

# Задания

3 февраля 2020 г.

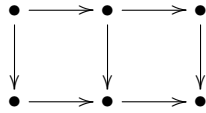
1. Докажите, что два определения уравнивателей, приводившихся в лекции, эквивалентны.
2. Морфизм  $h : B \rightarrow B$  называется *идемпотентным*, если  $h \circ h = h$ . Докажите следующие факты:
  - (а) Если  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  – такие, что  $g \circ f = id_A$ , то  $h = f \circ g$  является идемпотентным.
  - (б) Если в категории есть уравниватели, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма  $h : B \rightarrow B$  существуют  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow A$  такие, что  $g \circ f = id_A$  и  $f \circ g = h$ .
3. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.
4. Мономорфизм  $f : A \rightarrow B$  называется *сильным*, если для любой коммутативной диаграммы, где  $e : C \rightarrow D$  является эпиморфизмом,

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ e \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

существует стрелка  $D \rightarrow A$  такая, что диаграмма выше коммутует. Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

5. Мономорфизм  $f : A \rightarrow B$  называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма  $e : A \rightarrow C$  и любого морфизма  $g : C \rightarrow B$  таких, что  $g \circ e = f$ , верно, что  $e$  – изоморфизм. Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.
6. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?
7. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.
8. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.
9. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:

- (a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.
  - (b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.
10. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:
- (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.
  - (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.
11. Пусть в диаграмме вида



- правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.
12. Пусть  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$  – морфизмы в некоторой категории, а  $D \hookrightarrow C$  – некоторый подобъект  $C$ . Докажите, что  $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$ .
13. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.