Геометрия и Алгебра

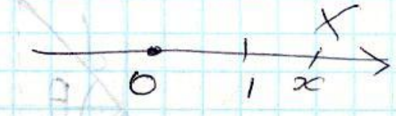
1 модуль «Аналит. геометрия» 2-4 – «Линейная алгебра»

Аналитическая геометрия

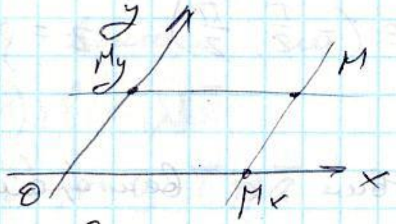
§1 Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве

Прямолинейные СК

1.1 (Начало отсчета, выбор направл., масштаба)



1.2



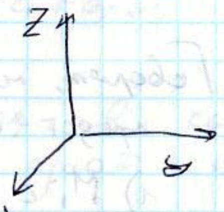
$M(x;y)$

Опр. Если угол между Ox и Oy прямой, то система прямоугольная.

Если масштабы по осям один., ~~то~~ это мет. – Декартова ДП

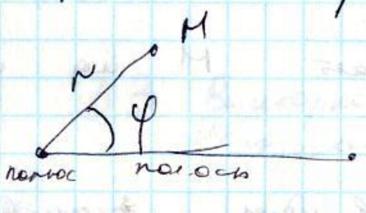
Плоскость R^2 (эр-два)

1.3 Пространство правое



Криволинейные СК (на $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^3$)

2.1. $\mathbb{R}^2$ Полярная СК



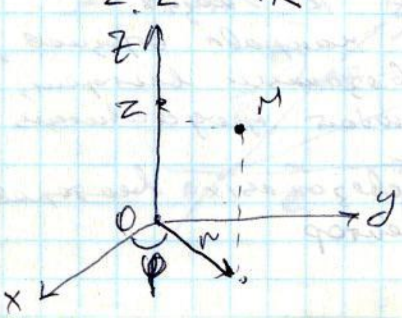
r – полярный радиус

φ – полярный угол

(посл. парта, нихера не слышно).

Опр. ~~Ли~~ Линия ур-ня – линия, на которой выбранная (одна из координат) принимает пост. значение

2.2 $\mathbb{R}^3$ Цилиндрическая



$M\ (r;\varphi;z)$

Пов. уровня

— || —

$z=z_0$ } пл-ти
$\varphi=\varphi_0$

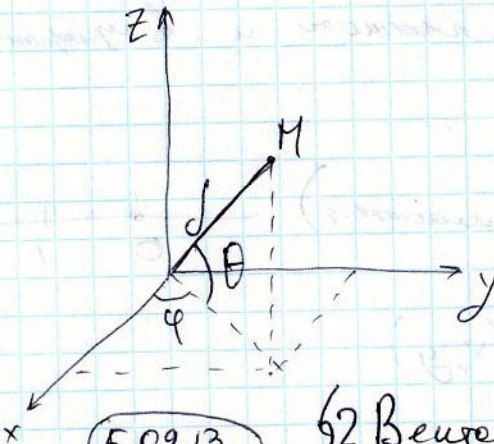
$r=r_0$ цилиндр

2.3. ДПСК (Дек. Пр. сис. коор.)

$(.)M = (x; y; z)$

2.4. Сфер. система координат

$(.)M\ (\rho, \varphi, \theta)$



$\rho \in [0; \infty)$ $\qquad x = \rho\cos\theta\cos\varphi$

$\varphi \in (0, 2\pi)$ $\qquad y = \rho\cos\theta\sin\varphi$

$\theta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ $\qquad z = \rho\sin\theta$

(5.09.13) §2 Векторы, действия с векторами

Говорят, что мн-во разбито на классы, если оно предст-но в виде объед. непересек. множеств

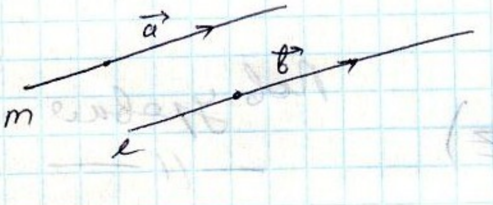
1) $M_i \subset M$ $\qquad$ 2) $M_i \cap M_k = \varnothing$

Т-ма (без док.)

$\exists$ на M усл. φ, тогда φ разбивает M на классы эквивалентности

<u>Опр.</u> Отрезок направленный, если в нем установлены начало и конец

<u>Опр.</u> Напр. отрезки эквивалентны, если длины их равны, они лежат на паралл. прямых, направлены в одну сторону



$m \parallel l$

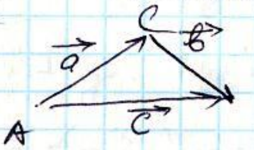
$\vec{a} \sim \vec{b}$

<u>Опр.</u> вектор (свободным вектором) на $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ назыв. класс эквивал. направл. отрезков. При этом связанным вектором, называется любой представитель класса экв.

NB <u>Лемма</u> любой предст-ль класса экв. связанных векторов фиксирует и свободит вектор

Простейшие действия.

Опр: Сложение



$\vec{c} = \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ (правило $\triangle$)

Нулев. вектор

NB2 $\quad \vec{0}: \ |\vec{0}| = 0 \quad \vec{AA}$

NB3 Противопол. вектор $\forall \vec{a} \ \exists(-a): \ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Вычитание $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$

Умножение вектора на скаляр

$b = \bar{a} \cdot \lambda$, 1) $|b| = |\lambda||\bar{a}|$

2) $\lambda > 0$, $b \uparrow\uparrow \bar{a}$

3) $\lambda < 0$, $b \downarrow\uparrow \bar{a}$

Если $\left.\begin{matrix}\lambda = 0 \\ \vec{a} = \vec{0}\end{matrix}\right\}$ $\vec{b} = \vec{0}$

Опр. $\exists \ \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$

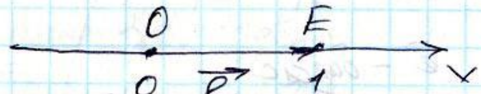
Вектор a – линейн. комбинация векторов a_1, a_2, a_n с коэф-ми $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Опр: $\bar{a}$ и b коллин. если представ. соотв. классов эквивал. лежат на одной прямой (отложенные от 1 точки)

Опр: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, если предст. соотв. кл. экв. отложенные от одной точки, лежат в 1 пл-ти.

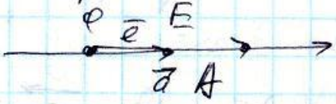
§3 Векторное введение координат. Координаты вектора.

1. $\mathbb{R}$



$\vec{e}_1$ – базисный вектор

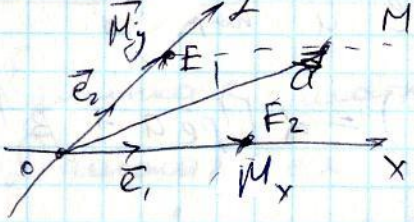
$\forall \ \{\vec{a} - \text{на } l\}$



Лемма: $\exists! \, x_a \in R$
$\vec{a} = x_a \vec{e}_1$

x_a – координата $\vec{a}$ в базисе $\bar{e}_1$

2. $\mathbb{R}^2$



$M(x;y) \quad \vec{a} = \vec{M}_x + \vec{M}_y = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ – базис на $\mathbb{R}^2$

3. $\mathbb{R}^3 \quad \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ – не компл., базис

$\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

§4. Свойства основных действий над векторами

1. $\mathbb{R}$ 1) $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$ комм.

2) $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$ ассоц.

3) $\exists \vec 0 : \vec a + \vec 0 = \vec 0 + \vec a = \vec a$

4) $\forall \vec a \ \exists -\vec a : \vec a + (-\vec a) = \vec 0$

Абелева группа по сложению

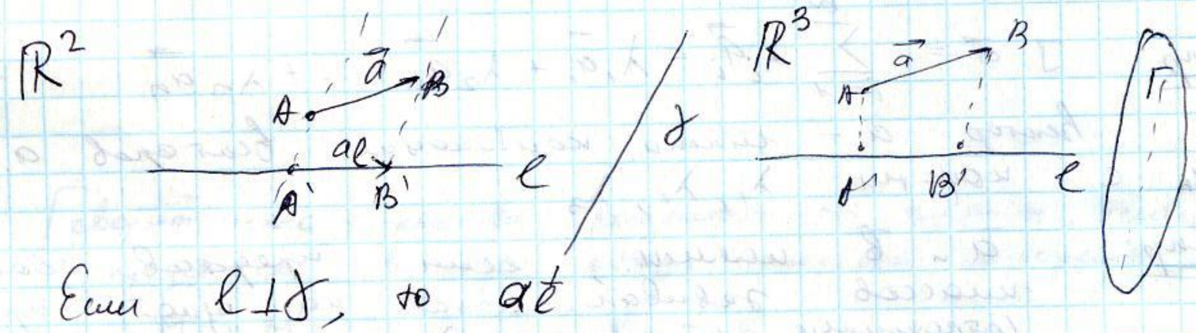
5) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec a) = (\alpha \cdot \vec a) \cdot \beta$

6) $(\alpha + \beta)\vec a = \alpha \vec a + \beta \vec a$

7) $\alpha(\vec a + \vec b) = \alpha \vec a + \alpha \vec b$

8) $1 \cdot \vec a = \vec a$

2. Проекция вектора, величина проекции.

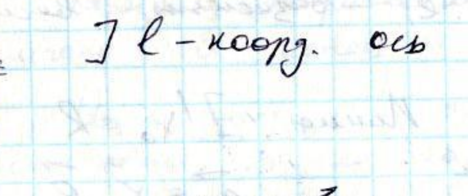


Если $l \perp \gamma$, то $\vec a_l$

Св-ва

1. $(\vec a + \vec b)_l = \vec a_l + \vec b_l$
2. $(\lambda \vec a)_l = \lambda \vec a_l$
3. $(\alpha \vec a + \beta b + \dots + \gamma \vec c) = \alpha a_l + \beta b_l + \dots + \gamma \vec c_l$

Опр. Пусть l — коорд. ось, $\bar e$ — базис



γ

$\vec a_l \stackrel{!}{=} \text{Пр}_l^{\parallel \gamma} \vec a \cdot \bar e$

$\text{Пр}_l a$ — величина проекции $\bar a$ на ось l и парал γ

Теорема $\text{Пр}_l(\alpha \bar a + \beta \bar b + \dots + \gamma \bar c) = \alpha\, \text{Пр}_l a + \beta\, \text{Пр}_l b \dots$

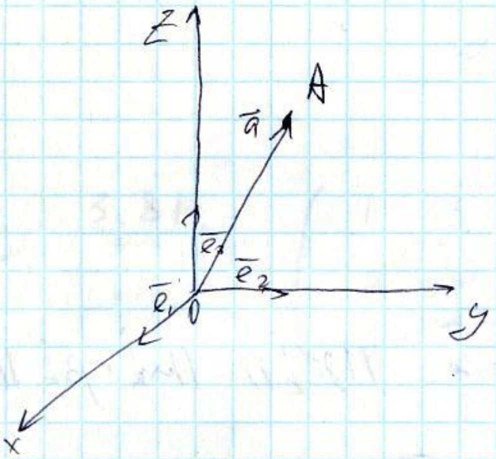
Док-во

$\cancel{*}$ $\mathfrak{X}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\dots+\gamma\vec{c})_e = \text{Пр}_e(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\dots+\gamma\vec{c})\cdot\bar{e}$

$\alpha\cdot a_e + \beta\cdot b_e + \dots + \gamma c_e = \alpha\,\text{Пр}_e\vec{a}\,\bar{e} + \beta\cdot\text{Пр}_e\cdot b\cdot e +$

$\dots + \gamma\cdot\text{Пр}_e\vec{c}\cdot\bar{e} = \bar{e}(\alpha\,\text{Пр}_e\vec{a} + \beta\,\text{Пр}_e\vec{b} + \dots + \gamma\,\text{Пр}_e\vec{c})$

$\mathbb{R}^3$ ДПСК



$\text{Пр}_{\bar{e}_2}\vec{a} = y_a$ Аналогично $\cancel{x_a}$ z_a

Практика

§1 Матрицы

<u>Опр.</u> $A = \|\alpha^i_k\| = \|\alpha_{ik}\| = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 \alpha^1_2 \dots \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 \alpha^2_2 \dots \alpha^2_n \\ \dots \\ \alpha^m_1 \alpha^m_2 \dots \alpha^m_n \end{pmatrix}$ $A(m\times n)$

i-строка

k-столбец

$\{A_{[m\times n]}\|\alpha^i_k\|;\ \alpha^i_k \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^m_n$

1. $A_{[m\times n]}$ – прямоуг. ($m\neq n$), квадр. ($m=n$)

$A_{[n\times n]} = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 \alpha^1_2 \dots \alpha^1_n \\ \vdots \\ \alpha^n_1 \alpha^n_2 \dots \alpha^n_n \end{pmatrix}$ – побочная диагональ

главная диагональ

2. Нуль-матрица $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0\ 0 \dots 0 \\ \dots \\ 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$

<u>Далее – кв. матрицы</u>

3. Единичная матрица $I = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$

4. Диагональная матрица $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\text{diag}\{1;1\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha & -\sin\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos n\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha & \cos\alpha\cos n\alpha - \sin\alpha\sin n\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos(n+1)\alpha) & (-(\sin\alpha(n+1))) \\ (-(\sin\alpha(n+1))) & (\cos(n+1)\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha(n+1) & -\sin\alpha(n+1) \\ -\sin\alpha(n+1) & \cos\alpha(n+1) \end{pmatrix} = \|A\|(n+1)$$

Доказано.

Лекция 11.09.13

Теорема Координаты лин. комбинации векторов равны соотв. лин. комбинациям соотв. координат

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \\ z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \end{cases}$$

Теорема. Св-ва 1-8 справедливы также и для векторов в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

§5. Скалярное произведение векторов

Опр. Углом между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется не превосходящий 180° угол между представ. соотв. классов эквивалентности, отложенными от одной точки.

Опр. Скалярным пр-ем $(\bar{a}\cdot\bar{b})$ называется число, определяемое равенством: $\boxed{(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}\cos\varphi}$

Скалярным квадратом $\bar{a}$ называется $\bar{a}\cdot\bar{a}$. $\boxed{\bar{a}^2 = |a|^2}$

След 1: $|a| = \sqrt{\bar{a}^2}$ След. 2: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2}\sqrt{\bar{b}^2}}$

$\boxed{|b|\cos\varphi = \Pr^{\perp}_{\bar{a}}\bar{b}}$

Свойства:
1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
2. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$ $\quad$ $\exists\, \bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\perp\forall\bar{b}$
3. $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|(\Pr^{\perp}_{\bar{a}}\bar{b}) = |\bar{b}|(\Pr^{\perp}_{\bar{b}}\bar{a})$
4. Скалярное пр-е линейно по обоим эл-там, то есть: $(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b})\bar{c} = \lambda\bar{a}\bar{c} + \mu\bar{b}\bar{c}$

Вектор ед. длины — „орт".

6. $\bar{a}\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$ в ДПСК

Замечание к п.5: $\neg$ДПСК

$\exists$ базис — $\{e_1; e_2; e_3\}$, не ортонорм.

$\exists\ \vec{a} = (\alpha^1; \alpha^2; \alpha^3)$, 1, 2, 3 — индексы, а не степень.

$\vec{b} = (\beta^1; \beta^2; \beta^3)$

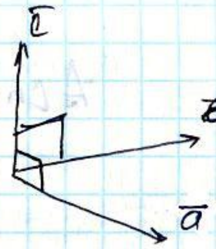
$\sphericalangle\ g_{ik} = \bar{e}_i \bar{e}_k, \quad (i,k=1,2,3) \qquad g_{ik} = g_{ki}$ (метрич. тензор)

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha^i \bar{e}_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{3} \beta^k \bar{e}_k\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_i \beta_k (\bar{e}_i\cdot\bar{e}_k)$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\alpha^i\beta^k$$

• А в ДПСК $g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{a}\cdot\bar{b} = \sum_{i=1}^{3} \alpha^i \beta^i$

§6. Векторное произведение векторов



Опр. $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}$, • $\bar{c}$: $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$

• $\bar{c}$: $\begin{cases} \bar{c}\perp\bar{a}, \quad \bar{c}\perp\bar{b} \\ \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \text{ - правая тройка} \end{cases}$

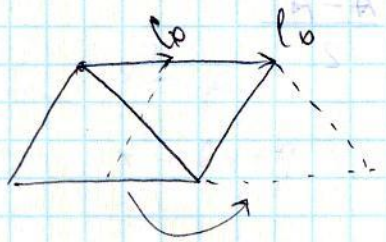
Свойства.
1. Антикоммутативность $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a} \qquad \bar{a}\times\bar{b}$
2. $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}\parallel\bar{b} \quad (\bar{a}=\bar{0} \parallel \forall\bar{b})$
3. $|\bar{a}\times\bar{b}| = S_{▱}$, постр. на $\bar{a}$ и $\bar{b}$
4. Линейность ($\bar{a}\times\bar{b}$ линейно по обоим арг-там)

Док-во: $(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b})\times\bar{c} = \lambda(\bar{a}\times\bar{c}) + \mu(\bar{b}\times\bar{c})$

1: а) $(\lambda\bar{a})\times\bar{c} = \lambda(\bar{a}\times\bar{c})$ (2)

б) $\lambda > 0 \quad |\lambda||\bar{a}||\bar{c}|\sin\varphi$

в) $\lambda < 0 \quad \lambda\bar{a}\times\bar{c} = (|\lambda|(-1)\cdot\bar{a})\times(\bar{c}) = \lambda(\bar{a}\times\bar{c})$



2: $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c} + \bar{b}\times\bar{c}$

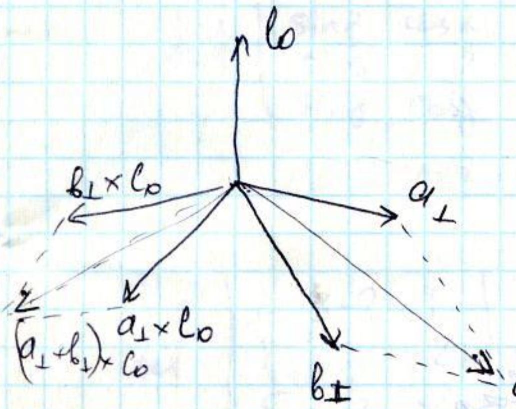
1) $\sphericalangle\ \bar{c} = |\bar{c}|\cdot c_0$ (c_0 - орт. c)

$\cancel{|\bar{c}|}(\bar{a}+\bar{b})\times c_0 = \cancel{|\bar{c}|}(c_0\times\bar{a}) + \cancel{|\bar{c}|}(c_0\times\bar{b})$ (2*)

2) $\sphericalangle\ \bar{a}, \bar{c}_0$; $\bar{a} = \bar{a}_\parallel + \bar{a}_\perp$ (относит. c_0)

Но $\bar{a}\times c_0 = a_\perp \cdot c_0$

$(\bar{a}_\perp + \bar{b}_\perp)\times c_0 = a_\perp\times c_0 + b_\perp\times c_0$ (2**)



$(a_\perp+b_\perp)\times c_0 = a_\perp\times c_0 + b_\perp\times c_0$

Значит $\downarrow$ 2** верно
2*
2

$(\bar a,\bar b)=\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,\alpha^i\beta^k$ $\quad S_{\square}=|\bar a||\bar b|\sin\varphi$

$\varphi\in[0^\circ;180^\circ]$, $\quad S_{\square}=|\bar a||\bar b|\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$

$=|\bar a||\bar b|\sqrt{1-\dfrac{(\bar a\cdot\bar b)^2}{|a|^2|b|^2}}=$

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1=e_2=1 \quad \{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\} \\ e_3=2 \\ a=(-1;0;2) \\ b=(2;-1;1)\end{array}}$$

$=\sqrt{|a|^2|b|^2-(\bar a\bar b)^2}$

$g_{ik}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ – метр. тензор

$(\bar a,\bar b)=\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,\alpha_i\beta_k=$ $\begin{matrix} g_{11}\alpha_1\beta_1\; g_{12}\alpha_2\beta_2\; g_{13}\alpha_3\beta_3 \\ g_{21}\alpha\beta_1\; g_{22}\alpha_2\beta_2\; g_{23}\alpha_2\beta_3 \\ g_{31}\alpha_3\beta_1\; g_{32}\alpha_2\beta_2\; g_{33}\alpha_3\beta_3\end{matrix}=$

$=\begin{matrix} 1(-1)2+0(-1)(-1)+1\cdot(-1)\cdot 1 \\ \cancel{0\cdot 0\cdot 2+1\cdot 0(-1)+1\cdot 0\cdot 1} \\ 1\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2(-1)+4\cdot 2\cdot 1\end{matrix}=\ -\cancel{2}-1+4-\cancel{2}+8=$

$=-5+12=7$

$(a;a)=(-1)\,1\cdot(-1);\ 1(-1)\cdot 2$

$=\ -\ -\ -\ -=$

$=1\cdot(-1)\cdot 2;\ 4\cdot 2\cdot 2$

$(b;b)=\ 1\cdot 2\cdot 2\cancel{0}\cancel{2}\,2\cdot 1\cdot 1\cdot 2$

$\cancel{0\cdot 2}\ 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\ 1\ 1\cdot 1=$

$1\cdot 2\cdot 1\ 1\cdot 1\ 1\cdot 4\cdot 1\cdot 1$

$=4+2+\cancel{2}+1-\cancel{2}+4=$

$=11$

$1-2-2+16=17-4=13$

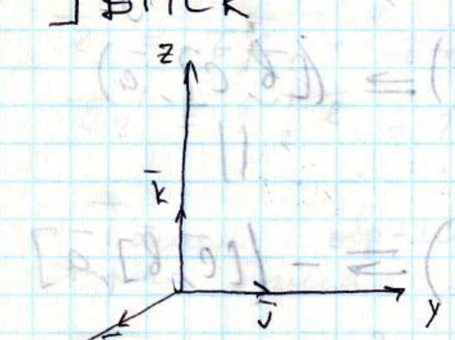
$S=\sqrt{121\cdot 169-49}$

Лекция

18.09.2013

5. Вычисление В. П. в ДПСК

$\exists$ ДПСК



- $|\bar i|=|\bar j|=|\bar k|=1$, $\bar j\perp\bar i\perp\bar k$
- $[\bar i,\bar i]$, $[\bar j,\bar j]\ \ldots=\bar 0$
- $[\bar i;\bar k]=-\bar j$. $[\bar k;\bar i]=\bar j$

$\ldots\ldots$

Теорема. $\exists\ \bar a=(x_a,y_a,z_a)$, $\bar b=(x_b,y_b,z_b)$ в ДПСК

$$[\bar a;\bar b]=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\x_a&y_a&z_a\\x_b&y_b&z_c\end{vmatrix}$$

Д-во $[\bar a,\bar b] = \bar i(y_a z_b - y_b z_a) - \bar j(x_a z_b - x_b z_a) + \bar k(x_a y_b - x_b y_a)$

$[\bar a,\bar b] = [x_a\bar i + y_a\bar j + z_a\bar k;\ x_b\bar i + y_b\bar j + z_b\bar k] =$

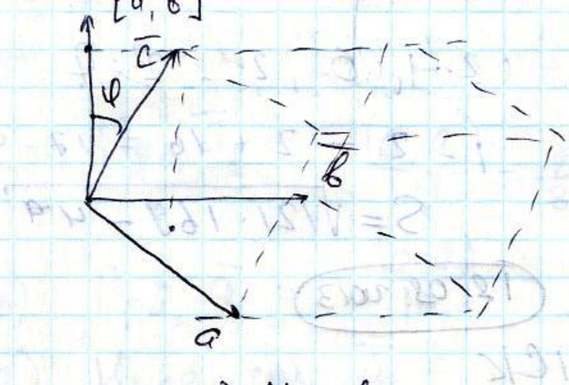
$= \bar i(y_a z_b - y_b z_a) - \bar j(x_a z_b - x_b z_a) + \bar k(x_a y_b - x_b y_a)$

§7 Смешанное произв. векторов

Опр. См.п. a, b, c = ч.: $([a;b]\,c)$

Свойства: 1) См.пр-е a, b, c равно объему паралл. постр. на этих векторах, взятому с +, если abc – правая

$\{\bar a, \bar b, \bar c\}$ – пр.



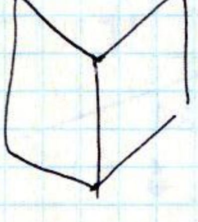
$V_{пар} = S_{осн.}\, h =$
$= |[\bar a;\bar b]|\cdot|c| \cos\varphi =$
$= ([\bar a;\bar b]\cdot\bar c)$

2) Условие $= 0$ $\quad \bar a\bar b\bar c = 0 \Leftrightarrow \{a, b, c\}$ – компланарны

3) $([\bar a,\bar b]\bar c) = ([\bar c,\bar a]\bar b) = ([\bar b,\bar c],\bar a)$

$\quad\ \| \qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$-([\bar b,\bar a],\bar c) = -([\bar a,\bar c],\bar b) = -([\bar c,\bar b],\bar a)$



4) Линейность

См. пр. векторов является лин. по каждому из 3х его эл-тов б) ДПСК

$$\bar a\bar b\bar c = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c\end{vmatrix} \qquad abc = (\bar a, [\bar b, \bar c]) =$$
$$= x_a[\bar b,\bar c]_x + y_a[b,c]_y + z_a[b,c]_z$$

Д-во не нужно.

§8 Двойное векторное пр-е

<u>Опр</u> Двп-м $\bar a, \bar b, \bar c$ назыв. $\bar p = [[\bar a;\bar b]\bar c]$

<u>Св-ва</u>: 1. Линейность

2. ДПСК $[\bar a;[\bar b;\bar c]] = \bar b(\bar a,\bar c) - \bar c(\bar a,\bar b)$

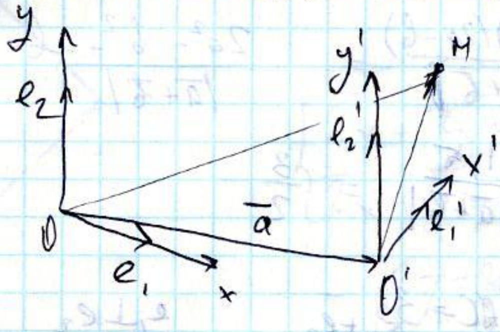
3. Тождество Якоби (Бьянки)

$$[\bar a;[\bar b;\bar c]] + [\bar c[\bar a;\bar b]] + [\bar b;[\bar c;\bar a]] = 0$$

Упр (доказ. на экзамене)

§9 Замена координат (Прямолин. СК)

$\boxed{\mathbb{R}^2}$



Main void

$M \longleftrightarrow (\xi^1; \xi^2)$

$M' \longleftrightarrow (\xi'^1; \xi'^2)$

$OM = \xi^1\bar e_1 + \xi^2\bar e_2$

$O'M = \xi'^1\bar e_1' + \xi'^2\bar e_2'$

$$\bar a = (\alpha^1;\alpha^2) = \alpha^1\bar e_1 + \alpha^2\bar e_2$$

$$\bar e_1' = \tau_1^1\bar e_1 + \tau_1^2\bar e_2$$
$$\bar e_2' = \tau_2^1\bar e_1 + \tau_2^2\bar e_2 \qquad T = \|\tau^i_k\| = \begin{pmatrix}\tau_1^1 & \tau_2^1\\ \tau_1^2 & \tau_2^2\end{pmatrix}$$

Таким обр-м опр. матр. T — матр. перехода от старого базиса к новому

$$OM = \xi^1\bar e_1 + \xi^2\bar e_2$$
$$\|$$
$$\alpha^1\bar e_1 + \alpha^2\bar e_2 + \xi'^1\bar e_1' + \xi'^2\bar e_2' = \alpha^1\bar e_1 + \alpha^2\bar e_2 + \xi'^1(\tau_1^1\bar e_1 + \tau_1^2\bar e_2) +$$
$$+ \xi'^2(\tau_2^1\bar e_1 + \tau_2^2\bar e_2)$$

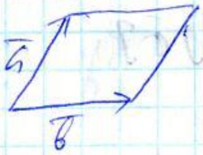
$$\begin{cases} \xi^1 = \alpha_1 + \tau^1_1 \xi'^1 + \tau^1_2 \xi'^2 \\ \xi^2 = \alpha^2 + \tau^2_1 \xi'^1 + \tau^2_2 \xi'^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_2^1 \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'^1 \\ \xi'^2 \end{pmatrix} \quad (xx)$$

$$X = A + TX' \quad (xxx)$$

Д3

2,67



$a = p - 3q$ $|p| = 2\sqrt{2}$ $(\hat{p, q}) = \frac{\pi}{4}$ $pq = 2\sqrt{2} \cdot 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

$b = 5p + 2q$ $|q| = 3$

$|a + b| = p - 3q + 5p + 2q = 6p - q$

2,70

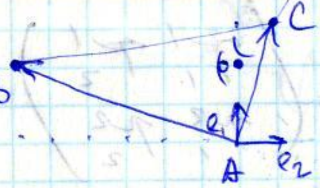
$a = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60 = 1 + 1 - 1 = 1$

$\text{Пр}_{a+b}(2a - b)$ $|a| = |b| = 1$. $(\hat{a, b}) = 120$

$\text{Пр}_{a+b}(2a - b) = \frac{(a+b)(2a-b)}{|\bar{a} + \bar{b}|} = \frac{2a^2 - b^2 + ab}{|a + b|} = \frac{1 + \bar{a}\bar{b}}{|a + b|} =$

$= \frac{1 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{|a + b|} = \frac{1{,}5}{|a + b|} = \frac{3}{2}$

2,71 $\overline{AB} = 2e_1 - 6e_2$ $\overline{AC} = 3e_1 + e_2$ $e_1 \perp e_2$



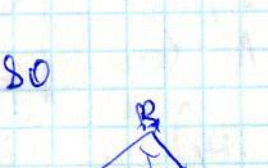
$\alpha = 90^\circ$ $|\overline{AB}| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\frac{AB}{AC} = tg\,\varphi = 2$

$\varphi = arctg\, 2$

2,80



$A(-1; -2; 4)$ $\overline{AB}\{-3; 0; -4\}$ $|\ | = 5$

$B(4; -2; 0)$ $\overline{AC}\{4; 0; -3\}$ $|\ | = 5$

$C(3; -2; 1)$ $\overline{BC}\{7; 0; 1\}$ $|\ | = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

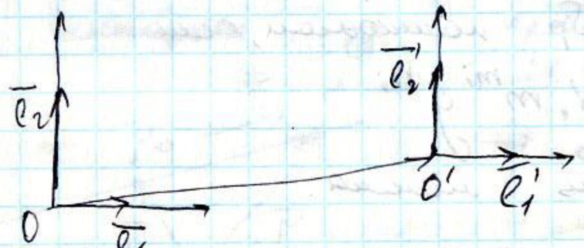
19.09.2013 Лекция

$\{\bar e_1; \bar e_2\} \xrightarrow{T} \{\bar e_1'; \bar e_2'\}$ $\quad T = \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} \qquad X = A + T X'$$

Частные случаи

1. Паралл. перенос. $A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$ $\quad T = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \bar e_1' = e_1 \\ \bar e_2' = e_2 \end{cases}$



Далее во всех примерах $\bar a = \bar 0$ т.е. $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ т.е. нет // переноса, т.е. $O = O'$

2. $\bar a = \bar 0$, $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \bar e_1' = \lambda_1 \bar e_1 \\ \bar e_2' = \lambda_2 \bar e_2 \end{cases}$

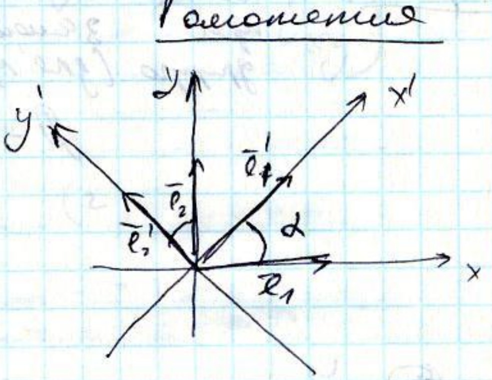
Растяжение / сжатие по осям

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\quad T = \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Гомотетия

3. $\bar a = 0$; $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

матрица поворота



$\bar e_1' = \bar e_1 \cos\alpha + \bar e_2 \sin\alpha$

$\bar e_2' = \bar e_1 (-\sin\alpha) + \bar e_2 \cos\alpha$

§10. Уравнение линий и поверхностей

I. Уравнение линий на R^2

I на R_2: (Oxy) / уравнение $F(x,y) = 0$ (*) ур-ем линии l, если коорд. $x, y \in l$ удовл. (*), а $x, y \notin l$ не удовл.

При этом линия l — геом. место точек, удовлетворяющих (*)

1) $y = kx + b$ $\quad$ 2) $x^2 + y^2 = 1$ $\quad \dots$

Классификация уравнений

1. $F(x;y)=0$

2. $\left[\begin{array}{l} y=f(x) \\ x=g(y) \end{array}\right.$

3. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \quad t\in[t_1;t_2]$$

Линии на $\mathbb{R}^2$ → Алгебраические; Трансцендентные

Опр. $F(x;y)$ — целым алгебр. полиномом, если

$$F(x;y)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^{m_i} y^{n_i}$$

$\exists\ p_i=m_i+n_i$ — степень монома.

Опр. Степень p Ц.А.П. — $p=\max\limits_{i=\overline{1,k}} p_i$

Опр. Алгебраич. линия порядка p называется линия, ур-е которой имеет вид $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ — ЦАП степени p

Опр. Любая неалгебраич. линия — трансцендентная.

Теорема 1. Св-во линии быть алгебр. не меняется при замене одной лин. коорд. на другую (для прямоуг.), порядок сохр.

Д-во см. 59.

II Ур-е поверхностей в $\mathbb{R}^3$

$F(x;y;z)=0.\quad (**)$

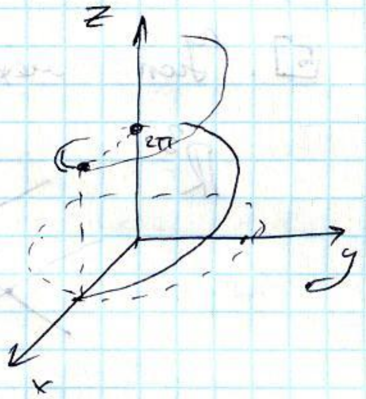
Все аналогично, но для $\mathbb{R}^3$

III Ур-е линий в $\mathbb{R}^3$

Опр. 1. $\begin{cases} F_1(x;y;z)=0 \\ F_2(x;y;z)=0 \end{cases}$

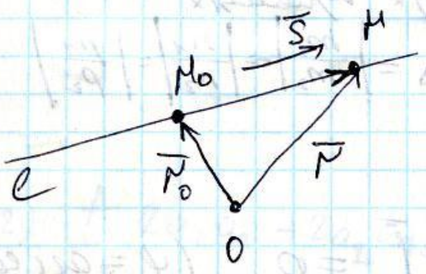
2. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \nu(t) \end{cases} \quad t \in [t_1; t_2]$

Example: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$



§11. Ур-е прямой в пр-ве (на плоскости)

1 Векторное ур-е прямой



$\begin{cases} (\cdot)\, M_0 \in l \\ \bar S \parallel l \quad (\bar S \neq \bar 0) \end{cases}$

направл. вектор.

$\overline{M_0M} \parallel \bar S \Rightarrow \boxed{\bar r - \bar r_0 = t \cdot \bar S}$

Ур-е прямой через вектора $\bar r = \bar r_0 + t \cdot \bar S$ (1)

2 Параметрическое ур-е прямой

$\exists M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M(x; y; z)$ (O_{xy})

$\bar S = \{m; n; p\}$

$(1) \to \begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2)$

3 Каноническое ур-е прямой

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \quad (3)$$

4 Ур-е прямой, проход. через 2 точки.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$

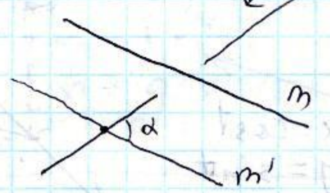
$M(x; y; z)$

$\overline{M_0M_1} = \bar S$; $\bar S\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

Итого: $(3) \to \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ (4)

$\boxed{5}$. Угол между 2 прямыми

$\mathbb{R}^3$



$m \parallel m'$

$\exists (Oxy)$

$\exists$ $l_1 \longleftrightarrow \bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$

$l_2 \longleftrightarrow \bar{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

$$\cos\varphi = \left| \frac{(\bar{S}_1, \bar{S}_2)}{|\bar{S}_1| \, |\bar{S}_2|} \right|$$

ДПСК:

$$\varphi = \arccos \left| \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \right|$$

$\boxed{5,1}$ Условие параллельности двух прямых

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{S}_1 = \lambda \bar{S}_2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$\boxed{5,2}$ Условие ортогональности

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \bar{S}_1 \perp \bar{S}_2 \Leftrightarrow \bar{S}_1 \bar{S}_2 = 0. \quad (\varphi = \arccos \ldots = 0)$$

$$\Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Практика, 19.09.2013

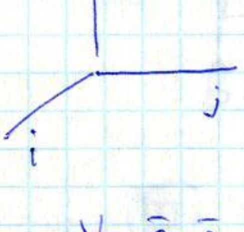
§6 (Вект. пр-е) $\quad |[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin\varphi$

2,98 $\quad 1 = |\bar{a}_1|, \ |\bar{a}_2| = 2 \quad (\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$

$|[\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2; 3\bar{a}_1 - \bar{a}_2]| = |[\bar{a}_1; -\bar{a}_2]| + |[3\bar{a}_2; 3\bar{a}_1]| =$

$= |-10[\bar{a}_1, \bar{a}_2]|$

2,100 $\quad$ ДПСК а) $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.



$[\bar{i}, \bar{j} + \bar{k}] + [\bar{j}, \bar{i} + \bar{k}] + [\bar{k}, \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}] =$

$= \bar{k} - \cancel{\bar{j}} - (-\bar{k} + \bar{i}) + \cancel{\bar{j}} - \bar{i} = 2\bar{k} - 2\bar{i}$

$\forall \ \bar{a}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$

$\left. \begin{array}{l} \bar{d}_1 = [\bar{a}, \bar{p}] \quad \bar{d}_3 = [\bar{a}, \bar{r}] \\ \bar{d}_2 = [\bar{a}, \bar{q}] \end{array} \right\}$ компланарны

02.10.13

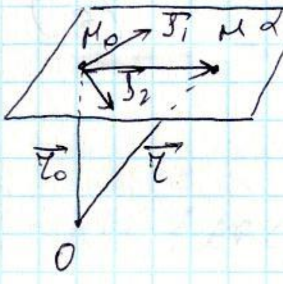
§13 Ур-я плоскости в пространстве

1. Ур-е плоскости (векторное)

$\vec{S}_1, \vec{S}_2$ — направляющие векторы, $\vec{S}_i = \{m_i; n_i; p_i\}$, $i = 1, 2$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$

$\vec{S}_1 \parallel \alpha$, $\vec{S}_2 \parallel \alpha$, $\vec{S}_1 \nparallel \vec{S}_2$



$$\underbrace{\overrightarrow{M_0M}}_{\vec r - \vec r_0} = t_1\vec{S}_1 + t_2\vec{S}_2$$

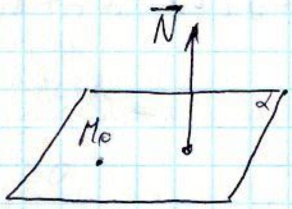
$$\boxed{\vec r = \vec r_0 + t_1\vec S_1 + t_2\vec S_2} \quad (1)$$

Векторное ур-е плоскости

2. Параметрическое ур-е плоскости

$$\begin{cases} x = x_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2 \\ y = y_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \\ z = z_0 + t_1 p_1 + t_2 p_2 \end{cases} \quad (2)$$

3.



$\vec N \perp \alpha$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ $\vec N\{A; B; C\}$

$$\begin{cases} \vec N \perp \vec S_1 \\ \vec N \perp \vec S_2 \end{cases} \to \measuredangle\ \vec r - \vec r_0 = t_1\vec S_1 + t_2\vec S_2 \quad (1a)$$

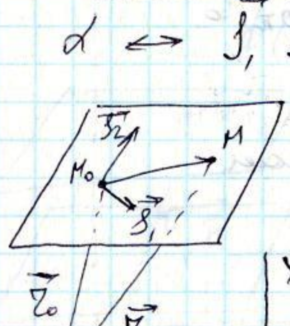
$$\measuredangle\ (\vec N; (1a)) = t_1 \overset{=0}{(\vec N; \vec S_1)} + t_2 \overset{=0}{(\vec N; \vec S_2)}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

Уравнение плоскости проходящей ортогон. зад. вектору через зад. точку.

4. Ур-е плоскости через детерминант.

$\alpha \leftrightarrow \vec S_1\ \vec S_2\ M_0$



$\vec r - \vec r_0; \vec S_1; \vec S_2 \in \alpha \Leftarrow \{\vec r - \vec r_0; \vec S_1; \vec S_2\}$ компланар.

$\boxed{(\vec r - \vec r_0)\cdot \vec S_1 \cdot \vec S_2 = 0}$ — смешанное ур-е (4')

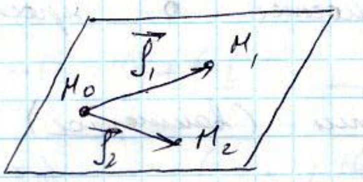
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$ — ур-е пл-ти через определитель (4)

5. Ур-е плоскости, проходящей через три точки

$M_0(x_0; y_0; z_1)$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$

$M_2(x_2; y_2; z_2)$



$\vec{S}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

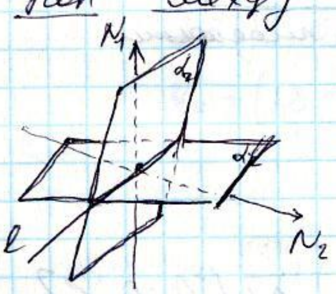
$\vec{S}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$

M_0, M_1, M_2 не на одной прямой

$(4') \to (\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = 0$ $(5')$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

6. Угол между плоскостями



$\alpha_1 = \vec{N}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$

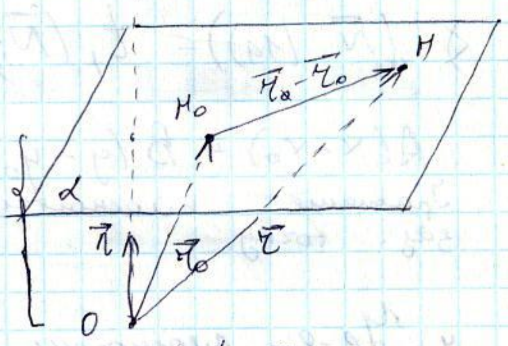
$\alpha_2 = \vec{N}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$

$$\cos\varphi = \left| \frac{(\vec{N}_1; \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} \right| \quad (6)$$

7. Нормальное уравнение плоскости

$\alpha \quad \vec{r} - \vec{r}_0 = t_1 \vec{S}_1 + t_2 \vec{S}_2$

$$\exists \ \vec{n}: \begin{cases} \vec{n} \perp \alpha \quad (\vec{n} \perp \vec{S}_1; \vec{S}_2) \\ |\vec{n}| = 1 \\ (\vec{n}; \vec{r}_0) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$(\vec{r} - \vec{r}_0; \vec{n}) = 0$

$\exists \ p = \text{Пр}^{\perp}_{\vec{n}} \vec{r}_0$

$(\vec{r}; \vec{n}) = (\vec{r}_0; \vec{n})$ ← $\text{Пр}^{\perp}_{\vec{n}} \vec{r}_0 = p$

$\boxed{(\vec{r}; \vec{n}) - p = 0}$ (7в) p — прицельным параметром

$\vec{r} = \{x; y; z\} \quad \vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$ (7)

Норм. ур-е пл-ти в пр-ве

8. Общее ур-е плоскости в пространстве

Опр Вп γ ур-е след. вида: $ax + by + cz + d = 0$ (8), где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Теорема: I. Ур-е любой пл-ти может быть записано в виде 8 (не единств. образом)

II Каждому ур-ю вида 8 отв. ед. плоскость

(I) $\forall \alpha \leftrightarrow \vec{N}; M_0 \Rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) + 0 = 0$

$$A_x + B_y + C_z + D = 0$$

$$(D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0)$$

$\vec{N} = \{A;B;C\} \perp \alpha$

(II) $\forall \vec{N} = \{A; B; C\}$;

$A_x + B_y + C_z + D = 0 \quad / \cdot \quad \mu = \dfrac{-\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{-\operatorname{sign} D}{|N|}$

$$\underbrace{\frac{-A\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{\cos\alpha} x + \underbrace{\frac{-B\operatorname{sign} D}{\sqrt{-\,\|\,-}}}_{\cos\beta} y + \underbrace{\frac{-C\operatorname{sign} D}{\sqrt{-\,\|\,-}}}_{\cos\gamma} z - \underbrace{\frac{D\operatorname{sign} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{p} = 0 \qquad \left(\operatorname{sign} D = \begin{cases} 1 & D \geq 0 \\ -1 & D < 0 \end{cases}\right)$$

$p \geq 0$

$$\forall \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{A^2+B^2+C^2}{(\sqrt{A^2+B^2+C^2})^2} = 1$$

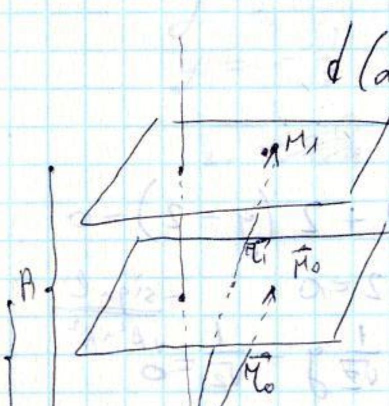
9. Расстояние между плоскостями

Теорема: $\exists \alpha_1 \parallel \alpha_2 \qquad \exists \alpha : (\vec{r}, \vec{n}) = p$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

$$\exists (\cdot) M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha_1$$

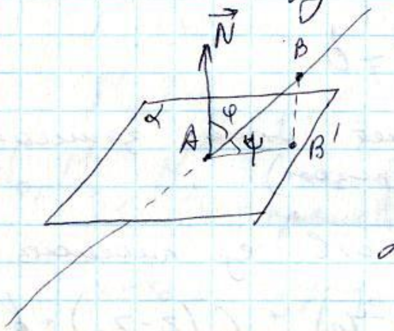
$$d(\alpha_1; \alpha_2) = |(\vec{r}_1, \vec{n}) - p| = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma + p|$$



$p = \text{Пр}_{\vec{n}} \vec{r}_0 \ldots \qquad d = |p_1 - p| = |(\vec{r}_1, \vec{n}) - p|$

§14 Взаимное расположение прям. и пл-ти в R^3

1. Угол между прямой и плоскостью



$\alpha \Longleftrightarrow \vec{N}\{\bar{A}; \vec{B}; C\}$ $\quad A=(x_0; y_0; z_0)$

$l \leftarrow \vec{S}\{m; n; p\}, \; A(-//-)$

$\alpha: \; Ax + By + Cz + d = 0$

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{N}; \vec{S})}{|\vec{N}|\,|\vec{S}|}\right|$$

$$\sin\psi = \left|\frac{(\vec{N}; \vec{S})}{|\vec{N}|\,|\vec{S}|}\right| \quad (1)$$

Б 3,12 ???

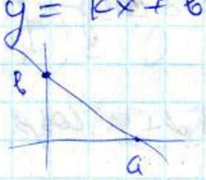
Практика

(2.10.13)

Прямая на плоскости

1. $Ax + By + C = 0 \quad \longleftarrow N\{A, B\}$
2. $A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$ — перп. N через M_0
3. $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$ $\quad S\{m, n\}$ $\quad \xrightarrow{S}$
4. $Ax + By + C = 0$

   $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$
5. $y = kx + b$
6. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



7. $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$ $\quad M, M_0$

2,141 а) $M_0(-1; 2); \; \bar{N}(2; 2)$

1) УР-е прямой, и об. виде
2) и норм. виде
3) $d(L, 0)$

1) $2(x+1) + 2(y-2) = 0$

2) $2x + 2y - 2 = 0$ $\quad \dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

3) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. Общие уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{ll} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \\ \dfrac{A_1}{A_2}\ne\dfrac{B_1}{B_2}\ne\dfrac{C_1}{C_2} & (\alpha_1 \nparallel \alpha_2)\end{array}\right. \quad (*) \quad \begin{array}{l} \longleftrightarrow \alpha_1 \leftrightarrow \vec N_1=\{A_1;B_1;C_1\} \\ \longleftrightarrow \alpha_2 \leftrightarrow \vec N_2=\{A_2;B_2;C_2\}\end{array}$$

1) у- $M_0(x_0;y_0;z_0)\in l$ $\longrightarrow$ 2. $\vec S=[\vec N_1;\vec N_2]$

2) $\vec S=\{m,n,p\}$ $\longrightarrow$ 1. $\exists\ \frac{A_1}{A_2}\ne\frac{B_1}{B_2}$

$M_0(x_0;y_0;z_0)$, $\exists\ z_0=0$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1x_0+B_1y_0=-D_1 \\ A_2x_0+B_2y_0=-D_2\end{cases}$

$A_1B_2-A_2B_1\ne 0$. найдем x_0 и y_0

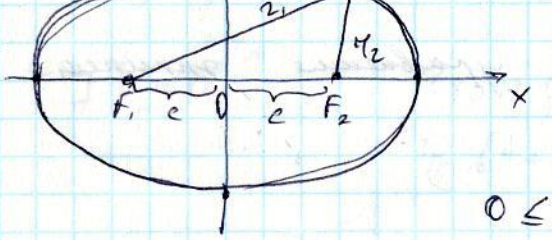
$M_0(x_0;y_0;0)$

Кривые и поверхности II порядка

§15. Эллипс

1. Геометрическое определение эллипса.

Эллипс - мн-т точек плоскости таких, что сумма расстояний от любой из этих точек до двух фиксированных точек называемых фокусами эллипса есть величина постоянная



$$\boxed{r_1+r_2=2a=const} \quad (1)$$

$|F_1F_2|=2c$ - фокусное расстояние

Опр. $\varepsilon=\frac{c}{a}$ } эксцентриситет

$0\le c\le a \Rightarrow \varepsilon\in[0;1]$

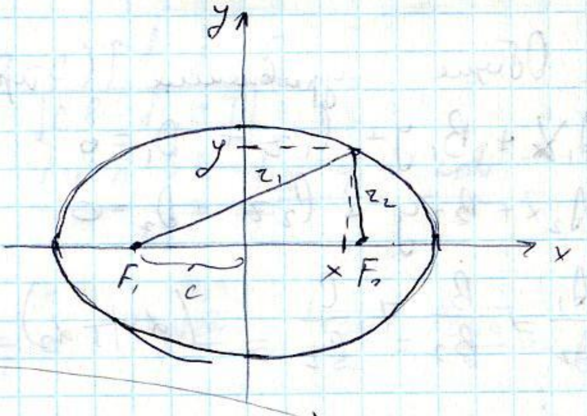
$\varepsilon=0 \Longleftrightarrow c=0 \Leftrightarrow F_1=F_2 \longleftrightarrow$ окружность

$\varepsilon=1 \longleftrightarrow [F_1;F_2]$

2. Каноническое уравнение эллипса

$$(2)\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$ — каноническое ур-е эллипса

Теорема: $(1) \Longleftrightarrow (2)$



$(1) \longrightarrow (2)$

Ирр-ур-е эллипса

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (2-1)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2-2)$$

$\Delta \quad (1) \Rightarrow r_1 = 2a - r_2 \xRightarrow{()^2} r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$

$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4ar_2 + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$

$2xc = 4a^2 - 4ar_2 - 2xc$

$4ar_2 = 4a^2 - 4xc$

$ar_2 = a^2 - xc \xRightarrow{()^2} a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$

$a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$\shortparallel$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

~~Теорема~~ $(2) \longrightarrow (1)$

$\Delta \quad r_1 = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$ Но $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$

$r_1 = \sqrt{x^2 + 2xc - \dfrac{b^2}{a^2}x^2 + \underbrace{c^2 + b^2}_{a^2}}$

$r_1 = \sqrt{x^2\left(\dfrac{a^2 - b^2}{b^2}\right) + 2xc + a^2}$

$r_1 = \sqrt{\dfrac{x^2c^2}{b^2} + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\dfrac{c}{a}x + a\right)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x$

$(\varepsilon < 1, \ |x| \le 1)$

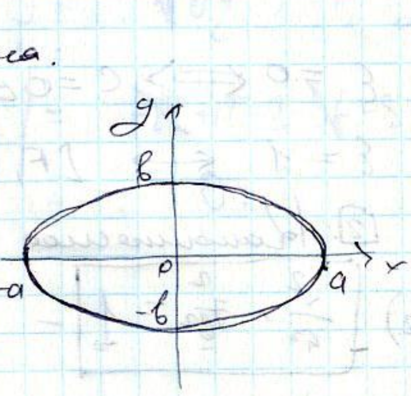
$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x & (*) \\ r_2 = a - \varepsilon x & (**) \end{cases}$$ Рациональные уравнения эллипса

$r_1 + r_2 = 2a$

$\boxed{3}$ Ограниченность и симметрия эллипса.

1) Огран. $(2) \Longrightarrow |x| \le a \qquad x = 0, \ y = \pm a$

$(2) \Longrightarrow |y| \le b. \qquad y = 0, \ x = \pm b.$



Число b называется малой полуосью эллипса, а a — большой полуосью г) Симметрия

$\exists M(x;y) \in$ элл. $\Rightarrow$ (2) $\begin{cases} M_1(x;-y) \in \\ M_2(-x;y) \in \\ M_3(-x;-y) \in \end{cases}$ элл $\longrightarrow$ осевая (O_x) $\longrightarrow$ осевая (O_y) $\longrightarrow$ центральная $(0;0)$

$\boxed{4}$ Уравнение касательной к эллипсу

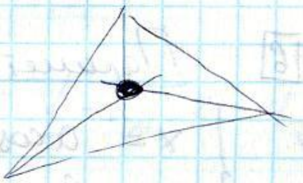
Кас. к эл. — прямая, имеющие с ним одну общую точку

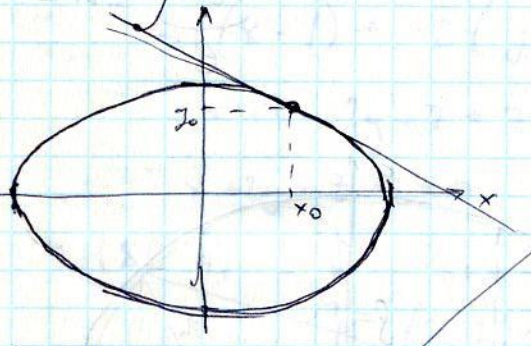
$\exists$ элл $\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\boxed{\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1}$ ур-е касат. в точке (x_0, y_0)

$\exists\ M_0(x_0; y_0) \in$ элл

$l: \begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$ $\binom{*}{*}$ $\vec{J}=(m;n)$

$M_0(x_0;y_0)\in l$





$\binom{*}{*} \to$ в (2) $\frac{x_0^2+2x_0mt+m^2t^2}{a^2}+$

$+\frac{y_0^2+2y_0nt+n^2t^2}{b^2}=1$

Но! $M_0 \in$ элл $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$$\frac{2x_0mt+m^2t}{a^2}+\frac{2y_0nt+n^2t^2}{b^2}=0.$$

$$t\left(\frac{2x_0m+m^2t}{a^2}+\frac{2y_0n+n^2t}{b^2}\right)=0.$$

$\exists\, t=0$ $\quad 2x_0mb^2+m^2b^2t+2y_0na^2+n^2ta^2=0$

$(m^2b^2+n^2a^2)t=-2x_0mb^2-2y_0na^2$

$t=\frac{-2(x_0mb^2+y_0na^2)}{m^2b^2+n^2a^2}=0!$

$x_0mb^2+y_0na^2=0.$

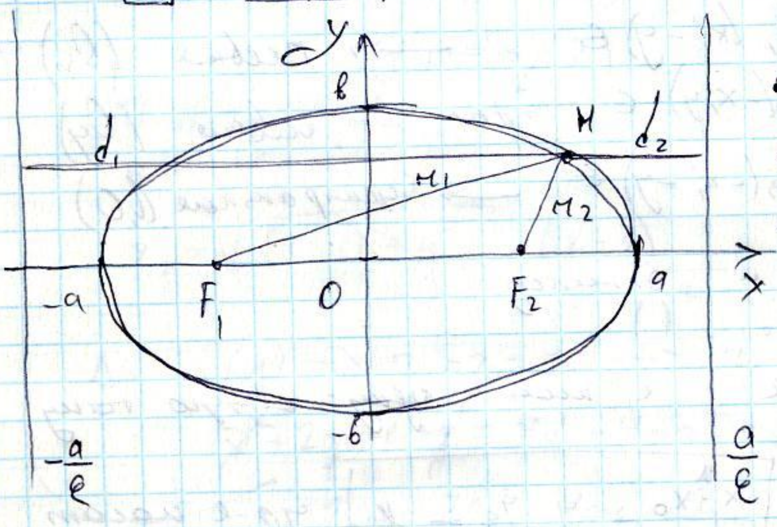
$\binom{*}{*}$ $m=(x-x_0)\cancel{t}$, $n=(y-y_0)\cancel{t}$

$\vee$ $\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{m}{n}$ $\qquad \frac{m}{n}=-\frac{y_0a^2}{x_0b^2}$ $\vee$

Итого $\frac{x-x_0}{y-y_0}=-\frac{y_0a^2}{x_0b^2}$ $\qquad xx_0b^2-x_0^2b^2=-yy_0a^2+y_0^2a^2.$

$xx_0b^2+yy_0a^2=x_0^2b^2+y_0^2a^2 / a^2b^2$ $\quad \boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1}$

5 Директриссы эллипса



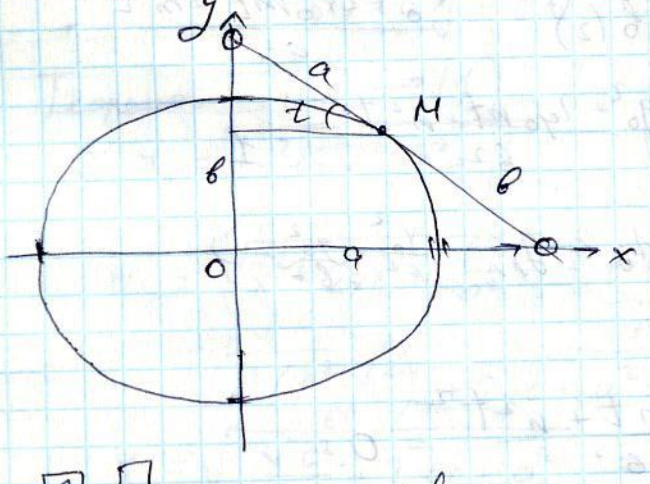
Д.з. две прямые, перпендикул. большой оси эллипса и находящиеся на расст. a/ε от начала коорд.

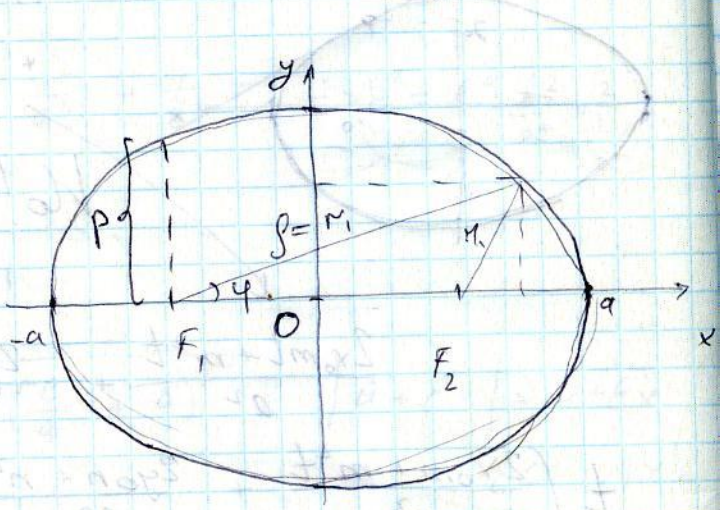
Лемма $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$

6 Параметрические уравнения эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$x = x_0 \cos \omega t$$
$$v = \underbrace{x_0 \omega}_{b} \sin \omega t$$





7 Полярное уравнение

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_1 = \rho \\ r_2 = a - \varepsilon x \\ x = \rho\cos\varphi - c \end{cases}$$

$$\rho + a - \varepsilon(\rho\cos\varphi - c) = 2a$$

$$\boxed{\rho = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon\cos\varphi}} \quad (7)$$

p — фокальный параметр

Эллипс кончен.

2,183

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x-2y-z+1=0$$

§16 Окружность

1) Опр. ГМТ пл-ти, равноудаленных от фикс. (·) O — центра окр.

$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0 \longrightarrow$ эл → окр

$\boxed{r = R}$ (1)

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = b = R$

$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ (2)

3) Ограниченность
- $|x| \le R \quad |y| \le R$
- симметрия.

4) уравнение касательной

$\boxed{x x_0 + y y_0 = R^2}$ (4)

$\boxed{(x-\tilde{x})x_0 + (y-\tilde{y})y_0 = R^2}$ $\tilde{4}$

NB ∃ центр в (·) $(\tilde{x}_0; \tilde{y})$

$\boxed{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2 = R^2}$ $\tilde{2}$

5) директрисы удалены в ∞

6) параметр.

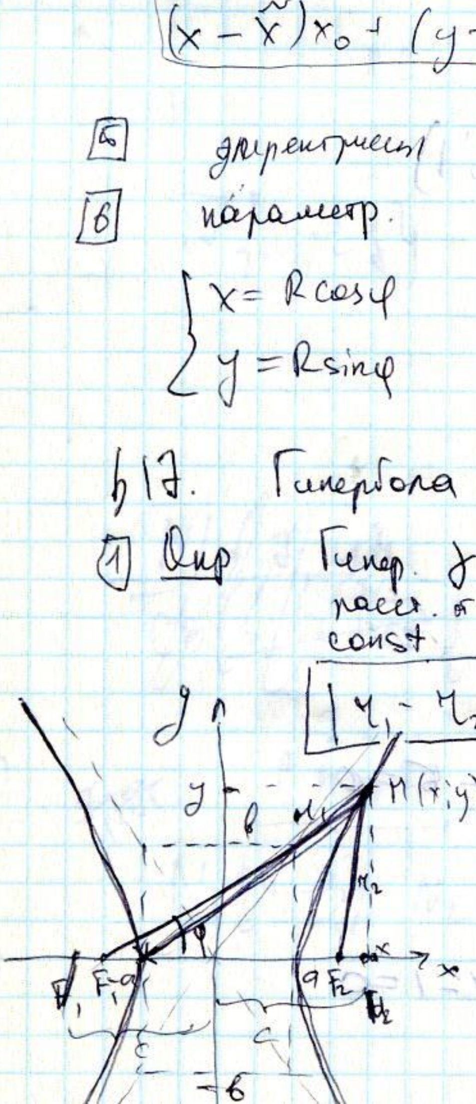
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0; 2\pi)$$

7) Полярное: $\boxed{\rho = R}$

§17. Гипербола

1) Опр Гипер. – ГМТ пл-ти, таких что [модуль разности расст. от этих точек до двух фокусов гиперболы] = const

$\boxed{|r_1 - r_2| = 2a}$ (1)



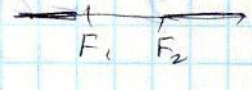
$\varepsilon = \frac{c}{a} \qquad 0 \le a \le c$

$a = 0, \ \varepsilon = \infty$

$a = c, \ \varepsilon = 1 \qquad \varepsilon \in [1; +\infty)$

1) $a = 0 \quad r_1 = r_2$ — прямая (верт.)

2) $a = c \quad \varepsilon = 1$



$\varepsilon \in (1; +\infty)$

[2] Каноническое уравнение эллипса

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \quad (2)$$

Д-во полностью он не ...

1) $(1)\to(2)$

2) $(2)\to(1)\to b(*)\begin{cases} r_1=|a+\varepsilon x| \\ r_2=|a-\varepsilon x|\end{cases}$

$$\begin{cases} r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\end{cases}$$

$$-\begin{array}{l} r_1=a+\varepsilon x \\ r_2=\varepsilon x-a \\ \hline r_1-r_2=2a\end{array} \qquad -\begin{array}{l} r_1=-a-\varepsilon x \\ r_2=a-\varepsilon x \\ \hline r_1-r_2=2a\end{array}$$

[3] • Симметрия $(Ox, Oy,$ 1 осевая в $(0;0))$

• Асимптота бесн. кривой — прямая линия, такая, что расстояние от точки кривой до асимптоты стремится к нулю, если точки кривой стр. на ∞.

Теорема $y=\pm\frac{b}{a}x$ — асимптоты гиперболы, задав. (2)

$\square\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$

$\square \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases}$ (I ч) $\qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2 \to y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

$\square\ y=\frac{b}{a}x$ $\qquad \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ $\qquad$ • $M(x;y)\in$ Гип.

$\square\ bx-ay=0$

$$d(M;l)=\left|\frac{bx-a\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\underbrace{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}_{\geq 0}=$$

$$=A\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=A\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=A\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$d(M;l)=\frac{const}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0, \text{ чтд}$$

NB1 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

NB2 a — действ. полуось
b — вещественная полуось
Ox — дейст. ось
Oy — мнимая полуось.

[4] Касательная к гиперболе

Опр. прямая, имеющая с гип. 1 общ. точку и не параллельная ни одной из ее асимптот

Теорема $\exists$ гип $\leftrightarrow$ (2) $\exists(\cdot)M(x_0;y_0)$ — (·) касания

Тогда $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ (упр.)!

[5] Директрисы

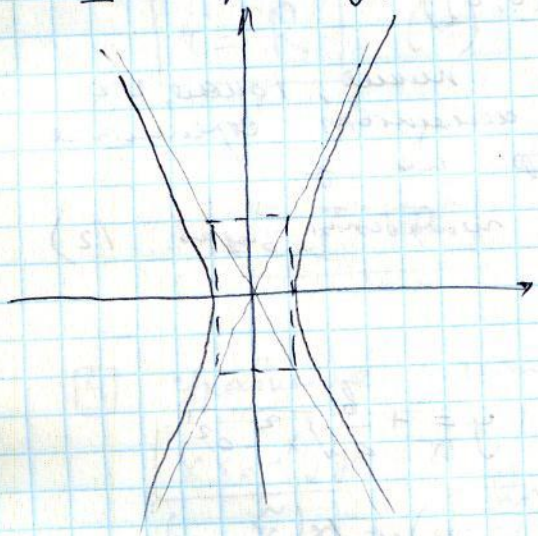
Дир $\frac{a}{\varepsilon}$ $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$

[6] $ch\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ — пара гиперб. кос. и синус.

$sh\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot ch\,t \\ y = b \cdot sh\,t \end{cases} \quad (6) \quad t \in (-\infty; +\infty)$$

[7] Полярное ур-е



$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ $p = \varepsilon c - a$

2,1(?)

$P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$

$P_2: y + 3z - 1 = 0$

$\cos = \frac{2-3}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{60}} = \frac{1}{2\sqrt{15}}$

2,1(93)

$P_1: 5x - 3y + z + 3 = 0$

$P_2: 10x - 6y + 2z + 7 = 0$

1. Найти пл-в равноудал. от них

2. $\rho(P_1, P_2)$

$10 - 6 \quad 10x - 6y + 2z + 6{,}5 = 0$

$-\frac{10x}{\sqrt{140}} + \frac{6y}{\sqrt{140}} \pm \frac{2z}{\sqrt{140}} - \frac{7}{\sqrt{140}} = 0.$ $\quad \frac{6}{\sqrt{140}} - \frac{7}{\sqrt{140}} = \frac{1}{\sqrt{140}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{35}}$

$\overline{N}\{5; -3; 1\}$;

№2,197

б) $\begin{cases} x+2y-3z-5=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases} \longrightarrow \vec{s}=\{5;\,-7;\,-5\}.$

$\exists\ z=0,\quad x+2y=5$

$2x-y=-2$

$5x=1 \qquad 4y+y=10+2$

$x=\frac{1}{5} \qquad 5y=12,$

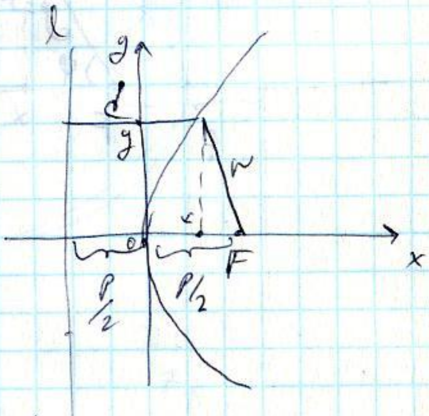
$y=\frac{12}{5}$

а) $\dfrac{x-\frac{1}{5}}{5}=\dfrac{y-\frac{12}{5}}{-7}=\dfrac{z}{-5}$

б) $\begin{cases} \frac{7}{5}-7x=5y-12 \\ 1-5x=5z \\ 12-5y=-7z \end{cases}$

$\begin{cases} 5y+7x=12+\frac{7}{5} \\ 5x+5z=1 \\ 5y-7z=12 \end{cases}$

§18 Парабола



[1] Г. опр. параболы $\exists\ \rho(F;\,l)=p$

ур-е $\boxed{d=r}$ (1) ГМТ пл-ти на равном расст. от прямой l (директр.) и фокусом.

$\varepsilon=\dfrac{r}{d}=1$

[2] Канон. ур-е параболы

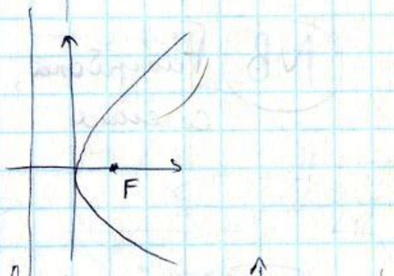
$\boxed{y^2=2px}$ (2)

Г- $r=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$

$d=x+p/2$

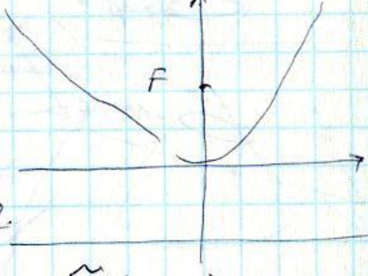
$r=d$

1) $y^2=2px$



2) $y^2=-2px$

3) $x^2=2py$ l

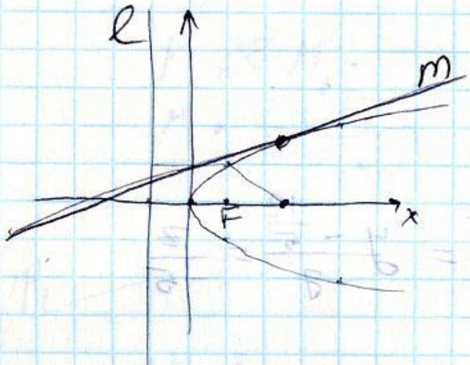


[3] Симметрия Ox т.к. $\exists M(x;y)\in$ пар. $\Rightarrow \tilde{M}(x;-y)\in$ пар.

NB Асимптот у параболы нет.

4 Касательная

Прямая, имеющая с пар. одну общую точку и не паралл. оси симм. параболы



Теорема. Пусть m – кас. к пар. в $M_0(x_0;y_0)$

Тогда $yy_0 = p(x+x_0)$

$\boxed{\text{Упр!!!}}$

$$\begin{cases} x = x_0+mt \\ y = y_0+nt \end{cases}$$

$$(y_0+nt)^2 = 2p(x_0+mt)$$

$$y_0^2 + 2y_0nt + n^2t^2 = 2px_0 + 2pmt$$

$$2y_0nt + n^2t^2 = 2pmt \quad \exists\, t=0.$$

$$2y_0n + n^2t = 2pm$$

$$2y_0n = 2pm.$$

$$\frac{x-x_0}{y-y_0} = \frac{m}{n} = \frac{y_0}{p} \qquad yy_0 - y_0^2 = p(x-x_0)$$

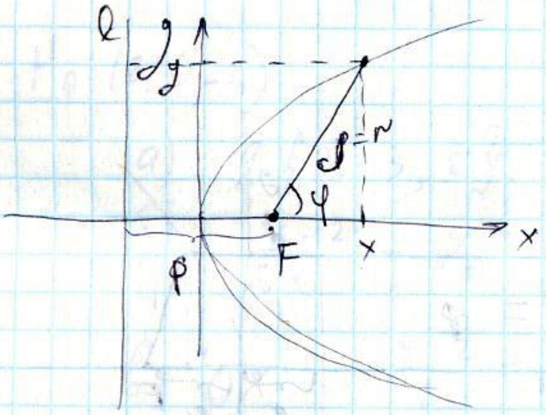
5 Директриса

$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1$ (def)

6 Параметр. ур-е

не содержательно

7 Polar



Теорема: $\varepsilon = 1$. $\boxed{\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}}$

$\boxed{\text{Упр!!!}}$

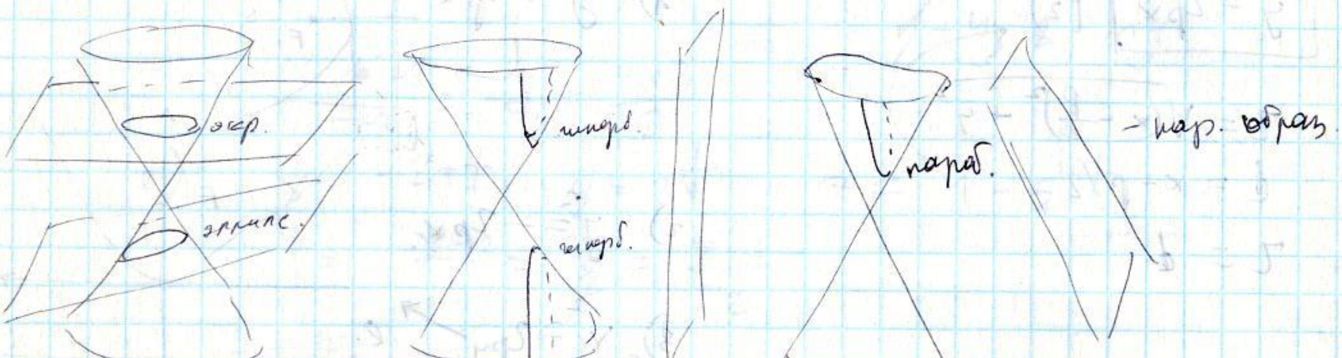
$d = r$

$\rho = r$

$$p + \rho\cos\varphi = \rho$$

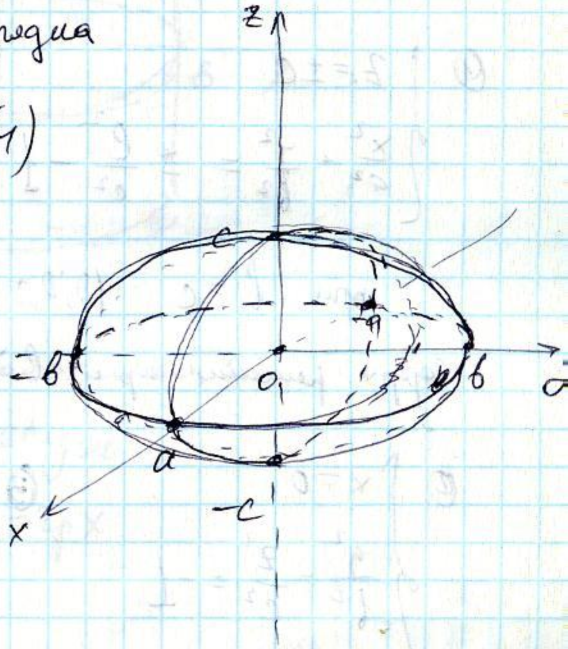
$$\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$$

NB Гипербола, парабола, эллипс, окружность — это конические сечения



§11 Поверхности 2 порядка в $\mathbb{R}^3$. Метод сечений.

$F(a;b;c)=0$, $F(a,b,c)$ – ч.а.п. II порядка



1. Эллипсоид. $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ (1)

(А) $\begin{cases}(1)\\ z=\pm C\end{cases}$

$C=\text{const}\geq 0$

(NB) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{C^2}{c^2}$

$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=0.$

(NB) $C=c,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $\quad C_{1,2}(0;0;\pm c)$

$z=\pm c$

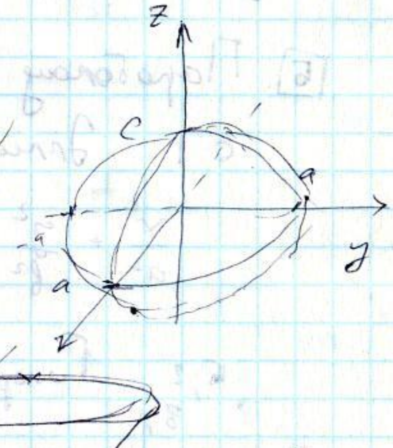
(Б) $\begin{cases}(1)\\ x=\pm A\end{cases} \longrightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{A^2}{a^2}$

(В) аналогично.

(NB) Об эллипсоиде вращения (оси)

Пусть $a=b$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Ну и всё

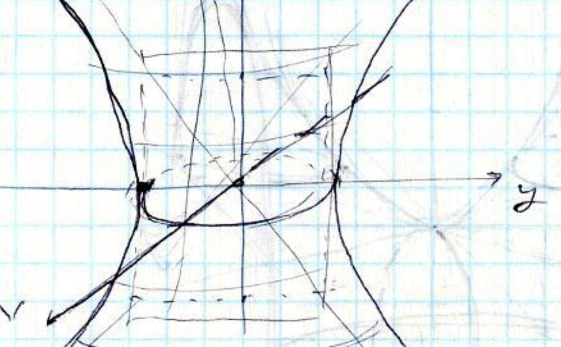


2. Гиперболоид (однополостный)

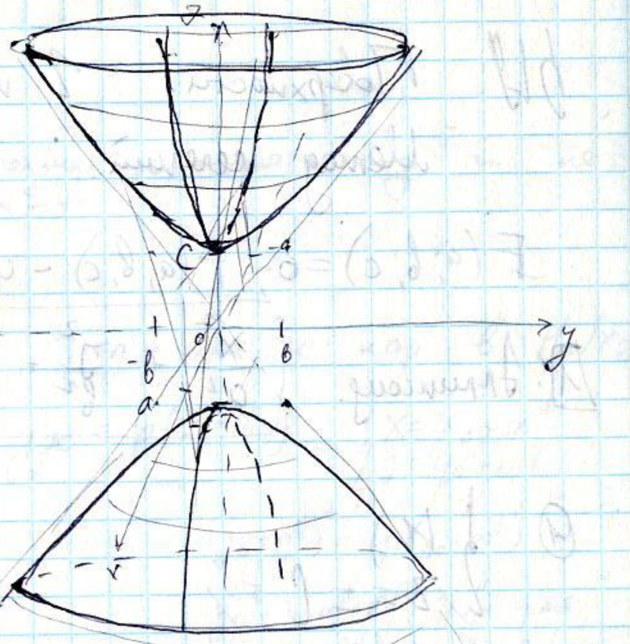
$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$

(1). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{C^2}{c^2}$ сечение оху

(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\cancel{\frac{C^2}{b^2}}$ (3) аналог.



3. Двуполостный гиперболоид



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

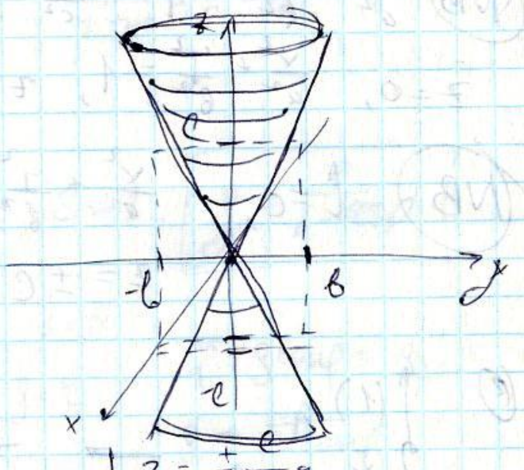
① $\begin{cases} z=\pm l \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm\frac{l^2}{c^2}-1 \end{cases}$

при $l=c$ $(0;0;\pm l)$

содерж. решение при $l>c$

② $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases}$

4. Конус 2-го порядка

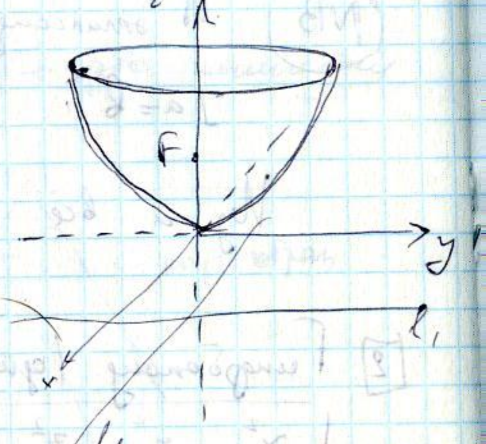


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

① $\begin{cases} z=\pm l \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{l^2}{c^2} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} z=\pm\frac{c}{b}y \\ x=0 \end{cases}$ прямые 2.

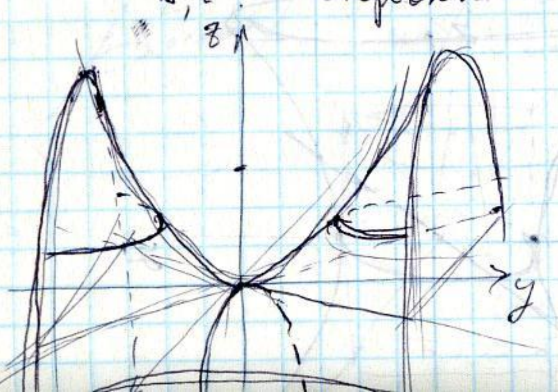
5. Параболоид

5.1. Эллиптический параболоид.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

5.2 Гиперболический параболоид



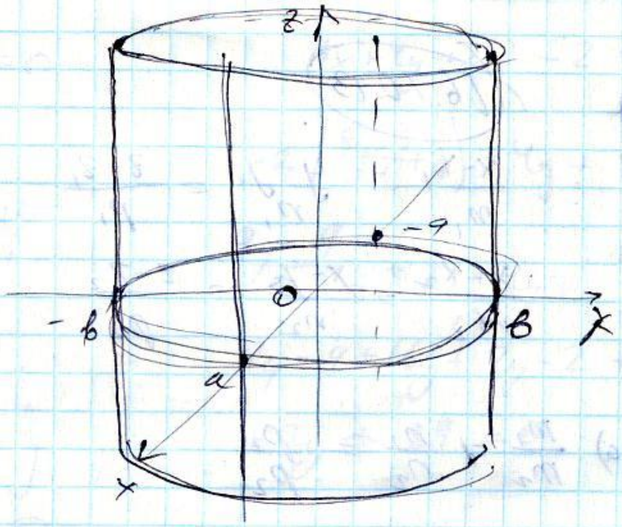
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

Лень сечения строить

6 Цилиндры

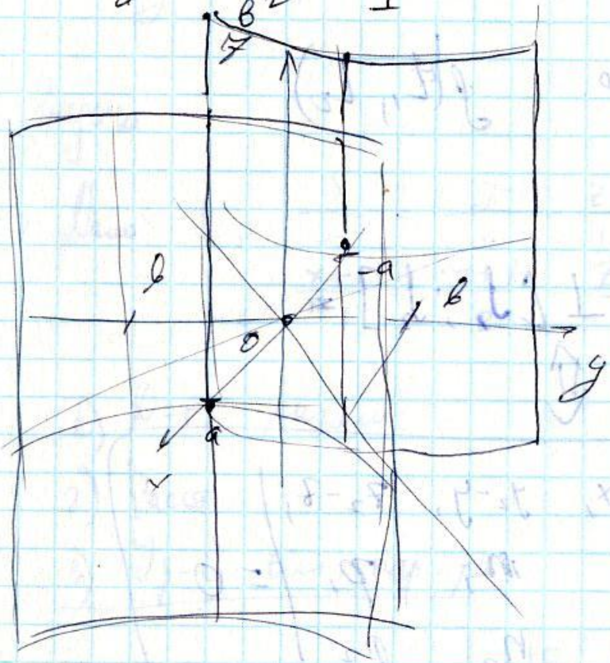
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

6.1. Эллиптический



6.2. гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



6.3. Параболический

Очевидно.

$y^2=2px$

Линейная Алгебра

§1 Алгебраические структуры: группа, кольцо, поле, лин. пространство, алгебра.

1. Группа

Опр: пусть M - некоторое множество $M=\{x, y, z, \dots\}$

операц. „о" у бинарной на M, если по опр. правилу двум элементам X сопостав. третий эл. X.

$$x \circ y = z, \quad (\forall x, \forall y) \in M \implies z \in M$$

Ex: $M = \mathbb{R}$, „о" $= +$, очевидно.

Опр: $\exists\, G = \{g_\alpha\}$ - множество.

G называется группой, если на G определена бинарная операция „о" (групп. умножение) со сл. св-ми:

1. Ассоциативность $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$
2. Сущ. нейтр. эл-та $e \circ g = g \circ e = g$
3. Обратность: $g \circ g^{-1} = e$.

NB абелева (комм. группа) — $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, где $\forall g_1, \forall g_2 \in G$

$G = \mathbb{R}$, „о" $\leftrightarrow +$

$G = \mathbb{R}/\{0\}$ „о" $\leftrightarrow \cdot$

$G = \mathbb{R}^n$ „о" $= +$

$G = \{M_n = \{A_{[n\times n]} = \|\alpha^i_k\| \ \alpha^i_k \in \mathbb{R}\}$, $\det A \neq 0$.

„о" $\leftrightarrow$ умн. матриц

$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

группа не Абелева.

Лемма $\exists\, G$ - группа, e - !

Д-во пусть $e, \tilde{e}$. $e \circ \tilde{e} = e = \tilde{e}$

Лемма $\exists\, G$ - группа, $\forall g \in G$ g^{-1} - ед. (!)

Д-во $\exists\, g^{-1}, \tilde{g}^{-1}, g$ $\quad g^{-1} \circ g \circ \tilde{g}^{-1} = \tilde{g}^{-1} = g^{-1}$

$\boxed{2}$ Кольцо

Опр $\exists R = \{x, y, \dots\}$ R-кольцо, если на R определены 2 бин. операции „+", „·"

1) R - абелева группа по „+"
2) Дистр. законы $(x+y)z = xz+yz$

$$z(x+y) = zx+yz$$

Примеры: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$

$\boxed{3}$ Поле

Опр $\exists F = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots \xi\}$ - поле

F является полем, если опр. 2 бин. операции „+", „·", такие, что:

1. F-абелева группа по сложению. (коммут., ассоц., сущ. нуля, обрат. эл)
2. F-абелева группа по умнож. (комм., ассоц., сущ. един., обр. по умн)
3. Дистрибутивность $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$

Примеры: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

$\boxed{4}$ Линейное пространство (Л.П.)

Опр. Множество $X = \{a, b, c, x \dots\}$ является Л.П. если на X определено 2 операции:

① - сложение

② - умножение на элемент поля F
$(\forall \alpha \in F, \forall a \in X \ a\alpha \in X)$

1) $x+y = y+x$
2) $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\exists\, 0_x : x+0_x = 0_x+x = x$
4) $\exists\, -x : x+(-x) = 0_x$
5) $\alpha(\beta\cdot x) = \beta(\alpha\cdot x) = x(\alpha\cdot\beta)$
6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$
7) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$
8) $1\cdot x = x$.

Пример

① $\mathbb{R}^3 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, x^i \in \mathbb{R} \right\}$ ② $\mathbb{R}^4 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \quad x^i \in \mathbb{R} \right\}$

$x+y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix} \quad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix}$ ③ $\mathbb{C}^n$

NB Эл-ты поле F : $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ — числами.
Эл-ты Л.П. X : x, y, z — векторами

④ $X = R_n^m$

⑤ $X = P_n$ ← множество полиномов степени $\leq n$. над $\mathbb{R}$

$X = P_n = \{ p(t) \mid \deg p(t) \leq n \}$, где $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$

⑥ $X = C(0;1)$ над $\mathbb{R}$

1) $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$
2) $(\alpha f_1)(t) = \alpha \cdot f_1(t)$

Леммы о Л.П.

Лемма 1 $\mathbb{O}_X$ — !

Лемма 2 $\forall x: \; -x$ — !

Лемма 3 $\forall x \in ЛП \quad \underset{\substack{\Uparrow \\ F}}{0} \cdot x = \underset{\substack{\Uparrow \\ X}}{\mathbb{O}_X}$

$0x \overset{3}{=} 0x + \mathbb{O}_X \overset{4}{=} 0x = 0x + (x + (-x)) \overset{2}{=} (0x + x) + (-x) \overset{8}{=}$
$\overset{8}{=} (0x + 1x) + (-x) \overset{6}{=} ((0+1)x) + (-x) = 1 \cdot x + (-x) \overset{8}{=} (x + (-x)) \overset{4}{=} \mathbb{O}$

Лемма 4 $\boxed{\text{Упр!!!}}$ $\forall x \in X \quad \underset{\substack{\Uparrow \\ F}}{(-1)} \cdot \underset{\substack{\Uparrow \\ X}}{x} = \underset{\substack{\Uparrow \\ X}}{-x}$

5 Алгебра

Алгеброй X над F — ЛП X над F со 2-й бин. операцией (умножение $xy = z$, $\forall x \forall y \in X \; \exists z \in X$),
удовл. сл. св-м.

Среда 12:30 – Тест (дата, дропбокс)
Контр. Четверг 14:20

1. Прямые в $\mathbb{R}^2$
2. Плоскости в $\mathbb{R}^3$
3. Кривые в $\mathbb{R}^2$

§2. Комплексные числа. Поле комплексных чисел.

0. Опр: $\mathbb{C} := \{z = (x;y)\} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

с действиями: $+, \cdot$ $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2;\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Теорема. Множество комплексных чисел – поле.

$0_c = (0;0)$

$1_c = (1;0)$ Остальное – $\boxed{\text{Упр!!!}}$

1. Алгебраическая форма записи

(1) $\boxed{z = x + yi}$, где $z = (x;y)$ Умнож., деление.

вещ. мнимая часть.

$\overline{z} = x - yi$ – комплексно сопр. с z

2. Тригонометрическая и показ. формы записи

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ (2) $\quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k.$

Главная ветвь аргумента:
$k=0$, $\mathrm{Arg}\, z = \arg z$

Лемма: $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $\quad k = 1, 2$

$$z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

деление так же.

Опр. $\boxed{e^{i\varphi} \overset{\text{def}}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi}$ $\quad \boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$ – показ. форма записи

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ $\quad z^n = r^n \cdot e^{i\cdot n\varphi}$

$z_1 / z_2 = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Лемма. $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

(Формула Муавра)

Лемма: $\exists z = re^{i\varphi}$, Тогда $(\sqrt[n]{z}) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$

Д-во: $z = re^{i\varphi}$

$\sqrt[n]{z} = w \Rightarrow z = w^n \quad (w = \rho e^{i\psi} \Rightarrow z = \rho^n e^{in\psi})$

$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\psi}$

$$\begin{cases} r = \rho^n \\ e^{i\varphi} = e^{in\psi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \end{cases} \qquad z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k \end{cases}$$

Отвывод:

$\sqrt[n]{z}$ – n-значная ф-я. $\sqrt{16} = 2, 2i, -2, -2i$

$\boxed{3}$ Элементарные функции Компл. перем.

① $W = z^n$ однозначная $n \in \mathbb{N}$

② $W = \sqrt[n]{z}$ n-значная $n \in \mathbb{N}$

③ $W = abs(z)$ однозн.

④ $W = Arg(z)$ многозн. пер. ($\arg z$ – однозн).

⑤ $W = e^z$ многозн. период. $T = 2\pi$

Опр $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\measuredangle\ e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z$

⑥ $e^{\pi i} = -1$

$\boxed{4}$ $\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{cases}$

$\boxed{5}$ Логарифмы

$w = u + iv \qquad w = \operatorname{Ln} z$

$r = e^u, \ a = \ln r$

$v = \varphi + 2\pi k, \ k \in$

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{Ln} z = \ln z + i(\varphi + 2\pi k) \\ &\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \end{aligned}\right.$$

Главная ветвь $k = 0 \Rightarrow \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z$

Комплексные (прод.)

6 Показательная ф-я

$$a^z = (e^{\mathrm{Ln}\, a})^z = e^{(\ln a + i \arg a + 2\pi k i) z}$$

Примеры: $i^i = \left(e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)i}\right)^i = e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k \in \mathbb{Z}$

$$a = i = e^{\mathrm{Ln}\, i} = e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi k)i}$$

7 Степенная ф-я

$w = z^a,\ a = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$

$$w = z^a = (e^{\mathrm{Ln}\, z})^a = e^{(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k)a}$$

NB $\mathbb{C}$ – алгебра $\qquad \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x;y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

	1	i
1	1	i
i	i	-1

Алгебра Кватернионов

$X = \mathbb{R}^4,\quad x = (x^0, x^1, x^2, x^3);$

$x = x^0 + ix^1 + jx^2 + kx^3$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	$+k$	$-j$
j	j	$-k$	-1	$+i$
k	k	j	$-i$	-1

§3. Линейная зависимость векторов Л.П. Базис и размерность Л.П.

1 Опр. $\triangleleft$ X над полем F $\quad$ Вектора: $a, b, c \dots x, y, z \in X$

Числа: $\alpha, \beta, \gamma \dots \xi, \eta, \zeta \in F$

Опр Линейной комбинацией векторов $a, b, c \dots$ с коэф-ми $\alpha, \beta, \gamma \dots$ называется вектор, опр. равенством

$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots$

Опр $\exists X = \{x_1; x_2; x_3\}$ набор γ Л.З. (лин. зависим)

если $\exists$ ч-ты $\alpha^1_x, \alpha^2_x, \alpha^3_x \dots : \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \dots = 0.$

Опр $\exists X = \mathbb{R}^3$, $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ → компланар. : $\bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ $\quad$ ЛЗ

→ не компланар. $\quad$ ЛНЗ

(Ex ↗)

Опр Линейно независ. если $\sum \alpha_i = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$

Ex 2 $X = \mathbb{R}^n = \{ x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = (\xi^1 \xi^2 \dots \xi^n)^T, \ \xi \in \mathbb{R} \}$

$\forall \{x_1, x_2 \dots x_n\} \quad \xi_k^i = (x_k)^i$

$\exists \ \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^n x_n = O_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} + \dots + \alpha^n \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_1^2 \\ \vdots \\ \xi_1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^1 \xi_1^1 + \alpha^2 \xi_2^1 + \dots + \alpha^n \xi_n^1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha^1 \xi_1^n + \alpha^2 \xi_2^n + \dots + \alpha^n \xi_n^n = 0 \end{cases}$$

И что-то еще не записал

2 Основные леммы по лин. зависимости и независимости

Лемма 1 Если в наборе содержится нулевой вектор то этот набор ЛЗ

Лемма 2 Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ содержит ЛЗ набор $\{x_{i_s}\}_{s=1}^{m<n}$ то он ЛЗ

Лемма 3 Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ ЛНЗ, то $\forall \{x_{i_s}\}_{s=0}^{m<n}$ ЛНЗ

Лемма 4 $\exists \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ - ЛЗ. Тогда в нем содержится вектор x_m, такой что $x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i x_i \quad m<n$

Д-во $\{x_1, x_2 \dots x_{m-1}\}$ - еще ЛНЗ $\{x_1 \dots x_m\}$ - ЛЗ

$\exists \ \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^{m-1} x_{m-1} + \alpha^m x_m = 0 \quad (*)$

$\alpha^m \neq 0$ (если равен, то набор $1 \to m$ ЛЗ)

$x_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_m} x_2 - \dots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} x_{m-1}$ — ЛНЗ$\cancel{Н}$

3 Полнота набора базис

Опр Набор $\{y_i\}_{i=1}^m$ ЛП X называется полным (ПН...), если для $\forall x \in X: x = \sum_{i=1}^m \alpha^i y_i$

Пример $\{e_1, e_2, e_3 \dots e_n\}$ в $\mathbb{R}_n$ - полн. набор

2) $X = P_n = \{ p(t) \mid \deg p(t) \leq n \}$

$P_n = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \dots + \alpha_n t^n$

$\{1, t, t^2, t^3 \dots t^n\}$ - ЛНЗН

4 ~~По~~ Опр ЛП назыв. конечным, если $\exists$ конечный полный набор векторов.

$\exists \{y_1; y_2; y_3 \dots y_n\} \in X: \quad \{y_i\}_{i=1}^{m}$ — ПИ, $m<\infty$

Опр Базисом ЛП называется полный ЛИЗИ.

Лемма 1: в любом конечномерном ЛП существ. базис.

Д-во: $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ — ЛИЗИ, $\quad \underbrace{\underbrace{\{y_1, y_2 \dots y_m}_{\text{ЛИЗ}}, y_{m+1} \dots y_n\}}_{\text{ЛЗ}}$

Методом вычеркивания оставим один ЛИЗИ.

Лемма 2. Любой ЛИЗИ в конечномерном ЛП может быть дополнен до базиса.

$\exists \{\underbrace{x_1; x_2; x_3; x_n}_{\text{ЛИЗИ}}\}; \underbrace{e_1\ e_2\ e_3 \dots e_n}_{\text{БАЗИС}}\}$ повторим вычеркив.

6.11.13

Теорема о полном и лиз наборе (ПН и ЛИЗН)

Количество vect в ЛИЗИ конечном. ЛП не превосходит количество vect ПН.

$\exists \{x_i\}_{i=1}^{n}$ — ЛИЗ $\quad \{y_k\}_{k=1}^{m}$ — ПИ $\quad \boxed{n \le m}$

Д-во $\Leftarrow$ от прот.: $\exists\ n>m$

(1). $\underbrace{\{x_1; y_1; y_2 \dots y_m\}}_{m+1}$ — $\begin{cases} \text{ПН} \\ \text{ЛЗ} \end{cases}$ $\longrightarrow \overbrace{\{\overbrace{x_1\ y_1 \dots y_{i-1}}^{\text{ЛИЗ}}\ \underbrace{\overset{\text{kill}}{y_i}\ y_{i+1} \dots y_m}_{\text{ПИ},\ m}}^{\text{ЛЗ}}$

(2). $\underbrace{\{x_1; x_2; y_1; y_2 \dots y_{i-1}\ \cancel{y_i}\ y_{i+1} \dots y_m\}}_{m+1}$

$\underbrace{\{\underbrace{x_1\ x_2\ y_1 \dots y_{i-1}\ y_{i+1} \dots y_{i_2-1}}_{\text{ЛИЗ}}\ \overset{\text{kill}}{y_{i_2}}\ y_{i_2+1} \dots y_m\}}_{\text{ЛЗ}}$ — m штук

(m) $\{\underbrace{x_1; x_2; \dots x_{m-1}; x_m}_{\text{ЛИЗ — как подпабор } \{x_i\}_{i=1}^{n}}; y_1\}$ — $\begin{matrix}\text{ПИ} \\ \text{ЛЗ}\end{matrix}$ $\rightarrow \underbrace{\{x_1, x_2 \dots x_{m-1}, x_m\}}_{\text{ПИ}}$ kill

(m+1) $\underbrace{\{\underbrace{x_1; x_2 \dots x_m}_{\text{ПИ}}; x_{m+1}\}}_{\text{ЛЗ}}$ Противоречие.

Δ

Следствие: для конечном. ЛП число векторов в разн. базисах одинаково.

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ - базис X $\qquad$ $\{\tilde{e}_k\}_{k=1}^{m}$ - базис X

$\left.\begin{matrix} \exists\ e - \text{ПИ},\ \tilde{e} - \text{ЛНЗ},\ n \le m \\ \exists\ e - \text{ЛНЗ},\ \tilde{e} - \text{ПИ},\ n \ge m \end{matrix}\right\}\ n = m$

<u>Опр</u> Размерностью линейного пространства называется число векторов его базиса

Пример: $X = \{0_x\}$, над F $\quad \dim X = 0$

$X = \mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ $\quad \dim X = 1$

$X = \mathbb{R}^n$ - над $\mathbb{R}$ $\quad \dim X = n$

$\dim \mathbb{C}^m = 2m$ $\qquad \dim C(0;1) = \infty$

$\dim \mathbb{R}^m_n = mn$

$\dim P_n$ над $\mathbb{R} = n+1$

<u>Теорема</u> Для того чтобы ЛНЗН был базисом ЛП необх. и достаточно, чтобы количество векторов в нем равнялось размерности.

$\{x_i\}_{i=1}^{n}$ - ЛНЗ - базис $\Longleftrightarrow n = \dim X$

1. $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ - базис $\Rightarrow \dim X = n$ (def $\dim X$)

2. $\dim L = n \Rightarrow \{x_i\}_{i=1}^{n}$ ЛНЗН! ПИ - ?

Доказательство как в пред. теореме $\{x_1, e_1, e_2, \ldots\}$

<u>Следствие</u> Базис конечном. ЛП - это максим. его ЛНЗН.

<u>Опр</u> $\exists \{e_i\}_{i=1}^{n}$ - базис X $\quad \exists x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i \quad (*)$

Тогда $\{\xi^1; \xi^2; \xi^3 \ldots \xi^n\}$ - координаты вектора x

<u>Лемма</u> Координаты вектора в заданном базисе опр. единств. образом

Д-во $\leftarrow$: $\exists x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$ $\qquad 0_x = x - x = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i - \tilde{\xi}^i) e_i$ ЛНЗН

$\exists x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}^i e_i$

$\xi^i - \tilde{\xi}^i = 0, \quad \xi^i = \tilde{\xi}^i$

<u>Лемма</u>

Координаты ЛК векторов равны соотв. ЛК соотв. координатам ЛК соотв координатам этих векторов.

$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i \qquad (x)^k = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$

§4 Изоморфизм линейных пространств

Опр. Пусть X и Y — ЛП над F; X, Y — изоморфные, если $\exists \longleftrightarrow$ между эл-ми $x \in X$ и $y \in Y$, сохраняющее линейную структуру, то есть при

$$\left.\begin{matrix} x_1 \leftrightarrow y_1 \\ x_2 \leftrightarrow y_2 \\ \forall \lambda \in F \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2 \\ \lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1 \end{cases}$$

Лемма 1. $0_x \leftrightarrow 0_y$ для X изоморф. Y

Д-во: Пусть $x \leftrightarrow y$, возьмём $0 \in F$, возьмём $0x \longleftrightarrow 0y \Rightarrow 0_x \Longleftrightarrow 0_y$ △

Лемма 2. ЛНЗ $\{x_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow$ ЛНЗ $\{y_i\}_{i=1}^n$, то есть при $x_i \leftrightarrow y_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ ... то же самое.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0$$

$$\sum \alpha_i = 0$$

Следствие: два конечном. ЛП разл. разм. не могут быть изом.

Теорема любые два конечном. ЛП над F одинак. разм. изоморфны

Д-во X Y над F

$\dim X = \dim Y$

Возьмём $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X $\quad \{f_i\}_{i=1}^n$ — базис Y

$$\{e_i\}_{i=1}^n \leftrightarrow \{f_i\}_{i=1}^n$$

$$e_i \leftrightarrow f_i$$

$$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \overset{def}{\longleftrightarrow} y = \sum_{i=1}^n \xi^i f_i \qquad \xi^i \in F$$

Сохранение лин. структ. $\quad x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, $\lambda \in F$

1. $x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^n \xi_1^i e_i + \sum_{i=1}^n \xi_2^i e_i \overset{св-ва}{=} \sum_{i=1}^n (\xi_1^i + \xi_2^i) e_i \overset{изом}{\longleftrightarrow}$

$$\longleftrightarrow \sum_{i=1}^n (\xi_1^i + \xi_2^i) f_i = \sum_{i=1}^n \ldots + \sum = y_1 + y_2.$$

2. $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda y_1$

Теор. (Следствие) любое ~~два~~ ~~конечном.~~ ЛП (конечном.) над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ может быть отождествлено с $\mathbb{R}^n$, где n — соотв. разм. $= \dim X$

$$\mathbb{R}_n^m \leftarrow \mathbb{R}^{mn} \qquad \mathbb{C}^n \leftarrow \mathbb{R}^{2n} \qquad \mathbb{P}_n \leftarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

§5 Подпространства ЛП

1. Осн. определения и примеры

Опр I. ПП L ЛП X — γ $L \subset X$, L над F с теми же опер.

Опр II. Пп L ЛП X γ $L \subset X$ замкнутое относительно опер. „+", „$\times$ …" индуцированных из X

Лемма 1-1. Опр I $\longleftrightarrow$ Опр II

Примеры: 1° V_3 — простр. векторов в $\mathbb{R}^3$, V_2 — ПП V_3, V_1 — ПП V_3

2° $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\mathbb{R}^m$ — пп $\mathbb{R}^n$

$y \in \mathbb{R}^m$, $y = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$

$\measuredangle L \subset \mathbb{R}^n$: $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (\xi^1, \xi^2, \dots \xi^m, 0, 0 \dots 0)\}$

$\mathbb{R}^m$ изоморфно L

3° P_{n-1} — пп P_n ($\mathcal{P}$ или P)

4° $C_1(0,1)$ — пп $C(0,1)$

2. Основные леммы о подпространстве

Лемма 2-1: $\exists$ L — пп X $\Rightarrow \dim L \leq \dim X$

Лемма 2-2: $\exists$ L — пп X, $\exists \dim L = \dim X \Longrightarrow L = X$

Лемма 2-3: Базис пп L ЛП X может быть дополнен до базиса всего пространства X

Лемма 2-4: Из базиса простр. X нельзя извлечь базис Y — пп X (в прямую сп.)

Контрпример: V_3: $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

3. Линейная оболочка векторов пространства X

Опр: $\exists \{x_1, x_2 \dots x_s\} \subset X$, тогда ЛО в-в $x_1, x_2 \dots x_s$ γ $\mathcal{L}\{x_1, x_2 \dots x_s\} = \{x \in X \mid x = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i x_i; \alpha_i \in F\}$

Лемма 3-1 $\mathcal{L}\{x_1, x_2 \dots x_s\} \leftarrow$ пп X

Лемма 3-2 Лин. о. $L\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ явл. мин. (мн-во ~~множество~~) пп, содержащим эти вектора

4. Линейное многообразие: Опр: $\exists L$ — пп X, $x_0 \subset X$ — фикс. вектор

ЛМ M, $\parallel$ пп L γ $M \subset X$: $M = \{y \in X, y = x_0 + x; x \in L\}$.

Лемма 4-1 M — пп X, если $x_0 \in L$ (НиД)

1,519

$z^4-(1+i)z^2+2(1+i)=0$

$(1+i)^2-8(1+i)=\cancel{1}-\cancel{1}+2i-8-8i=-8-6i$

$z=\sqrt{\dfrac{(1+i)+\sqrt{-(8+6i)}}{2}}$

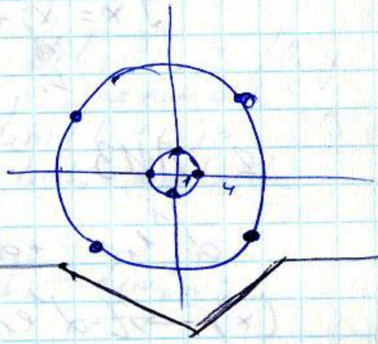
1,521

$z^8+15z^4-16=0.$

$D=225+4\cdot16=225+64=289=17^2.$

$z^4=\dfrac{-15+\sqrt{289}}{2}=\dfrac{-15\pm17}{2}=1;-16.$

$z^4=1,\quad z=-16$



Опр. 4-2] M – ЛМ $X \parallel L$;

1. Если $\dim M=1$, M – прямой
2. Если $\dim M=2$, M – плоскостью.

k. Если $\dim M=k$, M – k-мерной плоскостью

n-1. Если $\dim L=n-1$ ($n=\dim X$), то M – гиперплоскость

5 Пересечение и сумма подпространств

Опр 5-1. Пусть L_1, L_2 – пп X, тогда L – пересечением L_1 и L_2, если $L=L_1\cap L_2$ ($L=\{y \mid y\in L_1;\ y\in L_2\}$)

Лемма 5-1 L – подпростр. X (NB L – пп L_1, L_2)

$\forall\ y_1+y_2$ – выражение через базис и L_1 и L_2. (λy_1 – аналог.) $\begin{pmatrix} y_1\in L_1 \\ y_2\in L_2\end{pmatrix}$

Опр. 5-2] L_1, L_2 – пп X, тогда L – суммой L_1 и L_2, если $(\cancel{L\neq L_1\cup L_2})$ ($L=\{x\in X \mid x=x_1+x_2;\ x_1\in L_1,\ x_2\in L_2\}$)

Лемма 5-2 $L=L_1+L_2$ – пп X. (упражн.)

NB] X – ЛП X и $\{0_X\}$ – тривиальные подпространства.

6 Теорема о сумме размерностей (*)

] L_1, L_2 – пп $X \Rightarrow \dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2)$

$\exists \dim L_1 \cap \dim L_2 = k,\quad \exists \dim L_1 = k + m_1,\ \exists \dim L_2 = k + m_2$

Тогда докажем, что $\dim(L_1 + L_2) = k + m_1 + m_2$

$\exists\ \mathcal{B}_{L_1 \cap L_2} = \{e_1; e_2, e_3 \dots e_k\} \to k$ шт (0)

$\mathcal{B}_{L_1} = \{e_1, e_2 \dots e_k, f_1 \dots f_{m_1}\} \to k + m_1$ шт (1)

$\mathcal{B}_{L_2} = \{e_1, e_2 \dots e_k, g_1 \dots g_{m_2}\} \to k + m_2$ шт (2)

Д-ть: $\mathcal{B}_{L_1 + L_2} = \{e_1, \dots e_k, f_1 \dots f_{m_1}, g_1 \dots g_{m_2}\}$

1. Полнота

$\exists x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ // x_1 - по баз L_1, x_2 - по баз L_2

2. ЛНЗ

$\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^1 f_1 + \dots + \beta^{m_1} f_{m_1} + \gamma^1 g_1 + \dots + \gamma^{m_2} g_{m_2} = 0$ (*)

$(*) \to z = \underbrace{\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^k e_k + \beta^1 f_1 + \dots + \beta^{m_1} f_{m_1}}_{\in L_1}$ $(\Rightarrow \alpha^i, \beta^k, \gamma^s = 0)$

$\| $

$\underbrace{-\gamma^1 g_1 + \dots - \gamma^{m_2} g_{m_2}}_{\in L_2} = \underbrace{\delta^1 e_1 + \dots + \delta^k e_k}_{L_1 \cap L_2}$ (**)

$(**) \to \delta^1 e_1 + \dots + \delta^k e_k + \boxed{\gamma^1 g_1 + \dots + \gamma^{m_2} g_{m_2} = 0}$ Доказано

$\Downarrow$

$\delta^i = 0 \quad \gamma^j = 0 \quad \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha^1 \dots \alpha^k = \beta^1 \dots \beta^n = 0}$

ПИ & ЛНЗ $\Longrightarrow \mathcal{B}_{L_1 + L_2}$ - нужн. базис

Доказано. Δ

[6] Прямая сумма подпространств

Опр 6-1. $\exists L_1, L_2$ - пп X, $L = L_1 + L_2$ - прямая, если $\forall x \in L$ $x = x_1 + x_2$!

Опр 6-2: пп L_1 и L_2 дизъюнктные, если $L_1 \cap L_2 = \{0_x\}$

Лемма 6-1: Для того, чтобы сумм. пп была прямой, Нид, чтобы X_1 и X_2 были дизъюнктными.

Пример: $L = L_1 + L_2$, $L = L_1 \dot{+} L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \{0_x\}$.

Д-во. ① $L = L_1 \dot{+} L_2 \Longrightarrow L_1 \cap L_2 = \{0_x\}$

$\leftarrow$ a) $\exists L_1 \cap L_2 = z$, $z \neq 0_x$; $x = x_1 + x_2 = (x_1 + z) + (x_2 - z)$

Тогда $L_1 \dot{+} L_2$ - прям. $\quad$ 1 разл. $\xleftrightarrow{\text{против.}}$ 2 разл.

б) $\Leftarrow$ $L_1 \cap L_2 = \{0_x\} \overset{?}{\Rightarrow} L_1 + L_2$ - (пр. сумма) $= L$.

$\exists L$ — не пр. сумма, тогда

$L_1 + L_2 = x_1 + x_2 = x$ | — $x_1\, y_1 \in L_1$

$\Leftarrow$ $y_1 + y_2 = x$ | $x_2\, y_2 \in L_2$

$\underbrace{x_1 - y_1}_{\in L_1} = \underbrace{y_2 - x_2}_{\in L_2} = z \neq 0$. противоречие. $x_1 \neq y_1$ и/или $x_2 \neq y_2$

Доказано Δ

<u>Лемма 6.2</u> Для того, чтобы $X = L_1 \dotplus L_2$ (L_1, L_2 — пп X), <u>Н и Д</u> следующее:

$$\begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0_x\} \\ \dim L_1 + \dim L_2 = \dim X \end{cases}$$

(а) $X = L_1 \dotplus L_2 \overset{(а)}{\Rightarrow} L_1 \cap L_2 = \{0_x\}$

2) $\dim X = \dim (L_1 + L_2) =$ по лемме 6.1

$= \dim L_1 + \dim L_2 - \underbrace{\dim L_1 \cap L_2}_{=0}$

$\Downarrow$

$\dim X = \dim L_1 + \dim L_2$.

(б) $\begin{cases} L_1 \cap L_2 = \{0_x\} \\ \dim L_1 + \dim L_2 = \dim X \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} X = L_1 \dotplus L_2$

1) $\exists$ $L = L_1 + L_2 = L_1 \dotplus L_2$

$\dim L = \dim L_1 + \dim L_2 - \underbrace{\dim L_1 \cap L_2}_{0} = \dim L_1 + \dim L_2$

По усл. $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim X \Rightarrow X = L$ Δ

Опр: $\exists L = L_1 + L_2 + \dots + L_k$ (L, L_i — пп X)

Говорят, что сумма $L = \dotplus$ прямая, если при $\forall x \in L$: $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ — единств.

<u>Теорема</u> Для того, чтобы $X = \dotplus \sum_{i=1}^{k} L_i$, Н и Д

1. $L_i \cap L_j = \{0_x\}$

2. $\dim X = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$

$\boxed{\text{Упр!!!}}$

7. Дополнение подпространства, операция проектирования

Опр. 7-1 $\exists X = L_1 \dotplus L_2$ $\exists\, x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_i$ } компонента в-ра x в L_i

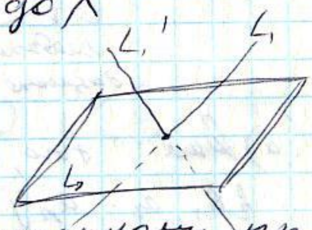
Опр. 7-2 Операция нахождения компоненты x_i называется проектированием вектора x на L_i $\parallel L_2$.

$X_1 = P_{L_1}^{\parallel L_2} X$; $x_2 = P_{L_2}^{\parallel L_1} X$,

Опр. 7-3 $\exists X = L_1 \dotplus L_2$, L_1 } дополнением L_2 до X

Дополнение к пп L_2 определяется

Лемма 7,1 ↑ не единственным образом



Лемма 7,2 dim любых дополнений к заданному пп совпадают

Опр 7-4 $\exists X = L_1 \dotplus L_2$; Коразм L_1 } $\dim X / L_2 = \dim X - \dim L_2 = \operatorname{co}$

ном. Гран

6В Линейные алгебраические системы уравнений

Опр ЛАСУ:

$$\begin{cases} \alpha^1_1 \xi^1 + \alpha^1_2 \xi^2 + \alpha \xi \ldots \alpha \xi = \beta^1 \\ \alpha^2_1 \xi + \alpha_2 \xi + \alpha \xi \ldots \alpha \xi = \beta^2 \\ \ldots \\ \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi + \alpha \xi \ldots \alpha \xi = \beta^m \end{cases} \quad (*)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = \beta^i \quad i = 1 \ldots m} \quad (*)$$

Опр 1. Решением $(*)$ явл $\{\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n\}$, такой, что при подстановке ур-е обращ. в равенство.

Опр 2. Если сист. имеет решение — то она совместна

Опр 3. Если система совместна, решение ед — определен. если решений много — неопределенная.

Опр 4 Если все $\beta^1 = \beta^2 = 0$ система однородная.

(**) Опр 5 $\sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = 0$ $i = 1 \ldots m$ — однор. система, отвечающая $(*)$

$\forall\, \alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha^1_1 \\ \alpha^2_1 \\ \vdots \\ \alpha^m_1 \end{pmatrix} \ldots \alpha_n \begin{pmatrix} \alpha^1_n \\ \alpha^2_n \\ \vdots \\ \alpha^m_n \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}$ Если X над поле F, то $a_1 \ldots a_n, b \in F^n$

$* \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \xi^k a_n = b$ $(*')$, $(**')$ — то же самое, но $b = 0$.

Опр: $(*')$ наз. сист. Крамера, если $m = n$ и $\{a_1, \ldots a_n\}$ — ЛНЗ

Теорема Система Крамера совместна и определена.

Д-во простое.

Дали: m→n $\exists \dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r < n$

$\exists \{a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}\}$ – ЛНЗИ $i_1 \to 1 \quad i_2 \to 2 \dots i_r \to r$

$\{a_1\, a_2 \dots a_r\}$ – ЛНЗИ

$\{a_1, a_2 \dots a_r\, a_{r+1} \dots a_n\}$ – ЛЗИ

Опр $\{\underbrace{\xi^1 \dots \xi^r}_{\text{главные базисные}}\ \underbrace{\xi^{r+1} \dots \xi^n}_{\text{свободные}}\}$

Теорема Кронекера – Капелли

а) Для того, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = b$ было совместна, нну $b \in \mathcal{L}$ $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$

б) В случае совместности:

1) При $\dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = n$ – реш ! – тривиально.

2) При $\dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r < n$ – реш ∞.

$r < n \quad \xi^1 a_1 + \xi^2 a_2 + \dots \xi^r a_r = b - \xi^{r+1} a_{r+1} - \dots - \xi^n a_n \quad (*)$

Если $\xi^1\ \xi^2 \dots \xi^n$ фикс, решение !

Следствие 1 Однородная система всегда совместна.

Следствие 2 Для того, чтобы одн. сист. $(m \times n)$ имела ∞ число реш., достаточно $m < n$.

$\dim\{a_1\, a_2 \dots a_n\} = r \leq m < n \quad a_i \in F^m$

Теорема Альтернатива Фредгольма

Если $\exists$ m–n $\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = b \quad \sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = 0.$

Тогда: 1) Одн. система имеет ед. реш., тогда $*$ разрешима при любом b

2) Если $*'$ имеет ∞ реш., тогда $*$ может быть несовм.

67 Общее решение одн. и неодн. ЛС. Фундамент. система решений (ФСР) ЛОС

1 $\exists \dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r < n$

$\exists b \in \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\}$ Д одн. систему $\xi^1 a_1 + \dots \xi^r a_r = - \xi^{r+1} \dots - \xi^n \dots$

Лемма 1 $\exists \tilde{K}$ – мн. реш. $\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = 0$ это лин. пр-во, $\dim \tilde{K} = n - r$

$\sum + \sum = 0 = \sum \dots$

Докажем, что $\tilde{K}$ изоморфно F^{n-r} $\tilde{K}\ (**')$

$\exists x = (\xi^1, \xi^2 \dots \xi^r\, \xi^{r+1} \dots \xi^n)$ – элемент $\tilde{K}$

$\boxed{\text{УПР!!}}$

$x \Longleftrightarrow \underset{F^{n-r}}{y}\underbrace{(\xi^{r+1} \dots \xi^{n})}_{n-r}$

Опр Любая система $(n-r)$ ЛНЗ решений $(**')$ — ФСР системы $(**')$

Опр. Пусть $\{x_1, x_2 \dots x_{n-r}\}$ — ФСР $(**)$, тогда ~~$x = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$~~

$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_{n-r} x_{n-r}$ $(\circ\circ)$

$\Updownarrow$ — общим решением.

NB **Опр** Нормальная ФСР

F^{n-r}

$y_1 = (1, 0, 0 \dots 0) \longrightarrow x_1 = (\xi_1^1\ \xi_1^2 \dots \xi_1^r, 1, 0 \dots 0)$

$y_2 = (0, 1, 0 \dots 0) \longrightarrow x_2 = (\xi_2^1\ \xi_2^2 \dots \xi_2^r, 0, 1 \dots 0)$

$y_{n-r} = (0, 0, \dots 1) \longrightarrow x_{n-r}\ (\xi_{n-r}^1\ \xi_{n-r}^2 \dots \xi_{n-r}^r, 0, 0 \dots 1)$

27.11.13

2 Неоднородная система

Пусть $\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = 0$ $(**')$ — однородная, $\dim \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\} = r < n$

$\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i = b$ $(*')$ — неоднородная, $b \in \mathcal{L}\{a_1 \dots a_n\}$.

Теорема. Любое решение z $(*')$ представимо в виде

$z = z_0 + x$, где z_0 — фиксир. решение $(*')$, а x — некоторое решение $(**')$

Д-во: $z_0 + x$ — реш. $(*')$ $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \xi_0^i a_i}_{\parallel\ b} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \xi^i a_i}_{\parallel\ 0} = b$.

Остальное аналогично.

Опр. Пусть $\{x_1, x_2 \dots x_{n-r}\}$ — ФСР $(**')$, тогда $\boxed{z = z_0 + \sum_{i=1}^{n-r} C_i x_i}$ (II)

Решение неоднор. системы, запис. в виде II наз. общим реш. $(*')$. Множество реш. $(*')$ явл. линейным многообр. паралл. пр-ву реш. соотв. однор. системы.

(68) Отображение. Линейные формы. Сопряженное пространство.

Опр 1. Пусть X, Y – ЛП над одним и тем же полем F. Говорят, что задано отображ. a из X в Y, если каждому из X по опр. правилу ставится в соотв. ед. элемент Y.

$a: X \to Y$, если $\forall x \in X \xrightarrow{a} \exists! \, y \in Y$

Опр 2. Отображ. $a: X \to Y$ инъективно, если $a(x_1) \neq a(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Опр 3. $A: X \to Y$ – сюръекция, if $A(X) = Y$

Опр 4. $A: X \to Y$ – биекция, if (инъек. & сюръек.) $\Leftrightarrow$ биек.

Опр 5. $A: X \to Y$ – лин. отобр. (линейным оператором) if:

$$\begin{cases} A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) \\ A(\lambda x_1) = \lambda A(x_1) \end{cases} \quad (\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall \lambda \in F)$$

Опр. $f: X \to F$ (X над F) – ЛФ (лин. форм.), if:

$$\begin{cases} f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \\ f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) \end{cases} \quad (\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall \lambda \in F)$$

$$\boxed{f(x) = (f; x)}$$

Пример:

1) $X = \mathbb{R}^2$: $(f_{\vec a}; x) = \text{Пр}_{\vec a} \vec x$
2) $X = \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$: $f^i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по ф. $(f^i; x) = \xi^i$ – компон. вектора x
3) $X = P_n$ (над $\mathbb{R}$) $(f_\alpha; p(t)) = p(\alpha)$
4) $X = C(-1, 1)$, $g \in X$, функ. Пусть $(f_g; f(t)) = \int_{-1}^{1} g(t) f(t) \, dt$

Опр. $X^* = \{$все ЛФ $f: X \to F\}$.

Пусть $f, g \in X^*$. $f = g$, if $\forall x \in X: (f; x) = (g; x)$

Опр: θ^* – нулев. формой, if $\forall x \in X: (\theta^*; x) = 0$

Опр: Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис X, $f \in X^*$. Тогда: $\varphi_i = (f; e_i)$ – коэфф. ЛФ f в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$

Теорема: задание ЛФ эквив. ее заданию её коэф. в фиксированном базисе X;

$(\Rightarrow)$: $f: X \to F \Rightarrow \varphi_i = (f; e_i)$

$(\Leftarrow)$: Пусть $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$; $(f; x) = (f; \sum_{i=1}^n \xi^i e_i) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n (f; \xi^i e_i) \overset{(2)}{=}$
$= \sum_{i=1}^n \xi^i (f; e_i) = \sum_{i=1}^n \xi^i \varphi_i$

$\exists$ Набор: f^1: $(f^1; l_1) = 1$; $(f^1; l_2) = 0$; ... $(f^1; e_n) = 0$
f^2: $(f^2; l_1) = 0$; $(f^2; l_2) = 1$ ... $(f^2; e_n) = 0$
$\vdots$
f^n: $(f^n; l_1) = 0$; $(f^n; l_2) = 0$ ... $(f^n; e_n) = 1$

$(f^i; e_k) = \delta^i_k$ $\left(\begin{cases} i = k \Rightarrow 1 \\ i \neq k \Rightarrow 0 \end{cases}\right)$

Лемма: f^i - совпадает с ф-ей из Примеров: $f^i: X \to F$ но $(f^i; x) = \xi^i$

Д-во: $(f^i; x) = (f^i; \sum_{i=1}^n \xi^k e_k) = \sum_{k=1}^n \xi^k (f^i; e^k) = \xi^i$

NB: Немое Σ: $(f^i; x) = (f^i; \xi^k e_k) = \xi^k (f^i; l_k) = \xi^k \delta^i_k = \xi^i$

Опр. $\exists f, g \in X^*$, тогда $h: X \to F$ / суммой лф f и g $[h = f + g]$, если $h(x) = (f; x) + (g; x)$

Лемма: $h \in X^*$ 1. $h(x_1 + x_2) \overset{?}{=} h(x_1) + h(x_2)$

$h(x_1 + x_2) = (f; x_1 + x_2) + (g; x_1 + x_2) = (f; x_1) + (f; x_2) + (g; x_1) + (g; x_2) = h(x_1) + h(x_2)$

Опр. $\exists f \in X^*$, $\lambda \in F$ $\tilde{h}: X \to F$ / произв. f на λ, если $\tilde{h}(x) \overset{def}{=} \lambda (f; x)$ $(\forall x \in F)$ $\boxed{\text{Упр!!!}}$

Теорема: $X^* = \{$все лф $f: X \to F\}$ - ЛП над F

Теорема: $\{f^i\}_{i=1}^n$: $(f^i; e_k) = \delta^i_k$ ($\{e_n\}_{k=1}^n$ - базис X) - базис лп X^*

Д-во

1. Полнота: $\exists f \in X^*$; $\exists f \xleftrightarrow{\{l_i\}_{i=1}^n} (\varphi_1; \varphi_2 ... \varphi_n)$, $f \overset{?}{=} \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i$

а) $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \xi_i$ экв.

б) $(\sum_{i=1}^n \varphi_i f_i) \overset{X^* - лп}{=} \sum_{i=1}^n \varphi_i (f_i; x) \overset{лемма}{=} \sum_{i=1}^n \varphi_i \xi^i$

2. ЛНЗ $\{f_i\}_{i=1}^n \overset{?}{=}$ ЛНЗ, т.е. $\exists (\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i = \mathbb{O}^*) \Rightarrow \alpha_i = 0$ $(*)$

а) $(\mathbb{O}^*; e_k) = 0$

б) $(\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i; e_k) \overset{X^* в лп}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{(f^i; e^k)}_{\delta} = \alpha_k = 0$

Доказано

Опр: X^* / пространством, сопряж. к X

Опр: $\{f_i\}_{i=1}^n$ (в X^*) и $\{e_k\}_{k=1}^n$ (в X) - взаимн. (сопр.) базисы если $(f^i; e^k) = \delta^i_k$

28.11.13.

Следствие: $\dim X^* = \dim X = \dim X^{**}$

Двойные формулы:

X | X^*

$\{e_k\}_{k=1}^n$ $(f^i; e_k) = \delta^i_k$ $\{f^i\}_{i=1}^n$

$x = \sum_{k=1}^n \xi^k x_k$ | $f = \sum_{i=1}^n \varphi_i f^i$

$\xi^k = (f^k; x)$ | $\varphi = (f; e_i)$

$(f; x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \xi^i$

II сопряженное пространство $]X, X^*$

$X^* = \{$л.ф. $f: X \to F\}$

$\hat{x}: X^* \to F$ — лин. форма на X^*

$(\hat{x}; f)$ — результат;

$X^{**} = \{$л.ф. $X^* \to F\}$

Опр: изоморфизм двух ЛП наз. естественным, если соотв. взаимно однозн. соответствие изоморфизма может быть установлено без применения понятия базиса.

X Y

$\{e_i\}$ $\{\tilde{e}_i\}$ — линии. изоморфизм.

$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \longleftrightarrow y = \sum_{i=1}^n \xi \tilde{e}_i$

Лемма: изоморфизм X и X^{**} естественен, т.к.:

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ \wedge & & \vee \\ \hat{x} & \longleftrightarrow & x \\ \cap & & \cap \\ X^{**} & & X \end{array}$$

$(\hat{x}; f) = (f; x)$

§9 Комбинаторика

1° Перестановка

Опр: перест. из n нат. эл-тов называется их расклад в особом фикс. порядке.

Лемма $P_n = n!$ (по индукции)

NB: число установок P_n — число разн. способов упорядочить мн-во из n эл-тов.

Лемма: Любая перестановка может быть получена из любой конечным числом транспозиций

Опр Беспор. или инверс. в перестановке наз. ситуация, когда большее число стоит впереди меньшего

Опр Перестановка наз. четной если число инв. четное.

Лемма Любая транспозиция в перестановке меняет ее четность.

Лемма (и) Число нечётных и чётных перестановок одинаково и равно $n!/2$

Следствие 2 (Теорема): Какими бы n транспозиций перестановка ни переводилась в основную, чётность n совпадает с чётностью π

2°. Сочетание

Опр. Сочетание — способ выбора подмн-ва из m эл-тов мн-ва из n эл-тов

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3° Размещения

Опр. Разм. — это 1) подмножества размера m из мн-ва, $k<n$

2) понятное подмн-во упорядочив.

$$A_n^m = \binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!}$$

§10 Полилинейные формы

Опр. ПЛФ $U(\cancel{x_1; x_2 \dots x_p})$ $(x_1; x_2; (x_1 x_2 \dots x_p, y_1, y_2 \dots y_q)$:

ф-я с числ. значениями, линейная по каждому из своих эл-тов при фикс. остальных

~~т.е. $U(x_i)$~~ (т.е. $U(x_1, \dots, \alpha x_i' + \beta x_i'', \dots x_p, y^1 \dots y^q) \overset{def}{=}$

$= \alpha U(x_1 \dots x_i' \dots x_p, y^1 \dots y^q) + \beta U(x_1 \dots x_i'' \dots x_p, y^1 \dots y^q))$

Опр. Говорят, что опр. выше ПЛФ имеет валентность $(p;q)$

Пример $X = \mathbb{R}^3$ $(\bar a; \bar b) = W(\bar a, \bar b)$ — ПЛФ валентности $(2;0)$

$\bar a \bar b \bar c = \tilde{\omega}(\bar a, \bar b, \bar c)$ — $(3;0)$

Опр. Нулевая форма валентности $(p;q)$ $O(x_1 \dots x_p; y_1 \dots y_q) = 0$

NB $\Omega^p_q = \{$все ПЛФ в $(p;q)\}$

Опр. ∃ $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис X; $\{f^j\}_{j=1}^n$ — базис X^*

∃ $W \in \Omega^p_q$ ∀ $W(e_{i_1}, e_{i_2} \dots e_{i_p}; f^{j_1}; f^{j_2} \dots f^{j_q}) =$

$= W_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$. Тогда набор из n^{p+q} чисел $W_{\dots}^{\dots}$ — т

тензором ПЛФ W в паре базисов $\{e\}$ $\{f\}$
$(f_i, e_i) = \varphi_i)$ и тензор ранга $p+q \to W^{j_1 j_2 \dots j_p}_{i_1 i_2 \dots i_q}$.

Теорема. Задание ПЛФ эквивалентно заданию ее на всевозможных наборах базисных векторов, то есть ее тензоров

Теорема $x_s = \sum_{i=1}^{n} \xi^i_s e_i = \xi^i_s e_i$
$y^t = \sum \dots = \eta^t_j f^j$

$\forall W(x_1, x_2 \dots x_p, y_1, y_2 \dots y_q) = W(\xi^{i_1}_1 e_{i_1}, \xi^{i_2}_2 e_{i_2} \dots \xi e_p \dots \eta^1_{j_1} f^{j_1}, \eta^2 \dots$

$$= \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \dots \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta_{j_q} \underbrace{W(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots e_{i_p}, f \dots)}_{\omega\text{ — тензор}} \quad (*) =$$

$$= \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \dots \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^q_{j_q} \omega^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

11 декабря

$\omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \omega^{\overline{jq}}_{\overline{ip}}$

$W = K_1 + K_2$ (—||—)

$\tilde{W} = \alpha \cdot K$, где $\alpha \in F$, если $\tilde{W}(\text{—||—}) = \alpha K(\text{—||—})$

Теорема: Ω^p_q — ЛП над F (далее $F = \mathbb{R}$)
1) $W, \tilde{W} \in \Omega^p_q$
2) 8 св-в Л.П.

(NB) $\exists U \leftrightarrow \alpha^{\overline{ip}}_{\overline{jq}}$, $V \leftrightarrow \beta^{\overline{jq}}_{\overline{ip}}$; $W \leftrightarrow \omega^{\overline{ip}}_{\overline{jq}} = \alpha^p_q + \beta^p_q$; $\tilde{W} = \alpha \cdot \alpha$

$W \in \Omega^p_q \leftrightarrow \omega^{\overline{ja}}_{\overline{ip}}$
$W(x_1, x_2 \dots x_p, y^1 y^2 \dots y^q) = \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \xi^{i_p}_p \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^q_{j_q} \omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$
(было)

$\forall$ Набор $\{W^{\overline{ip}}_{\overline{jq}}\}$: $W^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x_1 x_2 \dots x_p, y^1 y^2 \dots y^q) \stackrel{def}{=} \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \xi^{i_p}_3 \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \eta^3_{j_q}$

Теорема: Набор форм $\{W^{\overline{ip}}_{\overline{jq}}\}$ — базис Ω^p_q

(ПИ) $\forall \exists W \in \Omega^p_q$; $\exists W \leftrightarrow \omega^{\overline{ja}}_{\overline{ip}}$

Факт: $W = W^{\overline{ip}}_{\overline{jq}} \omega^{\overline{jq}}_{\overline{ip}}$ (немое сумм.) (x)

Доказательство:

$$W(x_1 x_2 \dots x_p y^1 y^2 \dots y^q) = (*) \overset{(**)}{=\!=\!=} W^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(x_1 x_2 \dots x_p, y^1 y^2 \dots y^q) \cdot \omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

$$\omega^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = W(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p}, f^{j_1} f^{j_2} \dots f^{j_q}) \longleftrightarrow n^{q+p}$$

$$(f^i, e_k) = \delta^i_k$$

ЛНЗ: $\alpha^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} W^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \mathbb{O}_{\Omega^p_q} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$

н.г. $\mathbb{O}_{\Omega^p_q}(e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}, f^{t_1} f^{t_2} \dots f^{t_q}) = 0.$

н.г. $\alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot W^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}(e_{s_1} e_{s_2} \dots e_{s_p}, f^{t_1} f^{t_2} \dots f^{t_q}) =$

$= \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots \delta^{i_p}_{j_q} \delta^{t_1}_{j_1} \delta^{t_2}_{j_2} \dots \delta^{t_q}_{j_q} = \alpha^{t_1 t_2 \dots t_q}_{s_1 s_2 \dots s_p} = 0.$

Следствие: $\dim \Omega^p_q = n^{p+q}$

§11 Произведение ПЛФ

Опр. $\exists U \in \Omega^{p_1}_{q_1}$, $\exists V \in \Omega^{p_2}_{q_2}$.

Отображ. W : $W = U \cdot V$, если $W(x_1 \dots x_p, x_{p+1} \dots x_{p_1+p_2}, y^1 \dots y^{q_1}, y^{q_1+1} \dots y^{q_1+q_2}) \overset{def}{=} U(x_1 \dots x_p, y^1 \dots y^{q_1}) \cdot V(x_{p+1} \dots x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1} \dots y^{q_1+q_2})$

Свойства
1°. $U \mathbb{O}_{\Omega^{p_1}_{q_1}} = \mathbb{O}_{\Omega^{p_1}_{q_1}} V = \mathbb{O}_{\Omega^{p_1+p_2}_{q_1+q_2}}$

2°. $(UV)W = U(VW)$

3°. $UV \neq VU$

4°. $U(V+W) = UV + UW$

$(V+W)U = VU + WU$

5°. $\Omega^p_0 = \{W \text{ бал}(p,0) : W(x_1, x_2, \dots x_p)\}$.

Упр. то же самое для $\overset{\text{мгу}}{\Omega^p_q}$

⑥ $\exists\, \omega \leftrightarrow \omega$

$\exists\, U \leftrightarrow \alpha^{j q_1}_{i p_1}$

$\exists\, V \leftrightarrow \beta^{j q_2}_{i p_2}$

$$\omega^{j q_1 + q_2}_{i p_1 + p_2} = \alpha^{j q_1}_{i p_1} \cdot \beta^{j q_1+1 \dots j_{q_1+q_2}}_{i p_1+1 \dots i_{p_1+p_2}}$$

⑫ Симметр. и антисимметричные ПЛФ

Опер. симметризации и антисимметризации.

Далее: $\forall\, \Omega^p_0 = \{\omega(p,0),\ \omega(x_1 \dots x_p)\}$

Опр. $U \in \Omega^p_\phi$ назыв. симметр. если ее знач. не зависит от порядка аргументов

$\Sigma^p = \{$все $U \in \Omega^p_0 :\ U$ - симм$\}$

Лемма: Σ^p - пп Ω^p_ϕ

Опр. $V \in \Omega^p_0$ д. антисимм. если она меняет знак при транспозиции любых двух ее элементов.

~~Лемма~~ $\Lambda^p = \{$все $V \dots\}$

Теорема Для $V \in \Lambda^p$ И.и.Д. $V(x_1 \dots x_i \dots x_i \dots x_p) = 0 \quad (*)$

Д-во: $\exists\, V \in \Lambda^p \Rightarrow (*)$

$$V(x_1 \dots x_i \dots x_i \dots x_p) = -V(x_1 \dots x_i \dots x_i \dots x_p) = 0$$

$$\forall\, \underbrace{V(x_1 \dots x_i + x_k \dots x_i + x_k \dots x_p) = 0}$$

$$= \overbrace{V(x_1 \dots x_i \dots x_i \dots x_p)}^{0} + \overbrace{V(x_1 \dots x_k \dots x_k \dots x_p)}^{0} + \underline{V(x_1 \dots x_i \dots x_k \dots x_p)}$$

$$\underline{+ V(x_1 \dots x_k \dots x_i \dots x_p)} = 0$$

ПЛФ

Следствие 1: если $\{x_1, x_2 \dots x_p\}$ ЛЗ, то $\underset{\Lambda^p}{V}(x_1 \dots x_p) = 0$

Следствие 2: если $p > n \Rightarrow V = \emptyset$

<u>Лемма I.</u> $\exists W$ – произв. ф. $\in \Omega^p_0$

$$\forall\, U(x_1, x_2 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{перестан.}}} W(x_{j_1}, x_{j_2} \dots x_{j_p}) \qquad \text{(I)}$$

Тогда U – симметрична.

<u>Опр.</u> результ приготовл. U из W называется симметризацией

$U = \mathrm{symm}\, W$ (Sym)

<u>Лемма II</u> $\exists W \in \Omega^p_0$

$$\forall\, V(x_1\, x_2 \dots x_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]}\, W(x_{j_1}\, x_{j_2} \dots x_{j_p}) \qquad \text{(II)}$$

Меняем два элемента внутри

$$f = (-1)^{[j_1 \dots j_k \dots j_i \dots j_p]}\, W(x_{j_1} \dots x_{j_k} \dots x_{j_i} \dots x_{j_p}) = -f$$

<u>Опр.</u> результ антисимм. из произв. по (II) – антисимм. $V = \mathrm{Asym}\, W$

<u>Свойства</u>: 1) если $U \in \Sigma^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\, U = U \quad \mathrm{Asym}\, U = 0$

2) если $U \in \Lambda^p \Rightarrow \mathrm{Sym}\, U = 0 \quad \mathrm{Asym}\, U = U$

3) $\begin{matrix}\mathrm{Sym}\\ \mathrm{Asym}\end{matrix}\{\alpha U + \beta V\} = \alpha \begin{matrix}\mathrm{Sym}\\ \mathrm{Asym}\end{matrix}\{U\} + \beta \begin{matrix}\mathrm{Sym}\\ \mathrm{Asym}\end{matrix}\{V\}$

4) $\mathrm{Asym}(UV) = \mathrm{Asym}(\mathrm{Asym}\, U V) = \mathrm{Asym}(U\, \mathrm{Asym}\, V)$

Д-во $U \in \Omega^p_0 \quad V \in \Omega^q_0$

$$\mathrm{Asym}\big(\mathrm{Asym}\, U(x_1 x_2 \dots x_p)\, V(x_{p+1}\, x_{p+2} \dots x_{p+q})\big) =$$

$$= \mathrm{Asym}\Big(\Big[\frac{1}{p!} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]}\, U(x_{j_1}\, x_{j_2} \dots x_{j_p})\Big] V(x_{p+1}\, x_{p+2} \dots x_{p+q})\Big) =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{(j_1 j_2 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]}\, \mathrm{Asym}\big(U(\cancel{x_{j_1} x_{j_2}} \dots x_{j_p})\, V(x_{p+1}\, x_{p+2} \dots x_{p+q})\big) =$$

$$= \frac{1}{p!} \underbrace{\sum (-1)^{\dots} (-1)^{N_{j_p}}}_{+1} \mathrm{Asym}\big(U(\dots)\, V(\dots)\big) =$$

$$= \frac{1}{p!}$$

(Б13) Базис пространства Λ^p

$\forall\ \Omega^p_0$: базис $\{W^{\vec{i_p}}(x_1 \dots x_p) = \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\xi_3^{i_3}\dots\xi_p^{i_p}\}(x)$

Лемма 1 $\exists W \in \Lambda^p$ $\exists W \Leftrightarrow \omega_{\vec{i_p}}$ — антисимм. по св. индекс.

$$\Updownarrow$$

$$W(e_{i_1} \dots e_{i_j} \dots e_{i_k} \dots e_{i_p}) = -W(e_{i_1} \dots e_{i_k} \dots e_{i_j} \dots e_{i_p})$$

Лемма 2 Набор F явл. антисимм. по св. индексам

$$F^{i_1 \dots i_p} = p!\, Asym\, W^{\vec{i_1 i_2 \dots i_p}}$$

Д-во:

$W^{j_1 \dots j_i \dots j_k \dots j_p}(x_1 \dots x_i \dots x_k \dots x_p) = W^{j_1 \dots j_k \dots j_i \dots j_p}(x_1 \dots x_k \dots x_i \dots)$

$p!\,Asym(x)\, F^{j_1 \dots j_i \dots j_k \dots j_p}(x_1 \dots x_i \dots x_k \dots x_p) =$

?

$= p!\, Asym(\cdot)\, W^{j_1 \dots j_k \dots j_i \dots j_p}(x_i \dots x_k \dots x_i \dots x_p) =$

$= -p!\, Asym$ — " — $= -F$.

Следствие: $F^{i_1 \dots i_s \dots i_s \dots i_p} = \mathbb{O}$

Следствие: $\exists (j_1 \dots j_p)$ — перестановка $(1 \dots p)$ Тогда $F^{j_1 \dots j_p} \xi (-1)^{[j_1 \dots j_p]}$

Далее: $\forall \{F^{i_1 \dots i_p} : 1 \le i_1 < i_2 \dots i_p < n\}$ $(\bullet)$ $F^{i_1 \dots i_p}$

Кол-во форм $\binom{n}{p}$

Теорема $(\bullet)$ — базис Λ^p

(1) ПИ: $\exists U \in \Lambda^p \in \Omega^p_0$

$\underset{\text{разлож. по базису}}{\overbrace{U}} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} W^{i_1 \dots i_p}$ (1): $Asym U = U$

Ω^p_0

$Asym(1) \cdot U = Asym\, U =$

$= \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} Asym\, W^{i_1 i_2 \dots i_p} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \frac{1}{p!} F^{i_1 i_2 \dots i_p} =$ (выбросить все 0)

$= \frac{1}{p!} \sum_{\substack{\text{по всем упор. наборам} \\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n}} \sum_{\substack{\text{по всем перест.} \\ (j_1 j_2 \dots j_p) \\ 1 \dots p}} \alpha_{j_1 j_2 j_3 \dots j_p} F^{i_{j_1} i_{j_2} i_{j_3} \dots i_{j_p}} =$

$(+1)$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\text{—"—}} \sum_{\text{—"—}} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]} F^{i_1 i_2 \dots i_p} =$

$= \frac{1}{p!} \sum_{\text{—"—}} \sum_{\text{—"—}} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} F^{i_1 i_2 \dots i_p},$

$\boxed{A^p_n = C^p_n P_n}$

② ЛНЗ

$\triangleleft\ \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} F^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbb{O} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ (где $i_1 i_2 \dots i_p$ – все упоряд. наборы)

(*) спит. на $(e_1 e_2 \dots e_p)$

$\mathbb{O}(e_1 e_2 \dots e_p) = 0$; лев. ч. $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} F^{i_1 i_2 \dots i_p}(e_1 e_2 \dots e_p) =$

$\overset{1}{\text{пр. г.}} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}\, p!\, (\mathrm{Asym}\, W^{i_1 \dots i_p})(e_1 e_2 \dots e_p) =$

$= \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}\, p!\, \frac{1}{p!} \sum\limits_{\substack{(j_1 j_2 \dots j_p) \\ \text{(по перест.)}}} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]} W^{i_1 i_2 \dots i_p}(e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_p}) =$

$= \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \sum\limits_{(j_1 j_2 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_p]} \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots \delta^{i_p}_{j_p} \Rightarrow \cancel{\alpha_{i_1 i_2 \dots}} =$

$= \alpha_{1,2,\dots p} \delta^1_1 \delta^2_2 \dots \delta^p_p = \alpha_{12 \dots p} = \mathbb{O}$. $\underline{\text{Л.ч.} = \text{П.ч.}}$

12.12.18

$X = \mathbb{R}^3 \quad x_1 = C_{84} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = C_{83} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x_3 = C_{120} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Longrightarrow$ ЛНЗ

$\to$ else ЛЗ

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} =$

$= \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = 2\alpha_3 \\ \alpha_3 = \forall \end{cases}$ ФСР $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$X = \mathbb{R}^4 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L$ – ЛО $\{x_1, x_2, x_3\}$

Базис и $\dim L$ $\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$

20,14 . 20,17 4 196–197 198 199 200

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim L = 2$

$X = \alpha A + \beta B + \gamma \Gamma + t\Theta$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\Theta = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\det = -3 \neq 0$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) =$

18.12.13

$\measuredangle\ F^{i_1 i_2 \dots i_p}_{x_1 x_2 \dots x_p} (x_1, x_2 \dots x_p) = p! \left(\mathrm{Asym}\, W^{i_1 i_2 \dots i_p}\right)(x_1, x_2 \dots x_p) =$ $(*)$

$= p! \frac{1}{p!} \sum (-1)^{[j_1 \dots j_p]} W^{i_1 \dots i_p} (x_{j_1} \dots x_{j_p}) = \sum_{(j_1 \dots j_p)} (-1)^{[j_1 \dots j_p]} \xi^{i_1}_{j_1} \xi^{i_2}_{j_2} \xi^{i_p}_{j_p}$

$\measuredangle\ p = n = X$ Λ^n, $\dim \Lambda^n = 1$ $\mathcal{B}_{\Lambda^n} = \{F^{12 \dots n}\}$

$F^{12 \dots n} (x_1, x_2 \dots x_n) = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} \xi^1_{j_1} \xi^2_{j_2} \dots \xi^n_{j_n} = \det \|\xi^i_k\| (x)$

б14 Внешнее произведение ПЛФ

Опр: $\exists\ \Omega^p_0 \ni U$, $V \in \Omega^r_0$ Вн. п. $U \wedge V$

$U \wedge V = \frac{(p+r)!}{p!\,r!} \mathrm{Asym}(UV)$,

Св-ва: ① $U \wedge V \in \Lambda^{p+r}$

② $p+r > n = \dim X$, $U \wedge V = 0_{\Omega^{p+r}_0}$

③ $U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = \frac{(p+r+s)!}{p!\,r!\,s!} \mathrm{Asym}(UVW)$

$U \wedge (V \wedge W) = U \wedge \left(\frac{(r+s)!}{r!\,s!} \mathrm{Asym}(VW) \right) =$

$\frac{(p+(r+s))!}{p!\cancel{(r+s)!}} Asym\left(U \frac{\cancel{(r+s)!}}{r!s!} Asym(VW)\right) = \Big| Asym\, UV_2\ Asym(U\, Asym \ldots$

$= \frac{(p+r+s)!}{p!r!s!} Asym(UVW) \quad \nabla$

4) (утв.) — дистр. $U\wedge(V+W) = U\wedge V + U\wedge W$

5) $\exists \alpha\in F: \ (\alpha U)\wedge V = U\wedge(\alpha V) = \alpha(U\wedge V)$

6) $\underset{(p,0)}{U}\wedge \mathbb{O}_{\Omega_0^q} = \mathbb{O}_{\Omega_0^{p+r}}$

7) $\underset{(p,0)}{U}\wedge\underset{(r,0)}{V} = (-1)^{pr} V\wedge U$

$U\wedge V = \frac{(p+r)!}{p!r!}\big(Asym(UV)\big)(x_1\ldots x_p, x_{p+1}\ldots x_{p+r}) =$

$= \boxed{\frac{(p+r)!}{p!r!}\cdot\frac{1}{(p+r)!}} \sum_{(j_1\ldots j_p, j_{p+1}\ldots j_{p+r})} (-1)^{[j_1\ldots j_p, j_{p+1}\ldots j_{p+r}]} \cdot U(x_{j_1}\ldots x_{j_p})\, V(x_{j_{p+1}}\ldots x_{j_{p+r}})$

$A =$

$\exists$ $\left| \begin{array}{ll} j_1 = i_{r+1} & j_{p+1} = i_1 \\ j_2 = i_{r+2} & j_{p+2} = i_2 \\ \vdots & \vdots \\ j_p = i_{r+p} & j_{p+r} = i_r \end{array}\right.$ Все они поменяем!

$= A\sum_{(i_1\ldots i_{p+r})} (-1)^{[i_{r+1}\ldots i_{r+p}, i_1\ldots i_r]}\, U(x_{i_{r+1}}\ldots x_{i_{r+p}})\, V(x_{i_1}\ldots x_{i_r}) =$

$= A\sum_{(i_1\ldots i_{p+r})} (-1)^{p\cdot r + [i_1\ldots i_r\, i_{r+1}\ldots i_{r+p}]}\, V(x_{i_1}\ldots x_{i_r})\, U(x_{i_{r+1}}\ldots x_{i_{p+r}}) =$

$= \frac{(r+p)!}{r!p!} Asym(VU)(x_1\ldots x_{p+r})\cdot(-1)^{p\cdot r} =$

$= (-1)^{rp}\, V\wedge U \quad \nabla$

8) $\exists F^{i_1\ldots i_p}$ — баз. форма Λ^p, $\exists \{f^i\}_{i=1}^n$ — базис X^*,

~~вектр~~ сопр. $\{e_k\}_{k=1}^n$ в X

Тогда $F^{i_1\ldots i_p} = f^{i_1}\wedge f^{i_2}\wedge\ldots\wedge f^{i_p}$

Док: $F^{i_1\dots i_p} \overset{def}{=} p!\,Asym[W^{i_1\dots i_p}] = p!\,Asym[f^{i_1} f^{i_2} f^{i_3} \dots f^{i_p}]$

$= p!\,Asym[Asym(f^{i_1} f^{i_2}) f^{i_3} \dots f^{i_p}] = p!\,Asym[\frac{1!\,1!}{2!}(f^{i_1}\wedge f^{i_2}) f^{i_3} \dots f^{i_p}] =$

$= \frac{p!}{2!} Asym[Asym[(f^{i_1}\wedge f^{i_2}) \cdot f^{i_3}] f^{i_4} \dots f^{i_p}] =$

$= \frac{p!}{\cancel{2!}} Asym[\frac{\cancel{2!}\,1!}{3!}(f^{i_1}\wedge f^{i_2}\wedge f^{i_3}) f^{i_4} \dots f^{i_p}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{p!}{\cancel{(p-1)!}} Asym[\frac{\cancel{(p-1)!}\,1!}{((p-1)+1)!} f^{i_1}\wedge f^{i_2} \dots \wedge f^{i_p}] = Asym[\dots] =$

$= f^{i_1}\wedge f^{i_2} \dots \wedge f^{i_p}$, ∎

(5/5) Определители и их св-ва

Опр $\exists \{x_1 \dots x_n\} \in X$ $(\dim X = n)$, $x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi^i_k e_i$

$\det[x_1 \dots x_n] \overset{def}{=} F^{1,2\dots n}(x_1 \dots x_n) = f^1\wedge f^2 \dots f^n(x_1, x_2 \dots x_n)$

где $\{f^i\}_{i=1}^n$ — базис, сопр $\{e_i\}_{i=1}^n\}$ (т.е. $\langle f^i, e_j\rangle = \delta^i_j$)

Лемма: $\det[x_1 x_2 \dots x_n] = \det\|\xi^i_k\|$, где $C = \|\xi^i_k\| = \begin{pmatrix} \xi^1_1 & \xi^1_n \\ \xi^n_1 & \xi^n_n \end{pmatrix}$

Д-во см б/з

Опр $\det\|\xi^i_k\| = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} \xi^1_{j_1} \xi^2_{j_2} \xi^3_{j_3} \dots \xi^n_{j_n}$ (#)

Свойства det

Опр $\exists \|\xi^i_k\| = C$, $C^T = \|\xi^{T\,i}_k\|$ — матрица трансп. к C

(1°) $\exists C_{[n\times n]}$ $\det C^T = \det C$

$\det C^T = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi^{T\,1}_{j_1} \xi^{T\,2}_{j_2} \dots \xi^{T\,n}_{j_n} =$

$= \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} \xi^{j_1}_1 \xi^{j_2}_2 \dots \xi^{j_n}_n =$; $(1, 2 \dots n) \xrightarrow[N<\infty]{N\text{ раз}} (2, 1, \dots n)$

$= \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} \xi \xi \dots \xi \dots = \det C$

(2°) $\det[x_1 .. x_i .. x_k .. x_n] = -\det[x_1 .. x_k .. x_i .. x_n]$

(g-во $F^{1,2..n}(x_1, x_2 .. x_n)$ — Антисим)

Если в опр. матр. поменять две (столб.) строки местами, то sign det изменится.

(3°) Условие $= 0$.

$\det[x_1 .. x_{i-1}, 0, x_{i+1} .. x_n] = 0$

$\det[x_1 .. x_i .. x_i .. x_n] = 0 \quad (-F = F \Rightarrow 0)$

~~det~~ $\exists \{x_1, x_2 .. x_n\}$ — ЛЗ набор $\quad \det[x_1, x_2 .. x_n] = 0$

(4°) Линейность det

$\det[x_1 .. \alpha x_i' + \beta x_i'' .. x_n] = \alpha \det[x_1 .. x_i' .. x_n] + \beta \det[x_1 .. x_i'' ..]$

(5°) Если к набору прибавить ЛК остальных, то опр. не изменится

(6°) $\det[x_1 x_2 .. x_n]$; $\exists\ x_j = \xi^k_j e_k + \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n} \xi^s_j e_s = \xi^k_j e_k + x_j'$ (k ш полное сумм.)

$\xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi\ \xi$

Тогда $\det[x_1 .. x_n] = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi^k_j (-1)^{|k-j|} \det[x_1' .. x_{j-1}', x_{j+1}' .. x_n']$

где $x_j' = \sum\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq k}} \xi^s_j e_s$

Кр в четв: 1. Система Гаусс
2. ПП (dim, $+$ $\dot{+}$ $\wedge$)
3. ЛФ.

27.12.13

Теорема: $X = L_1 + L_2$; $x_i = \xi_i^k e_k + \underbrace{\sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n-1} \xi_i^s e_s}_{x_i'}$

k - const

тогда $\det\{x_1, x_2 \ldots x_n\} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^k (-1)^{|k-j|} \det\{x_1' \ldots$

Δ

$\det\{x_1, x_2 \ldots x_n\} \overset{\det}{=} \{\xi_1^k e_k + x_1', \ldots, \xi_n^k e_k + x_n'\} =$
$= \xi_1^k \det\{e_k, x_2' \ldots x_n'\} + \xi_2^k \det\{x_1', e_k \ldots x_n'\} + \ldots + \xi_n^k \det\{x_1', x_2' \ldots e_k\}$.

j-ый член: $\xi_j^k \det\{x_1' \ldots \overset{j}{e_k} \ldots x_n'\} = \xi_j^k (-1)^{|k-j|} \det\{x_1' \ldots \overset{k}{e_k}, x_{j-1}', x_{j+1}' \ldots$

$(-1)^{|k-j|} \xi_j^k \underbrace{f^1 \wedge \ldots \wedge f^k \wedge \ldots \wedge f^n \{x_1' \ldots e_k}_{\delta_k^k} \ldots x_{j-1}', x_{j+1}' \ldots x_n'\} =$

нет f^k

$= (-1)^{|k-j|} \xi_j^k f^1 \wedge \ldots \wedge f^n \{x_1' \ldots x_{j-1}', x_{j+1}' \ldots x_n'\}$.

Опр Минором M_k^i, доп. к ξ_k^i матрицы $C = \|\xi_k^i\|$ наз. определитель C, пол. из исх. вычеркиванием i-строки и k-столбца

Опр Алг. дополнение ξ_k^i $A_k^i = (-1)^{i+k} \cdot M_k^i$

(5)16 Критерий ЛЗ набора векторов

Теорема Чтобы $\{x_1 \ldots x_p\}$ ЛП НиД $\forall U \in \Lambda_0^p$ $U(x_1 \ldots x_p) = 0$

Δ (Д) $\exists \{x_1 \ldots x_n\}$ — ЛЗ $\Rightarrow$ $\forall$ Asym формы $U(x_1 \ldots x_n) = 0$

(Д) $\Leftarrow$: $\exists$ $\forall U \in \Lambda^p$: $U\{x_1 \ldots x_p\} = 0$, но $\{x_1 \ldots x_p\}$ — ЛНЗ

$\measuredangle$ $L = \text{ЛО}\{x_1 \dots x_p\}$ — пп X, $\{x_1 \dots x_p, x_{p+1} \dots x_n\}$ — базис X
$\{y^1 y^2 \dots y^n\}$ — базис X^*

$\measuredangle$ $y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^p (x_1 \dots x_p) = \dots = y^1(x_1) \cdot y^2(x_2) \dots \wedge y^n(x_n) \neq 0 = 1$

NB для $\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\iff$, чтобы $F^{i_1 \dots i_p} = f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}(x_1 \dots x_p) = 0$

NB для $\{x_i\}_{i=1}^p$ — ЛЗ $\iff$, чтобы все det вида

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_2^{i_1} & \dots & \xi_p^{i_1} \\ \xi_1^{i_2} & \xi_2^{i_2} & \dots & \xi_p^{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i_p} & \xi_2^{i_p} & \dots & \xi_p^{i_p} \end{vmatrix} = 0$$

Опр $\exists C = \|\xi_k^i\|$ Минор типа „L" порядка r наз. число, опр. равенством:
$L_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$ = равно det матрицы на пересечении $i_1, i_2 \dots i_r$ строк и $j_1 \dots j_r$ столбцов

Опр Ранг C — наивысший порядок минора L, отл. от 0
$Rg\, \mathbb{O} = 0$

NB $L_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$ — базисн. минор, строки $i_1 \dots i_r$ — базисные, $j_1 \dots j_r$ — базисные столбцы

$\exists C_{[m \times n]}$ $\{C_1, C_2 \dots C_n\}$ $C_k = (\xi_k^1, \xi_k^2 \dots \xi_k^m)^T$
столбцы

Теорема: 1) $\dim \text{ЛО}\{C_1, C_2 \dots C_n\} = Rg\, C$
2) $\exists C_{j_1}, C_{j_2} \dots C_{j_r}$ — базисные столбцы,
Тогда $\forall C_i = \text{ЛК}\{C_{j_1}, C_{j_2} \dots C_{j_r}\}$
3) Все и для строк

$\measuredangle$ $\{C_{j_1}, C_{j_2} \dots C_{j_r}\}$ — мак ЛНЗ поднабор ЛО $\measuredangle$ $\boxed{Rg\, C = r?}$
$f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_r}(C_{j_1}, C_{j_2} \dots C_{j_r}) \neq 0$

$$\exists \begin{vmatrix} \xi_{j_1}^{i_1} & \xi_{j_2}^{i_1} & \dots & \xi_{j_r}^{i_1} \\ \xi_{j_1}^{i_2} & \xi_{j_2}^{i_2} & \dots & \xi_{j_r}^{i_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{j_1}^{i_r} & \xi_{j_2}^{i_r} & \dots & \xi_{j_r}^{i_r} \end{vmatrix} = L_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \neq 0$$

$\triangle$ $\{C_{s_1}; C_{s_2} \dots C_{s_k}\}$ — ЛЗ, $k > r \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall$ базис $f^{t_1} \wedge f^{t_2} \wedge \dots \wedge f^{t_k} (C_{s_1}; C_{s_2} \dots C_{s_k}) = 0$

$Rg\, C = r$

<u>Теорема</u>: Элементарные преобразов. стр/столб. C не меняют ранг C

(9|7) Теорема Крамера и Кронекера–Капелли

<u>Теорема 1</u> $\exists \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = \beta^i \; (i = 1, 2 \dots n)$ (*)

$\exists \{a_1, a_2 \dots a_n\}$ — столбцы $A = \|\alpha^i_k\|$

$a_k = \begin{pmatrix} \alpha^1_k \\ \alpha^2_k \\ \vdots \\ \alpha^n_k \end{pmatrix}$ // $\det A \neq 0$

Тогда решение (*) сущ., единственное, причем

$\xi^k = \frac{\Delta k}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, а $\Delta k = \{a_1 \dots a_{k-1}\, b\, a_{k+1} \dots a_n\}$.

Δ

1) $\det A \neq 0 \Rightarrow Rang\, A = n \Rightarrow \{a_1 \dots a_n\}$ — ЛНЗ — базис в $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{C}^n \} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall b \overset{!}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k a_k$

2) $\triangle \det\{a_1 \dots a_{k-1}, b, a_{k+1} \dots a_n\} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \det\{a_1 \dots a_{k-1}, \overset{a_j}{\smile} a_{k+1} \dots a_n\} \overset{j=k}{=}$

$= \xi^k \det\{a_1 \dots a_k \dots a_n\} \Rightarrow \Delta_k = \xi^k \Delta$

∇

<u>Теорема 2</u> (К-К)

$\exists \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = \beta^i \quad [m \times n] \quad (**)$

$A_{[m \times n]} = \|\alpha^i_k\|$, $b = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

$A_p = (A|b)$ — расш. матрица $A_p\, [m \times n]$

Для совм. (**) Н и Д $Rg\, A_p = Rg\, A$.

Δ $Rg\, A_p = Rg\, A \Leftrightarrow \dim ЛО\{a_1, a_2 \dots a_n\} = \dim ЛО\{a_1, a_2 \dots a_n, b\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \in ЛО\{a_1 \dots a_n\}$. ∇