Теория категорий

Функторы

Валерий Исаев

17 февраля 2020 г.

План лекции

Определение

Изоморфизм категорий

Определение функторов

- Функторы между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – это морфизмы категорий.
- Функтор F состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.
- Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Забывающие функторы

- Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, и так далее.
- Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- Например, существует два забывающих функтора $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$.

Примеры функторов

- Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- Если M и N – пара моноидов, и $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – категории на одном объекте, соответствующие этим моноидам, то функторы между $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N.
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория и A – объект $\mathbf{C}$, тогда $A \times - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \to B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \to A \times B'$.
- Существует очевидный функтор $I : \mathbf{Agda} \to \mathbf{Set}$.
- Функторам в агде соответствуют функторы $\mathbf{Agda} \to \mathbf{Agda}$.

Функторы и дуальность

- Каждому функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ можно сопоставить функтор $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- Другими словами существует биекция между множествами функторов $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- С другой стороны, функторы вида $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ никак не связаны с функторами вида $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Первые называются контравариантными функторами, а вторые – ковариантными.

Пределы и копределы функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ можно определить понятие предела *lim* F и копредела *colim* F. Определение такое же как и для диаграмм.
- Категории $\mathbf{J}$ можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ – как обощение диаграмм в $\mathbf{C}$.
- Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- Функторы $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ тоже называют диаграммами.

План лекции

Определение

Изоморфизм категорий

Изоморфные категории

- Для любой категории $\mathbf{C}$ существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G.
- Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Злые понятия

- Как правило, имея две группы, не имеет смысла спрашивать равны ли они; нужно спрашивать об их изоморфности.
- Это верно для объектов в любой категории.
- Любое понятие, которое говорит о равенстве объектов некоторой категории, называют *злым*.
- Изоморфизм категорий – злое понятие.