12.02.2013 Лекция-лекция :3

Спектральная теория линейных операторов

§18 Линейные операторы и их матричная запись

Опр: $A: X \to Y$ (X, Y - лп над F) γ линейным если $\forall x$ $A(x+y) = A(x) + A(y)$;
$A(\lambda x) = \lambda A(x)$;

NB $A(x) = Ax$

Пример: ① $J: X \to X$ (автоморфизм) $Jx = x$ - тож. оператор

② $\Theta: X \to Y$ $\Theta x = 0$ - нулевой оператор

③ $P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to L_1$ $\forall x \in X = x_1 + x_2$ ($x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$) $P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1$

④ $X = P_n$; $D: P_n \to P_{n-1}$ по ф-ле $D(p(t)) = \frac{dp(t)}{dt}$;

⑤ $X = C^\infty(0;1)$

⑥ $K(y(t)) = \int_\alpha^\beta q(t,s) y(s) ds$

Матрица ЛО:

$A: X \to Y$ Базис X: $\{e_i\}_{i=1}^n$; базис Y: $\{h_k\}_{k=1}^m$
$\dim X = n$ $\dim Y = m$

Матрицей ЛО A в базисах e_i - h_k называется матрица $\|\alpha_i^k\|$, такая, что

$Ae_i = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k h_k$ (то есть $((Ae_i)^k = \alpha_i^k)$)

Пример: $J: X \to X$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; для нулевого оператора нулевая матрица
$A(e_1)$ $A(e_n)$

Еще пример: $P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$ в L_1: $\{e_1 \dots e_s\}$ в L_2 $\{e_{s+1} \dots e_n\}$

Тогда $\forall x_1 \in L_1$ $P_{L_1}^{\parallel L_2} x_1 = x_1$; $\forall x_2 \in L_2$ $P_{L_1}^{\parallel L_2} x_2 = 0$

$$P^{M_2}_{L_1} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Понятно?

$$\mathcal{D} \cdot \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n \qquad D = \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \\ t^n \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{1, t, t^2 \dots t^n\}$

$\mathcal{D}_1 = 0 \quad \mathcal{D}_2 = 2t \quad \mathcal{D}_n = nt^{n-1}$

$\mathcal{D}_2 = 1$

<u>Теорема</u>: Задание линейного оператора эквив. заданию его матрицы в паре фикс. базисов

$A: X \to Y \quad \{e_i\}_{i=1}^n \quad \{h_k\}_{k=1}^m \quad A = \|\alpha_i^k\| : \alpha_i^k = (Ae_i)^k$

Δ в одну сторону очевидно.

в другую: $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$, $\boxed{Ax = y = \sum_{k=1}^m \eta^k h_k}$

$$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \overset{л.о.}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i Ae_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\sum_{k=1}^m \alpha_i^k h_k\right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \xi^i\right) h_k$$

∇

$$x \longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}; \quad y_{(Ax)} \longleftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix}; \Rightarrow Y = AX$$

<u>Опр</u> Прямым произведением X и Y над F называется:

$$X \times Y = \{\text{все л.о. } X \to Y\}$$

<u>Опр</u> $\mathcal{C} = A + B$, если $\mathcal{C}(x) = Ax + Bx$

<u>Лемма</u> $\mathcal{C}$ — лин. оператор

1. $\mathcal{C}(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B(x_1 + x_2) = A(x_1) + B(x_1) + A(x_2) + B(x_2) = \mathcal{C}(x_1) + \mathcal{C}(x_2)$
2. $\mathcal{C}(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda(A(x) + B(x)) = \lambda \mathcal{C}(x)$

Интеграция

Опр $\mathcal{D}$ — произведением $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$, если

$$\mathcal{D} = \alpha \mathcal{A} \longrightarrow \forall x \in X \quad \mathcal{D}(x) = \alpha \mathcal{A}x$$

Лемма $\mathcal{D}$ линеен. (очевидно)

Теорема $X \times Y$ — лп над F (Д-во — проверка аксиом)

Базис $X \times Y$: $\mathcal{E}^i_k : X \to Y$ по ф-лам

$$\mathcal{E}^i_k x = \xi^i h_k \quad \left[x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i ; \{h_k\}_{k=1}^{m} \text{ — базис } Y \right]$$

$$\mathcal{E}^i_k \xleftarrow{\text{связь}} E^i_k \qquad \begin{array}{c|cccc} & e_1\ e_2 & & e_i & & e_n \\ \hline h_1 & 0\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ h_k & 0\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ h_m & 0\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array} ;$$

$\boxed{\text{Упражнение !!!}}$

Теорема $\{\mathcal{E}^i_k\}$ базис $X \times Y$

(NB) $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha^k_i \mathcal{E}^i_k$

$\dim(X \times Y) = n * m \qquad F^m_n$ — матрицы $m \times n$

(NB) $\not\cong F^m_n$ $\dim F^m_n = m \cdot n$, ?? ~ ?
$(\mathcal{C}^m_n, \mathcal{L}^m_n)$

Лемма $\mathcal{A} \leftrightarrow A$, $\mathcal{B} \to B$
Тогда $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \leftrightarrow C = A + B$,
$\mathcal{D} = \mathcal{A} \cdot \alpha \leftrightarrow D = \alpha \cdot A$;

Теорема: пространство $X \times Y$ и F^m_n изоморфны

§19 Алгебра операторов и матриц

Опр ЛП X над полем F называется алгеброй, если для него определена бинарная замкнутая бинарная операция ($[\bar{a}, \bar{b}]$)

Коммутативность, дистрибутивность, ассоциативность

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\det AB = \det A \cdot \det B$

$(AB)^T = B^T A^T$

$g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1$

19.02.2014

<u>Опр</u> $B \cdot A$ (где $A: X \to Y$; $B: Y \to Z$; $X\ Y\ Z$ - лп над F)

γ $C = BA$, $\forall x \in X$ $C(x) = B(Ax)$

<u>Лемма</u> C - л.о., т.е. $(C: X \to Z) \Rightarrow C \in X \times Z$

$(C(x_1 + x_2) = C(x_1) + C(x_2);\ C(\lambda x) = \lambda C(x))$

] $\dim X = n$ $\quad \dim Y = m$, $\quad \dim Z = p$;

$\{e_i\}_{i=1}^n$ $\quad \{h_j\}_{j=1}^m$ $\quad \{l_k\}_{k=1}^p$

$A \leftrightarrow A = \|\alpha_i^j\|$ $\quad B \leftrightarrow B = \|\beta_j^k\|$ $\quad C \leftrightarrow C = \|\gamma_i^k\|$

$\triangleleft\ C e_i \overset{\text{def } C}{=} \sum_{k=1}^p \gamma_i^k l_k$

$C e_i = (B \cdot A) e_i = B(Ae_i) \overset{\text{def } A}{=} B\left(\sum_{j=1}^m \alpha_i^j h_j\right) \overset{B\text{-л.о.}}{=}$

$= \sum_{j=1}^m \alpha_i^j B h_j \overset{\text{def } B}{=} \sum_{j=1}^m \alpha_i^j \left(\sum_{k=1}^p \beta_j^k l_k\right) = \sum_{k=1}^p \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \beta_j^k \alpha_i^j\right)} l_k$

$\gamma_i^k = \sum_{j=1}^m \beta_j^k \alpha_i^j$ $\quad C = BA$

$\triangleleft\ X \times X = \{A: X \to X\}$ - мн-во всех автоморф.

Теорема. X - алгебра над F ($X \overset{\wedge 17}{\text{над}} F$)

$\mathcal{B}\mathcal{A} : X \to X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{B}\mathcal{A}"'] & X \arrow[r, "\mathcal{B}"] & X \end{tikzcd}$$

$\triangleleft$ $F^n_m = \{A_{k \times l} = \|\alpha^i_k\|, \alpha^i_k \in F\}$

Теорема. F^n_m - алгебра над F

Определ. Две алгебры X и Y над F называются изоморфными, если между элементами можно установить биекцию, сохраняющую линейную и мультипликативную структуру, то есть:

1) $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$
2) $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$ для $\forall x, y$ $x \in X$, $y \in Y$
3) $x_1 x_2 \leftrightarrow y_1 y_2$

Теорема X и X и F^n_n изоморфны

620 Обратная матрица. Обратный опер.

Опр $\exists$ X - алгебра. Единицей алгебры e $\forall$

$e \in X$: $\forall x \in X$ $xe = ex = x$

Лемма e - единственная $ee' = e'e = \dots$ ∇

Опр $\exists x, y \in X$, $\exists x \cdot y = e$, тогда x $\forall$ левым обратным элементом к y, а y - правым обратным к x;

Опр $\exists z$ имеет и левый и правый обратный (z^*) одинаковый эл-т. Тогда z называется обратимым, а z^{-1} - обратным к z.
$zz^{-1} = z^{-1}z = e$

Лемма $\exists z$ имеет имеет левый а и правый в, тогда z обратим, а $z^{-1} = xzy$; z^{-1} - !

$x \cdot z = e$, $z \cdot y = e$; $\triangleleft$ $x \cdot z \cdot y = ey = y$ ⟲ ну и порог все
$x \cdot (z \cdot y) = xe = x$

$z^{-1} z z^{n-1} = \dots = \nabla$

Опр $\exists A \in F_n^n$ $A^{-1} \in F_n^n$ $\exists$ обратной к A
если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Опр Квадрат. матрица A – невыр. если $\det A \neq 0$.

Теорема A^{-1} exists $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Дост. 1 В: $AB = E$ 2. A: $BA = E$ $\longrightarrow$ $C = B = A^{-1}$

① $\triangleleft$ $AB = E$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i \beta_k^i = \delta_k^i$ (1) $\triangleleft$ k фикс:

$\begin{pmatrix} \beta_k^1 \\ \beta_k^2 \\ \vdots \\ \beta_k^n \end{pmatrix}$ – как изв. в (1) det сист = $\det A$

det сущ. $\det \neq 0 \Rightarrow$ Крамер $\begin{pmatrix} \beta_1^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^n \end{pmatrix} = B$

② $\triangleleft$ $CA = E$ $\sum \gamma_j^i \alpha_k^j = \delta_k^i$ $\left\{ i=1 \left(\gamma_1^i \dots \gamma_n^i \right) = C \right.$
$\exists$ фикс „i"

Необх: $B = A^{-1}$ $AB = E$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$

И куча слов.....

Вычисление A^{-1}

① Гаусс: $(A|E) \sim_{\text{гаусс}} \sim (E|A^{-1})$

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$ $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^1 \beta_1^1 \quad \alpha_2^1 \beta_1^2 \dots = \delta_k^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^n \beta_k^1 \quad \alpha_2^n \beta_k^2 \dots = \delta_k^n \end{array} \right.$ & ..... ?

② Метод союзных матрицы

Опр: $\tilde{A} = \| A_j^i \|$ / $A_j^i = (-1)^{i+j} M_j^i$

И 9-во...

Теорема $A^{-1} = \dfrac{(\check{A})^T}{\det A}$; $\quad \exists A = (a_1 \dots a_n) \quad a_j = \begin{pmatrix} \alpha_j^1 \\ \vdots \\ \alpha_j^n \end{pmatrix}$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \beta_k^j = \delta_k^i$$

Крамер $\quad \mathrm{Col}\,\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ "k"; $\quad \beta_k^j = \dfrac{\det(a_1 \dots a_n / a_j \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k)}{\det A}$

$$\begin{array}{c} \\ \\ "k" \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \overset{"j"}{0} & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & & & \\ \alpha_1^k & \dots & 1 & \dots & \alpha_n^k \\ \vdots & & & & \\ \alpha_1^n & \dots & 0 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = 0 + 0 + \dots + 1 \cdot (-1)^{k+j} \cdot M_j^k + \dots + 0 = A_j^k$$

$$B = A^{-1} = \frac{(\check{A})^T}{\det A}$$

Обратный оператор

Опр $\exists A : X \to X$: $A \in X \to X$; A^{-1} обратимый, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I;$$

Теорема: A^{-1} ex $\Longleftrightarrow$ в $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ (какой-нибудь) $\det A \neq 0$

Д-во через соотв. с $A \leftrightarrow A$

10.02.2014 Д/З

3.109 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

3.112 $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow$

26.02.2014 Лекция

Опр $\exists A: X \to Y$; $\operatorname{Im} A = \{y \in Y \mid y = Ax\}$

$\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$

Теорема о ядре и образе:

Лемма: $\operatorname{Ker} A$ – пр X

$\operatorname{Im} A$ – пр Y

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim X$$

Д-во: $\dim \operatorname{Ker} A = k$, $\exists \{e_1, e_2, e_3 \dots e_k\}$ – базис $\operatorname{Ker} A$

$\dim X = n$; $\underbrace{\{e_1 \dots e_k}_{\text{базис } \operatorname{Ker} A}, e_{k+1} \dots e_n\}$ – базис ~~dim~~ X

1. соображение: $\operatorname{Im} A = \text{ЛО}\{Ae_{k+1} \dots Ae_n\}$

$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$; $Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi^i Ae_i = \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i Ae_i$

2. $\{Ae_{k+1} \dots Ae_k\}$ – ЛНЗ $\qquad A: X \to X$

$\leftarrow$ $\forall$: $\exists \alpha_i \neq 0 \mid \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ae_i = 0$

$x = \alpha_{k+1} e_{k+1} \dots \alpha_n e_n \in \operatorname{Im} A$

$Ax = A \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ae_i = 0$ $\quad Ax = 0$, $x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i \ (\in \operatorname{Ker} A)$

Значит $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim X = n$.

Теорема Инвариантная формулировка существ. обр. опер.

для $\exists A^{-1}$ Ин $\begin{cases} \operatorname{Ker} A = \{0\} \\ \operatorname{Im} A = X \end{cases}$ $\quad (A: X \to X)$

Д-во: $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

$Ax = 0$; $\longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi^k = 0 \ (i = 1 \dots n)$,

значит $\det A \neq 0$ (Крамер) $\quad A^{-1} \longleftrightarrow A^{-1}$

(921) Преобразование (координат в-в X и X^*) и (матрицы $A: X \to X$) при замене базиса

$\{e_i\}_{i=1}^{n} \longleftrightarrow \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{n}$ $\qquad T = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \dots & \tau_n^1 \\ \tau_1^n & \dots & \tau_n^n \end{pmatrix}$, $\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_k^i e_i$,

т.е. $\tau_k^i = (\tilde{e}_k)^i$

Лемма T невырожденная, т.е. $\det T \neq 0$;

$(\tilde{e}_1 \dots \tilde{e}_n) = (e_1 \dots e_n)\cdot T \;\Big|\; T^{-1} \Rightarrow e = \tilde{e}\,T^{-1}$

$\tilde{e} = eT;$

$\exists\; T = \|\tau^i_k\| \quad T^{-1} = S = \|\sigma^i_k\|$

$\{e_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow \{f^k\}_{k=1}^n \quad (f^k, e_i) = \delta^k_i$

$X \qquad\qquad X^*$

$\nexists\; \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow \{\tilde{f}^k\}_{k=1}^n \quad (\tilde{f}^k, \tilde{e}_i) = \delta^i_k$

$\underbrace{\tilde{f}^k = \sum_{j=1}^n \beta^k_j f^j}\ (*) \quad \left(\sum_{j=1}^n \beta^k_j f^j, \sum_{s=1}^n \tau^s_i e_s\right) = \left(X^* - \text{лп}\right)$

$= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \beta^k_j \tau^s_i \underbrace{(f^j, e_s)}_{\delta^j_s} = \sum_{j=1}^n \beta^k_j \tau^j_i = \delta^k_i$

Значит $\cancel{B = T\cdot E}$ $B\cdot T = E$

$B = T^{-1} = S$

Отсюда $\{f^i\} \underset{T}{\overset{T^{-1}}{\rightleftarrows}} \{\tilde{f}^k\}$

$x \in X$, x разложимое и по $\{e\}$ и по $\{\tilde{e}\}$

$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \qquad \xi^i = (f^i, x)$

$= \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k \qquad \tilde{\xi}^k = (\tilde{f}^k, x)$

$\tilde{\xi}^k = (\tilde{f}^k, x) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma^k_i f^i, \sum_{j=1}^n \xi^j e_j\right) = \dots =$

$= \sum_{i=1}^n \sigma^k_i \xi^i$

$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}^n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \qquad \boxed{\tilde{\xi}^k = \sum_{i=1}^n \sigma^k_i \xi^i} \quad (1)$

<u>Лемма</u>

$f \in X^* \quad f = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i = \sum_{k=1}^n \tilde{\eta}_k \tilde{f}^k$ <u>Тогда</u> $\boxed{\tilde{\eta}_k = \sum_{i=1}^n \tau^i_k \eta_i} \quad (2)$

$\boxed{\text{Упр}}$

<u>Определ.</u> Величины, преобразующиеся при замене базиса по тому же закону, как вектора базиса исходного пр-ва, называются контрвариантными и снабжаются нижним инд.

Опр Величины, преобр. по обр. закону ($\sim T^{-1}$) назыв. контравариантными величинами и снабжаются верхним индексом

$$\mathcal{C}\ \{e_i\} \to C = \|\gamma^i_k\| \qquad \gamma^i_k = (\mathcal{C} e_k)^i = (f^i, \mathcal{C} e_k)$$

$$\mathcal{C}\ \{\tilde{e}_i\} \to \tilde{C} = \|\tilde{\gamma}^i_k\|$$

Аналогично для $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma}^i_k = \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\sigma}^i_j f^j, \mathcal{C}\left(\sum_{s=1}^{n} \tau^s_k e_s\right)\right) = \sum_{s,j=1}^{n} \tilde{\sigma}^i_j \tau^s_k (f^j, \mathcal{C} e_s) =$$

$$= \sum_{j,s=1}^{n} \tilde{\sigma}^i_j \tau^s_k \left(f^j, \sum_{t=1}^{n} \gamma^t_s e_t\right) = \sum_{j,s,t=1}^{n} \tilde{\sigma}^i_j \tau^s_k \gamma^t_s \underbrace{(f^j, e_t)}_{\delta^j_t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \tilde{\sigma}^i_j \gamma^j_s \tau^s_k,$$

Выходит, что $\tilde{\gamma}^i_k = \sum_j \sum_s \tilde{\sigma}^i_j \gamma^j_s \tau^s_k$;

$$\tilde{C} = T^{-1} C T$$

Опр. $\exists T: \det T \neq 0$, $\tilde{C} = T^{-1} C T$ — преобр. подобия м C с коэффициентом подобия T

Теорема при замене базиса матрица ЛО получается преобр. подобия с коэф. подобия T ($e_1 \to e_2$)

(322) Независимое (от ПЛФ) определение тензора. Свёртки ПЛФ и тензоров

$$\exists U \in \Omega^p_q \,\|\, \tilde{\omega}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = U(\tilde{e}_{i_1} \dots \tilde{e}_{i_p}, \tilde{f}^{j_1} \dots \tilde{f}^{j_q})$$

$$\{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}$$
$$\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \tau^i_k e_i$$

$$\{f^j\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^t\}$$
$$T^{-1} = S = \|\sigma^i_k\|$$
$$\tilde{f}^t = \sum_{j=1}^{n} \sigma^t_j f^j$$

$$= U(\tau^{s_1}_{i_1} e_{s_1}, \dots, \tau^{s_p}_{i_p} e_{s_p}, \sigma^{j_1 t_1}_{j_1} f_{t_1}, \dots, \sigma^{j_q t_q}_{j_q} f^{t_q}) =$$

$$= \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} \sigma^{j_1}_{t_1} \dots \sigma^{j_q}_{t_q} \omega^{t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p}$$

Опр Зададим закон преобразования

$$\tilde{\omega}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} \sigma^{j_1}_{t_1} \dots \sigma^{j_q}_{t_q} \omega^{t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p} \qquad (*)$$

Тогда набор из n^{p+q} чисел $\omega^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \subset (*)$ при зад. базисе наз. тенз. p — ковар., q — контравар.

Свёртки

Опр $\exists U$ — ПЛФ $\in \Omega^p_q$

$$\triangleleft\ V(x_1 \dots x_{s-1}, x_{s+1} \dots x_p, y^1 \dots y^{t-1}, y^{t+1} \dots y^q) \overset{def}{=}$$

$$= U(x_1 \dots x_{s-1}, \overset{s}{\hat{e}_i}, x_{s+1} \dots x_p, y^1 \dots y^{t-1}, \overset{t}{\hat{f}^i}, y^{t+1} \dots y^q)$$

Тогда ПЛФ $V \in \Omega^{p-1}_{q-1}$ — свёрткой ПЛФ U по аргументам x_s и y^t

Лемма предыдущее определение корректно в том смысле, что свёртка не зависит от пары коорд. базисов.

$$\triangleleft\ U(\dots \overset{s}{\tilde{e}_i} \dots \overset{t}{\tilde{f}^i} \dots) = U(\dots \tau_i^k e_k, \dots, \tilde{\sigma}^i_j f^j, \dots)$$

$$= \tau_i^k \tilde{\sigma}^i_j U(\dots e_k \dots f^j \dots) = \delta^k_j U(\dots e_k \dots f^j \dots) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot U(\dots e_k \dots f^k \dots)$$

немая сумма (потенциал расширит)

Опр $\omega^{\vec{j}_q}_{\vec{i}_p}$ — тензор ранга (p, q)

$$\triangleleft\ \omega^{i_s \wedge j_t}_{i_1 \dots i_{s-1}, i_{s+1} \dots i_p}{}^{j_1 \dots j_{t-1}, j_{t+1} \dots j_q} \overset{def}{=} \omega^{j_1 \dots j_{t-1} l\, j_{t+1} \dots j_q}_{i_1 \dots i_{s-1} i\, l\, i_{s+1} \dots i_p} \quad (**)$$

Тогда $\omega^{i_s \wedge j_t}$ — свёрткой ω по i_s и j_t

Лемма $\omega^{i_k \wedge j_l}_{i_s \wedge j_t}{}^{\vec{j}_{q-2}}_{\vec{i}_{p-2}} = \omega^{i_s \wedge j_t}_{i_k \wedge j_l}{}^{\vec{j}_{q-2}}_{\vec{i}_{p-2}}$

Лемма Можно сворачивать по 1 в. или 1 ков., но нельзя сворачивать по 2 верх. или 2 ков.

Опр $\exists \omega^{\vec{j}_p}_{\vec{i}_p}$, тогда p-кратная свёртка называется полной свёрткой

Пример

Тензор ω^i_k — ранг $[1; 1]$

$$\omega^i_i = \omega$$

$$\tilde{\omega}^i_k = \tau^i_t \tilde{\sigma}^s_k \omega^t_s \Rightarrow \tilde{\omega}^i_i = \delta^s_t \omega^t_s = \omega^s_s$$

Опр $\exists A \xleftrightarrow{\text{без}} A = \|\alpha^i_k\|$ $\quad \mathrm{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i$ — след A

Теорема $\mathrm{Tr}\,A$ не зависит от базиса A (инвариантен)

§23 Транспонирование тензора

$\triangleleft$ ~~тензо~~ многомер. матрица $\alpha^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$

$$\alpha_{\substack{ijk \\ i,j,k=1,2}} = \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} & \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{array} \right\|$$

Опр. Двумерным слоем $\alpha^{j_1 j_2}_{i_1 \dots i_p}$ отв. инд. j_1, j_2 назыв. двухмерная матрица, полученная фиксированием всего, кроме j_1 и j_2

Опр. Транспонированием матрицы $\alpha^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ по j_1 и j_2 ~~у~~ такое ее перестановка элементов, что все двумерные слои, отвечающие этим индексам, транспонируются ~~этим~~ обычным образом

$$\beta^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \alpha^{j_2 j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$$

$$\beta_{ijk} = \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{211} & \alpha_{112} & \alpha_{212} \\ \alpha_{121} & \alpha_{221} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \end{array} \right\|$$

$\exists\, W^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ – тензор $(p;q)$, $\exists$ в новом базисе:

$$W^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \longleftrightarrow \mathcal{L}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = W^{j_2 j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$$

Теорема $\mathcal{L}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}$ – Тоже тензор ранга $(p;q)$

Док: $\triangleleft$ $\tilde{\mathcal{L}}^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{W}^{j_2 j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \tilde{\sigma}^{j_2 j_1 \dots j_q}_{t_1 t_2 \dots t_q} \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} W^{t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p} =$ $\left(\begin{array}{l} t_2 \to t_1 \\ t_1 \to t_2 \end{array} \right.$

$$= \tilde{\sigma}^{j_1}_{t_1} \tilde{\sigma}^{j_2}_{t_2} \dots \tilde{\sigma}^{j_q}_{t_q} \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} W^{t_2 t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p} = \tilde{\sigma}^{j_1}_{t_1} \tilde{\sigma}^{j_2}_{t_2} \dots \tilde{\sigma}^{j_q}_{t_q} \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} \mathcal{L}^{t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p}$$

Лемма Транп. тензор без ущерба можно либо по паре 1 верхних либо по 2 нижних.

(524) Определитель ПО. Внешняя степень ПО. Теорема об умножении определителей.

<u>Опр.</u> $\exists \{y^1 \dots y^n\} \subset X^*(\dim X^* = n)$; $\det\{y^1 \dots y^n\}$ число, опр. равенством:

$$y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = \det\{y^1 \dots y^n\} f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \quad (1)$$

$$\left[\Lambda^n \quad (n;0): \dim \Lambda^n = C_n^n = 1\right.$$

$$\left. F^{1,2,\dots n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \right]$$

<u>Теорема:</u> $\det\{y^1, y^2 \dots y^n\} = \sum\limits_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^n_{j_n}$:

$$= \det \| \eta^i_j \|$$

$$- \; y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = (\eta^1_{s_1} f^{s_1}) \wedge (\eta^2_{s_2} f^{s_2}) \wedge \dots \wedge (\eta^n_{s_n} f^{s_n}) =$$

$$= \sum_{s_1 \dots s_n = 1}^{n} \eta^1_{s_1} \eta^2_{s_2} \dots \eta^n_{s_n} \cdot f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge \dots \wedge f^{s_n} =$$

$$= \left(\sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} \eta^1_{s_1} \eta^2_{s_2} \dots \eta^n_{s_n} \right) f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$$

(NB) $\det[x_1 \dots x_n] = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \; (x_1 \dots x_n) =$

$$= \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi^{j_1}_1 \xi^{j_2}_2 \dots \xi^{j_n}_n = \det \| \xi^i_j \|$$

Вспомним про естественный автоморфизм

$$\underset{X^{**}}{(\hat{x}, f)} = \underset{X^{**}}{(f, x)}$$

<u>Опр2</u> $\exists \{x_1 \dots x_n\} \subset X \; (= X^{**})$; $\det\{x_1 \dots x_n\}$ число, определяемое равенством: $[\dim \Lambda_n = C_n^n = 1]$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \overset{\det}{=} \det\{x_1 \dots x_n\} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

<u>Теорема2:</u> $\det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1, x_2 \dots x_n] = \det \| \xi^i_k \|$

<u>Опр</u> Детерминантом ПО называется det следующего набора векторов:

$$\det A = \det\{Ae_1, Ae_2 \dots, Ae_n\}, \text{ т.е. } Ae_1 \wedge \dots \wedge Ae_n =$$

$$= \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n; \; (*)$$

Теорема 3: $\exists\, \mathcal{A} \overset{\{e_i\}}{\leftrightarrow} A = \|\alpha_k^i\|$, $\alpha_k^i = (\mathcal{A}e_k)^i$

Тогда: $\det \mathcal{A} = \sum\limits_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \alpha_1^{i_1} \alpha_2^{i_2} \dots \alpha_n^{i_n} = \det A$;

$\boxed{\text{Упражнение}}$

Опр3: $\forall\, \underset{(0,k)}{\Lambda_k}$ $\mathcal{A}^{\Lambda_k} : \Lambda_k \to \Lambda_k$ оператор сл. вида.

$(F_{i_1 \dots i_n} = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}$ – базис $\Lambda_k)$

1) $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) \overset{\text{опр}}{=} \mathcal{A}e_{j_1} \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k}$

2) На остальные – по линейности:

$$\mathcal{A}^{\Lambda_k}(\alpha F_{e_{j_1} \dots e_{j_k}} + \beta F_{e_{s_1} \dots e_{s_k}}) = \alpha \mathcal{A}^{\Lambda_k}(F_{e_{j_1} \dots e_{j_k}}) + \beta \dots$$

Теорема $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \overset{?}{=} \mathcal{A}x_1 \wedge \mathcal{A}x_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}x_n$ (**)

$\triangle$ $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(x_1 \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \mathcal{A}^{\Lambda_k}\left(\left(\sum\limits_{j_1=1}^{n} \xi_1^{j_1} e_{j_1}\right) \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}\right) =$

$= \sum\limits_{j_1=1}^{n} \xi_1^{j_1} \mathcal{A}e_{j_1} \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k} = \mathcal{A}\left(\left(\sum \xi_1^{j_1} e_{j_1}\right) \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_n}\right)$

$= \mathcal{A}x_1 \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k}$

Лемма (о высшей степени – $\mathcal{A}^{\Lambda_n}$) $\exists \dim X = n$

Тогда $\forall Z \in \Lambda_n$: $\boxed{\mathcal{A}^{\Lambda_n} Z = \det(\mathcal{A}) Z}$ (×)

$\triangle$ $\dim \Lambda_n = 1 = C_n^n \Rightarrow \forall Z_1 \in \Lambda_n$: $Z_1 = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \alpha \cdot F_{1e \dots n}$

$\mathcal{A}^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{(**)}{=} \mathcal{A}(e_1) \wedge \mathcal{A}e_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_n \overset{(*)}{=}$

$= \det \mathcal{A} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \,\Big|\, \cdot \alpha$; $\alpha \mathcal{A}^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) =$

$= \mathcal{A}^{\Lambda_n} Z_1 = \det \mathcal{A} \cdot \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \det \mathcal{A} \cdot Z_1$, что ∇

Теорема det любого ΛO и det любой матрицы не зависит от базиса

Теорема $\exists\, \mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to X$. Тогда $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$

$\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) e_1 \wedge \dots \wedge e_n \overset{(×)}{=} (\mathcal{A}\mathcal{B})^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \overset{(**)}{=}$

$= (\mathcal{A}\mathcal{B}e_1) \wedge (\mathcal{A}\mathcal{B}e_2) \wedge \dots \wedge (\mathcal{A}\mathcal{B}e_n) = \mathcal{A}(\mathcal{B}e_1) \wedge \dots \wedge (\mathcal{A}(\mathcal{B}e_n))$

$\overset{(**)}{=} \mathcal{A}^{\Lambda_n}(\mathcal{B}e_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}e_n) \overset{(×)}{=} \det \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}e_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}e_n) \overset{(**)}{=}$

$= \det A \cdot B^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{(*)}{=} \det A \det B\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$,

Отсюда следует $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

<u>Следствие</u> (№) $\exists A: X \to X$; $\det A \neq 0$, Тогда:

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$

<u>Докат</u> $\det A = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$; $\exists A^{-1}$:

$AA^{-1} = E$; $\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow$

<u>Следствие</u> (№2) (о независимости $\det A$ от базиса)

$\exists \{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_i\}$ $(\det T \neq 0)$; $\exists A: X \to X$

Тогда $\det \tilde{A} = \det A$, где $\tilde{A} = T^{-1} A T$;

<u>Д-во:</u> $\det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T =$

$= (\det T)^{-1} \det A \det T = \det A$;

<u>Спектральный анализ по аналитическому типу</u>

Имеем $p(A) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s A^s$ $(A^s = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{s})$, $A^0 = J$

Квазиполином: $\tilde{p}(A) = \sum_{s=-m}^{k} \alpha_s A^s$

Но $\frac{df}{dt} = Af$, $f(t) = e^{At}$, экспоненты от матрицы:

αJ; $\alpha A = \lambda J$; $f(A) = f(\lambda) J \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, тогда

$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>План спектр. анализа:</u>

1) Найти инвариант пр по A, т.е. L_i: $x \in L_i \Rightarrow Ax \in L_i$
2) $X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i$
3) Изучить действие A в L_i $\quad Ax = \lambda_i x$
4) Строить функции

$f \leftrightarrow (1;1;2;2)$ Λ^3

$g \leftrightarrow (1;1;1;3)$ $\dim \Lambda^3 = C_3^4 = 4$

$h \leftrightarrow (1;1;1;2)$

$$f \overset{(3;0)}{\wedge} g \wedge h = AF^{123} + BP^{124} + CF^{134} + DP^{234} =$$

$=$

36, 38 1
36, 40 1
36, 39 1
36, 41 1
36, 42 13
38, 2
38, 3 3
38, 4 4
38, 5 4

§25 Инварианты матрицы ЛО. Инвариантные подпространства.

<u>Опр</u> Инвариантом матрицы ЛО называется ее числовая хар-ка, не зависящая от выбора базиса.

<u>Опр</u> Хар-стич. полиномом ЛО A наз. $\det(A - \lambda J)$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda J)$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda J) = \det(A - \lambda E)$$

$$\triangleleft \det(A - \lambda E) = \det \| \alpha^i_j - \lambda \delta^i_j \| =$$

$$= \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} (\alpha^1_{j_1} - \lambda \delta^1_{j_1}) \dots (\alpha^n_{j_n} - \lambda \delta^n_{j_n}) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha^i_i}_{\text{trace-inv}} + \dots + \lambda_0 \underbrace{\det A}_{\text{det-inv}};$$

Опр $\exists A: X \to X$, пнL пнX γ инвариант. для A если $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$ ($A(L) \subseteq L$)

Пример 1. Трив. пн X и $\{0_x\}$ – инв. для $\forall A: X \to X$

2. $\nexists A = \lambda I$; $\forall$ пнL – инв.

3. $X = L_1 \dot{+} L_2$; $A = P_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$

$L_1; L_2$ – инварианты: $\forall x \in L_1$ $P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x$; $\forall y \in L_2$ $P_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0$

526 Собственные векторы и значения ЛО

Опр $\exists x \neq 0_x$ $\exists x \in L$, где L – 1мерное инв пн по $A: X \to X$. Тогда x γ собственный в-м A

Опр $\exists x \neq 0_x$ $\exists Ax = \lambda$ ($\lambda \in F$, X – над F) Тогда x γ собств. вектором A, при этом λ γ собств. значением

Лемма Опр 1 $\Longleftrightarrow$ Опр 2.

Δ Опр 1 $\to$ Опр 2; $\dim L = 1$; $\exists L = \text{ло}\{e_i\}$

$x = \alpha e$, $e = \frac{x}{\alpha}$. $Ax \in L = \beta e = \frac{\beta}{\alpha} x = \lambda x$

Опр 2 $\to$ Опр 1 $Ax = \lambda x$ $\nexists L = \text{ло}\{x = e\}$

∇

Пример ① $\exists A = \lambda I$ $\ell_3 = \lambda, \lambda$ СВ – $\forall b$ $x \in X$ $\sigma_A = \{\lambda\}$

Опр Множество всех собственных значений оператора есть его спектр.

$\sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ – вот мач :3

② $X = L_1 \dot{+} L_2$;

$\nexists P_{L_1}^{\parallel L_2}$ $P_{L_1}^{\parallel L_2} x = x$ $\lambda_1 = 1 \longleftrightarrow \forall b$ $x \in L_1$

$P_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0$ $\lambda_2 = 0$

Лемма все собственные вектора, отвечающие одному и тому же собств. значению образуют собственное пр-во

$$A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1+x_2)$$

Теорема $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ – с.з. A ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)

$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$

$x_1 \quad x_2 \dots x_k$ – с.в. ($Ax_i = \lambda_i x_i$)

Тогда $\{x_1 \dots x_n\}$ – ЛНЗ

Д-во: 1. $\{x_1 \neq 0_x\}$

2. $\exists \{x_1 \dots x_{m-1}\}$ – ЛНЗ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\{x_1 \dots x_m\}$ – тоже ЛНЗ

$m \leq k$

$\sum \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} = 0_x \Rightarrow \alpha_1 = \dots = 0 \quad (*)$

Надо: $\sum \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_x \quad (**)$

$A(**) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0_x$

$\lambda_m(**) = \alpha_1 \lambda_m x_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0_x$

$\underbrace{\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} x_1 + \dots + \underbrace{\alpha_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m)}_{\neq 0} x_{m-1} + 0_x = 0_x$

Значит $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$

Подставим в $(**) \Rightarrow \alpha_m = 0$. $(*)$ верно.

∇

Следствие у лин $A: X \to X$ ($\dim X = n$) не может быть больше n собств. значений

О числе и $\exists$ собств. векторов

(!) Далее (если не оговорено) X над $F = \mathbb{C}$

$\exists\, Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda I x = 0_x$

Лемма $\chi_A(\lambda) = 0$ – мн $\exists$ с.в. x

Теорема у $A: X \to X$ X над $\mathbb{C}$ всегда $\exists$ по кр. мере 1 с.з. и 1 с.в.

Основная теорема векторной алгебры:
у любого полинома есть хотя бы один корень из $\mathbb{C}$

Опр корни характеристического полинома p характеристическими числами

Лемма в случае X над $\mathbb{C}$ все хар. числа явл. одновременно и собственными.

Замеч. в случае X над $\mathbb{R}$ собственными числами являются вещественные

13.03.2014 Лекция

Опр Оператором сост. типа (сост. опер.) $\mathcal{J}$ назыв оператор, из собств. векторов которого можно построить базис

$A = \lambda J$ – подходит пример

Опр Собственное значение λ_0 p простым, если оно является корнем кратности 1 (простым) хар. полинома, то есть

$$\exists \lambda_1 \text{ с.з. } A, \quad \exists Q(\lambda) = \frac{\chi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$$

Опр Оператор, все собств. значения которр. простые, наз. оператором с простым спектром.

Теорема Оператор с простым спектром – диагонализ.

Процедура счета собств векторов и знач:

$Ax = \lambda x$ Ищ $\mathcal{D}$ $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

$x \leftarrow$ СЗ λ

1 Рассмотрим $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 \dots \lambda_k\} = \sigma_A(\mathbb{C})$

2. $(\lambda = \lambda_1) \longrightarrow в\ (*)$

$(A - \lambda_1 E)X = 0 \rightarrow X_1$

Аналогично $\lambda_2 \rightarrow X_2$

Аналог. $\lambda_n \rightarrow X_n$

527?!

$$\boxed{\begin{array}{l} (*)\ (A - \lambda E)X = 0 \\ \text{Ур-е на собств. векторы} \\ (**)\ \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0 \\ \text{Ур-е на собств. значения} \end{array}}$$

(527) Спектральный анализ ЛО с прост. спектром

<u>Дано</u> $A: X \to X$ $(\dim X = n)$ $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \prod_{1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n\}$, каждому собств. $\{x_1 \dots x_n\}$ из которых можно сделать базис

$Ax_i = \lambda x_i$

<u>Теорема</u> матрица оператора с простым спектром в базисе из его собств. векторов имеет диагон. вид:

$$A^d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u> $\exists A \xleftrightarrow{\{e_i\}} A$, тогда $A^d = TAT^{-1}$, где $T = \{X_1 \dots X_n\}$

<u>Следствие</u>. Матрица оператора с простым спектра подобна диагональной

<u>Теорема</u> $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda J) = 1$

(собств. на L_λ, но с прост. спектром - одномерное)

$\operatorname{Ker}(A - \lambda, J) = \{x \in X \mid (A - \lambda, J)x = 0\}$.

$Ax = \lambda, Jx$;

$L_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 J)$

Д-во: $\lambda_1 \longleftrightarrow x_1$ $\longleftarrow$ $\lambda_n \Leftarrow \{x_n', x_n''\}$ - ЛНЗ

$\vdots$ $\qquad \vdots$ $\qquad \dim L_n - 2$

$\lambda_n \longleftrightarrow x_n$

тогда $\{x_1 \dots x_n', x_n''\}$ - $\dim n+1$, противор с усл.

Теорема $X = \dot{+} \sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i}$, $L_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$

$\forall x \in X \quad \exists\, x = \underset{L_{\lambda_1}}{\underset{\wedge}{y_1}} + y_2 + \dots + \underset{L_{\lambda_n}}{\underset{\wedge}{y_n}}$ ‖ из с.в. A, $x = \sum \underbrace{\xi_i x_i}_{y_i}$

Опр Спектр. проектором P_{λ_i} отвечающим с.з. λ_i P проектор на L_{λ_i} и по остальных собств. векторов

$P_{\lambda_1} \leftrightarrow$ с.з. λ_i

P и λ по ост.

P_λ . . . полного))

Теорема: $\exists \{e_i\}_{i=1}^{n}$ — базис X из с.в. A.
$(f_k^i, e_i) = \delta_k^i$

$\exists \{f^k\}$ — сопр базис, тогда P_{λ_i} определяется как:

$P_{\lambda_i} * = (*, f^i) e_i$; т.е. $\forall x \quad P_{\lambda_i} x = (f^i, x) e_i$

Надо $P_{\lambda_i} = P_{L_{\lambda_i}}$ $(+ \sum_i L_{\lambda_i})$ Надо: $\forall x \in L_{\lambda_i}$ $P_{\lambda_i} x = x$
$\forall y \in \dot{+} \sum L_{\lambda_k}$ $P_{\lambda_i} y = 0$.

Т.о. 1) $\triangleleft$ $x = e_i$ $P_{\lambda_i} e_i = (f_i, e_i) e_i = e_i$
2) $\triangleleft$ $y = e_k$, $k \neq i$ $P_{\lambda_i} e_k = (f^i, e_k) e_i = 0$
$= \delta_k^i = 0$. $(k \neq i)$

Опр - Оператор γ идем - потентным если $A^2 = A$

Пример: $P_{\lambda_i}^2 = P_{\lambda_i}$

Спектр теорема для оператора с прост. спектром

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$$

$\triangle$ 1) $x = \sum_i \xi_i e_i = \sum_i (f^i, x) e_i = \sum_i \overbrace{P_{\lambda_i} x}^{\in L_{\lambda_i}}$; (*)

2) $Ax = A \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i} x = \sum_{i=1}^{n} A(P_{\lambda_i} x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} x$ ∇

Пример: $A^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k}\right) = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \underbrace{P_{\lambda_i} P_{\lambda_k}}_{\delta_k P_{\lambda_i}}$

‖ X : C

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} \quad \Big\| \quad \sin A = \sum_{i=1}^{n} \sin(\lambda_i) P_{\lambda_i}$$

$$\sin A = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\lambda_n \end{pmatrix}$$

(528) Спектральный анализ по спектр. типа (не прост. сп

$A: X \to X$ – сп. типа ⊛ $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{k_i}$

где: $k < n$: $\sigma_A = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ $k < n$

Лемма. $L_{\lambda_i} = \{$по $\{$в с. в. $x_i \Leftrightarrow \lambda_i\}\}$

Сегодня вначале, 18.03/4

36, 38

1. $\left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right\|$ $\quad a^{(ij)}_{kl} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ \hline -4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 8 \end{array} \right\|$

$a^{ij}_{(kl)} = \frac{1}{2}(a^{ij}_{kl} + a^{ij}_{lk})$

$\cancel{a^{ij}_{(kl)} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline & & & \end{array} \right\|}$ $\quad \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -0{,}5 & 1 \\ -4 & -3 & 1 & -\frac{7}{2} \\ \hline -0{,}5 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 7 & 8 \end{array} \right\|$

$a^{(ij)}_{(kl)} = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -0{,}5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -\frac{7}{2} \\ \hline -0{,}5 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 3 & 8 \end{array} \right\|$ – неверно

$\alpha_{1121} = 1112 + 1211 +$

18.03.2014 Лекция

$A: X \to X \quad (\dim X) = n$

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k\}$ $k < n$ (не простой спектр $(k<n)$)

$\{ \boxed{e_1^{(1)} \dots e_1^{(r_1)}} \square \boxed{e_k^{(1)} \dots e_k^{(r_k)}} \} = \mathcal{B}_X$

$L_{\lambda_i} = \text{л.о.}\{e_i^{(1)}, e_i^{(2)} \dots e_i^{(r_i)}\}$.

$X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_{\lambda_i}$

<u>Опр</u> $\dim L_{\lambda_i} = r_i$ — спектральная (геом.) кратность (λ_i)

<u>Опр</u> $\exists\, \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, тогда n_i — полная кратность λ_i

<u>Теорема</u> Геом. кратность и полная кратность для сам. оператора одинаковы.

$\exists\, A \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{matrix}} & \xleftarrow{r_2} & & 0 \\ \xleftarrow{r_1} & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{matrix}} & & \xleftarrow{r_k} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{matrix}} \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_X$ = базис из св.

∇ $Rg(A - \lambda_i E) = n - r_i$

$L_{\lambda_i} = \text{л.о.}\{e_i^{(1)} \dots e_i^{(r_i)}\}$

<u>Теорема</u> $\exists \{f_{(s)}^i\}_{i=1}^{k}$ — базис (*) сопр. к $\{e_i^{(j)}\}_{\substack{i=1..k \\ j=1..r_i}}$

т.е. $(f_{(s)}^i, e_i^{(j)}) = \delta_i^j \delta_{(s)}^{(j)}$, тогда спектральный проектор $\mathcal{P}_{\lambda_i}$ имеет сл. вид: → на L_{λ_i} — с.п.п.

$\mathcal{P}_{\lambda_i} x = \sum_{s=1}^{r_i} (f_{(s)}^i, x) e_i^{(s)}$

$\boxed{\text{Упр!!!}}$ — проверить $\mathcal{P}_{\lambda_i}$ на $x \in L_{\lambda_i}$, $y \notin L_{\lambda_i}$

<u>Лемма</u> $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_{\lambda_i}$

$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{r_i} (f_{(s)}^i, x) e_i^{(s)} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{\lambda_i} x$

<u>Теорема</u> Спектральная теорема для оператора скалярного типа:

$\boxed{A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}}$ – применяем к A $x = \sum P_{\lambda_i} x$ и все зайдет

∇

$\cos A = \sum_{i=1}^{k} \cos(\lambda_i) P_{\lambda_i}$

<u>Теорема</u>: Тождество Кэли:

$\exists \chi_A(\lambda)$ – х.п. $A: X \to X$, тогда $\chi_A(A) = 0$

<u>Д-во</u>: $\chi_A(A) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\chi_A(\lambda_i)}_{0} P_{\lambda_i} = 0$ ∇

<u>Опр</u> Пусть X и Y – алгебры над F. Гомоморфизм алгебр – это

$\phi: X \to Y$, сохр-щее линейную и мультипл. структуру

$\phi S_A: P_\infty \to X \cdot X$

<u>Лемма</u>: S_A – гомоморфизм $(z, q) \in P_\infty$ $\alpha \in F$ (коммоны)

1) $\alpha z(t) \longrightarrow \alpha z(A)$ $\qquad f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$
2) $z(t) q(t) \longrightarrow z(A) q(A)$
3) $z(t) + q(t) \longrightarrow z(A) + q(A)$

Это не очевидно ($\dim P_\infty = \infty$; $\dim V$ $X = n^2$)

Ано $z(t) + \chi_A(t) q(t) \longrightarrow z(A) + \underbrace{\chi_A(A)}_{0} q(A) = z(A)$

<u>Теорема</u> Коэфф. хар. полинома симметричного по образуют полную систему инвариантов.

$\{\lambda_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{\lambda}_i\}$, $\tilde{A} = T^{-1} A T$, $\qquad A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k} \end{pmatrix}$

∇ $\qquad \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^2$

29 Инвариантные подпространства

<u>Опр</u> $\exists A: X \to X$ $\exists L$ – пп X $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$, тогда L $\partial^{\text{т}}$ инв. пп.

Опр L – инв. $A_L : L \to L$ по формуле $A_L x = Ax$ ($\forall x \in L$)
Тогда A_L ж частью по A в инв. пр. L.

Опр Инв. п-во L ж ультраинвариантным, если $\exists L'$ – дополнение L до тоже инвариантно.
($X = L_1 \dot{+} L_2 = L \dot{+} L'$ – инв. п-ва)

Лемма Если L – ультраинв. п-во, то и L' – тоже.

Опр $\exists L$ – ультр., тогда A_L – компонента A в L

Опр $\exists L$ – ультр. Тогда $P_L^{\parallel L'}$ – ультрапроектор.

Лемма $\exists L, L'$ – ультр., $A_L, A_{L'}$ – компоненты A в L и L', тогда A может быть представлен:

$$A = A_L P_L^{\parallel L'} + A_{L'} P_{L'}^{\parallel L} \qquad (*)$$

(для $\forall x$)

Д-во
$$\forall x = \underset{\in L}{y} + \underset{\in L'}{z} = P_L^{\parallel L'} x + P_{L'}^{\parallel L} x; \text{ Из и применим } A$$

Опр $\exists x = L \dot{+} L'$, $A_L : L \to L$ (какие-нибудь) $A_{L'} : L' \to L'$

$\exists A \overset{(*)}{=} A_L P_L^{\parallel L'} + A_{L'} P_{L'}^{\parallel L}$, тогда $A = A_L \dot{+} A_{L'}$

Лемма $\exists L$ и L' – дополнительные ультр. A, тогда $A = A_L \dot{+} A_{L'}$

(NB) X, трив – X и $\{0_X\}$

Опр Минимальным ультр'ом ж ультр., который не содержит в себе ультр. меньшей размерности, а соотв. ультрапроектор на него – минимальный.

Лемма Минимальные ультры либо дизъюнктны, либо совпадают.

Теорема (упр) для операторов (автоморф.) в конеч. л.п. число дизъюнктных мин. ультров конечно.

2.04.2014.

(§30) Алгебра скалярных полиномов. Идеал!

Вообще норм))))

$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P} = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ \deg p(\lambda) - \forall\} \mid p(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s \lambda^s$

Лемма $\mathcal{P}$ - коммутативная алгебра

$\exists p, q, r \in \mathcal{P} \Rightarrow$ 1. $p(q, r) = (p, q) r$

$\alpha \in \mathbb{C}$

2. $pq = qp$
3. $(p+q) r = pr + qr$
4. $(\alpha p) q = p(\alpha q) = \alpha (pq)$

Опр пп J пп $\mathcal{P}$ называется его идеалом, если $\forall q \in J$ и $\forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow qp \in J$

Опр $\mathcal{P}$ и $\{0\}$ - трив. идеалы

Пример 1 $J_\alpha = \{\varphi \in \mathcal{P} \mid \varphi(\alpha) = 0\}$ - $pq = p \cdot 0 = 0$

Пример 2 $J = q \cdot \mathcal{P} \cdot p$

$\forall r \in J$; $r = q \cdot p$, $\forall r \cdot \tilde{p} = q \cdot (p \cdot \tilde{p}) \in J$

Опр q - порождающий полином для $J = q\mathcal{P}$

Опр Любой идеал, содержащий один полином, привиален - $\mathcal{P}$

Теорема: $\exists J_1$ и J_2 - идеалы $\mathcal{P}$. Тогда $J_1 \cap J_2$ и $J_1 + J_2$ - идеалы.

Δ. $\exists J = J_1 \cap J_2$; $q \in J$; $\forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow q \cdot p \in J$

1. $q \in J \to q \in J_1 \Rightarrow q \cdot p \in J_1$ (опр J_1) $\Rightarrow q \cdot p \in J$.
2. $q \in J \to q \in J_2 \Rightarrow q \cdot p \in J_2$ (опр J_2)

δ) - $\boxed{\text{Упр!!}}$

∇

Опр $p_J(\lambda) (\neq 0)$; полином p_j мин степени $\in J$ называется минимальным полиномом

Лемма в неприв. идеале J степень $\deg p_J(\lambda) > 0$

Если $\{0\}$ - то $\mathcal{P}$, или $\mathcal{P}$ - $1 + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot$

Теорема (о min полиноме): $\exists\, J$ – идеал, **Тогда** для $\forall$ $p \in J$ $\quad p \vdots p_J$

$\Delta \leftarrow \nabla$: $\dfrac{p}{p_J} = q + \dfrac{r}{p_J}$ $\qquad r : \deg r < \deg p_J$

$p = p_J \cdot q + r, \Rightarrow p = p_J \cdot q + r = p - p_J \cdot q$

$r = \underset{\in J}{p} - \underbrace{p_J \cdot q}_{\in J\ (\text{опр } J)} \in J \Rightarrow \begin{cases} r \in J \\ \deg r < \deg p_J \end{cases} \rightarrow\leftarrow$ $\quad \nabla$

Следствие $\quad p_J \vdots p_J \qquad \widetilde{p_J} = \alpha \cdot p_J \quad (\alpha \neq 0)$

$p_J \vdots p_J$

Теорема мин. полином является порождающим $J = p_J P$

Δ 1) $J \subseteq p_J P$ 2) $p_J P \subseteq J$ $\Rightarrow J = P$ $\qquad$ 2) Очевидно по опр $p_J \in J$ $\quad p = p_J \cdot q \in p_J P$ $\qquad$ 1) Очевидно

Теорема $\exists\, J_1 \longleftrightarrow p_{J_1}$, $J_2 \longleftrightarrow p_{J_2}$ $\quad J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \vdots p_{J_2}$

$J_1 \subset J_2 \Rightarrow \forall$ эл. т J_1, в т.ч. $p_{J_1} \in J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2$

Теорема (о min полиноме 1) $\exists\, J_1 \leftarrow p_{J_1}$; $J_2 \leftarrow p_{J_2}$

$J = J_1 \cap J_2 \longleftrightarrow p_J$, **Тогда** $p_J = \text{НОК}\{p_{J_1}, p_{J_2}\}$

Д-во: $p_J \in J_1; J_2 \Rightarrow \begin{cases} p_J \vdots p_{J_1} \\ p_J \vdots p_{J_2} \end{cases} \Rightarrow p_J$ – кратное

$\exists\, q$ – кратное $p_{J_1}; p_{J_2}$, тогда

$q \in J$ Но! p_J – min полином $J \Rightarrow q \vdots p_J \Rightarrow p_J = \text{НОК}$

Теорема (о min полиноме +) $\exists\, J = J_1 + J_2$

Тогда $p_J = \text{НОД}\{p_{J_1}; p_{J_2}\}$.

Теорема (о взаимно простых полиномах)

$\exists\, p_1$ и p_2 – взаим. пр. $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

Тогда $\exists\, q_1, q_2 : p_1 q_1 + p_2 q_2 = \mathbb{1}(z) = 1$

$\Delta \exists\, J_1 = q_1 P$, $J_2 = q_2 P$ $\qquad q_1$ – min J_1, q_2 – min J_2

$\nexists\, J = J_1 + J_2 \longleftrightarrow p_J = \text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

Т.к. $p_J = \mathbb{1} \in J \Rightarrow J = P$

$p_J = \underset{\in J_1}{\tilde{p}_1} + \underset{\in J_2}{\tilde{p}_2} = p_1 q_1 + p_2 q_2$ $\quad \nabla$

Следствие: $\exists$ НОД $\{p_1 \dots p_k\} = 1$, Тогда $\exists q_1 \dots q_k$:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i q_i = 1$$

Следствие 2 $\exists p = p_1 p_2 \cdots p_k$ где p_s – попарно взаимно просты делители p_i

$\exists p_i' = \frac{p}{p_i}$, Тогда $\exists q_1 \dots q_k$: $\sum_{i=1}^{k} p_i' q_i = 1$

(631) Алгебра операторных полиномов. Минимальный полином ЛО.

$\forall A: X \to X$ фикс. $\forall X \times X = \{$во $B: X \to X\}$.

$\exists \underbrace{p(A) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s A^s}_{\text{Операторный полином}}$ $(A^0 = J)$, $\alpha_s \in \mathbb{C}$

$\forall \mathcal{P}_A = \{$все опер. $p(A)\} =$ пп $X \times X$

Лемма: $\mathcal{P}_A$ – подалгебра (коммут.) в $X \times X$

Тип во очевидно, кроме $A^n \cdot A^m = A^m A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \times m}$

$\forall S_A: \mathcal{P} \to \mathcal{P}_A$ по формуле $p(z) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s z^s \xrightarrow{S_A} p(A) = \sum \alpha_s A^s$
$A: X \to X$ фикс.

Лемма S – гомоморфизм $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_A$

1) $p_1 + p_2 \longrightarrow p_1(A) + p_2(A)$
2) $\lambda p_1 \longrightarrow \lambda p_1(A)$
3) $p_1 p_2 \longrightarrow p_1(A) \cdot p_2(A)$

Теорема $\exists p_1(\lambda); p_2(\lambda)$ – вз. простые скал. полиномы,
Тогда $\exists q_1(\lambda); q_2(\lambda)$

$p_1(A) \cdot q_1(A) + p_2(A) \cdot q_2(A) = J$ (перенесенное св-во)

Теорема $\exists p(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$, где p_1 и p_2 вз. простые
Тогда $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A)$

10.04.2014 Лекция

<u>Теорема</u> $\exists\, p(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$, p_1, p_2 – вз. пр. е зн.

Тогда $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A)$

Δ

1. $\operatorname{Ker} p_1(A) + \operatorname{Ker} p_2(A) \overset{?}{\subseteq} \operatorname{Ker} p(A)$

$\forall\, x = \underset{\operatorname{Ker} p_1(A)}{x_1} + \underset{\operatorname{Ker} p_2(A)}{x_2}$ $\qquad p(A)x = p(A)x_1 + p(A)x_2 =$

$= p_2(A)\underbrace{p_1(A)x_1}_{=0} + p_1(A)\underbrace{p_2(A)x_2}_{=0}$

2. $\operatorname{Ker} p(A) \subseteq \operatorname{Ker} p_1(A) + \operatorname{Ker} p_2(A)$

$\exists\, q_1, q_2$ и $p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$; – из леммы Безу

$\forall\, x \in \operatorname{Ker} p(A)$: $x = Jx = \underbrace{p_2(A) \cdot q_2(A)x}_{x_1} + \underbrace{p_1(A)x \cdot q_1(A)x}_{x_2} = x_1 + x_2$ $\qquad (x : p(A)x = 0)$

$\forall\, p_1(A)x_1 = \underbrace{p_1(A)p_2(A)}_{p(A)} q(A)x = q_2(A)p(A)x =$

$= q_2(A)0 = 0 \Rightarrow x_1 \in \operatorname{Ker} p_1(A)$

Аналогично $p_2(A)x_2 \Rightarrow x_2 \in \operatorname{Ker} p_2(A)$

3. Осталось $\operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A) = \operatorname{Ker} p(A)$

Докажем прямую сумму: $\operatorname{Ker} p_1(A) \cap \operatorname{Ker} p_2(A) = 0$

$\triangle$ $z \in \operatorname{Ker} p_1(A) \cap \operatorname{Ker} p_2(A)$

$z = Jz = z_1 + z_2 = p_2(A)q_2(A)z + p_1(A)q_1(A)z$

$= q_2(A)\underbrace{p_2(A)z}_{0} + q_1(A)\underbrace{p_1(A)z}_{0} = 0.$

∇

<u>Следствие</u>: $\exists\, p(\lambda) = \prod_{i=1}^{e} p_i(\lambda)$, где $p_i(\lambda)$ – взаимнопр. делит. $p(\lambda)$

Тогда: $\operatorname{Ker} p(A) = \dotplus \sum_{i=1}^{e} \operatorname{Ker} p_i(A)$

<u>Определение</u> Стат. полином $p(\lambda) \in \mathcal{P}$ ф^{ю} аннулирующим полиномом для $A : X \to X$, если $p(A) = 0$, то есть $\forall\, x \in X$ $p(A)x = 0$ или $\operatorname{Ker} p(A) = X$ или $\operatorname{Im} p(A) = \{0\}$.

Теорема $\exists A: X \to X$ ($\dim X = n < \infty$), тогда $\exists$ ан. полином для A

Δ $A \in X \times X = \{$все $B: X \to X\}$, $\dim X \times X = n^2$

$\Rightarrow \{\underbrace{I, A, A^2, \dots A^{n^2}}_{n^2+1}\} = ЛЗН$ - значит $\exists \alpha_i \neq 0$, такие, что $\sum_{s=0}^{n^2} \alpha_s A^s = \theta$

A^0

Отсюда следует, что $p(\lambda) = \sum_{s=0}^{n^2} \alpha_s \lambda^s$ - ан. полином.

∇

Лемма Множество всех <u>ненулевых</u> полиномов (аннулир.) оператора A образует идеал в P $\to P_A$

$p \in P_A$, $\forall q \in P \Rightarrow \Rightarrow pq = q \cdot p \to q(A)p(A) = \underset{\in P_A}{\theta}$

Опред. Мин. полином идеала P_A аннулирующих полиномов оператора T его ~~анну~~ минимальн. полиномом.

Пример $\exists A: X \to X$ — л.о. с простым спектром т.е. $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ $n = \dim X$

Так вот $\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda)$

Δ

1. Аннул: $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} \Longrightarrow \chi_A(A) = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(\lambda_i) P_{\lambda_i} =$

Но $\forall \chi_A(\lambda)$: $p_A(\lambda)$ (т.к. $\chi_A(\lambda) \in P_A$) $= \theta$

$\triangleleft$ $\tilde{\chi}_A(\lambda) = \prod_{i=1, i \neq j}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, т.е. $\tilde{\chi}_A(\lambda_j) \neq 0$

$\triangleleft$ $x_j \neq 0 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I)$ $\tilde{\chi}_A(A) x_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\chi}_A(\lambda_i) x_j =$

$x_j \in L_{\lambda_j}$ (с.в. $\longleftrightarrow \lambda_j$) $= \tilde{\chi}_A(A_j) x_j \neq 0 \neq 0$

$\tilde{\chi}_A(\lambda)$ - не ан. полином

∇

NB $\forall A$ $\chi_A(A) = \theta$, $\chi_A(\lambda) \neq p_A(\lambda)$

Лемма Для того, чтобы $p(A) = q(A)$, необ. $(p(\lambda) - q(\lambda)) \vdots p_A(\lambda)$

Δ $p(\lambda) - q(\lambda) = m(\lambda) \cdot p_A(\lambda)$, $\xrightarrow{S_A}$ $p(A) - q(A) = m(A) \underbrace{p_A(A)}_{\theta}$

∇

Следствие: $\exists \frac{p(\lambda)}{p_A(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{p_A(\lambda)} \Rightarrow p(A) = r(A)$

$p(\lambda) = q(\lambda)p_A(\lambda) + r(\lambda) \longrightarrow$ к опер. виду

<u>Теорема</u> $\exists p_A(\lambda)$ – мин. п. A $\quad \exists p_A(\lambda) = \prod p_i(\lambda)$ p_i – неприв.

Тогда $X = \dot{+} \sum_{i=1}^{l} \operatorname{Ker} p_i(A)$

<u>Теорема</u> о ядре и образе:

$\exists p_A(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$, тогда $\operatorname{Ker} p_1(A) = \operatorname{Im} p_2(A)$

Δ

1. $\operatorname{Im} p_2(A) \overset{?}{\subseteq} \operatorname{Ker} p_2(A)$:

$p_A(A)X = \theta X = \theta$; $p_1(A)(p_2(A)X) = 0$

$\forall y \in \operatorname{Im} p_2(A) = p_2(A)X \Rightarrow p_1(A)y = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} p_1(A)$

2. Покажем, что $\dim(\operatorname{Im} p_2(A)) = \dim(\operatorname{Ker} p_1(A))$

$n = \dim X = \dim(\operatorname{Ker} p_1(A)) + \dim(\operatorname{Ker} p_2(A))$

(из построения $X = \operatorname{Ker} p_1(A) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(A)$)

Но $\dim \operatorname{Ker} p_2(A) + \dim \operatorname{Im} p_2(A) = n$

Что доказывает утверждение. (одно с второе, фактически)

∇

<u>Теорема</u> (о проекторах)

$\exists p_A(\lambda)$ – мин. полином A; $\exists p_A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$ (попарно взп. прост.)

$\exists p_i' = \frac{p_A}{p_i}$, $\exists q_i : \sum_{i=1}^{l} p_i' q_i = 1$ (то есть $\sum_{i=1}^{l} p_i'(A) q_i(A) = I$) $(*)$

<u>Тогда</u> 1) $(*)$ дает разлож. X в

$x = \sum_{i=1}^{l} x_i = \sum_{i=1}^{l} p_i'(A) q_i(A) x$, где $x_i \in \operatorname{Ker} p_i(A)$

2) $p_i'(A) q_i(A)$ – проекторы $L_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$ $\parallel$ п.о. сим. L_j $(j \neq i)$

Д-во. 1) $p_i'(A) q_i(A) x \in L_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$

$p_A(\lambda) = p_i'(\lambda) p_i(\lambda) \Rightarrow \operatorname{Ker} p_i(A) = \operatorname{Im} p_i(A)$

$x_i = p_i'(A) \cdot (q_i(A) x) \in \operatorname{Im} p_i(A)$

2) $x_i \in L_i$: $\exists x_i = \sum_{i=1}^{l} p_i'(A) q_i(A) x_i = \underset{L_i}{0} + \ldots + x_i + 0 \ldots = x_i$

$P_{L_i} = p_i'(A) q_i(A)$

<u>Теорема</u> $\exists A: X \to X$ $p(A)$ – $\forall$ опр полином <u>Тогда</u>

$\operatorname{Ker} p(A)$ – инв пр A)

Δ $\forall x \in \operatorname{Ker} p(A) \Longrightarrow Ax \in \operatorname{Ker} p(A)$

$p(A)x = 0$ $\quad$ $\forall Ax$; $p(A)(Ax) = A(p(A)x) = A0 = 0$.

∇

<u>Теорема</u> $\exists p_A$ – min полином A

$\exists p_A = p_1 p_2 \cdots p_k$ (Пр. вз. пр) $\deg p_i > 0$

<u>Тогда</u> $\operatorname{Ker} p_i(A)$ – неприв. инвар. пр-ва

Δ

$\exists \operatorname{Ker} p_i(A) \neq \{\theta_x\} \underbrace{\Longrightarrow \cdots}_{\text{аналогично}} = X \Rightarrow p_i(A) = \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow p_i(\lambda)$ – ан. полином. $\quad$ $p_A(\lambda)$ – min

$p_A = p_i \cdot p_i'$

$\operatorname{Ker} p_i(A) = \operatorname{Im} p_i'(A)$ $\quad$ ~~dim~~ $\operatorname{Ker} p_i'(A) = \cancel{\dim} \operatorname{Im} p_i$

$\dim(\operatorname{Ker} p_i(A)) = \dim(\operatorname{Im} p_i'(A)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} p_i'(A) = \{\theta\}$

$p_i'(A) = \theta$

$p_i'(\lambda)$ – аннул.

22.04.2014

§ (32) Спектр теорема для по общего вида

1) $\forall p(A)$ $\operatorname{Ker} p(A)$ – инв п.п. A

2) $\exists$ min полином $p_A = p_1 p_2 \cdots p_k$; $\deg p_i > 0$

$\operatorname{Ker} p_i(A)$

<u>Лемма 1</u> $X = \dot{\sum} \operatorname{Ker} p_i(A)$, где $\operatorname{Ker} p_i(A)$ – инв A.

<u>Лемма 2</u> $\exists p_i' = \frac{p_A}{p_i}$ $\exists q_i$ $\sum p_i p_i' = 1 \leftarrow \sum^k p_i'(A) q_i(A)$

<u>Тогда</u> $p'(A) q_i(A) = P_{L_i}$ $(L_i = \operatorname{Ker} p_i(A))$ $= \sum$

<u>Лемма 3</u> $\exists A_i = A|_{L_i} \Rightarrow A = \sum^k A_i P_{L_i} = \dot{\sum}_{i=1}^k A_i$

Лемма 4 $p_i(\lambda)$ – мин полином A_i

$\exists\, p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, т.е. $p_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$

$(A-\lambda_i J)^{m_i}$

$\exists\, L_i = \operatorname{Ker} p_i(A-\lambda_i J)^{m_i}$

Теорема 1. $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_i$ (L_i – инв A)

2. $P_{L_i} = p_i'(A)\, q_i(A)$ – ультрапроектор на L_i

3. $A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_i = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} A_i$

4. $p_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ – мин полином A_i

Δ ? ? ? ∇

Опр m_i – ν ранга соотв. инв L_i

Опр $T: X \to X$ ν нильпотентным, если $\exists\, m_i \in \mathbb{N}$ $T^{m_i} = 0$, но $T^{m_i-1} \neq 0$, а m_i ν порядком T

Теорема m_i – ранг $L_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i J)^{m_i}$

Тогда $T_i = A_i - \lambda_i J$ – нильпотентный по m_i

Δ $T^{m_i} = (A-\lambda_i J) = O$ $\leftarrow \nu\ (\lambda-\lambda_i)^{m_i-1}$

но $\not\downarrow$ $T^{m_i-1} = (A_i-\lambda_i J_i)^{m_i-1} \neq O$

∇

мин кон. A_i

$T_i = A_i - \lambda_i J_i$ $\boxed{A_i = \lambda_i J_i + T_i}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sum (\lambda_i J_i + T_i) P_i \\ A &= \dot{+}\sum \lambda_i J + T_i \end{aligned}}$$

Лемма $\sigma_{A_i} = \{\lambda_i\}$

Опр 1. $L_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda J)^{m_i}$ – спектральное инв A

2. P_n – спектральный

3. $A_i = A|_{L_i}$ – спектральн. компонента $A_i = \lambda_i J_i + T_i$

4. (NB) $\{\lambda_i\}$ – жордан. порядок спектра ($\forall \lambda_i = \phi$)

533 Структура нильпотентного оператора

Опр $\exists m : T^m = 0,\ T^{m-1} \neq 0,\ m \in \mathbb{N}$

Пример $T: X \to X,\ \dim X = m$

$$T \longleftrightarrow T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{m}$$ Жорданова клетка порядка m

Лемма 1 $T^m = \theta$, $T^{m-1} \neq \theta$

т.е. T нильпотентный л.о. $\sim m$

Лемма 2 $Te_1 = 0,\ Te_2 = e_1, \ldots Te_m = e_{m-1}$ $(B_e = \{e_i\}_{i=1}^m)$

Лемма 3 $L_i = \text{ло}\{e_1 \ldots e_i\}$ – инв, но не T-инв.

$(TL_i = \text{ло}\{e_1 \ldots e_{i-1}\} = L_{i-1},\ T^2X = L_{m-1} \ldots T^mX = 0)$

$\nabla L_i = \text{ло}\{e_{i+1} \ldots e_m\}$

Лемма 4 $\sigma_T = \{0\}$, $0 \longleftrightarrow$ с.в. e_1

$\chi_T(\lambda) = (-\lambda)^m = 0$ $\quad (T - E)X = 0 \quad TX = 0$

Лемма 5 $p_T(\lambda) = \chi_T(\lambda)$

Опр Ло, матрица которого Жорданова в некотором базисе, Γ ортонормальным нильпотентным опер.

Теорема Прямая сумма ортонормальных нильпот. операторов есть нильпот. опер. Причем порядок нильпотентности равен макс. размеру Жордановой клетки из присутств.

$$T = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} T_i \qquad T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & \\ & \boxed{T_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{T_k} \end{pmatrix}$$ m – $\max_{i=1..k} m_i$

Теорема Любой нильпот. ло T может быть представлен в виде

$T = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} T_i$, где T_i – ортонорм. нильпот. ло

без док-ва

Базис Жордана $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_{L_i}$ L_i – инв

$T_i : L_i \to L_i$ – жорданов оператор нильпот. по

$\mathcal{B}_{L_i} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots\}$; $\dim X = n = \sum_{i=1}^{k} m_i$; $T_i e_1^{(i)} = 0$

прямо выбор.

$T_i e_2^{(i)} = e_i$

(534) Жорданова форма матрицы по общему виду

$A = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i J + T_i) P_i$ $A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 E + T_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda E_2 + T} & \\ 0 & & \boxed{} \end{pmatrix}$

<u>Далее:</u> $\exists$ для всех $i = \overline{1,k}$, в L_i введены Жорд. базисы

$\lambda_i \leftarrow L_i \leftrightarrow \mathcal{B}_{L_i} = \{e_s^{(i,j)}\}$ ← j – номер, ← внутри ж.к.

$\sigma_{A_i} = \{\lambda_i\}$

<u>Опр</u> $n_i = \dim L_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i J)^{m_i}$ – алгебр. кратность λ_i

<u>Опр</u> m_i = порядок нильпотентности T_i – алгебр. кратность λ_i

<u>Опр</u> $r_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i J)$ – геом. кратность λ_i

23.04.2014

Жорданова форма:

$A : X \to X$ $k < n = \dim X$ $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

$\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$; $p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

① $X = \dot{+} \sum_{i=1}^{k} L_i$ $(L_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i J)^{n_i})$

② $A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_i$ $(A_i = A|_{L_i})$, где

$A_i = \lambda_i J_i + T_i$ $(T_i^{m_i} = \theta)$

$\mathcal{B}_x = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{L_i}$; $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$

③ A внутри:

$$A_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{matrix}}_{m_i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square \end{pmatrix}$$

λ_i ; $n_i = \dim L_i$ – полная кратность

m_i – порядок нильпотентности

$r_i = \dim L_{\lambda_i} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i J)$

Крайние случаи: ① Если $\forall i = \overline{1,k}$, $n_i = 1 \Leftrightarrow n_i = r_i \Leftrightarrow$ A – ло скал. типа

② Если $\forall i = \overline{1,k}$, $m_i = n_i$, $r_i = 1$

$\boxed{\begin{matrix} n_i \geq m_i \\ n_i \geq r_i \end{matrix}}$ $\hookrightarrow \chi_A(\lambda) = p_A(\lambda)$ $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

<u>Теорема</u> Гамильтона – Кэли

① $\chi_A(\lambda)$ – хар. полином A, т.е. $\chi_A(A) = \mathcal{O}$

② $\chi_A(\lambda) \vdots p_A(\lambda)$, и $\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda) \Leftrightarrow n_i = m_i \Leftrightarrow r_i = 1$ $(i = \overline{1,k})$

Евклидово пространство

(§35) Метрические, нормированные, вещественные предгильбертовы и евклидовы пр-ва. Примеры

① Метрическое пр-во.

<u>Опр.</u> $\exists M = \{x, y \dots\}$, $\exists M \times M$ – на нем введена

$\rho: M \times M \to \mathbb{R}$:

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ – <u>рефлексивность</u> симметр.
2) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x,y) \geq 0$ – полож. опр.
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ – н-во $\triangle$

$\rho(x,y)$ – расстояние, M – метр. пр-во

Примеры:

1. Дискретная метрика: $\begin{cases} \rho(x,y) = 1 & x \neq y \\ \rho(x,y) = 0 & x = y \end{cases}$

2. $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ — Евклидова метрика

3. $\rho(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ f, g - ф. на X

$\rho(f,g) = \int_{x \in X} f(x) g(x)$ — сомнительно или неверно

② Нормированное пр-во

X — л.п. над F, $\exists$ на X задана $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ со св-ми:

1. $\|x\| \geq 0$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$ — норм. отрицат.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in F$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пример: 1) $X = \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

2) $X \times X = \{A : X \to X\}$, $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

<u>Лемма</u> Всякое нормированное пр-во является метрическим. Обратное неверно

Δ $\rho(x,y) = \|x - y\|$ например ∇

③ Вещественное псевдоевклидово пр-во

<u>Опр</u> $\exists X$ — л.п. над $\mathbb{R}$ $\exists G(x,y)$ — т.н. метр. форма на X

1. $G(x,y) = G(y,x)$
2. $G(x,y)$ — билин. форма
3. $G(x,y) = 0$ для всех $y \in X$ только при $x = 0$

Тогда X наз. псевдоевкл. пр-вом.

(NB) $G(x,y) = \langle x, y \rangle_G$ наз. скал. пр-вом x и y

(NB) $G(x,y) : X \times X \to \mathbb{R}$

<u>Пример</u>: пр-во Минковского:

$X = \mathbb{R}^4$ $G(x,y) = \xi^0 \eta^0 - \xi^1 \eta^1 - \xi^2 \eta^2 - \xi^3 \eta^3$

$x = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ **Опр.** x и y ортогональны, если

$y = (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ $\langle x, y\rangle = 0$

Опр x ортогонален 0-вектору в $b(x,y)$ если $\langle x, x\rangle = 0$

$x = (\sqrt{3}, 1, 1, 1)$

(4) Вещественное евкл. пр-во

Опр. $\exists X$ - в.п. над $\mathbb{R}$, $\exists$ сущ. $b(x,y)$ - т.н. мер. ф-ия на X со св-ми:

1. $b(x,y)$ - бином. ф.
2. $b(x,y) = b(y,x)$
3. $b(x,x) \geq 0$, $b(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ - полож. определ.

Тогда X - вещ. евкл. пр-во,

Лемма в любом вещ. евкл. пр-во $\forall$ евкл. матрица. примем $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

1) $\|x\| \geq 0$ $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_X$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = \lambda \sqrt{x}$
3) В виноградове

Пример 1) $X = \mathbb{R}^3$ $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} \xi^i \eta^i$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $\langle x, y\rangle = \sum_{k,i=1}^{n} g_{ik} \xi^i \eta^k$

где g_{ik} - мер. тензор

$g_{ik} = g_{ki}$ - сим. тензор

g устроен так, что $\langle x, y\rangle \geq 0$ или $= 0$, если $\xi^i = 0$.

(536) Элементарная геометрия вещ. евкл. пр-ва

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)

$\exists x, y \in E$ (евкл. пр-во), тогда $|\langle x, y\rangle_G| \leq \|x\|_G \|y\|$ (*)

$\|\lambda x - y\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle - \langle \lambda x, y\rangle - \langle y, \lambda x\rangle - \langle y, y\rangle =$

$= \lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle x,y\rangle + \|y\|^2 \geq 0$ кв. трехчл. от λ

$\frac{D}{4} = (\langle x,y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ – для выполн.

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

<u>Лемма</u>. Когда $y = \lambda x$ – равенство

<u>Следствие</u>: неравенство ∇: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq$

$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

① Длина вектора $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

② Расст. м. (·). Евкл: $\rho(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$

③ $\mathbb{R}^3$ $\langle x,y\rangle = |x||y|\cos\varphi$

E $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

<u>Опр</u> L, M – пп E, $\cos(\widehat{L,M}) = \sup\limits_{\substack{x\in L\\ y\in M}} \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

<u>Опр</u> $\rho(x,L) = \inf\limits_{y\in L} \rho(x,y)$

(33) Комплексное Евклидово пространство. Ортогональ.

<u>Опр</u> $\exists$ X – л.п. над $\mathbb{C}$ $\exists$ $G(x,y): X\times X \to \mathbb{C}$

1) „Полуторалинейная" $G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha G(x,y)$
$G(x, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \bar{\alpha}_1 G(x_1, y) + \ldots \bar{\alpha}_2$

2) Эрмитова: $G(x,y) = \overline{G(y,x)}$

3) Полож. опред $G(x,x) \geq 0$ $G(x,x) = 0$, т. при $x = \theta_x$

Из это сопр. пр-е.

<u>Опр</u> $\exists$ X – л.п. над $\mathbb{C}$ $\exists$ на X задано $G(x,y)$ такое

X – комплл. евкл. пр-во

Теорема (К-Б для ℓ):

$\forall x, y \in E$ верно: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$

Δ ☆ $\|\lambda x - y\|^2 = \langle \lambda x - y, \lambda x - y\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle -$

$- \langle \lambda x, y\rangle - \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle =$

$= \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle - \lambda\langle x, y\rangle - \bar{\lambda}\langle y, x\rangle + \|y\|^2 =$

$= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0$

$\frac{D}{4} \leq 0 : (\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ ▽

☆ $\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \cdot e^{i\varphi}$

$|\operatorname{Re}(\underbrace{\langle x, e^{i\varphi} y\rangle}_{|\langle x, y\rangle|})| \leq \|x\| \underbrace{\|e^{i\varphi} \cdot y\|}_{1\|y\|}$

$|\operatorname{Re}(|\langle x, y\rangle|)| \leq \|x\|\|y\|$

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Следствие: н-во Δ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}_{\leq 2|\langle x, y\rangle|} + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$

Также $\|x+y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ - упр.

Теорема: X - нормированное. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$\rho(x, y) = \operatorname{dist}(x, y) = \|x - y\|$

Пример: $X = \ell^n$ 1) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \bar{\eta}^i$

2) $\overline{\langle x, y\rangle} = \sum \bar{\eta}^i \bar{\xi}^i = \langle y, x\rangle$

К-Б

$\left|\sum \xi^i \bar{\eta}^i\right| \leq \sqrt{\sum |\xi^i|^2} \cdot \sqrt{\ldots}$ 3) $\langle x, x\rangle = \sum \xi^i \bar{\xi}^i = \sum |\xi^i|^2 \geq 0$

Или вот какой пример:

② $X = \mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi^i \overline{\eta^k}$

1. Он
2. $g_{ik} = \overline{g_{ki}}$ $\quad G = \|g_{ik}\|$: $G = \overline{G^T}$
3. $\langle x, y\rangle \geq 0$

Ортогональность

Опр $\exists x, y \in E$. говорят, что $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$

Опр x – 0-вектор G, если $G(x, x) = 0$

Лемма в к.е.п. E 0-вектор ! (из эрмит. симм.)

Лемма $\exists x \perp y_1$, $x \perp y_2$, $x \perp \dots y_n$, тогда $x \perp \forall$ л.к. $\sum \alpha_i y_i$

Опр $x \perp L$ – мн E, если $x \perp \forall y \in L$

Опр $\exists L$ и M – мн E. Говорят, что $L \perp M$, если $x \perp y$ $(\forall x \in L, \forall y \in M)$

Опр $\exists L$ – мн E. Множество $L^\perp = \{x \in E, x \perp L\}$ называется ортогональным дополнением L

Лемма ортогон. дополн. к. L является пр. E

Лемма $\exists \{x_1 \dots x_k\}$, $x_i \perp x_j$ $(\forall i, j$ $i \neq j)$ $x_i \neq 0$
$k \leq \dim X$
Тогда $\{x_i\}$ – ЛНЗ

Δ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

∇

Теорема Пифагора

$\{x_i\}_{i=1}^{k}$ $\boxed{x_i \perp x_j}$, тогда $\|\sum x_j\|^2 = \sum \|x_j\|^2$

Δ $\text{л.ч.} = \langle \sum x_i, \sum x_j\rangle = \sum \langle x_i, x_i\rangle = \sum \|x_j\|^2$

(538) Ортогональный и ортонормированный базисы E. Ортогональный проектор.

Опр. Базис E $\{e\}_{i=1}^{n}$ ортогональный, если $e_i \perp e_j$ $(i \neq j)$

Опр Базис E $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{n}$, если $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & e_i = e_j \quad i=j \\ 0, & e_i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$

Теорема В кон E $\exists$ ортогон. базис

Проц ортогонализации Грам-Шмидта

$\{x_1 \dots x_n\}$ - базис (ЛНЗ)

1) $e_1 = x_1$
2) $e_2 = x_2 + \alpha_1 e_1$ из усл: $e_1 \perp e_2$ $\alpha_1 = -\frac{\langle x_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$

$\vdots$

k) $e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \dots \beta_i e_i + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$

$\langle e_k, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_k, e_i \rangle + \dots + \beta_i \langle e_i, e_i \rangle + \dots$

$\beta_i = -\frac{\langle x_k, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$

(NB) $e_k \neq 0$ $e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1} - \lambda_k \{x_1 \dots x_{k-1}\}$

$\neq 0$

* * *

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\langle f_1, f_2 \rangle}$

$\langle x, y \rangle = g_1 x_1 y_1 + g_2 x_2 y_2$

$\langle f_3 \rangle$

~~№3~~ 25,18 4б) 6б

25,11 1) 2)

25,13 2)

25,17

30.04.14 Лекция

$\{x_1 \dots x_n\} \xrightarrow{\text{г-ш}} \{e_1 \dots e_n\}$ $e_i \perp e_j$ $(i \neq j)$

(NB1) $\|e_i\| \le \|x_i\|$ $i = \overline{1,n}$

Δ

$e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots \beta_{k-1} e_{k-1}$

$\beta_i = -\dfrac{\langle x_i, e_k \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$; $\langle e_k, e_k \rangle = \langle x_k, e_k \rangle$

$|\langle e_k, e_k \rangle| = |\langle x_k, e_k \rangle| \le \|x_k\| \cdot \|e_k\|$

$e_i \perp e_j$ $\|e_k\|^2 \le \|e_k\| \|x_k\|$

$\|e_k\| \le \|x_k\|$

∇

(NB2) $\{x_1 \dots x_{k-1}\}$ – ЛНЗ

$\{x_1 \dots x_k\}$ – ЛЗ, тогда $\{e_1 \dots e_{k-1}\} \neq 0$

$e_k = 0$

$\boxed{\text{УПР}}$

$\{x_i\} \xrightarrow{\text{ГШ}} \{e_i\}$

<u>Следствие</u>: В $\forall E$ (сепар) $\exists$ орт. базис $\{e_i\}$

$\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_k \rangle = \delta_{ik}$, т.е. $\tilde{e}_i \perp \tilde{e}_k$, $\|e_i\| = 1$

$\exists \{e_i\}$ – орт базис $\quad \exists \tilde{e}_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$

$\{\tilde{e}_i\}$ – ортн. базис

<u>Теорема</u> $\exists L$ – пр E, $\exists M = L^\perp = \{x \in E \mid x \perp L\}$

Тогда: $\forall x \in E$: $x = g + h$ ($g \in L$, $h \in L^\perp = M$)

т.е. $E = L \dotplus M$

Δ

$\exists \{e_1 \dots e_k\}$ – ортн. б. L ($\dim L = k$)

$\underbrace{\{\underbrace{e_1 \dots e_k}_{\text{ортн } L}, \underbrace{e_{k+1} \dots e_n}_{\text{ортн } M}\}}_{\text{баз } X}$ $\quad \dim L = k$, $\operatorname{codim} L = \dim L^\perp$

$x = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i e_i = \underset{L}{g} + \underset{M}{h}$. А единственность?

Вып.

$\leftarrow$ $\forall$: $\exists$ $x = g - h = g_1 - h_1 \Rightarrow [g - g_1 = h_1 - h]$ $\oplus$

$\langle (+), g - g_1 \rangle = \langle h - h_1; g - g_1 \rangle = 0$ $\quad \langle g - g_1; g - g_1 \rangle = 0$

$\|g - g_1\|^2 = 0 \Rightarrow g = g_1$. $h = h_1$ аналог.

∇

$E = L \dotplus L^\perp$ $\quad$ (NB) $E = L \oplus M = L \oplus L^\perp$, $\oplus \Sigma \dots$

<u>Опр</u> $\exists E = L \oplus M$, $M = L^\perp$, тогда $P_L^{\parallel M} = P_L^\perp$ и $P_{\text{орт проект}}$

<u>Опр</u> $P_L^\perp x$ – орт. проекция x на L

$P_M^\perp x = x - P_L^\perp x$ – орт. составляющая x; и

<u>Свойство ОРТН базиса</u>

<u>Лемма 1</u> $\exists \{e_i\}$ – ОРТН базис E, тогда $\forall x, y$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta_i$

Δ

(NB) $\{e_i\}$ – базис E, тогда $g_{ik} = \langle e_i, e_k \rangle$ – метр. тенз.

$G = \|g_{ik}\|$ – матрица Грамма

$\langle x, y \rangle = \langle \sum \xi^i e_i; \sum \eta^k e_k \rangle = \sum \xi^i \overline{\eta^k} \langle e_i, e_k \rangle = \sum g_{ik} \xi^i \eta^k$

∇

Примечание: $g_{ik} = \delta_{ik} \Rightarrow \langle x, y\rangle = \sum_{i,k} \delta_{ik} \xi^i \eta^k =$

defaut $\longrightarrow = \sum_i \xi^i \eta^i$

Лемма 2: $\exists \forall x, y \in E$: в $\{e_i\}$ $\langle x, y\rangle = \sum \xi^i \eta^i$
тогда $\{e_i\}$ – ОРТН

Δ

$\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$, далее тривиально

∇

Лемма 3: для $\{e_i\}$ – ОРТН $G = E$ $g_{ik} = \delta_{ik}$

Теорема: $\exists$ $E = L \oplus M$
$\exists$ $\{e_1 \dots e_k\}$ – ОРТН б. L
$\{e_{k+1} \dots e_n\}$ – ОРТН б. M, тогда:

$$\forall x \in E: \quad P_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \langle x; e_i\rangle e_i$$

Δ

$P_L^{\perp} = P_L^{ИМ}$ т.е. 1) $\forall x \in L: P_L^{\perp} x = x$
2) $\forall y \in M: P_L^{\perp} y = 0$

Проверим:

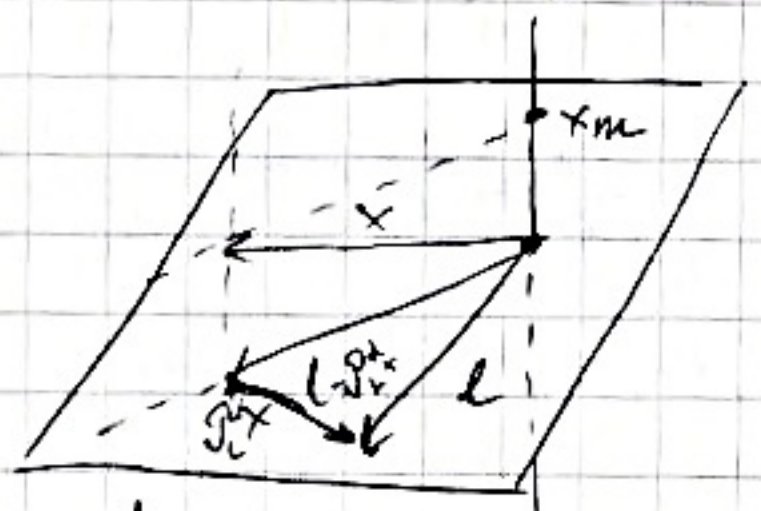
① $\exists x = e_j$ $(j = 1 \dots k)$ $P_L^{\perp} e_j = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle}_{\delta_{ij}} e_i = e_j$

② $\exists y = e_s$ $(s = k+1 \dots n)$ $P_L^{\perp} e_s = \sum_i \underbrace{\langle e_s, e_i\rangle}_{0} e_i = 0$

∇

§39 Задача о перпендикуляре

Задача: L – пп E, $E = L \oplus M$, Нам нужно
$x = x_L + x_M$
$x_L = P_L^{\perp} x$ – орт пр x на L
$x_M = x - P_L^{\perp} x$ – орт сост. x к L



Иллюстрация

В базисе ОРТН пишем
$P_L^{\perp} x = \sum_i^k \langle x; e_i\rangle e_i = x_L$
$x_m = x - x_L$

Лемма: $\|x\| \geq \|P_L^{\perp} x\|$
Δ $\|x\| = \|P_L^{\perp} x\| + \|P_M^{\perp} x\|$, + Пифагор ∇

Лемма 2: $\|x-l\| \geq \|x - P_L^{\perp} x\|$

Δ $\|x-l\| = \|\underbrace{(x - P_L^{\perp} x)}_{M} + \underbrace{(P_L^{\perp} x - l)}_{L}\|$, тогда пифагор

$$\|x-l\|^2 = \|x - P_L^{\perp} x\|^2 + \|l - P_L^{\perp} x\|^2.$$

∇

(NB) $\|x-l\| = \|x - P_L^{\perp} x\| \Leftrightarrow l = P_L^{\perp} x$

Лемма $\|P_L^{\perp} x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2$

Δ

$$\langle P_L^{\perp} x, P_L^{\perp} x\rangle = \langle \sum \langle x, e_i\rangle e_i, \dots \rangle =$$

$$= \sum_{i,j}^{n} [\langle x, e_i\rangle \overline{\langle x, e_j\rangle} \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij} \text{ в орт. б.}}] = \sum_{i=1}^{n} [\langle x, e_i\rangle \langle x, e_i\rangle] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

∇

Следствие $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Н-во Бесселя)

$\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Н-во Парсеваля)

Опр $\exists \{e_i\}$ – орт. сист. векторов в E, тогда $\{\varphi_i = \langle x, e_i\rangle\}_{i=1}^{k}$ коэфф. Фурье относ. $\{e_i\}$

$\cancel{\|x\|}$ $\|P_L^{\perp} x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2$, $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2$

Теорема Для того, чтобы орт. сист. $\{e_i\}$ была бы полной в E, необ. чтобы $\forall x$ $\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$

Δ

(Н) Неравенство Парсеваля из Бесселя, поскольку полная система $\{e_i\}$ – лежит – орт. и разложим.

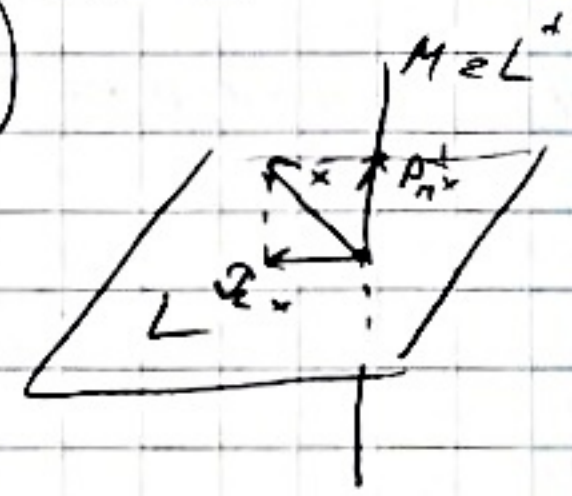
(Д) $\|x\|^2 = \sum \dots \Rightarrow \{e_i\}$ – полн. набор?

$\dim E = m < \infty$

Тривиально ежабы

Решение задачи о $\perp$ в неортог. базисе

$x = P_L^{\perp} x + P_M^{\perp} x \quad (E = L \oplus M)$



$\{a_i\}_{i=1}^{k}$ – базис L (не ортн), $\dim L = k$

$x = \underbrace{\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots + \alpha^k a_k}_{P_L^{\perp} x} + P_M^{\perp} x$

$\langle a_1, (*)\rangle$: $\bar\alpha_1 \langle a_1; a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_1; a_2\rangle + \dots + \alpha_k \langle a_1; a_k\rangle + 0 = \langle a_1; x\rangle$

F над $\mathbb{C}$

$\langle a_2, (*)\rangle$: $\bar\alpha_1 \langle a_2; a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_2; a_2\rangle + \dots + \bar\alpha_k \langle a_2; a_k\rangle + 0 = \langle a_2; x\rangle$

. . . . . .

$\langle a_k; (*)\rangle$: $\bar\alpha_1 \langle a_k; a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_k; a_2\rangle + \dots + \bar\alpha_k \langle a_k; a_k\rangle + 0 = \langle a_k, x\rangle$

$$\Delta G(a_1 \dots a_k) = \begin{vmatrix} \langle a_1; a_1\rangle & \langle a_1; a_2\rangle & \dots & \langle a_1; a_k\rangle \\ - & - & - & - \\ \langle a_k; a_1\rangle & \langle a_k; a_2\rangle & \dots & \langle a_k; a_k\rangle \end{vmatrix}$$

det Грамма

$$\alpha_j = \begin{vmatrix} \langle a_1; a_1\rangle & \dots & \overset{j}{\langle a_1; x\rangle} & \dots & \langle a_1; a_k\rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle a_k; a_1\rangle & \dots & \langle a_k; x\rangle & \dots & \langle a_k; a_k\rangle \end{vmatrix} \Big/ G(a_1 \dots a_k)$$

$$P_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i a_i$$

Теорема $\boxed{\text{Упр}}$ $\exists \{e_1 \dots e_k\}$ – результат ортон. (Г-Ш) для $\{a_1 \dots a_k\}$, тогда $G(a_1 \dots a_k) = \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 \dots \|e_k\|^2$

Следствие $\boxed{\text{Упр}}$ $0 \le G(a_1 \dots a_k) \le \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \dots \|a_k\|^2$

NB $G(a_1 \dots a_k) = 0 \iff \{a_i\}_{i=1}^{k}$ – ЛЗ

5/10 Единственность полилинейных форм на E и на сопряженном E^*

$\dim E = \dim E^* < \infty \ (n)$

Теорема: $\exists$ в E задана $b(x,y) = \langle x,y\rangle_b$ (м. форма)

Тогда: $\tilde{b}: E \to E^*$ действ. по формуле

$\tilde{b}x = f$, где $\langle x,y\rangle_b = (f,y)$ $(\forall y \in E)$

Опр. ест. изоморфизм между E и E^*

Δ

① b - лин. форма $f \in E^*$: $(f, y_1+y_2) = (f,y_1)+(f,y_2)$

$\langle x, y_1+y_2\rangle = \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle$

Аналогично про $(f, \lambda x)$

② $\longleftrightarrow$ $\exists x \begin{matrix} \nearrow f_1 \\ \searrow f_2 \end{matrix} \Big\} \overset{?}{=} f_1 = f_2$

$\left.\begin{matrix}\langle x,y\rangle = (f_1;y) \\ \langle x,y\rangle = (f_2;y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (f_1,y) = (f_2;y)$ $\forall y \in E$

$f \begin{matrix} \nearrow x_1 \\ \searrow x_2 \end{matrix} \Big\}$ $\begin{matrix}\langle x_1;y\rangle = (f,y) \\ \langle x_2;y\rangle = (f,y)\end{matrix}$

$\langle x_1 - x_2; y\rangle = 0$ $\forall y = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E \Leftrightarrow x_1 = x_2$

③ $\forall f \xrightarrow{?!} x$ $\left(\begin{matrix}\operatorname{Im}\tilde{b} \\ \operatorname{Ker}\tilde{b}\end{matrix}\right)$ $\boxed{\text{Упр}}$ или в учебнике

∇

1. $\tilde{b}(x_1+x_2) = \tilde{b}(x_1) + \tilde{b}(x_2)$
2. $\tilde{b}(\lambda x_1) = \lambda b(x_1)$

$x_1 \longleftrightarrow f_1$ по ф-ле $\langle x_1;y\rangle = (f_1;y)$

$\tilde{b}(\alpha x_1 ?)$ $\langle \alpha x_1;y\rangle = \alpha\langle x_1;y\rangle = \alpha(f_1;y) = (\alpha f_1;y)$

$\alpha x_1 \overset{\tilde{b}}{\longleftrightarrow} \alpha f_1$

$x_1 + x_2 \overset{\tilde{b}}{\longleftrightarrow} f_1 + f_2$

Следствие $\tilde{b}$ - обратим, т.е. $\exists \tilde{b}^{-1}: E^* \to E$, так что

из $\boxed{bx = f} \Longrightarrow \boxed{x = b^{-1}f}$ $x \overset{\tilde{b}}{\longleftarrow} f$

Переходим к базису из E^* в E^*

$\exists \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис E $\{f^k\}_{k=1}^n$ - сопр. базис в E^*

$(f^k, e_i) = \delta^k_i$

$\Delta e^k = \tilde{G}^{-1} f^k$; Δ $\{e^k\}_{k=1}^n \subset E$

<u>Лемма</u>: $\{e^1 \dots e^n\}$ – базис E (сопр. сопряж ч)

<u>Лемма</u>: $\langle e_i, e^k \rangle = \langle e^k, e_i \rangle = \delta_i^k$

Δ $\langle x, y \rangle = (f, y)$ $\exists \boxed{x = e^k}$ $\langle e^k, y \rangle = (f^k, y)$

$\exists y = e_i$: $\langle e^k, e_i \rangle = (f^k, e_i) = \delta_i^k$

<u>Определение</u> $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$ ∇ биортонормированными базисами в E

Связь $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$

<u>Лемма I</u> $\exists g_{ik}$ – матр. метр $\{e_i\}_{i=1}^n$, т.е. $g_{ik} = \langle e_i, e_k \rangle$

$\exists g^{ik}$ – элемент матрицы $\|g^{ik}\| = \|g_{ik}\|^{-1}$

Тогда: $e_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} e^k$ и $e^k = \sum_{i=1}^n g^{ki} e_i$

Δ

① $e_i = \sum \alpha_{ik} e^k$ матр. перехода

$\langle e_i, e_j \rangle = \langle \sum \alpha_{ik} e^k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \langle e^k, e^j \rangle = \delta_j^k$

$= 1 \cdot \alpha_{ij} = g_{ij}$

② –//–

∇

NB1 $\exists \{e_i\}$ – орто $\Rightarrow e^k = e_k$, $\|g_{ik}\| = E$, $g_{ik} = \delta_k^i$

<u>Опр</u> $\exists x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ (*)

$\|$

$\exists x = \sum \xi_k e^k$ (**), Тогда $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3 \dots \xi^n\}$ – контр. вар компоненты x, $\{\xi_1 \dots \xi_n\}$ – ковариантны

<u>Лемма II</u> $\xi_i = \sum_{k=1}^n \xi^k g_{ki}$ (3) $\xi^k = \sum_{i=1}^n \xi_i g^{ik}$ (4)

NB $g_{ik} = \overline{g_{ki}}$

$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k$

$= \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\sum_{k=1}^n g_{ik} e^k \right) =$

$= \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \xi^i g_{ik} \right)}_{\xi_k} e_k \Rightarrow \xi_i = \sum_{k=1}^n \xi^k g_{ki}$, чтд

Лемма III $\xi^k = \langle x; e^k \rangle$ (4) $\xi_i = \langle x; e_i \rangle$ (6)

Δ

(6) $\langle x; e_i \rangle = \langle \sum \xi_k e^k; e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle e^k; e_i \rangle =$

$= \delta^i_i \xi_i = \xi_i$ ч.т.д.

(4) аналогично (NB 2) $\{e_i\}$ - орто $\Rightarrow \xi^i = \xi_i$

∇

Теорема $\tilde{b} x = \sum_{i,k=1}^{n} \xi^i g_{ik} f^k$

Δ $\tilde{b} x = \tilde{b}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i\right) \underset{\text{лин } \tilde{b}}{=} \sum \xi^i \tilde{b} e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \tilde{b}\left(\sum g_{ik} e^k\right) =$ (4)

$= \sum_i \sum_k \xi^i g_{ik} \tilde{b} e_k = \sum_{i,k} \xi^i g_{ik} f^k$

$\boxed{\text{Зад}}$ $\tilde{b}' f = ?$

∇

$\boxed{\text{Далее в } \mathbb{R}}$ $\xi_i = \sum g_{ik} \xi^k$ - (3R)

$\xi^i = \sum g^{ik} \xi_k$ (4R)

Замечание 3R. - опускание индекса у координаты

4R - поднятие индекса у координаты.

Пр W^{ij}_k $(2,1)$ ко контр

Если хотим $W^{ij}_{ik} = g_{il} W^{lj}_k$ (1-го инд.)

$W^{ijk} = g_{kl} W^{ij}_l$

(541) Эрмитовские сопряжённые и эрмитовы операторы в E

Пр] E - евкл. пр. над $\mathbb{C}$, тогда $A^+ : E \to E$ эрмитово сопряж к автоморф. A, если $\forall x, y \in E$: $\langle Ax; y \rangle = \langle x; A^+ y \rangle$

(NB) Если E над $\mathbb{R}$, A^+ - сопряж. оператор и обозн. A^*

Теорема $\forall A : E \to E \Longleftrightarrow \exists A^+$

Δ] $\{e_i\}$ - ОРТН базис E, $\exists x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, $y = \sum \eta^k e_k$

$\exists A \longleftrightarrow A = \|\alpha_k^i\|$ $\quad \alpha_k^i = (Ae_k)^i$, т.е. $Ae_k = \sum_i \alpha_k^i e_i$

(NB) $\langle x, y\rangle \overset{опт}{=} \sum \xi^i \overline{\eta^i}$;

$\langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (Ax)^i \overline{\eta^i} = \overline{\left[\sum_i \left(\sum_k \alpha_k^i \xi^k\right) \overline{\eta^i}\right]} =$

$= \sum_k \xi^k \left(\sum_i \alpha_k^i \overline{\eta^i}\right) = \sum_k \xi^k \left(\sum_i \overline{(\alpha^T)}_i^k \eta^i\right) = \langle x, A^+ y\rangle$

$(A^+ y) = \left(\sum \overline{(\alpha^T)}_i^k \eta^i\right)$

▽

<u>Опр</u> $\exists A_{[n\times n]}$ $A = \|\alpha_k^i\|$ $\quad A^+ = \overline{A^T}$ ф матрицей, эрмитово сопряж. к A $(\in \mathbb{C})$

<u>Опр</u> $\exists$ — // — $A^* = A^T$ ф матрицей, сопряженной к A $(\mathbb{R})$

<u>Опр</u> $A: E \to E$ над $\mathbb{C}$ ф эрмитовым, если $\forall x, y \in E$ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, то есть $A = A^+$

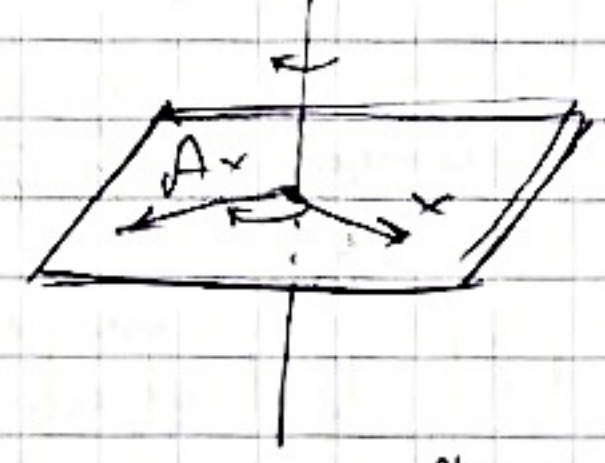
(NB) при $A: E \to E$ над $\mathbb{R}$ ф самосопряженным (ССО), если $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ $\forall x, y \in E$

<u>Лемма 1</u> для матрицы эрмит. оператора (ССО) в ОРТН. матрица обл. св-вом: $A = A^+ = A^T$

(NB) $A \in C_n^n$ ф эрмитовой, если $A = \overline{A^T}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$

<u>Лемма 2</u> для самосопр. оператора A $A = A^* = A^+$

<u>Пример</u> $\exists E = \mathbb{R}^2$, стандт. скал. пр-е.



$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2} = \left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ - ОРТН

$\mathcal{A}_\alpha \longleftrightarrow A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}_\alpha^* \longleftrightarrow A_\alpha^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Т.е. $\mathcal{A}_\alpha^* = \mathcal{A}_{-\alpha}$

<u>Пример</u> $\exists E = \mathbb{C}^n$ $\quad \{e_1 \dots e_n\}$ - ОРТН $\quad \langle x, y\rangle = \sum \xi^i \overline{\eta^i}$

$E = L \oplus M$, где L — по $\{e_1 \dots e_k\}$, M — по $\{e_{k+1} \dots e_n\}$

$\Sigma\ P_L^{\perp} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i \longleftrightarrow P_L^{\perp} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & \boxed{0} \end{array}\right)$ $\underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{n-k}$

Видно, что $\overline{(P_L^{\perp})^T} = P_L^{\perp}$

Спектральный анализ эрм. оператора и самосопр.

Лемма 1 $\exists$ A - эрмитов ЛО, тогда спектр $A \subset \mathbb{R}$

Δ $\Sigma\ \lambda \longleftarrow$ с.в. x $(Ax = \lambda x \quad x \neq 0)$

для $y = x$: $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$

$\langle Ax, x \rangle - \langle x, Ax \rangle = 0$

$\lambda \langle x, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = 0$

$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\|x\|^2}_{\neq 0} = 0 \longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

∇

Лемма 2: $\exists$ A - эрмитов ЛО $\lambda_1; \lambda_2$ - с.з $\lambda_1 \longleftarrow x_1$, $\lambda_2 \longleftarrow x_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

тогда $x_1 \perp x_2$

Δ

$\langle Ax_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ax_2 \rangle \quad (*)$

$\langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle$

$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

∇

Опр пл L евклидова пр E $\dim$ приводящим для ЛО $A: E \to E$, если

1) L - инвариантное д. A
2) $M = L^{\perp}$ - тоже инв. пл A $\quad E = L \oplus M = L + M$

L и M - инв A

Теорема Для эрмитового A $\forall$ инв L - приводящее

Δ

$\exists x \in L \Rightarrow Ax \in L$ - из опр. инв

$y \in M = L^{\perp} \overset{?}{\Rightarrow} Ay \in M$

$\langle x, y \rangle = 0 \quad (x \perp y) \quad \left.\begin{array}{l} \cancel{\langle \underbrace{Ax}_{L}, \underbrace{y}_{M} \rangle = 0} \\ \underbrace{\langle x, \underbrace{Ay}_{?!} \rangle}_{L} = 0 \end{array}\right\} Ay \perp x \Rightarrow Ay \in M$

Теорема $\exists$ A - эрмитов ЛО (над $\mathbb{C}$), тогда A - скалярный

Δ

$\longleftarrow$ $\forall$: $\{x_1 \dots x_m\}$ - max ЛНЗ из СВ A $(m<n)$

$\triangleleft$ $L = \mathrm{lin}\{x_1 \dots x_m\}$ - из Б - L инв. ($\forall Ax_i = \lambda_i x_i \in L$)

$\triangleleft$ $M = L^{\perp}$ - приводимое, т.е. $E = L \oplus M = L \dot{+} M$

$\triangleleft$ рассмотрим $A_M = A/_M$ $\quad A_M : M \to M$

$A_M x \longmapsto Ax \ (\forall x \in M)$

A_M — $\exists \lambda \longleftrightarrow x$ - с.в. A_M; λ и x - с.з. и с.в. A

$Ax = \lambda x$

x - с.в

$x \in M \Rightarrow \perp x_1, x_2 \dots x_n$

Итого $\underbrace{\{x_1 \dots x_m, x\}}_{m+1}$ - ЛНЗ $\quad \times$

∇

<u>Следствие</u>: $\forall$ эрм. по A $\exists$ орто базис из с.в A.

<u>Построение</u>: 1. $\sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$ $\quad k \le n$

$\forall \lambda$: $n_i = r_i$: $\quad L_{\lambda_i} = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(n_i)}\}$ $\quad L_{\lambda_i} \perp L_{\lambda_j}$:

<u>Теорема</u> СЛО - симметрич, из нее СВ можно делать ОРТН базис

Если у СЛО есть σ_A, то $\sigma_A \in \mathbb{R}$

$\triangleleft$ $A: E \to E$ - СЛО (E - над $\mathbb{R}$)

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - орто ($\langle , \rangle$), $A \longrightarrow A = \|\alpha_k^i\|$, $A = A^T$

Трюк:

E (над $\mathbb{R}$) $\longrightarrow$ $\tilde{E}$ (над $\mathbb{C}$)

$\dim E = \dim \tilde{E}$

$\{e_i\} \qquad \{\tilde{e}_i\}$

$A = A^T = \overline{A}^T$ $\quad A$ - эрм. $\xrightarrow{\tilde{E}}$ $\tilde{A}$ - эрмитов

$\chi_A^{(x)} = \det(\alpha_k^i - \lambda \cdot \delta_k^i) = 0 \Rightarrow \sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

$\parallel$

$\chi_{\tilde{A}}^{(x)} = \det(\alpha_k^i - \lambda \delta_k^i) = 0 \Rightarrow \sigma_{\tilde{A}} = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

...

...

∇

14.06.2014

Спектральная теорема

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

$A = A^+$ $\mathbb{C}$ $\quad$ $A = A^*$ $\mathbb{R}$

$\exists\, A = A^+ \quad \sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$
(м.б. $\lambda_i = \lambda_j$)

$\exists\, \{e_1 \dots e_n\}$ – орто базис из с.в., т.е. $\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$
$Ae_i = \lambda_i e_i$

Тогда: $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$ (где P_{λ_i} – проектор на L_i – по $\{e_i\}$)

(ПВ) $Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i$ (д-во в силу орт.)

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$

Теорема: (min св-во эрмит. оператора)

$\triangleleft\, S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ – ед. сфера в E

$\exists\, \sigma_A$: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$, тогда:

$\langle Ax, x\rangle$ на S принимает мин. значение на $x_1 \Leftrightarrow \lambda_1$ (если λ_1 – простое) или на $\forall$ но... $x_1 \in L_{\lambda_1}$
y: L_{λ_1} – собств ин $\Leftrightarrow \lambda_1$

т.е. $\langle Ax, x\rangle \ge \lambda_1$; $\langle Ax, x\rangle = \lambda_1$ для x_1

$\triangle$

$\langle A, x, x\rangle$: $\quad Ax = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} x$

$x = \sum P_{\lambda_i} x$

Тогда

$\langle Ax, x\rangle = \langle \sum \lambda_i P_{\lambda_i} x, \sum P_{\lambda_k} x\rangle =$

$= \sum_{i,k} \lambda_i \langle P_{\lambda_i} x, P_{\lambda_k} x\rangle \ge \sum_i \lambda_i \|P_{\lambda_i} x\|^2 =$

$\ge \lambda_1 \sum \|P_{\lambda_i} x\| = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \cdot 1$

Парсеваль

Итого $\langle Ax, x\rangle \ge \lambda_1$ $\forall x \in S$

$\triangleleft\, x = x_1 \Rightarrow \langle Ax_1, x_1\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_1\rangle = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$

$\triangle$

§42 Унитарный и ортогональный операторы

Опр 1 $\exists E$ - евкл. пр-во $\exists U: E \to E$, U ~ унит, если
$$\langle Ux; Uy\rangle = \langle x; y\rangle \quad \forall x, y \in E \quad (1)$$

Опр 2 U ~ унитарным, если $\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in E$

Опр 3 U ~ унитарным, если $U^{-1} = U^{+}$, т.е. $UU^{+} = J$

Теорема Опр1 $\Longrightarrow$ Опр2 $\Longrightarrow$ Опр3

(1) Опр 1 $\Longrightarrow$ Опр 2 $\quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x; y\rangle$

$\exists\, x = y$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $\quad \langle Uy, Uy\rangle = \langle y; y\rangle$

$\|Uy\|^2 = \|y\|^2$

(2) Опр 2 $\Longrightarrow$ Опр 3 $\quad \|Uz\| = \|z\| \quad z = x + y$

① в (2) $\|Uz\|^2 = \|x + y\|^2$

$\langle Ux, Ux\rangle + \langle Ux, Uy\rangle + \langle Uy, Ux\rangle + \langle Uy, Uy\rangle =$

$= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

$2\mathrm{Re}\langle Ux, Uy\rangle = 2\mathrm{Re}\langle x; y\rangle$

② в (2) $z = x + iy \Rightarrow \mathrm{Im}\langle Ux, Uy\rangle = \mathrm{Im}\langle x, y\rangle$

Значит $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x; y\rangle$

(3) Опр 1 $\Longrightarrow$ Опр 3 ?

$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x; y\rangle = \langle x; U^{+}Uy\rangle = \langle x, y\rangle = 0$

$\langle x; U^{+}Uy - y\rangle = 0 \quad \forall y, x \in E$

$U^{+}Uy - Jy = 0_E \Rightarrow U^{+}U = J$

$\{e_i\}$ J - базис E

$\det(U^{+}U) = \det E = 1 \Rightarrow \det U \neq 0 \Rightarrow \exists U^{-1}$

$\det U \cdot \det U^{+}$

Опр 3 => Опр 1

$UU^+ = U^+U = J \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle x, Jy\rangle = \langle x, U^+Uy\rangle =$

$= \langle Ux; Uy\rangle$ что.

<u>Пример</u>: $\exists\, U = A_\varphi$

$A_\varphi^{-1} = A_{-\varphi} = \overline{A}_\varphi^T; A_\varphi^*$ $\quad \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \cdots & + \\ - & \cdots \end{pmatrix}$

<u>Теорема</u> $\exists\, U$ - ун.о $\quad \exists \{e_i\}_{i=1}^n$ - орт.

$U \longleftrightarrow U = \| U_i^j \|$

<u>Тогда</u> $\sum_{j=1}^n U_j^i \overline{U}_j^k = \delta_{ik}$ [ортогон. U по строкам]

$\sum_{j=1}^n U_i^j \overline{U}_k^j = \delta_{ik}$ [-//- по столбцам]

Δ $U^+U = J \xleftrightarrow{\{e_i\}} U^+U = E$ $\quad \boxed{\overline{U}^T U = E}$

$\sum_{j=1}^n \{\overline{U}^T\}_j^i \{U\}_k^j = \delta_k^i$

$\sum U_i^j U_k^j = \delta_{ik} \longleftrightarrow$ ②

∇

<u>Лемма</u> $\exists\, U$ - ун.о. Тогда: $|\det U| = 1$

Δ $\exists \{e_i\}$ - базис орт E; $U \xleftrightarrow{\{e_i\}} U$: $U^+U = UU^+ = E$

$\Leftarrow U^+U = E$, $\det(U^+U) = \det U^+ \cdot \det U =$

$= \det(\overline{U})^T \cdot \det U = \det \overline{U} \det U$, $\|\det U\|^2 = \det U = 1$

∇

<u>Опред</u>. $\exists\, U \in \mathbb{C}_n^n$ $U^+ = U^{-1}$, тогда U - унитарный.

<u>Опр</u> Унитарный оператор в $\mathbb{R}$ - ортогональный

Опр: Унитарная матрица в $\mathbb{R}$ - орт.

Спектральный анализ УНО

Лемма 1 $\exists U$ - УНО; $\sigma_U = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$ - спектр
Тогда $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,k}$

Δ

$\exists \lambda$ - с.з $\longleftrightarrow$ x - с.в. $\begin{cases} Ux = \lambda x \\ x \neq 0_E \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle \\ \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle \neq 0$$

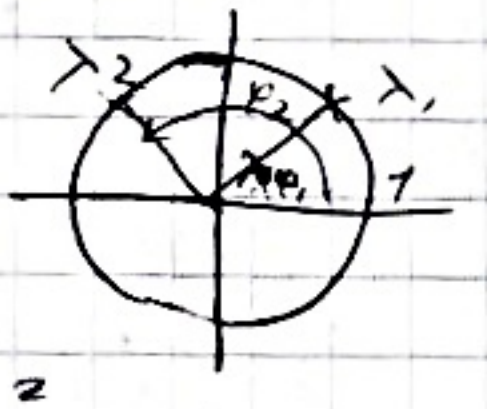
$|\lambda| = 1$.

∇

Лемма 2 С.В. УНО, отвечающие различным с.з. его являются ортогональными

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i \neq \lambda_j \quad (\lambda_i, \lambda_j \in \sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow x_i \perp x_j$$

x_1, x_2



Δ

$$\langle Ux_1, Ux_2 \rangle \overset{\text{УНО}}{=} \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\langle x_1 x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = x_1 \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle =$$

$$= e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2} \langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\underbrace{\left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1\right)}_{\neq 0} \langle x_1, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$x_1 \perp x_2$

∇

Теорема $\exists L$ - инв. пл, $\Rightarrow M$ - инв. пл $H = L^\perp$

$\forall L$ - инв. пл U - приводимо $\boxed{\text{Упр}} \leftarrow$ 6

Теорема $\exists U$ - УНО, тогда 1) U - унитарен.
2) Из с.в. можно состав. ОРТ и базис

Спектр теорема $U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$

(ОТ) $\{e_i\}$ - орт. из с.в. U $\quad Ux = \sum e^{i\theta_j} \langle x, e_j \rangle e_j$

4.05.2024

Теорема:

$\exists A$ - эрмитов A can be $\to$ diag.
Унитарным - преобразованием
ортонорм. —//— для $\mathbb{R}$ (CO сост-эуф

$\triangle$

$\triangleleft A$ — эрм. $\exists \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{n}$ — ОРТН базис из СВ

$\Rightarrow$ 1) $\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
2) $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_k \rangle = \delta_{ik}$

$T = (E_1, E_2, \dots E_n)$ — ортогон. по столбцу

$\triangledown$

Теорема $\exists \mathcal{H} = \{$во $U: E \to E$ — унитарн$\}$
Тогда H — группа по $\times$ операторов

$\triangle$ $\triangleleft$ ОРТН базис; $U \xleftrightarrow{\{e_i\}} U$ $U^{-1} = U^{+} = \overline{U}^{T}$

① Замкнутость: $U_1, U_2 \in H = \{$во $U_{[n\times n]}$ $U^{-1} = U^{+}\}$?$\Rightarrow$

$\Rightarrow U = U_1 U_2 \in H$

а) $U^{-1} = (U_1 U_2)^{-1} = U_1^{-1} U_2^{-1}$
б) $U^{+} = \overline{U}^{T} = \overline{(U_1 U_2)}^{T} = \overline{U_2}^{T}\, \overline{U_1}^{T} = U_2^{+} U_1^{+}$

1] $(U_1 U_2) U_3 = U_1 (U_2 U_3)$
2] $\exists$ нейтр $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
3] $\exists$ обр. $\forall U$ $\exists U^{-1} = \overline{U}^{T}$

$\triangledown$

Теорема $H = \{U_{[n\times n]} : U^{+} = U^{-1}\}$ - группа

(NB1) $H = U(n)$

(NB2) $\exists \triangleleft$ $SU(n) = \{U \in U(n)$ $\det U = 1\}$ - подгруппа $U(n)$

Теорема $\exists Q = \{U \in \mathbb{R}^{n}_{n} : U^{-1} = U^{*} = U^{T}\} = O(n)$ - мн. ортогон. матриц

$1 \in O(n)$ $\det U = \pm 1$ $\to$ $SO(n) = \{U \in O(n)$ $\det U = 1\}$ - подгр. $O(n)$
собств. $\to$ $\{U \in O(n), \det U = -1\}$ - не подгр.
несобств. вращение

(343) Квадратичные формы Среда 12^30 - Тест

I Основные опр. и св-ва

1) $\Phi(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik} \xi^i \eta^k$ (R)

$x, y \in E$

$x = \xi^i e_i$

$y = \eta^k e_k$

$\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$ симм. билин. форма

$\Phi(x,y) = \sum \varphi_{ik} \xi^i \overline{\eta^k}$ (C)

эрмитова $\varphi_{ik} = \overline{\varphi_{ki}}$

Опр (R) Квадр. формой p объекта сл. вида: $\Phi(x,x) = \sum \varphi_{ik} \xi^i \xi^k$ (3)

$\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$

Опр (C) В комплекс. пр. квадр. формой p сл. объект.

$\Phi(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik} \xi^i \overline{\eta^k}$ (4)

$\Phi = \Phi^T = \Phi^+$

$\Phi = \| \varphi_{ik} \|$

Преобразование матр. кв ф. при замене базиса

$\{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_i\}$

(R)

$\Phi(x,x) \xrightarrow{\{e\}} \Phi = \| e_{ik} \|$, $\xrightarrow{\{\tilde{e}\}} \tilde{\Phi} = \| \tilde{e}_{ik} \|$ $\Rightarrow \tilde{\Phi} = T' \Phi T$

(C) $\tilde{\varphi}_{ik} = \Phi(\tilde{e}_i, \tilde{e}_k) = \Phi(T_i^s e_s, T_k^t e_t) =$

$\text{эрм} = T_i^s T_k^t \Phi(e_s, e_t) = (T^T)_s^i \varphi_{st} \overline{T}_k^t$

$\tilde{\Phi} = T^T \Phi \overline{T}$

II) Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Опр $\mathbb{R}$: $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi^i)^2$ (*)

$\mathbb{C}$: $\varphi(x,x) = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$ (**)

Методы (методы)

1) Лагранж: 1) выделение ~~подмножеств~~ полных квадратов, новые переменные

$\mathbb{R}^2$: $\varphi(x,x) = (\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 + 8(\xi^2)^2 = (\xi^1 + 2\xi^2)^2 + 4(\xi^2)^2$

$\varphi(x,x) = \ldots$

2) приведение к Σ нев. унитарным (орт) преобразов.

$\{e\}$ – орты в E (над $\mathbb{C}$)

$\varphi(x,x) = \sum \varphi_{ik} \xi^i \overline{\xi^k}$ $\qquad \Phi^T = \Phi = \overline{\Phi^T}$

$\{e\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}\}$

Если: $\tilde{\Phi} = T^T \Phi T$

Хотим: ? $T^{-1} = \overline{T}^T$, $T^T = \overline{T}^{-1} = (\overline{T})^{-1}$,

т.е. $\tilde{\Phi} = (\overline{T})^{-1} \Phi (\overline{T})$

$\exists U = \overline{T}$ $\quad \tilde{\Phi} = U^{-1} \Phi U$ такое возможно

$\Phi \leftrightarrow \varphi$ по $B - E$

$\Phi = \overline{\Phi^T} = \Phi^{-1} \Longrightarrow \varphi = \varphi^+$

$\exists U$ – унит. $U = (x_1 \ldots x_n)$

Ок, использование:

Сопр. оператор φ: $\sigma_\varphi = \{\ldots\} \subset \mathbb{R}$

$\{x, \xi\}$ – орты E из св $\varphi_{x_i} = \lambda_i x_i$

$U = (x_1 \ldots x_n) \longrightarrow T = U \Longrightarrow \tilde{\Phi} = T^T \Phi T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

т.е. $\varphi(x,x) = \sum \lambda_i \xi^i \overline{\xi^i} = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$

(III) Закон инерции квадр. формы

<u>Теорема</u> Если кв. форма приведена $\Phi(x,x)=\sum \lambda_i |\xi^i|^2$ и сумма кв. двумя различн. способами, то число полож. коэф. в разложении совпадает. Также совпад. число отр. и нулевых (*)

$$\Rightarrow \Phi(x,x) = \lambda_1|\xi^1|^2+\dots+\lambda_p|\xi^p|^2+\lambda_{p+1}|\xi^{p+1}|^2+\dots+\lambda_{p+q}|\xi^{p+q}|^2; \quad (x)$$

$$\begin{cases} \lambda_i>0, & i=\overline{1,p} \\ \lambda_i<0, & i=\overline{p+1,p+q} \\ \lambda_i=0, & i=\overline{p+q+1,n} \end{cases}$$

$$\Phi(x,x) = \lambda_1|\xi^1|^2+\dots+\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}}|^2+\tilde{\lambda}_{\tilde{p}+1}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}+1}|^2+\dots$$
$$+\tilde{\lambda}_{\tilde{p}+\tilde{q}}|\tilde{\xi}^{\tilde{p}+\tilde{q}}|^2; \quad (xx)$$

Надо $p=\tilde{p}$, $q=\tilde{q}$ — // —

$\longleftarrow$ 1: $\exists\, p>\tilde{p}$ $\triangleleft$ L_1 = по $\{e_1 \dots e_p\}$ ← $\dim = p$

L_2 = по $\{\tilde{e}_{\tilde{p}+1} \dots \tilde{e}_{\tilde{p}+\tilde{q}}\}+\dots+\{\tilde{e}_n\}$

$\dim L_2 = n-\tilde{p}$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1+L_2) + \dim(L_1\cap L_2)$$
$$p + n-\tilde{p} = n+\underbrace{(p-\tilde{p})}_{>0} > n \Rightarrow \dim(L_1\cap L_2)\geq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, z\in L_1\cap L_2$ $\longrightarrow$ $z\in L_1$ $\Phi(z,z)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i|\xi^i|^2>0$

$\longrightarrow$ $z\in L_2$ $\Phi(z,z)=\sum_{\tilde{p}+1}^{n}\tilde{\lambda}_i|\tilde{\xi}^i|\leq 0$ ↯

$p\leq\tilde{p}$ значит. полномочия матрицы L_1, L_2, $\tilde{p}\geq p$, тогда $\tilde{p}=p$.

$\triangledown$

<u>Опр</u> Число полож. λ разлож. в (*) $\mathcal{F}$ положительных
отр — n_-
нулевых — n_0

$\{n_+, n_-, n_0\}$ — сигнатура $\Phi(x,x)$

(NB) Иногда сигнатура $\mathcal{F}$ $n_+ + n_-$

IV Одновременное приведение пары квадр. форм к сумме квадратов

0 положит. опр. форм:

<u>Теорема</u> $\Phi(x,x)$ – полож. опр. ЕИП $n_+ = \dim E = n$

$\Phi(x,x) = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$

$n_+ = n \iff \lambda_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

2) $\Phi(x,y) \xrightarrow{\{e_i\}} \Phi = \|\varphi_{ik}\|, \quad \Phi^* = \Phi$

$\sigma_\Phi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$.

<u>Теорема</u> $\exists\, \Phi(x,y)$ $\Psi(x,y)$ – пара св. форм в $E(\Phi)$

Ψ – пол. определена

<u>Тогда</u> $\exists \{e_i\}_{i=1}^n$ – орт. баз. E: $\Phi(x,x)$ и $\Psi(x,x)$ в $\{e\}$ – имеет канонич. вид.

$\Phi(x,y) = \sum \varphi_{ik} \xi^i \bar{\xi}^k \quad \Phi = \|\varphi_{ik}\| \quad \Phi^* = \Phi$

$\Psi(x,y) = \sum \psi_{ik} \xi^i \bar{\xi}^k \quad \Psi = \|\psi_{ik}\| \quad \Psi^* = \Psi$

$\{e_i\} \xrightarrow{T'} \{e_i'\}_{\text{орт. } \langle\cdot,\cdot\rangle_\Psi} \xrightarrow{\tilde{T}} \{\tilde{e}_i\}_{\text{орт. } \langle\cdot,\cdot\rangle_\Psi}$

$\Psi(x,x) \to \Psi(x,y)$ – скалар. произв.

в E $\langle x,y\rangle \to \langle x,y\rangle_\Psi = \Psi(x,y)$

$\{e_i\} \to \{e_i'\}$ (NB) в $\{e_i'\}$ $\Phi \to \Phi' = \Phi'^+$

ОРТ в см. $\langle x,y\rangle_\Psi$ $\quad \Psi \to \Psi' = \Psi'^+ E$

Φ' – эрм. $\tilde{T} = \bar{U} \quad U = (x_1\ x_2 \dots x_n)$

$\tilde{\Phi} = \tilde{T}^T T'^T \Phi \bar{T}' \bar{\tilde{T}}$ $\quad \boxed{x_i = \tilde{e}_i}$

2) Можно ли ~~мн~~ к Σ св-в, м. найдя такие, что

$\tilde{\Phi} - \lambda\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi} - \lambda E = \|\lambda_i \delta_{ik} - \lambda \delta_{ik}\| = \|(\lambda_i - \lambda)\delta_{ik}\|$

$\det(\tilde{\Phi} - \lambda\tilde{\Psi}) = 0 \iff \det(\Phi - \lambda\Psi) = 0$