Теория игр

Баиных Антон

Учебники: Петросян, Зенкевич Теория Игр (главы 1, 3)

Зачет, на 5 нужно знать все определения и теоремы (с доказ + учебник)
Домашек нет, лекции есть в интернете.

Классификация игр

1. Кооперация — безкоалиционные / кооперативные / коалиционные
2. Выигрыш — обычно одно число $\in \mathbb{R}$.
   — антагонистическая (суммарно 0)
   — ненулевая сумма (больше 0)
3. По характеру — динамические: закрытое поле или нормальная форма
   с неполн. информ. — игроки знают характер, но не ходы (покер, мафия) / шахматы
4. По числу стратегий — конечные / бесконечные

Антагон. игры в норм. форме

У игрока A ходы X, у другого Y. По сочетанию ходов (я) получаем $K(X,Y) = r$ — выигрыш. КЧ5 — $\{-1, 1\}$.
X ходы — одновременно ходят

$K: X \times Y \to \mathbb{R}$ функция выигрыша 1 игрока

$\Gamma(X, Y, K)$ — антагонистическая игра в нормальной форме
Если $|X|, |Y| < +\infty$, то игра представл. в матрич. ф-ме

$A = \| K(x_i, y_j) \|_{ij}$. Матриц A много (с точн. до перест. X), но это ни на что не влияет

$\Gamma'(X', Y', K')$ — подыгра ($X' \subset X$, $Y' \subset Y$, K' — сужение K)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I: $1 \to 0$, $2 \to 3$, $3 \to 0$ II: $1 \to -6$, $2 \to -3$, $3 \to -8$

$\underline{v} = \sup\limits_x \inf\limits_y K(x,y)$ — нижнее значение игры (3)
стратегия максиминная — выбор

$\overline{v} = \inf\limits_y \sup\limits_x K(x,y)$ — верхнее ... — тоже (3)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\overline{v} = 1$, $\underline{v} = 0$, $\underline{v} \le \overline{v}$ Всегда верно

Ситуация равновесия — кортеж стратегий, когда отклонение игрока i — ему хуже.

Th $\underline{v} \le \overline{v}$.

Δ

$K(x,y) \le \sup\limits_x K(x,y) \quad \forall x, y; \quad \forall y \quad \inf\limits_y K(x,y) \le \inf\limits_y \sup\limits_x K(x,y) = \overline{v}$

$\sup\limits_x \inf\limits_y K(x,y) \le \inf\limits_y \sup\limits_x K(x,y)$

∇

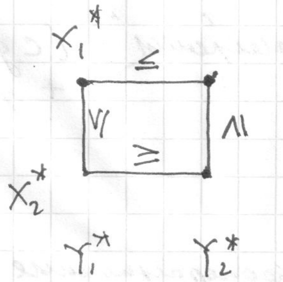
Def: (X^*, Y^*) — ситуация равновесия (equilibrium) — седлов. точка параболическ. гиперболоида

$K(X, y^*) \le K(X^*, Y^*) \le K(x^*, Y)$

Th $\exists\ (X_1^*, Y_1^*),\ (X_2^*, Y_2^*) \in Z(\Gamma)$ ← множество ситуаций равновесия

Тогда $(X_1^*, Y_2^*),\ (X_2^*, Y_1^*) \in Z(\Gamma)$
и $\forall i,j$ $K(X_i^*, Y_j^*)$ все равны.

Δ



Доказано))) Очев))))

Из того $K(X_1^*, Y_1^*) \le K(X_1^*, Y_2^*)$
но $K(X_1^*, Y_2) \le K(X_1, Y_2^*)$

$$K(X_1^*, Y_1^*) \le K(X_1^*, Y_2^*) \le K(X_2^*, Y_2^*) \dots <$$

∇

Th $\underline{v} = \max_x \inf_y (K(x,y)) = \min_x \sup_y (K(x,y)) = \overline{v} \iff (\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\Gamma)$

С max и достиг. $\overline{v}, \underline{v}$

Δ $\Leftarrow$

$(x^*, y^*) \in Z(\Gamma)$, $\quad K(x, y^*) \le K(x^*, y^*)$,

$\overline{v} = \inf_y \sup_x K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le \dots \underline{v}$

очевидно в 1 ход.

но $\overline{v} \ge \underline{v}$. $\Rightarrow$ $\overline{v} = \underline{v}$

из теоремы 1

∇

Δ $\Rightarrow$

$K(\bar{x}, \bar{y}) = \cancel{\max}\ \overline{v} = \inf_y \cancel{\sup} K(\bar{x}, y) \le K(\bar{x}, y)$

$K(\bar{x}, \bar{y}) = \underline{v} = \sup K(x, \bar{y}) \ge K(x, \bar{y})$

$K(\bar{x}, \bar{y}) \ge \inf K(\bar{x}, y) = \max_x \inf_y K(x,y) = \overline{v}$

$K(\bar{x}, \bar{y}) \le \exists\sup \dots$ —//— $= \underline{v}$

∇ $K(\bar{x}, \bar{y})\ \cancel{\Rightarrow}\ \sup_x K(x, \bar{y}) \ge \inf_y \sup_x K(x,y)$

Смешанное расширение

$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = 3, \quad \overline{v} = 5$

— играем много раз, оптимиз. среднее
— бросаем нечестную монетку 1 раз
— много игроков / партий за раз

Def X, Y — содержат распред. вероятностей на $\{1..n\}$

$\xi \in X$, $\eta \in Y$ — распределение / стратегии на $\{1..m\}$

ξ_i — вер-ти — распределение $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$

$K(\xi, \eta) = \sum\sum \xi_i \eta_j a_{ij} = \xi^T A \eta$, где A — матрица из K

Чистая стратегия: $[\xi_i = 1, \ \xi_j \underset{j \ne i}{=} 0]$

Ситуация равновесия: (x^*, y^*): $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$

(пример)

$$A = \begin{array}{c} \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\underline{v} = 0$
$\overline{v} = 1$

$K(x^*, y^*) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$K(\dots \text{произв } x, \eta) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta_1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot + \dots = \frac{1}{2}(\eta_1 + \dots) = \frac{1}{2}$

Th $(X^*, Y^*) \in Z(\Gamma_A)$ $\iff$ $\forall i,j$ $K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j)$

С смешан. расш. А

$K(x^* y^*) = \sum_i \xi_i \sum_j \eta_j a_{ij}$

$K(i, y^*) = \sum_j \eta_j a_{ij}$

Д. Необ.

$(\Rightarrow)$ $K(i, y^*) > K(x^*, y^*) \Rightarrow$ противоречие

Дост $(\Leftarrow)$ $\forall x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ $K(x, y^*) = \sum \xi_i K(i, y^*)$

$= \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \sum_i \xi_i \underbrace{K(i, y^*)} \le \sum \xi_i K(x^*, y^*) =$

$\sum \eta_j a_{ij} = \underbrace{\left(\sum \xi_i\right)}_{1} K(x^*, y^*)$

~~Ш~~ $\cancel{K(i, y^*)}$

▽

Проверка опт. стратегии за $O(mn)$

$\boxed{16.02.2017}$ Лекция про линейное прог. (ч.1, продолжение)

Задача:

$$\begin{cases} c^T x \longrightarrow \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \longrightarrow \max \\ \forall i \in \{1..n\}: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le b_i \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

"Каноннч. вид", если $(Ax = b)$

$$\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Похожие структ.:

$$\begin{cases} c^T x \rightarrow \min \quad (c \text{ replaced by } -c) \\ \forall x \quad x = x_1 - x_2, \; x_1, x_2 \ge 0 \\ a_i^T x = b_i \;\text{ или }\; a_i^T x \ge b_i, \; -a_i^T x \le -b_i \;\text{ или }\; a_i^T x \le b_i \end{cases}$$

Поиск кратч. пути в графе: d_s — d_i — … — d_t

$$\begin{cases} \forall uv \in E \quad d_v \le d_u + w_{uv} \\ d_s = 0 \end{cases}$$

Поток: $s \le SS \ge t$ $\quad |f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$

$$\begin{cases} \sum f_{sv} \rightarrow \max \\ f_{uv} = -f_{vu} \\ f_{uv} \le c_{uv} \\ \forall u \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{v \in V} f_{uv} = 0 \end{cases}$$

равенство входящего/выходящ.

Min cost поток:

$$\begin{cases} \sum_{uv \in E} d_{uv} f_{uv} \rightarrow \min \\ f_{uv} = -f_{vu} \\ f_{uv} \le c_{uv} \\ \sum_v f_{sv} = d \end{cases}$$

(либо решаем о макс потоке $\Rightarrow$ m-макс. и добавл. $|f(x)| \ge m$

Многопродуктовый поток

$s_i \longrightarrow t_i$ перевезти d_i

$$\begin{cases} f_i^{uv} = -f_i^{vu} \\ \sum_i f_i^{uv} \le c_{uv} \end{cases}$$

Метод внутр. точки

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \max \\ f_i(x) \ge 0 \end{cases}$$

Метод внешн. точки

$\psi(x) = f(x) + A \sum_i \theta(g_i(x))$

16.02.2017

Лин. программирование (Симплекс-метод)

Ст. форма $c^T x \to \max$ при $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_m \to \max$ $\quad \forall j = 1..m \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

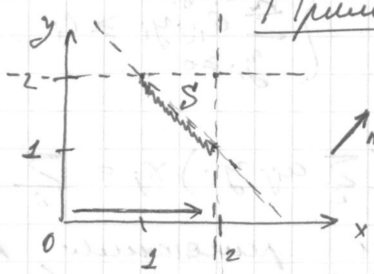
Каноническая форма

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ x_{n+j} = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \end{cases}$$

Basis

$x_i \ge 0 \quad \forall i = 1..n+m$

Пример



$x + y \to \max$

$y \le 2$, $x \le 2$, $x + y \le 2$ } Ст. форма

Каноническая

$z = x + y$

$\alpha = 2 - x$

$\beta = 2 - y$

$\gamma = 3 - x - y$

$x \in [0..2]$

Получим:

$$\begin{cases} z = 2 - \alpha + y \\ x = 2 - \alpha & y \in [..] \\ \beta = 2 - y & y \in [0..2] \\ \gamma = 1 + \alpha - y & y \in [0..1] \; (\alpha = 0) \end{cases}$$

$\alpha = 0, y = 0$

$y = 1 + \alpha - \gamma \Rightarrow$

$$\begin{cases} z = 3 - \gamma \\ x = 2 - \alpha + \gamma \\ \beta = 1 - \alpha + \gamma \\ y = 1 + \alpha - \gamma \end{cases}$$

— двигаемся по ребру S. Останов., потому что у z все коэф. отриц.

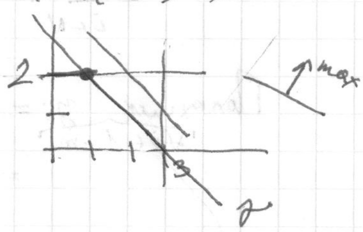
Если в этом примере задать $x \le 3$, $z = x + 2y$.

Подставим $\alpha = 3 - x$

$$\begin{cases} z = 3 - \alpha + 2y \\ x = 3 - \alpha \\ \beta = 2 - y \\ \gamma = 0 + \alpha - y \end{cases} \Rightarrow y = \alpha - \gamma \Rightarrow \begin{cases} z = 3 + \alpha - 2\gamma \\ x = 3 - \alpha \\ \beta = 2 - \alpha + \gamma \\ y = \alpha - \gamma \end{cases}$$

изменили y на '0'

$\alpha = 2 - \beta + \gamma$



$$\begin{cases} z = 5 - \beta - \gamma \\ x = 1 + \beta - \gamma \\ \alpha = 2 - \beta + \gamma \\ y = 2 - \beta \end{cases}$$

все, β/γ увел. не могут $\Rightarrow \beta = \gamma = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2$

Замена переменных — pivoting

Выбирать от балды — можно зациклиться

Bland's rule для выбора (мин. по строкам)

Работает за экспоненту на синтет. примерах

Simplex-метод:

```
while ∃j: c_j > 0   выбираем j:   (последовательно, по-разному)
    for i ∈ B:
        if a_ij > 0
            Δ_i ← b_i / a_ij
        else
            Δ_i ← ∞
    if min Δ_i = ∞ → неограничена
    else ∃l: Δ_l = min Δ_i
        выражаем x_i через x_l
        по-разному
```

?

Лемма: Выбор минимума $\Rightarrow$ в базисн. переменные всегда ≥ 0

Лемма: $\forall \alpha_i \; \beta_i \quad i = 1..n, \; \gamma$

$\forall x_1 .. x_n$

$$\sum \alpha_i x_i = \gamma + \sum \beta_i x_i$$

Тогда $\gamma = 0$, $\alpha_i = \beta_i$

$z = v + \sum c_j x_j \qquad z = v' + \sum c'_j x_j$

$x_i = b_i - \sum_j a_{ij} x_j \qquad x_i = b'_i - \sum a'_{ij} x_j$

$\forall x_j \; \sum c_j x_j = (v' - v) + \sum c'_j x_j$

-//- с a_{ij} -//-

Перебор всех базисн. перем. C^{n}_{n+m}

но в общем случае все лучше

$-x_0 \to \max$ Если $x_0 = [\max(-b_i)] = -\min(b_i)$, $x_i = 0 \ \forall i = 1..n$

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j - x_0 \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Если орп. задача решаема, то $x_0 = 0$ (без x_0)

Двойственность:

$$\begin{cases} \sum_m^n c_j x_j \to \max \\ \sum a_{ij} x_j \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_m^m b_i y_i \to \min \\ \sum a_{ij} y_i \ge c_j \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

1 Слабая двойственность $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ – решения, тогда $\sum c_i x_i \le \sum b_i y_i$

Δ

$$\sum_j c_j x_j \le \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} y_i\Big) x_j = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j\Big) y_i \le \sum_i b_i y_i$$

∇

=> обе задачи решаемы, либо строго одна неограничена

=> если целевые значения совпали, то они оптимальны

=> если $\exists j$, что $c_j < \sum_i a_{ij} y_i$ и совпадают знач., то $x_j = 0$. (т.о) $\sum (c_j - \sum_i a_{ij} y_i) x_j = 0$

2.03.2017.

Симплекс – мет. ест. за C_{n+m}^n шагов. $z = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i$ (из симпл. метода)

$\forall j \in B$ $x_j = b_j' - \sum_{i \in N} a_{ij}' x_i$. После остановки $c_i' \le 0$. $\forall i \in B$

$$z = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i + \underbrace{\sum_{i \in B} c_i' x_i}_{0} = v + \sum_{i \in B \cup N} c_i' x_i$$

Положим $y_i = -c_{n+i}'$. $\forall i \in 1..m$ $\forall x$ $\sum_{i=1}^n c_i x_i = v + \sum_{i=1}^{n+m} c_i' x_i = v + \sum_1^n + \sum_{1+n}^{n+m} =$

$$= v + \sum_{i=1}^n c_i' x_i + \sum_{j=1}^m (-y_j)\Big(b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\Big) =$$

$$= \Big(v - \sum_{j=1}^m y_j b_j\Big) + \sum_{i=1}^n \Big(c_i' + \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j\Big) x_i$$

Поскольку это раб. для всех x, то и для $\vec{x} = 0$.

Откуда

$$v = \sum_{j=1}^m y_j b_j. \quad c_i = c_i' + \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \le \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$$

$y_i = -c_{i+m}' \Rightarrow y_i \ge 0.$ + слабая двойственность

~ Вот получили решение двойственной.

Утв. о дополн. нежесткости: если в слаб. двойств. '=', то $\forall i$ $\left[\begin{array}{l} c_i = \sum^m a_{ij} y_j \\ x_i = 0 \end{array}\right.$

Если n мало (3d), но m велико, то есть алгор. решения за $O(n!\,m)$

Обратимся к теории игр:

$v \to \max$ – выигрыш. Пусть все коэф. матр. ≥ 0, тогда

$$\forall i \begin{cases} \sum a_{ij} x_i \ge v \\ \sum x_i = 1 \end{cases}, \ x_i \ge 0$$

(v – переменная (плохо)) $\theta = \frac{1}{v}$, $x_i' = x_i / v$.

Тогда:

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_i' \geq 1 \\ \sum x_i' = \theta \\ x_i' \geq 0, \quad \theta \to \min \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i' \to \min \\ \sum a_{ij} x_i' \geq 1 \\ x_i' \geq 0 \end{cases} (\Delta)$$

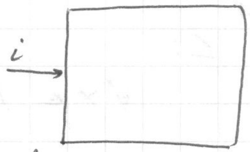
— это уже задача лин. программы

Двойственная: $\begin{cases} \sum y_j' \to \max \\ \sum a_{ij} y_j' \leq 1 \\ y_j' \geq 0 \end{cases}$ $(\square)$

Есть решение (всегда) $\Rightarrow$ есть оптимальное

Преобр. двойственную:

$\exists\, y_j = \frac{y_j'}{\theta} \Rightarrow \sum y_j = 1. \quad \sum a_{ij} y_j \leq \frac{1}{\theta} = v$



Получим: $K(i, \bar{y}) \leq v \leq K(\bar{x}, j)$ ← По теореме о доп. нежесткости: $\begin{cases} x_i = 0 \\ \sum\limits_j a_{ij} y_j = v \end{cases}$

И дальше →

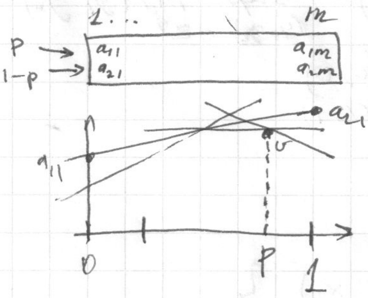
Имеем много оптимальную.

$$K(x^*, y) = \sum_i^n \sum_j^m a_{ij} x_i^* y_j = \frac{1}{\theta} \sum_{j=1} \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \right) y_j \overset{(\Delta)}{\geq} \underbrace{\frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^m y_j}_{v} = \frac{1}{\theta}$$

Лемма о масштабе: можно:

- умнож. A на $\alpha > 0$
- добавить βI к A

Частные случаи:



У одного игрока 2 вар. хода

— ищем max по x нижнего convex hull'а

$\begin{cases} v = q a_{1m} + (1-q) a_{1e} \\ v = q a_{2m} + (1-q) a_{2e} \end{cases}$ — для второго игрока

9.03.2017 Неантагонистические игры

Опр $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i=1}^N, \{H_i\})$, где $H_i : \prod X_i \to \mathbb{R}$

$\{X_i\}$ — мн-во страт., $\{H_i\}$ ← функции выигрыша

В антагон. $H_1 = -H_2 \Rightarrow$ ант $\subset$ неант.

$\forall i \ \|X_i\| < \infty \Rightarrow$ конечная неантаг. игра

$\|N\| = 2 \Rightarrow$ удобно

$\Rightarrow$ биматричная игра

Пример Семейный спор
$\begin{bmatrix} (4,1) & (0,0) \\ (0,0) & \boxed{(1,4)} \end{bmatrix}$

Дилемма (ш?) заключенного
$\begin{bmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & \boxed{(1,1)} \end{bmatrix}$

$\square$ — опт, $\{\}$ — по Парето

Опр Сит. равновесия по Нэшу

$x^* = (\underset{\in X_1}{x_1^*}, \underset{\in X_2}{x_2^*}, \dots x_n^*) \quad \forall i, \bar{x}_i \quad H_i(x^*) \geq H_i(x^* \| \bar{x}_i)$

Опр X^* – сильно равновесная, если (никакой группе не выг. откл)

$$\forall S \subset N,\ X_S \in \prod_{i \in S} X_i \quad \sum_{i \in S} H_i(X^*) \geq \sum H_i(X^* \| H_S)$$

Равновесие по Нэшу необх. для сильного равновесия.

Опр $\bar{X}$ – оптимально по Парето, $(\bar{x} \in X_P)$, если

$$\nexists x \in \prod X_i : \quad \forall i \in N \quad H_i(x) \geq H_i(\bar{x}) \ \&$$
$$\exists j \in N \quad H_j(x) > H_j(\bar{x})$$

$\simeq$

$$\forall x \in \prod x_i : \quad \exists i \in N \quad H_i(x) < H_i(\bar{x}) \ \vee$$
$$\forall j \in N \quad H_j(x) \leq H_j(\bar{x})$$

нет стратегий, которые строго нас доминируют

Лемма: Сильная равновесность $\Rightarrow$ опт. по Парето

Опр Равновесие по Штакельбергу

$$Z^1 = \{(x_1, x_2) \mid \overset{\forall x_2}{H_1}(x_1, x_2) = \sup_{y_1} H_1(y_1, x_2)\}$$ самые выгодные для (1)
$$Z^2 = \{(x_1, x_2) \mid H_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2} H_2(x_1, y_2)\}$$

$$\left(Z^1(x_2) = \{x_1 \mid H_1(x_1, x_2) \to \max\}\right)$$

(x_1, x_2) – i-равновесное по Штакельбергу, если $j \neq i$ и $(x_1, x_2) \in Z^j$, $\bar{H}_i = H_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in Z^j} H_i(y_1, y_2)$

В семейном споре: $Z^1 = \{(0,0), (1,1)\}$ 1-равн. – $(0,0)$
$Z^2 = \{(1,1), (0,0)\}$ 2-равн – $(1,1)$

В дилемме закл: $(1,1)$ – оба равн. по Шт.

Лемма: $Z(\Gamma) = Z^1 \cap Z^2$

△
$$(x_1, x_2) \in Z(\Gamma) \overset{def}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} \forall x_1' & H_1(x_1', x_2) \leq H_1(x_1, x_2) \\ \forall x_2' & H_2(x_1, x_2') \leq H_2(x_1, x_2) \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} H(x_1, x_2) = \sup(x_1', x_2) \\ H(x_1, x_2) = \sup(x_1, x_2') \end{matrix} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in Z^1 \cap Z^2$$

▽

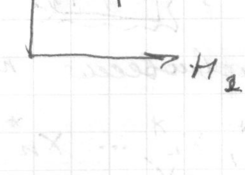
Опр Борьба за лидерство

$$\nexists (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \quad \forall i \quad \bar{H}_i \leq H_i(x_1, x_2)$$

Теорема $\exists (x_1, x_2) \in X_P \cap Z(\Gamma)$ (опт. по Нэшу / Парето)
$(y_1, y_2) \in X_P \cap Z(\Gamma)$
$$(H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2)) \neq (H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2))$$

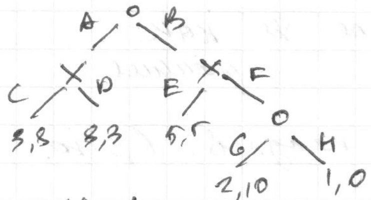
$\Rightarrow$ имеет место борьба за лидерство

△
$$H_i(x_1, x_2) \leq \bar{H}_i \leq H_i(z_1, z_2)$$
$$H_i(y_1, y_2) \underbrace{\leq}_{\in Z(\Gamma) \Rightarrow \in Z^1 \cap Z^2} \bar{H}_i \leq H_i(z_1, z_2)$$



▽

Чистые страт. — $\forall$ узла выбор 'куда идти'. Чистые стратегии можно преобразовать в матрицу.



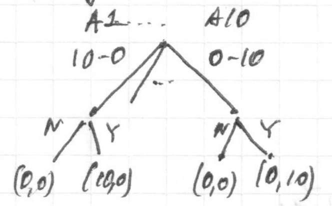
Несколько сит. равновесия
C B EH
A G CF
A H CF

Nash equilibrium — как по Нэшу раньше (по Нэшу).
Subgame perfect equilibrium — такое равновесие, что оно верно в каждом поддереве.

SPE в этом случае — AG CF

SPE строится вглубь индукцией с конца. (backward induction)

Пусть мы теперь делим 10 яблок:



Равновесие: A2, B10, B21 ⋯ B10Z

Slavin Roth 1998
Эксперимент про деление денег в Словакии

. . . . .

Многоходовки: $r_j^{(i)}$ — выигрыш i-го игрока в j-й игре.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{e\le k} \frac{r_e^{(i)}}{k}$$ — average reward

$\exists \beta \in [0,1)$ $\quad \sum_j \beta^j r_j^{(i)}$ — discounted reward

$(1-\beta)\cdot 100\%$ — сколько % ресурсов потеряется за 1 итерацию
β — вер-ть продолжить игру

Эвристики:

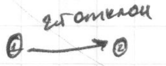
$w(a) = \#$ раз оппонент выбрал a

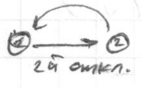
$$S(a) = \frac{w(a)}{\sum_{a\in A} w(a)}$$ Теорема: если это сх., то это nash equilib.
Берем макс. по матожид. выигрыша.

Всегда сходится в антагонистических играх.

В дилемме заключ. старт в (0,0). Другой ход наз. trigger'ом, потому что он изменяет игру.

Trigger   Tit-for-tat — наказываем несколько раз





n игроков. $\quad r \in \mathbb{R}^n$

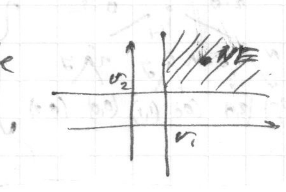
$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad v_i = \min_{s\in \prod_{j\ne i} X_j} \max_{x\in X_i} u_i(s \cup x)$

r Enforceable $\iff r_i \ge v_i$

r feasible $\iff r_i = \sum_{a\in \prod X_i} \alpha_a u_i(a)$, $\alpha_a \in \mathbb{Q}^+$, $\sum \alpha_a = 1$

Theorem Folk (фольклор)

1) $\exists$ r — выигрыш в NE (average reward) $\Rightarrow$ r — enforceable
2) r — feasible + enf $\Rightarrow$ $\exists$ NE (av)



▷

1. ∃ v-выигрыш в NE^{ar}, тогда покажем enforceable очевидно, если ему не платят $v < \sigma$, то можно отклониться сразу и будет как мин. σ ⇒ это не было NE

2. Если можем найти дроби, то приведем к общему знаменателю. $d_a = \frac{d'_a}{d_q}$, будем ходить с такими вер-ми. enforceable нужно для наказания. — если кто-то отклоняется, все должны его наказать (до σ) (или в финал. равнов.)

▽

В семейном споре догов. ходить через раз $\begin{pmatrix} 1,3 & 0,0 \\ 0,0 & 3,1 \end{pmatrix}$

Наказание для отклонения — ходить изо кравитки

Рассмотрим discounted reward, и дил. закл с такой же страт:

$\forall \beta$ $NE^{pr} = 5 + \beta 5 + \beta^2 5 + \dots = \Sigma = \frac{5}{1-\beta}$

1 шаг 2ой отклонился.

$I: 5 + 0 \cdot \beta + 1 \cdot \beta^2 + \dots = 5 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$

$II: 5 + 10 \cdot \beta + \dots = 5 + 10\beta + \frac{\beta^3}{1-\beta}$

Хотим $\frac{5}{1-\beta} < 5 + 10\beta + \frac{\beta^3}{1-\beta}$ $\Rightarrow \beta < \frac{5}{9}$

Распределение награды

N — множество игроков

$\sigma: 2^N \to \mathbb{R}$ — объясн. выигрыш   Как делить?

Ex 1 $\sigma(S) = |S|$

Ex 2 $\sigma(N) = 1$, $\sigma(S \subset N) = 0$

Вектор Шепли. $\Phi: \sigma \to \mathbb{R}^{|N|}$

Свойства: 1. Линейность $\Phi(\sigma + u) = \Phi(\sigma) + \Phi(u)$, $\Phi(\alpha\sigma) = \alpha\Phi(\sigma)$

2. Симметричность не зависит от номера

3. Болвану — 0

$\exists i: \forall S \subset N \setminus \{i\}$ $\sigma(S \cup \{i\}) = \sigma(S)$ $\Rightarrow \Phi_i(\sigma) = 0$.

4. $\sum_i \Phi_i(\sigma) = \sigma(N)$ (эффективность)

Тогда: $\Phi_i(\sigma) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} \left(\sigma(S \cup \{i\}) - \sigma(S)\right)$

$|S|$ ← $|N| - |S| - 1$ →

S o

Голосование

O — мн-во альтернатив

N — мн-во игроков

i: $o_{i_1} \succ o_{i_2} \succ \dots \succ o_{i_n}$

Пример:

499: $A \succ B \succ C$

3: $B \succ C \succ A$

498: $C \succ B \succ A$

Хотим построить

- $\succ_w$: $O_1 \succ_w \dots \succ_w O_n$
- победителя

Большинство: A

Condorcet rule: B (501 ч. считают что $B \succ A$)

Устранение посл.: вылетает $B \Rightarrow C$

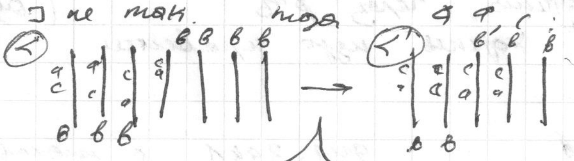
Th Arrow (Эрроу)

0. $|O| > 2$ (больше 2 альт.)
1. Эффективность по Парето: $\forall i \; O_1 \succ_i O_2 \Rightarrow O_1 \succ_\omega O_2$
2. Независимость от посторонних альтернатив:
   $\forall \succ, \succ' : \forall i \; a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b$
   тогда $a \succ_\omega b \Leftrightarrow a \succ'_\omega b$

$(1, 2) \Rightarrow \exists i : \succ_i = \succ_\omega$ (диктатор)
$\forall a\, b \in O, \; a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ_\omega b$.

Δ

1. $\forall b \in O$. b — либо первый, либо последний.
   тогда $b \succ_\omega$ b тоже либо 1 либо посл.
   Δ $\exists$ не так. тогда $\exists a, c$: $a \succ_\omega b \succ_\omega c$

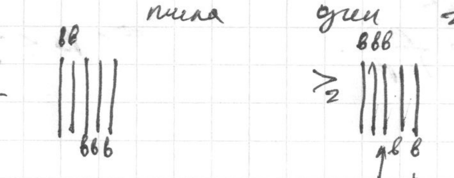


переставили $c \succ_i a$

По парето (1) $c \succ_\omega a$.
Но $a \succ'_\omega b \succ'_\omega c$ по (2)
но $a \prec'_\omega c$...

∇

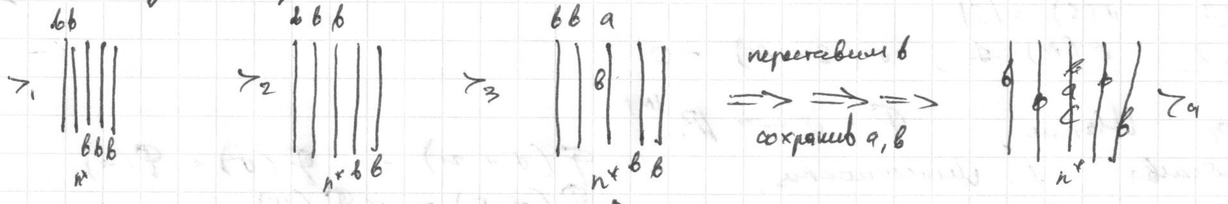
2. $\exists n^*$ — центральный элемент для b.
   тогда один голос меняет b наверх.



Просто перемещ. по очереди 'b' вверх, в какой-то шаг...

b внизу — b n^* вверху

3. n^* — диктатор $\forall a\, c \neq b$.



переставим b сохранив a, b

$a \succ_1 b$ — переставили b n^* a, b но ~~все eще~~ b ~~вверху~~. внизу как в $\succ_1$ $a \succ_1 b$ — $a \succ_4 c$

Отн. b и c в $\succ_2$ и $\succ_3$ один. $b \succ^2_\omega c$. тогда $b \succ^4_\omega c$ ~~в~~ по (2)
Отсюда $a \succ^3_\omega c$. Но по посф. $\succ_4$ $a \succ^4_\omega c$

4. n^* — диктатор для b. Просто, но я не понял.

∇

Волков М. M3438 #4 #6

(4) Раньше $\Gamma = (X, Y, K \sim A)$ $X \cong \{0 .. n\}$
Теперь $Y \cong \{0 .. m\}$
$\Gamma_A = (X, Y :: (\xi_1 \cdots \xi_{len(x)}), A)$
where $\sum \xi_i = 1$. Иу распределение, словом.

Переопределим $K(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \xi^T A \eta$
Чистые стратегии: $[\xi_i = 1, \ \xi_{j \neq i} = 0]$

Равнов. в смеш: $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$

Теорема о чистых стратегиях:
$(X^*, Y^*) \in Z(\Gamma_A) \iff \forall i, j \quad K(i, y^*) \le K(X^*, Y^*) \le K(X^*, j)$

Δ

($\Rightarrow$) $\nmid: \exists K(i, y^*) > K(x^*, y^*) \Rightarrow$ иу это не равнов.

($\Leftarrow$) $\forall x \quad K(x, y^*) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \sum_i \xi_i \underbrace{\sum_j \eta_j a_{ij}}_{\text{это } K(i, y^*)} \le$

$\le \underbrace{\sum_i \xi_i}_{1} \underbrace{K(x^*, y^*)}_{\sum_j \sum_k} = K(x^* y^*) \cdot 1$

Аналог. в др. сторону.

∇

за $O(mn)$ можно проверить. Для чистых стр. K счит. за n или m, для полных за $O(nm)$

(6) Теперь у каждого свое ф-е выигрыша.

$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i=1}^N, \{H_i\}), \quad H_i : \prod X_i \to \mathbb{R}$

Пример $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $[1/2 \ \ 1/4 \ \ 1/4]$

$\forall i \ \|X_i\| < \infty \Rightarrow$ конечная неантаг. игра
$\|N\| = 2 \Rightarrow$ биматричная $(A = H_1, B = H_2)$

Классические биматр. игры: $\begin{pmatrix} 4,1 & 0 \\ 6 & 1,4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5,5 & 0,10 \\ 10,0 & (1,1) \end{pmatrix}$

- Оптим. по Нэшу: x^* опт., если $\forall i, \overline{x_i} \quad H_i(x^*) \ge H_i(x^* \| \overline{x_i})$
- Строгое равновесие: $\forall S \subset N, X_s \in \prod_{i \in S} Y_i, \sum_{i \in S} H_i(x^*) \ge \sum H_i(x^* \| H_s)$
  очевидно неопт по Нэшу $\Rightarrow$ неопт. во см. стр. равновесия.
- X_p – мн-во стр. опт. по Парето. $\overline{x} \in X_p$ если
  $\nexists x \in \prod X_i \quad \forall i \in N \ H_i(x) \ge H_i(\overline{x}) \ \& \ \exists j \in N \ H_j(x) > H_j(\overline{x})$

Лемма: стр. равнов $\Rightarrow$ опт. по Парето
Δ $\overline{x}$ – не опт. по Парето, x' его доминирует
иу тогда отклонятся все сразу туда.
∇

(лемма о смесях) $\theta = \frac{1}{v}$, $x_i' = \frac{x_i}{v}$

$$\forall i \begin{cases} \sum a_{ij} x_i \geq v \\ x_i \geq 0 \quad \forall j \\ \sum x_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_{ij} x_i' \geq 1 \\ \sum x_i' = \theta \longrightarrow \min \\ x_i \geq 0 \quad \theta \longrightarrow \min \end{cases} \quad (\Delta)$$

Интуитивно

Вот задача ЛП, решим, сведем к двойств.

$$\begin{cases} y_i' \longrightarrow \max \\ \sum a_{ij} y_i' \leq 1 \\ y_j \geq 0 \end{cases} \qquad y_j = \frac{y_j'}{\theta} \Rightarrow \sum y_j = 1$$

$$\sum a_{ij} y_j \leq \frac{1}{\theta} = v$$

Решение есть $\Rightarrow$ оно одинаковое и оптим.

По доп. нежесткости

$$v = \sum a_{ij} y_j \quad K(x^*, y) = \sum a_{ij} x_i^* y_j \overset{(\Delta)}{=}$$

$$= \frac{1}{\theta} \sum_j^m \left(\sum_i^n a_{ij} x_i^*\right) y_j \geq \frac{1}{\theta} \underbrace{\sum y_j}_{1} = v$$

Аналогично для двойств.

$$K(x, y^*) \leq v$$

Теорема (x_1, x_2) — ~~неорек~~ равновесие (по Нэшу)

$\forall i \quad H_1(x_1, x_2) \geq H_1(i, x_2)$ $\quad\Delta$ Также же как раньше ∇

$\forall j \quad H_2(x_1, x_2) \geq H_2(x_1, j)$

Спектр смеш. страт. — то, что входит с ненулев. вер-ю.

Теорема $\Gamma(A,B)$ — биматричная, A, B — невырожд.

$\exists$ вполне смеш. (спектр полон) ситуация равновесие

$\Rightarrow$ она единственна,

$x = v_2 u^T B^{-1}$, $y = v_1 A^{-1} u$ } распр. вер-тей ; и обр. $x, y \geq 0 \Rightarrow$ сит. равн. вполне смеш.

$v_1 = 1/(u A^{-1} u) \in \mathbb{R}$

$v_2 = 1/(u B^{-1} u) \in \mathbb{R}$ $\quad$ u — един. вектор

Δ

($\Rightarrow$) Пусть (x, y) — вп. смеш. сит. равн.

$\forall i \quad a_i y = v_1 = x^T A y$

$\forall j \quad x^T b_j = v_2 = x^T B y$

$\Rightarrow \quad Ay = v_1 u \quad \Rightarrow \quad y = A^{-1} v_1 u = v_1 A^{-1} u$

$x^T B = v_2 u^T \quad\quad x^T = v_2 u^T B^{-1}$

$u^T y = 1 = v_1 u^T A^{-1} u \Rightarrow v_1 = 1 / u^T A^{-1} u$

$v_2 = 1 / u^T B^{-1} u$

($\Leftarrow$)

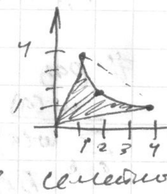
получили

$$x = \frac{(B^T)^{-1} u}{u^T B^{-1} u} \qquad 1.\ \text{Сумма } x = 1.$$

$$y = \frac{A^{-1} u}{u^T A^{-1} u} \qquad 2.\ \text{аналогично разворачиваем } (\Rightarrow) \text{ назад.}$$

∇

Совместные смешанные стратегии



$H_i(\mu) = \sum_{j,k} \mu_{jk} H_i(j,k)$ Например для семейного спора $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

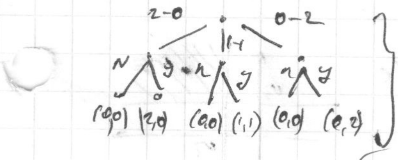
Опр μ^* — сит. равновесие, если

$\forall i, i' \quad \sum_j a_{ij} \mu^*(j|i) \geq \sum_j a_{i'j} \mu^*(j|i')$ $\quad\Delta$ Жонглирование и рукомахание

$\forall j, j' \quad \sum_i a_{ij} \mu^*(i|j) \geq \sum_i a_{ij'} \mu^*(i|j')$ $\quad\nabla$

16.03.2017 Последняя лекция. Extensive form.

Игроки ходят по очереди. Ход игры представляется случаем в дереве



} игра в деление яблок

Расшир. форма игры — $\langle N, A, H, Z, \mathcal{X}, \rho, \sigma, u \rangle$ + дерево

игроки, действ., верш., листья

$\mathcal{X}: H \to 2^A$

$\rho: H \to N$ кто ходит

$\sigma: H \times A \to H \cup Z$

$u: Z \to \mathbb{R}^{|N|}$