Wechselwirkungen in Plasmen finden zum einen durch Stöße zwischen zwei (oder seltener drei oder mehr) Teilchen, zum anderen durch kollektive Wechselwirkungen eines geladenen Teilchens mit dem umgebenden elektromagnetischen Feld statt. Abhängig von den Bedingungen im Plasma kann es zu beliebigen Energieverteilungen der einzelnen Teilchenarten kommen. Unterschiede in der Energieverteilung entstehen einerseits durch die stark voneinander abweichenden Massen von Elektronen und schweren Atomen und Ionen und andererseits durch Unterschiede in der Strahlungsabsorption. Im allgemeinen Fall eines thermischen Ungleichgewichts kann das statistische, mesoskopische Verhalten eines Plasmas über die Boltzmann-Gleichung beschrieben werden [Str11]:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{1}{m_i} \vec{F}_i \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} \right) f_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_{\text{Stoß}} \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet  $f_i(\vec{x}, \vec{v}, t)$  die Verteilungsdichte einer Teilchenart, die die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt, bei  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  ein Teilchen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zu finden.  $\vec{F}_i = q_i (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  stellt die elektromagnetische Kraft dar.  $\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_{\text{Stoß}}$  beschreibt die Änderung der Verteilungsdichte durch Stöße mit anderen Teilchen und wird als Kollisionsintegral bezeichnet. Mit diesem Ansatz ist es prinzipiell möglich, das Ensembleverhalten von Plasmen zu beschreiben, die sechsdimensionale Verteilungsdichte macht eine numerische Beschreibung jedoch sehr aufwändig. In der kinetischen Gastheorie für ideale Gase, d.h. Punktteilchen, die nur lokal über Stöße miteinander wechselwirken, ergibt sich im thermodynamischen Gleichgewicht einer Teilchenart die Maxwell-Boltzmann-Verteilung, die die

Energie- und Geschwindigkeitsverteilung bei einer Temperatur beschreibt. Hierdurch reduziert sich die sechsdimensionale Verteilungsfunktion, da über die Temperatur eine mittlere Geschwindigkeit vorgegeben ist. Verschiedene Teilchenarten können grundsätzlich auch verschiedene Temperaturen aufweisen. Dies ist insbesondere bei Elektronen häufig der Fall, deren Masse wesentlich kleiner ist als die von schwereren Atomen und Ionen.

Im allgemeinen Fall unterschiedlicher Temperaturen der Teilchenarten ergibt sich das Mehrfluidmodell, in dem jede Teilchenart mit eigener Temperatur mit je drei Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie beschrieben wird. Hierbei modellieren Kopplungsterme zwischen den Gleichungen unterschiedlicher Teilchenarten deren Wechselwirkungen durch Kollisionen. Auch chemische Reaktionen der Teilchen können hierüber beschrieben werden. Eine Vereinfachung besteht in der Annahme, dass sich nur die Temperatur der Elektronen von der der schweren Teilchen unterscheidet. In diesem Zwei-Temperatur-Modell werden alle schweren Teilchenarten mit einer Temperatur und einer mittleren Geschwindigkeit beschrieben. Wenn alle chemischen Reaktionen auf einer so kurzen Zeitskala stattfinden, dass sich das Plasma zu jedem Zeitpunkt im chemischen Gleichgewicht befindet, können die Transportgleichungen der schweren Spezies zu einem Fluid zusammengefasst werden, so dass nur noch Gleichungen für zwei verschiedene Spezies gelöst werden müssen.

Lichtbogenplasmen werden häufig als Einfluidmodell beschrieben, in denen alle Teilchenarten lokal die gleiche Temperatur aufweisen. Diese Näherung eignet sich für alle Bereiche des Plasmas, in denen der Energieaustausch durch Kollisionen zwischen Teilchen die Effekte, die zu Ungleichgewicht führen, überwiegt. In Hochdruckplasmen, in denen mindestens Atmosphärendruck herrscht, wird über Stöße zwischen Teilchen so viel Energie ausgetauscht, dass diese in ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht gelangen. In den hier betrachteten Fällen kann der Druck Werte von über 100 bar erreichen, daher ist die Annahme des LTEs hier gerechtfertigt.

Abweichungen gibt es im Randbereich des Lichtbogens, in dem starke Temperaturgefälle existieren. Hier kann die Driftbewegung der heißen Elektronen in den kalten Bereich des Lichtbogens unter Umständen nicht komplett durch Stöße ausgeglichen werden. Außerdem wird in diesem Bereich ein großer Teil der Strahlung

aus dem Lichtbogenkern absorbiert, was ebenfalls zu Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht führen kann. Auch in der Nähe der Elektroden kommt es zu Abweichungen. Da die Elektroden sich auf oder unterhalb der Siedetemperatur befinden, müssen die Ladungsträger (primär Elektronen) in der Grenzschicht zunächst auf die Plasmatemperatur erwärmt werden. An den Elektroden bilden sich Schichten mit Ladungsungleichgewichten aus, die die Annahme der Quasi-neutralität verletzen. Weiterhin ist es unklar, ob sich auf den in dieser Arbeit betrachteten kurzen Zeitskalen ein vollständiges chemisches Gleichgewicht einstellt. Durch den hohen Druck erhöht sich jedoch die Stoßfrequenz und damit die Reaktionsraten.

Ungeachtet dieser Nachteile ist das Einfluidmodell am weitesten verbreitet, da es vergleichsweise einfach zu realisieren ist und geringere Rechenzeiten erfordert. Komplexere Modelle arbeiten zum Zeitpunkt dieser Arbeit meistens mit zweidimensionalen Geometrien, um die Rechnungen in akzeptabler Rechenzeit auf genau aufgelösten Rechennetzen durchführen zu können.

Das Einfluidmodell besteht aus einem Satz von Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Die Gleichungen entsprechen denen der Fluideodynamik, erweitert um zusätzliche Quellterme, die auf das Plasma einwirken. Im Gegensatz zu den meisten Lehrbüchern wird nachfolgend zur Vollständigkeit und zum besseren Verständnis ein Massenquellterm in den Gleichungen mitgeführt, der den Materialabbrand an den Wänden modelliert.

Bei der Formulierung von Erhaltungs- und Transportgleichungen wird zwischen dem Ansatz von Euler, der ein bestimmtes Kontrollvolumen im Raum betrachtet und dem Ansatz von Lagrange, der der Bewegung eines Fluidelements in der Strömung folgt, unterschieden. Der Ansatz von Lagrange hat den Vorteil, dass sich physikalische Gesetze für einzelne Teilchen leichter beschreiben lassen und wird daher häufig in der Herleitung verwendet. Der Ansatz von Euler hat demgegenüber den Vorteil, dass sich dieser besser auf einem statischen Rechennetz abbilden lässt. Aus diesem Grund wird nachfolgend der Ansatz von Euler zur numerischen Lösung der Gleichungen gewählt.

Sämtliche Erhaltungsgleichungen für massenspezifische Größen  $\psi$  entsprechen dieser allgemeinen, integralen Form für ein beliebiges, stationäres Kontrollvolumen  $V$  [VM07]:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho\psi}{\partial t} dV}_{\text{Zeitliche Änderung}} + \underbrace{\int_{\partial V} (\rho\psi \vec{v}) \cdot d\vec{A}}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\int_{\partial V} (\Gamma \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{A}}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{\int_V S_{\rho\psi} dV}_{\text{Quellterm}} \quad (2.2)$$

Dabei ist  $\rho$  die Dichte,  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit und  $\Gamma$  ein Diffusionskoeffizient<sup>1</sup>. So-wohl Konvektion als auch Diffusion beschreiben Flüsse durch die Grenzfläche des Kontrollvolumens. Die Konvektion beschreibt den Fluss in das Kontrollelement durch die Strömung, während die Diffusion den Fluss der betrachteten Größe darstellt, der durch Vermischungsprozesse entsteht. Hierunter fallen z.B. Wärmeleitung und Diffusion aufgrund von Konzentrationsunterschieden. Der Quellterm  $S_{\rho\psi}$  beschreibt die Zunahme der Größe  $\rho\psi$ . Unter Berücksichtigung eines Massenquellterms  $S_\rho$  lässt er sich als  $S_{\rho\psi} = \psi S_\rho + S_\psi$  schreiben. Dabei beschreibt  $S_\psi$  eine Quelle der Größe  $\psi$  und  $\psi S_\rho S_\rho$  die Zunahme durch die zusätzliche Menge von  $\psi S_\rho$ , die mit dem Massenquellterm eingebracht wird.

Da die Gleichung 2.2 für beliebige Kontrollvolumina gilt, ergibt sich im Grenzfall für beliebig kleine Kontrollvolumen unter Berücksichtigung des Gausschen Integralsatzes  $\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$  die differentielle Formulierung der allgemeinen Transportgleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho\psi}{\partial t}}_{\text{Zeitliche Änderung}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho\psi \vec{v})}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi)}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{S_\psi}_{\text{Quellterm für } \psi} + \underbrace{\psi S_\rho S_\rho}_{\text{Zunahme von } \psi \text{ durch } S_\rho} \quad (2.3)$$

Diese Form der allgemeinen Transportgleichung wird als konservative Form bezeichnet und entspricht dem Ansatz von Euler. Die nicht konservative Form leitet sich bei Berücksichtigung des Massenquellterms wie folgt ab, wenn man den Spe-

---

<sup>1</sup>In anisotropen Medien ist  $\Gamma$  ein Tensor zweiter Stufe. In dieser Arbeit werden nur isotrope Medien betrachtet und  $\Gamma$  wird daher als skalare Größe behandelt.

zialfall  $\psi_{S_\rho} = \psi$  betrachtet<sup>2</sup>:

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi) - S_\psi - \psi S_\rho \quad (2.4)$$

$$= \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi \right) + \psi \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) - S_\rho \right)}_{=0 \text{ (Massenerhaltung (2.9))}} - \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi) - S_\psi \quad (2.5)$$

$$= \rho \frac{D\psi}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi) - S_\psi \quad (2.6)$$

$\frac{D\psi}{Dt}$  bezeichnet die totale oder auch substantielle Ableitung der Größe  $\psi(\vec{x}(t), t)$ , die die Änderung eines in der Strömung mitbewegten Fluidteilchens im Ansatz von Lagrange beschreibt. Für diese gilt:

$$\frac{D\psi(\vec{x}(t), t)}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}}_{=\vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (2.7)$$

Die vollständige nicht-konservative Form lautet damit:

$$\rho \frac{D\psi}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi) = S_\psi \quad (2.8)$$

Dass der Term  $\psi S_\rho$  in der nicht-konservativen Form nicht mehr auftaucht, lässt sich anschaulich dadurch erklären, dass diese Form ein einzelnes Fluidteilchen beschreibt, dessen Wert  $\psi$  im Spezialfall  $\psi_{S_\rho} = \psi$  konstant bleibt. In der Herleitung der nicht-konservativen Form (2.8) werden die Terme  $\frac{\partial \rho \psi}{\partial t}$  und  $\vec{\nabla} \cdot (\rho \psi \vec{v})$  durch die Produktregel erweitert. Mathematisch sind beide Formulierungen identisch, bei der numerischen Diskretisierung der Gleichungen führt die nicht-konservative Form jedoch zu Problemen, da die Flüsse durch die Zellränder bei den erweiterten Termen von einer Zelle zur nächsten nicht erhalten bleiben. Dies führt unter anderem zu Problemen in der Berechnung von Schockwellen, daher wird üblicherweise bei kompressiblen Strömungen – und damit auch hier – mit der konservativen Formulierung gearbeitet.

## 2.1.1 Massenerhaltungsgleichung

Für die Beschreibung der Massenerhaltung wird  $\psi = 1$ ,  $S_\psi = 0$  und  $\Gamma = 0$  (keine Diffusion) eingesetzt, woraus folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = S_\rho \quad (2.9)$$

---

<sup>2</sup>Im allgemeinen Fall ergeben sich weitere Terme, die der Übersichtlichkeit halber nicht aufgeführt werden.

$S_\rho$  stellt hier die durch Abbbrandmodelle bestimmten Massenquellterme dar. Eine detaillierte Betrachtung findet in Abschnitt 2.5.2 statt. Die Gleichung (2.9) beschreibt die Änderung der Masse in einem Kontrollvolumen durch ein- und austretende Masse. Der Massenquellterm stellt ebenfalls einen Massenstrom von umliegenden Wänden in das Fluid dar und ist somit nur in der äußersten Schicht des Fluids wirksam, die direkten Kontakt mit der Wand hat.

### 2.1.2 Impulserhaltungsgleichung

Die Impulserhaltungsgleichung beschreibt die Änderung der Impulsdichte  $\rho \vec{v}$  durch in das Kontrollvolumen ein- und austretende Impulsströme, durch auf das Kontrollelement wirkende Schub- und Scherspannungen sowie durch externe Kräfte wie die Lorentzkraft  $\vec{j} \times \vec{B}$ . Für die Impulserhaltung gilt  $\psi = \vec{v}$ ,  $\Gamma = 0$  und  $\vec{S}_v = \vec{S}_{\text{Lorentz}} = \vec{j} \times \vec{B}$ . Die Schwerkraft  $\vec{S}_g = \rho \vec{g}$  wird in der Simulation von thermischen Plasmen häufig vernachlässigt, da sie im Vergleich zu den anderen Kräften signifikant kleiner ist.

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{S}_v + \vec{v}_{S_\rho} S_\rho \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $\boldsymbol{\sigma}$  den Spannungstensor und  $\vec{v}_{S_\rho} S_\rho$  den durch das einströmende Gas getragenen Impuls.  $\otimes$  bezeichnet das dyadische Produkt mit  $\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$ .

Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  lässt sich in den viskosen Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  und den Druck  $p$  zerlegen. Daraus folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}) = \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} - \vec{\nabla} p \quad (2.11)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix. Der Druck übt daher eine Kraft aus, die in die Richtung von negativen Druckgradienten zeigt. Newtonsche Fluide, zu denen auch das hier betrachtete Plasma zählt, zeichnen sich dadurch aus, dass die Scherkräfte proportional zu orthogonalen Geschwindigkeitsunterschieden sind. Für diese Klasse von Fluiden lässt sich der viskose Spannungstensor in tensorieller Schreibweise unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention wie folgt schreiben [VM07]:

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.12)$$

Hier wird mit  $\eta$  die dynamische Viskosität eingeführt. Die räumliche Auflösung der Simulation ist nicht fein genug, um die in Fluiden auftretenden Turbulenzen berechnen zu können. Hierfür werden häufig Turbulenzmodelle eingesetzt, die die gemittelten Effekte der Turbulenz auf die Viskosität und die Wärmeleitung empirisch zu beschreiben versuchen. Es ist jedoch unklar, welche Turbulenzmodelle für die hier betrachteten Strömungsverhältnisse geeignet sind, da in vielen Turbulenzmodellen experimentell zu bestimmende Parameter einfließen. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf die Verwendung eines empirischen Turbulenzmodells verzichtet. Hierdurch ergibt sich in der Simulation eine niedrigere Wärmeleitfähigkeit sowie eine geringere Viskosität.

### 2.1.3 Energieerhaltungsgleichung

Für die Energieerhaltung wird die gesamte, massenspezifische Energie  $e = i + k$  betrachtet, die sich aus der spezifischen inneren Energie  $i$  und der spezifischen kinetischen Energie  $k = \frac{1}{2} \vec{v}^2$  zusammensetzt. Darauf aufbauend wird die Energieerhaltungsgleichung in Enthalpieform hergeleitet. Die Verwendung der Enthalpie ist sinnvoll, da in Publikationen üblicherweise die Enthalpie  $h(p, T)$  als thermodynamische Größe berechnet wird. Dabei werden Effekte wie Wärmeleitung, Strahlung und Reibungswärme zugunsten der Lesbarkeit zunächst vernachlässigt. Die entsprechenden Terme bleiben von der nachfolgenden Herleitung unberührt und können daher am Ende wieder hinzugefügt werden.

Die Erhaltungsgleichung der gesamten spezifischen Energie leitet sich aus der allgemeinen Transportgleichung (2.3) mit  $\psi = e$  ab.

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) + S_e + e_{S_\rho} S_\rho \quad (2.13)$$

Der Term  $-\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v})$  beschreibt die Volumenarbeit, die das Fluid gegen den äußeren Druck verrichtet. Durch Kompression des Fluids wird die Energie (und damit die Temperatur) erhöht, durch Expansion verringert sich die Energie.

Mit der spezifischen Enthalpie  $h = i + \frac{p}{\rho}$  lässt sich die gesamte Energie als  $e =$

$h + k - \frac{p}{\rho}$  zerlegen. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho h \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho k \vec{v}) - \cancel{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})} \\ & = \cancel{-\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})} + S_e + e_{S_\rho} S_\rho \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial \rho k}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho h \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho k \vec{v}) \\ & = S_e + e_{S_\rho} S_\rho \end{aligned} \quad (2.14)$$

$e_{S_\rho}$  bezeichnet die durch das verdampfende Material eingebrachte Energie (siehe dazu Abschnitt 2.5). Der Quellterm  $S_e$  besteht aus einem thermischen Quellterm und der Erhöhung der kinetischen Energie durch wirkende Kräfte:

$$S_e = S_i + S_k \quad (2.15)$$

$$= S_i + \vec{v} \cdot \vec{S}_{\rho v} \quad (2.16)$$

$$= \frac{\vec{j}^2}{\sigma} + S_r + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_c + \frac{5k_B}{2q_e} \vec{j} \cdot \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \cdot (\tau \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2.17)$$

Hier bezeichnet  $\vec{j}$  die elektrische Stromdichte,  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit,  $\vec{q}_c$  den Energiefluss durch Wärmeleitung,  $k_B$  die Boltzmann-Konstante,  $q_e$  die Elementarladung und  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte. Durch den Term  $\frac{\vec{j}^2}{\sigma}$  wird die Joule'sche Erwärmung beschrieben.  $S_r$  stellt die Zu- und Abnahme von Energie durch Strahlungsabsorption und -Emission dar (siehe auch Abschnitt 2.4). Diesen beiden Termen kommt die größte Bedeutung für die Plasmodynamik zu. Die durch den Stromfluss erzeugte Wärme wird durch Strahlungsemision ausgeglichen, so dass sich eine Maximaltemperatur einstellt.

Der Wärmestrom ist nach dem Fourierschen Gesetz proportional zum Gradienten der Temperatur [BSL07]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_c = \vec{\nabla} \cdot (-\lambda \vec{\nabla} T) \quad (2.18)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit. Diese Formulierung hat jedoch den Nachteil, dass dieser Term nur explizit berücksichtigt werden kann, da das Temperaturfeld vor dem Lösen der Energiegleichung noch aus dem vorherigen Iterations- oder Zeitschritt stammt. Daher wird dieser Term auf die Enthalpie umgeformt, so dass er implizit beim Lösen der Energiegleichung berücksichtigt werden kann. Die Enthalpie-basierte Form ergibt sich aus dem Gradienten der Enthalpie:

$$\vec{\nabla} h(p(\vec{x}), T(\vec{x})) = \underbrace{\frac{\partial h}{\partial T}}_{c_p} \vec{\nabla} T + \frac{\partial h}{\partial p} \vec{\nabla} p \quad (2.19)$$

Umsortiert nach  $\vec{\nabla}T$  und eingesetzt in die Definition des Wärmestroms  $\vec{q}_c$  ergibt sich:

$$\vec{q}_c = -\frac{\lambda}{c_p} \cdot \left( \vec{\nabla}h - \frac{\partial h}{\partial p} \vec{\nabla}p \right) \quad (2.20)$$

Der zusätzliche Term verschwindet für  $\frac{\partial h}{\partial p} = 0$ , dies ist in thermischen Plasmen jedoch nicht gegeben.

Der Term  $\frac{5k_B}{2q_e} \vec{j} \cdot \vec{\nabla}T$  in Gleichung (2.17) beschreibt das als Thomson-Effekt bezeichnete Phänomen, dass durch Elektronenfluss der Wärmetransport erhöht wird. Die durch den Stromfluss gerichtete Bewegung der Elektronen transportiert Energie entlang von Temperaturgradienten. Im Gegensatz zur diffusiven Wärmeleitung ist dieser Effekt durch den Strom ausgerichtet. Dies zeigt sich an den Elektroden, an denen sowohl hohe Stromdichten als auch Temperaturgradienten existieren. Die Region vor der Anode wird dabei geheizt, während die Region vor der Kathode gekühlt wird.

$\vec{\nabla} \cdot (\tau \cdot \vec{v})$  beschreibt die Erhöhung der thermischen Energie durch Reibung.

## 2.2 Elektrodynamik

Im Gegensatz zu Gasen sind Plasmen elektrisch geladen, da durch die hohe Temperatur die Bindungsenergie zwischen den Elektronen und den Atomkernen überwunden wird und sich die Atome in positiv geladene Ionen und negativ geladene Elektronen aufspalten. Die elektrische Ladungsdichte  $\rho_{el}$  ergibt sich somit als  $\rho_{el} = q_e n_e + \sum_i^N Z_i n_i$ , wobei  $Z_i$  die Ladung eines  $i$ -fach ionisierten Ions mit der Teilchendichte  $n_i$  ist. Aufgrund der Ladungserhaltung bleibt das Gesamtsystem dabei elektrisch neutral. Auf mikroskopischer Ebene existieren jedoch starke elektromagnetische Felder, die zu Effekten wie der Debye-Abschirmung und diversen Wellenphänomenen im Plasma führen. Die Debye-Abschirmung beschreibt den Effekt, dass die Elektronen sich im Plasma so verteilen, dass die absolute mittlere Raumladung minimiert wird und auf makroskopischer Skala  $\rho_{el} \approx 0$  angenommen werden kann. Dieser Effekt wird als Quasineutralität bezeichnet. Durch die wesentlich geringere Masse sind die Elektronen bei gleicher Temperatur wesentlich schneller als die Ionen, so dass die Bewegung der Ionen nahezu zeitgleich ausgeglichen wird. Die Geschwindigkeit dieses Ausgleichsvorgangs wird durch die

Plasmafrequenz  $\omega_p$  beschrieben [LL05]:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (2.21)$$

Dabei bezeichnen  $n_e$  die Elektronendichte,  $q_e$  die Elementarladung,  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante und  $m_e$  die Elektronenmasse. Die Elektronendichte liegt, je nach Temperatur und Druck, in den hier betrachteten Fällen zwischen  $10^{20}$  bis  $10^{26} \text{ m}^{-3}$ . Damit ergeben sich Plasmafrequenzen zwischen  $10^{11} \text{ s}^{-1}$  und  $10^{14} \text{ s}^{-1}$ . Die damit assoziierten Zeitkonstanten liegen zwischen  $10^{-14} \text{ s}$  und  $10^{-11} \text{ s}$  und sind damit mehrere Größenordnungen schneller als die der makroskopischen Plasmadynamik, die sich im Bereich von  $10^{-9}$  bis  $10^{-6} \text{ s}$  bewegen.

Die räumliche Ausdehnung von Ladungsungleichgewichten wird durch die Debye-Länge  $\lambda_D$  beschrieben [LL05]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}} \quad (2.22)$$

Dabei bezeichnen  $k_B$  die Boltzmann-Konstante und  $T_e$  die Elektronentemperatur, die im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht der Temperatur aller Spezies entspricht. Mit Temperaturen zwischen 5000 K und 50 000 K und Elektronendichten von  $10^{19}$  bis  $10^{22} \text{ m}^{-3}$  bei niedrigen Temperaturen sowie  $10^{23}$  bis  $10^{26} \text{ m}^{-3}$  bei hohen Temperaturen ergeben sich Debye-Längen im Bereich von  $10^{-9}$  bis  $10^{-6} \text{ m}$ . Die räumliche Ausdehnung des Luftvolumens einer Funkenstrecke beträgt üblicherweise mehrere Millimeter und liegt damit weit über den Längen, bei denen Ladungsunterschiede relevant werden.

Aus der Debye-Länge lässt sich die Debye-Zahl (auch als Plasma-Parameter bekannt)  $N_D$  ermitteln, die die durchschnittliche Anzahl von Ladungsträgern innerhalb der Debye-Kugel angibt. Sie dient zur Unterscheidung von schwach gekoppelten ( $N_D \gg 1$ , viele Teilchen in der Debye-Kugel) und stark gekoppelten ( $N_D \ll 1$ , wenig Teilchen in der Debye-Kugel) Plasmen und ist definiert als:

$$N_D = \frac{4}{3} \pi n_e \lambda_D^3 \quad (2.23)$$

Unter den hier angenommenen Bedingungen ergeben sich Werte in der Größenordnung von  $N_D = 1$  bis  $100$ , es handelt sich also um ein schwach gekoppeltes Plasma, in dem Ladungsungleichgewichte innerhalb der Debye-Länge von vielen

Teilchen abgeschirmt werden. Im Grenzbereich  $N_D \approx 1$  ist die Abschirmung allerdings schlechter, siehe dazu auch Abschnitt 2.3.

Damit kann die Annahme der Quasineutralität als gültig angesehen werden. In direkter Nähe der Elektroden gibt es jedoch Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht und von der Quasineutralität (siehe dazu Benilov [Ben08]), die über empirische Modelle nachgebildet werden müssen.

Die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern und Ladungen wird durch die (hier in mikroskopischer Form dargestellten) Maxwell-Gleichungen beschrieben [Mes10]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{el} \quad (\text{Gaußsches Gesetz}) \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gaußsches Gesetz für Magnetfelder}) \quad (2.25)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradaysches Induktionsgesetz}) \quad (2.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampèresches Durchflutungsgesetz}) \quad (2.27)$$

Dabei bezeichnen  $\vec{D}$  die elektrische Flussdichte,  $\rho_{el}$  die elektrische Ladungsdichte,  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke und  $\vec{j}$  die elektrische Stromdichte.

Das Gaußsche Gesetz (2.24) besagt, dass die elektrische Ladungsdichte  $\rho_{el}$  die Quelle der elektrischen Flussdichte darstellt. Elektrische Feldlinien zeigen daher immer auf Ladungen bzw. von Ladungen weg. Die Quellenfreiheit von Magnetfeldern wird durch das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder beschrieben. Änderungen der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  führen laut dem Faradayschen Induktionsgesetz (2.26) zu elektrischen Wirbelfeldern. In elektrisch leitfähigen Stoffen kommt es so zu Wirbelströmen und die von ihnen erzeugten Magnetfelder wirken der Änderung der ursprünglichen magnetischen Flussdichte entgegen. Das Maxwell-Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.27) besagt, dass Ströme und Änderungen der elektrischen Flussdichte (Verschiebungsströme) magnetische Wirbelfelder um den Stromfluss erzeugen.

Im Folgenden gilt es, die Maxwell-Gleichungen insoweit zu vereinfachen, dass sie nur schwach an die Erhaltungsgleichungen der Strömung gekoppelt sind. Außerdem müssen die Gleichungen selbst voneinander entkoppelt werden, um sie ge-

trennt lösen zu können. Eine ausführliche Darstellung der hier nur verkürzt aufgezeigten Näherungen findet sich bei Ghezzi und Balestrero [GB10] sowie bei [GR95].

Die elektromagnetischen Felder und Flussdichten stehen über die elektrische Permittivität  $\epsilon$  und die magnetische Permeabilität  $\mu$  miteinander in Verbindung:

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (2.28)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (2.29)$$

Im allgemeinen Fall gilt  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  und  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , die beiden Größen sind also Tensoren. Dies ist für anisotrope Materialien erforderlich, wie z.B. Schichtwerkstoffe oder kristalline Materialien mit Vorzugsrichtungen. Das Plasma besteht primär aus einzelnen Teilchen und die vorkommenden Moleküle sind zufällig ausgerichtet, so dass sich isotropes Verhalten ergibt. Die beiden Größen werden daher im Folgenden als Skalare behandelt. Im Plasma gilt analog zu Gasen in sehr guter Näherung  $\epsilon \approx 1$  für die bei den elektrischen und magnetischen Feldern auftretenden Frequenzen, da die Bestandteile des Plasmas unpolar sind und somit keiner Orientierungspolarisation unterliegen [Rai91]. Hinzu kommt, dass die Eigenbewegung der Teilchen, bedingt durch die hohe Temperatur im Plasma jegliche Orientierungs- und Ausrichtungsvorgänge verhindert. Weiterhin wird im Plasma  $\mu_r \approx 1$  angenommen, das heißt, dass im Plasma keine makroskopischen magnetischen Polarisationen auftreten.

Die Maxwell-Gleichungen gelten in allgemeinen Bezugssystemen, insbesondere auch in relativistischen Inertialsystemen. Da die typischen Geschwindigkeiten des hier betrachteten Plasmas wesentlich niedriger liegen, gilt  $|\vec{v}| \ll c$ . Andererseits folgt unter Annahme einer typischen Zeitskala  $\Delta t$  und einer typischen Längenskala  $\Delta x$  mit dem Faradayschen Induktionsgesetz (2.26):

$$\frac{|\vec{E}|}{\Delta x} \approx \frac{|\vec{B}|}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx |\vec{v}| \ll c \quad (2.30)$$

Für die Terme aus dem Maxwell-Ampèreschen Durchflutungsgesetz (2.27) folgt dann mit der Annahme  $\epsilon_r \approx 1$  und  $\mu_r \approx 1$  sowie der Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}:$$

$$\frac{|\partial \vec{D}/\partial t|}{|\vec{\nabla} \times \vec{H}|} \approx \frac{|\vec{D}| \Delta x}{|\vec{H}| \Delta t} = \frac{|\vec{E}| \epsilon_0 \mu_0 \Delta x}{|\vec{B}| \Delta t} \approx \left( \frac{|\vec{v}|}{c} \right)^2 \ll 1 \quad (2.31)$$

Das bedeutet effektiv, dass die Verschiebungsstromdichte  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  wesentlich kleiner als die Rotation des magnetischen Feldes ist und vernachlässigt werden kann. Damit folgt das vereinfachte Maxwell-Ampèresche Durchflutungsgesetz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (2.32)$$

Weiterhin wird der Term  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  im Faradayschen Induktionsgesetz vernachlässigt, da die aus dem Spannungsnetz stammenden Stromimpulse, und damit auch die von ihnen induzierten Magnetfelder, sich langsamer als die Plasmodynamik ändern. Effektiv entspricht dies der Vernachlässigung von Wirbelströmen. Damit gilt für die vereinfachte Variante von Gleichung (2.26):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.33)$$

Der elektrische Strom ist über die elektrische Leitfähigkeit mit dem elektrischen Feld und der magnetischen Flussdichte verknüpft:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \approx \sigma \vec{E} \quad (2.34)$$

Diese Abhängigkeit steht in Analogie zur Lorentzkraft, die die Kräfte auf einzelne Ladungsträger beschreibt. Die Näherung  $|\vec{v} \times \vec{B}| \ll |\vec{E}|$  ergibt sich durch einen Größenvergleich typischer Werte mit  $|\vec{E}| = 100 \text{ V mm}^{-1}$ ,  $|\vec{v}| = 5000 \text{ m s}^{-1}$  und  $|\vec{B}| = 1 \text{ T}$ . Eine Herleitung dieser Form des Ohmschen Gesetzes inklusive einer Begründung der weiteren dabei vernachlässigten Terme findet sich ebenfalls bei Ghezzi und Balestrero [GB10, Abschnitt 3.7.5].

Eingesetzt in das vereinfachte Maxwell-Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.32) ergibt sich mit  $\mu = \text{const}$  im Plasma:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \sigma \mu (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= \eta_m \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dabei bezeichnet  $\eta_m = \frac{1}{\sigma \mu}$  die magnetische Diffusivität. Eingesetzt in das Faradaysche Induktionsgesetz (2.26):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times (\eta_m \vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2.36)$$

Unter der sehr groben Näherung, dass die elektrische Leitfähigkeit im Plasma räumlich konstant ist, gilt  $\eta_m = \text{const}$ . Mit Hilfe einiger Identitäten der Vektoranalysis und dem Gaußschen Gesetz für Magnetfelder (2.25) lässt sich der letzte Term in der Gleichung weiter vereinfachen und es folgt die bekannte Induktionsgleichung der resistiven Magnetohydrodynamik:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_m \vec{\nabla}^2 \vec{B} \quad (2.37)$$

Die Gleichung beschreibt das zeitliche Verhalten eines Magnetfelds in einer elektrisch leitfähigen Strömung. Der Term  $\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$  beschreibt den konvektiven Transport der Magnetfeldlinien bei einer Strömung quer zur Feldrichtung. Durch den Ausdruck  $\eta_m \vec{\nabla}^2 \vec{B}$  kommt es zu einer diffusiven Entspannung des Magnetfelds in den energetisch günstigsten Zustand. Um die Relevanz dieser beiden Terme zu untersuchen wird eine weitere Kenngröße eingeführt, die als magnetische Reynoldszahl oder auch Lundquist-Zahl bekannt ist.

$$R_m = \frac{|\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})|}{|\eta_m \vec{\nabla}^2 \vec{B}|} \approx \frac{|\vec{v}| \Delta x}{\eta_m} = |\vec{v}| \Delta x \sigma \mu \quad (2.38)$$

Für  $R_m \ll 1$  überwiegt der diffusive Effekt und die Kopplung des Magnetfelds an die Strömung ist so schwach, dass die Berechnung des Magnetfelds unabhängig von der Strömung erfolgen kann. Im Fall von  $R_m \gg 1$  folgt die ideale Magnetohydrodynamik und die Magnetfeldlinien sind fest mit der Strömung verbunden. In diesem Fall kann in der Verzerrung des Magnetfelds viel Energie gespeichert werden, was in interstellaren Plasmen wie z.B. Sonnenkoronen zu starken Ausbrüchen führen kann, wenn die Energie wieder freigesetzt wird.

Mit  $|\vec{v}| = 5000 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\Delta x = 1 \text{ mm}$ ,  $\sigma = 10^4 \text{ S m}^{-1}$  und  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^7 \text{ H m}^{-1}$  folgt  $R_m \approx 0,06$ . Damit ist der diffusive Effekt zwar stärker ausgeprägt als der konvektive, allerdings können auch höhere Geschwindigkeiten und Leitfähigkeiten als die hier verwendeten auftreten, so dass der Effekt stärker wird. In dieser Arbeit wird der konvektive Effekt vernachlässigt und das Magnetfeld wird unabhängig von der Strömung berechnet. Dies ist begründet durch den vergleichsweise schwachen Einfluss, den das Magnetfeld auf die Strömung hat, sowie durch die Schwierigkeit, diese Kopplung korrekt zu berücksichtigen.

Unter Annahme aller bisher beschriebenen Näherungen ist es nun möglich, die Berechnung der elektromagnetischen Felder untereinander und von der Strömung

zu separieren. Aus dem vereinfachten Faradayschen Induktionsgesetz (2.33) folgt, dass das elektrische Feld konservativ ist und durch ein skalares Potentialfeld dargestellt werden kann:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (2.39)$$

Die Quellenfreiheit des elektrischen Stroms folgt aus der Divergenz von Gleichung (2.32) sowie anschaulich aus der Ladungserhaltung, wenn  $\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = 0$ :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.40)$$

Zusammen mit dem vereinfachten Ohmschen Gesetz (2.34) folgt dann die Gleichung zur Bestimmung des elektrischen Potentials:

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (2.41)$$

Bei bekanntem elektrischen Potential kann die Stromdichte als  $\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} \phi$  bestimmt werden. Aus der Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte (2.25) folgt mit  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , dass sich die magnetische Flussdichte als Rotation eines magnetischen Potentialfeldes  $\vec{A}$  darstellen lässt:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.42)$$

Aufgrund von  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$  ist das magnetische Vektorpotential nicht eindeutig definiert. Dieses Problem wird über die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  gelöst. Eingesetzt in das vereinfachte Maxwell-Ampèresche Durchflutungsgesetz (2.32) ergibt sich für konstante  $\mu = \mu_0$ :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{\mu} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}}_{=0} \\ &= \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) \\ \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die Annahme  $\mu = \mu_0$  führt insbesondere dazu, dass die magnetischen Eigenschaften von Festkörpern in dieser Formulierung nicht berücksichtigt werden können.

Die hier dargestellten Varianten der Gleichungen für das elektrische Skalar- und das magnetische Vektorpotential werden als quasistatische Näherung bezeichnet,

da die zeitabhängigen Terme in den Maxwell-Gleichungen vernachlässigt werden, über die Änderung der Randbedingungen des elektrischen Potentials und die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit durch die Prozesse im Plasma aber dennoch Änderungen in den Potentialfeldern auftreten können.

## 2.3 Thermodynamische und Transporteigenschaften des Plasmas

Die Beschreibung des Plasmas erfordert die Kenntnis verschiedener Materialeigenschaften. Diese sind

- die Dichte  $\rho(p, T)$
  - die spezifische Enthalpie  $h(p, T)$
  - die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma(p, T)$
  - die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(p, T)$
  - die dynamische Viskosität  $\eta(p, T)$
- Thermodynamische Eigenschaften

Transporteigenschaften

Grundlegend für die Bestimmung der Materialeigenschaften ist die Zusammensetzung des Plasmas. Im Folgenden werden die Zusammensetzung und die Materialdaten eines Luftplasmas von D'Angola et al. [DAn+08] verwendet. Die Autoren modellieren die stattfindenden Reaktionen im Plasma, um die Gleichgewichtszusammensetzung zu bestimmen<sup>3</sup>. Dabei werden die Spezies  $N_2$ ,  $N_2^+$ ,  $N$ ,  $N^+$ ,  $N^{2+}$ ,  $N^{3+}$ ,  $N^{4+}$ ,  $O_2$ ,  $O_2^+$ ,  $O_2^-$ ,  $O$ ,  $O^-$ ,  $O^+$ ,  $O^{2+}$ ,  $O^{3+}$ ,  $O^{4+}$ ,  $NO$ ,  $NO^+$  und  $e^-$  berücksichtigt. Es werden Anpassungsfunktionen für den Bereich von 0,1 bis 100 atm und 50 bis 60 000 K angegeben. Laut einem Austausch mit D'Angola liefert die Auswertung der Anpassungsfunktionen für Drücke bis 1000 atm akzeptable Ergebnisse.

Denkbar wäre ebenfalls die Nutzung der von André et al. publizierten Daten zu Plasmen aus den Bestandteilen von POM[And96; And97; And+04]. Diese liegen jedoch nur für drei verschiedene Drücke, 1 atm, 10 atm und 100 atm und bis 30 000 K vor und eignen sich damit nur bedingt für eine Rechnung, die Zwischenwerte und höhere Temperaturen erfordert. Nichtsdestotrotz wären diese Materialdaten in vollständiger Form prinzipiell besser geeignet, da die Plasmazusammensetzung im Bereich zwischen den Elektroden über den größten Teil der Simulation

---

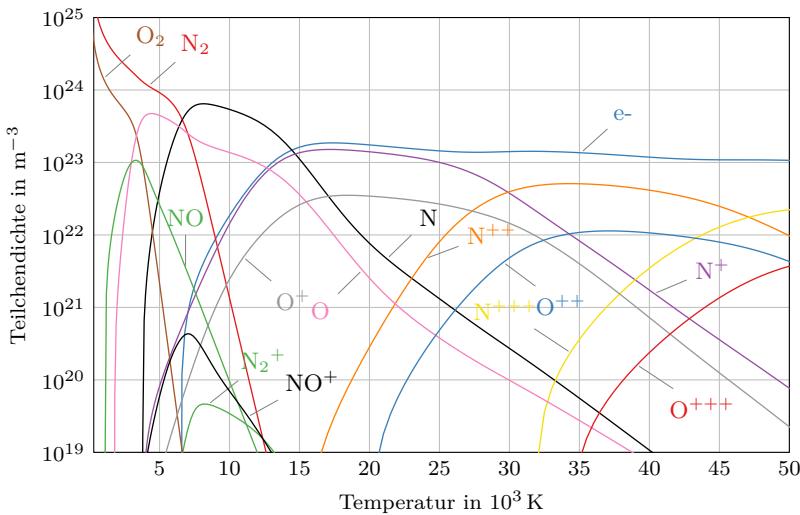
<sup>3</sup>Eine weitere Methode zur Bestimmung der Zusammensetzung ist die Minimierung der Gibbs-Energie.

durch die abbrennende Polymerwand bestimmt wird.

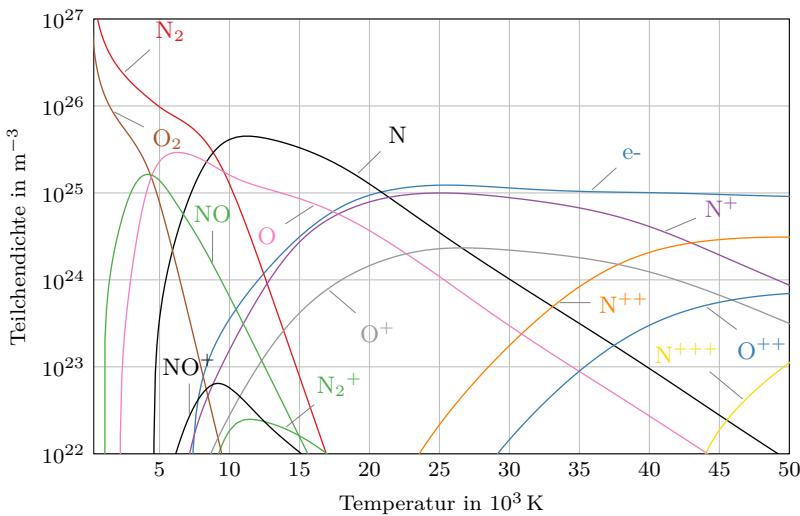
Die Debye-Zahl ist ein Maß für die Anzahl der Elektronen in einer Kugel mit dem Radius einer Debye-Länge und erreicht in den in dieser Arbeit betrachteten Plasmen eine untere Grenze von  $N_D \approx 1$  (siehe Gleichung (2.23)). Dies bedeutet, dass die elektrostatischen Felder der Ionen nur schlecht durch die umliegenden Elektronen abgeschirmt werden können und somit auch mit den umliegenden Teilchen gekoppelt sind. Damit ergibt sich eine Abweichung vom Verhalten eines idealen Gases, in dem Wechselwirkungen nur durch Stöße verursacht werden. Diese Abweichungen werden für schwach gekoppelte Plasmen durch die Debye-Hückel-Theorie beschrieben [CCD11]. Im Limit eines sehr dichten, stark gekoppelten Plasmas beschreibt das Ionenkugelmodell die Wechselwirkungen der schweren, geladenen Teilchen miteinander[BH80; Ich82]. Aufgrund der starken Kopplung ordnen sie sich zu einer regelmäßigen Struktur, ähnlich der im Inneren eines Kristalls an, um die elektrische Abstoßung zu minimieren. Zaghloul [Zag08] implementiert eine Interpolation zwischen diesen beiden Modellen zur Berücksichtigung des nicht-idealnen Verhaltens, während bei D'Angola et al. nur die Debye-Hückel Korrekturen berücksichtigt werden. Diese beschränken die Gültigkeit der hier verwendeten Daten bei höheren Drücken bzw. Elektronendichten.

Abbildung 2.1 zeigt die Zusammensetzung von Luftplasmen für verschiedene Temperaturen bei 1 bar. Die Ionisation des Plasmas beginnt bei etwa 7000 K, die zweite Ionisationsstufe bei etwa 20 000 K und die dritte bei 35 000 K. Weiterhin ist ersichtlich, dass auch bei hohen Temperaturen von bis zu 30 000 K noch neutrale Atome im Plasma existieren.

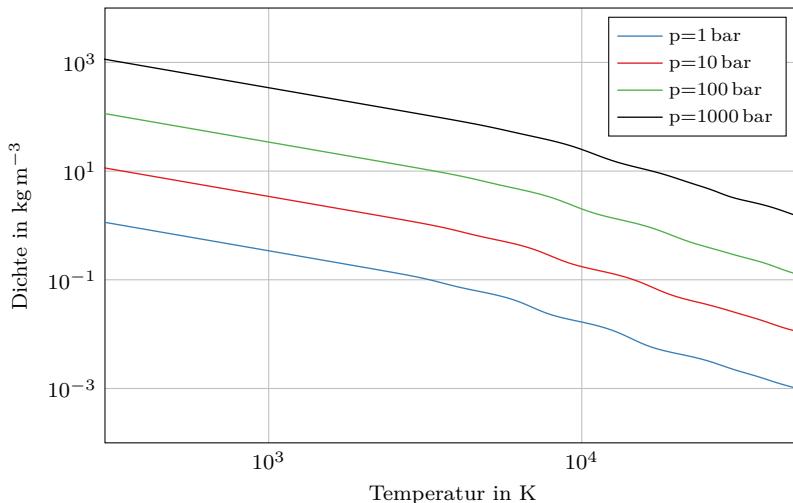
In Abbildung 2.2 wird die Zusammensetzung für 100 bar dargestellt. Im Vergleich ergibt sich eine Verschiebung der Ionisationsprozesse zu höheren Temperaturen. Dies ist dadurch bedingt, dass die Rekombination durch Dreiteilchenstöße bei höheren Teilchendichten relevanter wird als die durch Zweiteilchenstöße hervorgerufene Ionisation[RB89]. Mit erhöhtem Druck ergibt sich außerdem eine Reduktion der Ionisationspotentiale, da die Felder der benachbarten Ionen sich überlagern und zum Teil kompensieren. In Materialien mit noch höheren als den hier untersuchten Drücken kann dies zur Druckionisierung führen. Die Reduktion der Ionisationspotentiale wird im hier betrachteten Bereich jedoch vom erstgenannten Mechanismus überlagert.



**Abb. 2.1:** Zusammensetzung eines Luftplasmas bei 1 bar [DAn+08].



**Abb. 2.2:** Zusammensetzung eines Luftplasmas bei 100 bar [DAn+08].



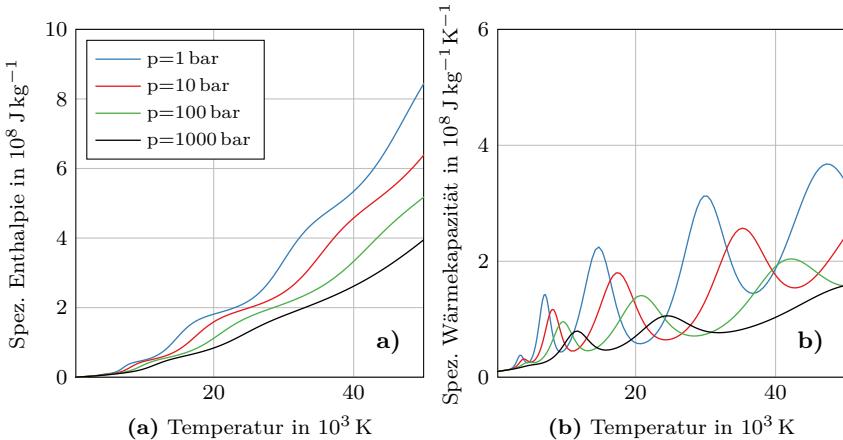
**Abb. 2.3:** Dichte eines Luftplasmas bei Variation des Druckes und der Temperatur [DAn+08].

Die weiteren thermodynamischen Größen berechnen sich aus der Zusammensetzung und den Zustandssummen der einzelnen Spezies. Bei bekannter Zusammensetzung eines Plasmas ist auch die Dichte über die Teilchenmassen bekannt. Damit ergibt sich der Druck als Summe der einzelnen Partialdrücke und der Debye-Hückel-Korrektur  $p_{\text{DH}} = \frac{k_B T}{24\pi\lambda_D^3}$  [DAn+08]:

$$p = \sum_s n_s k_B T - p_{\text{DH}} \quad (2.44)$$

In Abbildung 2.3 wird die Dichte des Luftplasmas für verschiedene Drücke und Temperaturen dargestellt. Für niedrige Temperaturen geht die Elektronendichte gegen null, die Debye-Länge  $\lambda_D$  geht dadurch gegen unendlich und die Debye-Hückel-Korrektur geht gegen null, so dass sich das Verhalten eines idealen Gases zeigt. Bei höheren Temperaturen erhöht sich die Teilchenzahl durch Dissoziations- und Ionisationsprozesse, so dass bei gleicher Dichte ein höherer Druck vorliegt.

Die Enthalpie berechnet sich aus der Summe der Enthalpien der einzelnen Spezies im Gemisch. Weiterhin ergibt sich die Enthalpie als Integral über die Wärmeka-



**Abb. 2.4:** (a) Spezifische Enthalpie und (b) spezifische Wärmekapazität eines Luftplasmas bei Variation von Druck und Temperatur [DAn+08].

pazität bei konstantem Druck:

$$h(p, T) = h_0 + \int_{T_0}^T c_p(p, T') \, dT' \quad (2.45)$$

Abbildung 2.4 zeigt die Enthalpie sowie die Wärmekapazität eines aus Luft bestehenden Plasmas. Die Maxima in der spezifischen Wärmekapazität resultieren aus chemischen Reaktionen, wobei die meisten dieser Maxima die für Ionisationsprozesse notwendige Energie darstellen. An diesen Punkten nimmt die Temperatur bei Energieaufnahme weniger zu. Hier zeigt sich außerdem erneut die Verschiebung der Ionisationsprozesse zu höheren Temperaturen bei steigendem Druck.

Die Berechnung der Transporteigenschaften erfolgt mit Hilfe der Chapman-Emskog-Transporttheorie, die auf der Boltzmann-Gleichung (2.1) aufbaut [CC70]. Für Mischungen von Gasen enthält die Gleichung binäre Kollisionsterme, die die Kollisionen der einzelnen Teilchenarten untereinander abbilden. In ionisierten Gasen werden die Wechselwirkungen über elektrostatische Kräfte vermittelt. In der Chapman-Emskog-Transporttheorie werden diese Terme störungstheoretisch als Reihe entwickelt. Daraus leiten sich Diffusionskoeffizienten ab, die in die Berechnung der Transporteigenschaften eingehen.

Die elektrische Leitfähigkeit setzt sich aus der Konzentration der elektrischen Ladungsträger  $n_e$  bzw.  $n_i$  und ihrer Beweglichkeit  $\mu_e$  bzw.  $\mu_i$  zusammen:

$$\sigma(p, T) = en_e\mu_e + \sum_i q_i n_i \mu_i \quad (2.46)$$

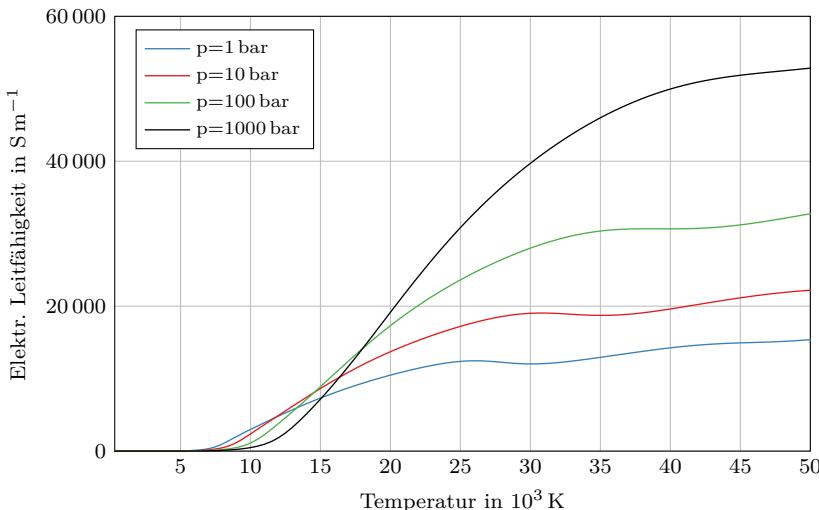
Hierbei bezeichnet  $q_i$  die Ladung eines Ions. Nach Abbildung 2.1 ist die Ladungsträgerdichte der Elektronen am höchsten, gleiches gilt auch für die Beweglichkeit der Elektronen, da diese im Vergleich zu den schweren Teilchen wesentlich schneller sind. Daraus folgt, dass der elektrische Strom im Plasma fast ausschließlich von den Elektronen getragen wird. Die Daten zur Leitfähigkeit von D'Angola et al. [DAn+08], die in dieser Arbeit verwendet werden, basieren auf der Annahme, dass der Strom nur von den Elektronen getragen wird und die Beiträge der Ionen zur Leitfähigkeit vernachlässigt werden können [Dev66]. Bei der in Abbildung 2.5 dargestellten elektrischen Leitfähigkeit lassen sich mehrere Effekte beobachten: Die Leitfähigkeit unterhalb von etwa 7000 K ist nahezu Null in Übereinstimmung mit der Elektronendichte in Abbildung 2.1. Bei höheren Temperaturen steigt die Leitfähigkeit schwächer an, da die Elektronendichte bei konstantem Druck mit steigender Temperatur sinkt und die Elektronenbeweglichkeit weniger stark zunimmt. Bei hohem Druck verschiebt sich der Beginn der elektrischen Leitfähigkeit analog zu Abbildung 2.1 zu höheren Temperaturen. Unterhalb von ungefähr 15 000 K ist die Leitfähigkeit bei hohem Druck daher geringer als bei niedrigem Druck. Für Temperaturen oberhalb von 15 000 K kehrt sich dieser Effekt um, da nun die höheren Elektronendichten bei hohem Druck zu einer größeren Leitfähigkeit führen<sup>4</sup>. Dieses Verhalten führt dazu, dass bei einem gekapselten Lichtbogenplasma unter hohem Druck bei Stromimpulsbelastung der Energieumsatz reduziert wird. Gleichzeitig verbessert sich die Löschfähigkeit aufgrund der schlechteren Leitfähigkeit bei niedrigen Temperaturen.

Die Wärmeleitfähigkeit (siehe Abbildung 2.6 (a)) setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen [DAn+08]:

$$\lambda(p, T) = \lambda_{\text{tr}} + \lambda_{\text{int}} + \lambda_r \quad (2.47)$$

Der translatorische Anteil  $\lambda_{\text{tr}}$  beschreibt den Energietransport durch elastische Stöße und diffusiven Transport. Für die Berechnung dieses Terms werden sämtliche Reaktionen und innere Freiheitsgrade vernachlässigt [DAn+08]. Der Energietransport durch Elektronen ist für hohe Temperaturen der bei weitem wichtigste

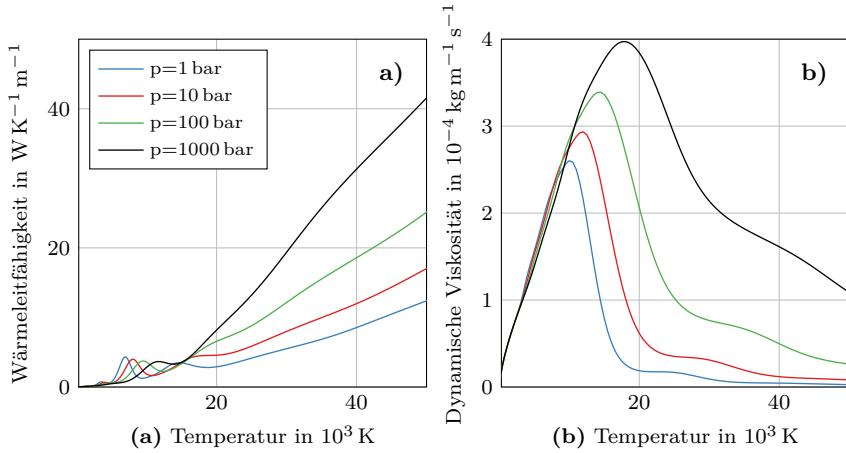
<sup>4</sup>Siehe dazu die Elektronendichten in Abbildung 2.1 und Abbildung 2.2.



**Abb. 2.5:** Elektrische Leitfähigkeit eines Luftplasmas bei Variation des Druckes und der Temperatur [DAn+08].

Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit [Mur95]. Der Transport von Energie in den inneren Freiheitsgraden der Teilchen wird durch den Term  $\lambda_{\text{int}}$  beschrieben. Der Term  $\lambda_r$  beschreibt den Anteil der chemischen Reaktionen am Energietransport. Bei hohen Temperaturen ist der Energietransport durch Wärmeleitung um mehrere Größenordnungen kleiner als der Energietransport durch Strahlung. Bei niedrigen Temperaturen (unter 10 000 K) ist das Gegenteil der Fall, da die gesamte emittierte Strahlungsleistung nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz proportional zu  $T^4$  ist.

Die Viskosität in Abbildung 2.6 steigt mit zunehmender Temperatur zunächst an, anschließend fällt sie stark ab und ändert sich danach nur noch wenig. Der Anstieg entsteht durch die bei höheren Temperaturen häufiger stattfindenden Stöße zwischen Teilchen. Der Abfall der Viskosität ist bedingt durch die Zunahme der Elektronen- und Ionenkonzentration im Plasma[Ste02]. Bei steigendem Druck führt die höhere Teilchendichte zu einer erhöhten Stoßfrequenz und somit auch zur Erhöhung der Viskosität. Auch die Verschiebung zu höheren Temperaturen mit steigendem Druck lässt sich hier erkennen.



**Abb. 2.6:** (a) Wärmeleitfähigkeit und (b) Dynamische Viskosität eines Luftplasmas bei Variation des Druckes und der Temperatur [DAn+08].

## 2.4 Strahlungsmodellierung

Nach der Jouleschen Wärme hat die Emission und Absorption von Strahlung den größten Einfluss auf das Verhalten des Plasmas. Durch Emission im heißen Kern des Lichtbogens wird die Temperatur limitiert. Der ultraviolette Teil der emittierten Strahlung wird zum Teil im Randbereich des Lichtbogens wieder absorbiert. Dadurch erreicht auch der Rand des Lichtbogens vergleichsweise hohe Temperaturen, was die kalte Randschicht des Plasmas in der Größe beschränkt. Die restliche Strahlung trifft auf die das Plasma begrenzende Wand. Hier wird ein Teil der Strahlung reflektiert. Der andere Teil wird absorbiert und bewirkt durch Aufheizung und Photodissoziation den Abbrand und die Zersetzung des Wandmaterials.

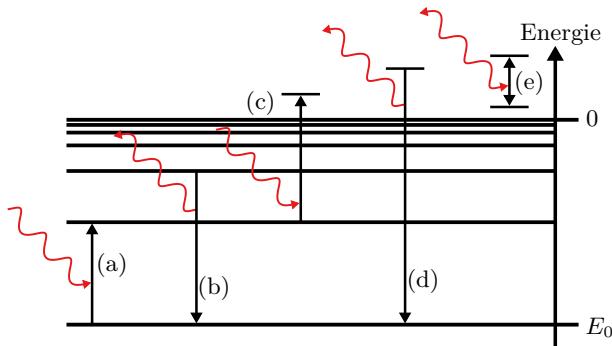
Im Folgenden werden zunächst die relevanten physikalischen Prozesse betrachtet, die zur Emission und Absorption von Strahlung führen, anschließend werden wichtige Kenngrößen und Modelle zur approximativen Berechnung der Strahlungsprozesse vorgestellt. Als ausführliche Referenz für die physikalische und numerische Beschreibung des Strahlungstransports wird Modest [Mod13] empfohlen.

### 2.4.1 Physikalische Prozesse

Gebundene Elektronen können in Molekülen, Atomen und Ionen verschiedene diskrete Energie- oder Bindungszustände einnehmen. Abbildung 2.7 zeigt mögliche Energiezustände und Übergänge, an denen ein Photon beteiligt ist. Elektronen können durch Stöße oder durch Absorption von Photonen angeregt werden und in einen höheren Energiezustand wechseln (a). Angeregte Zustände sind im Normalfall instabil, so dass das Elektron nach einiger Zeit in den niedrigeren Zustand zurückfällt und dabei ein Photon emittiert, dessen Energie dem Unterschied zwischen den beteiligten Energiezuständen entspricht (b). Dieser Prozess kann auch durch ein weiteres Photon induziert werden.

Die Energie eines Photons ist durch  $E_p = h\nu$  gegeben, wobei  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $\nu$  die Frequenz des Photons ist. Mit einem Übergang zwischen gebundenen, diskreten Energiezuständen ist daher auch immer eine Frequenz  $\nu$  verbunden. Die Frequenzen der Übergänge zeigen sich als Spektrallinien in Emissions- und Absorptionsspektren. Es gibt mehrere physikalische Mechanismen, durch die die Spektrallinien verbreitert werden, so dass diskrete Übergänge auch bei leicht unterschiedlichen Energien stattfinden können:

- Die *natürliche Linienvverbreiterung* folgt aus der Energie-Zeit-Umschärfereation der Quantenmechanik. Mit Energieniveaus ist auch immer eine Lebensdauer verbunden, die die minimale energetische Breite des Übergangs bestimmt.
- Die *Doppler-Verbreiterung* ist ein statistischer Prozess, der durch die zufällige Bewegung der Teilchen im Plasma entsteht. Durch die Bewegung kommt es im ruhenden Bezugssystem zur Rot- oder Blauverschiebung des beteiligten Photons.
- Stöße mit anderen Teilchen können Übergänge auslösen. Bei hohen Stoßfrequenzen kann die Lebensdauer der einzelnen Zustände reduziert werden und es kommt entsprechend der Energie-Zeit-Umschärfereation zur *Stoßverbreiterung*. Die elektrischen Felder geladener Teilchen haben einen Einfluss auf die Bindungsenergie und tragen durch den Stark-Effekt ebenfalls zur Verbreiterung bei.



**Abb. 2.7:** Darstellung von elektronischen Übergängen mit Emission und Absorption von Photonen am Termschema. (a) und (b): Übergänge zwischen gebundenen Zuständen. (c) und (d): Ionisations- und Rekombinationsprozesse mit Übergängen zwischen gebundenen und freien Zuständen. (e): Übergänge zwischen freien Zuständen durch Bremsstrahlung.

Im Plasma ist die natürliche Linienverbreiterung häufig vernachlässigbar, da die anderen Mechanismen überwiegen.

Neben den Übergängen zwischen gebundenen Zuständen gibt es Ionisations- und Rekombinationsprozesse, bei denen ein Elektron abgegeben oder aufgenommen wird ((c) und (d)). Das Elektron kann im freien Zustand eine beliebige kinetische Energie besitzen, daher führen Übergänge zwischen freien und gebundenen Zuständen nicht zu diskreten Linien im Spektrum sondern tragen zum Untergrund des Spektrums bei.

Wird ein freies Elektron beschleunigt oder abgebremst, so nimmt es Energie auf oder gibt diese in Form von elektromagnetischer Strahlung ab (e). Dieser Effekt wird in der Literatur meistens als Bremsstrahlung bezeichnet und trägt ebenfalls zum Untergrund des Absorptionsspektrums bei. Abgesehen von den hier dargestellten Übergängen existieren auch Prozesse, bei denen mehrere Elektronen beteiligt sind, wie z.B. der Auger-Prozess, bei dem ein Elektron in einem niedrigen Orbital durch Photoabsorption ionisiert wird und ein Elektron von einem höheren Orbital in das niedrige wechselt und dabei ein Photon emittiert. In Molekülen kommen noch Vibrations- und Rotationsanregungen hinzu.

Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht sind Absorptions- und Emissionsprozesse proportional zueinander und es gilt das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz:

$$\epsilon_\nu = B_\nu(T) \kappa_\nu \quad (2.48)$$

Hier ist  $\epsilon_\nu$  der gerichtete, volumetrische und spektrale Emissionskoeffizient, der die Emission pro Volumen, Frequenz und Raumrichtung angibt und in der Einheit  $\text{W Hz}^{-1} \text{m}^{-3} \text{sr}^{-1}$  gemessen wird. Der spektrale Absorptionskoeffizient  $\kappa_\nu$  beschreibt die Absorption der spektralen Strahldichte pro Strecke nach dem Lambert-Beerschen Gesetz:

$$I_\nu(x) = I_{0,\nu} \exp(-\kappa_\nu x) \quad (2.49)$$

$B_\nu(T)$  in Gleichung (2.48) ist die spektrale, temperaturabhängige Plancksche Strahldichte eines idealen Schwarzkörperstrahlers. Diese ist gegeben durch:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (2.50)$$

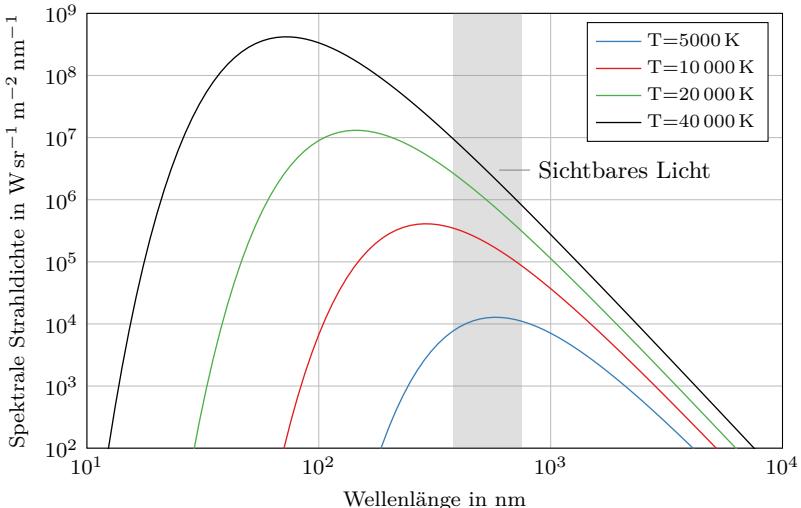
Hier ist  $k_B$  die Boltzmann-Konstante. Abbildung 2.8 zeigt die Plancksche Strahldichte für verschiedene Temperaturen über die Wellenlänge. Hier wird deutlich, dass die Strahlung eines Plasmas sehr breitbandig ist und sich vom infraroten bis in den ultravioletten Bereich erstreckt. Die gesamte Emission eines schwarzen Körpers, die durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz als  $P = A\sigma_{SB}T^4$  gegeben ist, zeigt, dass die Strahlung im Plasma bei hohen Temperaturen stark an Bedeutung gewinnt.

## 2.4.2 Strahlungstransportgleichung

Die Strahlungstransportgleichung beschreibt die Änderung der spektralen Strahldichte in Richtung  $\hat{n}$  in einem partizipierenden Medium unter Berücksichtigung von Emission, Absorption und Streuung:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{n} \cdot \vec{\nabla} I_\nu + (\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu = B_\nu(T) \kappa_\nu + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu \int_{\Omega} I_\nu d\Omega \quad (2.51)$$

Hier ist  $\sigma_\nu$  der Streukoeffizient. Die (Rayleigh-)Streuung an Partikeln, die klein im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts sind, führt zu einem Streukoeffizient, der



**Abb. 2.8:** Plancksche Strahldichte eines idealen schwarzen Körpers für verschiedene Temperaturen [Mod13].

klein ist im Vergleich zum Absorptionskoeffizienten[Mod13]. Aus diesem Grund kann die Streuung im Plasma für den Strahlungstransport vernachlässigt werden, und es gilt  $\sigma_\nu = 0$ . Weiterhin kann die Zeitabhängigkeit vernachlässigt werden und quasistationär gerechnet werden, da die Lichtgeschwindigkeit um viele Größenordnungen schneller ist als die hydrodynamischen und elektrischen Prozesse. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlung kann daher als instantan angenommen werden. Damit lautet die vereinfachte Strahlungstransportgleichung:

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \kappa_\nu (B_\nu(T) - I_\nu) \quad (2.52)$$

Trotz dieser Vereinfachungen ist es sehr schwierig, diese Gleichung numerisch zu lösen. Dies liegt zum einen daran, dass sie für alle Raumrichtungen gleichzeitig gelöst werden muss und zum anderen daran, dass sie für alle Frequenzen gelöst werden muss. Diese Komplexität ist bei zeitaufgelösten Simulationen in dreidimensionalen Geometrien nicht handhabbar, weshalb Näherungsverfahren angewendet werden müssen.

Für optisch aktive, d.h. absorbierende und emittierende Medien werden häufig Nettoemissionskoeffizienten, die Diskrete Ordinaten-Methode (DO-Methode) sowie die  $P_n$ -Modelle angewendet. Die DO-Methode diskretisiert sowohl den Raum, wie auch den Raumwinkel und führt zu einem System von miteinander gekoppelten Differentialgleichungen, die entweder als gesamtes System oder iterativ gelöst werden können. Diese Methode ist vergleichsweise aufwändig, lässt sich dafür allerdings leicht in der Genauigkeit steuern durch Verfeinern der Raumwinkeldiskretisierung. In dieser Arbeit wird das  $P_n$ -Modell in der einfachsten Variante, dem  $P_1$ -Modell verwendet und in den nachfolgenden Kapiteln genauer vorgestellt. Diese Methode kann für optisch dichte Plasmen ein brauchbares Ergebnis liefern und ist sehr recheneffizient, da hier nur eine Gleichung gelöst werden muss. Die Erweiterung auf höhere Ordnungen ist allerdings wesentlich komplizierter. Als grobe Näherung bei optisch dünnen Medien gibt es schließlich noch die Nettoemissionskoeffizienten. Hier erfolgt im Vorfeld eine Integration über den kompletten Raumwinkel sowie über einen fixen Radius, d.h. man nimmt an, dass es sich um ein homogenes, kugelförmiges Medium handelt. Da dies offensichtlich nicht der Fall ist, kann diese Methode nur als sehr grobe Näherung angesehen werden. Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist die Tatsache, dass sie nicht den Strahlungswärmefluss auf die Wand bestimmen kann, und somit nicht für Abbrandmodelle genutzt werden kann. Vorteilhaft an dieser Methode ist dafür der Rechenaufwand, da der Quellterm schon im Vorfeld der Simulation tabuliert werden kann und somit keine Gleichung gelöst werden muss. Daher wurde diese Methode häufig in frühen Arbeiten genutzt, um Rechenleistung zu sparen.

### 2.4.3 $P_1$ -Modell

Das  $P_n$ -Modell ergibt sich durch eine Reihenentwicklung der Intensität  $I_\nu(\vec{x}, \hat{n})$  in richtungsabhängige Kugelflächenfunktionen und ortsabhängige Anteile. Bei Abbruch nach der ersten Ordnung ergibt sich das in dieser Arbeit verwendete  $P_1$ -Modell mit der Intensität:

$$I_\nu(\vec{x}, \hat{n}) = \frac{1}{4\pi} (G_\nu(\vec{x}) + 3\hat{n} \cdot \vec{q}_\nu(\vec{x})) \quad (2.53)$$

Dabei bezeichnet  $G_\nu$  die spektrale, richtungsunabhängige einfallende Strahlung mit  $G_\nu = \int_{4\pi} I_\nu d\Omega$  und  $\vec{q}_\nu(\vec{x})$  den spektralen Strahlungswärmefluss:

$$\vec{q}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \vec{\nabla} G_\nu \quad (2.54)$$

Einsetzen in die vereinfachte Strahlungstransportgleichung (2.52) liefert die Gleichung zur Bestimmung von  $G_\nu$ :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{1}{3\kappa_\nu} \vec{\nabla} G_\nu \right) = \kappa_\nu (G_\nu - 4\pi B_\nu(T)) \quad (2.55)$$

Diese Gleichung muss prinzipiell über den gesamten Frequenzbereich mit einer hinreichend genauen Diskretisierung gelöst werden. Anschließend kann der so bestimmte spektrale Strahlungswärmefluss  $\vec{q}_\nu$  über alle Frequenzen integriert werden, um den gesamten Strahlungswärmefluss  $\vec{q}_r$  zu erhalten. Damit ergibt sich der Strahlungsenergiequellterm als:

$$S_r = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r = -\vec{\nabla} \cdot \left( \int \vec{q}_\nu d\nu \right) \quad (2.56)$$

### Genauigkeit des P<sub>1</sub>-Modells

Das P<sub>1</sub>-Modell berücksichtigt nur lokale Gradienten und stellt daher ein diffuses Verfahren dar. Damit können zum Beispiel gerichtete Strahlen in einem nicht-absorbierenden Medium nicht korrekt berechnet werden, da die Richtungsabhängigkeit der Strahlung nicht beibehalten werden kann. Weiterhin ist es dafür bekannt, zu hohe Strahlungswärmeflüsse bei lokalisierten Emissionsgebieten vorherzusagen [Mod13]. An Wänden können nur diffuse Reflexionen beschrieben werden. Es wurden viele Erweiterungen vorgeschlagen, wie das modifizierte P<sub>1</sub>-Modell [Mod89] oder höhere Ordnungen [Ge+15]. Diese Erweiterungen sind jedoch im Normalfall mit einer signifikanten Erhöhung der Rechenzeit verbunden und damit eher unpraktikabel. Die beste Genauigkeit zeigt das P<sub>1</sub>-Modell in optisch dichten Medien, in denen auf sehr kurzen Distanzen Strahlung absorbiert und wieder emittiert wird. Die Richtungsabhängigkeit der einfallenden Photonen geht durch die Absorption verloren und die optische Reichweite wird sehr klein. Durch diese Zusammenhänge wird der differenzielle Ansatz ermöglicht. Da das Verfahren die Strahlungswärmeflüsse zwischen einzelnen Zellen des Rechengitters beschreibt, bleibt die Energie der Strahlung erhalten.

Ein weiterer, im P<sub>1</sub>-Modell vernachlässigter Aspekt ist die Doppler-Verschiebung, die bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten des Plasmas relevant werden kann. So ergibt sich z.B. für ein zweifach ionisiertes Stickstoffion bei  $T = 40\,000\text{ K}$  eine durchschnittliche thermische Geschwindigkeit von  $7418\text{ m s}^{-1}$ . Die thermische Bewegung ist maßgeblich für die zuvor genannte Dopplerverbreiterung. Da im Plas-

ma durchaus ähnliche Strömungsgeschwindigkeiten entstehen können, wird klar, dass die durch die Plasmaströmung bedingte Doppler-Verschiebung in der Größenordnung der thermischen Doppler-Verbreiterung liegen muss. Das  $P_1$ -Modell ist jedoch prinzipbedingt nicht in der Lage, eine richtungsabhängige Größe wie die Strömungsgeschwindigkeit zu berücksichtigen. Weiterhin verhindert die Berücksichtigung dieses Effekts die Trennung von einzelnen Spektralkomponenten und Emissionsrichtungen.

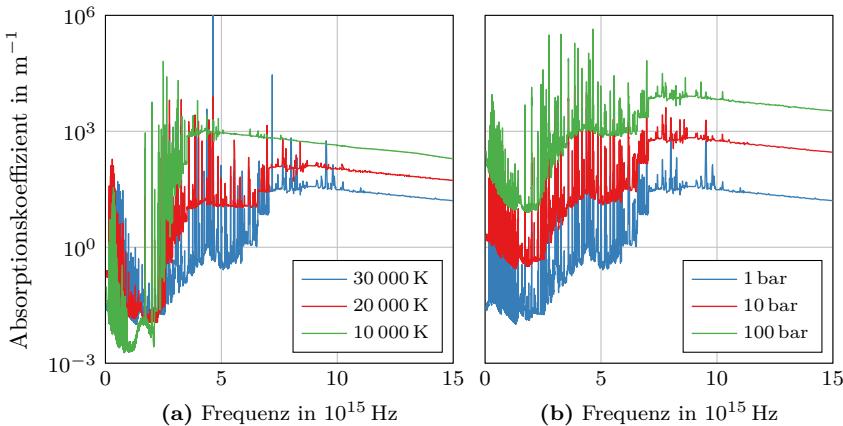
Peyrou et al. [Pey+12] konnten zeigen, dass das  $P_1$ -Modell bei einem exemplarischen Lichtbogenprofil Abweichungen in Höhe von 10 bis 20 % im Vergleich zur exakten Lösung liefert.

#### 2.4.4 Optische Absorptionskoeffizienten

Die Modellierung der Strahlung erfordert die Kenntnis des spektralen optischen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  als Funktion des Druckes und der Temperatur sowie der Planckschen Strahldichte  $B_\nu(T)$  (siehe Abbildung 2.8). Für die Berechnung der spektralen Absorptionskoeffizienten wird das frei verfügbare Programm SPARTAN [M L13] benutzt (siehe auch [M L07]). Für die Berechnung eines Absorptionsspektrums müssen die Teilchendichte  $n_i(p, T)$  (siehe Abbildung 2.1) und die Temperaturen der einzelnen Spezies vorgegeben werden. Da in dieser Arbeit das lokale thermodynamische Gleichgewicht angenommen wird, kann eine gemeinsame Temperatur verwendet werden. Das Programm enthält spektrale Datenbanken für die in Luftplasmen vorkommenden Atome und Ionen bis zur zweiten Ionisationsstufe. Aus diesem Grund werden die Spektren bis zu einer maximalen Temperatur von 40 000 K berechnet, da bei höheren Temperaturen dreifach ionisierte Teilchen auftreten und nicht mehr vernachlässigbar sind. Falls in der Simulation höhere Temperaturen auftreten, wird das Absorptionsspektrum bei der Maximaltemperatur verwendet. Für die Emission kann jedoch die höhere Plancksche Strahldichte ausgewertet werden. Weiterhin unterstützt das Programm nicht die Modellierung des Stark-Effekts (vergleiche Abschnitt 2.4.1), da es ursprünglich für Atmosphärenplasmen ausgelegt wurde. Es ist daher zu erwarten, dass bei höheren Drücken zu schmale Linienbreiten berechnet werden. Laut P. Kloc führt die Vernachlässigung des Stark-Effekts zu Abweichungen im Nettoemissionskoeffizient von etwa 10 % [Pet16]. Dennoch werden Absorptionsspektren bis zu 1000 bar berechnet.

Abbildung 2.9 (a) zeigt Absorptionsspektren bei verschiedenen Temperaturen. Es ist zu sehen, dass die Absorption bei höheren Temperaturen abnimmt, was durch die sinkende Teilchendichte erklärbar ist. Weiterhin treten bei höheren Temperaturen Spektrallinien höherer Frequenz auf. Das liegt daran, dass bei diesen Temperaturen die Teilchendichte höher geladener Ionen zunimmt, deren Ladungsgleichgewicht zu höheren Bindungsenergien führt, so dass höherenergetischere Übergänge entstehen. Die Absorptionskanten markieren Ionisationsenergien der beteiligten Spezies und resultieren in einer sprunghaften Zunahme des Absorptionskoeffizienten bei Überschreiten der mit der Ionisationsenergie assoziierten Frequenz. Photonen höherer Energie können diese Ionisationsprozesse anregen und werden dabei absorbiert, was zu der Erhöhung des Kontinuums im Absorptionsspektrum führt. Die Vernachlässigung höherer Ionisationsstufen führt dazu, dass die der dritten Ionisationsstufe entsprechende Absorptionskante nicht im Spektrum enthalten ist (Stickstoff:  $\nu = 1,15 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , Sauerstoff:  $\nu = 1,33 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ). In Abbildung 2.9 (b) werden Absorptionsspektren bei verschiedenen Drücken dargestellt. Hier zeigt sich, dass die Absorption nahezu proportional mit dem Druck oder auch der Teilchendichte skaliert. Aus diesem Grund wird auch häufig die Näherung  $\kappa_\nu(p, T) = \kappa_\nu(p_0, T) \frac{p}{p_0}$  verwendet. In dieser Arbeit kommt diese Näherung für alle Drücke größer als 1000 bar zur Anwendung.

Leider enthält die Datenbank keine Einträge für Kupfer, weshalb der Einfluss des verdampften Kupfers im Plasma nicht korrekt berücksichtigt werden kann. In der Literatur existieren viele Veröffentlichungen, die sich mit der Auswirkung von Metallen im Plasma beschäftigen [Gle+93; Cre+08; ABC10; Pet+14; GC16]. Es zeigt sich, dass Metall im Plasma schon in geringen Konzentrationen zu einer signifikanten Erhöhung der Emission führt. Gerade bei kleinen Temperaturen ist der Effekt sehr stark, da die Ionisationsenergien von Metallen (7,73 eV für Kupfer) niedriger liegen als die von Stickstoff (14,53 eV) und Sauerstoff(13,62 eV), was zu mehr Elektronen im Plasma und damit zu häufiger auftretenden Rekombinationsprozessen führt. Das Strahlungsverhalten bei niedrigen Temperaturen ist während des Löschganges von entscheidender Bedeutung. Dies steht jedoch nicht im Fokus dieser Arbeit. An den Rändern des Lichtbogens existieren ebenfalls niedrige Temperaturen, hier ist der Anteil des Metalls im Plasma jedoch tendenziell eher gering, da durch Materialabbrand der Polymerwände eine aus den Wänden austretende Strömung entsteht, so dass die Randbereiche eher von zersetzen Polymeren



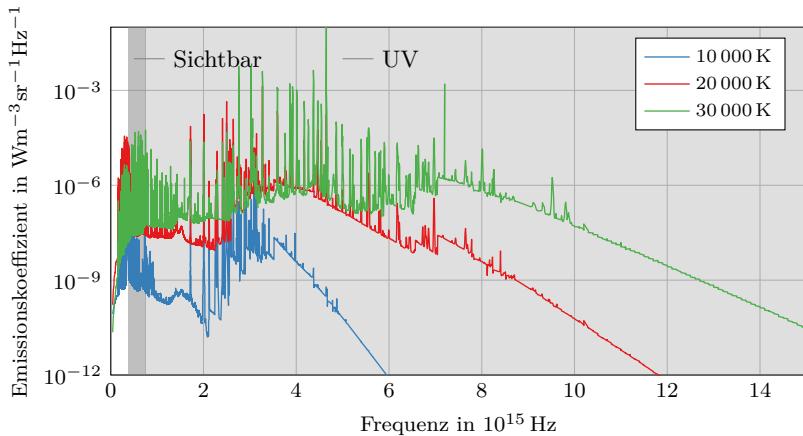
**Abb. 2.9:** Absorptionsspektren von Luft bei (a)  $p=1 \text{ bar}$  und verschiedenen Temperaturen und (b) verschiedenen Drücken und  $T=30\,000 \text{ K}$  [M L13; M L07].

dominiert werden. Die Strahlung der zersetzen Polymere im Plasma wird in dieser Arbeit ebenfalls vernachlässigt, da für das hier betrachtete Polyoxymethylen die Zusammensetzung nur bis 30 000 K vorliegt [And96; And+04] und auch hier einige Spezies in der Datenbank fehlen.

Die Temperaturabhängigkeit der Emission wird in Abbildung 2.10 gezeigt. Im Vergleich zur Planckschen Strahldichte Abbildung 2.8 fällt auf, dass die Intensität im spektralen Maximum nicht signifikant mit der Temperatur ansteigt. Dies ist auf die abnehmende Teilchendichte zurückzuführen. Weiterhin wird ersichtlich, dass sich die im Lichtbogenkern emittierte Strahlung bis weit in den ultravioletten Bereich erstreckt. Gerade in diesem Bereich ist der spektrale Absorptionskoeffizient sehr hoch, so dass ein Großteil der ultravioletten Strahlung (siehe Abbildung 2.10) im Rand des Lichtbogens absorbiert wird.

#### 2.4.5 Spektrale Mittelungsverfahren

Die spektrale Struktur der Absorptionsspektren macht die korrekte Berechnung der Strahlung sehr aufwändig. Um die Spektren korrekt auflösen zu können, können mehrere Millionen Stützstellen erforderlich sein. Häufig wird daher versucht,



**Abb. 2.10:** Emissionsspektren von Luft bei verschiedenen Temperaturen und bei 1 bar [M L13; M L07].

über die Mittelung einzelner Spektralbereiche das Problem zu vereinfachen. Im Grenzfall optisch dünner Emission, d.h. für den Fall vernachlässigbarer Absorption mit  $\int \kappa_\nu(x) dx \ll 1$  (Integration über typische Länge, d.h. vom Kern des Lichtbogens bis zur Wand) vereinfacht sich die vereinfachte Strahlungstransportgleichung (2.52) weiter zu  $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \kappa_\nu B_\nu$  und die Mittelung des Absorptionskoeffizienten unter Berücksichtigung der Planckschen Strahldichte als Gewichtungsfaktor bildet das Planck-Mittel:

$$\bar{\kappa}_{\text{Planck}, i} = \frac{\int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} B_\nu(T) d\nu} \quad (2.57)$$

Das Planck-Mittel gibt zwar die Emission korrekt wieder, jedoch kann die Absorption bei Spektrallinien häufig nicht vernachlässigt werden. Dies führt dazu, dass das Planck-Mittel die Emission der Spektrallinien, die auf kurzen Distanzen wieder reabsorbiert werden, überschätzt. Häufig werden in optisch dünnen Medien Austrittsfaktoren eingeführt, die die Spektrallinien reduzieren und somit deren Übergewichtung vermeiden sollen [NI08; RGF12; GC16]. Diese Faktoren müssen jedoch stets auf die zu rechnende Geometrie angepasst werden.

Im Limit sehr hoher optischer Dichten mit  $\int \kappa_\nu(x) dx \gg 1$  ergibt sich die Diffusionsnäherung. Dabei ist die Absorption so hoch, dass die Strahlungswechselwir-

kung nur auf sehr kurzen Distanzen stattfindet und als Wärmeleitung modelliert werden kann [NI08; Mod13].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{\text{r},i} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{16\sigma_{\text{SB}}}{3\bar{\kappa}_{\text{Rosseland}}} T^3 \vec{\nabla} T \right) \quad (2.58)$$

Hier ist  $\sigma_{\text{SB}}$  die Stefan-Boltzmann-Konstante und  $\bar{\kappa}_{\text{Rosseland}}$  das Rosseland-Mittel:

$$\bar{\kappa}_{\text{Rosseland},i}^{-1} = \frac{\int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} \kappa_{\nu}^{-1} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}{\int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu} \quad (2.59)$$

Im Gegensatz zum Planck-Mittel wird der Beitrag der Spektrallinien zur Emission hier unterschätzt. Für sehr hohe Absorptionskoeffizienten verschwindet der Strahlungswärmefluss und die emittierte Strahlung stammt aus einer sehr dünnen Randschicht, deren Breite in der Größenordnung der optischen Dichte liegt.

Weiterhin lässt sich natürlich auch ein normaler Mittelwert mit konstantem Gewichtungsfaktor definieren. Dieser wird als natürliches Mittel bezeichnet:

$$\bar{\kappa}_{\text{Natürlich},i} = \frac{\int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} \kappa_{\nu} d\nu}{\nu_{i+1} - \nu_i} \quad (2.60)$$

Abbildung 2.11 zeigt die Mittelungsverfahren an einem Absorptionsspektrum bei  $T=30\,000\text{ K}$  und  $p=100\text{ bar}$ .

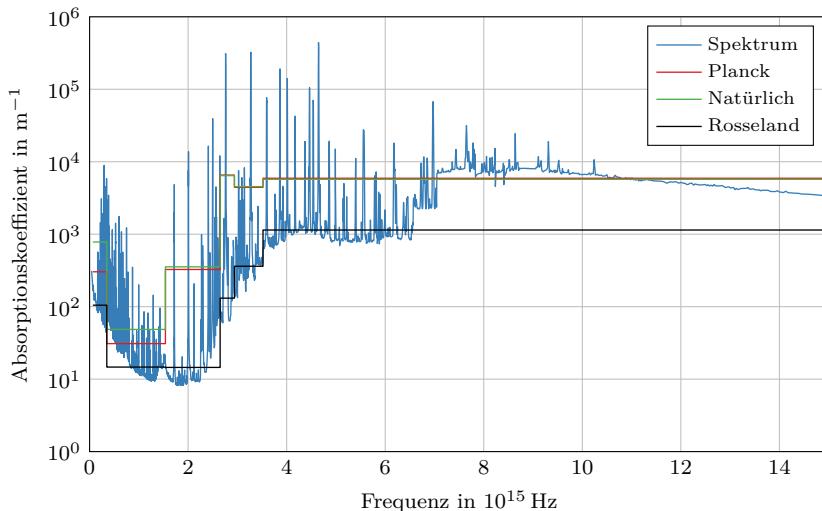
### Das mehrbandige P<sub>1</sub>-Modell

Das mehrbandige P<sub>1</sub>-Modell ergibt sich durch Zerlegung des Absorptionsspektrums in einzelne Frequenzbereiche:

$$G_i = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} G_{\nu} d\nu \quad B_i(T) = \int_{\nu_i}^{\nu_{i+1}} B_{\nu}(T) d\nu$$

$$\vec{q}_{\text{r},i} = -\frac{1}{3\kappa_i} \vec{\nabla} G_i \quad S_{\text{r}} = \sum_i^N \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{\text{r},i} \quad (2.61)$$

Wie bereits beschrieben, kommt es beim Planck-Mittel zur Überschätzung und beim Rosseland-Mittel zur Unterschätzung des Einflusses der Spektrallinien. Die Abhängigkeit der gemittelten natürlichen Absorptionskoeffizienten der einzelnen Bänder von der Temperatur sowie die bei der Mittelung verwendeten Bandgrenzen werden in Abbildung 2.12 gezeigt. Hier zeigt sich der in Abschnitt 2.4.4 diskutierte

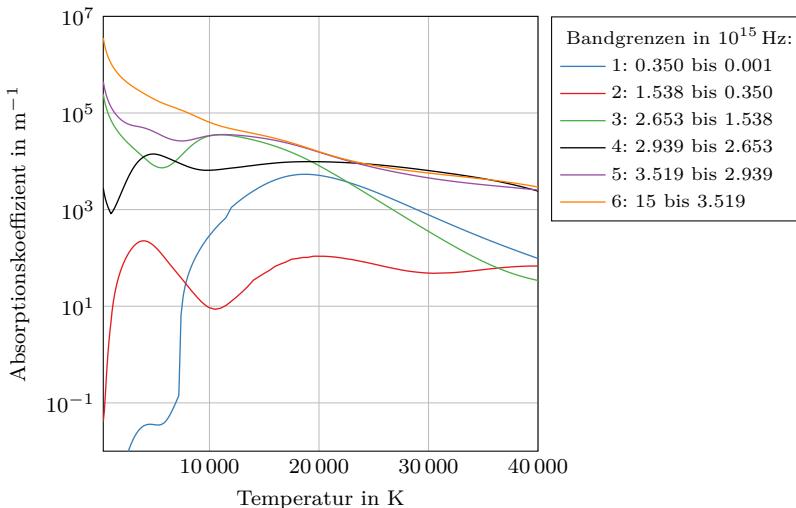


**Abb. 2.11:** Absorptionsspektrum für  $T=30\,000\text{ K}$  und  $p=100\text{ bar}$  mit Rosseland-, Planck- und natürlichem Mittelwert [M L13; M L07].

Effekt, dass die Absorptionskoeffizienten mit steigender Temperatur tendenziell abnehmen. Die gezeigten Bandgrenzen basieren auf den von Rümpler [Rüm09] und Rüther [Rüt14] verwendeten, die äußereren Bänder wurden jedoch zu niedrigeren und höheren Frequenzen erweitert, um der höheren Temperatur und der daraus folgenden breitbandigeren Strahlung zu genügen.

### Das $\kappa$ -Gruppenmodell

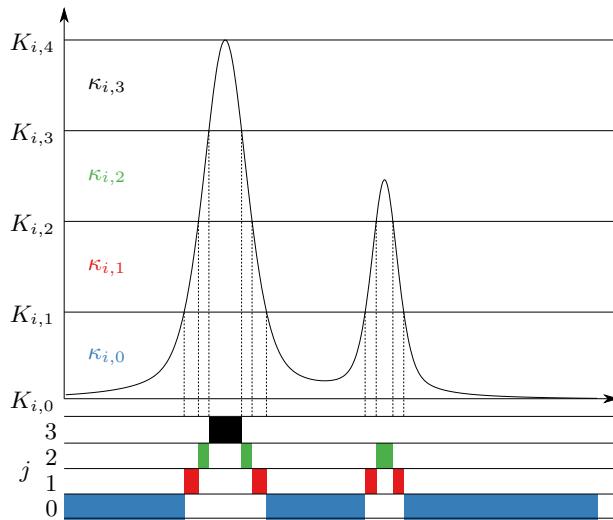
Die zuvor dargestellten Mittelungsverfahren haben auf kontinuierlichen Intervallen den Nachteil, dass der Absorptionskoeffizient innerhalb eines Bandes eine zu dem gesamten Absorptionsspektrum vergleichbar große Varianz zeigt. Der spektrale Absorptionskoeffizient weicht daher für die meisten Frequenzen sehr stark von dem jeweiligen Mittelwert ab. Eine Erhöhung der Anzahl der Bänder kann dieses Problem nicht lösen, da auch bei der Verwendung von vielen Bändern diese noch immer eine Vielzahl von Spektrallinien enthalten und das grundlegende Problem bestehen bleibt. Um diesen Fehler zu reduzieren, kann der Umstand genutzt werden, dass die einzelnen Intervalle nicht zusammenhängen müssen, sondern auch diskontinuierliche Mengen  $X_{i,j}$  von Frequenzintervallen darstellen können. Das



**Abb. 2.12:** Mittlere natürliche Absorptionskoeffizienten von Luft in Abhängigkeit der Temperatur für  $p=100$  bar

$\kappa$ -Gruppenmodell stellt eine Erweiterung des Bandmodells dar, in dem ein einzelnes Band in mehrere Untergruppen mit ähnlichen Werten von  $\kappa_\nu$  unterteilt wird. Durch diese Gruppierung kann der bei der Mittelung auftretende Fehler reduziert werden [Sol00]. Allerdings müssen die Mengen für alle Drücke und Temperaturen gleich gewählt werden, so dass die für einen Druck und eine Temperatur bestimmte Gruppierung insbesondere für andere Temperaturen zu Abweichungen führt, da das Absorptionsspektrum nicht linear mit der Temperatur skaliert. Bei großen Wertebereichen können daher zum Bandmodell vergleichbare Probleme auftreten. Zumindest der durch das Auftreten von Absorptionskanten und Spektrallinien bei höheren Frequenzen und Temperaturen verursachte Fehler (siehe Abschnitt 2.4.4) lässt sich durch eine geeignete Wahl der Bandgrenzen jedoch begrenzen.

Zur Bestimmung der Gruppen werden zunächst für jedes Absorptionsspektrum und für jedes Frequenzband  $i$  logarithmisch skalierte Grenzen  $K_{i,j}$  für die einzelnen  $\kappa$ -Gruppen definiert. Der Gruppenindex für einen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  bei einer bestimmten Frequenz ergibt sich dann als  $j$ , falls  $K_{i,j} \leq \kappa_\nu < K_{i,j+1}$  (siehe dazu auch Abbildung 2.13). Zur Bestimmung von Gruppenindizes, die für alle



**Abb. 2.13:** Prinzip des  $\kappa$ -Gruppenmodells. Die Absorptionskoeffizienten werden abhängig von ihrem Wert in Gruppen eingesortiert, um den bei der Mittelung entstehenden Fehler zu minimieren [Sol00].

Absorptionsspektren konsistent sind, wird anschließend der Mittelwert der Indizes gebildet und dieser auf ganzzahlige Indizes gerundet. Dieses Vorgehen erfordert die Interpolation der Absorptionsspektren auf eine einheitliche Frequenzachse. In Versuchen hat sich gezeigt, dass hierfür etwa  $2 \times 10^7$  Stützstellen notwendig sind, um konvergente Ergebnisse zu erhalten.

Für das P<sub>1</sub>-Modell ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 G_{i,j} &= \int_{\nu \in X_{i,j}} G_\nu \, d\nu & B_{i,j}(T) &= \int_{\nu \in X_{i,j}} B_\nu(T) \, d\nu \\
 \vec{q}_{r,i,j} &= -\frac{1}{3\kappa_{i,j}} \vec{\nabla} G_{i,j} & S_r &= \sum_i^{N_i} \sum_j^{N_j} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_{r,i,j}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

## Das approximierte spektrale Modell

Wie in Abschnitt 2.4.1 beschrieben, verbreitern sich die Spektrallinien im Emissionsspektrum bei hohen Drücken. Dies bedeutet insbesondere, dass die spektralen Strukturen im Emissionsspektrum weniger signifikant werden. Aus der Diffusionsnäherung Gleichung (2.58) wird ersichtlich, dass Emissionslinien nur wenig zum Strahlungstransport beitragen, da sie auf sehr kurzer Distanz reabsorbiert werden. Diese Tatsachen ermöglichen es, im Fall hoher optischer Dichte ein spektrales Modell mit niedriger Auflösung zu verwenden. Hierzu werden die Absorptionsspektren auf eine niedrige Anzahl von Stützstellen interpoliert. Anschließend kommt das in Abschnitt 2.4.3 vorgestellte spektrale P<sub>1</sub>-Modell zum Einsatz.

## 2.5 Plasma-Wand Interaktion

### 2.5.1 Wärmetransfer

Bedingt durch die enormen Temperaturunterschiede zwischen dem Plasma und der Wand kommt es zu einem Energietransfer vom Plasma in die Wand, der zum Abtrag des Wandmaterials führt. Die in den vorigen Abschnitten dieses Kapitels dargestellten Annahmen und Gleichungen sind hier größtenteils nicht mehr gültig, da das abgetragene Material erst durch Wechselwirkung mit dem Plasma zum thermodynamischen Gleichgewicht übergeht. Außerdem ergeben sich nahe der Elektroden Ladungsungleichgewichte, da die Elektroden als Absorber bzw. Emittier der Ladungsträger wirken. Man kann verschiedene Übergangsschichten definieren, die sich durch thermisches Nichtgleichgewicht der einzelnen Spezies, Abweichungen von der Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung oder durch Ladungsungleichgewicht auszeichnen. In diesen Regionen ist die Näherung eines Einfluidmodells daher nicht gültig. Um trotzdem zu einer Beschreibung des Plasmaverhaltens zu gelangen, ist es notwendig, den Wärmetransfer und den Massenabbrand an den Wänden korrekt vorherzusagen. Hierzu kommen oft semiempirische Modelle zum Einsatz, die die zum Materialabtrag verfügbare Leistung über Wärmestrombilanzen abbilden. Dafür wird der Festkörper in der Simulation als zusätzliche Region modelliert, in der die Wärmeleitungsgleichung für Festkörper gelöst wird:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\lambda}{c_p} \vec{\nabla} h \right) \quad (2.63)$$

In den nächsten beiden Unterabschnitten wird näher auf die Vorgänge an den Polymerwänden und den Elektroden eingegangen. Dabei werden auch die verwendeten Bilanzgleichungen diskutiert.

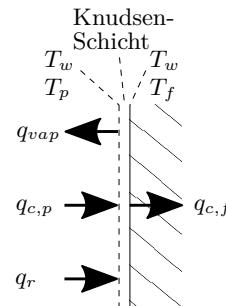
## 2.5.2 Polymerabbrand

In der Literatur existieren zahlreiche Modelle zur Modellierung des Polymerabbrands. Darunter fallen Modelle, die das Prinzip der maximalen Entropieproduktion nutzen [Chr07; Gon+15], die die Boltzmanngleichung lösen [Mar+07] und solche, die den Massenabbrand an der Wand mit der Hertz-Knudsen-Gleichung und einer Depositionsraten modellieren [Tan+08]. Weitergehende Modelle berücksichtigen die Eindringtiefe der Strahlung und deren Frequenz für die Zersetzung der Bindungen im Festkörper[Nos+07]. Die am häufigsten verwendeten basieren jedoch auf einer Bilanzgleichung der senkrecht zur Wand gerichteten, eindimensionalen Wärmeflüsse an der Grenzfläche:

$$q_{c,p} + q_r = q_{c,f} + q_{vap} \quad (2.64)$$

Dabei bezeichnen

- $q_{c,p}$  die Wärmeleitung des Plasmas in die Grenzschicht
- $q_r$  den Nettowärmefluss durch Strahlung auf die Wand
- $q_{c,f}$  die Wärmeleitung aus der Grenzschicht in den Festkörper
- $q_{vap}$  den Verdampfungswärmefluss



**Abb. 2.14:** Wärmeflüsse an der Polymerwand.

Ein ähnliches Modell wurde schon in der Arbeit von C. B. Ruchti und L. Niemeyer [CL86] verwendet, in der die Autoren den Materialabbrand mit einem Zwei-Zonen-Modell untersucht haben. In dieser Arbeit wird das Eindringen der Strahlung in den Festkörper diskutiert. So wurden bei weißem PTFE Strahlenschäden bis in einigen Millimeter Tiefe festgestellt. Durch die Absorption im Festkörper kann es zum Verdampfen des Materials innerhalb des Festkörpers kommen, was Gasblasen mit hohem Druck erzeugt und bei manchen Materialien zu einem Abplatzen des

Materials führen kann. Die obige Bilanzgleichung beschreibt nur die Vorgänge am Grenzübergang zwischen Plasma und Festkörper und kann diesen Aspekt daher nicht beschreiben. In ÜSGs wird häufig POM verwendet, das ein sehr gleichmäßiges Abbrandverhalten mit glatten Oberflächen zeigt. Daher wird hier zunächst davon ausgegangen, dass die Strahlung bei POM sehr nah an der Oberfläche absorbiert wird und dieser Effekt daher vernachlässigt werden kann. Im einfachsten Fall kann dieser Effekt durch einen empirischen Faktor berücksichtigt werden, so dass nur ein Teil der zur Verfügung stehenden Strahlungsleistung berücksichtigt wird, da der restliche Teil tiefer im Polymer absorbiert wird. Diese Methode wird in Kapitel 5 zum Abgleich mit experimentellen Messungen angewendet. Die Verformung der Wand durch den Materialabbrand und die kinetische Energie des abbrennenden Materials wird vernachlässigt. Die in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse sind daher nur mit Experimenten mit neuen Bauteilen zu vergleichen, die noch keiner Alterung unterlegen haben.

In direkter Nähe zur Wand existiert eine Schicht in der Größenordnung einiger mittlerer freier Weglängen, in der das abbrennende Material durch Kollisionen zu einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung übergeht. Diese Schicht wird als Knudsen-Schicht bezeichnet [Knu15; KBB01]. Weiterhin gibt es experimentelle Evidenz dafür, dass das abbrennende Material eine höhere Temperatur als die Verdampfungstemperatur aufweisen kann [FN83], weshalb viele Autoren mit Temperaturen im Bereich von 3000 bis 4500 K arbeiten [Ara+14; Dom+97; God+00; Gon+15; Ma+09; Nos+07; Zha+02]. Dies wird meistens durch die starke Absorption von UV-Strahlung bei niedrigeren Temperaturen begründet. Da das Gas in der Knudsen-Schicht nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist und eine zu Luftplasmen andere Zusammensetzung aufweist, sind die in Abschnitt 2.4 ermittelten Absorptionsspektren nicht gültig. Die Temperatur des abbrennenden Materials folgt daher aus experimentellen Messungen oder theoretischen Überlegungen wie [Chr07].

Basierend auf der Temperatur des abbrennenden Materials wird eine effektive Verdampfungsenthalpie definiert, die sich aus der Verdampfungsenthalpie und der Enthalpieerhöhung durch Strahlungsabsorption in der Knudsen-Schicht zusammensetzt:

$$\Delta h_{\text{vap,eff}} = \Delta h_{\text{vap}} + (h(p, T_k) - h(p, T_{\text{vap}})) \quad (2.65)$$

Dabei bezeichnet  $h(p, T)$  die in Abbildung 2.4 dargestellte Enthalpiefunktion und  $T_k$  die Temperatur außerhalb des abbrennenden Materials nach Strahlungsabsorption in der Knudsen-Schicht. Der Einfluss des Drucks wird hier zum Teil durch die Enthalpiefunktion berücksichtigt. Generell kommt es bei höheren Drücken zu reduzierten Verdampfungsenthalpien, was sich in der flacheren Enthalpiefunktion zeigt. Prinzipiell wäre in der obigen Gleichung der Ausdruck  $h(p, T_k) - h(p_0, T_{\text{vap}})$  zu verwenden, da sich die Verdampfungsenthalpie auf den Normaldruck bezieht. Dies kann bei hohen Drücken aber zu numerischen Problemen führen und ist der starken Vereinfachung dieses Ansatzes geschuldet. Der Einfluss dieses Effekts wird von Petchanka et al. anhand des Prinzips der maximalen Entropieproduktion [Pet+16] gezeigt, welches im Folgenden noch genauer betrachtet wird.

Der Verdampfungswärmefluss  $q_{\text{vap}}$  wird mit Gleichung (2.64) bestimmt unter der Annahme, dass die Temperatur  $T_w$  in der Grenzschicht die Verdampfungstemperatur nicht überschreitet. Hierfür wird eine Temperaturreibedingung genutzt. Die Wärmeströme lassen sich als  $q_{c,p} = \lambda_p \frac{T_p - T_w}{\Delta x_p}$  und  $q_{c,f} = \lambda_f \frac{T_w - T_f}{\Delta x_f}$  schreiben, wobei  $\Delta x_p$  und  $\Delta x_f$  die Abstände vom Mittelpunkt der jeweiligen Gitterzelle im Plasma bzw. im Festkörper zum Rand sind und  $T_p$  die Temperatur des Plasmas in der Zelle neben der Wand und  $T_f$  die Temperatur in der ersten Festkörperzelle (siehe Abbildung 2.14). Zunächst wird der Fall betrachtet, bei dem die Temperatur  $T_w$  in der Grenzschicht kleiner als die Verdampfungstemperatur  $T_{\text{vap}}$  ist und daher  $q_{\text{vap}} = 0$  gilt<sup>5</sup>. Die Temperatur an der Wand ergibt sich damit aus Gleichung (2.64) als:

$$T_w = \frac{\lambda_p \frac{T_p}{\Delta x_p} + \lambda_f \frac{T_f}{\Delta x_f} + q_r}{\lambda_p \Delta x_p + \lambda_f \Delta x_f} \quad (2.66)$$

Ergibt sich hier eine höhere Temperatur, so wird als Randbedingung  $T_w = T_{\text{vap}}$  gesetzt und Gleichung (2.64) nach  $q_{\text{vap}}$  aufgelöst:

$$q_{\text{vap}} = \lambda_p \frac{T_p - T_{\text{vap}}}{\Delta x_p} - \lambda_f \frac{T_{\text{vap}} - T_f}{\Delta x_f} + q_r \quad (2.67)$$

Dann folgt der Massenquellterm als Verhältnis aus dem Verdampfungswärimestrom und der effektiven Verdampfungsenthalpie:

$$S_\rho = \frac{\dot{m}}{V} = \frac{q_{\text{vap}} A}{\Delta h_{\text{vap,eff}} V} \quad (2.68)$$

<sup>5</sup>Das heißt, dass die schon bei Temperaturen unterhalb der Verdampfungstemperatur stattfindende Verdampfung sowie die bei niedrigeren Temperaturen stattfindende Photodissociation durch UV-Strahlung vernachlässigt wird.

Dabei ist  $V$  das Volumen einer Randzelle im Plasma und  $A$  die Randfläche. Der Energiequellterm aus Gleichung (2.14) setzt sich wie folgt zusammen:

$$S_{e_\rho} = e_{S_\rho} S_\rho = \left( h(p, T_k) + \underbrace{k_{S_\rho}}_{=0} - \frac{p}{\rho(p, T_k)} \right) S_\rho \quad (2.69)$$

Dabei wurde die kinetische Energie des abbrennenden Materials vernachlässigt. Die Verwendung von  $\rho(p, T_k)$  im Term der Volumenarbeit ergibt sich unter Annahme eines vernachlässigbaren Volumens des verdampften Materials im festen Zustand, einem konstanten Außendruck (d.h. ein offenes System) und der Verdrängung eines Teils der Masse in der ersten Zelle ohne Vermischung mit dem verdampften Gas. Die Relevanz dieses Terms ist unklar und er wird von den meisten Autoren nicht angegeben, was möglicherweise darauf zurückzuführen ist, dass er zu numerischen Problemen kommen kann, wenn die oben genannten Annahmen nicht zutreffen. Die Auswirkungen dieses Terms sind im Normalfall sehr gering, was die Vernachlässigung begründet.

Die Verdampfungstemperatur ist gemäß einer Dampfdruckkurve druckabhängig, d.h. sie steigt mit höherem Druck, da die verdampfenden Monomere gegen den äußeren Druck arbeiten müssen und Anlagerungsprozesse stattfinden können. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass es sich hier nicht um einen einfachen Phasenübergang handelt, da die Bestandteile des POMs sich beim Verdampfen und beim anschließenden Erhitzen im Plasma zersetzen. Die klassische Clausius-Clapeyron-Gleichung für den Dampfdruck kann daher nicht verwendet werden, da es sich beim Polymerabbrand um einen irreversiblen Prozess handelt.

Dennoch ist davon auszugehen, dass die Verdampfungsrate bei hohem Druck abnimmt, da das abbrennende Material gegen den Druck Arbeit verrichten muss. Einen Ansatz bietet das Prinzip der maximalen Entropieproduktion, dass es ermöglicht, eine Druckabhängigkeit für die Temperatur des abbrennenden Gases außerhalb der Knudsen-Schicht und für die effektive Verdampfungsenthalpie zu bestimmen. Das Prinzip besteht aus der Annahme, dass irreversibel ablaufende Prozesse maximal schnell ablaufen und somit die Produktionsrate der Entropie maximieren. Aus der Theorie von Christen [Chr07] ergibt sich eine Entropieproduktionsrate  $\dot{s}$  von:

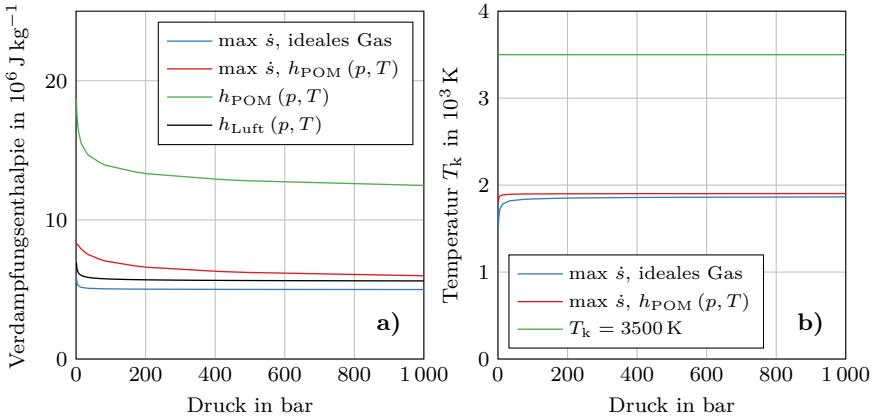
$$\dot{s} = q_r \frac{s(p, T) - s(p, T_{\text{vap}})}{h(p, T) - h(p, T_{\text{vap}}) + \Delta h_{\text{vap}}} \quad (2.70)$$

Dabei ist  $s(p, T)$  die spezifische Entropie des betrachteten Plasmas. Unglücklicherweise sind für POM keine Entropiedaten aus der Literatur bekannt. Christen hat die Ergebnisse der korrekten Enthalpiefunktion von PTFE mit der eines idealen PTFE-Gases verglichen. Hier zeigt sich, dass die Temperatur  $T_k$  des Gases außerhalb der Knudsen-Schicht nahezu identisch ist, während die Verdampfungsenthalpie bei dem idealen Gas etwa zweimal zu niedrig liegt. Ausgehend von den Daten von André [And96] lassen sich diese beiden Größen unter Nutzung der Entropiefunktion des idealen POM-Gases  $s_{\text{POM}}(p, T) = c_p(p, T_{\text{vap}}) \cdot \ln(T)$  bestimmen. Die Annahme eines idealen Gases mit  $h_{\text{POM}}(p, T) = c_p(p, T_{\text{vap}}) \cdot T$  führt zu größeren Fehlern, weshalb sich auch die Verwendung der Enthalpiefunktion von POM in Gleichung (2.70) anbietet. Die Ergebnisse werden in Abbildung 2.15 dargestellt. Auffällig ist die wesentlich niedrigere Temperatur von  $T_k \approx 1900\text{ K}$  im Vergleich zu den üblicherweise verwendeten Temperaturen von etwa 3000 bis 3500 K, die sich bei der Maximierung der Entropieproduktion ergibt. Auch zeigt sich hier der Trend, dass die mit der korrekten Enthalpiefunktion von POM berechnete Verdampfungsenthalpie über der mit einem idealen Gas berechneten liegt. Für die Annahme von  $T_k = 3500\text{ K}$  ergeben sich aufgrund der höheren Temperatur größere Werte für  $\Delta h_{\text{vap,eff}}$ . Wird hier aus Konsistenzgründen die Enthalpiefunktion  $h_{\text{Luft}}(p, T)$  von Luft verwendet, so ergibt sich eine ähnliche Verdampfungsenthalpie wie die mit  $h_{\text{POM}}(p, T)$  bei  $T_k \approx 1900\text{ K}$  berechnete. Insgesamt ergibt sich nur eine geringe Druckabhängigkeit, die erst bei Drücken unter 100 bar relevant wird.

Das Modell mit konstantem  $T_k$  und  $\Delta h_{\text{vap,eff}}$  wird in Abschnitt 4.7 mit dem Modell der maximalen Entropieproduktion verglichen. Die Enthalpiefunktion von POM wird in Abschnitt 2.5.4 diskutiert.

### 2.5.3 Fußpunktmodellierung und Elektrodenabbrand

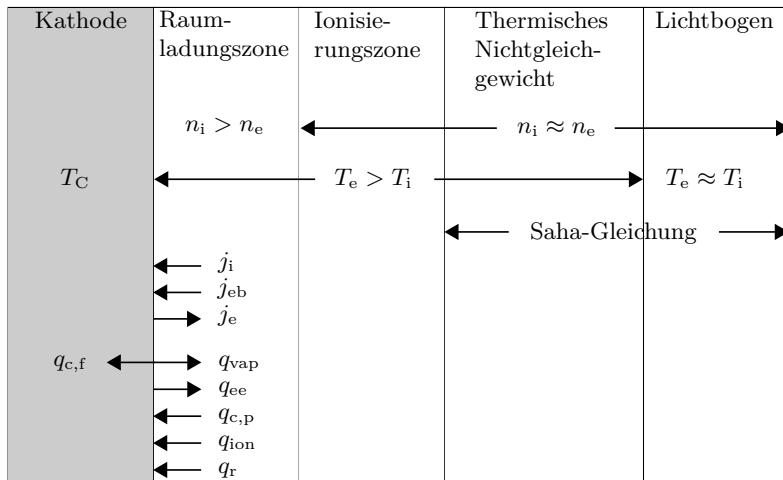
Die Prozesse an den Elektroden sind von entscheidender Bedeutung, da sie die für den Stromfluss notwendigen Ladungsträger bereitstellen und aufnehmen. Die Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts bricht in der Nähe der Elektroden zusammen: Es bilden sich daher Nichtgleichgewichtszonen in der Größenordnung einiger Debye-Längen heraus (siehe Abbildung 2.16), die sich durch verschiedene Temperaturen von Elektronen und schweren Teilchen, Abweichungen vom Ionisationsgleichgewicht und durch Ladungsungleichgewichte auszeichnen [BM95]. Eine weitere Schwierigkeit entsteht durch die Notwendigkeit, den



**Abb. 2.15:** a) Effektive Verdampfungsenthalpie sowie b) Temperatur des abbrennenden POMs außerhalb der Knudsen-Schicht, berechnet durch das Prinzip der maximalen Entropieproduktionsrate, sowie mit konstantem  $\Delta h_{\text{vap}}$  und  $T_k$  mit  $h_{\text{Luft}}(p, T)$  und  $h_{\text{POM}}(p, T)$  [Chr07; And96].

Einfluss des verdampfenden Elektrodenmaterials zu modellieren, welches die Plasmeigenschaften stark beeinflussen kann [Cre+08; Pet+14; GC16]. Die Stromdichte in Überspannungsableitern liegt für  $A \approx 10^{-5} \text{ m}^2$  und  $I \approx 10 \text{ kA}$  in der Größenordnung von  $10^9 \text{ A m}^{-2}$ . In Fußpunkten können jedoch wesentlich höhere Stromdichten auftreten. Eine Extrapolation der Daten des Kathodenfußpunktmodells von Coulombe und Meunier [CM97] suggeriert etwa Stromdichten in der Größenordnung von  $10^{11} \text{ A m}^{-2}$ , so dass diese Fußpunkte nur noch auf sehr feinen Netzen auflösbar sind. In dieser Arbeit soll das Verhalten an den Elektroden nur näherungsweise beschrieben werden, daher wird analog zur Behandlung des Polymerabbrands in Abschnitt 2.5.2 eine Wärmeleitungsgleichung verwendet, um den Metallabbrand zu modellieren. Die Joulesche Wärme in den Elektroden wird vernachlässigt, da hier aufgrund der hohen Leitfähigkeit und der hohen Dichte über den Impuls Temperaturerhöhungen von weniger als 1 K entstehen. Erst bei längeren Impulsen auf der Millisekunden-Zeitskala ergeben sich zweistellige Werte.

Die unterschiedlichen Wirkmechanismen an Kathode und Anode werden nachfolgend vorgestellt und in Abschnitt 4.7.2 genauer untersucht.



**Abb. 2.16:** Aufbau des Kathodenfallgebiets mit Abweichungen zum Gleichgewichtszustand im Lichtbogen sowie der an der Grenzfläche auftretenden elektrischen Ströme und Wärmeströme [MU18].

### Physikalische Prozesse an der Kathode

Der Stromfluss an der Kathode setzt sich aus drei Anteilen zusammen, Thermofeldemission, Ionenbombardement sowie ein nahezu vernachlässigbarer Anteil durch rückdiffundierende Elektronen. Die Emission von Elektronen findet primär durch Thermofeldemission statt, bei der die Austrittsarbeit des Festkörpers sowohl durch thermische Energie als auch durch ein externes elektrisches Feld überwunden wird. Bei Elektroden mit hoher Verdampfungstemperatur kommt dabei der Thermoemission eine größere Bedeutung zu, da die Austrittsarbeit des Festkörpers bei hohen Temperaturen leichter überwunden werden kann. Bei niedrigeren Temperaturen an der Kathode reicht dagegen die reine Thermoemission nicht aus, um genug Elektronen für den Stromfluss bereitzustellen. Daher bildet sich vor der Elektrode ein Ionenüberschuss aus, der ein elektrisches Feld erzeugt, dass über den Feldemissionseffekt die Thermofeldemission verstärkt. Dieses Feld verhindert weiterhin größtenteils die Rückdiffusion der Elektronen in Richtung der Kathode (in Abbildung 2.16 als  $j_{eb}$  bezeichnet), so dass diese bei der folgenden Betrachtung nicht berücksichtigt werden. Der durch dieses Feld entstehende Spannungsfall wird als Kathodenfallspannung bezeichnet. Die Ionen diffundieren zur Kathode.

de und lagern sich dort an, was als Ionenbombardement bezeichnet wird. Durch diesen Prozess wird die Kathode geheizt und ermöglicht dadurch eine verstärkte Thermoemission. Hierfür muss das Ionenbombardement allerdings stark genug sein, was einen hohen Druck durch das äußere Plasma oder durch abbrennendes Elektrodenmaterial erfordert. In Modellrechnungen zu Vakuum- und Niederdruckschaltern zeigt sich, dass die erforderliche Ionendichte für den Thermofeldemissionsstrom nur durch Materialabbrand entstehen kann. Hier ergeben sich Drücke in der Größenordnung von 30 bar [CM97]. Dieser Effekt ist hier auch von Bedeutung, zusätzlich kommt jedoch der ohnehin schon massiv erhöhte Umgebungsdruck hinzu, der etwa zehnmal höher liegt. Die Berücksichtigung dieser Effekte liefert die folgende Bilanzgleichung (siehe auch [ZHP94; ZYF04; Ron+09b]):

$$q_{\text{vap}} + q_{\text{ee}} + q_{\text{c,f}} = q_{\text{c,p}} + q_{\text{ion}} + q_{\text{r}} \quad (2.71)$$

Dabei bezeichnen

- $q_{\text{vap}}$  den Verdampfungswärmefluss des Kathodenmaterials. Die Temperaturbestimmung an der Kathode erfolgt wie in Abschnitt 2.5.2 beschrieben. Der Abtrag von flüssigem Kupfer in Form von Tropfen wird vernachlässigt.
- $q_{\text{ee}}$  die Kühlung durch Elektronenemission. Diese ist durch  $q_{\text{ee}} = |j_e| \Psi_C$  gegeben, wobei  $j_e = j - j_i$  mit  $j_e \approx 0.8j$  den durch Elektronen getragenen Strom bezeichnet [ZYF04; CM97].  $\Psi_C$  bezeichnet die Austrittsarbeit, die Elektronen beim Verlassen des Festkörpers aufbringen müssen mit  $\Psi_{C,Cu} \approx \Psi_{C,w} \approx 4.5 \text{ eV}$ .
- $q_{\text{c,f}}$  die Wärmeleitung aus der Grenzschicht in die Kathode.
- $q_{\text{c,p}}$  die Wärmeleitung aus dem Plasma in die Grenzschicht.
- $q_{\text{ion}}$  den Wärmestrom durch Ionenbombardement. Dieser beträgt  $q_{\text{ion}} = j_i (V_C + V_{I,Cu} - \Psi_{C,Cu} + \frac{5k_B}{2e} T_w)$ . Hier wird die Heizung durch die Kathodenfallspannung  $V_C$  und das Rekombinationspotential  $V_{I,Cu} = 7,72 \text{ V}$  berücksichtigt.

Für abbrandfeste Elektroden wird häufig ein Gemisch aus Kupfer und Wolfram verwendet, bei dem das Wolfram gesintert wird und das Kupfer durch Aufschmelzen in die Gefügestruktur eingebracht wird. Hierdurch entsteht ein Verbundwerkstoff, der die hohe Abbrandfestigkeit des Wolframs mit den vorteilhaften mecha-

nischen Eigenschaften des Kupfers verbindet. Durch die großen Unterschiede in den Schmelz- und Verdampfungstemperaturen schmilzt und verdampft zunächst das Kupfer und kühlt dadurch die Elektrode, solange diese noch genügend Kupfer enthält. Bei länger belasteten Elektroden ist daher davon auszugehen, dass die Elektrodoberfläche primär aus geschmolzenem Wolfram besteht, dass durch verdampfendes Kupfer aus den unteren Schichten durchdrungen wird [Tep+06]. Die Emission von Wolframtropfen aus der Elektrode wird in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet, kann durch das Ausgasen des verdampfenden Kupfers aus tieferen Schichten aber vermutlich stattfinden. Da die Gefügestruktur in der Simulation räumlich nicht aufgelöst werden kann, wird diese über eine Kombination der Materialeigenschaften approximiert (siehe Abschnitt 2.5.4). Hierzu werden die Eigenschaften in Abhängigkeit der Massenanteile errechnet oder Herstellerdaten verwendet, falls verfügbar. Bei der Verdampfungstemperatur muss die Druckabhängigkeit als Dampfdruckkurve berücksichtigt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass der äußere Druck des Plasmas dem des Partialdrucks des verdampfenden Kupfers entspricht, so dass der äußere Druck vollständig die Anlagerungsprozesse bestimmt.

Beim Abkühlen des Plasmas in der Löschphase ergeben sich weitere Effekte: Der abfallende Druck führt zu einer Reduktion der Verdampfungstemperatur, was eine erhöhte Verdampfungsrate zur Folge hat. Diese wiederum bremst bei niedrigen Plasmatemperaturen den Druckabfall und reguliert somit diesen Prozess. Durch diesen Effekt ist davon auszugehen, dass die Metallkonzentration im Plasma nahe der Elektrode beim Abkühlen hoch bleibt und somit den Löschprozess erschwert, da Metalldampfplasmen bei niedrigen Plasmatemperaturen höhere elektrische Leitfähigkeiten aufweisen. Weiterhin wird durch die Verdampfung die ElektrodenTemperatur reduziert, was eine Reduktion der Thermoemission zur Folge hat, so dass der Strom vermehrt durch Feldemission getragen werden muss, was höhere Fallgebietsspannungen bedeuten kann. Dieser Effekt wirkt dem vorhergehenden entgegen und erhöht die Löschfähigkeit. Dieser Mechanismus deutet darauf hin, dass neue Elektroden ein besseres Löschverhalten aufweisen sollten als belastete, die weniger Kupfer enthalten und durch die hohe Verdampfungstemperatur des Wolframs einen stärkeren Thermoemissionseffekt ermöglichen.

Die Höhe der Kathodenfallspannung ist für Stromdichten über  $10^4 \text{ A m}^{-2}$  unabhängig von der Stromdichte [Yok+98] und liegt bei Stromdichten unter  $10^8 \text{ A m}^{-2}$

in der Größenordnung von 10 bis 20 V. An Funkenstrecken mit Stromdichten in der Größenordnung von  $j \approx 10^9 \text{ A m}^{-2}$  wurden jedoch höhere Fallgebietsspannungen (Kathode + Anode) im Bereich von etwa 30 bis 77 V gemessen[Run17]. Dies lässt sich durch die bei hohem Druck vorhandene höhere Ionenkonzentration und das damit einhergehende elektrische Feld an der Kathode erklären (vgl. [CM97], Abbildung 6), das außerdem die Verstärkung der Thermofeldemission verursacht, die für die hohe Stromdichte erforderlich ist. Dieser Effekt könnte auch darauf hindeuten, dass sich bei hohem Druck weniger starke Fußpunktstrukturen ausbilden, wenn die Feldemission der dominante Emissionsmechanismus wird und die Thermoemission durch im Fußpunkt stattfindende Aufheizung weniger relevant wird. Hierdurch könnten sich vergleichsweise diffuse Fußpunkte mit größerer Fläche ausbilden. Als Gegenargument ist hier die erhöhte Verdampfungstemperatur bei hohem Druck anzuführen, durch die auch höhere Thermoemissionsströme ermöglicht werden. Die Literatur zeigt stark unterschiedliche Fußpunktstromdichten: Einige Veröffentlichungen zeigen, dass Fußpunkte auf einer ausreichend großen Elektrode Stromstärken in der Größenordnung von  $10^8 \text{ A m}^{-2}$  tragen und erst bei kleineren Elektroden bzw. höheren Strömen die Elektrode diffus kontaktieren und höhere Stromdichten tragen [ZHP94; BM95]. Andere zeigen allerdings wesentlich höhere Stromdichten in kontrahierten Fußpunkten (siehe Rümpler [Rüm09] für eine Argumentation für kontrahierte Fußpunkte). Diese Fragestellung ist nur mit einem geeigneten Kathodenmodell zu klären und wird in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt.

Bei niedriger Kathodentemperatur wird die Elektronenemission primär durch Feldemission bestimmt, was demnach eine höhere Kathodenfallspannung erfordert, damit die Kathode genügend Elektronen bereitstellen kann. Dies zeigt sich auch in den bereits erwähnten Messungen von [Run17], bei denen zu Beginn des 8/20  $\mu\text{s}$ -Impulses für etwa 10  $\mu\text{s}$  auf bis zu 77 V erhöhte Fallgebietsspannungen gemessen werden. Einige Autoren verwenden daher höhere Kathodenfallspannungen bei niedrigen Stromdichten, um den erhöhten Energiebedarf bei der Neubildung von Fußpunkten auf kalten Elektroden nachbilden zu können und damit die Lichtbogenwanderung in Schaltern besser wiederzugeben [Mut09; Rüm09]. Eine Temperaturabhängigkeit könnte hier möglicherweise bessere Ergebnisse liefern, da somit auch die Neubildung von Fußpunkten auf heißen Elektroden berücksichtigt werden könnte. Dies setzt aber voraus, dass die Fußpunkte räumlich aufgelöst wer-

den können. In dieser Arbeit wird die Fußpunktbildung nicht weiter betrachtet, da diese bei stationären Lichtbögen weniger relevant ist. Dennoch ist zu bemerken, dass hierdurch Abweichungen in der Spannung von bis zu 70 V in der ersten Hälfte des 8/20  $\mu\text{s}$ -Impulses entstehen können.

Wo nicht anders vermerkt, wird eine Kathodenfallspannung von  $V_C = 40 \text{ V}$  angenommen. Um diese zu modellieren, wird häufig eine reduzierte Leitfähigkeit in der ersten Zellschicht verwendet, der bei dem aktuellen Stromfluss gemäß dem Ohmschen Gesetz zum gewünschten Spannungsabfall führt:

$$\sigma_C = \frac{1}{\frac{1}{\sigma(p,T)} + \frac{V_C A}{|j_n|V}} \quad (2.72)$$

Durch die Verwendung der senkrecht zur Elektrode stehenden Komponente  $|j_n|$  des Stroms, des Zellvolumens  $V$  und der Randfläche  $A$  wird angenommen, dass der Strom senkrecht aus der Elektrode fließt. Die reduzierte Leitfähigkeit wird auch hier genutzt, wobei die dabei zusätzlich umgesetzte Energie vom Energiequellterm wieder abgezogen wird und direkt am Rand zwischen Plasma und Elektrode entsprechend Gleichung (2.71) eingebracht wird. Dies ist dadurch begründet, dass die erste Zellschicht im Normalfall signifikant größer ist als die Ausdehnung des Fallgebiets und somit eine bessere räumliche Lokalisierung des Energieeintrags modelliert werden kann. Außerdem ist die modifizierte Leitfähigkeit in der ersten Zellschicht erforderlich, um die Verteilung des Stromflusses auf der Elektrodenoberfläche modellieren zu können.

### Physikalische Prozesse an der Anode

Die positiv geladene Anode nimmt die Elektronen auf. Sie wird dabei als Absorber betrachtet, was zu einer niedrigeren Elektronendichte in der Nähe der Anode führt. Das klassische Ohmsche Gesetz bricht in dieser Schicht zusammen, da die elektrische Leitfähigkeit proportional zur Ladungsträgerdichte ist. In der Arbeit von Lowke und Tanaka [LT06] wird anhand eines Zweifluidmodells gezeigt, dass die niedrige Elektronendichte in der Nähe der Anode zu einem Diffusionsstrom von Elektronen führt. Die Autoren leiten eine effektive Diffusionslänge für die Elektronen her:

$$\Lambda = \frac{k_B T}{q_e E_n} \quad (2.73)$$

Dabei ist  $E_n$  das senkrecht zur Elektrode stehende elektrische Feld, das bei Überspannungsableitern im Plasmavolumen in der Größenordnung von  $100 \text{ V mm}^{-1}$  liegt. Bei  $T = 10\,000 \text{ K}$  ergibt sich beispielsweise eine Länge von  $\Lambda = 8,6 \mu\text{m}$ . Es ist jedoch schwierig, eine korrekte Länge anzugeben, da sich die Temperatur und damit auch die Elektronendiffusionslänge im Laufe eines Impulses ändert. Weiterhin ergibt sich in diesem Modell an der Anode ein verzögerndes negatives Feld, dass den Diffusionsstrom begrenzt. Diese negative Anodenfallspannung wird von mehreren Autoren beschrieben [SP84; LT06], jedoch finden sich auch Veröffentlichungen in der Literatur, die eine positive Anodenfallspannung messen oder verwenden [HYM04; Lag+04], so dass in Modellen auch mit positiven Anodenfallspannungen gerechnet wird [Ron+09b; LT06]. Der Diffusionsstrom ergibt sich durch die thermische Geschwindigkeit der Elektronen plus deren Driftgeschwindigkeit. Bei den hier betrachteten Bedingungen ist die thermische Geschwindigkeit mit  $v_{\text{therm}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}} \approx 10^6 \text{ m s}^{-1}$  etwa eine Größenordnung größer als die Driftgeschwindigkeit mit  $v_{\text{Drift}} = \frac{|\vec{j}|}{n_e q_e} \approx 10^5 \text{ m s}^{-1}$ , so dass prinzipiell ein verzögerndes Feld vorhanden sein sollte, dass den Elektronendrift begrenzt und somit die Kontinuität des Stroms sicherstellt. Bei ausreichend hohen Stromdichten ist die in Veröffentlichungen beobachtete Anodenfallspannung mit  $|V_A| < 5 \text{ V}$  betragsmäßig wesentlich kleiner als die Kathodenfallspannung. In dieser Arbeit wird aus numerischen Gründen jedoch, wo nicht anders beschrieben, der von Rong et al. [Ron+09b] verwendete Wert von  $V_A = 2,5 \text{ V}$  genutzt. Analog zur Kathodenmodellierung kommt auch hier wieder eine Bilanzgleichung zum Einsatz, die den Wärmetransfer und Materialabbrand modelliert.

$$q_{c,p} + q_r + q_{ie} = q_{c,f} + q_{\text{vap}} \quad (2.74)$$

Dabei stellt  $q_{ie}$  den Wärmestrom dar, der von den heißen Elektronen des Plasmas auf die kalte Wand übertragen wird. Dieser ist gegeben durch [Yan+10]:

$$q_{ie} = |j_n| \left( \Psi_A + V_A + \frac{5k_B}{2q_e} (T_p - T_w) \right) \quad (2.75)$$

Hier ist  $j_n$  die Stromdichte senkrecht zur Anodenfläche,  $\Psi_A$  die Austrittsarbeit der Anode und  $V_A$  die Anodenfallspannung. Die Bestimmung des Verdampfungswärmestroms und des verdampften Materials erfolgt analog zur Kathode und zu den Polymerwänden, wobei angenommen wird, dass das abbrennende Material in das Plasma mit der Verdampfungstemperatur eintritt.

## Genauigkeit der Elektrodenmodelle

Grundsätzlich stellen die vorgestellten Modelle nur eine vereinfachte Darstellung der Effekte dar, die an den Elektroden stattfinden.

Die Fußpunkte an Elektroden können kontrahiert sein, um die notwendige Energie bereitstellen zu können, die für die Elektronenemission benötigt wird (siehe z.B. Rümpler [Rüm09] für eine Diskussion dieser Effekte). Die Netzauflösung ist nicht ausreichend, um kontrahierte Fußpunkte auflösen zu können, und dieser Effekt wird von den vereinfachten Modellen auch nicht wiedergegeben. Die Kontraktion der Fußpunkte führt zu einem lokal erhöhten Energieeintrag und damit zu punktuell stark erhöhten Temperaturen. Im Modell wird diese Energie auf die gesamte Fläche verteilt, so dass mehr Energie durch Wärmeleitung abgeführt wird und es zu geringerem und verzögertem Elektrodenabbrand kommt. Es ist jedoch nicht vollständig klar, ob das Plasma im hier betrachteten Wertebereich überhaupt zu Fußpunkten kontrahiert und welche Größe diese aufweisen, oder ob sich ein diffuser Ansatzpunkt bildet.

Das Kathodenmodell enthält einige unbestimmte Parameter wie die Fallgebietsspannung und den Anteil der Elektronen am Stromfluss. Diese Parameter können prinzipiell nur abgeschätzt oder mit detaillierteren Kathodenmodellen bestimmt werden, was jedoch über den Fokus dieser Arbeit hinausgeht. Die Abhängigkeit der Fallgebietsspannung von der Elektrodentemperatur, dem Druck und der gesamten Stromdichte ist ebenfalls nicht klar, wobei Messungen hier Indizien geben können. Die Auswirkungen dieser Parameter werden in Abschnitt 4.7.2 untersucht.

Weiterhin werden wie bereits erwähnt Elektroden aus Kupfer-Wolfram verwendet. Die beiden Metalle unterscheiden sich am stärksten durch ihre stark unterschiedlichen Schmelz- und Verdampfungstemperaturen. Dies führt dazu, dass das Kupfer zunächst verdampft und entsprechend der vorgestellten Bilanzgleichungen zur Kühlung der Elektrode beiträgt. Diese Inhomogenität des Elektrodenmaterials wird in den Modellen nicht berücksichtigt. Stattdessen wird angenommen, dass die maximale Temperatur der Verdampfungstemperatur von Kupfer entspricht, da die Verdampfung des Kupfers die maximale Temperatur limitiert. Lokal können real jedoch auch höhere Elektrodentemperaturen existieren, insbesondere dann, wenn das oberflächennahe Kupfer schon verdampft ist oder ein Fußpunkt auf Wolfram brennt. Da Wolfram eine wesentlich höhere Verdampfungstemperatur hat (6203 K

bei  $p=1$  atm), kann dessen Abbrand vernachlässigt werden, solange die Elektroden neu genug sind und die Oberfläche der Elektrode genug Kupfer enthält. Die höhere Verdampfungstemperatur des Wolframs kann zu lokal erhöhten Temperaturen führen im Vergleich zur Verdampfungstemperatur von Kupfer, und somit einen höheren Thermoemissionsstrom ermöglichen. Die Änderung der inneren Struktur der Elektrode kann räumlich nicht aufgelöst werden und wird vernachlässigt, um die Komplexität des Modells zu begrenzen.

Die Annahme, dass sich das Plasma wie ein Luftplasma verhält, führt in der Nähe der Elektroden zu Abweichungen, da das Plasma hier fast nur aus verdampftem Kupfer besteht, welches sich durch eine bessere Leitfähigkeit bei kleinen Temperaturen, eine höhere Dichte und stärkere Strahlungsemision auszeichnet. Es wird davon ausgegangen, dass hierdurch ein vergleichsweise großer Fehler entsteht.

Die hier vorgestellten Modelle stellen einen Kompromiss aus einfacheren Modellen wie der Verwendung von reduzierten Leitfähigkeiten zur Modellierung der Elektrodenfallspannungen [Mut09; Rüm09], der Verwendung von zur Stromdichte proportionalem Massenabbrand [Rüm09] und der Nutzung eines aufwändigeren Zweifluidmodells dar. Eine vollständige Bewertung der Modelle kann nur durch Vergleich mit einem Zweifluidmodell stattfinden, dass den Materialabbrand an den Elektroden und die Eigenschaften des Metallplasmas berücksichtigt.

#### 2.5.4 Thermodynamische Eigenschaften der Festkörper

Analog zu Abschnitt 2.3 werden hier die thermodynamischen Eigenschaften der Festkörper betrachtet, die das Plasma in der Funkenstrecke umschließen. In dieser Arbeit kommt als Elektrodenmaterial ein Kupfer-Wolfram-Verbundstoff mit einem Massenanteil des Wolframs von 75 % zum Einsatz. Als Isolationsmaterial wird POM eingesetzt. Für die Modellierung sind insbesondere die Dichte  $\rho(p, T)$ , die Enthalpie  $h(p, T)$  sowie die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda(p, T)$  von Interesse. Die Druckabhängigkeit zeigt sich insbesondere in der Enthalpie durch eine Verschiebung der Verdampfungstemperatur entsprechend einer Dampfdruckkurve. Die restlichen Druckabhängigkeiten sowie die Temperaturabhängigkeit der Dichte (bzw. die thermische Expansion) werden ebenfalls vernachlässigt, so dass sich Größen der Form  $\rho$ ,  $h(T)$  und  $\lambda(T)$  ergeben. Für die Dichte werden die Werte  $\rho_{\text{CuW}} = 14,9 \text{ g cm}^{-3}$  [Ind] und  $\rho_{\text{POM}} = 1,43 \text{ g cm}^{-3}$  [Ens11] verwendet.

Wolfram hat bei Normaldruck eine höhere Schmelztemperatur als die Verdampfungstemperatur des Kupfers. Bei höherem Druck kehrt sich dies aber um, da Schmelztemperaturen im Gegensatz zu Verdampfungstemperaturen nur eine sehr geringe Druckabhängigkeit aufweisen und die Verdampfungstemperatur des Kupfers somit über die Schmelztemperatur des Wolframs steigt.

Da die Daten für  $h$  und  $\lambda$  für Kupfer-Wolfram von den Materiallieferanten nur als einzelne Werte bei Normalbedingungen angegeben werden, werden die Daten der reinen Elemente[HPL72; Tol+17] interpoliert. Die Enthalpie wird linear mit den Massenanteilen interpoliert (siehe Abbildung 2.17 a)). Die Wärmeleitfähigkeit (siehe Abbildung 2.17 b)) wird mit einem Modell von Maxwell interpoliert, dass von der Einbringung eines kugelförmigen Materials mit einer Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_1$  und einem Volumenanteil  $\Phi$  in ein Material mit einer Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_0$  ausgeht. In dem Modell ergibt sich folgende effektive Wärmeleitfähigkeit[BSL07]:

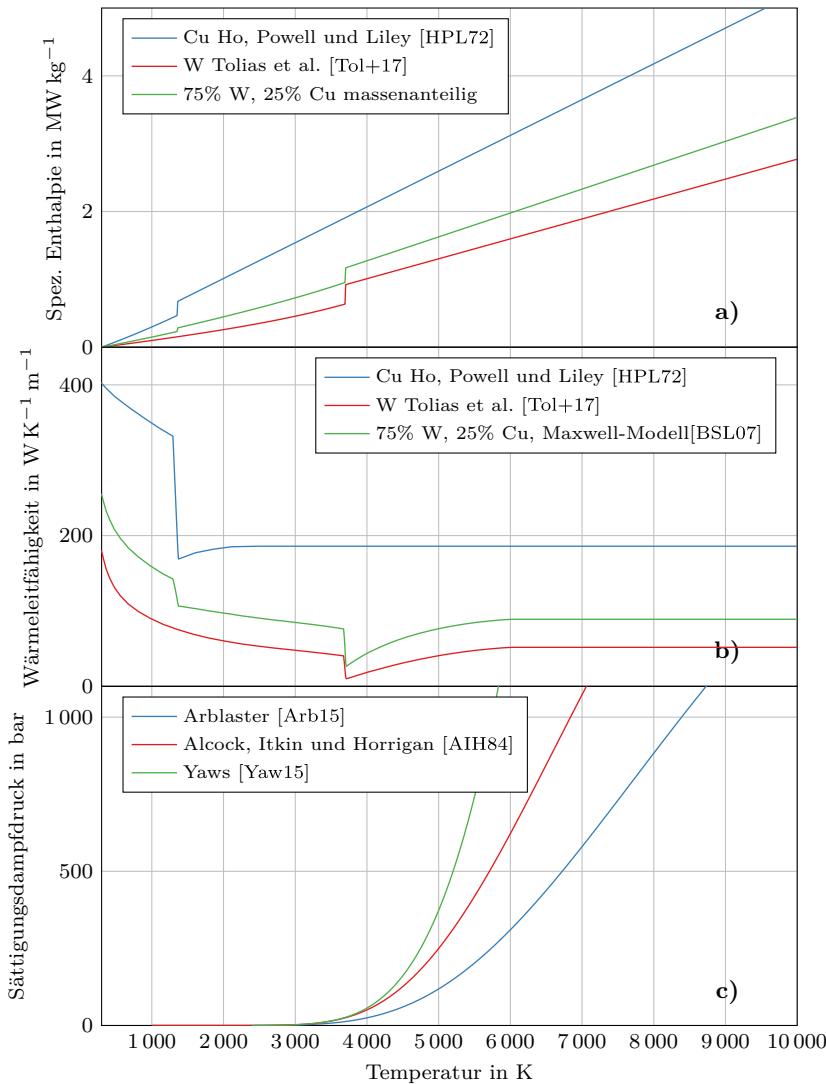
$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_0 \left( 1 + \frac{3\Phi}{\frac{\lambda_1 + 2\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} - \Phi} \right) \quad (2.76)$$

Dabei wird der Volumenanteil  $\Phi$  des Kupfers durch den Massenanteil  $f_{\text{Cu}} = 0.25$ , die Dichte  $\rho_{\text{CuW}}$  sowie die Dichte von reinem Kupfer  $\rho_{\text{Cu}} = 8,92 \text{ g cm}^{-3}$  mit  $\Phi = \frac{V_{\text{Cu}}}{V} = \frac{\rho_{\text{CuW}}}{\rho_{\text{Cu}}} f_{\text{Cu}}$  berechnet. Da die Daten zur Wärmeleitfähigkeit von Kupfer und Wolfram nicht im gesamten benötigten Temperaturbereich vorliegen<sup>6</sup>, wird der letzte jeweils bekannte Wert bei höheren Temperaturen verwendet. Bei der Enthalpie erfolgt eine lineare Extrapolation für höhere Temperaturen, da sich die Kurven sehr linear verhalten und somit eine gute Extrapolation zu erwarten ist.

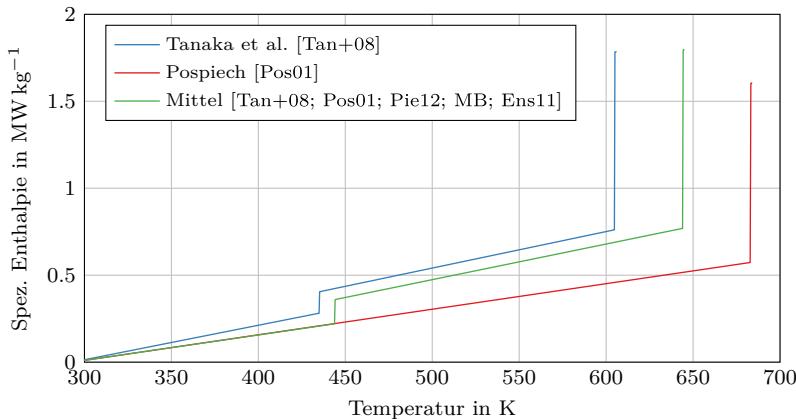
Für POM finden sich diverse Angaben zu Wärmekapazitäten, Schmelz- und Verdampfungspunkten sowie Schmelz- und Verdampfungsenthalpien, aus welchen Enthalpiefunktionen berechnet werden können[Tan+08; Pos01; Pie12; MB; Ens11] (siehe Abbildung 2.18). Bei POM existiert eine Abhängigkeit der Schmelzenthalpie vom Grad der Kristallinität des Polymers[Pie12], so dass sich mit niedrigeren Kristallisationsgraden geringere Schmelzenthalpien ergeben. Dabei ist zu beachten, dass die Materialeigenschaften in der Realität abhängig von den verwendeten Additiven und vom Herstellungsprozess starken Schwankungen unterliegen können, was sich auch in den in der Literatur auffindbaren Werten zeigt.

---

<sup>6</sup>Unter Normaldruck ist das Material bei sehr hohen Temperaturen schließlich schon verdampft.



**Abb. 2.17:** a) Enthalpie, b) Wärmeleitfähigkeit von Kupfer, Wolfram sowie Kupfer-Wolfram im Abhängigkeit der Temperatur, c) Sättigungsdampfdruck von Kupfer in Abhängigkeit der Temperatur.  
Die Verdampfungsenthalpie wird in a) nicht dargestellt, da sie entsprechend der Dampfdruckkurven bei unterschiedlichen Temperaturen auftritt.



**Abb. 2.18:** Enthalpie in Abhängigkeit der Temperatur von Polyoxymethylen.  
Die Verdampfungsenthalpie wird hier ebenfalls mit dargestellt.

Die hier gezeigten Enthalpiefunktionen basieren auf den Daten von Tanaka et al. [Tan+08] und Pospiech [Pos01]. Wie zu erkennen ist, vernachlässigt Pospiech die Schmelzenthalpie, außerdem wird nur ein Wert für die Wärmekapazität angegeben, während sich der Wert von festem und flüssigem POM bei anderen Autoren stärker unterscheidet. Dennoch wird in dieser Arbeit aus historischen Gründen primär mit den Daten von Pospiech gearbeitet. Aus den in der Literatur angegebenen Werten wird ferner eine mittlere Enthalpiefunktion bestimmt.

Für die Wärmeleitfähigkeit von POM finden sich nur sehr wenige Werte. In dieser Arbeit wird mit dem konstanten Wert  $\lambda_{\text{POM}} = 0,43 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$  gearbeitet [Ens11]. Bei Slade und Jenkins [SJ70] finden sich auch temperaturabhängige Werte bis 90 °C, die in einem ähnlichen Bereich liegen. Hier zeigen sich Unterschiede in verschiedenen Proben, die wahrscheinlich ebenfalls auf unterschiedliche Kristallinität zurückzuführen sind. Da die Wärmeleitfähigkeit eines Isolators um mehrere Größenordnungen geringer ist als die eines Metalls, spielt die Wärmeleitung in den Festkörper nur eine geringe Rolle in der Wärmebilanz an der Plasma-Festkörper-Grenzschicht.

Die Sättigungsdampfdruckkurven sind für Kupfer und Wolfram nicht in den hier betrachteten Druckbereichen bekannt, so dass diese Abhängigkeit entweder ver-

nachlässigt oder aus anderen Wertebereichen extrapoliert werden muss. In dieser Arbeit wird der letztere Weg gewählt, da durch die Extrapolation voraussichtlich kleinere Fehler als durch die Vernachlässigung der Druckabhängigkeit entstehen. Dennoch ergibt sich durch die Extrapolation eine sehr große Unsicherheit, da der Sättigungsdampfdruck im Normalfall für Unterdruck bis Normaldruck bestimmt wird, nicht jedoch für Überdruck. Hinzu kommt, dass sich bei den hier vorkommenden Drücken sehr hohe Dampfdrucktemperaturen ergeben, die experimentell sehr schwer zu messen sind. Die zur Extrapolation verwendeten Funktionen basieren auf der Annahme eines idealen Gases, was gerade bei den höheren Temperaturen im Plasmazustand nicht mehr gilt. Aus diesen Gründen werden in Abbildung 2.17 c) die Extrapolationen aus drei verschiedenen Quellen dargestellt. Es zeigen sich wie erwartet sehr große Unterschiede, wodurch die Prognosekraft des Simulationsmodells bezüglich der Verdampfungsrate stark eingeschränkt wird. Die Auswirkungen werden in Abschnitt 4.7.2 untersucht.

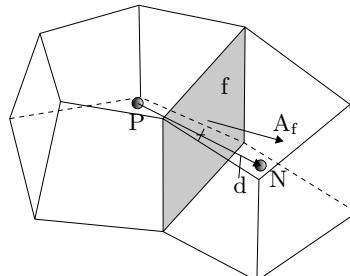
## 3 Modellbeschreibung

### 3.1 Finite-Volumen-Methode

Um das im vorherigen Kapitel vorgestellte Modell numerisch zu lösen, wird die betrachtete Geometrie in ein Rechennetz überführt und die Differentialgleichungen werden in lineare Gleichungssysteme der Form  $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$  umgewandelt. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell ist in OpenFOAM implementiert, einem quell-offenen Framework zum Lösen von Differentialgleichungen mit einem Fokus auf Strömungssimulationen [Jas09]. OpenFOAM wird genutzt, da es im Gegensatz zu kommerziellen Lösungen kostenfrei nutzbar ist und sich aufgrund der Quelloffenheit beliebig anpassen lässt. Nachteilig ist jedoch die komplexere Bedienung und die aufwändige Netzerstellung.

OpenFOAM nutzt die FVM zur Diskretisierung der Differentialgleichungen und stellt Klassenbibliotheken und Programme für die Netzerzeugung, Material- und Turbulenzmodelle sowie Algorithmen zur Lösung der diskretisierten Differentialgleichungen bereit. Die zu berechnende Geometrie wird in ein Netz aus unstrukturierten Zellen zerlegt, die durch einen Zellmittelpunkt und die Randflächen der Zelle definiert werden. Dabei kann jede Zelle eine beliebige Zahl von Randflächen haben (siehe Abbildung 3.1).

OpenFOAM nutzt einen zellzentrierten Ansatz, in dem die Feldgrößen im Mittelpunkt der Zellen gespeichert werden und Flüsse zwischen den Zellen auf den Randflächen. Die Diskretisierung der Differentialgleichungen nutzt dabei den Gaußschen Integralsatz, um den Divergenzoperator in eine Summe aus Flüssen durch die Grenzflächen einer Zelle zu überführen. Im Folgenden wird die Diskretisierung der einzelnen Bestandteile der allgemeinen integralen Transportgleichung (2.2) erläutert. Ein ausführlicher Überblick über die FVM findet sich bei Versteeg und Malalasekera [VM07].



**Abb. 3.1:** Schaubild zur Zerlegung der Geometrie in einzelne Zellen [Gre15].

## Zeitableitung

Für die Zeitableitung wird das implizite Euler Verfahren verwendet, das eine Genauigkeit erster Ordnung aufweist:

$$\left( \int_V \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} dV \right)_i = \frac{\partial (\rho \psi V)_i}{\partial t} = \frac{(\rho \psi V)_i - (\rho \psi V)_{i-1}}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Verfahren von zweiter Ordnung, die auf den letzten zwei Zeitschritten basieren, sind ebenfalls möglich, können aber zu zeitlichen Oszillationen in der Lösung führen. Zur Beurteilung der notwendigen Genauigkeit wird die Courant-Friedrich-Levy-Zahl (CFL-Zahl) eingeführt, die angibt, um wie viele Zellen der Länge  $\Delta x$  sich die Strömung in einem Zeitschritt  $\Delta t$  ausbreitet:

$$CFL = \frac{\vec{v} \Delta x}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Aufgrund der Tatsache, dass Differentialgleichungen die Wechselwirkung zwischen infinitesimal voneinander entfernten Punkten beschreiben, sollte die CFL-Zahl im Allgemeinen kleiner als 1 sein, so dass die Information pro Zeitschritt maximal eine Zelle weiter transportiert wird. Aus Genauigkeitsgründen werden üblicherweise jedoch kleinere CFL-Zahlen angestrebt. Um sowohl gute Genauigkeit als auch hohe Rechengeschwindigkeit zu erzielen, wird die Zeitschrittweite adaptiv geregelt, so dass die CFL-Zahl einen vorgegebenen Grenzwert nicht überschreitet.

## Konvektionsterm

Für den Konvektionsterm gilt:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \psi) dV = \int_{\partial V} (\rho \vec{v} \psi) \cdot d\vec{A} = \sum_f (\rho \vec{v})_f \psi_f \cdot \vec{A}_f \quad (3.3)$$

Da der Fluss der Größe  $(\rho \vec{v})_f \psi_f \cdot \vec{A}_f$  auf beiden Seiten der Grenzfläche identisch ist, handelt es sich um eine konservative Methode, die die Gesamtmenge von  $\rho \psi$  erhält. Der Wert der Größe  $\psi_f$  wird aus den Werten der benachbarten Zellen bestimmt.

## Diffusionsterm

Für den Diffusionsterm gilt:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \psi) dV = \int_{\partial V} (\Gamma \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{A} = \sum_f \Gamma_f (\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{A}_f \quad (3.4)$$

Im Fall eines orthogonalen Netzes kann der Term  $(\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{A}_f$  implizit formuliert werden als:

$$(\vec{\nabla} \psi)_f \cdot \vec{A}_f = |\vec{A}_f| \frac{\psi_N - \psi_P}{|\vec{d}|} \quad (3.5)$$

Bei nichtorthogonalen Netzen kommt noch ein expliziter Korrekturterm hinzu. Da der explizite Term von dem vorherigen Wert der Lösung  $\psi$  abhängt, sollten Gleichungen mit Diffusionstermen bei nichtorthogonalen Netzen iterativ bis zur Konvergenz gelöst werden.

## Quellterm

Quellterme, die unabhängig von  $\psi$  sind, können explizit berücksichtigt werden. Im diskretisierten Gleichungssystem erscheinen diese Terme auf der rechten Seite. Ist der Term proportional zu  $\psi$ , so kann er auch als

$$\int_V \rho \psi dV = \rho \psi V \quad (3.6)$$

geschrieben werden und geht damit in die Hauptdiagonale des Gleichungssystems ein. Die Iteration zur Lösung des Gleichungssystems konvergiert besser, wenn die Matrix  $A$  diagonal dominant ist, das heißt, wenn  $A_{ii} > \sum_{j,i \neq j} A_{ij} \forall i$  gilt. Aus diesem Grund werden positive Quellterme implizit behandelt, während negative als explizite Terme auf die rechte Seite des Gleichungssystems gestellt werden.

## Lösung des Gleichungssystems

Um das diskretisierte lineare Gleichungssystem einer Differentialgleichung zu lösen, werden meistens vorkonditionierte, iterative Methoden verwendet, die keine exakte Lösung berechnen, aber im Limit gegen diese konvergieren. Die Vorkonditionierung bezeichnet die Multiplikation des Gleichungssystems mit einer weiteren Matrix, so dass  $M \mathbf{A} \vec{x} = M \vec{b}$  oder  $M \mathbf{A} \vec{y} = \vec{b}$  mit  $\vec{y} = M^{-1} \vec{x}$  gilt.

Ziel der Vorkonditionierung ist die Beschleunigung oder Stabilisierung des Konvergenzverhaltens. Populäre Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems sind Krylov-Unterraum-Verfahren wie die Biconjugate Gradient Stabilized Methode (BiCGStab-Methode) und Mehrgitterverfahren, die die Lösung zunächst mit einer gröberen Diskretisierung approximieren. Eine Übersicht über Lösungsverfahren findet sich bei Benzi [Ben02]. In dieser Arbeit kommt primär die BiCGStab-Methode zum Einsatz.

### 3.2 Strömungslöser

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen wird dadurch erschwert, dass die Gleichungen miteinander gekoppelt sind und nicht unabhängig voneinander gelöst werden können. Weiterhin taucht der Druck nur als Quellterm in Gleichung (2.10) auf. Bedingt durch diese Abhängigkeiten ist eine einfache sequenzielle Lösung der Erhaltungsgleichungen nicht ausreichend, um eine konsistente Lösung ( $\rho, \vec{v}, h$ ) zu erhalten, die alle Gleichungen erfüllt.

Grundsätzlich wird unterschieden zwischen druckbasierten und dichtebasierter Lösungsverfahren. Druckbasierte Verfahren wurden ursprünglich für inkompressible Strömungen entwickelt. Zu dieser Klasse von Verfahren zählen die Projektionsmethode [Cho97; Cho68], die auf einer Helmholtzzerlegung des Strömungsfeldes in einen divergenzfreien und einen rotationsfreien Teil basiert und SIMPLE-artige Verfahren wie Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (SIMPLE) [PS72], SIMPLE-Revised (SIMPLER) [Pat81], Pressure Implicit Splitting of Operators (PISO) [Iss86] und PISO-SIMPLE (PIMPLE) (eine Kombination der PISO und SIMPLE-Verfahren). Bei dieser Klasse von Verfahren wird eine Gleichung zur Bestimmung des Drucks aus Gleichung (2.9) und der Divergenz von Gleichung (2.10) hergeleitet. Die Impuls- und Druckgleichungen werden iterativ in mehreren Schritten gelöst, um die Kopplung zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Druck sowie die Massenerhaltung sicherzustellen.

Die dichtebasierteren Verfahren wurden für kompressible und Überschallströmungen entwickelt. Sie verwenden Gleichung (2.9) zur Bestimmung der Dichte und leiten den Druck aus der Zustandsgleichung  $\rho(p, T)$  her. Ziel bei diesen Verfahren ist das Erzielen einer niedrigen numerischen Diffusion, um das Verschmieren von Schockwellen zu vermeiden. Außerdem müssen Oszillationen in der Nähe von

Schockwellen durch die geeignete Wahl von Diskretisierungsverfahren vermieden werden, um physikalische und stabile Lösungen zu erhalten. Da die Dichte bei inkompressiblen Problemen näherungsweise konstant ist, kommt es mit dichtebasierteren Verfahren hier zu numerischen Problemen bei der Bestimmung des Drucks.

Die Unzulänglichkeiten von druck- und dichtebasierteren Verfahren können durch Erweiterungen zum Teil behoben werden. Das für diese Arbeit entwickelte Programm baut auf einem von Kraposhin, Bovtrikova und Strijhak entwickelten Strömungslöser auf. Dieser implementiert ein hybrides Verfahren, das abhängig von der CFL-Zahl und der Mach-Zahl zwischen dem druckbasierten PIMPL-E-Verfahren und dem für Überschallströmungen ausgelegten Kurganov-Tadmor-Verfahren [KT00] wechselt. In Validierungsrechnungen der Entwickler wird deutlich, dass sich das Verfahren sowohl für Unterschall- als auch Überschallströmungen eignet [KBS15]. Das Programm wurde erweitert, um den Einfluss der druckabhängigen Plasmaeigenschaften zu berücksichtigen. Außerdem wurden die gelösten Gleichungen um die zusätzlichen Quellterme erweitert.

### 3.3 Randbedingungen

Die Lösung der Differentialgleichungen erfordert die Spezifikation von Randbedingungen. Es ist möglich, den Wert einer Größe am Rand des Netzes zu fixieren (Dirichlet-Randbedingung), ihren Gradienten festzulegen (Neumann-Randbedingung) oder eine Mischung aus diesen beiden Varianten zu verwenden. Für die Berechnung der Strömung müssen Randbedingungen für Druck, Geschwindigkeit und Temperatur verwendet werden. Aus diesen Randbedingungen werden mit Hilfe der thermodynamischen Eigenschaften die Randbedingungen für die Erhaltungsgleichungen (2.9), (2.10) und (2.14) bestimmt.

Die Implementation einer strömungsdurchlässigen Randbedingung ist nur näherungsweise möglich, da die Information über den Druckabfall am Rand verloren geht und somit Annahmen getroffen werden müssen, die zu Reflexionen von Schockwellen oder Sog- oder Stauwirkungen am Rand führen können. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wird hinter dem Ausblaskanal ein großes Luftvolumen berücksichtigt, dass so ausgelegt ist, dass während der Simulationsdauer keine Rückwirkungen in der Brennkammer durch Reflexionen oder Druckaufstauung entstehen. Alternativ ist es auch möglich, einen künstlichen Viskositäts-

gradienten zu nutzen, der das ausströmende Material dämpft und festhält, diese Methode wird in dieser Arbeit aufgrund ihres unphysikalischen Ansatzes jedoch nicht verwendet.

Für den Druck wird ein Gradient von null vorgegeben, da die Wände keine Druckkräfte auf die Strömung ausüben. Die Geschwindigkeit wird am Rand auf null in allen Richtungen gesetzt, da keine Strömungen durch die Ränder betrachtet werden und die Strömungsgeschwindigkeit am Rand von Wänden aufgrund von Rauheiten und Reibung gegen null geht (auch bekannt als *No-Slip*-Randbedingung). Der Wärmeübergang wird entsprechend Abschnitt 2.5 modelliert, in dem die aus Gleichung (2.66) ermittelten Werte beziehungsweise die Verdampfungstemperaturen vorgegeben werden.

Für die Berechnung der Strahlung im  $P_1$ -Modell wird die Marshak-Randbedingung verwendet, die sich für diffus strahlende Flächen ergibt [Mod13]. Diese ist eine Dirichlet-Randbedingung für die einfallende Strahlung  $G_\nu$ :

$$q_{r,\nu} = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \vec{\nabla} G_\nu \cdot \vec{n} = \frac{\epsilon_\nu}{2(2-\epsilon_\nu)} (4\pi B_\nu(T_w) - G_\nu) \quad (3.7)$$

Der Gradient wird mit einem Differenzenquotienten diskretisiert. Für die vereinfachten Strahlungsmodelle erfolgt analog zu diesen eine Integration über die jeweiligen Frequenzbereiche.  $\epsilon_\nu$  stellt den Emissionsgrad der Wand dar, der in dieser Arbeit mit 0.7 abgeschätzt wird.

Für die Lösung der elektrostatischen Gleichung (2.41) gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits kann das Potential auf den Elektroden vorgegeben werden. Da aber häufig der Strom vorgegeben werden soll und aufgrund des Zündkreises ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung vorliegt, muss eine Iterationsschleife genutzt werden, um die Gesamtspannung zu bestimmen (siehe dazu Abschnitt 3.4). Die Vorgabe der Spannung am Rand wird verwendet, wenn nur der Stromfluss im Fluidvolumen berechnet wird, ohne den Stromfluss in den Elektroden zu berücksichtigen. Aufgrund der etwa 1000-fach höheren Leitfähigkeit der Elektroden ist der Potentialunterschied in den Elektroden vernachlässigbar gegenüber dem im Plasma, so dass die Annahme eines konstanten Potentials an der Grenzschicht zum Plasma gerechtfertigt ist. Werden die Elektroden für den Stromfluss berücksichtigt, so kann alternativ auch eine mittlere Stromdichte am äußeren Rand der Elektrode vorgegeben werden. Dies hat den Vorteil, dass nur noch das

Potential an der Zündelektrode bestimmt werden muss, um die Nichtlinearität des MOVs im Zündkreis zu berücksichtigen. Die Vorgabe der Stromdichte an der Grenzfläche der Elektrode zum Plasma ist jedoch nicht zulässig, da die Verteilung der Stromdichte von den Vorgängen in der Grenzschicht und der Verteilung der Leitfähigkeit im Plasma abhängt<sup>1</sup>. Prinzipiell unterscheiden sich diese beiden Varianten der Randbedingung nicht signifikant voneinander. Die Bestimmung der Potentiale der Haupt- und Zündelektroden wird im nächsten Abschnitt erläutert.

In unendlicher Entfernung gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\vec{B}(x)| = 0$ . Da das Rechennetz eine endliche Ausdehnung hat, ist es nicht in der Lage, dies korrekt abzubilden und es entstehen Fehler, wenn der Wert oder der Gradient des magnetostatischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  am Rand auf null gesetzt wird. Freton et al. [Fre+11] geben einen Überblick über mögliche Methoden und untersuchen die dabei auftretenden Fehler.

Ein mögliches Verfahren ist die Verwendung eines größeren Netzes, bei dem der Rand hinreichend weit entfernt liegt. Die Autoren empfehlen hier einen Abstand, der mindestens drei-mal größer als der Radius des Lichtbogens ist. Nachteil dieser Methode ist die Notwendigkeit, ein weiteres Netz zu erstellen. Außerdem müssen für die Berechnung die Stromdichte und entweder das Magnetfeld oder die Lorentzkraft zwischen den Netzen übertragen werden, was bei Netzen, die auf dem gemeinsamen Teilstück nicht perfekt übereinanderliegen, zu Fehlern führt. Die Verwendung von nach außen hin größer werdenden Zellen bietet jedoch einen akzeptablen Kompromiss aus Rechengeschwindigkeit und Genauigkeit.

Eine weitere Methode ist die Verwendung des Biot-Savart-Gesetzes, um den Wert des magnetostatischen Vektorpotentials direkt auf dem Rand zu berechnen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' \quad (3.8)$$

Diese Methode führt zum exakten Ergebnis, da das Biot-Savart Gesetz zur gleichen Lösung wie Gleichung (2.43) führt. Das Integral geht im Fall von Symmetrien über die gesamte, auch außerhalb des Netzes liegende Stromdichte. Dieser Einfluss muss in Form von virtuellen, gespiegelten, beziehungsweise gedrehten Zellen berücksichtigt werden. Da dies jedoch komplett programmatisch gelöst werden

---

<sup>1</sup> Dennoch wird dieser Ansatz in manchen Arbeiten gewählt, um Defizite des Grenzschichtmodells durch ein Stromprofil in der Elektrode auszugleichen.

kann, erfordert diese Methode kein weiteres Netz für die Berechnung des Magnetfeldes und ist daher einfacher in der Anwendung. Numerisch wird dieses Integral als Summe über die Zellvolumina  $V_i$  berechnet:

$$\vec{A}_f(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i^N \frac{\vec{j}_i}{|\vec{r}_f - \vec{r}_i|} V_i \quad (3.9)$$

Ein Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit, den Stromfluss außerhalb des Netzes approximieren zu können. Hierfür wird die Stromdichte in den Randflächen der Elektroden auf virtuelle, außerhalb des Netzes liegende Zellen projiziert, die dann im Biot-Savart-Integral berücksichtigt werden können. Diese Methode funktioniert zwangsläufig nur für Geometrien, in denen der Strom näherungsweise gleichmäßig durch eine Elektrode fließt.

Nachteilig an der Methode ist der hohe Rechenaufwand, da für jeden Punkt auf dem Rand ein Volumenintegral gelöst werden muss. Der numerische Aufwand skaliert für dreidimensionale, in grober Näherung kugelförmiger Geometrien mit  $\mathcal{O}(N^{\frac{5}{3}})$ , wobei  $N$  die Anzahl der Zellen bezeichnet. Bei Geometrien, die im Vergleich zum Volumen eine große Oberfläche haben, ergibt sich eine maximale Laufzeit von  $\mathcal{O}(N^2)$ . Dies führt dazu, dass diese Methode nur für grobe Netze geeignet ist, da die Laufzeit für feine Netze überproportional ansteigt.

Die hohe Rechenzeit dieser Methode kann durch mehrere Möglichkeiten kompensiert werden. Bei Zylindersymmetrien kann die Integration über Ringelemente durchgeführt werden, was in der Lösung elliptischer Integrale resultiert, die durch numerische Reihen approximiert werden können [Con01; Fre+11]. Dieser Ansatz wurde hier nicht verwendet, da er sich nicht auf andere Fälle wie Spiegelsymmetrien übertragen lässt. In dieser Arbeit haben sich zwei Ansätze als sinnvoll herausgestellt und werden im Folgenden angewendet:

1. Zellen mit sehr geringen Stromdichten relativ zu den maximal auftretenden Stromdichten können vernachlässigt werden, da sie nur einen sehr kleinen Einfluss auf den Wert des Integrals haben. Da diese Zellen nicht für jede Randfläche neu bestimmt werden, ergibt sich hier eine lineare Erhöhung der Geschwindigkeit.
2. Bei mehrdimensionalen Integralen bietet sich die Verwendung der Monte-Carlo-Integration an (siehe dazu den nächsten Absatz). Dies ist ein statis-

tisches Verfahren, was je nach erforderlicher Genauigkeit zu etwa drei- bis zehnmal schnelleren Berechnungen des Biot-Savart-Integrals führen kann.

Die Monte-Carlo-Integration basiert auf der Idee, als Stützstellen für die Integration zufällig ausgewählte Punkte zu verwenden. Dies funktioniert für hinreichend glatte Integranten, die sich räumlich nicht zu stark ändern. Für die Monte-Carlo-Integration ergibt sich folgende Formel, wobei der Laufindex  $s$  die zufällig ausgewählten Zellen bezeichnet:

$$\vec{A}_f(\vec{r}) \approx \frac{V_{Gesamt}}{\sum_s^M V_s} \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_s^M \frac{\vec{j}_s}{|\vec{r}_f - \vec{r}_s|} V_s \quad (3.10)$$

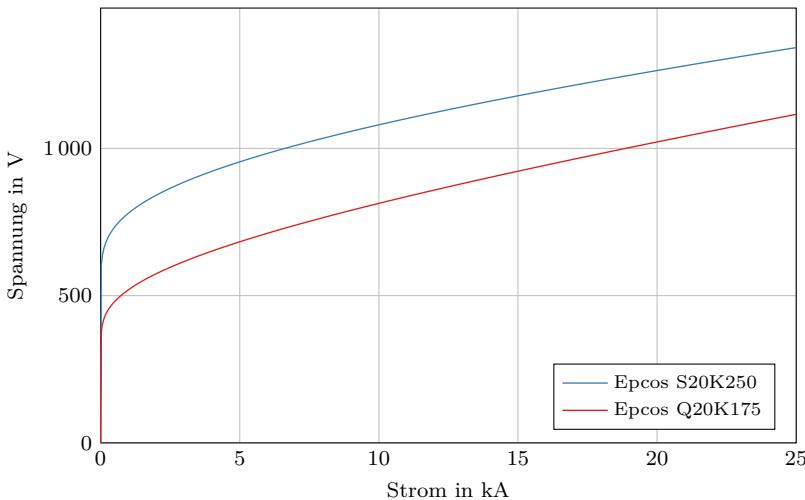
Durch die zufällige Wahl der Zellen in jedem Zeitschritt kann sichergestellt werden, dass der Fehler des Monte-Carlo-Verfahrens zu zufälligen statt systematischen Abweichungen im Magnetfeld führt, die durch die zeitliche Mittelung somit geringere Auswirkungen zeigen können. Der Einfluss des Magnetfelds sowie das Konvergenzverhalten der Monte-Carlo-Integration werden in Abschnitt 4.4 betrachtet.

Es wurden einige weitere Verfahren getestet, die jedoch keine nennenswerte Verbesserung der Rechengeschwindigkeit gebracht haben. Der Vollständigkeit halber und als Referenz für zukünftige Arbeiten werden diese hier erwähnt:

1. Die Auswertung zufällig ausgewählter Randflächen mit Interpolation auf die umliegenden führt durch die Diskretisierung des Rotationsoperators zu Fehlern im Magnetfeld in der Nähe des Randes und funktioniert daher nicht.
2. Die Beschleunigung der Monte-Carlo-Integration durch die Verwendung von pseudo-zufällig ausgewählten Punkten mit möglichst gleichverteiltem Abstand (siehe [Pre+92]) bringt keine messbare Verbesserung.
3. Die Verwendung einer Octree-Datenstruktur, die den dreidimensionalen Raum rekursiv in Würfel zerlegt und es somit ermöglicht, große Mengen von Zellen auf einmal zu adressieren, wurde untersucht, um weit entfernte Zellen von der Integration auszuschließen. Dies bringt jedoch keine Verbesserung, da der Aufwand, der für die Filterung bei jeder Randfläche anfällt, den Nutzen übersteigt.

### 3.4 Modellierung des Zündkreises

Um den Stromfluss im Plasma modellieren zu können, muss die Beschaltung des Zündkreises berücksichtigt werden. Ausschlaggebend ist hier der MOV, an dem bei Stromfluss eine näherungsweise konstante Spannung abfällt. Der GDT (siehe Abbildung 1.1), der im leitfähigen Zustand eine Spannung von etwa 10 bis 20 V aufweist, wird in der Modellierung vernachlässigt. Die in dieser Arbeit verwendeten MOV-Kennlinien,  $U_{\text{mov}}(I)$ , sind in Abbildung 3.2 abgebildet. Die Bauform des MOVs bedingt seine Eigenschaften, das heißt seinen Spannungspegel und die maximale Belastbarkeit. Durch den MOV entsteht eine Nichtlinearität in der quasistatischen Strom-Spannungskennlinie des Gesamtsystems. Diese macht es erforderlich, ein iteratives Verfahren zu verwenden, um die korrekte Stromaufteilung zwischen Hauptstrompfad und Zündkreis zu bestimmen. Wird die Gesamtspannung als Randbedingung verwendet, so ist auch hier ein iteratives Verfahren erforderlich, wenn ein Stromverlauf eingeprägt werden soll, was in dieser Arbeit der Fall ist.



**Abb. 3.2:** Kennlinie  $U_{\text{mov}}(I)$  des MOVs Epcos S20K250, der in den meisten Rechnungen verwendet wird, sowie des MOVs Epcos Q20K175, der in den Validierungsrechnungen verwendet wird [Epc18a; Epc18b].

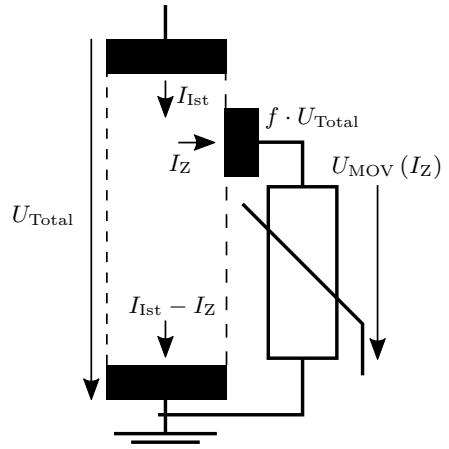
Das System lässt sich als Parallelschaltung zwischen dem Hauptstrompfad über die Haupteletroden und der Reihenschaltung aus MOV und dem Strompfad zwischen Zündelektrode und nebenliegender Haupteletrode verstehen. Für die korrekte Stromaufteilung muss dann die Spannung über dem Zündpfad gleich der Gesamtspannung sein. Das Problem lässt sich als Nullstellensuche verstehen, wenn Größen für den Fehler im Zündpfad und die Abweichung des aktuellen vom gewünschten Gesamtstrom eingeführt werden. Dazu werden als Parameter die Gesamtspannung  $U_{\text{Total}}$  und der Anteil der MOV-Spannung an der Gesamtspannung  $f$  eingeführt. Andere Parametrisierungen sind aber ebenfalls möglich.

Damit ergibt sich:

$$\epsilon(U_{\text{Total}}, f) = \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta I \end{pmatrix} (U_{\text{Total}}, f) = \begin{pmatrix} U_{\text{mov}}(I_Z(U_{\text{Total}}, f)) - f \cdot U_{\text{Total}} \\ I_{\text{Ist}}(U_{\text{Total}}, f) - I_{\text{Soll}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Dabei bezeichnen  $I_{\text{Ist}}(U_{\text{Total}}, f)$  den Gesamtstrom und  $I_Z(U_{\text{Total}}, f)$  den Strom durch den Zündkreis, die bei Festlegung der Potentiale an Haupteletrode und Zündelektrode auf  $U_{\text{Total}}$  und  $f \cdot U_{\text{Total}}$  entstehen. Die Lösung  $\epsilon(U_{\text{Total}}, f) = (0, 0)$  kann mit konventionellen Verfahren zur Nullstellensuche gefunden werden. Dabei ist es sinnvoll, den Parameter  $f$  durch eine geeignete Koordinatentransformation auf den Bereich  $[0, 1]$  einzuzgrenzen, da alle anderen Werte direkt ausgeschlossen werden können.

Die Ströme  $I_{\text{Ist}}$  und  $I_Z$  ergeben sich durch Integration der in die Elektroden fließenden Stromdichte  $\vec{j} \cdot \vec{n}$  über die Fläche der jeweiligen Elektrode. Daraus folgt, dass für jede Iteration der Nullstellensuche eine Lösung der elektrostatischen Gleichung benötigt wird. Um diesen Vorgang zu beschleunigen, kann die Linearität



**Abb. 3.3:** Darstellung der Ströme und Spannungen, die bei der Nullstellensuche verwendet werden.

von Laplace-Gleichungen wie Gleichung (2.41) ausgenutzt werden. Aus der Linearität folgt, dass die Superposition von zwei Lösungen ebenfalls eine gültige Lösung ist. Dies kann genutzt werden, indem für jede Elektrode  $i$  mit  $\phi_i \neq 0$  eine separate Lösung berechnet wird, für die das Potential auf der Elektrode auf eins gesetzt wird und das aller anderen auf null. Durch Linearkombination dieser Lösungen lässt sich jede beliebige Lösung berechnen, ohne Gleichung (2.41) erneut lösen zu müssen, was es erlaubt, die Iteration zur Bestimmung der Parameter  $U_{\text{Total}}$  und  $f$  von der Lösung der Differentialgleichung zu entkoppeln.

Die in Abschnitt 2.5.3 eingeführte Fallgebietsspannung stellt eine Nichtlinearität dar. Um das hier vorgestellte Verfahren trotzdem nutzen zu können, muss diese Nichtlinearität dadurch linearisiert werden, dass die Werte der Stromdichte aus dem vorherigen Zeitschritt für die Bestimmung der Leitfähigkeit in der ersten Zellschicht verwendet werden.

### 3.5 Durchschlagsmodellierung

Während des Zündvorgangs strömt das Plasma in Richtung der zweiten Hauptelektrode. Je nach Geometrie kann es vorkommen, dass ein Bereich kalten Gases zwischen der Elektrode und dem heranströmenden Plasma eingeschlossen wird. Es kommt zur Kompression des Gases bei der Reflektion der Schockwelle des Plasmas, je nach Situation kann jedoch noch eine nichtleitende Schicht zwischen der Elektrode und dem leitfähigen Plasma existieren, die den Stromfluss und damit die Zündung unterbindet. In der Realität ist zu erwarten, dass es in einem solchen Fall zum elektrischen Durchschlag kommen kann. Bedingt durch das heiße Plasma existieren viele freie Elektronen, die aufgrund des starken Feldes durch die kalte Schicht diffundieren können. Außerdem führt die vom Plasma emittierte hochenergetische Strahlung zur Bildung weiterer freier Elektronen in der kalten Grenzschicht sowie auf der Elektrode durch Ionisation, wodurch ein elektrischer Durchschlag begünstigt wird. Grundsätzlich sind damit wesentlich niedrigere kritische elektrische Feldstärken zu erwarten im Vergleich mit dem klassischen Townsend-Mechanismus bei Umgebungstemperatur (siehe z.B. [YRK05] für ein genaueres Berechnungsmodell der kritischen Feldstärke in SF<sub>6</sub>). Das für die Simulation genutzte Einfluidmodell ist nicht in der Lage, den Durchschlag physikalisch zu beschreiben und kann daher das Zündverhalten nicht richtig wiederzugeben.

Um dieses Problem zu umgehen, wird ein empirisches Durchschlagsmodell verwendet, dass beim Überschreiten einer kritischen elektrischen Feldstärke um den Ort des Auftritts herum eine künstlich erhöhte Leitfähigkeit erzeugt, so dass es zum Stromfluss und somit zur Erwärmung des Bereichs zwischen Elektrode und Plasma kommt, bis dieser temperaturbedingt leitfähig wird. In Experimenten hat sich gezeigt, dass die Zünddauer weitestgehend unabhängig von der gesamten Spannung ist, was darauf hindeutet, dass der elektrische Durchschlag auf einer kurzen räumlichen Skala stattfindet und die Zünddauer primär von der Strömung des heißen Plasmas zur Hauptelektrode bestimmt ist. Der Durchschlagsradius sollte daher so gewählt werden, dass die Zündung möglichst punktförmig auftritt und die erhöhte Leitfähigkeit nur kurzzeitig zur Wirkung kommt, so dass das Verhalten des Modells nicht zu stark beeinflusst wird. Diese Anforderungen stehen im Gegensatz zum zuverlässigen Zündverhalten, da ein zu geringer Energieeintrag während der Reflektion der Schockwelle eine erfolgreiche Zündung verhindert. Daher werden gegebenenfalls mehrere Rechnungen benötigt, um geeignete Parameter zu finden. Beim Überschreiten der kritischen elektrischen Feldstärke wird kugelförmig um den Ort des Überschreitens herum folgende modifizierte Leitfähigkeit genutzt:

$$\sigma_{\text{Durchschlag}} = \max \left( \sigma(p, T), \sigma_{\max} * \left( 1 - \frac{t - t_0}{\Delta t_{\text{Abnahme}}} \right) * \frac{\frac{t - t_0}{\Delta t_{\text{Anstieg}}^3}}{1 + \frac{t - t_0}{\Delta t_{\text{Anstieg}}^3}} \right) \quad (3.12)$$

In den nachfolgend gezeigten Rechnungen wird eine konstante kritische Feldstärke von  $E_{\text{krit}} = 80 \text{ V mm}^{-1}$ , eine maximale erhöhte Leitfähigkeit von  $\sigma_{\max} = 1000 \text{ S m}^{-1}$ , eine Anstiegszeit von  $\Delta t_{\text{Anstieg}} = 0,5 \times 10^{-7} \text{ s}$ , eine Abnahmezeit von  $\Delta t_{\text{Abnahme}} = 0,5 \times 10^{-6} \text{ s}$  sowie ein Radius um den Durchschlagspunkt von  $0,3 \text{ mm}$  genutzt.

Das empirische Modell wird durch drei Parameter definiert, die kritische Feldstärke, den Radius und die Zeitdauer des künstlich leitfähigen Bereichs.

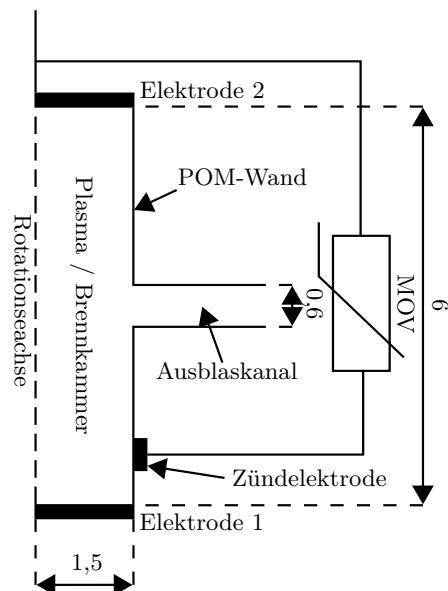


## 4 Untersuchung der Plasmamodellierung

In diesem Kapitel wird das entwickelte Modell an einer Beispielgeometrie untersucht. Zunächst wird eine exemplarische Rechnung vorgestellt. Hierzu werden verschiedene Kenngrößen ausgewertet und Effekte betrachtet. Darauffolgend werden die numerische Konvergenz des Magnetfeldes, des Netzes, sowie die in Abschnitt 2.4.5 vorgestellten Approximationen des Strahlungstransports analysiert. Abschließend erfolgt eine Betrachtung der Wechselwirkung des Plasmas mit den Polymerwänden und den Elektroden.

### 4.1 Auswahl der Modellgeometrie

Die Auswahl einer Modellgeometrie unterliegt mehreren Kriterien: Zum einen sollte die Geometrie günstige Symmetrieeigenschaften aufweisen, um sehr feine Diskretisierungen des Netzes mit akzeptablem Rechenaufwand zu ermöglichen. Zum anderen sollte die Geometrie hinreichend einfach strukturiert sein, um die Erkennung von systematischen Effekten zu erleichtern. Letztlich ist es erforderlich, dass die Geometrie in ihren Abmessungen und Randbedingungen (Materialien, Zündung) möglichst vergleichbar mit realen Geometrien ist, um die an der Modellgeometrie gewonnenen Erkenntnisse übertragen zu können. Aus diesen Gründen wird eine zylindersymmetrische Geometrie gewählt. Die Zylindersymmetrie bietet die Möglichkeit einer zweidimensionalen Rechnung und ermöglicht so ei-



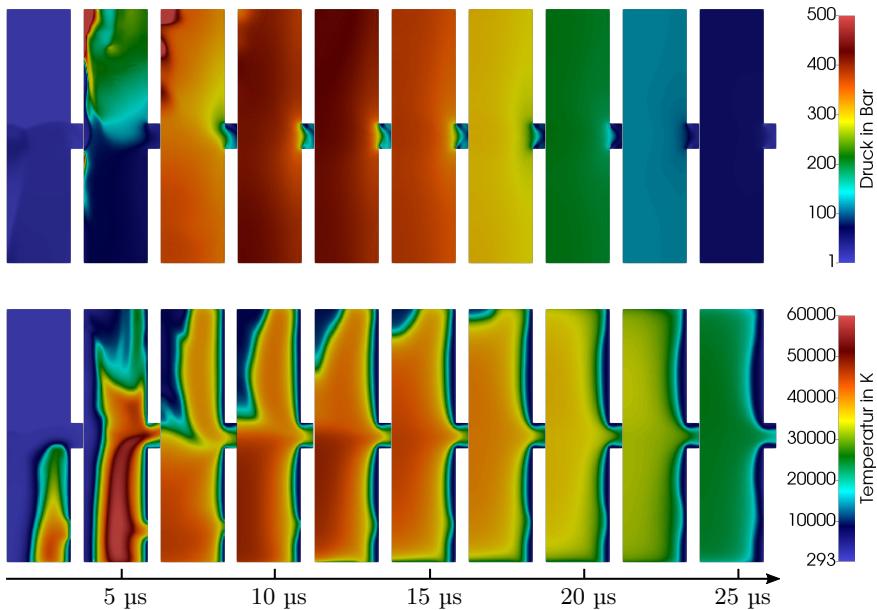
**Abb. 4.1:** Aufbau der Modellgeometrie, die in diesem Kapitel untersucht wird (Einheiten in mm).

ne vergleichsweise kurze Rechenzeit. Ein Schnittbild der Geometrie ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Das Modell bildet den Zündkreis ab und integriert einen Ausblaskanal, der radial nach außen verläuft. Der Zündkreis kann in der Realität nicht symmetrisch gebaut werden. Da der Stromfluß durch den Zündkreis in der Simulation nicht in die Magnetfeldberechnung einfließt, ist es jedoch möglich, diese Näherung einzugehen.

Um die Zündung zu ermöglichen, wird ein leitfähiger Kanal zwischen der Zündelektrode und der naheliegenden Haupteletrode vorgegeben. Die Leitfähigkeit in dieser Region wird durch die Formel  $\sigma = \max(\sigma(p, T), 100 \cdot \min(1, 1 - \frac{t - 0,25\text{ }\mu\text{s}}{0,25\text{ }\mu\text{s}}))$  bestimmt und ermöglicht somit höhere Werte, sobald das Plasma eine intrinsisch höhere Leitfähigkeit aufweist. Die künstliche Leitfähigkeit ist zunächst konstant und fällt dann linear auf null ab, um einen glatten Übergang zu ermöglichen. Der Kanal sollte möglichst flach an der Wand gewählt werden, um der Realität möglichst nahe zu kommen, in der die Zündung durch eine resistive Oberflächenschicht auf der Wand zwischen Zündelektrode und Haupteletrode realisiert wird. In der Realität ist die Annahme der Zylindersymmetrie während der Zündphase nicht haltbar, da die Zündung nicht symmetrisch, sondern an einem oder mehreren Punkten stattfindet. Durch diese Vereinfachung ergeben sich Unterschiede zum Start der Simulation. Bei einer punktuellen Zündung ist mit einer höheren Zündgeschwindigkeit zu rechnen, da die stärker lokalisierte eingebrachte Leistung hier zu einem höheren Druck und Temperaturanstieg und somit zu einer höheren Ausbreitungsgeschwindigkeit des Plasmas führt. Dieser Fehler wird im Hinblick auf die kürzere Rechenzeit jedoch bewusst eingegangen, um den Fokus stärker auf die numerische Konvergenz legen zu können.

## 4.2 Beschreibung und Charakterisierung des Plasmaverhaltens

Die hier vorgestellte Rechnung greift den nachfolgend präsentierten Rechnungen vor, da die in den nachfolgenden Abschnitten gewonnenen Erkenntnisse für die Modellierung der hier präsentierten Rechnung genutzt werden. Es wird ein 25  $\mu\text{m}$  großes Netz verwendet und die Strahlung wird spektral mit 1000 Punkten aufgelöst. Das Magnetfeld wird mit Hilfe der Monte-Carlo Integration am Rand berechnet und es werden Fallgebietsspannungen von 40 V (Kathode) sowie 2,5 V (Anode) genutzt. Im gesamten Kapitel wird ein 15 kA 8/20  $\mu\text{s}$  Impuls genutzt.



**Abb. 4.2:** Druck- und Temperaturrentwicklung eines 15 kA 8/20  $\mu$ s Impulses.

Abbildung 4.2 zeigt die Entwicklung des Druck- und des Temperaturverlaufs. Das Plasma bildet sich zunächst zwischen der unten liegenden Anode und der Zündelektrode auf der rechten Außenseite der Wand aus. Die dabei im Plasma umgesetzte Energie erhöht die Temperatur und somit auch den Druck des Plasmas, so dass dieses nach oben zur Kathode strömt. Bei etwa 5  $\mu$ s kommt es zur Zündung und der Strom fließt zwischen den beiden Haupteletroden, die nun einen Pfad mit niedrigerer Impedanz im Vergleich zum Zündkreis bilden. Bei etwa 10  $\mu$ s stabilisiert sich die Strömung, d.h. die Schockwellen im Plasma werden soweit gedämpft, dass sich stabilere Strömungsverhältnisse einstellen. An der Anode wird ein Bereich kälteren Gases eingeschlossen, dass erst bei 20  $\mu$ s über Strahlungsabsorption und Wärmeleitung komplett auf die Temperatur des umgebenden Plasmas aufgeheizt wird. Dieser Effekt ist auf die Annahme der Zylindersymmetrie zurückzuführen, der hier zu beobachtende ringförmige Lichtbogen tritt in der Realität nicht auf. Da der Lichtbogen dadurch im Mittel näher an der Wand ist kommt es zu einem erhöhten Strahlungsfluss auf die Wand und zu einem verstärkten Wandabbrand, da weniger Strahlung durch kalte Randschichten absorbiert werden kann.

An den Wänden bilden sich durch den Massenabbrand kältere Grenzschichten aus. Da sich im Modell kein Massenabbrand an der Kathode ergibt (siehe dazu Abschnitt 4.7.2), bleibt das Plasma vor der Kathode heißer. Die Strömung treibt das Plasma durch den verkürzt dargestellten Ausblaskanal auf der rechten Seite. Aufgrund der Verengung kommt es hier zu einem starken Druckgradienten.

Die Temperaturen liegen mit bis zu 60 000 K höher als die bis 40 000 K berechneten optischen Absorptionskoeffizienten, so dass sich hier ein Fehler ergibt. Für den größten Teil der Simulation liegt die Temperatur jedoch innerhalb des berechneten Wertebereichs. Ähnliches gilt auch für die restlichen Materialeigenschaften, da die von D'Angola et al. [DAn+08] angegebenen Anpassungsfunktionen nur für den Bereich bis 100 bar spezifiziert sind.

Die Machzahl erreicht während der Zündung und im Ausblaskanal Werte von bis zu 3, d.h. es handelt sich um Überschallströmungen. Hier ist zu beachten, dass die Schallgeschwindigkeit mit der Temperatur ansteigt. So ergeben sich während der Zündung sowie später im Ausblaskanal Strömungsgeschwindigkeiten von bis zu  $10\,000\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ . Nach der Stabilisierung des Plasmas gibt es im Brennkanal eine Unterschallströmung (Mach-Zahl < 0,2) in Richtung des Ausblaskanals.

In der Zündphase werden Reynoldszahlen in der Größenordnung von  $10^6$  erreicht. Auch danach ergeben sich noch Werte von  $10^4$  bis  $10^5$ , was verdeutlicht, dass es sich um eine turbulente Strömung handelt. Die Turbulenzmodellierung wird in dieser Arbeit jedoch bewusst vernachlässigt, da unklar ist, welche der empirischen Turbulenzmodelle für das Plasma geeignet sind. Aufnahmen mit Hochgeschwindigkeitskameras könnten hier helfen, zumindest eine qualitative Übereinstimmung zu erzielen. Durch die Vernachlässigung der Turbulenzmodellierung werden zu geringe Wärmeleitfähigkeiten und Viskositäten verwendet, da sich sowohl die Reibung als auch der Energietransfer durch turbulente Strömungen erhöhen.

Die magnetische Reynoldszahl liegt größtenteils zwischen 0,1 bis 1. Während der Zündphase und am Ausblaskanal werden zum Teil Werte bis 1,5 erreicht. Dies deutet darauf hin, dass das Magnetfeld in der Realität geringfügig durch die Strömung des Plasmas verzerrt wird. Aufgrund der verwendeten Methode zur Berechnung des Magnetfeldes kann dieser Effekt vom Modell nicht wiedergegeben werden.

### 4.3 Fehlermaß zur Bewertung der Genauigkeit der Näherungsverfahren

In diesem Kapitel wird an mehreren Stellen ein Fehlermaß benötigt, um die Abweichung zu einem Referenzergebnis zu quantifizieren. Diese Größe muss mehrere physikalische Größen umfassen, um die Komplexität der Simulation zu erfassen. Ebenso ist es erforderlich, die Zeitabhängigkeit dieser Größen zu bewerten, da es Abweichungen im zeitlichen Verlauf geben kann. Eine abweichende Prognose des Zündzeitpunktes, ab dem der Strom zwischen den Haupteletroden der Funkenstrecke fließt, kann einen starken Einfluss auf den restlichen zeitlichen Verlauf haben. Es ergibt sich eine zeitliche Verzögerung in vielen Größen, wie z.B. dem Druckverlauf. Ein einfaches Fehlermaß, wie z.B. die mittlere Abweichung  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |a(t_i) - b(t_i)|$  führt bei kleinen Verzögerungen zu sehr großen Fehlern in Signalen mit hoher Steilheit, obwohl die Kurven anschaulich sehr ähnlich sind. Daraus ist es erforderlich, die zeitliche Verschiebung zur Bewertung von Ähnlichkeiten mit zu berücksichtigen. Eine gute Möglichkeit hierfür stellt der Dynamic-Time-Warping-Algorithmus dar, der interdisziplinär zum Vergleich und zur Gruppierung von Signalverläufen eingesetzt wird [Gio09; Tor+09]. Der Algorithmus verzerrt die Datenreihen auf der Zeitachse zueinander, um eine möglichst gute Übereinstimmung zu erzielen. Hierfür wird ein Transformationspfad  $(m_k, n_k)$  eingeführt, dessen Werte die Indizes der Zeitwerte der beiden Datenreihen beschreiben. Für zwei Datenreihen  $a(t_i)$  und  $b(t_j)$  der Längen  $M$  und  $N$ , muss ein Transformationspfad der Länge  $L$  folgende Eigenschaften erfüllen:

1.  $1 \leq m_k \leq M$  sowie  $1 \leq n_k \leq N \forall k$
2.  $(m_1, n_1) = (1, 1)$  und  $(m_L, n_L) = (M, N)$
3.  $(m_k - m_{k-1}, n_k - n_{k-1}) = (1, 0), (0, 1)$  oder  $(1, 1)$  (Monotonie)

Anschaulich bedeutet dies, dass mit den Werten des Transformationspfades beide Zeitachsen vom Start bis zum Ende durchlaufen werden, wobei die Zeitachsen in jedem Schritt entweder pausieren oder einen Index weiterlaufen. Das Fehlersignal ergibt sich mithilfe einer Metrik  $d(a(t_i), b(t_j))$  über den Transformationspfad, wobei in dieser Arbeit die auf den Wertebereich der jeweiligen Datenreihe normierte  $\ell^2$ -Norm  $d(i, j) = d(a(t_i), b(t_j)) = \sqrt{(t_j - t_i)^2 + (b(t_j) - a(t_i))^2}$  gewählt wird, die anschaulich dem Abstand zwischen zwei Punkten auf der zweidimensionalen Ebene entspricht.

dimensionalen Fläche eines Diagramms entspricht. Der Dynamic-Time-Warping-Algorithmus ermittelt den Transformationspfad, indem durch folgende Berechnungsvorschrift iterativ eine Kostenmatrix  $C$  aufgebaut wird:

$$C_{i,j} = \min(C_{i-1,j} + d(i,j), C_{i,j-1} + d(i,j), C_{i-1,j-1} + 2 * d(i,j)) \quad (4.1)$$

Der gesamte Fehler ergibt sich als Eckpunkt in der Kostenmatrix mit  $\Delta = \frac{C_{M,N}}{M+N}$ . Durch die Normierung entspricht es dem durchschnittlichen Abstand zweier Punkte in dem durch den Transformationspfad vorgegebenen Durchlauf durch die Datenreihen.

Die einzelnen Fehler der betrachteten Datenreihen werden als geometrischer Fehler  $\Delta = \sqrt{\sum_i \Delta_i^2}$  zusammengefasst. In dieser Arbeit werden Spannung, Temperatur, Druck und Abbrandmasse der Polymerwand als wichtigste Größen betrachtet und somit in die Fehlerberechnung aufgenommen. Die Temperatur zeigt im Gegensatz zum Druck starke räumliche Unterschiede beim wandstabilisierten Lichtbogen. Aus diesem Grund werden sowohl die mittlere Temperatur in der Brennkammer wie auch die maximale berücksichtigt. Um eine Doppelgewichtung der Temperatur zu vermeiden, werden beide Größen nur halb gewichtet. Die Abbrandmasse wirkt eher kumulativ auf den Lichtbogen ein, daher wird die Differenz des gesamten Materialabbrandes verwendet anstelle des Fehlers des zeitabhängigen Materialabbrands. Insgesamt ergibt sich der Fehler damit als

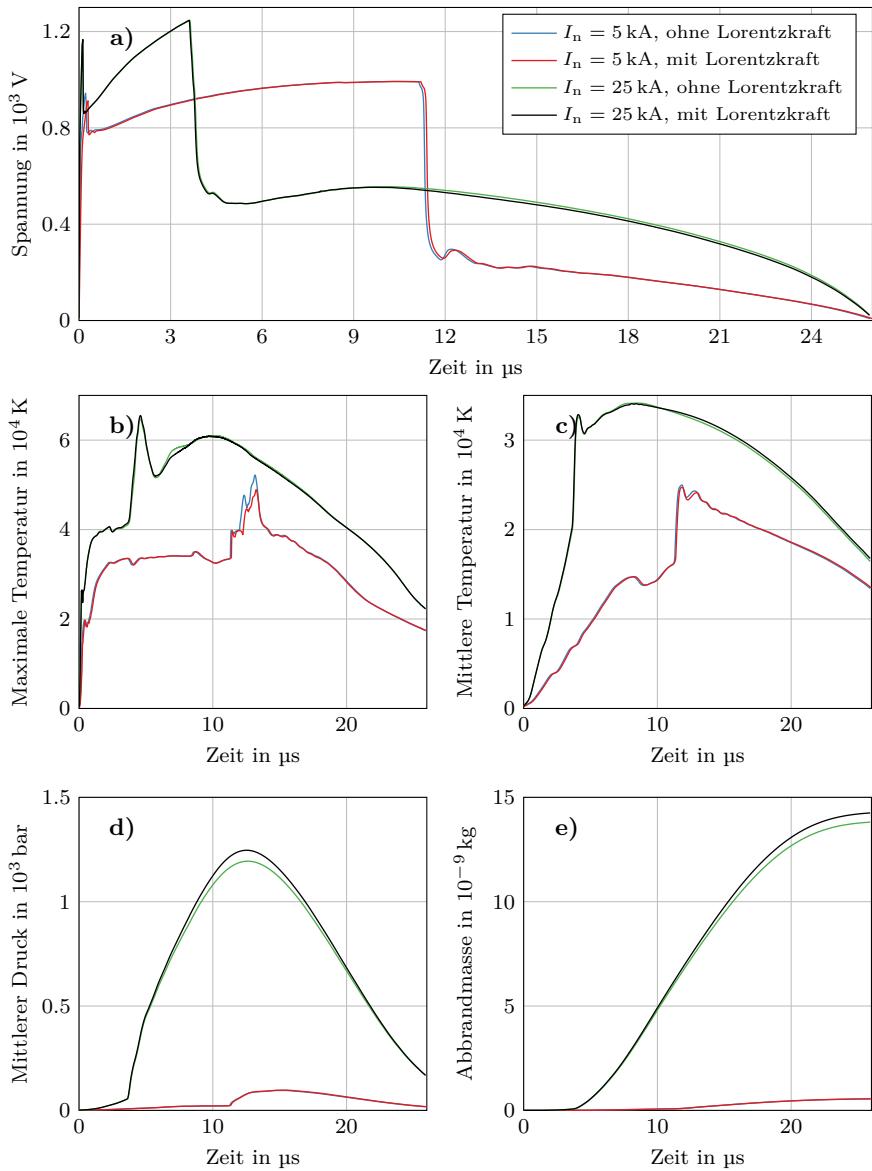
$$\Delta = \sqrt{\Delta U^2 + \frac{1}{2} \Delta T_{\max}^2 + \frac{1}{2} \Delta \bar{T}^2 + \Delta \bar{p}^2 + \Delta m^2} \quad (4.2)$$

Im Folgenden wird auch das Produkt  $\Delta_t$  aus dem Gesamtfehler mit der Rechenzeit der einzelnen Rechnung betrachtet, um eine Aussage über die Effizienz zu geben. Die Rechenzeit selbst ist nur als grober Richtwert zu verstehen, da diese durch viele Faktoren beeinflusst werden kann und sehr kontrollierte Bedingungen auf dem Simulationsrechner erfordert, die nicht für alle Rechnungen gewährleistet werden können. Weiterhin ist zu bedenken, dass mit diesem Fehlermaß vor allem die Fehler im frühen Teil der Simulation bewertet werden, da diese Auswirkungen auf den Rest der Simulation haben und dadurch spätere Abweichungen hervorrufen können. Dennoch wird diese Methode statischen Fehlerbetrachtungen vorgezogen, da der Gesamtfehler der Simulation bewertet werden soll und weniger die Ursachen für den Gesamtfehler. Dies ermöglicht es, Näherungsmethoden aus Nutzensicht zu vergleichen.

## 4.4 Magnetfeld

In diesem Abschnitt wird die Auswirkung des Magnetfelds untersucht, das durch den Stromfluss im Plasma erzeugt wird und über die Lorentzkraft auf das Plasma zurückwirkt. Hierzu wird zunächst der quantitative Einfluss bei verschiedenen Stromstärken untersucht. Anschließend wird das Konvergenzverhalten der Monte-Carlo Integration in der Randbedingung zur Lösung des Biot-Savart Integrals (siehe Abschnitt 3.3) betrachtet. Die Rechnungen in diesem Abschnitt werden durchgängig auf dem  $25 \mu\text{m}$ -Netz durchgeführt, das als Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gewählt wurde (vergleiche Abschnitt 4.5). Außerdem wurde das mit  $n_v = 1000$  Punkten aufgelöste spektrale Strahlungsmodell verwendet, das nahezu exakte Ergebnisse liefert (siehe Abschnitt 4.6.1).

In Lichtbögen kommt es zum so genannten Pinch-Effekt, bei dem die Lorentzkraft in Richtung des Lichtbogenkerns wirkt und somit den Lichtbogen einschnürt. Gerade bei frei brennenden Lichtbögen ist dieser Effekt bedeutsam, im hier betrachteten Fall wird der Lichtbogen jedoch schon durch die Wände auf einen schmaleren Querschnitt eingeschnürt, als er im frei brennenden Fall einnehmen würde. Daher ist hier grundsätzlich nur eine geringfügige Veränderung des Lichtbogenprofils zu erwarten. Da sich die Elektroden gegenüberstehen, werden durch das Magnetfeld keine Kräfte erzeugt, die quer zum Lichtbogen wirken. Somit ist keine signifikante Lichtbogenbewegung durch magnetische Kräfte zu erwarten. Die Stärke der Lorentzkraft skaliert quadratisch mit der Stromdichte, was dazu führt, dass das Magnetfeld bei großen Stromamplituden bedeutsamer wird als die Druckkräfte, die nur eine vergleichsweise schwache Nichtlinearität in der Stromdichte aufweisen. Aus diesem Grund werden in Abbildung 4.3 zunächst die Ergebnisse für Stromimpulse mit Amplituden von 5 und 25 kA gezeigt, die jeweils mit und ohne Magnetfeld berechnet wurden. Wie erwartet sind die Unterschiede bei großen Stromamplituden stärker, mit Ausnahme der Verläufe der maximalen Temperatur. Hier zeigt sich eine abweichende Dynamik im Zeitbereich nach der Zündung bis zur Stabilisation des Lichtbogens. Davon abgesehen sind die Verläufe bei 5 kA jedoch nahezu identisch, während bei 25 kA geringe Abweichungen auftreten. Bei Berücksichtigung des Magnetfelds zeigt sich ein höherer Druck sowie eine größere Abbrandmasse.



**Abb. 4.3:** (a) Spannung, (b) maximale Temperatur, (c) mittlere Temperatur in der Brennkammer, (d) mittlerer Druck in der Brennkammer und (e) POM-Abbrandmasse bei 5 kA und 25 kA jeweils mit und ohne Magnetfeldberechnung.

$N$	$\Delta$	$\Delta U$	$\Delta \bar{T}$	$\Delta T_{\max}$	$\Delta \bar{p}$	$\Delta m$
%	.100	.1000	.1000	.1000	.1000	.1000
50	0,380	4,712	3,016	4,631	3,504	3,083
25	0,412	3,233	2,254	4,587	2,776	6,157
12,5	0,381	4,734	3,014	4,675	3,433	3,141
6,25	0,384	4,733	3,026	4,702	3,503	3,221
3,125	0,391	4,782	3,007	4,717	3,369	3,525
0	1,649	3,919	9,961	4,559	2,234	30,99

**Tab. 4.1:** Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens zur Bestimmung der Randbedingungen des magnetischen Vektorpotentials bei  $I_n = 25$  kA.

Da die Auswirkungen der Lorentzkraft vergleichsweise gering sind, jedoch sehr viel Rechenzeit benötigen (in den hier betrachteten Rechnungen etwa 2-mal länger), bietet es sich an, das in Abschnitt 3.3 vorgestellte Monte-Carlo-Verfahren zur Bestimmung der Randbedingungen für das magnetische Vektorpotential zu nutzen. Die Konvergenz dieses Verfahrens wird in Tabelle 4.1 mit der exakten Lösung (Berücksichtigung von 100 % der Zellen), sowie mit einer Rechnung, bei der das magnetostatische Vektorpotential auf dem Rand auf Null gesetzt wird, verglichen. Es zeigt sich, dass schon mit 3,125 % der Zellen akzeptable Ergebnisse gewonnen werden können, während sich durch das auf Null gesetzte Vektorpotential große Fehler ergeben. Weiterhin zeigt sich kein klarer Trend im Konvergenzverhalten. Die Rechnung mit 25 % unterscheidet sich von den Fehlerwerten signifikant von den anderen Rechnungen. Dies ist möglicherweise auf die stochastische Natur des Verfahrens zurückzuführen, da die Auswahl der Zellen dem Zufall unterliegt. In einer weitergehenden Untersuchung könnte durch mehrfache Simulation mit gleichen Parametern das Rauschverhalten der Ergebnisse untersucht werden. Da das Magnetfeld unter den hier betrachteten Bedingungen nur einen geringen Einfluss hat, wird die Betrachtung in dieser Arbeit nicht weiter vertieft. Durch die Nutzung dieses Verfahrens ist es möglich, die Randbedingungen für Gleichung (2.43) ohne signifikante Erhöhung der Rechenzeit korrekt zu berücksichtigen. Die guten Ergebnisse mit 3,125 % der Zellen sind auf das vergleichsweise feine Netz zurückzuführen. Somit entspricht ein niedriger Prozentsatz immer noch einer vergleichsweise hohen räumlichen Auflösung. Bei größeren Netzen sollte dementsprechend ein höherer Prozentsatz verwendet werden, um eine ähnliche räumliche Auflösung in der Berechnung des Biot-Savart-Integrals sicherzustellen.

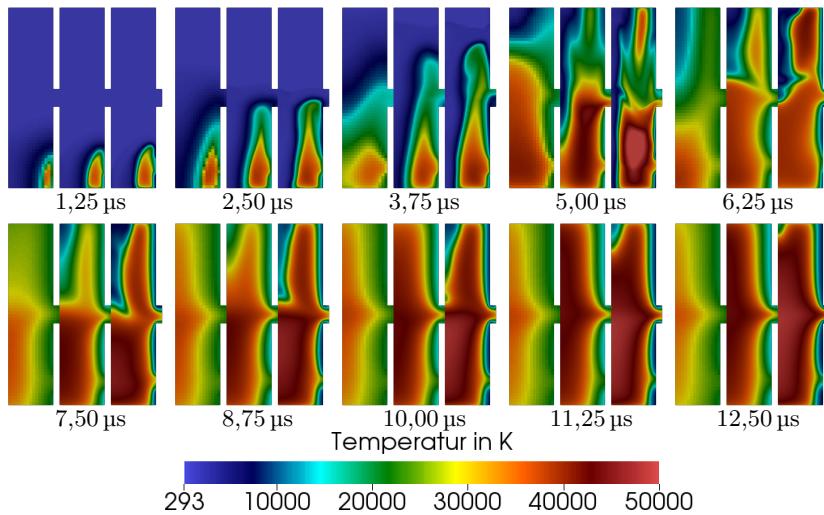
## 4.5 Räumliche Konvergenz

### 4.5.1 Netzverfeinerung

Um die Konvergenz der räumlichen Diskretisierung zu untersuchen, wird die Geometrie mit Hexaedern gleicher Größe vernetzt. Dadurch werden die durch Nichtorthogonalität der Zellen entstehenden Fehler vermieden. Die Zellgröße wird in mehreren Schritten innerhalb des Brennraums halbiert, so dass in jedem Schritt die Anzahl der Zellen maximal vervierfacht wird und die Zeitschrittweite aufgrund des Courant-Kriteriums (3.2) halbiert wird. Die untersuchten Zellgrößen betragen 100 µm, 50 µm, 25 µm, 12,5 µm und 6,25 µm, damit ergeben sich Netze mit 1440, 5760, 23 064, 92 208 und 368 928 Zellen sowie Laufzeiten von 0,9, 4,7, 31,9, 312 und 2732 Stunden. Als Strahlungsmodell wird ein spektral aufgelöstes Modell mit 1000 Punkten verwendet, das den Strahlungstransport nahezu korrekt abbildet (vergleiche Abschnitt 4.6.1). Die Berechnung des Magnetfelds sowie die Wärmeleitung in die Wände werden aufgrund der geringen Auswirkungen und der langen Rechenzeiten vernachlässigt (vergleiche Abschnitt 4.4 und Abschnitt 4.7).

In Abbildung 4.4, Tabelle 4.2 und Abbildung 4.5 werden die Ergebnisse dieser Rechnungen zusammengefasst. Abbildung 4.4 zeigt die Temperaturentwicklung bis zur Ausbildung des wandstabilisierten Lichtbogens für die Netze mit 100 µm, 25 µm und 6,25 µm Auflösung. Hier zeigen sich signifikante Unterschiede, an denen klar wird, dass insbesondere das größte Netz nicht in der Lage ist, das numerisch korrekte Verhalten des Simulationsmodells abzubilden. Die Unterschiede während des Zündprozesses sind darauf zurückzuführen, dass Schockwellen bei feineren Netzen weniger schnell auseinanderlaufen und so länger aufgelöst werden können. Dies führt zu mehr Reflexionen und damit komplexeren Strukturen in der Temperaturverteilung. Weiterhin wird der Übergang zur Wand nicht korrekt abgebildet. Dieser Effekt wird in diesem Kapitel noch genauer betrachtet.

Bei 5 µs wird deutlich, dass die Zündung bei den feineren Netzen wesentlich lokalisierter stattfindet als bei dem groben Netz, dass eher eine diffuse Kontaktierung zeigt. Dies führt dazu, dass der Lichtbogen auf dem feinen Netz für etwa 5 µs, bzw. 8 µs nicht auf der vollständigen Oberfläche der zweiten Elektrode brennt.

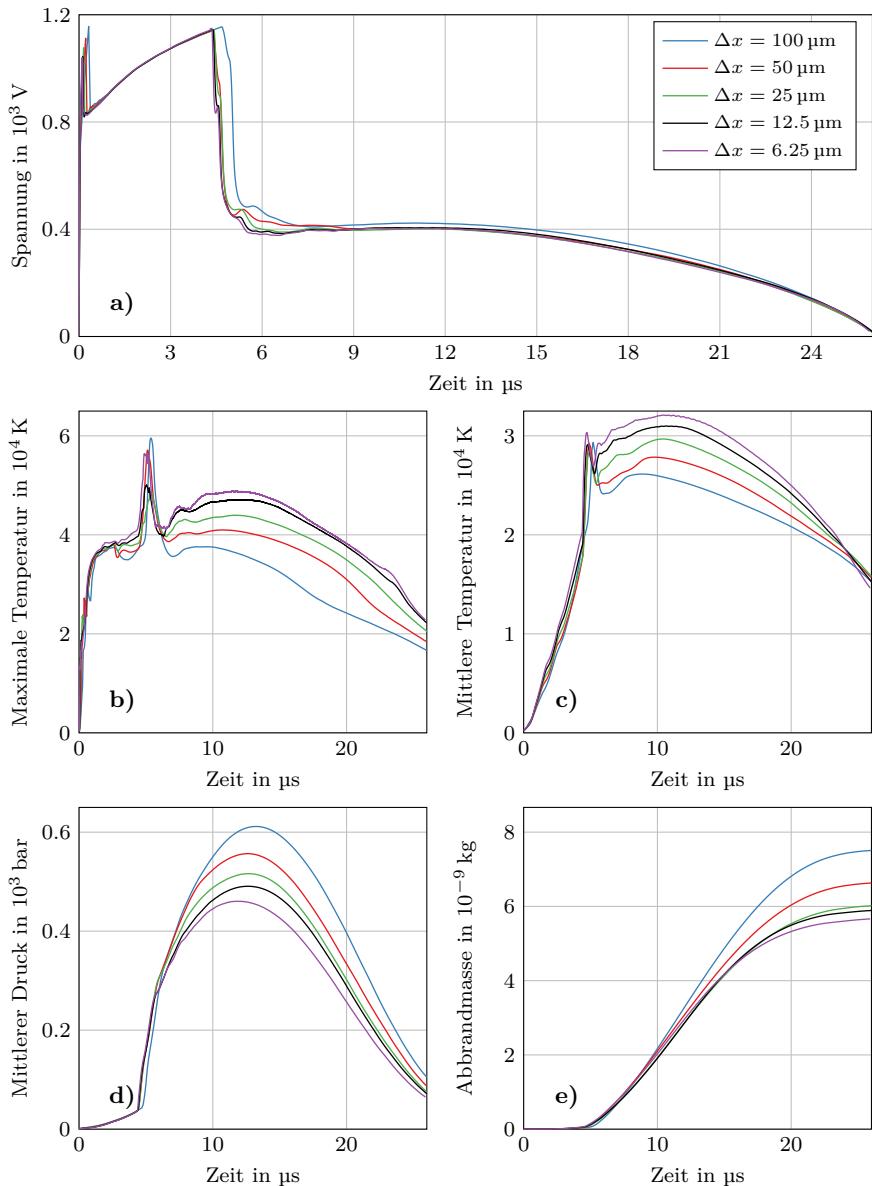


**Abb. 4.4:** Zeitliche Temperaturentwicklung mit  $\Delta x = 100 \mu\text{m}$ ,  $25 \mu\text{m}$  und  $6,25 \mu\text{m}$  Netzauflösung (von links nach rechts) bis zur Ausbildung eines wandstabilisierten Lichtbogens.

$\Delta_x$ $\mu\text{m}$	$\Delta$ $\cdot 100$	$t$ h	$\Delta_t$ $\cdot 100$	$\Delta U$ $\cdot 100$	$\Delta \bar{T}$ $\cdot 100$	$\Delta T_{\max}$ $\cdot 100$	$\Delta \bar{p}$ $\cdot 100$	$\Delta m$ $\cdot 100$
100	18,18	0,908	16,51	1,530	10,24	13,84	10,68	32,51
50	9,998	4,732	47,31	0,603	7,342	8,278	6,934	17,03
25	4,410	31,86	140,5	0,304	4,519	4,748	4,189	6,219
12,5	2,504	312,2	781,8	0,361	2,006	1,464	2,474	3,969
6,25	-	2735	-	-	-	-	-	-

**Tab. 4.2:** Fehler  $\Delta$  der Rechnungen mit unterschiedlichen Netzgrößen im Vergleich zu der genauesten Rechnung mit  $\Delta x = 6,25 \mu\text{m}$ , Laufzeiten  $t$  sowie das Produkt des Gesamtfehlers und der Laufzeit  $\Delta t$ .

Das eingeschlossene Gas wird erst nach und nach durch Joulesche Wärme und Strahlungsabsorption aufgeheizt. Im Gegensatz dazu bildet sich auf dem groben Netz schon bei etwa  $8,75 \mu\text{s}$  ein wandstabilisierter Lichtbogen aus. Weiterhin fällt auf, dass der wandstabilisierte Lichtbogen auf dem groben Netz ein wesentlich diffuseres Temperaturprofil zeigt, während die Temperatur auf den feinen Netzen im Lichtbogenkern heißer und an der Wand kälter ist.



**Abb. 4.5:** (a) Spannung, (b) maximale Temperatur, (c) mittlere Temperatur in der Brennkammer, (d) mittlerer Druck in der Brennkammer und (e) POM-Abbrandmasse bei verschiedenen Zellgrößen.

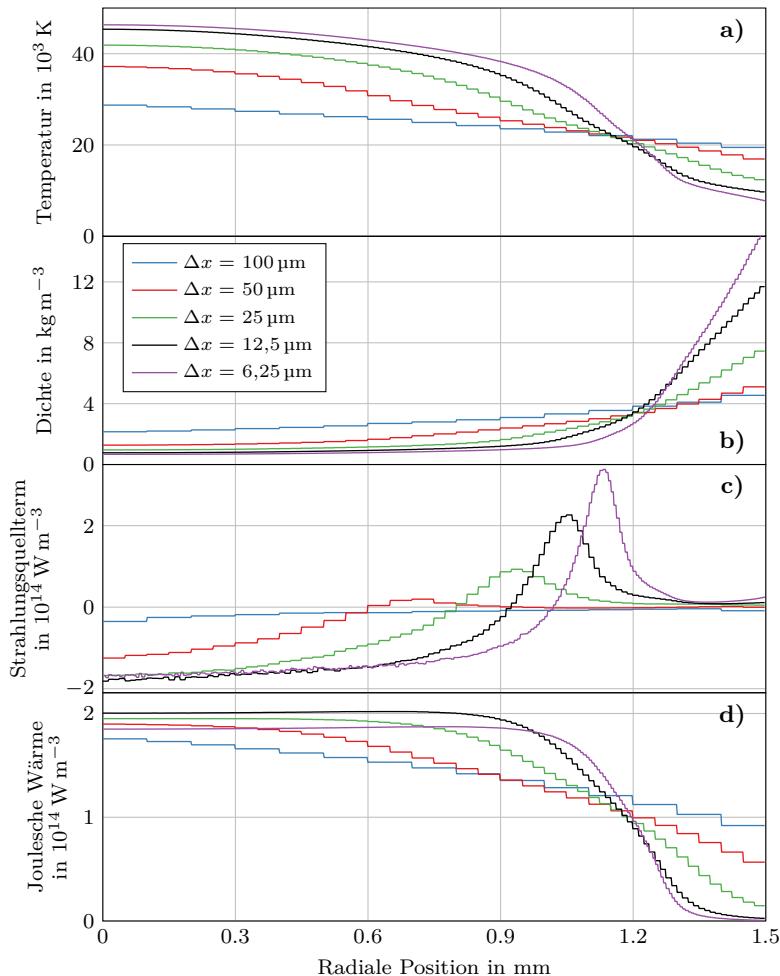
In Abbildung 4.5 werden die zeitlichen Verläufe der wichtigsten Größen der Simulation in Abhängigkeit der Netzgröße dargestellt. Es zeigt sich, dass selbst bei der feinsten Netzgröße noch kein konvergentes Verhalten erkennbar ist. Die größten Fehler lassen sich bei dem größten Netz beobachten — die Zündung ist verzögert und der Spannungsbedarf ist hier signifikant höher im Vergleich zu den feineren Netzen. Dennoch sind einige Größen, insbesondere der Zündzeitpunkt und der Spannungsverlauf relativ unsensibel im Hinblick auf die Netzauflösung. Die Abweichungen in der Spannung während der Hauptstromphase liegen in einem Band von etwa 5 %. An den Temperatur- und Druckverläufen sowie der Abbrandmasse lassen sich die größten Unterschiede beobachten. Am Ende des Impulses sinkt die mittlere Temperatur bei feineren Netzen schneller.

Anhand der Leitfähigkeit (siehe Abbildung 2.5) lässt sich die geringe Sensibilität der Spannung auf die Netzgröße erklären, da die bei feinen Netzen steigende Temperatur und der sinkende Druck einen gegensätzlichen Einfluss auf die Leitfähigkeit und somit auch auf die Spannung und die umgesetzte Leistung haben. Bei verschiedenen Netzgrößen ergeben sich so ähnliche Spannungsverläufe.

Aus den Verläufen ist kein Konvergenzverhalten erkennbar, obwohl die Abweichungen bei den feineren Netzen geringer als bei den größeren Netzen sind. Am deutlichsten wird dies bei dem Verlauf der Abbrandmasse, der bei den drei feinsten Netzen näherungsweise gleich ist und nur in den letzten 7  $\mu\text{s}$  signifikant voneinander abweicht. Auch die maximale Temperatur zeigt bei den zwei feinsten Netzen einen sehr ähnlichen Verlauf.

Um die Unterschiede in den Rechnungen besser verstehen zu können, bietet es sich an, Querschnitte durch den wandstabilisierten Lichtbogen bei verschiedenen Netzgrößen zu betrachten. Dies wird in Abbildung 4.6 dargestellt. Die Querschnitte werden bei 15  $\mu\text{s}$  und in einer Höhe von 4,5 mm (bei einer Gesamthöhe von 6 mm) gezeigt, da der Lichtbogen bei diesen Bedingungen als exemplarisch und stabil angesehen werden kann (vergleiche Abbildung 4.4).

Der Lichtbogen zeigt bei feineren Netzen eine ausgeprägte Grenze, während die Temperatur bei groben Netzen graduell zum Rand hin abfällt. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich in der Jouleschen Wärme, deren Energie primär im Lichtbogenkern deponiert wird. Hier zeigt sich bei dem feinsten Netz ein umgekehrtes Verhalten, da die umgesetzte Leistung im Lichtbogenkern hier wieder abnimmt,



**Abb. 4.6:** Vergleich der (a) Temperatur- und (b) Dichteprofile sowie der Profile des Strahlungsquellterms (c) und der Jouleschen Wärme (d) bei  $t = 15 \mu\text{s}$ .

was ein Indiz auf ein mögliches Konvergenzverhalten bei noch genaueren Rechnungen sein kann. Die eingebrachte Leistung wird zu einem großen Teil durch die Strahlungsemision ausgeglichen, ein weiterer Faktor ist die Kühlung durch das abbrennende POM.

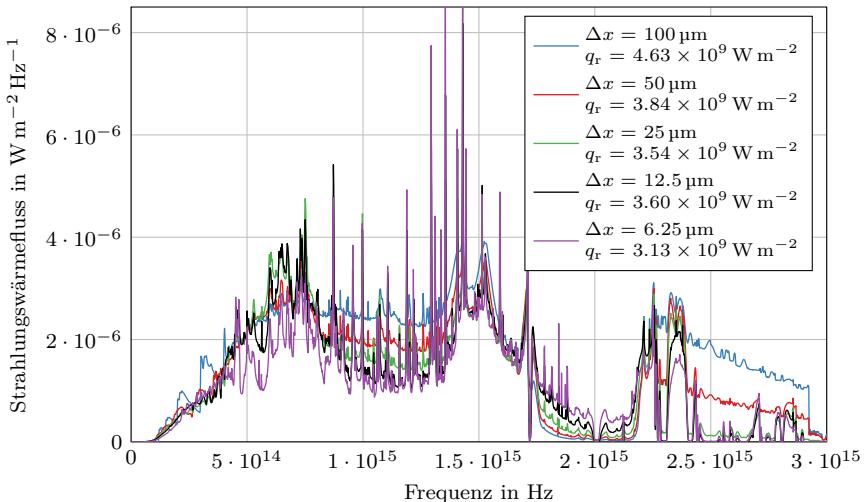
Der Strahlungsquellterm (siehe Gleichung (2.56)) zeigt bei den groben Netzen einen stark verfälschten Verlauf: Die Bereiche, in denen Absorption auftritt, sind im Vergleich zu den höher aufgelösten Rechnungen verbreitert und absorbieren weniger stark. Im Vergleich dazu ergeben sich in der feinsten Auflösung viel schmalere Bereiche mit sehr starker Absorption. Bei den feineren Netzen wird deutlich, dass in dem Temperaturbereich von 25 000 bis 30 000 K die stärkste Absorption stattfindet, während die kälteren Bereiche weiter außerhalb kaum zur Absorption beitragen.

Weiterhin lässt sich erkennen, dass die groben Netze die niedrigen Temperaturen nahe der Wand nicht genau genug abbilden können. Der Verlauf der Profile von groben zu feinen Netzen hin lässt vermuten, dass eine noch bessere Netzauflösung erforderlich ist, um konvergente Ergebnisse zu erzielen. Die Dichte wächst zur Wand hin mit höherer Netzauflösung stark an. Die niedrige Temperatur an der Wand und die hohe Dichte bedingen sich gegenseitig, da deren Produkt nach der idealen Gasgleichung in erster Näherung proportional zum Druck ist<sup>1</sup>, und Änderungen im Druck zu Ausgleichsströmungen führen. Die verhältnismäßig hohe Temperatur der groben Netze am Rand ermöglicht einen Stromfluss in diesen Bereichen, der aufgrund der größeren Fläche der äußeren Bereiche einen großen Teil des gesamten Stromes darstellt. Dies ermöglicht niedrigere Stromdichten, und somit auch niedrigere Joulesche Wärme und Temperatur im Lichtbogenkern.

Die Konvergenz der Strahlungswärmeflüsse wird in Abbildung 4.7 gezeigt. Bei hohen Netzauflösungen kommt es zu stärkeren Emissionslinien. Die hochfrequenten Bereiche werden bei hohen Netzauflösungen stärker absorbiert, da sich hier kältere Bereiche nahe der Wand ergeben, die die hochenergetische Strahlung stärker absorbieren. Oberhalb von  $3 \times 10^{15}$  Hz wird keine Strahlungsemision beobachtet. An den integrierten Strahlungswärmeflüssen wird deutlich, dass die gesamte Strahlungsleistung bei feinen Netzen weniger sensibel auf die Netzgröße reagiert als die spektral aufgelösten Strahlungswärmeflüsse, die je nach Frequenz einen ansteigenden oder abfallenden Trend zeigen. Dies kann dazu führen, dass das gesamte Modell eher ein konvergentes Verhalten zeigt als der spektral aufgelöste Strahlungstransport.

---

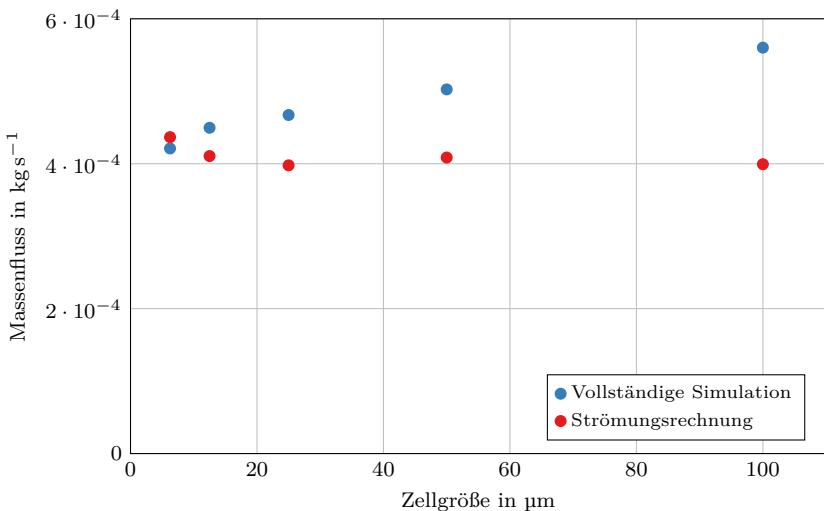
<sup>1</sup>Siehe hierzu auch Abbildung 2.3



**Abb. 4.7:** Strahlungswärmefluss auf die POM-Wand bei  $t = 15 \mu\text{s}$  für verschiedene Netze.

Ein weiterer Aspekt in der Konvergenzbetrachtung ist der Massenfluss durch die Auslassöffnung (siehe Abbildung 4.8). Bei groben Netzen kann die Strömung hier nicht genau genug berechnet werden und Effekte wie Stoßwellen können nicht korrekt abgebildet werden. Dies könnte dazu führen, dass sich unterschiedliche Drücke in der Brennkammer einstellen, die über die physikalischen Eigenschaften des Plasmas das Gesamtverhalten beeinflussen. Um diesen Effekt zu isolieren, wird ein reines Strömungsproblem berechnet: Aus den Grenzflächen der Elektroden strömt Plasma mit  $30 \times 10^3 \text{ K}$  unter einem Druck von 500 bar aus. Die Rechnung erfolgt bis zur Einstellung eines Gleichgewichts an der Auslassöffnung.

Es zeigt sich, dass die Strömung innerhalb der Brennkammer bei den verwendeten Netzen nicht vollständig konvergiert ist und es somit zu Abweichungen im Massenfluss kommt. Diese sind allerdings geringer als die Unterschiede im Massenfluss bei der vollständigen Simulation und können die beobachteten Werte daher nicht erklären.

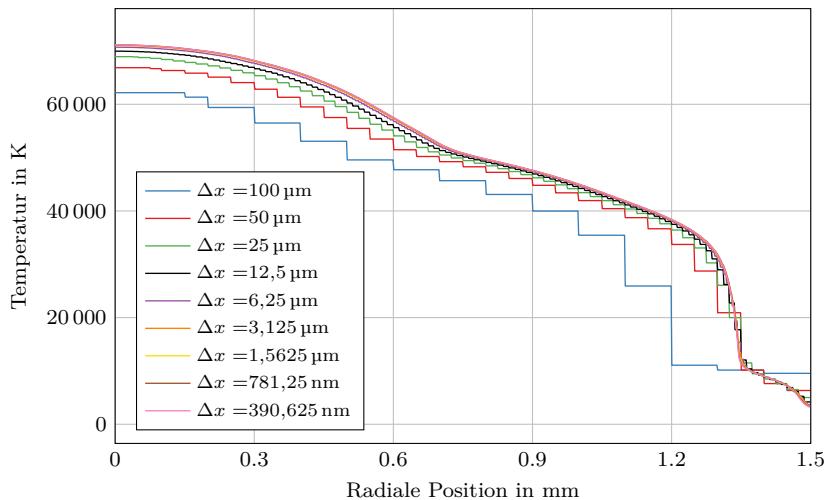


**Abb. 4.8:** Massenfluss aus der Brennkammer bei  $t = 15 \mu\text{s}$  für verschiedene Netze in der vollständigen Simulation und einer vereinfachten Strömungssimulation.

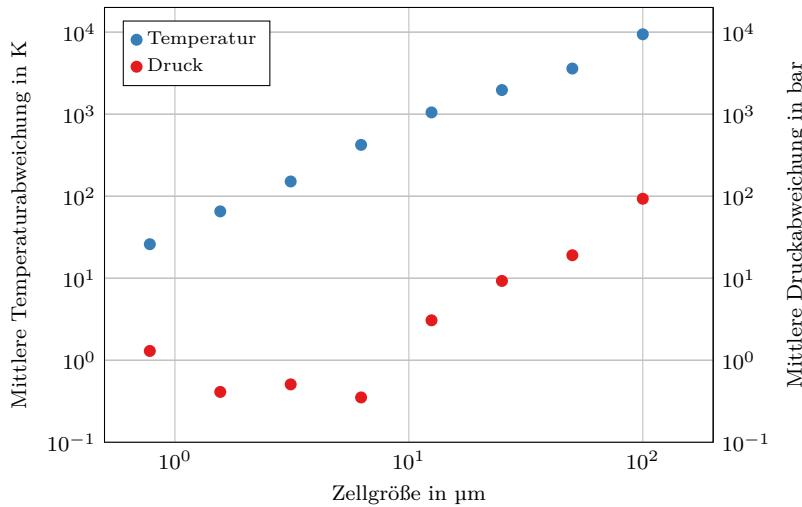
#### 4.5.2 Eindimensionales Netz

Ein weiterer Ansatz ist die Berechnung eines eindimensionalen Lichtbogens, um feiner aufgelöste Netze untersuchen zu können. Bedingt durch die Eindimensionalität ist es nicht möglich, die Strömung vergleichbar zum zweidimensionalen Fall nachzubilden. Da die Abströmung scheinbar nicht ursächlich für die Unterschiede ist, sollte deren Vernachlässigung demnach dennoch zu übertragbaren Ergebnissen führen. Um einen vergleichbaren Lichtbogenverlauf zu untersuchen, wird eine den vorhergehenden Rechnungen entsprechende Feldstärke von  $60 \text{ V mm}^{-1}$  angenommen. Die axialen Ränder des eindimensionalen Lichtbogens sind für Strömung undurchlässig und nutzen eine so genannte *slip*-Randbedingung, die keine Reibung an der Grenzfläche verursacht. Ebenso stellen die axialen Ränder adiabate Grenzflächen dar, durch die kein Wärmeaustausch stattfindet. Als Startbedingung wird ein Druck von 5 bar und eine Temperatur von 30 000 K vorgegeben. Die Ergebnisse werden nach  $3 \mu\text{s}$  ausgewertet. Zu diesem Zeitpunkt hat sich durch den Massenabbrand und den Energieeintrag ein Druck von etwa 500 bar eingestellt, was vergleichbar zu den zuvor untersuchten zweidimensionalen Rechnungen ist.

Die Ergebnisse werden in Abbildung 4.9 und in Abbildung 4.10 dargestellt. Es wurden Rechnungen mit sukzessive halbierten Zellgrößen bis zu einer Zellgröße von  $\Delta x = 390,625 \text{ nm}$  durchgeführt. Für diese feinste Auflösung ergeben sich 3840 Zellen und eine Rechenzeit von 8,2 Stunden. Bei diesen eindimensionalen Rechnungen lässt sich erstmals ein Konvergenzverhalten beobachten, wobei das Netz mit  $\Delta x = 12,5 \mu\text{m}$  schon ein nahezu konvergiertes Ergebnis mit akzeptablen Fehlern zeigt. Die Temperatur ist mit bis zu 70 000 K wesentlich höher als im zweidimensionalen Modell, was daran liegt, dass hier über die Strömung keine Energie abgeführt werden kann. Damit ergeben sich hier quantitativ unterschiedliche Ergebnisse zum zweidimensionalen Modell, so dass die absoluten Abweichungen nicht direkt verglichen werden können.



**Abb. 4.9:** Konvergenzverhalten der Temperaturprofile der eindimensionalen Rechnungen bei  $t = 3 \mu\text{s}$ .



**Abb. 4.10:** Mittlere Abweichung der Temperatur und des Drucks zur genauen eindimensionalen Rechnung mit  $\Delta x = 390,625 \text{ nm}$  für verschiedene Zellgrößen.

### 4.5.3 Schlussbemerkungen

Bei zweidimensionalen Netzen kann mit akzeptabler Rechenzeit keine zufriedenstellende Konvergenz erreicht werden. Hier zeigt sich ein systematischer Fehler, bei dem die Temperatur unterschätzt und der Druck und die Abbrandmasse überschätzt werden. Die Spannung ist jedoch auch schon bei größeren Netzen weitestgehend korrekt aufgrund eines selbstausgleichenden Effekts in der elektrischen Leitfähigkeit. In den Verlaufskurven werden diese Abweichungen durch Mittlungseffekte abgeschwächt. Dies muss bei der Bewertung solcher Rechnungen berücksichtigt werden. Es konnte gezeigt werden, dass die Abströmung des Plasmas nicht ursächlich für die Abweichungen ist. Die Übertragung des Problems auf eine eindimensionale Geometrie ermöglicht die Berechnung mit kleineren Zellgrößen. Hier zeigt sich ein Konvergenzverhalten. Die erforderlichen Zellgrößen für akzeptable Fehler liegen hier bei maximal  $12,5 \mu\text{m}$ . In der Praxis ergeben sich mit dreidimensionalen Geometrien jedoch Zellgrößen von mindestens  $25 \mu\text{m}$  oder mehr, so dass hier vergleichsweise große numerische Fehler zu erwarten sind und Lichtbogenprofile nur qualitative Ergebnisse liefern. Eine Halbierung der Zellgröße

führt bei einer zweidimensionalen Geometrie zu einer Verachtfachung der Rechenzeit mit jeder Halbierung der Zellgröße. Ohne Zylindersymmetrie ergibt sich eine signifikant höhere Zellenzahl und es muss sogar eine Versechzehnfachung der Rechenzeit bei Halbierung der Zellgröße in Kauf genommen werden. Dies führt dazu, dass Simulationen mit entsprechenden Netzgrößen nicht mehr auf Einzelrechnern ausgeführt werden können, sondern Clustersysteme mit entsprechender Rechenleistung erfordern.

## 4.6 Strahlung

Wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, ist die Strahlung der wesentliche Mechanismus, über den Energie transportiert wird. Die Komplexität der Emissions- und Absorptionsvorgänge macht die Nutzung von Näherungsverfahren notwendig. Die in Abschnitt 2.4.5 beschriebenen werden in diesem Abschnitt auf ihre Genauigkeit und ihr Konvergenzverhalten untersucht. Da der Fokus hier auf der Untersuchung des Strahlungstransports liegt, werden die Berechnung des Magnetfelds (und damit die Lorentzkraft), der Wärmetransport in den Festkörper sowie die Elektrodenfallspannungen und der Massenabbrand der Elektroden vernachlässigt, um die Rechnungen zu beschleunigen und möglichst viele Varianten der Näherungsverfahren testen zu können. Der Polymerabbrand muss jedoch zwingend berücksichtigt werden, da er stark mit der Strahlung gekoppelt ist und das Plasmaverhalten mitbestimmt.

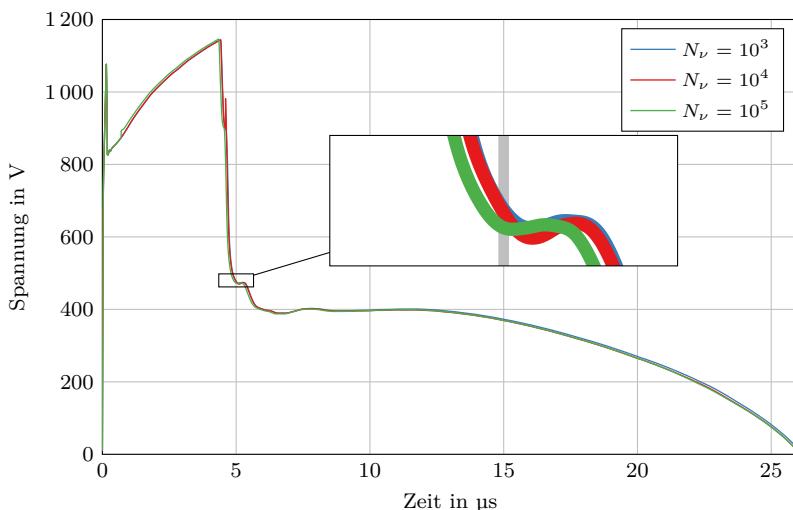
Untersucht werden im Folgenden das Konvergenzverhalten des spektral aufgelösten Modells in Abhängigkeit der Auflösung der Frequenzachse, sowie Bandmodelle mit 6, bzw. 18 Bändern bei 1, 4 und 20  $\kappa$ -Gruppen unter Verwendung der Planck- und Rosseland-Mittel sowie dem natürlichen Mittel. Die Rechnungen werden auf den drei größeren Netzen mit  $\Delta x = 100 \mu\text{m}$ ,  $50 \mu\text{m}$  und  $25 \mu\text{m}$  durchgeführt, um eine Bewertung der Näherungsverfahren in Abhängigkeit der Netzgröße zu ermöglichen. Die Untersuchung auf den zwei feineren Netzen ist aufgrund der erforderlichen Rechenzeit unpraktikabel und wird nicht betrachtet. Die spektral aufgelösten Rechnungen werden nur auf den  $25 \mu\text{m}$  und  $100 \mu\text{m}$ -Netzen durchgeführt, da die Rechenzeit dieses Strahlungsmodells sehr hoch ist.

Für die Bewertung der Bandmodelle und  $\kappa$ -Gruppenmodelle ergeben sich damit insgesamt 18 Rechnungen pro Netz, oder 56 Rechnungen auf den drei Netzen.

Die hohe Anzahl der Rechnungen macht deutlich, dass eine vollständige manuelle Auswertung nicht sinnvoll ist. Stattdessen wird das zuvor beschriebene Fehlermaß genutzt, um die Genauigkeit zu bewerten.

#### 4.6.1 Konvergenzverhalten des spektral aufgelösten Modells

Die von *SPARTAN* berechneten Absorptionsspektren nutzen eine adaptiv generierte Frequenzachse für die Absorptionsspektren, so dass bei unterschiedlichen Drücken oder Temperaturen andere Frequenzachsen entstehen. Dies bietet den Vorteil, eine bessere Auflösung der Absorptionsspektren mit weniger Stützstellen zu ermöglichen. Nachteilig ist jedoch die Notwendigkeit, diese Spektren auf eine gemeinsame Frequenzachse interpolieren zu müssen, um sie in dem spektral aufgelösten Modell (siehe Abschnitt 2.4.5) nutzen zu können. Bei ausreichend hoher Frequenzauflösung konvergiert dieses Modell gegen das exakte Ergebnis, wenn alle in den Absorptionsspektren vorkommenden Effekte aufgelöst werden. Dies könnte im ungünstigsten Fall jedoch einige Millionen Frequenzpunkte erfordern.



**Abb. 4.11:** Vergleich der Spannung bei unterschiedlichen Diskretisierungen der Frequenzachse der Absorptionsspektren im spektral aufgelösten Strahlungsmodell.

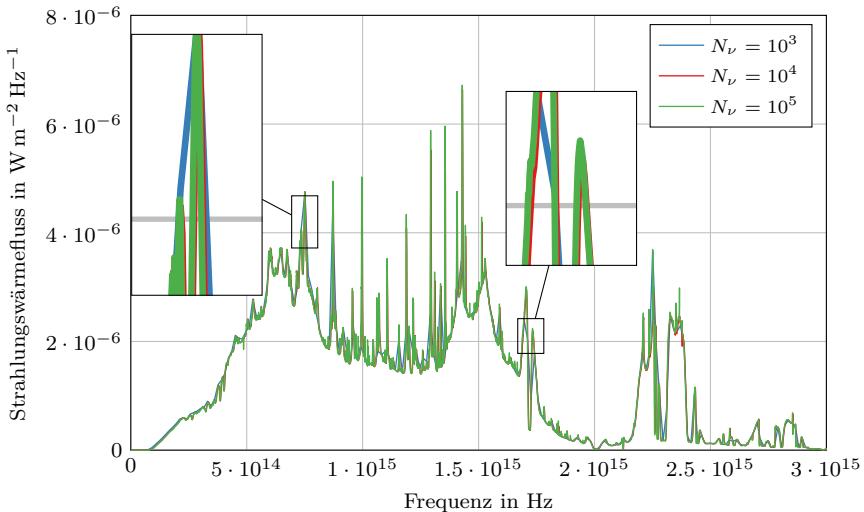
$\Delta_x$ μm	$N_\nu$	$\Delta$ .1000	$t$ h	$\Delta_t$ h · 1000	$\Delta U$ .1000	$\Delta \bar{T}$ .1000	$\Delta T_{\max}$ .1000	$\Delta \bar{p}$ .1000	$\Delta m$ .1000
100	100	n. k.	n. k.	n. k.	n. k.	n. k.	n. k.	n. k.	n. k.
100	1000	0,969	0,908	0,880	0,514	0,501	0,861	2,320	0,425
100	10 000	2,051	7,521	15,42	0,466	0,909	0,918	2,673	3,432
100	100 000	-	47,41	-	-	-	-	-	-
25	1000	9,4362	31,86	300,6	2,9153	1,4799	3,8231	4,7232	17,803
25	10 000	4,8047	313,3	1505,5	1,1101	0,9646	2,3646	1,8114	9,1959
25	100 000	-	2150	-	-	-	-	-	-

**Tab. 4.3:** Fehler der Rechnungen mit niedriger aufgelösten Frequenzachsen im Vergleich zu der jeweils genauesten Rechnung einer Netzgröße, Laufzeiten sowie das Produkt des Gesamtfehlers und der Laufzeit.

In diesem Abschnitt wird daher die Fragestellung untersucht, wie viele Frequenzpunkte erforderlich sind, um ein konvergentes Ergebnis mit möglichst wenig Rechenaufwand zu erzielen. Von den vorgestellten Strahlungsmodellen ist dieses das aufwändigste, da jeder Frequenzpunkt pro Zeitschritt die Lösung einer Differentialgleichung erfordert. Im Folgenden werden gleichverteilte Frequenzachsen mit 100, 1000,  $10^4$  und  $10^5$  Stützstellen untersucht. Eine höhere spektrale Auflösung war aufgrund der Rechenzeit (bereits 90 Tage für  $N_\nu = 10^5$  auf einem einzelnen CPU-Kern) und des hohen Bedarfs an Arbeitsspeicher für die tabellarischen Daten nicht in vertretbarer Zeit realisierbar. Die Frequenzachse mit 100 Punkten konvergiert nicht und wird daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

In Abbildung 4.11 wird die Spannung für die untersuchten Frequenzachsen dargestellt. Die Kurven sind quasi identisch, was auf sehr gute Konvergenz auch bei niedriger spektraler Auflösung hindeutet. Auch der mittlere Druck und die mittlere Temperatur in der Brennkammer zeigen vergleichbar gute Ergebnisse.

In Tabelle 4.3 werden die Spannung, die mittlere und maximale Temperatur und der Druck bei  $t = 10 \mu\text{s}$  sowie die gesamte Abbrandmasse der POM-Wand und die Rechenzeit miteinander verglichen. Die Werte zeigen, dass sowohl bei  $N_\nu = 10^4$  wie auch bei  $N_\nu = 10^3$  sehr niedrige Abweichungen zu der Rechnung mit  $N_\nu = 10^5$  entstehen. Im Gegensatz dazu sind die Rechenzeiten in grober Näherung proportional zur verwendeten Frequenzachse, da die hohe Frequenzauflösung den größten Teil der Rechenzeit in Anspruch nimmt.



**Abb. 4.12:** Strahlungswärmefluss auf die POM-Wand für verschiedene spektrale Auflösungen.

Um die Frage zu beantworten, warum es bereits bei so niedrig aufgelösten Frequenzachsen zu konvergenten Ergebnissen kommt, wird der spektrale Strahlungswärmefluss  $q_{R,\nu}$  auf die POM-Wand betrachtet. Dieser ist in Abbildung 4.12 für  $N_\nu = 10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$  des  $25\text{ }\mu\text{m}$ -Netzes dargestellt. Die auf die Wand treffende Strahlung kann auch bei grober Frequenzdiskretisierung noch gut aufgelöst werden. Schmale Spektrallinien können zwar nicht aufgelöst werden, allerdings bleibt die Grobstruktur erhalten, so dass nur sehr geringe Abweichungen im integrierten Strahlungswärmefluss  $q_R$  und dem Strahlungsquellterm  $S_r$  vorkommen. Anhand des Rosseland-Mittels in Gleichung (2.59) wird deutlich, dass die Spektrallinien bei hoher optischer Dichte kaum zum Strahlungstransport beitragen, da die Strahlung schon auf sehr kurzen Skalen absorbiert wird. Mathematisch zeigt sich dies in der Integration über die reziproken Absorptionskoeffizienten. Schmale Spektrallinien, die bei groben spektralen Diskretisierungen nicht genau abgebildet werden können, zeigen daher nur einen kleinen Einfluss auf den Strahlungstransport. Aus diesem Grund können somit in guter Näherung grobe Frequenzdiskretisierungen verwendet werden. Die Rechnung mit  $N_\nu = 10^3$  wird daher als Referenz genutzt, um die vereinfachten Modelle zu bewerten.

#### 4.6.2 Konvergenz der Band- und Gruppenmodelle

Das auf der Mittelung einzelner spektraler Bereiche des Absorptionsspektrums basierende Bandmodell stellt das einfachste der untersuchten Modelle dar. Aus der Literatur ist bekannt, dass mit diesem Modell schon mit relativ wenig Bändern akzeptable Ergebnisse erzielt werden können [Pey+12]. Dieser Sachverhalt wird nachfolgend durch Vergleich mit der Referenzrechnung aus dem vorigen Abschnitt überprüft. Hierzu werden zwei verschiedene Bandgrenzenintervalle betrachtet:

- Ein 6-Bandmodell mit den Intervallen  $[0.001, 0.35, 1.54, 2.65, 2.94, 3.51, 15] \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Diese Bandgrenzen basieren auf den von anderen Autoren verwendeten [Rüm09; Rüt14]. Allerdings sind die Grenzen in dieser Arbeit an den Rändern erweitert, um der breitbandigeren Strahlung zu genügen.
- Ein 18-Bandmodell mit den Intervallen  $[0.067, 0.350, 1.540, 2.114, 2.180, 2.430, 2.563, 2.900, 3.260, 3.350, 3.520, 3.750, 4.200, 5.960, 6.561, 7.048, 7.840, 11.00, 15.00] \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Die Grenzen sind hauptsächlich an Absorptionskanten platziert, um den Mittelungsfehler zu minimieren.

Weiterhin werden  $\kappa$ -Gruppenmodelle mit jeweils 4 und 20 Gruppen betrachtet. Diese sollten durch Reduktion des Mittelungsfehlers prinzipiell zu besseren Ergebnissen führen.

Tabelle 4.4 gibt die Einzelfehler, den Gesamtfehler, die Rechenzeit, sowie das Produkt aus Gesamtfehler und Rechenzeit für alle untersuchten Näherungsverfahren bei einer Netzgröße von  $100 \mu\text{m}$  an. Die Fehler beziehen sich dabei stets auf die mit  $n_\nu = 10^3$  aufgelöste spektrale Rechnung. Hier ergeben sich einige Erkenntnisse:

1. Die größten Fehler entstehen bei der Abbrandmasse, bedingt durch die Proportionalität zum Strahlungsfluss auf die Wand (siehe Abschnitt 2.5.2). Nachgehend folgen die mittlere Temperatur und der mittlere Druck. Die Spannung ist von allen Größen am wenigsten sensibel auf das Strahlungsmodell. Da zur Berechnung des Gesamtfehlers die  $\ell^2$ -Norm verwendet wird, dominiert der Fehler in der Abbrandmasse den Gesamtfehler. Zur vollständigen Bewertung ist daher auch die Betrachtung der Fehler der einzelnen Größen entscheidend.

2. Die Rechnung mit  $n_\nu = 6, n_\kappa = 20, \bar{\kappa} = R$  führt in allen Größen, abgesehen vom Druck, zum niedrigsten Fehler. Auch das Produkt aus Gesamtfehler und Rechenzeit zeigt das beste Ergebnis.
3. Das Rosseland-Mittel zeigt fast überall bessere Ergebnisse als die anderen Mittelungsverfahren. Das Planck-Mittel schneidet meistens schlechter ab. Dies ist konsistent mit der hohen optischen Dichte im Plasma.
4. Nur beim Planck- und Rosseland-Mittel zeigen sich annähernd konsistente Verbesserungen mit höherer Anzahl von  $\kappa$ -Gruppen. Das natürliche Mittel zeigt keine Verbesserung durch mehr  $\kappa$ -Gruppen und verschlechtert sich zum Teil sogar.
5. Die Erhöhung der Anzahl der Bänder führt zu keinem konsistent besseren Ergebnis. Dies deckt sich auch mit der Literatur [NI08] und der Tatsache, dass durch die Spektrallinien auch in schmalen Bändern sehr große Variationen auftreten, die zu ähnlich hohen Mittelungsfehlern führen. Eine Verbesserung ist daher erst bei hochauflösten Bandmodellen zu erwarten, deren Verhalten ähnlich wie das approximative spektrale Modell sein sollte.
6. Der Fehler im Druck zeigt nicht die gleichen Abhängigkeiten wie die anderen Fehler. Die geringsten Abweichungen im Druck ergeben sich bei 18 Bändern und 20  $\kappa$ -Gruppen. Die Verwendung von mehr  $\kappa$ -Gruppen führt zu kleineren Fehlern im Druck.
7. Die Rechenzeiten skalieren näherungsweise mit der Gesamtanzahl der zu lösenden Gleichungen des  $P_1$ -Modells. Dies wird besonders deutlich bei einer hohen Anzahl an zu lösenden Gleichungen, die groß im Vergleich mit den zu lösenden magnetohydrodynamischen Gleichungen ist. Die Abweichungen sind zum Teil auf eine wechselnde Auslastung des Rechners während der Simulationen zurückzuführen. Genauere Rechenzeitangaben würden mehrere Wiederholungen der Simulationen erfordern, was angesichts der hohen Rechenzeiten in dieser Arbeit nicht umzusetzen ist.

$\Delta_x$	$N_\nu$	$N_\kappa$	$\bar{\kappa}$	$\Delta$	$t$	$\Delta_t$	$\Delta U$	$\Delta \bar{T}$	$\Delta T_{\max}$	$\Delta \bar{p}$	$\Delta m$
µm				.100	h	h .100	.100	.100	.100	.100	.100
100	6	1	P	18,27	0,142	2,596	2,234	6,465	3,400	2,671	35,75
100	6	1	N	4,925	0,152	0,746	0,461	1,603	0,850	1,724	9,613
100	6	1	R	4,761	0,156	0,744	0,967	2,298	1,431	2,062	9,027
100	6	4	P	14,88	0,170	2,530	1,793	5,274	2,867	1,866	29,13
100	6	4	N	10,02	0,170	1,707	1,033	3,468	1,861	1,567	19,64
100	6	4	R	3,997	0,193	0,773	0,821	1,974	1,249	1,761	7,549
100	6	20	P	10,70	0,305	3,264	1,285	3,808	2,147	1,501	20,95
100	6	20	N	9,837	0,306	3,008	1,100	3,414	1,872	1,514	19,27
100	6	20	R	1,117	0,322	0,360	0,407	0,793	0,686	1,323	1,755
100	18	1	P	9,561	0,149	1,428	1,211	3,351	1,860	4,240	18,50
100	18	1	N	10,13	0,171	1,731	1,077	3,640	1,961	2,011	19,81
100	18	1	R	4,356	0,178	0,773	0,763	2,005	1,202	2,163	8,261
100	18	4	P	14,28	0,275	3,930	1,845	5,107	2,865	1,838	27,93
100	18	4	N	9,771	0,275	2,688	1,156	3,396	1,974	1,432	19,13
100	18	4	R	5,036	0,284	1,432	0,803	2,213	1,222	1,720	9,678
100	18	20	P	8,616	0,639	5,506	1,145	3,141	1,843	1,107	16,84
100	18	20	N	10,22	0,637	6,506	1,284	3,584	2,058	1,141	20,01
100	18	20	R	3,009	0,646	1,943	0,476	1,345	0,746	1,133	5,766

**Tab. 4.4:** Fehler und Rechenzeiten der Band- und  $\kappa$ -Gruppenmodelle verglichen zur spektral aufgelösten Rechnung mit  $10^3$  Frequenzpunkten bei einer Netzgröße von 100 µm.

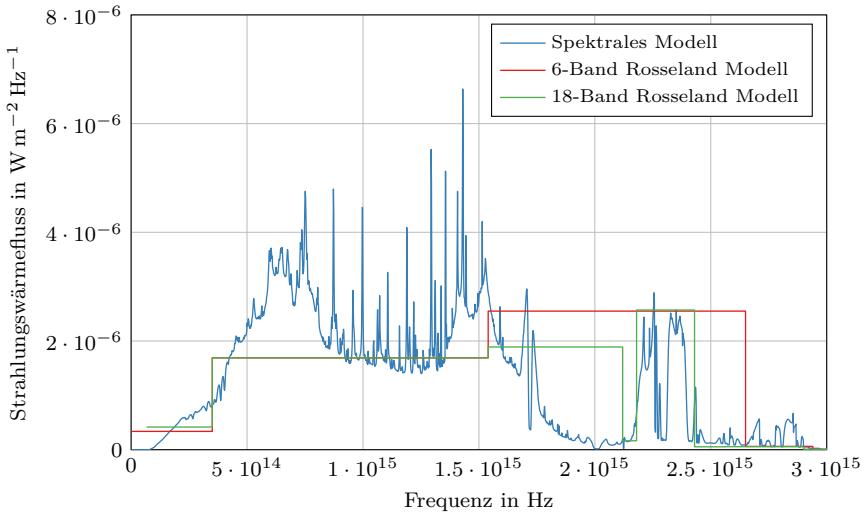
Um die Abhängigkeit von der Netzgröße zu untersuchen, werden die Rechnungen auch an feineren Netzen mit 50 µm und 25 µm durchgeführt. Die feineren Netze ermöglichen eine genauere Abbildung des Temperatur- und Dichteverlaufs an der Wand (siehe Abschnitt 4.5) und können somit andere Ergebnisse zeigen. Die Ergebnisse werden in Tabelle 4.5 präsentiert.

Die Beobachtungen des 100 µm-Netzes lassen sich in vielen Punkten auf das 50 µm-Netz übertragen. Auffällig ist, dass hier nicht das 6-Band, 20- $\kappa$ -Gruppenmodell mit Rosseland-Mittel die besten Ergebnisse zeigt, sondern das 18-Bandmodell mit Rosseland-Mittel einen geringfügig besseren Gesamtfehler liefert. Dies könnte sich dadurch erklären, dass das 18-Bandmodell im UV-Bereich eine bessere Auflösung erzielt (siehe Abbildung 4.13). Der UV-Bereich ist gerade bei der Absorption in kalten Plasmabereichen von größerer Bedeutung. Wie in Abbildung 4.6 zu sehen ist, treten bei dem 100 µm-Netz keine niedrigen Temperaturen auf, so dass das

$\Delta_x$	$N_\nu$	$N_\kappa$	$\bar{\kappa}$		$\Delta$	$t$	$\Delta_t$	$\Delta U$	$\Delta \bar{T}$	$\Delta T_{\max}$	$\Delta \bar{p}$	$\Delta m$
μm					.100	h	h ·100	.100	.100	.100	.100	.100
50	6	1	P	13,32	1,226	16,33	1,565	4,699	2,703	3,525	25,99	
50	6	1	N	9,291	1,326	12,32	0,864	3,124	1,649	3,140	18,13	
50	6	1	R	8,643	1,372	11,86	1,332	3,517	2,118	1,987	16,75	
50	6	4	P	13,93	1,548	21,57	1,526	4,702	2,889	1,649	27,32	
50	6	4	N	12,28	1,538	18,88	1,208	4,056	2,414	2,016	24,09	
50	6	4	R	8,364	1,645	13,76	1,276	3,396	2,027	1,720	16,22	
50	6	20	P	12,71	2,948	37,46	1,415	4,237	2,671	1,433	24,94	
50	6	20	N	12,89	2,905	37,44	1,365	4,231	2,538	2,183	25,29	
50	6	20	R	5,115	3,149	16,11	0,843	2,206	1,441	1,281	9,860	
50	18	1	P	11,25	1,336	15,03	1,147	3,823	1,686	9,099	21,16	
50	18	1	N	11,48	1,395	16,01	1,141	3,909	2,282	2,651	22,46	
50	18	1	R	2,747	1,617	4,442	0,537	1,334	1,071	1,910	5,071	
50	18	4	P	15,59	2,313	36,05	1,860	5,232	3,153	1,990	30,57	
50	18	4	N	11,56	2,329	26,92	1,286	3,745	2,448	1,546	22,68	
50	18	4	R	3,681	2,486	9,150	0,591	1,625	1,144	1,494	7,032	
50	18	20	P	9,814	6,002	58,90	1,235	3,423	2,206	1,038	19,21	
50	18	20	N	12,32	5,952	73,33	1,443	4,040	2,551	1,028	24,19	
50	18	20	R	2,774	6,378	17,69	0,442	1,218	0,908	1,029	5,307	
25	6	1	P	8,351	12,15	101,5	1,037	2,758	1,181	5,951	15,87	
25	6	1	N	16,32	13,00	212,1	1,565	5,107	2,040	6,139	31,88	
25	6	1	R	10,54	13,86	146,1	1,554	3,710	2,224	2,879	20,52	
25	6	4	P	13,00	16,20	210,6	1,309	3,880	2,330	2,659	25,56	
25	6	4	N	14,09	15,68	221,0	1,307	4,319	2,248	3,858	27,63	
25	6	4	R	11,73	17,45	204,8	1,640	4,041	2,280	3,038	22,90	
25	6	20	P	14,54	33,92	493,3	1,449	4,294	2,403	2,344	28,63	
25	6	20	N	15,25	31,37	478,4	1,494	4,614	2,280	4,218	29,92	
25	6	20	R	9,275	35,34	327,8	1,308	3,277	1,802	2,556	18,08	
25	18	1	P	17,45	13,18	230,0	1,693	4,996	1,172	23,35	30,27	
25	18	1	N	16,69	12,94	216,0	1,607	5,097	2,323	5,341	32,69	
25	18	1	R	0,949	16,49	15,65	0,324	0,523	0,635	2,444	0,194	
25	18	4	P	18,60	24,42	454,1	2,008	5,525	2,778	4,117	36,57	
25	18	4	N	15,67	24,11	377,8	1,617	4,623	2,489	3,230	30,82	
25	18	4	R	1,583	27,10	42,90	0,419	0,889	0,794	1,870	2,645	
25	18	20	P	11,74	67,55	793,0	1,392	3,699	1,993	2,084	23,05	
25	18	20	N	15,16	59,98	909,3	1,660	4,521	2,439	2,211	29,84	
25	18	20	R	1,898	65,56	124,4	0,371	0,876	0,629	1,141	3,558	

**Tab. 4.5:** Fehler und Rechenzeiten der Band- und  $\kappa$ -Gruppenmodelle verglichen zur spektral aufgelösten Rechnung mit  $10^3$  Frequenzpunkten bei Netzgrößen von 50 μm und 25 μm.

Verhalten im UV-Bereich hier keinen starken Einfluss haben dürfte. Diese These wird auch dadurch gestützt, dass insbesondere die für optisch dichte Medien geeigneten Rosseland-Mittel bei 18-Bändern die geringsten Fehler im Materialabbrand liefern. In einigen Einzelfehlern zeigt das 6-Band, 20- $\kappa$ -Gruppenmodell dennoch weiterhin bessere Ergebnisse, so dass der Gesamtfehler bei Verwendung der  $\ell^1$ -Norm niedriger wäre.



**Abb. 4.13:** Strahlungswärmefluss auf die POM-Wand bei  $t = 15 \mu\text{s}$  für das  $25 \mu\text{m}$ -Netz für die 6- und 18-Band Rosseland-Modelle sowie das spektral aufgelöste Modell. Im nicht gezeigten Frequenzbereich ist der Strahlungswärmefluss vernachlässigbar klein.

Die Näherungsverfahren verhalten sich auf dem  $25 \mu\text{m}$ -Netz sehr ähnlich im Vergleich zu dem  $50 \mu\text{m}$ -Netz. Der größte Unterschied zeigt sich darin, dass das Planck-Mittel im 6-Bandmodell bessere Ergebnisse liefert als zuvor, während das natürliche und das Rosseland-Mittel schlechter werden. Bei den Rechnungen mit 18 Bändern verschlechtern sich das Planck- und das natürliche Mittel, während das Rosseland-Mittel besser wird. Das 18-Bandmodell mit Rosseland-Mittel zeigt auf dem feineren Netz noch bessere Ergebnisse als auf den größeren Netzen, und weist abgesehen vom Druck die niedrigsten Fehler auf. In Kombination mit der vergleichsweise niedrigen Rechenzeit ist es damit das beste der hier getesteten Näherungsverfahren auf dem  $25 \mu\text{m}$ -Netz.

Da bei graduellen, zur Wand hin feiner werdenden Netzen ein Näherungsverfahren auf unterschiedlichen Zellgrößen angewendet werden muss, kann kein an die jeweilige Zellgröße optimal angepasstes gewählt werden. Vielmehr gilt es, ein Näherungsverfahren zu wählen, welches für verschiedene Zellgrößen möglichst optimale Ergebnisse liefert. Auch für diesen Anwendungsfall scheint das 18-Bandmodell die beste Wahl zu sein. Dies ist dadurch begründet, dass es bei den feineren Netzen zu sehr guten Ergebnissen führt. Ein weiteres Argument ist die Tatsache, dass das Strahlungsmodell bei den kleineren Randzellen, die genutzt werden, um den Temperaturübergang an der Wand richtig abbilden zu können, im UV-Bereich zu besseren Ergebnissen führt. Auch die Rechenzeit ist ein wichtiges Kriterium, da schnellere Näherungsverfahren es erlauben, feinere Netzgrößen zu verwenden und somit die räumliche Präzision zu erhöhen. Die Erhöhung der Rechenzeit um etwa 30 % im Vergleich zu den schnellsten Näherungsverfahren wird damit als gerechtfertigt angesehen.

#### 4.6.3 Vergleich zwischen Netzgröße und Strahlungsmodellen

In Tabelle 4.6 werden die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5 und Abschnitt 4.6 zusammengefasst und miteinander verglichen. Dabei werden hier die jeweils einfachsten Strahlungsmodelle, die jeweils besten Näherungsmodelle und die spektral aufgelösten Rechnungen einer Netzgröße mit der genauesten, spektral aufgelösten Rechnung bei  $\Delta x = 6,25 \mu\text{m}$  miteinander verglichen. Die einfachen 6-Band-Modelle sind sowohl bei den Abweichungen als auch bei der Rechenzeit schlechter als die jeweilige spektral aufgelöste Rechnung mit dem nächstgrößeren Netz, was bedeutet, dass die spektral aufgelöste Rechnung eines groben Netzes der Rechnung eines feineren Netzes mit einfacherem Strahlungsmodell vorzuziehen ist. Die jeweils besten Näherungsmodelle stellen einen Zwischenschritt zwischen den spektral aufgelösten Rechnungen mit gleicher und größerer Netzgröße dar. Wirkliche Vorteile der spektral aufgelösten Rechnung zeigen sich aber nur auf dem  $25 \mu\text{m}$ -Netz, auf den anderen sind die Ergebnisse des besten Näherungsmodells nahezu identisch bei doppelt bis dreimal geringerer Rechenzeit. Wie schon zuvor erwähnt, zeigt die Spannung im Allgemeinen die geringste Abweichung, während die Abbrandmasse meistens den größten Fehler aufweist.

$\Delta_x$ μm	$N_\nu$	$N_\kappa$	$\bar{\kappa}$	$\Delta$ .100	$t$ h	$\Delta_t$ h · 100	$\Delta U$ .100	$\Delta \bar{T}$ .100	$\Delta T_{\max}$ .100	$\Delta \bar{p}$ .100	$\Delta m$ .100
100	6	1	R	24,16	0,156	3,774	2,312	11,26	15,38	13,03	44,48
100	6	20	R	19,41	0,322	6,255	1,807	10,57	14,65	11,23	34,86
100	1000	-	-	18,18	0,908	16,51	1,530	10,24	13,84	10,68	32,51
50	6	1	R	19,66	1,372	26,97	1,869	9,200	9,407	10,62	36,65
50	18	1	R	13,01	1,617	21,03	1,100	8,211	9,519	8,281	22,98
50	1000	-	-	9,998	4,732	47,31	0,603	7,342	8,278	6,934	17,03
25	6	1	P	12,28	12,15	149,3	1,115	5,451	3,061	7,078	23,08
25	18	1	R	4,631	16,49	76,35	0,442	4,727	6,077	4,444	6,016
25	1000	-	-	4,410	31,86	140,5	0,304	4,519	4,748	4,189	6,219
12,5	1000	-	-	2,504	312,2	781,8	0,361	2,006	1,464	2,474	3,969
6,25	-	-	-	-	2735	-	-	-	-	-	-

**Tab. 4.6:** Fehler und Rechenzeiten von Rechnungen mit verschiedenen Zellgrößen und Strahlungsmodellen verglichen zur spektral aufgelösten Rechnung mit  $10^3$  Frequenzpunkten bei einer Netzgröße von  $6,25 \mu\text{m}$ .

#### 4.6.4 Schlussbemerkungen

Die Konvergenz des spektral aufgelösten Modells bei verhältnismäßig grober Frequenzauflösung ermöglicht die nahezu exakte Berechnung des Strahlungstransports in Plasmasimulationen<sup>2</sup>. Der sehr hohe Zeitaufwand rechtfertigt die Nutzung von Näherungsverfahren. Die hier dargestellten Ergebnisse legen für die Simulation dieser und ähnlicher Geometrien bei Netzen mit einer Zellgröße von  $\Delta x = 100 \mu\text{m}$  die Nutzung des 6-Band-, 20- $\kappa$ -Gruppenmodells mit dem Rosseland-Mittel nahe, da es den besten Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenzeit darstellt. Bei feinen Netzen mit einer Zellgröße von  $\Delta x \leq 50 \mu\text{m}$  zeigt das 18-Band Rosseland-Mittel die besten Ergebnisse. Ein früherer Stand der hier dargestellten Ergebnisse wurde in verkürzter Form veröffentlicht [SSK17].

<sup>2</sup>Das P<sub>1</sub>-Modell führt aber dennoch zu Abweichungen im Vergleich zur Strahlungstransportgleichung.

## 4.7 Einfluss der Grenzschichtmodellierung

### 4.7.1 Wärmeleitung in die Polymerwände

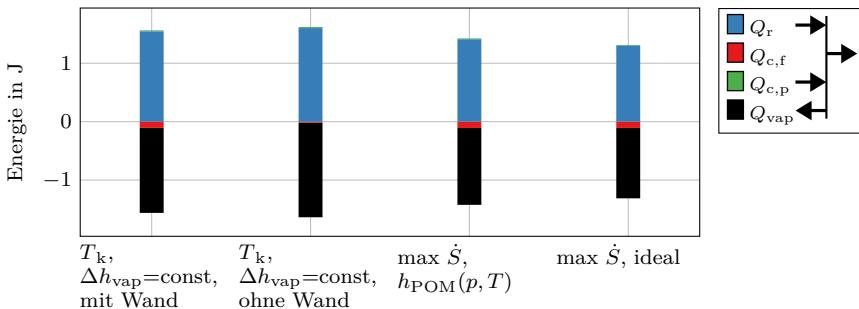
Die Berechnung der Wärmeleitung vom Plasma in die Festkörperwand erfordert die Verwendung eines von der Grenzschicht aus extrudierten Netzes. Diese können gerade bei komplexen Geometrien schwierig zu erstellen sein. Aus diesem Grund wird hier der Einfluss der Wärmeleitung in den Festkörper auf die Wandtemperaturen und das allgemeine Plasmaverhalten untersucht.

Zunächst werden hierfür die über die Zeit integrierten Wärmeströme an der Polymerwand betrachtet. Es werden eine Rechnung mit konstantem  $T_k = 3500\text{ K}$  und mit konstanter Verdampfungsenthalpie  $\Delta h_{\text{vap}} = 1,022 \times 10^6\text{ J kg}^{-1}$  unter Anwendung von Gleichung (2.65) mit einer Rechnung verglichen, die die Wärmeleitung in die Wand vernachlässigt.

Wenn die Abbrandgeschwindigkeit des Polymers schneller als die Wärmeausbreitungsgeschwindigkeit ist, sollte die Wand so gut wie gar nicht durch Wärmeleitung aufgeheizt werden, da das sich erhitzende Material sofort abbrennt. In diesem Fall sollte es möglich sein, die Wärmeleitung in die Wand zu vernachlässigen und als Verdampfungsenthalpie die Enthalpiedifferenz  $\Delta h_{\text{vap}} = h(T_{\text{vap}}) - h(293\text{ K}) = 1,602 \times 10^6\text{ J kg}^{-1}$  zu verwenden, d.h. die Enthalpie, die benötigt wird, um das POM von Raumtemperatur in den verdampften Zustand zu bringen. Dadurch kann auf die Modellierung der Wärmeleitung in der Wand verzichtet werden und es wird eine einfache Randbedingung verwendet, die für Temperaturen unterhalb der Verdampfungstemperatur den Temperaturgradienten auf null setzt und bei höheren Werten die Temperatur auf die Verdampfungstemperatur limitiert. Die Berechnung der Verdampfungsmasse erfolgt analog zu Abschnitt 2.5, wobei  $q_{c,w} = 0$  gilt.

Weiterhin werden zwei Rechnungen betrachtet, die  $T_k$  und  $\Delta h_{\text{vap,eff}}(p)$  durch das Prinzip der maximalen Entropieproduktion berechnen (siehe Gleichung (2.70)) und dabei die Enthalpiefunktion von POM als ideales Gas approximieren sowie die von André publizierte Enthalpiefunktion nutzen (siehe dazu auch Abbildung 2.15).

Die Strahlung wird spektral aufgelöst. Zur Vereinfachung werden die Effekte des Elektrodenabbrands sowie des Magnetfelds vernachlässigt.

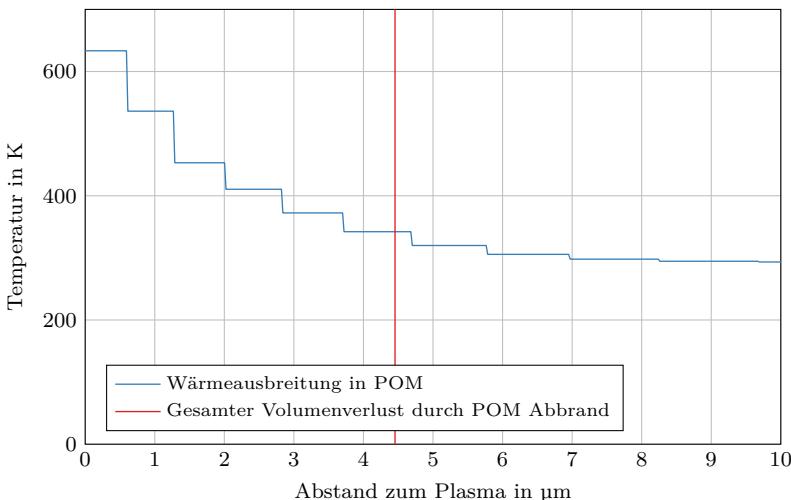


**Abb. 4.14:** Energieaufteilung an der POM-Wand bei verschiedenen Kombinationen von  $T_k$  und  $\Delta h_{\text{vap}}$  (s. Abbildung 2.14 und Abbildung 2.15).

In Abbildung 4.14 werden die integrierten Wärmestrome dargestellt. Der Abbrand der Wand wird fast ausschließlich durch die auf die Wand treffende Strahlung bestimmt. Die Wärmeleitung in die Wand ist nahezu vernachlässigbar, die Wärmeleitung des Plasmas in die Grenzschicht wird gar nicht sichtbar. Die Vernachlässigung der Wärmeleitung in die Wand führt dazu, dass dieser Anteil des Wärmestroms in den Massenabbrand fließt. Die Rechnungen, die das Prinzip der maximalen Entropieproduktionsrate nutzen, zeigen einen etwas kleineren Materialabbrand, wobei die Behandlung von POM als ideales Gas zum geringsten Abbrand führt.

Die Gültigkeit der Vernachlässigung der Wärmeleitung in die Wand wird in Abbildung 4.15 weiter überprüft. Hier wird die Wärmeausbreitung in der Rechnung mit festem  $T_k$  und  $\Delta h_{\text{vap}}$  mit der Tiefe des Materialabbrands verglichen. Am Ende der Simulation ergibt sich eine Temperaturerhöhung im Festkörper mit einer Ausdehnung von etwa  $3 \mu\text{m}$ . Insgesamt brennen jedoch im Mittel auf der Fläche  $4,45 \mu\text{m}$  POM ab. Die Wärmeleitung ist somit signifikant langsamer als die Abbrandrate, was die Annahme eines instantanen Abbrands ohne Wärmetransfer in die Polymerwand rechtfertigt. Da in der Simulation ein statisches Netz verwendet wird und sich die Wand durch den Abbrand nicht in der Form verändert, kann die Vernachlässigung der Wärmeleitung in die Wand eventuell sogar zu besseren Ergebnissen führen, da diese in der Realität geringer als in der hier gezeigten Simulation ausfallen würde und möglicherweise näher an der Rechnung ohne die Wärmeleitung in die Wand liegen könnte. Die Beantwortung dieser Frage erfordert

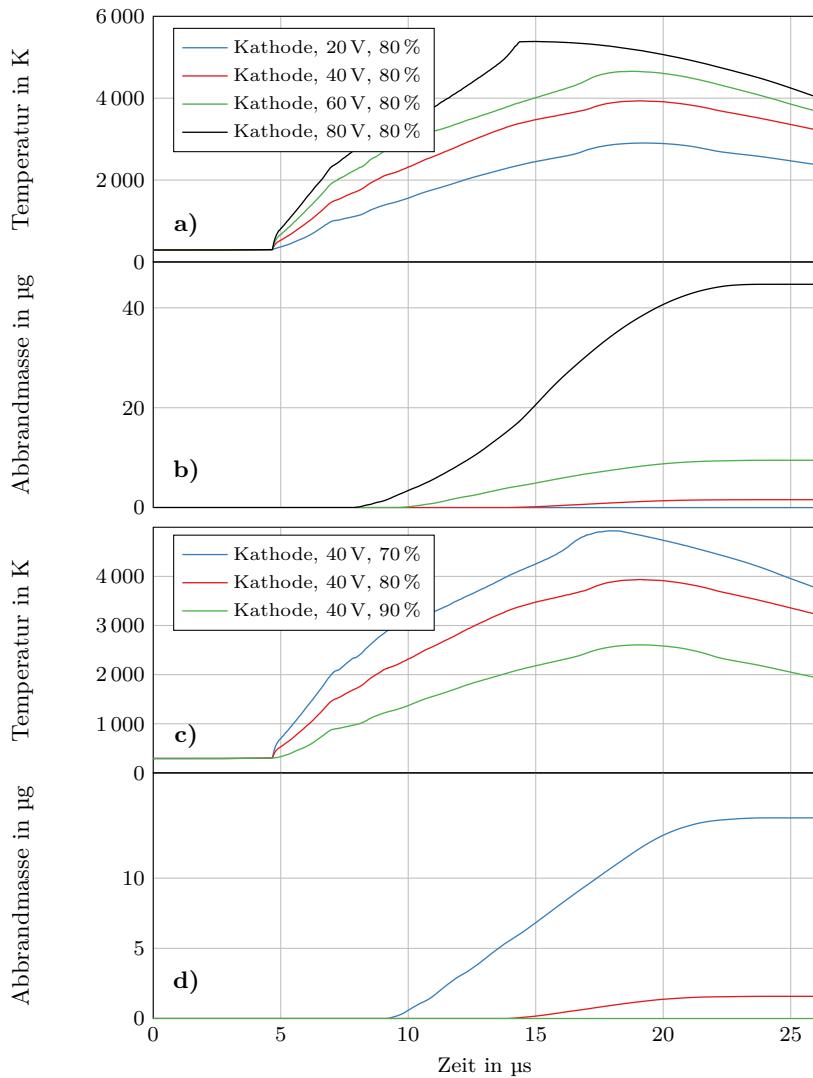
jedoch ein vollständiges Modell, dass die Verformung der Wand durch den Materialabbrand im Netz abbildet. In Experimenten zeigt sich mit zunehmender Impulsbelastung ein leichtes Absinken der Spannung, bedingt durch die Aufweitung des Brennkanals. Die Verformung muss berücksichtigt werden, wenn das Alterungsverhalten untersucht werden soll, bei einzelnen Impulsen ist sie jedenfalls jedoch zu vernachlässigen [Ara+14; Pet+16]. Weiterhin ist noch zu bedenken, dass die Strahlung in der Realität nicht komplett an der Oberfläche absorbiert wird sondern, je nach Wellenlänge, unterschiedlich tief in den Festkörper eindringt. Diese hier nicht berücksichtigte Tatsache führt wahrscheinlich zu einer Temperaturerhöhung in wesentlich tieferen Schichten als die Wärmeleitung dies verursacht.



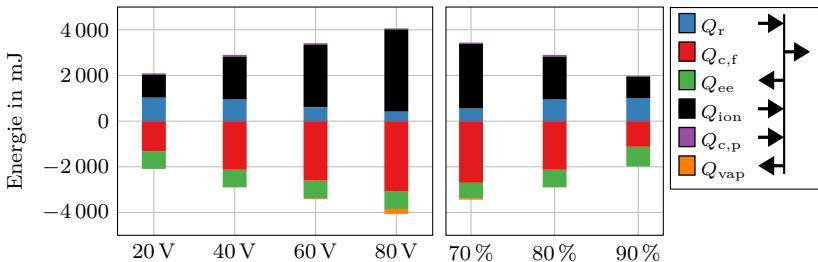
**Abb. 4.15:** Wärmeausbreitung in der Polymerwand und Verschiebung der Grenzfläche zwischen Plasma und Wand durch Polymerabbrand.

### 4.7.2 Elektrodenmodellierung

Um die Auswirkungen der Modelle aus Abschnitt 2.5.3 zur Beschreibung der Effekte an den Grenzschichten der Elektroden bewerten zu können, wird hier der Einfluss der Fallgebietsspannungen sowie der Anteil der Elektronen am Kathodenstrom betrachtet. Hierzu wird das 25 μm-Netz genutzt. Die Strahlung wird spektral mit 1000 Frequenzpunkten aufgelöst.



**Abb. 4.16:** (a) Temperaturrentwicklung und (b) Massenabbrand an der Kathode bei Variation der Kathodenfallgebietsspannung. (c) Temperaturrentwicklung und (d) Massenabbrand an der Kathode bei Variation des Anteils der Elektronen am Kathodenstrom.



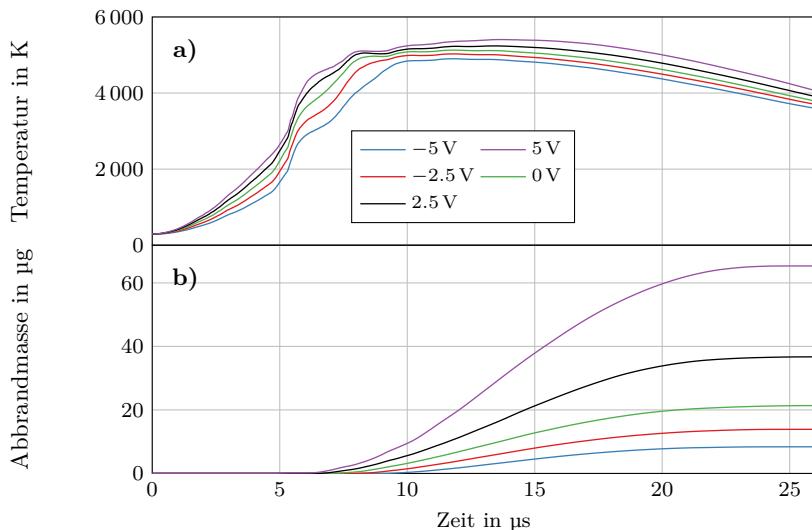
**Abb. 4.17:** Energieaufteilung an der Kathode bei einem Anteil der Elektronen am Gesamtstrom von 80 % für unterschiedliche Fallgebietsspannungen sowie bei einer Fallgebietsspannung von 40 V für unterschiedliche Anteile der Elektronen am Gesamtstrom (siehe Gleichung (2.71) und Abbildung 2.16).

Abbildung 4.16 zeigt die Temperaturentwicklung sowie den Materialabbrand an der Kathode bei Variation der Fallgebietsspannung und des Anteils der Elektronen am Kathodenstrom. Es werden Kathodenfallspannungen bis zu 80 V betrachtet. Wie erwartet nimmt der Materialabbrand mit zunehmender Fallgebietsspannung zu. Der Materialabbrand zeigt dabei eine nichtlineare Abhängigkeit von der Fallgebietsspannung, so dass mit 80 V Fallgebietsspannung signifikant mehr Material abbrennt. An den Temperaturverläufen lässt sich die Begrenzung der maximalen Kathodentemperatur durch den Materialabbrand erkennen. Die Erwärmung der Kathode startet erst später, wenn sich der Lichtbogen zwischen den beiden Hauptelektroden ausbildet und Strom durch die Kathode fließt. Die Variation des Anteils der Elektronen am Kathodenstrom in Gleichung (2.71) führt zu einer zunehmenden Temperatur an der Kathode mit niedrigerem Anteil des Elektronenstroms. Dies ist bedingt durch den niedrigeren Anteil der Elektronenemissionskühlung  $q_{ee}$ .

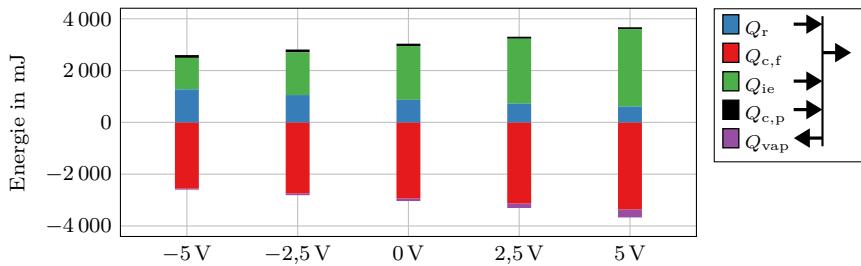
In Abbildung 4.17 werden die in der Grenzschicht der Kathode umgesetzten Energien miteinander verglichen. Hierzu werden die Wärmeströme der Bilanzgleichung 2.71 über die Zeit einer Simulation integriert. Es zeigt sich, dass ein sehr großer Teil der Energie über Wärmeleitung von der Elektrode aufgenommen wird. Die Energie wird nahezu vollständig durch die auftreffende Strahlung und den Term zur Beschreibung der Stöße mit Ionen zugeführt, wobei mit zunehmender Fallgebietsspannung der Term für Ionenbombardement zunimmt und die auftreffende Strahlung abnimmt. Die Wärmeleitung aus dem Plasma in die Grenzschicht ist

im Diagramm nicht erkennbar. Die in den Festkörper eingebrachte Energie wächst mit der in die Grenzschicht eingebrachten Energie, so dass ein großer Teil der eingebrachten Energie von der Elektrode aufgenommen wird. Die Abnahme der Strahlungsenergie mit höherer Fallgebietsspannung ist durch den gleichzeitig auftretenden Materialabbrand erklärbar, der das Plasma vor der Kathode kühlt, so dass dieses mehr Strahlung absorbieren kann. Bei Variation des Anteils der Elektronen am Kathodenstrom können vergleichbare Effekte beobachtet werden, auch hier existiert ein gegensätzliches Verhalten der Terme  $Q_r$  und  $Q_{ion}$ , dass durch den Materialabbrand begründet ist.

In Abbildung 4.18 wird die Temperaturentwicklung und der Massenabbrand an der Anode in Abhängigkeit der Anodenfallgebietsspannung dargestellt. Bei der Anode zeigt sich analog zur Kathode eine stärkere Erwärmung mit zunehmender Fallgebietsspannung. Im Vergleich zur Kathode wird bei der Anode ein stärkerer Massenabbrand beobachtet, welcher bei allen getesteten Fallgebietsspannungen auftritt. Der Materialabbrand wird auch in den abflachenden Temperaturverläufen deutlich.



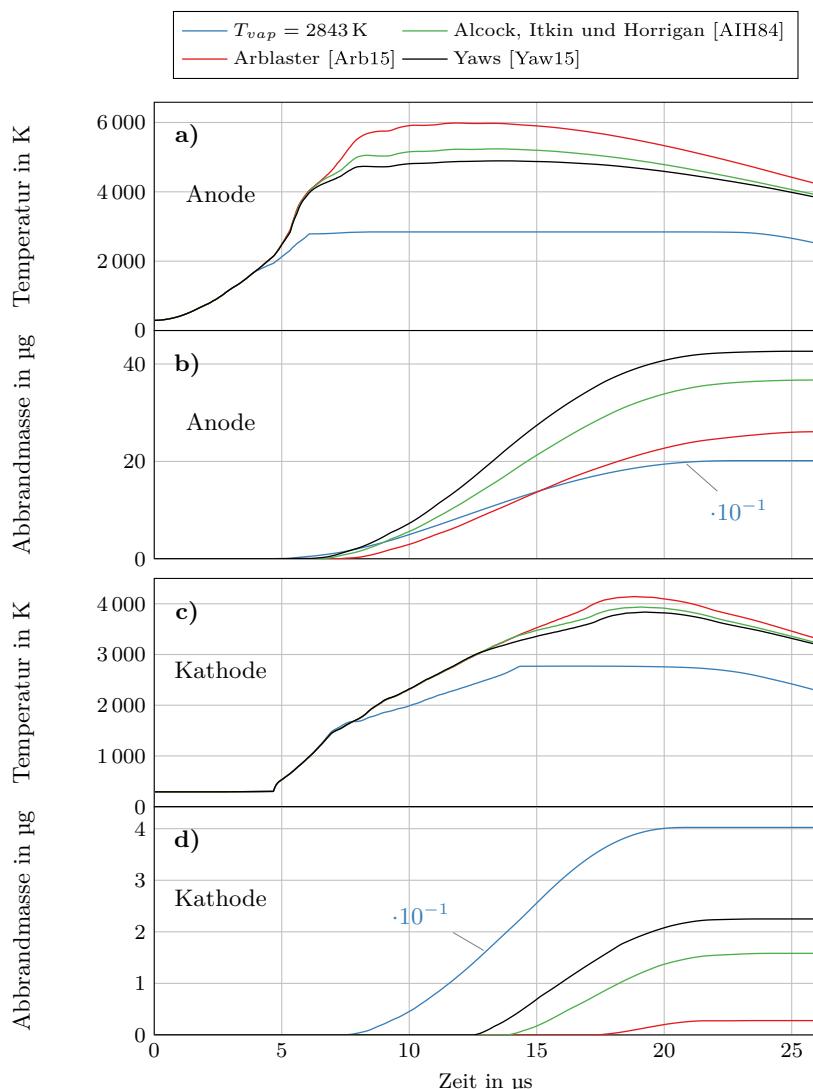
**Abb. 4.18:** (a) Temperaturentwicklung und (b) Massenabbrand an der Anode bei Variation der Anodenfallgebietsspannung.



**Abb. 4.19:** Energieaufteilung an der Anode bei verschiedenen Anodenfallspannungen (siehe Gleichung (2.74)).

In Abbildung 4.19 werden die integrierten Wärmeströme an der Anode in Abhängigkeit der Anodenfallgebietsspannung dargestellt. Der im Vergleich zur Kathode stärkere Materialabbrand ist bedingt durch den Term für Elektroneneinfang und den fehlenden kühlenden Effekt der Elektronenemission. Mit zunehmender Fallgebietsspannung steigt der Term für Elektroneneinfang. Die zusätzliche Energie geht zum größten Teil durch Wärmeleitung in den Festkörper, die Differenz geht in den zunehmenden Materialabbrand. Weiterhin fällt auf, dass bei höherer Fallgebietsspannung weniger Strahlung auf die Anode trifft. Dies ist wie bei der Kathode durch die stärkere Absorption des abbrennenden Anodenmaterials zu begründen, dass die Anode somit zu einem Teil vor der Strahlung abschirmt.

Da es bei den in Abbildung 2.17 gezeigten Dampfdruckkurven sehr große Unsicherheiten gibt, wird dieser Einfluss in Abbildung 4.20 betrachtet. Die Rechnungen wurden mit einer Kathodenfallspannung von 40 V, einem Anteil des Elektronenstroms am Kathodenstrom von 80 % sowie einer Anodenfallspannung von 2,5 V durchgeführt. Wie erwartet, zeigen sich hier sehr große Unterschiede in den Abbrandmassen, wobei diese an der Kathode am größten sind. Das ist dadurch begründet, dass hier nur wenig Energie nach Erreichen der Verdampfungstemperatur in den Massenabbrand geht. Eine Verschiebung der Verdampfungstemperatur führt somit zu einer großen relativen Änderung der für den Massenabbrand aufgewendeten Energie. Im Vergleich dazu zeigt die Rechnung mit einer festen Verdampfungstemperatur von  $T_{\text{vap}} = 2843 \text{ K}$  einen etwa 5-fach höheren Abbrand an der Anode bzw. einen etwa 20-fach höheren Abbrand an der Kathode. Die Temperaturverläufe weisen ein Maximum bei  $T_{\text{vap}}$  auf, sobald die komplette Elektrode auf die Verdampfungstemperatur erhitzt ist.



**Abb. 4.20:** a) Temperaturrentwicklung und b) Massenabbrand an der Anode sowie c) Temperaturrentwicklung und d) Massenabbrand an der Kathode bei Verwendung verschiedener Dampfdruckkurven (siehe Abbildung 2.17).

Der wesentlich höhere Abbrand macht sich in einem bis zu 50 % höheren Druck, einer bis zu 20 % niedrigeren Temperatur und einer bis zu 20 % höheren Spannung bemerkbar, da die zusätzliche Masse zu einer stärkeren Kühlung des Plasmas führt. Diese Werte zeigen eindrucksvoll den großen Einfluss des Metallabbrands an den Elektroden.

Es ist denkbar, dass es in der Realität zu kontrahierten Fußpunkten kommt, bei denen die Wärmeleitung in die Kathode weniger Energie abführen kann und der Materialabbrand so verstärkt würde. Das Modell ist nicht in der Lage, dieses Verhalten wiederzugeben. Die Strahlung muss anders als bei niedrigeren Stromdichten in der Bilanzgleichung berücksichtigt werden[ML93; Ron+09b]. Die Wärmeleitung des Plasmas in die Grenzschicht ist jedoch vernachlässigbar gering.

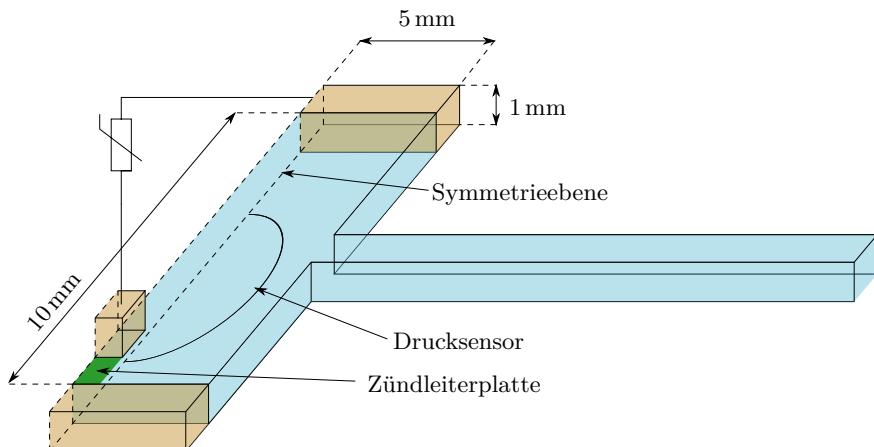
Die Parameter beider Elektroden zeigen einen vergleichsweise großen Einfluss auf die gesamte Simulation. Der Materialabbrand führt zu einem kühlenden Effekt nahe der Elektrode. Es wird erwartet, dass der Einfluss des Metallabbrands durch die Berücksichtigung der Eigenschaften von Kupferplasma zunehmen würde. Der Vergleich mit experimentell bestimmten Abbrandmassen sowie Strukturanalysen der oberflächennahen Elektrodenschichten könnte helfen, die unbekannten Abhängigkeiten in der Dampfdruckkurve genauer zu bestimmen.



## 5 Verifikation anhand einer Modellgeometrie

In diesem Kapitel werden die bisher dargestellten Ergebnisse genutzt, um das Simulationsmodell auf eine für Experimente konstruierte Modellfunkenstrecke anzuwenden und die Ergebnisse mit der experimentellen Arbeit von Runge [Run18] zu vergleichen. Aufgrund der Vielzahl an erforderlichen Approximationen und Extrapolationen in den Materialdaten ist zu erwarten, dass es hierbei zu signifikanten Abweichungen kommen kann. Umso wichtiger ist es daher, diese Abweichungen möglichst gut zu kennen, um die Aussagekraft und die Ergebnisse des Simulationsmodells bewerten zu können. Auch die Aussagen des Modells bei Änderung der Stromstärke sind von Interesse.

### 5.1 Beschreibung der Modellgeometrie



**Abb. 5.1:** Prinzipschaubild der Modellfunkenstrecke mit Darstellung der Elektroden (orange), der Zündleiterplatte (grün) und des Brennraums (blau).

Die Modellfunkenstrecke besteht aus einem quaderförmigen Brennraum, an dessen Enden die Haupteletroden angeordnet sind. Die zwei Ausblaskanäle befinden sich mittig an den quer dazu liegenden Seitenflächen. Die Zündung erfolgt mit Hilfe einer kleinen, an einer der Außenwände gelegenen Zündelektrode, die wie bisher über einen MOV mit der zweiten Haupteletrode verschaltet ist. Damit ähnelt die Modellfunkenstrecke der im vorigen Kapitel betrachteten Funkenstrecke. Die

Zündung und die Ausblaskanäle umfassen hier nicht die gesamte Funkenstrecke, so dass deren Flächen kleiner sind im Vergleich. Aufgrund der Form des Brennraums ist das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen hier deutlich größer und das Plasma wird stärker eingeengt. Die Wände bestehen weiterhin aus POM und es werden Kupfer-Wolfram-Elektroden verwendet.

In der Arbeit von Runge wird eine zeitlich aufgelöste Druckmessung durch einen in der Wand eingebrachten Drucksensor ermöglicht. Zur Vergleichbarkeit wird im Folgenden der zeitliche Druckverlauf in der Simulation als Mittelwert über die entsprechende Randfläche, die der Drucksensor einnimmt, dargestellt. Die weiteren Messgrößen liegen dem Autor zum Zeitpunkt dieser Arbeit nicht in digitaler Form vor und werden daher nicht weiter betrachtet.

Nachfolgend werden ein Elektrodenabstand von 10 mm, eine Kammerbreite von 10 mm, eine Kammerhöhe von 1 mm, ein Ausblaskanalquerschnitt von  $2 \times 1 \text{ mm}^2$  sowie eine Stromamplitude von knapp 5 kA verwendet. Die gemessenen Stromkurven werden für die Simulation geglättet und eingeprägt. Eine Rückwirkung durch eine Änderung der Prüflingsimpedanz auf den nicht-idealen Stoßstromgenerator wird in der Simulation daher nicht berücksichtigt, um die Interpretation der Ergebnisse zu vereinfachen.

Weiterhin wird in diesem Kapitel das Magnetfeld unter Verwendung der Monte-Carlo-Integration mit 25 % der stromtragenden Zellen angewendet. Für die Berechnung der Strahlung wird das Näherungsmodell mit 18 Bändern mit Rosseland-Mittel genutzt, welches im vorherigen Kapitel gute Ergebnisse gezeigt hat. Dies dient primär der Reduktion der Rechenzeiten. Für die Elektrodenmodellierung wird eine Kathodenfallspannung von 40 V mit einem Anteil der Elektronen am Kathodenstrom von 80 % angenommen. Für den Anodenfall wird weiterhin 2,5 V angenommen, außerdem wird die Dampfdruckkurve von Alcock, Itkin und Horrigan [AIH84] verwendet. Das Netz nutzt im Brennraum Zellgrößen zwischen 10 bis 125  $\mu\text{m}$ , wobei in der flachen Richtung, in der das Plasma auf 1 mm eingeengt wird, eine graduelle Verteilung von 10 bis 30  $\mu\text{m}$  genutzt wird, um in der Nähe der Wand eine genauere Rechnung zu ermöglichen.

## 5.2 Ergebnisse

In Abbildung 5.2 werden die simulierten Ergebnisse mit den experimentellen Messungen verglichen. Die Rechnung wird bis  $60\text{ }\mu\text{s}$  durchgeführt, um das Abklingen des Druckverlaufs mit der Messung vergleichen zu können.

Zunächst werden die Spannungskurven diskutiert. Hier ist zu beachten, dass in der Simulation keine Induktionsspannungen berücksichtigt werden. Zum besseren Vergleich werden diese daher aus der Messung herausgerechnet und im Folgenden der Spannungsverlauf ohne Induktionsspannung weiterverwendet. Es ist davon auszugehen, dass die Induktivität des Zündkreises signifikant höher ist als die der Hauptfunkenstrecke, da die Leitungslängen aufgrund der Geometrie länger sein müssen. Die Induktivität der Hauptfunkenstrecke kann bestimmt werden, indem die Induktionsspannung mit einem Kurzschlussprüfling, bei dem der Brennraum durch einen Kupferblock ersetzt wird, gemessen wird. Hierbei ergibt sich  $L = 0,03\text{ }\mu\text{H}$ . Die Induktivität im Zündkreis muss durch den Vergleich mit der Kennlinie des MOVs abgeschätzt werden. Hier sollten sich ähnliche Kurvenformen in Simulation und Experiment ergeben, da die Spannung nach Abzug der Induktionsspannung hauptsächlich am MOV abfällt. Somit ergibt sich eine Induktivität von etwa  $L_{\text{Zünd}} = 0,2\text{ }\mu\text{H}$ . Die korrigierte Spannungskurve wird ebenfalls in Abbildung 5.2 dargestellt. Die niedrigere Spannung erklärt sich zum Teil durch Toleranzen und zum Teil dadurch, dass der MOV in Experimenten schon länger verwendet wurde und Alterungseffekten unterliegt, während in der Simulation die Kennlinie aus dem Datenblatt des Herstellers stammt [Epc18b]. Auch ein Unterschied in der Brennspannung des Plasmas zwischen Haupt- und Zündelektrode ist denkbar, dieser ist aus den vorliegenden Kurven nicht isolierbar.

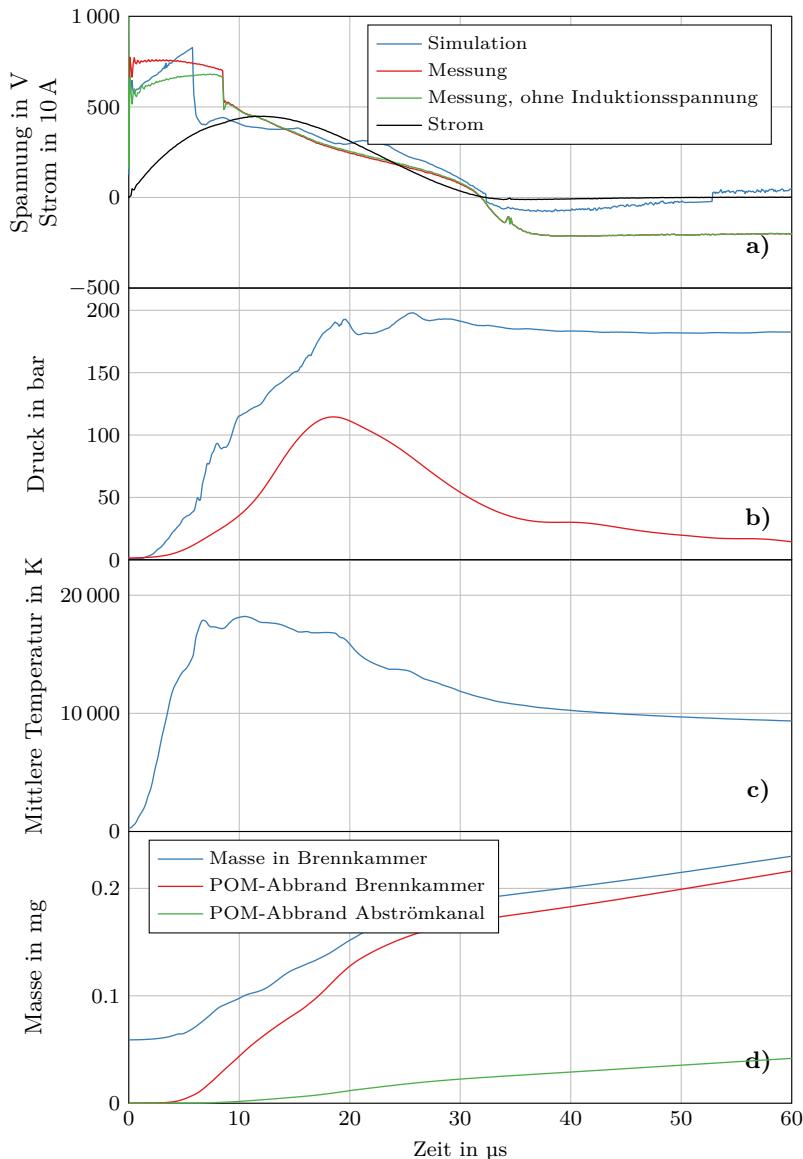
Die hohe Induktivität im Zündkreis führt dazu, dass der Strom durch den Zündkreis nicht sofort absinken kann. Strommessungen im Zündkreis an vergleichbaren Prüflingen ergeben Abschaltzeiten des Zündkreises von einigen  $\mu\text{s}$ . Dieser Effekt trägt somit auch dazu bei, dass die Spannung direkt nach der Zündung noch vergleichsweise hoch ist. Da bei der Korrektur der Induktionsspannung ein sprunghafte Umschalten der Strompfade angenommen wird, kann dieser Effekt in der induktionsbereinigten Kurve nicht kompensiert werden. Der Spannungsverlauf vor der Zündung zeigt, dass auch später noch ein Teil des Stroms über den MOV fließen könnte. Die genaue Stromaufteilung ist unklar, es ist aber zu erwarten, dass

sich mit einem höher bemessenen MOV Unterschiede in den Spannungsverläufen des Experiments ergeben würden. Dadurch ergibt sich im Experiment direkt nach der Zündung ein geringerer Energieeintrag im Plasma.

Die Simulation sagt mit  $6\text{ }\mu\text{s}$  eine signifikant schnellere Zündung vorher als die Messung mit  $8,5\text{ }\mu\text{s}$ . Bei Vernachlässigung des in Abschnitt 3.5 vorgestellten Durchschlagmodells ergibt sich eine Zündzeit von etwa  $6,5\text{ }\mu\text{s}$ , da dann der zuvor beschriebene Effekt auftritt, dass eine kalte Gasschicht vor der Elektrode die Kontaktierung zwischen dem leitfähigen Plasma und der Elektrode behindert.

Im weiteren Verlauf fällt die Spannung im Experiment kontinuierlich bis zum Ende des Impulses ab, während die Simulation stärkere Schwankungen aufweist, welche durch einen zunächst nur punktuellen Ansatz des Lichtbogens an der zweiten Hauptelektrode und damit verbundene Turbulenzen erklärt werden können. Die Spannungskurve der Simulation bleibt im Vergleich länger erhöht. Dies deutet auf einen zu starken Materialabbrand in der Simulation hin, wodurch die Leitfähigkeit reduziert wird und die Spannung hoch bleibt. Die Sprünge in der Spannung an den Stromnulldurchgängen erklären sich durch das Fußpunktmodell, dass in der Simulation eine konstante Spannung von  $40\text{ V}$  annimmt, während es in der Realität einen graduellen Übergang gibt. Zum Ende hin zeigt die experimentelle Spannungskurve eine konstante negative Spannung, obwohl kein Strom mehr fließt. Dies ist durch den Aufbau des verwendeten Impulsgenerators bedingt, welcher noch eine Restladung enthält, die nicht mehr über die wiederverfestigte Funkenstrecke abgebaut werden kann. Für die Berücksichtigung dieses Effekts müsste der Schaltkreis des Generators mitberechnet werden. Außerdem ist es sehr wahrscheinlich, dass die Simulation kein korrektes Wiederverfestigungsverhalten zeigen kann, da die Modellierung der Fallgebiete hierfür zu ungenau ist.

Im Druckverlauf sind mehrere Abweichungen erkennbar: Zunächst fällt auf, dass der Druck im Maximum etwa 1,5-mal so hoch ist wie in der Messung. Dies ist ebenfalls zum Teil auf einen zu hohen Materialabbrand zurückzuführen und wird nachfolgend noch genauer untersucht. Zu Beginn der Simulation steigt der Druck wesentlich schneller als in der Messung. Dies ist möglicherweise darauf zurückzuführen, dass Turbulenzen in der Simulation nicht berücksichtigt werden. Die Verwirbelungen führen zu höherer Viskosität, die die Ausbreitung des Plasmas verlangsamt, so dass der höhere Druck am Sensor später gemessen wird. Die-



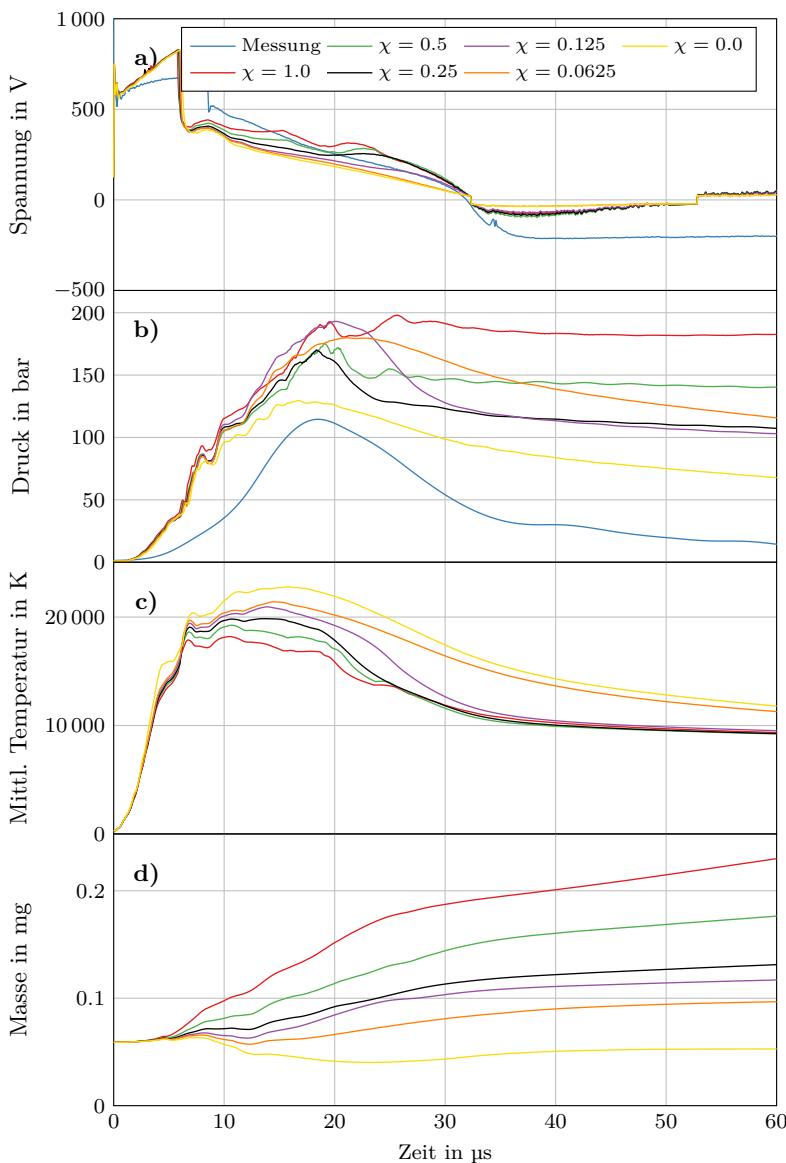
**Abb. 5.2:** a) Spannungsverlauf b) Druckverlauf im Vergleich zwischen Simulation und Experiment[Run18] sowie c) mittlere Temperatur und d) Masse in der Brennkammer sowie POM Abbrandmassen in der Simulation

se Erklärung passt auch zu den Unterschieden in der Zündgeschwindigkeit. Der Drucksensor wird im experimentellen Aufbau mit einer Silikonschicht geschützt. Diese könnte möglicherweise auch zu einer Verzögerung des Druckverlaufs führen.

Der Druck fällt ab dem Ende des Impulses nur noch sehr langsam ab. Dies deutet darauf hin, dass das Plasma in der Realität schneller abkühlt als in der Simulation. Auch eine erhöhte Abströmung des Plasmas im Experiment könnte zu diesem Effekt beitragen. Da der Anteil der abbrennenden Materialien im Plasma während der Simulation stark zunimmt, macht sich der nicht berücksichtigte Einfluss der Plasmaeigenschaften von POM und Kupfer am Ende stärker bemerkbar. Nach  $60\mu\text{s}$  liegt der POM-Massenanteil in der Brennkammer bei 94 %, was zu entsprechenden Modellierungsfehlern führt. Die in Abbildung 5.2 gezeigte Gesamtmasse verdeutlicht, dass gegen Ende des Impulses weiterhin mehr Material abbrennt als abströmt, so dass der Druck stabilisiert wird. Nur 20 % der gesamten Masse, d.h. Luftmasse plus die Masse des abbrennenden POMs, sind zu diesem Zeitpunkt abgeströmt. Zu dieser Zeit liegt die mittlere Temperatur bei etwa  $1 \times 10^4\text{ K}$ , so dass weiterer Materialabbrand zur Reduktion der mittleren Energie im Plasma, und somit auch zur Temperatur führen würde. Wie zu sehen ist, bleibt die Temperatur jedoch relativ stabil. Dies legt den Schluss nahe, dass es hier zu Fehlern in der Berechnung des Strahlungstransports oder der Wärmeleitung kommt, so dass zu wenig Energie aus dem Plasma abgeführt wird. Der Wärmetransport gewinnt bei derart niedrigen Temperaturen an Bedeutung im Vergleich zum Strahlungstransport, so dass die Vernachlässigung der Turbulenz hier auch ursächlich sein kann, da diese zu einer Erhöhung der effektiven Wärmeleitung führt.

### 5.3 Reduzierter Strahlungsfaktor

Die zuvor beobachteten Abweichungen in der Druckamplitude deuten auf einen zu starken Materialabbrand hin. Physikalisch ist es denkbar, dass nur ein Teil  $\chi$  der abgeführten Leistung direkt zum Materialabbrand beiträgt. Dies ist dadurch zu begründen, dass die Strahlung nicht vollständig an der Oberfläche des Polymers absorbiert wird, sondern auch in den Festkörper eindringt und in tieferen Schichten absorbiert wird (siehe Abschnitt 2.5.2). Daher werden in Abbildung 5.3 Rechnungen gezeigt, bei denen nur ein Bruchteil der auf die Wand einfallenden



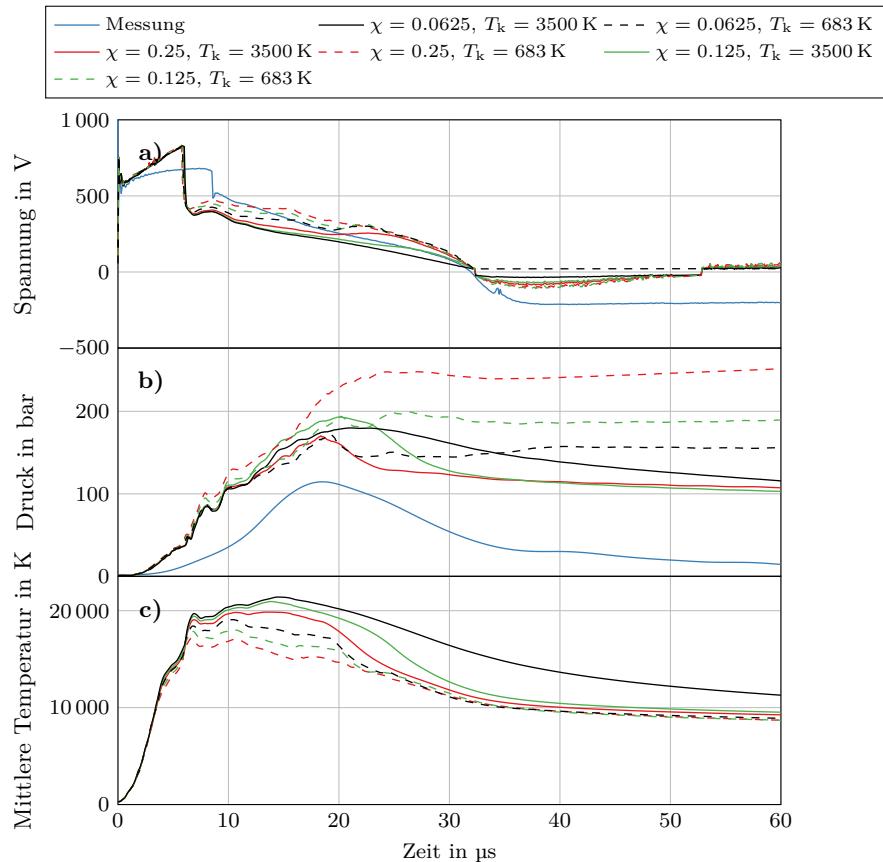
**Abb. 5.3:** a) Spannungsverlauf, b) Druckverlauf, c) Temperaturverlauf und d) Masse in der Brennkammer im Vergleich zwischen Simulation und Experiment[Run18], wobei der Anteil  $\chi$  der Strahlungsleistung für den Polymerabbrand in der Simulation variiert wird.

Leistung für den Materialabbrand verwendet wird. Die verbleibende Leistung wird verworfen, da das Simulationsmodell zum Zeitpunkt der Arbeit nicht in der Lage ist, den Strahlungstransport im Festkörper zu berechnen. Die Ergebnisse sind daher nur als eine Approximation zu verstehen. Mit zunehmender Simulationsdauer erhöht sich der Fehler dieses Ansatzes, da die Temperatur in tieferen Materialschichten ansteigt und es hier zur thermischen Zersetzung kommen kann. Die Zeitspanne kann über die Eindringtiefe der Strahlung abgeschätzt werden, da diese aber nicht bekannt ist, wird hier darauf verzichtet.

Mit abnehmendem Anteil der Strahlung am Verdampfungsprozess sinken die Spannung und zu einem geringen Anteil auch der Druck, wobei keine eindeutige Proportionalität im Kurvenverlauf ausgemacht werden kann. Da sich das abbrennende Material im Brennraum ansammelt, nehmen die Unterschiede der Rechnungen mit verschiedenen Abbrandfaktoren mit der Zeit zu. Quantitativ bildet die Rechnung ohne Materialabbrand den maximalen Druck am besten ab, während die Form des Druckverlaufs am besten durch die Kurve mit einem Faktor von  $\chi = 0.125$  wiedergegeben wird. Dennoch zeigen alle Rechnungen einen zu hohen Druck, was deutlich macht, dass noch weitere Faktoren verantwortlich sein müssen. Daraus folgt, dass die Rechnung ohne Materialabbrand nicht die Rechnung sein muss, die den Materialabbrand am besten berücksichtigt. Die Spannungskurven zeigen weniger Fluktuationen bei geringerem Materialabbrand, was auf einen gleichmäßigeren Ansatz des Lichtbogens an der zweiten Hauptelektrode zurückzuführen ist.

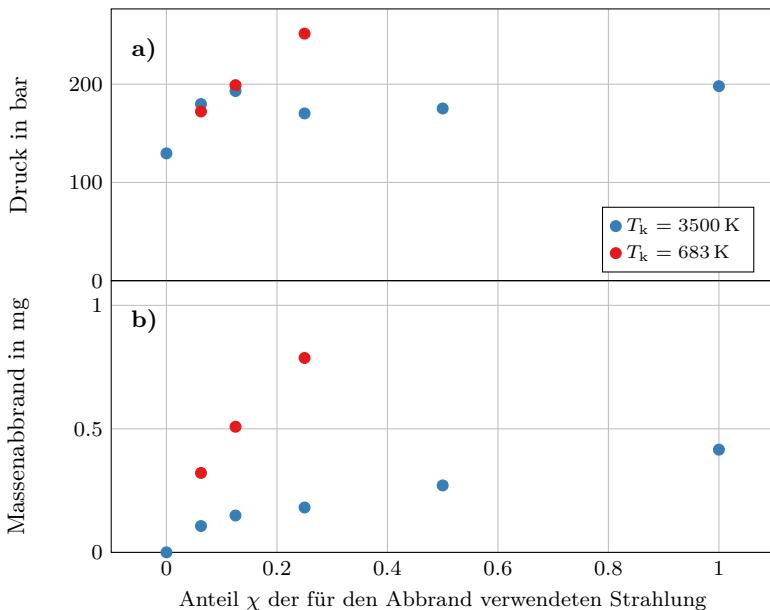
## 5.4 Einfluss der Eindringtemperatur

In Abschnitt 2.5.2 und Abschnitt 4.7.1 wurde bereits der Einfluss der Temperatur  $T_k$ , mit der das abbrennende Material in das Plasma eintritt, untersucht. Da der Wert  $T_k = 3500\text{ K}$  auf der Grundlagen von Veröffentlichungen bezüglich anderer Materialien gewählt wurde wird der Einfluss dieses Parameters genauer betrachtet. Mit höherem  $T_k$  wird mehr Energie für den Massenabbrand benötigt, so dass weniger Masse abbrennt. Außerdem verringert sich die Kühlwirkung zusätzlich, da das abbrennende Material mit höherer Temperatur in das Plasma eintritt. Die Auswirkungen werden bei Werten von  $T_k = 3500\text{ K}$  und  $T_k = 683\text{ K}$  (also gleich der Verdampfungstemperatur) in Abbildung 5.4 miteinander verglichen.



**Abb. 5.4:** a) Spannungsverlauf und b) Druckverlauf im Vergleich zwischen Simulation und Experiment[Run18] sowie c) simulierte mittlere Temperatur, wobei in den Simulationen unterschiedliche Anteile  $\chi$  der Strahlungsleistung für den Materialabbrand sowie unterschiedliche Eintrittstemperaturen  $T_k$  des Materialabbrands verwendet werden.

Hier zeigt sich, dass die Rechnungen mit niedrigerem  $T_k$  höhere Spannungen aufweisen, da bei diesen das Plasma aufgrund des höheren Massenabbrands stärker gekühlt wird und dadurch schlechter leitet. Im Druck zeigt sich keine eindeutige Proportionalität, jedoch fällt bei niedrigem  $T_k$  der Druck am Ende fast gar nicht ab. Einen genaueren Einblick liefert der Vergleich der maximalen Drücke sowie der Abbrandmassen, welche in Abbildung 5.5 dargestellt werden.



**Abb. 5.5:** a) Maximaler Druck und b) Massenabbrand in Abhängigkeit des Anteils  $\chi$  der Strahlungsleistung für den Polymerabbrand für zwei verschiedene Plasmaeintrittstemperaturen  $T_k$  des abbrennenden Materials.

Sowohl für den maximalen Druck als auch für den Materialabbrand lassen sich lineare Zusammenhänge erkennen, wobei es bei  $\chi = 0.125$  und  $\chi = 0.25$  zu Ausreißern kommt, deren Ursache unklar ist. Die Rechnung ohne Materialabbrand ist für beide Werte der Eintrittstemperatur gültig. Bei niedriger Eintrittstemperatur ergibt sich ein wesentlich steilerer Zusammenhang, da hier, wie schon erwähnt, pro Energie mehr Masse abbrennen kann und der stärkere Abbrand zu einer stärkeren Kühlrate, dadurch bedingt einer schlechteren Leitfähigkeit und höherem Energieeintrag und somit zu einem insgesamt höheren Druck führt. Insgesamt scheinen

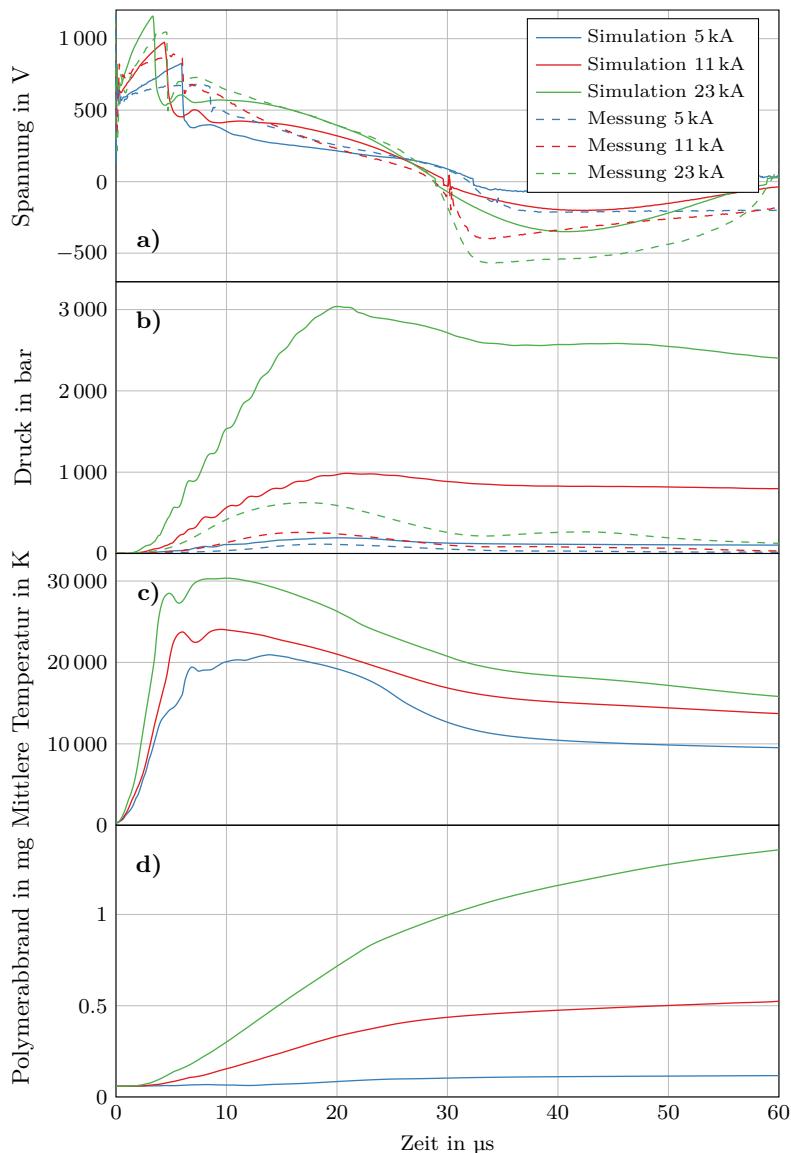
die Rechnungen mit  $T_k = 3500\text{ K}$  besser zu der Messung zu passen.

## 5.5 Höhere Amplituden

Zuvor wurde bewusst mit einer geringen Amplitude gerechnet, damit die Materialdaten möglichst wenig extrapoliert werden müssen. Um die Fehler durch die Extrapolation bewerten zu können, werden Simulationen mit Stromamplituden von  $I = 5\text{ kA}$ ,  $11\text{ kA}$  und  $23\text{ kA}$  mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Exemplarisch werden in Abbildung 5.6 Rechnungen mit einem Strahlungsfaktor von 0.125 dargestellt. Die Induktionsspannung wird wie zuvor zur besseren Vergleichbarkeit korrigiert. Zunächst ist festzustellen, dass die Abweichungen im Druck zwischen Experiment und Simulation mit zunehmender Amplitude zunehmen, während die Spannungskurven bei allen Amplituden vergleichbare Abweichungen zeigen. Dies ist auf die zuvor schon erwähnte Unsensitivität der Spannung gegenüber Druck- und Temperaturschwankungen zurückzuführen, so dass andere Größen wie Druck und Temperatur aus theoretischer Sicht bessere Validierungsgrößen darstellen. Die Messung dieser Größen ist aus experimenteller Sicht allerdings deutlich schwieriger.

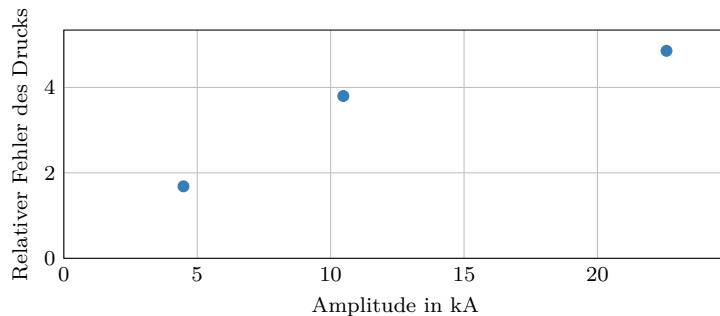
In den Spannungskurven zeigt sich bei allen Amplituden eine zu geringe Zündzeit sowie eine zu geringe Spannung nach der Zündung. Gegen Ende des positiven Impulses ergeben sich, abgesehen von  $11\text{ kA}$ , tendenziell bessere Übereinstimmungen. Nach dem Nulldurchgang gibt es in den Experimenten einen steileren Spannungsanstieg, der auf eine stärkere Wiederverfestigung hindeutet.

Beim Druck zeigt sich neben den zu hohen Amplituden wie zuvor schon eine zu schnelle Zunahme zu Beginn des Impulses. Die größeren Abweichungen mit zunehmender Amplitude werden in Abbildung 5.7 dargestellt und sind primär auf den auftretenden Wertebereich von Druck und Temperatur zurückzuführen, in dem die Materialdaten aufgrund von Extrapolationen und den in Kapitel 2 beschriebenen Näherungen ungenauer werden. Insbesondere bei hohen Drücken sind Fehler zu erwarten, da Effekte wie Mehrteilchenstöße oder die Stark-Verbreiterung bei der Berechnung der Materialdaten vernachlässigt werden.



**Abb. 5.6:** a) Spannungsverlauf, b) Druckverlauf im Vergleich zwischen Simulation und Experiment[Run18] sowie c) mittlere Temperatur und d) Masse in der Brennkammer der Simulationen mit einem Strahlungsfaktor von  $\chi = 0.125$ .

Bei den höheren Amplituden lässt sich wie zuvor bei 5 kA beobachten, dass die Druckverläufe gegen Ende nicht stark genug abfallen, was auch an den abflachen- den Temperatur- und Massenkurven deutlich wird. Es ist zu vermuten, dass es hier zu Fehlern in der Berechnung des Strahlungs transports oder des Material- abbrands kommt. Weiterhin kann postuliert werden, dass die Modellierungsfehler unterhalb einer Temperatur von etwa 15 000 K auftreten. Es ist unklar, ob es zu Beginn zu ähnlichen Fehlern in der Modellierung kommt, oder ob diese durch die Verunreinigung des Plasmas mit POM und Kupfer entstehen.



**Abb. 5.7:** Relative Fehler des maximalen Drucks in der Simulation im Vergleich zu den gemessenen Druckamplituden in Abhängigkeit der Stromamplitude.

## 5.6 Schlussbemerkungen

Im Vergleich mit experimentellen Daten zeigen sich qualitative Übereinstimmun- gen, jedoch signifikant höhere Drücke. Die Kühlrate gegen Ende der positiven Halbwelle des Impulses ist in der Simulation zu niedrig, was dazu führt, dass der Druck und die Temperatur gegen Ende nicht stark genug abfallen. Prinzipiell kommen mehrere Ursachen in Betracht, wie die Vernachlässigung des Einflusses von zersetzttem POM und Kupfer auf die Plasmaeigenschaften, der Unsicherheit in der Berechnung der Absorptionskoeffizienten, Modellierungsfehler im Materi- alabbrand oder die Vernachlässigung von Turbulenz. Die Ursachen werden sich nur durch eine Erweiterung des Modells um diese Aspekte genauer untersuchen lassen, was jedoch nicht mehr im Fokus dieser Arbeit steht.



## 6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Simulationsmodell für thermische Plasmen entwickelt, das insbesondere für die Anwendung bei auf Funkenstrecken basierenden Überspannungsableitern ausgelegt ist. Hierzu werden zunächst die physikalischen Grundlagen und die Modellbeschreibung ausführlich erläutert. Ein Fokus liegt dabei auf der Hervorhebung und Analyse der Unterschiede, die sich aufgrund der höheren Stromdichte im Vergleich zu anderen Anwendungsgebieten von thermischen Plasmen ergeben. Viele der üblicherweise verwendeten Näherungen sind hier nur noch bedingt tragfähig. Ein großer Teil der Arbeit besteht in der Analyse der Konvergenzeigenschaften des Modells sowie der Genauigkeit der beim Strahlungstransport und bei der Berechnung des Magnetfelds verwendeten Näherungen. Es zeigt sich, dass numerische Konvergenz erst mit sehr kleinen Netzen erreichbar ist, die aufgrund der dafür erforderlichen Rechenzeit nicht praktikabel sind. Bei der Untersuchung des Strahlungstransports wird gezeigt, dass eine spektral aufgelöste Strahlungsmodellierung in dem hier betrachteten Wertebereich schon mit vergleichsweise wenigen Stützstellen konvergiert. Die Genauigkeit der Näherungsmethoden wird untersucht, um ein Optimum aus Genauigkeit und Rechenzeit zu finden.

Um die Genauigkeit des Modells zu bewerten, werden vergleichende Rechnungen zu experimentell ermittelten Daten durchgeführt und gegenübergestellt. Hier lassen sich qualitative Übereinstimmungen erzielen, es kommt aber zu einem stark erhöhten Druck in der Simulation. Bei höheren Amplituden steigen die Abweichungen, da die getroffenen Näherungen hier zu größeren Fehlern führen.

Das entwickelte Modell ist prinzipiell zur Simulation von thermischen Plasmen in Funkenstrecken geeignet. Um jedoch über qualitativ vergleichbare Ergebnisse hinaus zu kommen, sind noch viele Frage zu klären. Hierzu ist es absehbar, dass das Modell an diversen Stellen erweitert werden muss, um bisher vernachlässigte Effekte zu berücksichtigen.

Ein großer Fehler entsteht durch die Annahme, dass das Plasma nur aus Luft besteht und nicht durch zersetzes POM und Kupfer aus den Elektroden verunreinigt wird. Dadurch ergeben sich starke Abweichungen in den Eigenschaften des Plasmas. Prinzipiell können die Einflüsse dieser Stoffe in der Berechnung der Plas-

maeigenschaften berücksichtigt werden, hierfür müssen allerdings entsprechende Datenbanken und Programme zur Verfügung stehen, was während dieser Arbeit nicht der Fall war. Eine Alternative ist die Verwendung von Mischungsregeln, um aus den Materialeigenschaften von reinen Luft-, POM- und Kupferplasmen die Eigenschaften von Mischungen abzuschätzen[GGF05]. Die Materialdaten der reinen Plasmen sind zum Teil publiziert [RB89; Kov85; And96; And97; And+02; And+04; OTU12] und können interpoliert werden. Diese pragmatische Lösung ist allerdings mit höheren Fehlern verbunden. Eine große Unsicherheit stellt sich auch bei der Berechnung der Absorptionskoeffizienten und des Strahlungstransports. Hier könnte eine Erweiterung um die Absorptionsspektren der verunreinigten Plasmen ebenfalls hilfreich sein, gerade in Bezug auf Kupfer im Plasma.

Dem Materialabbrand kommt in der Modellierung eine hohe Bedeutung zu, da hierdurch das Plasma gekühlt wird und mehr Material eingebracht wird. Gerade wenn die Änderungen der Plasmaeigenschaften durch die Verunreinigungen berücksichtigt werden können, sollte das Abbrandverhalten selbst genauer untersucht werden. Aus der Literatur sind genauere Modelle bekannt, die z.B. die Ein dringtiefe sowie die Frequenzabhängigkeit der Strahlung beim Materialabbrand berücksichtigen[Nos+07]. Bei der Fußpunktmodellierung stellen sich ebenfalls viele Fragen, insbesondere in Bezug auf das Verdampfungsverhalten, die Größe der Fußpunkte sowie die Fallgebietsspannung. Die Wanderung der Fußpunkte ist hier im Gegensatz zu anderen Anwendungsfällen nicht so entscheidend, da hauptsächlich eingeengte Lichtbögen ohne Fußpunktwanderung modelliert werden.

Weiterhin ist es denkbar, die magnetische Advektion, d.h. die Bindung der Magnetfeldlinien an die Strömung des Plasmas, sowie Turbulenzen zu berücksichtigen.

Bezogen auf die Anwendbarkeit des Modells ist auch eine Verknüpfung mit einem Schaltkreissimulator wünschenswert, um beliebige Zündschaltungen modellieren zu können.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Simulationsmodell für qualitative Prognosen des Plasmaverhaltens in Überspannungsableitern bei kleinen Stoßstromamplituden geeignet ist, jedoch größere Abweichungen im Druck und bei höheren Amplituden produziert. Zukünftige Weiterentwicklungen bieten sich insbesondere bei den Materialeigenschaften und bei der Plasma-Wand-Interaktion an.

## Literaturverzeichnis

- [ABC10] V. Aubrecht, M. Bartlova und O. Coufal. „Radiative emission from air thermal plasmas with vapour of Cu or W“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 43.43 (3. Nov. 2010), S. 434007.
- [AIH84] C. B. Alcock, V. P. Itkin und M. K. Horrigan. „Vapour Pressure Equations for the Metallic Elements: 298–2500K“. In: *Canadian Metallurgical Quarterly* 23.3 (1. Juli 1984), S. 309–313.
- [Ait+09] S. Ait-Amar et al. „Arc Extinguishing Method of SPD Type 1“. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 16.3 (2009), S. 711–717.
- [And+02] P. André et al. „Composition, pressure and thermodynamic properties calculated in plasma formed in insulator vapours of PC and POM at fixed volume“. In: *The European Physical Journal - Applied Physics* 17.1 (Jan. 2002), S. 53–64.
- [And+04] P. André et al. „Transport coefficients of plasmas consisting of insulator vapours: Application to PE, POM, PMMA PA66 and PC“. In: *The European Physical Journal Applied Physics* 25.3 (März 2004), S. 169–182.
- [And96] P. André. „Composition and thermodynamic properties of ablated vapours of PMMA, PA6-6, PETP, POM and PE“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 29.7 (1996), S. 1963.
- [And97] P. André. „The influence of graphite on the composition and thermodynamic properties of plasma formed in ablated vapour of PMMA, PA6-6, PETP, POM and PE used in circuit-breakers“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 30.3 (1997), S. 475.
- [Ara+14] S. Arabi et al. „Modeling nozzle geometry changes due to the ablation in high-voltage circuit breakers“. In: *20th Int. Conf. on Gas Discharges and Their Applications*. 2014.
- [Arb15] J. W. Arblaster. „Thermodynamic Properties of Copper“. In: *Journal of Phase Equilibria and Diffusion* 36.5 (1. Okt. 2015), S. 422–444.
- [Ben02] M. Benzi. „Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey“. In: *Journal of Computational Physics* 182.2 (1. Nov. 2002), S. 418–477.
- [Ben08] M. Benilov. „Understanding and modelling plasma–electrode interaction in high-pressure arc discharges: a review“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 41.14 (2008), S. 144001.
- [BH80] M. Baus und J.-P. Hansen. „Statistical mechanics of simple coulomb systems“. In: *Physics Reports* 59.1 (1. März 1980), S. 1–94.
- [BM95] M. S. Benilov und A. Marotta. „A model of the cathode region of atmospheric pressure arcs“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 28.9 (1995), S. 1869.

- [BSL07] R. B. Bird, W. E. Stewart und E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. 2. Aufl. New York: John Wiley & Sons, 2. März 2007. 928 S.
- [BZP95] G. Bizjak, P. Zunko und D. Povh. „Circuit breaker model for digital simulation based on Mayr's and Cassie's differential arc equations“. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 10.3 (Juli 1995), S. 1310–1315.
- [Cas39] A. M. Cassie. „Theorie Nouvelle des Arcs de Rupture et de la Rigidité des Circuits“. In: *Cigre, Report* 102 (1939), S. 588–608.
- [CC70] S. Chapman und T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge University Press, 1970. 452 S.
- [CCD11] M. Capitelli, G. Colonna und A. D'Angola. *Fundamental Aspects of Plasma Chemical Physics: Thermodynamics*. OCLC: 768198266. New York, NY: Springer Science & Business Media, 2. Dez. 2011. 318 S.
- [Cho68] A. J. Chorin. „Numerical solution of the Navier-Stokes equations“. In: *Mathematics of computation* 22.104 (1968), S. 745–762.
- [Cho97] A. J. Chorin. „A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems“. In: *Journal of Computational Physics* 135.2 (1. Aug. 1997), S. 118–125.
- [Chr07] T. Christen. „A maximum entropy production model for Teflon ablation by arc radiation“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 40.18 (2007), S. 5719.
- [Chu+16] A. Chusov et al. „Development of a physical 2-D model for arc quenching chamber of lightning protection multichamber systems“. In: 2016 33rd International Conference on Lightning Protection (ICLP). Sep. 2016, S. 1–9.
- [CL86] C. B. Ruchti und L. Niemeyer. „Ablation controlled arcs“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 14.4 (1986), S. 423–434.
- [CM97] S. Coulombe und J.-L. Meunier. „Arc-cold cathode interactions: parametric dependence on local pressure“. In: *Plasma Sources Science and Technology* 6.4 (1997), S. 508.
- [Con01] J. T. Conway. „Exact solutions for the magnetic fields of axisymmetric solenoids and current distributions“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 37.4 (Juli 2001), S. 2977–2988.
- [Cre+08] Y. Cressault et al. „Influence of metallic vapours on the properties of air thermal plasmas“. In: *Plasma Sources Science and Technology* 17.3 (1. Aug. 2008), S. 035016.
- [DAñ+08] A. D'Angola et al. „Thermodynamic and transport properties in equilibrium air plasmas in a wide pressure and temperature range“. In: *The European Physical Journal D* 46.1 (Jan. 2008), S. 129–150.

- [Dev66] R. S. Devoto. „Transport Properties of Ionized Monatomic Gases“. In: *The Physics of Fluids* 9.6 (1. Juni 1966), S. 1230–1240.
- [Dom+97] E. Domejean et al. „Arc-wall interaction modelling in a low-voltage circuit breaker“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 30.15 (1997), S. 2132.
- [Ele34] W. Elenbaas. „Die Quecksilber-Hochdruckentladung“. In: *Physica* 1.7 (Mai 1934), S. 673–688.
- [Ens11] Ensinger GmbH. *Datenblatt: TECAFORM AD natural*. 29. Nov. 2011.
- [Epc18a] Epcos AG. *SIOV metal oxide varistors*. Jan. 2018. URL: [https://www.mouser.de/datasheet/2/400/SIOV\\_Leaded\\_Advanced-1317168.pdf](https://www.mouser.de/datasheet/2/400/SIOV_Leaded_Advanced-1317168.pdf) (besucht am 16.05.2019).
- [Epc18b] Epcos AG. *SIOV metal oxide varistors*. Jan. 2018. URL: [https://www.tdk-electronics.tdk.com/inf/70/db/var/SIOV\\_Leaded\\_EnergetiQ.pdf](https://www.tdk-electronics.tdk.com/inf/70/db/var/SIOV_Leaded_EnergetiQ.pdf) (besucht am 16.05.2019).
- [FN83] M. T. C. Fang und D. B. Newland. „DC nozzle arcs with mild wall ablation“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 16.5 (1983), S. 793.
- [Fre+11] P. Freton et al. „Magnetic field approaches in dc thermal plasma modelling“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 44.34 (2011), S. 345202.
- [Fro+15] V. Y. Frolov et al. „Calculation of the composition of plasma of an arc pulsed discharge in a multichamber arrester“. In: *Technical Physics Letters* 41.4 (1. Apr. 2015), S. 310–313.
- [GB10] L. Ghezzi und A. Balestrero. „Modeling and simulation of low voltage arcs“. Diss. TU Delft, Delft University of Technology, 2010.
- [GB93] J. Gilligan und M. Bourham. „The use of an electrothermal plasma gun to simulate the extremely high heat flux conditions of a tokamak disruption“. In: *Journal of Fusion Energy* 12.3 (1. Sep. 1993), S. 311–316.
- [GC16] A. Gleizes und Y. Cressault. „Effect of Metal Vapours on the Radiation Properties of Thermal Plasmas“. In: *Plasma Chemistry and Plasma Processing* (16. Nov. 2016), S. 1–20.
- [Ge+15] W. Ge et al. „Implementation of High Order Spherical Harmonics Methods for Radiative Heat Transfer on OpenFOAM“. In: *ResearchGate* 137.5 (1. Mai 2015).
- [GGF05] A. Gleizes, J. J. Gonzalez und P. Freton. „Thermal plasma modeling“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 38.9 (7. Mai 2005), R153–R183.

- [Gio09] T. Giorgino. „Computing and Visualizing Dynamic Time Warping Alignments in R: The dtw Package“. In: *Journal of Statistical Software* 31.7 (14. Aug. 2009).
- [Gle+93] A. Gleizes et al. „Calculation of net emission coefficient of thermal plasmas in mixtures of gas with metallic vapour“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 26.11 (1993), S. 1921.
- [God+00] D. Godin et al. „Modelling and simulation of nozzle ablation in high-voltage circuit-breakers“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 33.20 (2000), S. 2583.
- [Gon+12] J. J. Gonzalez et al. „Turbulence and Magnetic Field Calculations in High-Voltage Circuit Breakers“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 40.3 (März 2012), S. 936–945.
- [Gon+15] J.-J. Gonzalez et al. „PTFE Vapor Contribution to Pressure Changes in High-Voltage Circuit Breakers“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 43.8 (Aug. 2015), S. 2703–2714.
- [GR95] R. J. Goldston und P. H. Rutherford. *Introduction to Plasma Physics*. Institute of Physics Pub., 1. Jan. 1995. 516 S.
- [Gre15] C. J. Greenshields. *OpenFOAM Programmers Guide*. 13. Dez. 2015. URL: [foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf](http://foam.sourceforge.net/docs/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf) (besucht am 06.05.2017).
- [Gua+05] J. L. Guardado et al. „An improved arc model before current zero based on the combined Mayr and Cassie arc models“. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 20.1 (Jan. 2005), S. 138–142.
- [Hel35] G. Heller. „Dynamical Similarity Laws of the Mercury High Pressure Discharge“. In: *Physics* 6.12 (1. Dez. 1935), S. 389–394.
- [HPL72] C. Y. Ho, R. W. Powell und P. E. Liley. „Thermal Conductivity of the Elements“. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 1.2 (Apr. 1972), S. 279–421.
- [HYM04] R. Hemmi, Y. Yokomizu und T. Matsumura. „Anode-fall Voltages of Air Arcs Between Electrodes of Copper, Silver and Tungsten at Currents up to 1500A“. In: *IEEJ Transactions on Power and Energy* 124.1 (2004), S. 143–149.
- [Ibr80] E. Z. Ibrahim. „The ablation dominated polymethylmethacrylate arc“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 13.11 (1980), S. 2045.
- [Ich82] S. Ichimaru. „Strongly coupled plasmas: high-density classical plasmas and degenerate electron liquids“. In: *Reviews of Modern Physics* 54.4 (1. Okt. 1982), S. 1017–1059.
- [Ind] W. Industrie. *Verbundwerkstoffe (TUNGSTIT®) für elektrische Kontakte und Elektroden für die Funkenerosion*. URL: <https://wolfram-industrie.de/werkstoffe/verbundwerkstoffe-tungstit/> (besucht am 29.04.2018).

- [Iss86] R. I. Issa. „Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-splitting“. In: *J. Comput. Phys.* 62.1 (Jan. 1986), S. 40–65.
- [Jas09] H. Jasak. „OpenFOAM: Open source CFD in research and industry“. In: *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* 1.2 (Dez. 2009), S. 89–94.
- [KBB01] M. Keidar, I. D. Boyd und I. I. Beilis. „On the model of Teflon ablation in an ablation-controlled discharge“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 34.11 (2001), S. 1675.
- [KBS15] M. Kraposhin, A. Bovtrikova und S. Strijhak. „Adaptation of Kurganov-Tadmor Numerical Scheme for Applying in Combination with the PISO Method in Numerical Simulation of Flows in a Wide Range of Mach Numbers“. In: *Procedia Computer Science*. 4th International Young Scientist Conference on Computational Science 66 (1. Jan. 2015), S. 43–52.
- [KL84] P. Kovitya und J. J. Lowke. „Theoretical predictions of ablation-stabilised arcs confined in cylindrical tubes“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 17.6 (1984), S. 1197.
- [Knu15] M. Knudsen. „Die maximale Verdampfungsgeschwindigkeit des Quecksilbers“. In: *Annalen der Physik* 352.13 (1. Jan. 1915), S. 697–708.
- [Kov85] P. Kovitya. „Physical Properties of High-Pressure Plasmas of Hydrogen and Copper in the Temperature Range 5000-60 000 K“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 13.6 (Dez. 1985), S. 587–594.
- [KT00] A. Kurganov und E. Tadmor. „New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations“. In: *Journal of Computational Physics* 160.1 (2000), S. 241–282.
- [Lag+04] F. Lago et al. „A numerical modelling of an electric arc and its interaction with the anode: Part I. The two-dimensional model“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 37.6 (2004), S. 883.
- [LCM14] R. Loic, O. Chadebec und G. Meunier. „3-D Magnetostatic Moment Method Dedicated to Arc Interruption Process Modeling“. In: *Magnetics, IEEE Transactions on* 50 (1. Feb. 2014), S. 941–944.
- [LL05] M. A. Lieberman und A. J. Lichtenberg. *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. 2nd Edition. Hoboken, N.J: Wiley-Interscience, 14. Apr. 2005. 800 S.
- [LT06] J. J. Lowke und M. Tanaka. „LTE-diffusion approximation‘ for arc calculations“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 39.16 (2006), S. 3634.

- [M L07] M. Lino da Silva. „An adaptive line-by-line statistical model for fast and accurate spectral simulations in low-pressure plasmas“. In: *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 108.1 (Nov. 2007), S. 106–125.
- [M L13] M. Lino da Silva. *SPARTAN*. Version 2.5. Mai 2013.
- [Ma+09] Q. Ma et al. „Simulation Study of the Influence of Wall Ablation on Arc Behavior in a Low-Voltage Circuit Breaker“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 37.1 (Jan. 2009), S. 261–269.
- [Mar+07] A. Martin et al. „Transient ablation regime in circuit breakers“. In: *Plasma Science and Technology* 9.6 (2007), S. 653.
- [May43] O. Mayr. „Beiträge zur Theorie des statischen und des dynamischen Lichtbogens“. In: *Archiv für Elektrotechnik* 37.12 (1. Dez. 1943), S. 588–608.
- [MB] Manika Varma Nair und Bernhard Wunderlich. *Heat Capacity and Other Thermodynamic Properties of Linear Macromolecules*.
- [Mes10] D. Meschede. *Gerthsen Physik*. 24., überarb. Aufl. 2010. Berlin: Springer, 27. Sep. 2010. 1162 S.
- [ML93] R. Morrow und J. J. Lowke. „A one-dimensional theory for the electrode sheaths of electric arcs“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 26.4 (1993), S. 634.
- [Mod13] M. F. Modest. *Radiative Heat Transfer*. Third Edition. New York: Academic Press, 15. Feb. 2013. 904 S.
- [Mod89] M. F. Modest. „Modified differential approximation for radiative transfer in general three-dimensional media“. In: *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 3.3 (Juli 1989), S. 283–288.
- [MU18] A. B. Murphy und D. Uhrlandt. „Foundations of High-Pressure Thermal Plasmas“. In: *Plasma Sources Science and Technology* 27.6 (Juni 2018), S. 063001.
- [Mur+09] A. B. Murphy et al. „Modelling of thermal plasmas for arc welding: the role of the shielding gas properties and of metal vapour“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 42.19 (2009), S. 194006.
- [Mur01] A. B. Murphy. „Thermal plasmas in gas mixtures“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 34.20 (2001), R151.
- [Mur95] A. B. Murphy. „Transport coefficients of air, argon-air, nitrogen-air, and oxygen-air plasmas“. In: *Plasma Chemistry and Plasma Processing* 15.2 (1995), S. 279–307.
- [Mut09] A. Mutzke. *Lichtbogen-Simulation unter besonderer Berücksichtigung der Fußpunkte*. München: Dr. Hut, 5. Apr. 2009. 207 S.

- [Nak+15] T. Nakagawa et al. „Numerical simulation on dynamics and thermal decomposition of spallation polymer particles flying in polymer ablated arcs“. In: *IEEJ Transactions on Power and Energy* 135.11 (2015), S. 681–687.
- [NI08] H. Nordborg und A. A. Iordanidis. „Self-consistent radiation based modelling of electric arcs: I. Efficient radiation approximations“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 41.13 (7. Juli 2008), S. 135205.
- [Nie78] L. Niemeyer. „Evaporation Dominated High Current Arcs in Narrow Channels“. In: *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* PAS-97.3 (Mai 1978), S. 950–958.
- [Nos+07] V. V. Nossov et al. „Simulation of the thermal radiation effect of an arc on polymer walls in low-voltage circuit breakers“. In: *Technical Physics* 52.5 (Mai 2007), S. 651–659.
- [OTU12] T. Onchi, Y. Tanaka und Y. Uesugi. „Effect of polymer ablation gas on arc quenching properties around current zero“. In: *Electrical Engineering in Japan* 180.3 (Aug. 2012), S. 32–45.
- [Pat81] S. V. Patankar. „A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations“. In: *Numerical heat transfer* 4.4 (1981), S. 409–425.
- [Pet+14] Petr Kloc et al. „Influence of Copper Vapours on the Radiative Transfer in Thermal Air Plasma“. In: 20th international conference on gas discharges and their applications. Orléans, France, 2014.
- [Pet+16] A. Petchanka et al. „Modelling of the deformation of PTFE-nozzles in a high voltage circuit breaker due to multiple interruptions“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 49.13 (6. Apr. 2016), S. 135201.
- [Pet16] Petr Kloc. *Radiation Modelling*. E-mail. 30. Juni 2016.
- [Pey+12] B. Peyrou et al. „Radiative properties and radiative transfer in high pressure thermal air plasmas“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 45.45 (14. Nov. 2012), S. 455203.
- [PH07] E. Pfender und J. Heberlein. „Heat Transfer Processes and Modeling of Arc Discharges“. In: *Advances in Heat Transfer*. Bd. 40. Elsevier, 2007, S. 345–450.
- [Pie12] K. Pielichowska. „The influence of molecular weight on the properties of polyacetal/hydroxyapatite nanocomposites. Part 1. Microstructural analysis and phase transition studies“. In: *Journal of Polymer Research* 19.2 (Feb. 2012).
- [Pos01] J. Pospiech. *Ein neues Prinzip für Blitzstromableiter im Niederspannungsnetz*. Books on Demand, 1. Jan. 2001. 156 S.
- [Pre+92] W. H. Press et al. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. 2nd Edition. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 30. Okt. 1992. 994 S.

- [PS72] S. V. Patankar und D. B. Spalding. „A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows“. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15.10 (1. Okt. 1972), S. 1787–1806.
- [Rai91] Y. P. Raizer. *Gas Discharge Physics*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
- [RB89] G. E. Rolader und J. H. Batteh. „Thermodynamic and electrical properties of railgun plasma armatures“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 17.3 (1989), S. 439–445.
- [RGF12] F. Reichert, J.-J. Gonzalez und P. Freton. „Modelling and simulation of radiative energy transfer in high-voltage circuit breakers“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 45.37 (19. Sep. 2012), S. 375201.
- [Ron+09a] L. Rondot et al. „Dedicating finite volume method to electromagnetic plasma modeling: circuit breaker application“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3 (2009), S. 1262–1265.
- [Ron+09b] M. Rong et al. „The influence of electrode erosion on the air arc in a low-voltage circuit breaker“. In: *Journal of Applied Physics* 106.2 (2009), S. 023308.
- [RSZ11] C. Rümpeler, H. Stammberger und A. Zacharias. „Low-voltage arc simulation with out-gassing polymers“. In: *2011 IEEE 57th Holm Conference on Electrical Contacts (Holm)*. IEEE, 2011, S. 1–8.
- [Rüm09] C. Rümpeler. *Lichtbogensimulation für Niederspannungsschaltgeräte*. Fraunhofer-Verlag, 2009.
- [Run17] T. Runge. „Messungen der elektrischen Leitfähigkeit an Plasmen im engen Spalt beim Ableiten hoher Stoßströme bis 25 kA“. Unveröffentlichter Bericht. 15. Mai 2017.
- [Run18] T. Runge. *Plasmaeigenschaften in Funkenstrecken unter Stoßstrombelastung*. 1. Aufl. München: Dr. Hut, 15. Aug. 2018. 131 S.
- [Rüt14] J. Rüther. *Weiterentwicklung und Vereinfachung eines Simulationsmodells für Schaltlichtbögen in Löschblechkammern*. München: Dr. Hut, 31. Okt. 2014. 201 S.
- [SJ70] P. E. Slade und L. T. Jenkins. *Thermal characterization techniques*. OCLC: 195535. New York: M. Dekker, 1970.
- [Sol00] R. I. Soloukhin. *Handbook Of Radiative Heat Transfer In High-Temperature Gases*. CRC Press, 20. Juli 2000. 340 S.
- [SP84] N. A. Sanders und E. Pfender. „Measurement of anode falls and anode heat transfer in atmospheric pressure high intensity arcs“. In: *Journal of Applied Physics* 55.3 (1. Feb. 1984), S. 714–722.
- [SS00] P. H. Schavemaker und L. v. d. Slui. „An improved Mayr-type arc model based on current-zero measurements“. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 15.2 (Apr. 2000), S. 580–584.

- [SSK17] C. Sander, J.-E. Schmutz und M. Kurrat. „Analysis of Radiation Discretization for Modelling a Spark Gap for Surge Currents“. In: *Plasma Physics and Technology Journal* 4.1 (2017), S. 56–59.
- [Ste02] Stefan Selle. „Transportkoeffizienten ionisierter Spezies in reaktiven Strömungen“. Diss. Heidelberg: Ruprecht - Karls - Universität Heidelberg, 2002.
- [Str11] U. Stroth. *Plasmaphysik - Phänomene, Grundlagen, Anwendungen*. 1. Aufl. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [Swi+04] B. Swierczynski et al. „Advances in low-voltage circuit breaker modelling“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 37.4 (2004), S. 595.
- [Tan+08] Y. Tanaka et al. „Numerical investigation on behaviour of ablation arcs confined with different polymer materials“. In: *17th International Conference on Gas Discharges and Their Applications* 5379300 (2008), S. 161–164.
- [Tep+06] J. Tepper et al. „Investigation on Erosion of Cu/W Contacts in High-Voltage Circuit Breakers“. In: *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies* 29.3 (Sep. 2006), S. 658–665.
- [Tol+17] P. Tolias et al. „Analytical expressions for thermophysical properties of solid and liquid tungsten relevant for fusion applications“. In: *Nuclear Materials and Energy* 13 (Dez. 2017), S. 42–57.
- [Tor+09] P. Tormene et al. „Matching incomplete time series with dynamic time warping: an algorithm and an application to post-stroke rehabilitation“. In: *Artificial Intelligence in Medicine* 45.1 (1. Jan. 2009), S. 11–34.
- [Tre+09] J. P. Trelles et al. „Arc plasma torch modeling“. In: *Journal of thermal spray technology* 18.5 (2009), S. 728–752.
- [TWV97] K.-J. Tseng, Y. Wang und D. M. Vilathgamuwa. „An experimentally verified hybrid Cassie-Mayr electric arc model for power electronics simulations“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 12.3 (Mai 1997), S. 429–436.
- [VM07] H. Versteeg und W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. 2 edition. Harlow, England ; New York: Pearson, 26. Feb. 2007. 520 S.
- [Yan+10] F. Yang et al. „Numerical analysis of the influence of splitter-plate erosion on an air arc in the quenching chamber of a low-voltage circuit breaker“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 43.43 (3. Nov. 2010), S. 434011.
- [Yaw15] C. L. Yaws. *The Yaws Handbook of Vapor Pressure: Antoine Coefficients*. Gulf Professional Publishing, 12. März 2015. 336 S.

- [Yok+98] Y. Yokomizu et al. „Electrode-fall voltages of SF<sub>6</sub> and air arcs between electrodes of Fe, W, Cu-W, Cu and Ti in the current range from 10 A to 20 kA“. In: *European Transactions on Electrical Power* 8.2 (1. März 1998), S. 111–115.
- [YRK05] M. Yousfi, P. Robin-Jouan und Z. Kanzari. „Breakdown electric field calculations of hot SF<sub>6</sub> for high voltage circuit breaker applications“. In: *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* 12.6 (Dez. 2005). Conference Name: IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, S. 1192–1200.
- [Zag08] M. R. Zaghloul. „A simple theoretical approach to calculate the electrical conductivity of nonideal copper plasma“. In: *Physics of Plasmas* 15.4 (2008), S. 042705.
- [ZBD01] M. R. Zaghloul, M. A. Bourham und J. M. Doster. „Semi-analytical modelling and simulation of the evolution and flow of Ohmically-heated non-ideal plasmas in electrothermal guns“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 34.5 (2001), S. 772.
- [Zha+02] J. L. Zhang et al. „Computational investigation of arc behavior in an auto-expansion circuit breaker contaminated by ablated nozzle vapor“. In: *IEEE transactions on plasma science* 30.2 (2002), S. 706–719.
- [ZHP94] X. Zhou, J. Heberlein und E. Pfender. „Theoretical study of factors influencing arc erosion of cathode“. In: *IEEE Transactions on Components, Packaging, and Manufacturing Technology: Part A* 17.1 (März 1994), S. 107–112.
- [Zol+93] D. Zoler et al. „A time-dependent model for high-pressure discharges in narrow ablative capillaries“. In: *Journal of Plasma Physics* 50.1 (Aug. 1993), S. 51–70.
- [ZYF04] J. L. Zhang, J. D. Yan und M. T. C. Fang. „Electrode evaporation and its effects on thermal arc behavior“. In: *IEEE Transactions on Plasma Science* 32.3 (Juni 2004), S. 1352–1361.

# Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\vec{A}$	T m	Magnetisches Vektorpotential
$\vec{B}$	T	Magnetische Flussdichte
$B_i$	Wm <sup>-2</sup>	Plancksche Strahldichte eines Strahlungsbandes
$B_{i,j}$	Wm <sup>-2</sup>	Plancksche Strahldichte eines Strahlungsbandes und einer $\kappa$ -Gruppe
$B_\nu$	WHz <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup>	Spektrale Plancksche Strahldichte
$c_p$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	Spezifische Wärmekapazität
$\vec{D}$	A s m <sup>-2</sup>	Elektrische Flussdichte
$\Delta$		Gesamtfehler beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\delta_{ij}$	-	Kronecker-Delta
$\Delta_t$	s	Gesamtfehler mal Simulationszeit
$\Delta h_{\text{vap}}$	J kg <sup>-1</sup>	Verdampfungsenthalpie
$\Delta h_{\text{vap,eff}}$	J kg <sup>-1</sup>	Effektive Verdampfungsenthalpie
$\Delta m$		Fehler der abgetragenen Masse beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\Delta p$		Fehler des mittl. Drucks beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\Delta \bar{T}$		Fehler der mittl. Temperatur beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\Delta t$	s	Typische Zeit
$\Delta T_{\max}$		Fehler der max. Temperatur beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\Delta U$		Spannungsfehler beim Vergleich zwischen zwei Simulationen
$\Delta x$	m	Typische Distanz
$\Delta x_f$	m	Abstand der Festkörperrandzelle zur Grenzschicht
$\Delta x_p$	m	Abstand der Plasmarandzelle zur Grenzschicht
$\vec{E}$	V m <sup>-1</sup>	Elektrische Feldstärke
$e$	J kg <sup>-1</sup>	Spezifische gesamte Energie
$E_p$	J	Energie eines Photons
$e_{S_p}$	J kg <sup>-1</sup>	Mit dem abbrennenden Material eingebrachte gesamte spezifische Energie
$\epsilon$	F m <sup>-1</sup>	Elektrische Permittivität
$\epsilon_\nu$	WHz <sup>-1</sup> m <sup>-3</sup> sr <sup>-1</sup>	Spektraler, volumetrischer und gerichteter Emissionskoeffizient
$\epsilon_r$	-	Relative elektrische Permittivität
$\eta$	Nsm <sup>-2</sup>	Dynamische Viskosität

Symbol	Einheit	Beschreibung
$\eta_m$	$m^2 S^{-1} H^{-1}$	Magnetische Diffusivität
$\vec{F}_i$	N	Auf Teilchenart $i$ wirkende Kraft
$f_i$	$m^{-6} s^3$	Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t$ bei $\vec{x}$ ein Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ zu finden
$G_i$	$W m^{-2}$	Richtungsunabhängige einfallende Strahlung eines Strahlungsbandes
$G_{i,j}$	$W m^{-2}$	Richtungsunabhängige einfallende Strahlung eines Strahlungsbandes und einer $\kappa$ -Gruppe
$G_\nu$	$W m^{-2} Hz^{-1}$	Spektrale, richtungsunabhängige einfallende Strahlung
$\Gamma$	$m^2 s^{-1}$	Diffusionskoeffizient
$\vec{H}$	$A m^{-1}$	Magnetische Feldstärke
$h$	$J kg^{-1}$	Spezifische Enthalpie
$I$	A	Strom
$i$	$J kg^{-1}$	Spezifische innere Energie
$I_\nu$	$W m^{-2} Hz^{-1}$	Spektrale Strahldichte
$\vec{j}$	$A m^{-2}$	Stromdichte
$k$	$J kg^{-1}$	Spezifische kinetische Energie
$K_{i,j}$	$m^{-1}$	Grenzwert der Absorptionskoeffizienten eines Strahlungsbandes und einer $\kappa$ -Gruppe
$\bar{\kappa}_{\text{Natürlich},i}$	$m^{-1}$	Roseland-gemittelter Absorptionskoeffizient im Bändermodell
$\kappa_\nu$	$m^{-1}$	Spektraler Absorptionskoeffizient
$\bar{\kappa}$	$m^{-1}$	Gemittelter Absorptionskoeffizient
$\bar{\kappa}_{\text{Roseland},i}$	$m^{-1}$	Roseland-gemittelter Absorptionskoeffizient im Bändermodell
$\lambda$	$W K^{-1} m^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda_D$	m	Debye-Länge
$\lambda_f$	$W K^{-1} m^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit auf der Festkörperseite der Grenzschicht
$\lambda_p$	$W K^{-1} m^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit auf der Plasmaseite der Grenzschicht
$\dot{m}$	$kg s^{-1}$	Massenabbrandrate in einer Zelle
$\mu$	$H m^{-1}$	Magnetische Permeabilität
$\mu_e$	$As^2 kg^{-1}$	Elektronenbeweglichkeit
$\mu_i$	$As^2 kg^{-1}$	Ionenbeweglichkeit
$N_D$	-	Debye-Zahl, bzw. Plasma-Parameter
$n_e$	$m^{-3}$	Elektronendichte
$\hat{n}$	-	Raumrichtung
$N_i$	-	Anzahl der Strahlungsbänder

<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Beschreibung</b>
$n_i$	$\text{m}^{-3}$	Teilchendichte der Spezies i
$N_j$	-	Anzahl der $\kappa$ -Gruppen
$\nu$	Hz	Frequenz
$\omega_p$	$\text{s}^{-1}$	Plasmafrequenz
$P$	W	Leistung
$p$	$\text{N m}^{-2}$	Druck
$p_0$	Pa	Normaldruck
$p_{\text{DH}}$	Pa	Debye-Hückel-Korrektur
$\phi$	V	Elektrisches Potential
$\Psi$	eV	Austrittsarbeit
$\psi$	-	Beliebige Erhaltungsgröße
$\psi_{S_\rho}$	$[\psi]\text{kg}^{-1}$	Menge von $\psi$ pro abbrennender Masse
$\vec{q}_c$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmestromdichte
$q_{c,f}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmefluss aus der Grenzschicht in den Festkörper
$q_{c,p}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmefluss vom Plasma in die Grenzschicht
$q_{ee}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmestrom durch Elektronenemission Kühlung
$q_{ie}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmestrom durch Elektroneneinfang
$q_{ion}$	$\text{W m}^{-2}$	Wärmestrom durch Ionenbombardement
$\vec{q}_\nu$	$\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$	Spektraler Strahlungswärmefluss
$\vec{q}_r$	$\text{W m}^{-2}$	Strahlungswärmefluss
$\vec{q}_{r,i}$	$\text{W m}^{-2}$	Strahlungswärmefluss eines Strahlungsbandes
$\vec{q}_{r,i,j}$	$\text{W m}^{-2}$	Strahlungswärmefluss eines Strahlungsbandes und einer $\kappa$ -Gruppe
$q_{\text{vap}}$	$\text{W m}^{-2}$	Verdampfungswärmefluss
$R_m$	-	Magnetische Reynoldszahl
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Dichte
$\rho_{\text{el}}$	$\text{C m}^{-3}$	Elektrische Ladungsdichte
$s$	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$	Spezifische Entropie
$S_e$	$\text{W m}^{-3}$	Energiequellterm
$\vec{S}_g$	$\text{N m}^{-3}$	Quellterm der Schwerkraft
$S_i$	$\text{W m}^{-3}$	Quellterm der inneren Energie
$S_k$	$\text{W m}^{-3}$	Quellterm der kinetischen Energie
$\vec{S}_{\text{Lorentz}}$	$\text{N m}^{-3}$	Quellterm der Lorentzkraft
$S_\psi$	$[\psi]\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$	Quellterm der Erhaltungsgröße $\psi$
$S_r$	$\text{W m}^{-3}$	Strahlungsquellterm
$\vec{v}_{S_p}$	$\text{m s}^{-1}$	Geschwindigkeit des abbrennenden Gases
$S_{\rho\psi}$	$[\psi]\text{m}^{-3} \text{s}^{-1}$	Quellterm für mit abbrennender Masse eingebrachte Menge von $\rho\psi$

<b>Symbol</b>	<b>Einheit</b>	<b>Beschreibung</b>
$\vec{S}_v$	$\text{N m}^{-3}$	Impulsquellterm
$\sigma$	$\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$	Spannungstensor
$\sigma_\nu$	$\text{m}^{-1}$	Streukoeffizient
$T$	K	Temperatur
$t$	s	Zeit
$T_e$	K	Elektronentemperatur
$T_f$	K	Temperatur auf der Plasmaseite der Grenzschicht
$T_k$	K	Temperatur des einströmenden abbrennenden Materials
$T_p$	K	Temperatur auf der Plasmaseite der Grenzschicht
$T_{\text{vap}}$	K	Verdampfungstemperatur
$T_w$	K	Temperatur in der Grenzschicht
$\tau$	$\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$	Viskoser Spannungstensor
$U$	V	Spannung
$U_{\text{MOV}}$	V	Metallocid-Varistorspannung
$V$	$\text{m}^3$	Volumen
$\vec{v}$	$\text{m s}^{-1}$	Geschwindigkeit
$V_A$	V	Anodenfallspannung
$V_C$	V	Kathodenfallspannung
$V_I$	V	Rekombinationspotential
$X_{i,j}$	-	Menge der Frequenzbereiche eines Strahlungsbandes und einer $\kappa$ -Gruppe
$Z_i$	C	Ladung eines i-fach ionisierten Ions

## Abkürzungsverzeichnis

**BiCGStab-Methode** Biconjugate Gradient Stabilized Methode. 1, 76

**CFL-Zahl** Courant-Friedrich-Levy-Zahl. 1, 74, 77

**DO-Methode** Diskrete Ordinaten-Methode (oder auch  $S_n$ -Methode). 1, 44

**DO-Modell** Diskrete-Ordinaten-Modell. 1, 9, 10

**FVM** Finite-Volumen-Methode. 1, 15, 73

**GDT** Gas discharge Tube. 1, 3, 4, 82

**LTE** Lokales Thermodynamisches Gleichgewicht (engl. Local Thermodynamic Equilibrium). 1, 7, 13, 18

**MOV** Metalloxid-Varistor. 1–4, 79, 82, 83, 127, 129, 130

**P1** P1-Modell. 1

**PIMPLE** PISO-SIMPLE. 1, 76, 77

**PISO** Pressure Implicit Splitting of Operators. 1, 76

**POM** Polyoxymethylen. 1, 9, 32, 56, 68, 69, 118, 128, 132, 139, 141

**SIMPLE** Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations. 1, 76

**SIMPLER** SIMPLE-Revised. 1, 76

**ÜSG** Überspannungsschutzgerät. 1, 2, 4, 5, 13, 14, 56



# Christian Sander

## Lebenslauf



### Persönliche Daten

Geburt Am 12.07.1985 in Bielefeld  
E-Mail christian.sander85@gmail.com

### Schulische Ausbildung und Studium

1996 - 2005 Gymnasium Heepen, Bielefeld  
2005 - 2012 Studium der Physik an der Universität Bielefeld  
Abschluss Master of Science  
Schwerpunkte Ultrakurzzeitphysik, Entwicklung von Laborsoftware

### Publikationen

C. Sander, J. Rüther, M. Kurrat, *Development of a Plasma Solver for Surge Protective Devices using Spark Gap Technology*, Plasma Physics and Technology 2(1):67-70, 2015  
C. Sander, J.-E. Schmutz, M. Kurrat, *Analysis of Radiation Discretization for Modelling a Spark Gap for Surge Currents*, Plasma Physics and Technology 4(1):56–59, 2017

### Beruf

2012 - Jetzt Mitarbeiter bei Phoenix Contact in Blomberg  
Schwerpunkte Technologieentwicklung für Überspannungsschutzgeräte, Plasmasimulation, Elektronik, Messverfahren, Embedded-Firmwareentwicklung

### Freiwilliges Engagement

2004 - Jetzt Freiwillige Feuerwehr Bielefeld-Altenhagen





