Задания

17 февраля 2020 г.

- 1. Приведите пример нетривиальной категории порядка, являющейся декартово замкнутой.
- 2. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
 - (а) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
 - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).
 - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.
- 3. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории **C** выполнены следующие утверждения:
 - (a) Для любого объекта A существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.
 - (b) Для любых объектов A, B и C существует изоморфизм $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$.
 - (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов $A,\,B$ и C морфизм

$$[\langle \pi_1, \operatorname{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \operatorname{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \coprod (A \times C) \to A \times (B \coprod C)$$

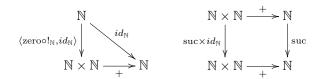
является изоморфизмом, где $\operatorname{inj}_1: B \to B \coprod C$ и $\operatorname{inj}_2: C \to B \coprod C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f: B \to X, \ g: C \to X, \ \operatorname{тo}\ [f,g]: B \coprod C \to X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f,g] \circ \operatorname{inj}_1 = f$ и $[f,g] \circ \operatorname{inj}_2$.

- (d) Если в ${\bf C}$ существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.
- (e) Если в ${\bf C}$ существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

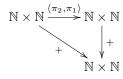
- 4. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.
- 5. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы K и S, то есть следующие морфизмы:

$$K: A \to A^B$$
$$S: (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

- 6. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.
- 7. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого x не верно, что zero = suc(x). В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.
 - (а) С категория предпорядка.
 - (b) В ${\bf C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.
 - (c) В ${\bf C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x:1 \to \mathbb{N}$ верно, что zero = $\mathrm{suc} \circ x$.
 - (d) В C существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x:1\to\mathbb{N}$ верно, что zero = $\mathrm{suc}\circ x$.
- 8. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.
- 9. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:



Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:



$$\begin{array}{c|c} (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \xrightarrow{id_{\mathbb{N}} \times +} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ + \times id_{\mathbb{N}} & \downarrow + \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \end{array}$$