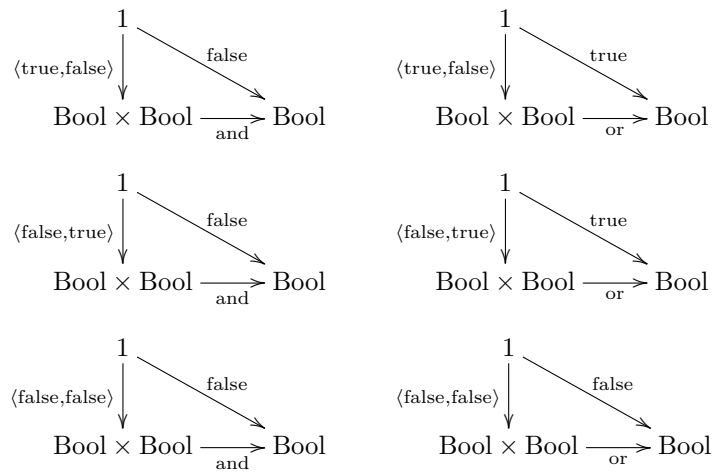


Задания

10 февраля 2020 г.

- Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - Начальные объекты.
 - Копроизведения объектов.
- Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
- Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.
Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.
- Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.
- Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.
- Идемпотентный морфизм $h : B \rightarrow B$ является расщепленным, если существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
- При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
- Пусть в категории **C** есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в **C** морфизмы $\text{and}, \text{or} : \text{Bool} \times \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \downarrow \scriptstyle \langle \text{true}, \text{true} \rangle & \searrow \scriptstyle \text{true} & \downarrow \scriptstyle \langle \text{true}, \text{true} \rangle \\ \text{Bool} \times \text{Bool} & \xrightarrow{\quad \text{and} \quad} & \text{Bool} & \quad \quad & \text{Bool} \times \text{Bool} & \xrightarrow{\quad \text{or} \quad} & \text{Bool} \end{array}$$



9. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть \mathbf{C} – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a) \mathbf{C} – категория предпорядка.
- (b) В \mathbf{C} терминальный объект является булевским.
- (c) В \mathbf{C} существует булевский объект, такой что $\text{true} = \text{false}$.