Теория категорий Декартово замкнутые категории

Валерий Исаев

17 февраля 2020 г.

Мотивация

- Очередная конструкция, которую мы хотим обобщить, это множество/тип функций.
- Эта конструкция называется по разному: экспонента, внутренний *Hom*.
- ▶ Пусть A и B объекты декартовой категории C. Тогда экспонента обозначаются либо B^A , либо [A, B].
- ightharpoonup Какие операции должны быть определены для B^A .
- Как минимум мы должны иметь аппликацию, которая обычно обозначается ev и является следующим морфизмом:

$$ev: B^A \times A \rightarrow B$$

ightharpoonup Морфизм ev позволяет нам "вычислять" элементы B^A .



Элементы объекта (a side note)

- В категории **Set** элементы множества X соответствуют морфизмам из термнального объекта в X.
- В произвольной категории (с терминальным объектом) мы можем определить элемент объекта таким же образом.
- Но это не очень полезное определение, так как в произвольной категории объект не определяется своими элементами.
- Например, в категории графов морфизмы из терминального графа в граф X соответствуют петлям X.
- ▶ Мы можем определить обощенный элемент объекта X как морфизм из произвольного объекта Γ в X.
- В категории графов вершины и ребра графа X являются его обобщенными элементами (конечно, существует и много других обобщенных элементов этого графа).

Определение

- Благодаря морфизму ev, мы можем думать об элементах B^A как о морфизмах $A \to B$. Мы еще должны сказать, что B^A содержит Bce такие морфизмы.
- ▶ То есть мы должны сказать чему соответствуют обобщенные элементы B^A . Ясно, что у нас должна быть биекция между обобщенными элементами $\Gamma \to B^A$ и морфизмами $\Gamma \times A \to B$.
- ▶ Имея морфизм $f: \Gamma \to B^A$, мы можем построить его каррирование следующим образом:

$$\Gamma \times A \xrightarrow{f \times id_A} B^A \times A \xrightarrow{\text{ev}} B$$

• Объект B^A вместе с морфизмом ${
m ev}: B^A \times A \to B$ называется *экспонентой* A и B, если для любого $g: \Gamma \times A \to B$ существует уникальный $f: \Gamma \to B^A$ такой, что композиция стрелок в диаграмме выше равна g.

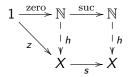
Примеры

- Категория называется декартово замкнутой, если она декартова и для любых ее объектов A и B существует их экспонента B^A .
- ▶ **Set** декартово замкнута. Действительно, B^A это просто множество функций из A в B.
- ▶ **Hask** декартово замкнута. Действительно, B^A это просто тип функций из A в B.
- Все алгебраические категории, которые мы рассматривали, не являются декартово замкнутыми (Grp, Vec, Ring, и т.д.).
- Категория графов декартово замнута.

Объект натуральных чисел

Definition

Oбъект натуральных чисел в декартово замкнутой категории — это объект $\mathbb N$ вместе с парой морфизмов $\mathrm{zero}:1\to\mathbb N$ и $\mathrm{suc}:\mathbb N\to\mathbb N$, удовлетворяющие условию, что для любых других морфизмов $z:1\to X$ и $s:X\to X$ существует уникальная стрелка h, такая что диаграмма ниже коммутирует.



Свойства

- Объект натуральных чисел уникален с точностью до изоморфизма.
- В любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел можно определить все примитивно рекурсивные функции.
- lacktriangle Морфизм $\mathrm{suc}:\mathbb{N} o \mathbb{N}$ является расщепленным мономорфизмом.