

Теория категорий

Пределы и копределы

Валерий Исаев

3 февраля 2020 г.

Уравнители

Пределы

Уравнители в Set

- ▶ Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- ▶ Например, множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_{\geq 0}$ является подмножеством \mathbb{R} таких x , что $|x| = x$.
- ▶ Другой пример: множество корней полинома p является подмножеством \mathbb{R} таких x , что $p(x) = 0$.
- ▶ В общем случае, если $f, g : A \rightarrow B$ – пара функций, то *уравнитель* этих функций – это подмножество A таких x , что $f(x) = g(x)$.

Уравнители в произвольной категории

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \rightarrow B$ – это мономорфизм $e : E \rightarrow A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \rightarrow A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует стрелка $k : F \rightarrow E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ \downarrow & \searrow h & & & \\ \exists k \downarrow & & & & \\ E & \xrightarrow[e]{} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B \end{array}$$

Мономорфизм называется *регулярным*, если он является уравнителем некоторой пары стрелок.

Другое определение уравнителей

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \rightarrow B$ – это морфизм $e : E \rightarrow A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \rightarrow A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует уникальная стрелка $k : F \rightarrow E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ \downarrow \exists! k & \searrow h & & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[f]{g} & B \end{array}$$

Упражнение: докажите, что эти определения эквивалентны.

Уравнители в категории **Ab**

- ▶ В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- ▶ Если $f : A \rightarrow B$ – морфизм абелевых групп, то ядро f – это уравнитель пары стрелок $f, 0 : A \rightarrow B$.
- ▶ И наоборот, если $f, g : A \rightarrow B$ – пара морфизмов, то их уравнитель – это ядро морфизма $f - g : A \rightarrow B$.
- ▶ Таким образом, в категории **Ab** существуют все уравнители.

План лекции

Уравнители

Пределы

Конусы диграмм

- ▶ Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, и D – диграмма формы J в категории \mathbf{C} .
- ▶ Конус диграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : A \rightarrow D(v)$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диграмма коммутует

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ a_{s(e)} \downarrow & \searrow a_{t(e)} & \\ D(s(e)) & \xrightarrow{D(e)} & D(t(e)) \end{array}$$

Определение пределов

- ▶ *Предел* диграммы D – это такой конус A , что для любого конуса B существует уникальный морфизм $f : B \rightarrow A$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутует

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ b_v \downarrow & \swarrow a_v & \\ D(v) & & \end{array}$$

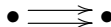
- ▶ Предел D обозначается $\lim D$.
- ▶ Категория называется *полной* (*конечно полной*), если в ней существуют все малые (конечные) пределы.

Примеры пределов

- ▶ Произведения – это пределы дискретных диаграмм.
- ▶ Бинарные произведения – это пределы диаграмм вида



- ▶ Уравнители – это пределы диаграмм вида



- ▶ Терминальные объекты – это пределы пустой диаграммы.

Уникальность пределов

Proposition

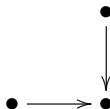
Если A и B – пределы диаграммы D , то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $a_v = b_v \circ f$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как B – предел, то существует стрелка $f : A \rightarrow B$, удовлетворяющая условию утверждения. Так как A – предел, то существует стрелка $g : B \rightarrow A$. По уникальности мы знаем, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$, то есть f – изоморфизм. \square

Пулбэки

- ▶ Пулбэки – это пределы диаграмм вида



- ▶ Пулбэк можно изображать как коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

- ▶ Пулбэк иногда называют декартовым квадратом.
- ▶ Стрелку $A \times_C B \rightarrow A$ называют пулбэком стрелки $B \rightarrow C$.

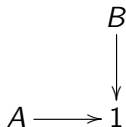
Декартово произведение через пулбэки

Proposition

Если 1 – терминальный объект, то пулбэк $A \times_1 B$ является декартовым произведением $A \times B$.

Доказательство.

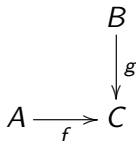
Действительно, конус диаграммы $A \quad B$ – это тоже самое, что и конус диаграммы



Следовательно пределы этих диграмм также совпадают. □

Пулбэки в **Set**

В **Set** пулбэк диаграммы



можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$. Действительно, если мы положим $A \times_C B = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\}$, то легко видеть, что $A \times_C B$ является пулбэком диграммы выше.

Пулбэки через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют пулбэки.

Доказательство.

Пулбэки можно сконструировать так же, как и в **Set**. Пусть $e : D \rightarrow A \times B$ – уравнитель стрелок $f \circ \pi_1 : A \times B \rightarrow C$ и $g \circ \pi_2 : A \times B \rightarrow C$. Тогда легко видеть, что квадрат ниже является декартовым.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\pi_2 \circ e} & B \\ \pi_1 \circ e \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Пределы через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют все конечные пределы.

Доказательство.

Пусть D – диаграмма формы (V, E) . Тогда рассмотрим диаграмму, состоящую из пары стрелок

$$\langle \pi_{t(e)} \rangle_{e \in E}, \langle D(e) \circ \pi_{s(e)} \rangle_{e \in E} : \prod_{v \in V} D(v) \rightrightarrows \prod_{e \in E} D(t(e))$$

Конус этой диаграммы – это тоже самое, что конус диаграммы D . Следовательно предел этой диаграммы также является пределом D . □

Прообраз подобъекта

- ▶ Пусть $f : A \rightarrow C$ – функция в **Set** и $B \subseteq C$.
- ▶ Тогда мы можем определить прообраз f :
 $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subseteq A$.
- ▶ Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- ▶ Прообраз подобъекта $B \hookrightarrow C$ вдоль морфизма $f : A \rightarrow C$ – это пулбэк

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B) & \longrightarrow & B \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- ▶ Упражнение: докажите, что $f^{-1}(B) \rightarrow A$ является мономорфизмом.

Пересечение подобъектов

- ▶ Пусть A и B – подмножества C .
- ▶ Тогда мы можем определить их пересечение $A \cap B$, которое является подмножеством и A , и B .
- ▶ Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- ▶ *Пересечение* подобъектов $A \hookrightarrow C$ и $B \hookrightarrow C$ – это пулбэк

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \hookrightarrow & B \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A & \hookrightarrow & C \end{array}$$