Задания

3 февраля 2020 г.

1. Докажите, что два определения уравнителей, приводившихся в лекции, эквивалентны.

2. Морфизм $h : B \to B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:

   (a) Если $f : A \to B$ и $g : B \to A$ – такие, что $g \circ f = id_A$, то $h = f \circ g$ является идемпотентным.

   (b) Если в категории есть уравнители, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h : B \to B$ существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.

3. Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

4. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *сильным*, если для любой коммутативного квадрата, где $e : C \to D$ является эпиморфизмом,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & A \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

   существует стрелка $D \to A$ такая, что диаграмма выше коммутирует.

   Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

5. Мономорфизм $f : A \to B$ называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма $e : A \to C$ и любого морфизма $g : C \to B$ таких, что $g \circ e = f$, верно, что e – изоморфизм.

   Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.

6. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?

7. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.

8. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

9. Докажите следующие факты про пулбэки мономорфизмов:

(a) Докажите, что пулбэк мономорфизма также является мономорфизмом.

(b) Докажите, что пулбэк регулярного мономорфизма также является регулярным мономорфизмом.

10. Докажите следующие факты про пулбэки эпиморфизмов:

    (a) Докажите, что пулбэк сюръективной функции в **Set** также является сюръективной функцией.

    (b) Докажите, что предыдущее утверждение не верно в категории моноидов для эпиморфизмов. Другими словами, необходимо привести пример эпиморфизма в категории моноидов, некоторый пулбэк которого не является эпиморфизмом.

11. Пусть в диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

    правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

12. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – морфизмы в некоторой категории, а $D \hookrightarrow C$ – некоторый подобъект C. Докажите, что $(g \circ f)^{-1}(D) \simeq f^{-1}(g^{-1}(D))$.

13. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.