Vektorprodukt

nur im $\mathbb{R}^3$

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow a, b \perp a \times b$$

Orthogonale Projektion

Orthogonales Komplement

V ist ein euklidischer Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$U \leq V$

orthogonales Komplement zu U:

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \; \forall u \in U\}$$

- $U^\perp \leq V$
- $U \cap U^\perp = \{0\}$
- $\exists_1$ Darstellung der Form $v = u + u^\perp \;\; \forall v \in V \mid u \in U, \; u^\perp \in U^\perp$

Bestimmung des orthogonalen Komplement

$U \leq V, \; dim(V) = n, \; dim(U) = r$

$U = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$

ergänze basis $B_u = \{a_1, \dots, a_n\}$ zu Basis von V:

$$B_V = \{a_1 \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n\}$$

Bilde ONB $B = \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ von V wobei $\{b_1, \dots, b_r\}$ ONB von U

$$U^\perp = \{b_{r+1}, \dots, b_n\}$$

Orthogonale Projektion

$$P_U : \begin{cases} V & \to & U \\ v = u + u^{\perp} & \to & u \end{cases}$$

V euklidischer Vektorraum mit Untervektorraum $U \leq V$

$dim(V) = n$

$dim(U) = v$

Bestimme $u = P_u(v)$

$$\begin{aligned} ||v-w||^2 &= ||\overbrace{v-u}^{=u^{\perp}} + u - w||^2 \\ &= \left\langle u^{\perp} + (u-w),\ u^{\perp} + (u-w) \right\rangle \\ &= ||u^{\perp}||^2 + ||u-w||^2 + 2\langle u^{\perp}, u-w \rangle \\ &\geq ||u^{\perp}||^2 = ||v-u||^2 \end{aligned}$$

$$u = \min_{w \in U} ||v-w||$$

Ausrechnen:

$V = \mathbb{R}^n$, $U \leq V$, $U = \langle b_1, \ldots, b_r \rangle \mid b_i \in \mathbb{R}^n$

$u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r$

Bilde Matrix $A = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}$

$$u = (b_1, \ldots, b_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}}_{=:x}$$

$\to ||v-u|| = ||v - Ax|| = min$

Das Lineare Ausgleichsproblem

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times r},\ r \leq n,\ b \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^r : ||b - Ax|| = min$

Lösung: Finde x als Lösung des LGS $A^T Ax = A^T b =$ "Normalgleichung"