

Теория категорий

Декартово замкнутые категории

Валерий Исаев

17 февраля 2020 г.

Мотивация

- ▶ Очередная конструкция, которую мы хотим обобщить, – это множество/тип функций.
- ▶ Эта конструкция называется по разному: экспонента, внутренний *Hom*.
- ▶ Пусть A и B – объекты декартовой категории \mathbf{C} . Тогда экспонента обозначаются либо B^A , либо $[A, B]$.
- ▶ Какие операции должны быть определены для B^A .
- ▶ Как минимум мы должны иметь аппликацию, которая обычно обозначается ev и является следующим морфизмом:

$$ev : B^A \times A \rightarrow B$$

- ▶ Морфизм ev позволяет нам “вычислять” элементы B^A .

Элементы объекта (a side note)

- ▶ В категории **Set** элементы множества X соответствуют морфизмам из терминального объекта в X .
- ▶ В произвольной категории (с терминальным объектом) мы можем определить элемент объекта таким же образом.
- ▶ Но это не очень полезное определение, так как в произвольной категории объект не определяется своими элементами.
- ▶ Например, в категории графов морфизмы из терминального графа в граф X соответствуют петлям X .
- ▶ Мы можем определить *обобщенный элемент* объекта X как морфизм из произвольного объекта Γ в X .
- ▶ В категории графов вершины и ребра графа X являются его обобщенными элементами (конечно, существует и много других обобщенных элементов этого графа).

Определение

- ▶ Благодаря морфизму ev , мы можем думать об элементах B^A как о морфизмах $A \rightarrow B$. Мы еще должны сказать, что B^A содержит все такие морфизмы.
- ▶ То есть мы должны сказать чему соответствуют обобщенные элементы B^A . Ясно, что у нас должна быть биекция между обобщенными элементами $\Gamma \rightarrow B^A$ и морфизмами $\Gamma \times A \rightarrow B$.
- ▶ Имея морфизм $f : \Gamma \rightarrow B^A$, мы можем построить его каррирование следующим образом:

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f \times id_A} B^A \times A \xrightarrow{ev} B$$

- ▶ Объект B^A вместе с морфизмом $ev : B^A \times A \rightarrow B$ называется *экспонентой* A и B , если для любого $g : \Gamma \times A \rightarrow B$ существует уникальный $f : \Gamma \rightarrow B^A$ такой, что композиция стрелок в диаграмме выше равна g .

Примеры

- ▶ Категория называется *декартово замкнутой*, если она декартова и для любых ее объектов A и B существует их экспонента B^A .
- ▶ **Set** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто множество функций из A в B .
- ▶ **Hask** – декартово замкнута. Действительно, B^A – это просто тип функций из A в B .
- ▶ Все алгебраические категории, которые мы рассматривали, не являются декартово замкнутыми (**Grp**, **Vec**, **Ring**, и т.д.).
- ▶ Категория графов – декартово замнута.

Объект натуральных чисел

Definition

Объект натуральных чисел в декартово замкнутой категории – это объект \mathbb{N} вместе с парой морфизмов $\text{zero} : 1 \rightarrow \mathbb{N}$ и $\text{suc} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию, что для любых других морфизмов $z : 1 \rightarrow X$ и $s : X \rightarrow X$ существует уникальная стрелка h , такая что диаграмма ниже коммутирует.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\text{zero}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\text{suc}} & \mathbb{N} \\ & \searrow z & \downarrow h & & \downarrow h \\ & & X & \xrightarrow{s} & X \end{array}$$

Свойства

- ▶ Объект натуральных чисел уникален с точностью до изоморфизма.
- ▶ В любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел можно определить все примитивно рекурсивные функции.
- ▶ Морфизм $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является расщепленным мономорфизмом.