Теория категорий

Копределы

Валерий Исаев

10 февраля 2020 г.

План лекции

Копределы

Булевские объекты

Дуальная категория

Пусть $\mathbf{C}$ – произвольная категория, тогда *дуальная* ей категория $\mathbf{C}^{op}$ – это категория, определяемая следующим образом:

- Объекты $\mathbf{C}^{op}$ совпадают с объектами $\mathbf{C}$.
- Если X, Y – объекты $\mathbf{C}^{op}$, то $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y)$ определяется как $Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$.
- Композиция и тождественные морфизмы определяются так же, как в $\mathbf{C}$.

Дуальность

- В теории категорий зачастую определения и утверждения можно *дуализировать*, применив их в дуальной категории.
- Например, понятие эпиморфизма является дуальным к понятию мономорфизма.

$$f \text{ – моно:}\quad Z \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

$$f \text{ – эпи:}\quad Z \overset{g}{\underset{h}{\leftleftarrows}} X \xleftarrow[f]{} Y \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

- Часто к дуальным понятиям прибавляют приставку *ко*. Например, эпиморфизмы можно называть комономорфизмами (или мономорфизмы можно называть коэпиморфизмами).

Копределы

- Копределы – это дуальное понятие к понятию пределов.
- *Коконус* диаграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : D(v) \to A$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} D(s(e)) \arrow[r, "D(e)"] \arrow[dr, "a_{s(e)}"'] & D(t(e)) \arrow[d, "a_{t(e)}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Определение копределов

- *Копредел* диграммы D – это такой коконус A, что для любого коконуса B существует уникальный морфизм $f : A \to B$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} D(v) \arrow[d, "a_v"'] \arrow[dr, "b_v"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- Копредел D обозначается *colim* D.
- Категория называется *кополной* (*конечно кополной*), если в ней существуют все малые (конечные) копределы.

Уникальность копределов

Дуализировать можно не только определения, но и утверждения.

Proposition

Если A и B – копределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $f \circ a_v = b_v$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как копредел в $\mathbf{C}$ – это предел в $\mathbf{C}^{op}$, то это утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для пределов. $\square$

Начальный объект

- Объект называется *начальным*, если он является копределом пустой диаграммы.
- В **Set** существует единственный начальный объект – пустое множество.
- В **Hask** начальный объект – пустой тип.
- В **Grp** начальный объект – тривиальная группа.

Копроизведения объектов

- *Копроизведение* (*сумма*) объектов A_1 и A_2 – это копредел диаграммы $A_1 \qquad A_2$. Копроизведение обозначается $A_1 \amalg A_2$ либо $A_1 + A_2$.
- В **Set** копроизведение – это размеченное объединение множеств.
- В **Hask** копроизведение – это *Either*.
- В **Grp** копроизведение – свободное произведение.

Фактор-множества

- Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве B.
- Тогда можно определить множество $B/\sim$ классов эквивалентности элементов B по этому отношению.
- Существует каноническая функция $c : B \to B/\sim$, отправляющая каждый $b \in B$ в его класс эквивалентности.
- Если рассматривать отношение $\sim$ как подмножество $B \times B$, то существуют проекции $f, g : \sim \to B$.
- Стрелка c уравнивает f и g и является универсальной с таким свойством.
- Другими словами, c является коуравнителем f и g.

Коуравнители

- В произвольной категории коуравнители можно рассматривать как обобщение этой конструкции.
- Пусть B – абелева группа, A – подгруппа B, $f : A \hookrightarrow B$ – вложенние A в B. Тогда коядро B/A – это коуравнитель стрелок $f, 0 : A \to B$.
- И наоборот, коуравнитель стрелок $f, g : A \to B$ – это коядро $B/\mathrm{Im}(f - g)$.
- *Пушауты* – дуальное понятие к понятию пулбэков.

План лекции

Копределы

Булевские объекты

Копроизведение $1 \amalg 1$

- В **Set** множество Bool можно определить как копроизведение множеств $\{\mathrm{true}\}$ и $\{\mathrm{false}\}$, каждое из которых является терминальным.
- Копроизведение $1 \amalg 1$ обычно обозначается как 2.
- Можно было бы в произвольной категории определить объект Bool как копроизведение $1 \amalg 1$.
- Но это недостаточно сильное определение. Мы не сможем никаких функций над ним определить.

Булевский объект

- Пусть в $\mathbf{C}$ существуют все конечные произведения.
- Тогда *булевский объект* в $\mathbf{C}$ – это объект Bool вместе с парой морфизмов $\mathrm{true}, \mathrm{false} : 1 \to \mathrm{Bool}$, удовлетворяющий следующему условию.
- Для любых $f, g : A \to B$ существует уникальная стрелка $h : \mathrm{Bool} \times A \to B$, такая что

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle \mathrm{true} \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Bool} \times A \arrow[d, "h"] \\
 & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\langle \mathrm{false} \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Bool} \times A \arrow[d, "h"] \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

Булевский объект и 2

- Любой булевский объект является 2.
- Действительно, если в определении булевского объекта в качестве A взять 1, то мы получим в точности универсальное свойство $1 \amalg 1$.
- Следовательно булевский объект уникален с точностью до изоморфизма.
- Но не любой объект, являющийся 2, является булевским.
- Действительно, в категории групп 2 изоморфен 1.
- Но булевский объект изоморфен 1 только в категориях предпорядка.

if

- Мы можем сконструировать морфизм $if : \mathrm{Bool} \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющий

$$
\begin{tikzcd}
C \times C \arrow[d, "\langle \mathrm{true} \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
\mathrm{Bool} \times (C \times C) \arrow[r, "if"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \times C \arrow[d, "\langle \mathrm{false} \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathrm{Bool} \times (C \times C) \arrow[r, "if"'] & C
\end{tikzcd}
$$

- Действительно, в определении Bool возьмем $A = C \times C$, $B = C$, $f = \pi_1$ и $g = \pi_2$.
- Тогда существует уникальная стрелка $\mathrm{Bool} \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющая условиям выше.