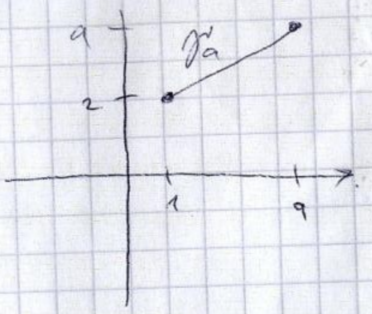
Волков М 2Б38 +6

$$\oint \quad F(a) = \int \frac{\cos y}{x+y+1}\,dx - \frac{\sin x}{2x+y+1}\,dy$$

$a>0 \quad F'(a) = ?$



$\gamma_a \ [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$x: \ \gamma(0)=1, \ \gamma(1)=a$ $\qquad y=(a-2)t+2$

$\qquad \gamma(1)=a$ $\qquad x=(a-1)t+1$

$y: \ \gamma(0)=2$

$\qquad \gamma(1)=a$ $\qquad \frac{dy}{dt}=(a-2)dt$

$\gamma(t)=?$

$\qquad \frac{dx}{dt}=(a-1)dt$

~~$F'(a)$~~

$$F(a) = \int \frac{\cos((a-2)t+2)}{(a-1)t+1+(a-2)t+2+1}(a-1)\,dt + \frac{\sin((a-1)t+1)}{2((a-1)t+1)+(a-2)t+2+1}(a-2)\,dt =$$

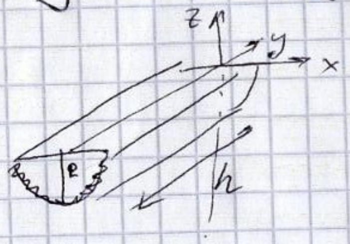
потеряли

$$= \int \Big(\frac{\cos(at-2t+2)}{2at-3t+4} + \frac{\sin(at-t+1)}{3at+\dots}$$

$$F'(a) = \int$$

Волков М 2Б38 +9

$$\int x^3\,dx + \frac{y^3}{x^3+z^3}\,dy + z^3\,dz$$



R_2
$$\begin{cases} x^2+z^2=R^2 \\ x=-\sqrt{R^2-z^2} \\ y=-h \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x=\cos\varphi \\ z=\sin\varphi \\ y=-h \end{cases} \qquad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$$

$$\int_{-\pi}^{0}\Big(-\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{-h^3}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\cdot 0 + \sin^3\varphi\cos\varphi\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\big(\sin^3\varphi\cos\varphi - \cos^3\varphi\sin\varphi\big)\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\big(\dots d(\cos\varphi) - \dots d(\sin\varphi)\big) =$$

наоборот!

$=$

Контрольная № 2. 22.12.14

1. Пусть $A = (x_0, y_0)$ — некоторая точка плоскости. Рассмотрим 4 точки, у которых обе координаты отличаются на h от соответствующих координат точки A. Обозначим через $S(h)$ сумму значений функции $f(x,y) = \dfrac{e^y}{1+\sqrt{x+y}}$ в этих четырех точках. Напишите разложение Тейлора функции $S(h)$ с точностью до $o(h^2)$ при $x_0 = 1$, $y_0 = 3$.

2. Рассмотрим сферу C: $x^2+y^2+z^2 = 8$ и однополостный гиперболоид Γ: $x^2+y^2 = z^2+4$. Вычислите

$$\int (x+y+1)\,dx + 2(x-z)\,dy + (y-x)\,dz$$

по линии пересечения поверхностей C и Γ в полупространстве $z > 0$. Кривая ориентирована так, что при движении по ней с внешней стороны сферы северный полюс сферы находится слева.

3. Найдите наибольшее значение функции $f(x,y,z) = x-2y-z$ на множестве, заданном неравенствами $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$, $y-z \leqslant 0$.

4. С помощью метода множителей Лагранжа проверить, является ли точка $(2,3,1)$ точкой локального условного экстремума функции $f(x,y,z) = x^2-y^2-z^2-5x$ на поверхности $xz+y^2 = 11$.

Контрольная № 1. 27.10.14

1. Разложите в ряд функцию

$$f(x) = x\,\mathrm{arctg}\big(x+\sqrt{1+x^2}\big).$$

2. Найти $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$.

3. Дифференцируема ли функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n^{2+\varepsilon} + t\sqrt{n}}$$

на промежутке $t \in (0;\pi)$ при $\varepsilon > 0$?

4. Преобразовать выражение z'_x, сделав замену переменных $z = wuv^2$, $x = w$, $y = u$. Для новых переменных считать w функцией, а u и v — независимыми переменными.

36. Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Мера

Волков +4 2838

36. Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений.

Гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$ - это такое M гомеоморфное $O \subset \mathbb{R}^k$ $(k \leq m)$

~~∃Φ того~~ Гладкое ~~многообразие~~ многообразие может быть задано системой

Бывает так в жизни, что

1. 1 семестр экзамен - попался один из 2х невыученных вопросов
2. Предыдущий зачет - обнаружил ответ за 30 сек. до конца
3. Обнаружил отсутствие у себя этого пункта 3 минуты назад.

Мера:

$\tilde{M}$ - объем

M - это мера, если оно к тому еще и счетно аддитивно

$$\left(A = \bigsqcup^{\infty} A_i \quad \mu A = \sum^{\infty} \mu A_i\right)$$

Если это всё не получилось, то надо чуть аккуратнее

Волков М 2838 $\boxed{11.}$ +6

1. Регулярность меры Лебега

$\forall A \forall \varepsilon \mid \exists G_\varepsilon$ открытое $\subset A$ наоборот!

$\exists H_\varepsilon$ $\boxed{\text{закрытое}}$, $A \subset H$ /

они все конечно измеримы по ~~Лебегу~~ Лебегу

$\mu(H_\varepsilon - G_\varepsilon) < \varepsilon$.

2. Матрица Якоби

L - матрица Якоби, если она соотв. ~~...~~ опер. $\mathcal{L}$ дифференцирование

$\left(F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h) \dots \right)$

Волков 2538

3383

$6?$

$+5$

$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad /'$

$2xdx+2ydy+2zdz=0 \quad /'$

$dx^2+dy^2+dz^2+zd^2z=0$

$dz=\frac{1}{z}(-xdx-ydy)$

$d^2z=-\frac{1}{z}(dx^2+dy^2+dz^2)=0$

$-\frac{1}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)dx^2-\frac{2xy}{z^3}dxdy-\frac{1}{z}\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)dy^2=0$

$\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{z}\left(\frac{x^2}{z^2}+1\right)=-\frac{x^2+z^2}{z^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{z^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{z^2+y^2}{z^3}$

3384

$z^3-3xyz=a^3$

$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz\frac{\partial x}{\partial x}-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{+yz}{(-xy+z^2)}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy-z^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-x\frac{\partial z}{\partial y}(xy-z^2)+\left(x-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)xz}{(xy-z^2)^2}=$

$=\frac{x^2z(xy-z^2)+(x^2y-xz^2+2xz^2)xz}{(xy-z^2)^3}=\frac{2x^3yz}{(xy-z^2)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(-xy+z^2)\left(z+\frac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\left(-x+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(z^2-xy)^2}=$

$=\frac{z(z^4-2xyz^3-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$

Волков М. 2538

$+10$

3434

$x^2y''+y'x+y=0 \qquad x=e^t$

$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}; \quad y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$

$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+y=0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}+y=0$

3435

$y'''=\frac{6y}{x^3} \qquad t=\ln|x|$

$|x|=e^t; \quad \frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$

$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-t}\left(-2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)e^{-2t}\right)$

$=\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t}$

$y'''-3y''+2y'-6y=0$

3436

$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$

$y'=\frac{1}{-\sin t}\frac{dy}{dt}$

$-\frac{1}{\sin t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{-\sin t}\frac{dy}{dt}\right)$

$=-\frac{1}{\sin t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{-\sin t}+\ldots\right.$

$y''=+\frac{1}{\sin^3 t}\left(\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cos t\frac{dy}{dt}\right)$

$(1-\cos^2 t)\frac{1}{+\sin^3 t}\left(\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}\right)+\cos t\frac{1}{\sin t}\frac{d\ldots}{\ldots}+n^2y\ldots$

$+\frac{1}{\sin t}\left(\sin t\frac{d^2y}{dt^2}-\cancel{\cos t\frac{dy}{dt}}\right)+\frac{\cos t}{\sin t}\frac{dy}{dt}+n^2y=0$

$\frac{d^2y}{dt}+n^2y=0$

Волхов М
2538

+8

$x^2y^2+y^2z+xz=3$

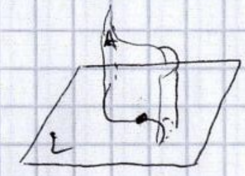
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2xy^2+z \\ 2yx^2+2yz \\ y^2+x \end{pmatrix} \to \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{}$

$M=(1,1,1)$

$l: \begin{cases} x^2y^2+y^2z+xz=3 \\ x+y^2+z^2=3 \end{cases}$

$V=?$ V – кас. к L в M и он ~~нормаль~~ перпенд. кас. и l

$l: \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2xy^2+z \\ 2yx^2+2yz \\ y^2+x \end{pmatrix}$



$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$\vec{s} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} i & 2xy^2+z & 1 \\ j & 2yx^2+2yz & 2y \\ k & y^2+x & 2z \end{vmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (2yx^2+2yz)2z - 2y(y^2+x) \\ -\left((2xy^2+z)2z - y^2 - x\right) \\ (2xy^2+z)2y - (2yx^2+2yz) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4yx^2z + 4yz^2 - 2y^3 - 2xy \\ 4xy^2z + 2z^2 - y^2 - x \\ 4xy^3 + 2yz - 2yx^2 + 2yz \end{pmatrix}$

$\vec{s}(M) = \begin{pmatrix} 4+4-2-2 \\ 4+2-1-1 \\ 4+2-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Волхов Михаил 2538

+3

$\sum \frac{\sin\frac{x}{n}}{\ln(n+x)+\sqrt{n}x}$ $x \in (0; +\infty)$

$[a, b]$

1. $\sum \left| \frac{\sin\frac{x}{n}}{\ln(n+x)+\sqrt{n}x} \right| \le \sum \frac{\sin\frac{b}{n}1}{\ln(n+a)+\sqrt{n}a}$

$\left|\sum^{n} \sin\frac{x}{n}\right| = \left|\sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3} + \dots\right| \le \left|\underbrace{e^{i} + e^{i/2} + \dots}_{n}\right| \le$

$\le n e^{i}$?

Он не сходится по-моему

$\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \ge N\ m \in \mathbb{N}\ \exists x \in [a,b] = \sqrt{N}$

$|U_{n+1}(x)| \ge \varepsilon$

$\forall \varepsilon = \frac{1}{1000}$ $\left| \frac{\sin\frac{x}{N+1}}{\ln(N+1+x)+\sqrt{N+1}\,x} + \dots + \frac{\sin\frac{x}{2N}}{\ln(2N+x)+\sqrt{2N}\,x} \right|$

?

$\frac{\sin}{\ln + \sqrt{n}\,x} \ge \frac{\sin 1}{n+\sqrt{n}\sqrt{n}}$ расх

$\ge \frac{N \cdot \sin\frac{x}{2N}}{\ln(2N+x)+\sqrt{2N}\,x}$ $\frac{N \cdot \sin\frac{1}{2\sqrt{N}}}{\ln(2N+\sqrt{N})+\sqrt{2N}}$

$2N + N > \ln(2N + \dots)$

$\ge \frac{N \cdot \sin\frac{1}{2\sqrt{N}}}{2N+N+\sqrt{2N}^2}$ $\sin\frac{1}{2\sqrt{N}} \ge \frac{1}{100}$

2.

по признаку ~~Вейер~~ расх.

почему видно

Волков М 2538

+9

1. N 3257

$$\frac{\partial^3(x\ln(xy))}{\partial x^2\partial y} = ?$$

$$= \frac{\partial^2(\ln(xy))}{\partial x\partial y} =$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial y} = 0$$

2. N 3258

$$\frac{\partial^6(x^3\sin y + y^3\sin x)}{\partial x^3\partial y^3} =$$

$$= \frac{\partial^5(3x^2\sin y + y^3\cos x)}{\partial x^2\partial y^3} =$$

$$= \frac{\partial^4(6x\sin y - y^3\sin x)}{\partial x\partial y^3} =$$

$$= \frac{\partial^3(6\sin y - y^3\cos x)}{\partial y^3} =$$

$$= \frac{\partial^2(6\cos y - 3y^2\cos x)}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial(-6\sin y - 6y\cos x)}{\partial y} =$$

$$= -6(\cos y + \cos x)$$

3. N 3259

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = ?$$

$$u = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y + \operatorname{arctg}z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\partial y\partial z} = 0$$

4. N3260

$$\frac{\partial^3 e^{xyz}}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^2(yze^{xyz})}{\partial y\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(e^{xyz}(z+xyz^2))}{\partial z} =$$

$$= e^{xyz}(xyz + x^2y^2z^2 + 1 + 2xyz) =$$

$$= e^{xyz}(x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)$$

5. N 3262

$$\frac{\partial^{p+q}((x-x_0)^p(y-y_0)^q)}{\partial x^p\partial y^q} = \frac{\partial^{p+q-1}(p(x-x_0)^{p-1}(y-y_0)^q)}{\partial x^{p-1}\partial y^q} =$$

$$= \frac{\partial^{p+q-2}(p(p-1)(x-x_0)^{p-2}(y-y_0)^q)}{\partial x^{p-2}\partial y^q} =$$

$$= p!\,q!$$

Понятно, очевидно

6. N 3269

$$d^3(x^3+y^3-3x^2y+3xy^2) = d^2((3x^2-6xy+3y^2)dx + (3y^2-3x^2+6xy)dy) =$$

$$= d((6x-6y)dx - (6x-6y)dy)dx +$$

$$d((-6x+6y)dx + (6y+6x)dy)dy =$$

$$= 6(dx)^3 - 6(dx)^2dy - 6(dx)^2dy + 6(dy)^2dx +$$

$$+ 6(dx)^2dy + 6(dy)^2dx + 6(dy)^2dx + 6(dy)^3 =$$

$$= 6((dx)^3 - 3(dx^2)dy + 3(dy)^2dx + (dy)^3).$$

7. N3271

$$d^{10}(\ln(x+y)) = d^9\left(\frac{1}{x+y}(dx+dy)\right) = -d^8\left(\frac{1}{(x+y)^2}(dx+dy)^2\right) =$$

$$= \dots = -\frac{(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}\cdot 9!$$

вылазит отсюда

вылезает.

8. N 3273

$$d^3(xyz) = d^2(yz)dx + d^2(xz)dy + d^2(xy)dz =$$

$$= d(zdy + ydz)dx + d(zdx + xdz)dy +$$

$$+ d(xdy + ydx)dz = 6\,dx\,dy\,dz$$

9. N3274

$$u = \ln(x^xy^yz^z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z$$

$$d^4(x\ln x + y\ln y + z\ln z) = d^3(\ln x + 1)dx +$$

$$+ d^3(\ln y + 1)dy + d^3(\ln z + 1)dz =$$

$$= d^2\left(\frac{1}{x}\right)(dx)^2 + d^2\left(\frac{1}{y}\right)(dy)^2 + d^2\left(\frac{1}{z}\right)(dz)^2 =$$

$$= d\left(-\frac{1}{x^2}\right)(dx)^3 + d\left(-\frac{1}{y^2}\right)(dy)^3 + d\left(-\frac{1}{z^2}\right)(dz)^3 =$$

$$= 2\left(\frac{(dx)^4}{x^3} + \frac{(dy)^4}{y^3} + \frac{(dz)^4}{z^3}\right)$$

10. N 3275

$$u = e^{ax+by}$$

$$d^n = d^{n-1}(a e^{ax+by}dx + b e^{ax+by}dy) =$$

$$= d^{n-1}e^{ax+by}(adx + bdy) =$$

$$= d^{n-2}e^{ax+by}(adx + bdy)^2 =$$

$$= \dots = e^{ax+by}(adx + bdy)^n$$

$$\ln xy + x\cdot\frac{1}{x}$$

Волков М КР №1 2538 27.10.14 61

$f(x) = x \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$

20 $f'(x) = \underset{☺}{\text{боль}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+1} + x) + \frac{x}{2(x^2+1)}$

$f^4(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2+1}+x)^2} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) + \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)x - 2x^2}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(1+(\sqrt{x^2+1}+x)^2)\sqrt{x^2+1}} + \frac{x - x^2}{2(x^2+1)^2} =$

$= \dots = \frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 - 2x^2 + 3x^4 + \dots =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[n x^{2(n-1)} \cdot (-1)^{n+1} \right]$

$\int f^4(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^5}{5} - \frac{4x^7}{7} + \dots$

$\iint f^4(x) = f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{3 \cdot 4} + \frac{3x^6}{6 \cdot 6} - \frac{4x^8}{7 \cdot 8} =$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3} + \dots =$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \dots\right) =$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[x^{2n} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot (-1)^{n-1} \right]$

Контрольная работа №2 2538 Волков М

(1.) В условии сказано „обе"!

A_2, A_1, C, h, $x_0 y_0$, A_3, A_4

$S(h) = f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0 - h) + f(x_0 + h, y_0) + f(x_0 - h, y_0)$

$f(c) = \frac{e^3}{1+\sqrt{1+3}} = \frac{e^3}{3}$

$\frac{\partial f}{\partial h} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial h}}_{1}$

если там +, то 1, иначе −1 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $i = 1, 2$; x, y

$S(h) = \left[f(c) + \frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2\right]$

$+ \left[f(c) - \frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h^2\right]$ ← везде

$+ \left[f(c) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2\right]$ $f = f($

$+ \left[f(c) - \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2\right] =$ (сначала $\frac{\partial}{\partial \dots}$, по подста

$= 4\frac{e^3}{3} + 2\frac{\partial^2 f(c)}{\partial y^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x^2} h^2 =$

$= 4\frac{e^3}{3} + 2\left(\frac{\partial^2 f(c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x^2}\right) h^2 + o(h^2)$

TODO: Посчитать.

Ой, это не так прочел условие

Хм.

12.08.14 Волков М 2538

$$f_n(x) = \frac{n\cdot 3^{-\sqrt{nx}}}{x+1} \qquad x\in[0,1]$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3}{(x+1)3^{\sqrt{nx}}} = \overset{0}{\cancel{\lim \frac{1}{(x+1)3^{\sqrt{nx}}\ln 3 \cdot \ldots}}}$$ (понятно), экспонента куда сильнее линии)

~~$f_n(x) = 3$~~

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{n\cdot 3}{(x+1)3^{\sqrt{nx}}}\right| \geq \frac{n}{3(\frac{1}{n}+1)} \to \infty$$

$$\exists x = \frac{1}{n};\ \frac{n}{(\frac{1}{n}+1)3^1} = \frac{\frac{1}{3}n}{\frac{1}{n}+1} \to \infty$$

что-то мелкое

Ответ: сходимость есть, не равном.