Теория категорий

Пределы и копределы

Валерий Исаев

3 февраля 2020 г.

План лекции

Уравнители

Пределы

Уравнители в **Set**

- Часто новые множества конструируются из уже существующих как подмножества элементов, удовлетворяющих некоторому уравнению.
- Например, множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_{\geq 0}$ является подмножеством $\mathbb{R}$ таких x, что $|x| = x$.
- Другой пример: множество корней полинома p является подмножеством $\mathbb{R}$ таких x, что $p(x) = 0$.
- В общем случае, если $f, g : A \to B$ – пара функций, то *уравнитель* этих функций – это подмножество A таких x, что $f(x) = g(x)$.

Уравнители в произвольной категории

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \to B$ – это мономорфизм $e : E \to A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \to A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует стрелка $k : F \to E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, dashed, "\exists k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, hook, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Мономорфизм называется *регулярным*, если он является уравнителем некоторой пары стрелок.

Другое определение уравнителей

Уравнитель пары морфизмов $f, g : A \to B$ – это морфизм $e : E \to A$ такой, что $f \circ e = g \circ e$ и для любого $h : F \to A$ такого, что $f \circ h = g \circ h$, существует уникальная стрелка $k : F \to E$ такая, что $e \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, dashed, "\exists! k"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Упражнение: докажите, что эти определения эквивалентны.

Уравнители в категории **Ab**

- В категории **Ab** абелевых групп уравнители тесно связаны с понятием ядра морфизма.
- Если $f : A \to B$ – морфизм абелевых групп, то ядро f – это уравнитель пары стрелок $f, 0 : A \to B$.
- И наоборот, если $f, g : A \to B$ – пара морфизмов, то их уравнитель – это ядро морфизма $f - g : A \to B$.
- Таким образом, в категории **Ab** существуют все уравнители.

План лекции

Уравнители

Пределы

Конусы диграмм

- Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, и D – диграмма формы J в категории $\mathbf{C}$.
- *Конус* диаграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : A \to D(v)$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "a_{s(e)}"'] \arrow[dr, "a_{t(e)}"] & \\ D(s(e)) \arrow[r, "D(e)"'] & D(t(e)) \end{tikzcd}$$

Определение пределов

- *Предел* диграммы D – это такой конус A, что для любого конуса B существует уникальный морфизм $f : B \to A$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b_v"'] & A \arrow[dl, "a_v"] \\ D(v) & \end{tikzcd}$$

- Предел D обозначается $lim\ D$.
- Категория называется *полной* (*конечно полной*), если в ней существуют все малые (конечные) пределы.

Примеры пределов

- Произведения – это пределы дискретных диаграмм.
- Бинарные произведения – это пределы диаграмм вида

$$\bullet \qquad \bullet$$

- Уравнители – это пределы диаграмм вида

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

- Терминальные объекты – это пределы пустой диаграммы.

Уникальность пределов

Proposition

Если A и B – пределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $a_v = b_v \circ f$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как B – предел, то существует стрелка $f : A \to B$, удовлетворяющая условию утверждения. Так как A – предел, то существует стрелка $g : B \to A$. По уникальности мы знаем, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$, то есть f – изоморфизм. □

Пулбэки

- *Пулбэки* – это пределы диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

- Пулбэк можно изображать как коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

- Пулбэк иногда называют декартовым квадратом.
- Стрелку $A \times_C B \to A$ называют пулбэком стрелки $B \to C$.

Декартово произведение через пулбэки

Proposition

Если 1 – терминальный объект, то пулбэк $A \times_1 B$ является декартовым произведением $A \times B$.

Доказательство.

Действительно, конус диаграммы $A \qquad B$ – это тоже самое, что и конус диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Следовательно пределы этих диграмм также совпадают. $\square$

Пулбэки в **Set**

В **Set** пулбэк диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$. Действительно, если мы положим $A \times_C B = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\}$, то легко видеть, что $A \times_C B$ является пулбэком диграммы выше.

Пулбэки через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют пулбэки.

Доказательство.

Пулбэки можно сконструировать так же, как и в **Set**. Пусть $e : D \to A \times B$ – уравнитель стрелок $f \circ \pi_1 : A \times B \to C$ и $g \circ \pi_2 : A \times B \to C$. Тогда легко видеть, что квадрат ниже является декартовым.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\pi_2 \circ e"] \arrow[d, "\pi_1 \circ e"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Пределы через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют все конечные пределы.

Доказательство.

Пусть D – диаграмма формы (V, E). Тогда рассмотрим диаграмму, состоящую из пары стрелок

$$\langle \pi_{t(e)} \rangle_{e \in E}, \langle D(e) \circ \pi_{s(e)} \rangle_{e \in E} : \prod_{v \in V} D(v) \rightrightarrows \prod_{e \in E} D(t(e))$$

Конус этой диаграммы – это тоже самое, что конус диаграммы D. Следовательно предел этой диаграммы также является пределом D. $\square$

Прообраз подобъекта

- Пусть $f : A \to C$ – функция в **Set** и $B \subseteq C$.
- Тогда мы можем определить прообраз f: $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subseteq A$.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- *Прообраз* подобъекта $B \hookrightarrow C$ вдоль морфизма $f : A \to C$ – это пулбэк

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

- Упражнение: докажите, что $f^{-1}(B) \to A$ является мономорфизмом.

Пересечение подобъектов

- Пусть A и B – подмножества C.
- Тогда мы можем определить их пересечение $A \cap B$, которое является подмножеством и A, и B.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- *Пересечение* подобъектов $A \hookrightarrow C$ и $B \hookrightarrow C$ – это пулбэк

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, hook] & C \end{tikzcd}$$