Задания

10 февраля 2020 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Начальные объекты.
   (b) Копроизведения объектов.
2. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
3. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \to 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

   Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.
4. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.
5. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.
6. Идемпотентный морфизм $h : B \to B$ является расщепленным, если существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
7. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
8. Пусть в категории **C** есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в **C** морфизмы $\mathrm{and}, \mathrm{or} : \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{true},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{true} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "{\langle \mathrm{false},\mathrm{false} \rangle}"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

9. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

   Пусть **C** – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) **C** – категория предпорядка.

   (b) В **C** терминальный объект является булевским.

   (c) В **C** существует булевский объект, такой что true = false.