Singulärwertzerlegung

$$A = U\Sigma V^T$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ U \in \mathbb{R}^{m\times m},\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n},\ V^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$U^T = U^{-1},\ V^T = V^{-1},\ \Sigma =$ Diagonalmatrix mit 0 aufgefüllt

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & m \leq n \\ \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & n \leq m \end{cases}$$

$\sigma_i =$ Singulärwerte

$\Sigma = {}_U M(f_A)_V = U^T A V \quad | \quad f_A(v) = Av$

$$\left.\begin{aligned} Av_i &= \sigma_i u_i \quad | \quad i = 1, \ldots, r \\ A^T u_i &= \sigma_i v_i \quad | \quad i = 1, \ldots, r \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$$

Σ bestimmen

1. Bestimme Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A^T A$
2. Sortiere $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$
3. Bestimme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \rightarrow \Sigma$

V bestimmen

$Eig_A(\lambda_i) \rightarrow V = (v_1 \ldots v_n)$

U bestimmen

$\forall i$ soweit möglich $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \rightarrow$ Ergänze Gram Schmidt $\rightarrow U = (u_1, \ldots, u_m)$