Доронов

Лосицкий - Соболев
краткий курс
функана

1. Векторные пространства / Метрические пространства

О. X $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$

ρ - метрика, если:

1) $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Нужна для предела

О $x = \lim x_n \Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0$

О Хаусдорф, тополог. пр-во (ТП) $\to$ пара (X, τ), $\tau = \{G \subset X\}$

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) $G_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$ ($\alpha \in \mathfrak{A}$ (любое мн. инд.))
3) $G_1 \dots G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$

О $x = \lim x_n$ $\forall G \in \tau : x \in G$, $\exists N : \forall n > N$, $x_n \in G$

G - откр в τ

$F = X \setminus G$ - замкнутое

О B_N - откр. шар $= \{x : \rho(x,a) < N\}$

$\tau = \{\bigcup B_N(a)\}$

У $b \in B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2) \Rightarrow \exists r > 0\ B_r(b) \subset (B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2))$

В этом смысле метр. пр-ва оказываются частным случаем топологических.

П $\mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$ МП

$\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \overset{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

плохая метрика

$\alpha \bar{x} = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$

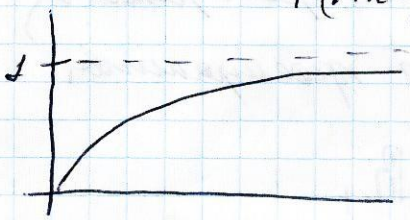
$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots)$

$\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = ?$ $\mathbb{R}^n$ $\bar{x}_m \to \bar{x} \Leftrightarrow \forall j = 1 \dots n$ $x_j^{(m)} \to x_j$ ← покоорд. сх.

$\mathbb{R}^\infty$: $\bar{x}_m \to \bar{x} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall j = 1,2,3,\dots \quad x_j^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_j$

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) \overset{def}{=} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$$ — метрика Урысона

$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \geq 0 \qquad \varphi(|x_n - y_n|)$



это $\boxed{\text{Упр}}$ проверить

$\varphi(t_1+t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$

$\rho(\bar{x}_m, \bar{x}) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \Longleftrightarrow x_j^{(m)} \to x_j \quad \forall j$ $\boxed{\text{Упр}}$

Таким образом $\mathbb{R}^\infty$ метризуемо.

$\underline{\Pi}$ X, $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

$x_m \to x$, $\varepsilon = 1/2$, $\exists M: \forall m > M \Rightarrow \rho(x_m, x) < \frac{1}{2}$

$\Downarrow \rho(x_m, x) = 0$

$\Rightarrow x_m = x$

В такой метрике сх. только пост., стабилизирующиеся после некоторого эл-та (стационарные)

$\underline{\text{О}}$ (X,τ) $\forall A \subset X$ $\quad \mathrm{Int}A \overset{def}{=} \bigcup_{(G\subset A)} G$ - отр

$\mathrm{Cl}A \overset{def}{=} \bigcap_{(F\supset A)} F$ - замкн

границы: $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Cl}A \setminus \mathrm{Int}A$.

Заметим, что по аксиомам топологии $\forall A$ $\mathrm{Int}A$ - отр, $\mathrm{Cl}A$ - замкн.

Операцию Cl можно конструктивно описать:

$$\rho(x,A) \overset{def}{=} \inf_{a\in A} \rho(x,a), \quad \rho(A,B) \overset{def}{=} \inf_{\substack{a\in A \\ b\in B}} \rho(a,b)$$

$\rho(x,A) =: f(x), \quad x \in X$

Утв. x - непр. на X

Д

$\forall x,y \in X$: $\quad f(x) = \rho(x,A) \underset{\forall a\in A}{\leq} \rho(x,a) \leq \rho(x,y) + \rho(y,a)$ неравенств. Д

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A: \rho(y, a_\varepsilon) < \rho(y,A) + \varepsilon = f(y) + \varepsilon$

$f(x) < f(y) + \varepsilon + \rho(x,y); \quad \varepsilon \to 0$

по симметричности

$\begin{cases} f(x) \leq f(y) + \rho(x,y) \\ f(y) \leq f(x) + \rho(x,y) \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$

Утв $x \in Cl \iff \rho(x, A) = 0$

Δ

$\triangleleft$ метр. пр-ва с точки зрения отделимости мн-в бр от бр. отдельными мн-вами

$x \neq y \quad r = \rho(x,y) > 0$

$B(x), B(y)$
$r/3 \quad r/3$

Выполнена аксиома Хаусдорфа

Теорема любое МП — нормальное пространство.

$\forall F_1, F_2 \in X \ (F_1 \cap F_2 = \varnothing)$ замкн.

$\exists$ откр непересек. $G_1 G_2$, что $F_i \subset G_i \ i=1,2$

Δ

$g(x) = \dfrac{\rho(x, F_1)}{\rho(x,F_1) + \rho(x,F_2)}$ Из пр. утв. понятно, что ф-я корректно определена

$x \in F_1, \ Cl F_1 = F_1, \ \rho(x, F_1) = 0 \quad g(x) = 0$

$x \in F_2, \ g(x) = 1$

$(-\infty, 1/3)$; $(2/3, +\infty)$ отрезки откр.; $G_1 = g^{-1}(-\infty, 1/3)$

$G_2 = g^{-1}(2/3, +\infty)$

Тогда G_1 G_2 — требуемые откр. мн-ва.

21.09.2015

Опр МП - полное $\rho(x_n, x_m) \to 0 \Rightarrow \exists x = \lim x_n$

В Полным МП реализуется принцип "влож. шаров"

Теорема X - полное МП, $\overline{V}_{r_n}$: $V_{r_{n+1}} \subset V_{r_n}$, $r_n \to 0$ система замкн. шаров

Тогда $\bigcap_n \overline{V}_{r_n} = \{a\}$

Δ

$\exists b_n$ - центр $\overline{V}_{r_n}$ шаров, тогда $m \geq n \ b_m \in \overline{V}_{r_n}$

Тогда $\rho(b_m, b_n) \leq r_n \ \forall m \geq n \Rightarrow \rho(b_m, b_n) \to 0$ по усл.

Тогда по полноте МП $\exists a = \lim b_n$

Очевидно, что $a \in \bigcap r_n \ \forall n$ и точка - единственная.
$\in$ в силу замкнутости шаров

∇

Бэр: (X,τ) ТП, $A \subset X$, $\tau_A = \{G \cap A, G \in \tau\}$

Стандартно, индуц. на A

<u>Опр</u> A всюду плотно в X,

или X – МП, $\mathrm{Cl}A = X$

$A \subset X$

A нигде не плотно, если $\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}A = \varnothing$

Легко понять, что в МП нигде не плотности

значит $\forall$ шара V $\exists V' \subset V$, в V' нет точек мн-ва A.

непустой

Пример: $\mathrm{Int}\,\mathbb{R} = \varnothing$

(все точки из $\mathbb{R}$ выкинем, нельзя вырезать непр. мн-во)

<u>О</u> X – мн-во 1 категории по Бэру, если его можно записать в вид б.г.с. объед. X_n, $\forall i$ X_i нигде не плотно в X

<u>О</u> Любой другой X – мн-во 2 категории

<u>Т</u> Бэра о категориях

Полное МП является мн-вом 2 категории в себ.

Δ

Следствие: полное МП без изол. точек несчетно.

$\exists X$ – 1 категории, тогда $X = \bigcup X_n$, X_n нигде не плотно в X

$\forall \overline{V}$ X_1 $\overline{V}_1 \subset \overline{V}$, $\overline{V}_1 \cap X_1 \neq \varnothing$

X_2 $\overline{V}_2 \subset \overline{V}_1$: $\overline{V}_2 \cap X_2 \neq 0$, $r_2 < \frac{r_1}{2}$

⋮

далее по индукции получаем $\{V_i\}$, $r(V_i) \to 0$,

тогда $a = \bigcap \overline{V}_i$, но $X = \bigcup X_n$,

тогда $\exists N_0$, что $a \in X_{N_0}$, получаем $X_{N_0} \cap \overline{V}_{N_0} = \varnothing$

$\to\leftarrow$ $a \in \overline{V}_{N_0}$.

∇

Δ (Следствие)

По усл. нету изол. точ., отсюда каждая точка нигде не плотна в нем, тогда у него 1 категория, что противоречит теореме Бэра

∇

Опр 1) K – замкнутое мн-во ($K = \overline{K}$),

2) $x_n \in K$ $\exists n_1 < n_2 < \dots$, x_{n_j} – сх. в K (в метрике ρ)

1 & 2 => Компакт

2 => Предкомпакт.

Т. Хаусдорфа

X – полное МП, ~~тогда~~ $K \subseteq X$, K замкн.

K компактно $\Longleftrightarrow$ K вполне ограничено.

($\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_1 \dots a_n \in X$, что $\forall b \in K$ $\exists a_i$, $\rho(b, a_i) < \varepsilon$)

конечная ε-сеть для K

Δ

1. $\exists K$ вполне огр. (!) $x_n \in K$, то можно построить $\exists x_n$; $\longrightarrow$ Хотим $\to n_1 < n_2 < \dots <$, что x_{n_k} сходится

Выберем последовательность $\varepsilon_k \to 0$

- $\triangleleft \varepsilon_1$; по вполне огр. строим кон. ε_1-сеть, тогда из ее опред. ясно, что и:

  K покрыто кон. сист. замкн. шаров $\overline{V_j}$ с рад. ε_1.

  $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \overline{V_j}$

Шаров конечн. мн-во, тогда в каком-то ∞-много эл-тов x_n; $\exists$ такой шар – $\overline{V_{j_0}}$

$K_1 \supseteq \overline{V_{j_0}} \cap K$ – вполне огр. $\quad \operatorname{diam} K_1 \le 2\varepsilon_1$

- $\triangleleft \varepsilon_2$ $\quad K_1 \subset \bigcup_{j=1}^{m} \overline{V_j'}$ радиуса ε_2

  $K_2 = \overline{V_{j_0}'} \cap K_1 \qquad \operatorname{diam} K_2 \le 2\varepsilon_2$.

- и так далее

Отсюда $\{K_i\}$ – система вл.ж. замкн. мн-в $\operatorname{diam} K_n \le 2\varepsilon_n$

В силу полноты пр-ва $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \ne 0$

Ну и выберем подпослед-ть.

2. $\exists K$ – компакт (!) $\forall \varepsilon$ $\exists$ конечная ε-сеть

$\Leftarrow$ $\neg$: $\exists \varepsilon_0 > 0$, что $\nexists$ кон. ε_0 сети:

$\forall x_1 \in K$ $\exists x_2 \in K$ $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$ (если $\nexists x_2$, то система из x_1 – конечная ε_0 сеть)

$\{x_1, x_2\}$ $\exists x_3 \in K$, $\rho(x_3, x_i) > \varepsilon_0$ $\quad i = 1, 2$

$\vdots$

$\{x_1, x_2, x_3 \dots\}$ $\quad n \ne m$ $\quad \rho(x_n, x_m) > \varepsilon_0$

Из такой $\{x_n\}$ не выделить сход. последовательность $\Rightarrow$ K – не компакт

∇

Нормированные пространства

X – линейное мн-во (определены $x+y$, αx $(\alpha \in \mathbb{R})$)

Хотим с помощью нормы построить топологию на X, в которой эти операции непрерывны.

Опр $\varphi: X \to \mathbb{R}$ – норма на X ($\varphi(x) = \|x\|$ (обозначр))
если:
1. $\varphi(x) \geq 0$; $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = \emptyset$
2. $\varphi(\alpha x) = |\alpha| \varphi(x)$ — однородность
3. $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$

В нормированных пр-вах $\rho(x,y) \overset{def}{=} \|x-y\|$ (метрика порожд. нормой)

Тогда $(X, \|\ \|)$ – н.п. – частный случай м.п.

Опр $x = \lim x_n \Leftrightarrow \rho(x_n, x) \to 0$
$\|x_n - x\| \to 0$

Утв в топологии НП линейные операции на X непрер.

△
1. $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\|(x_n+y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$
2. $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x$, $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha (x_n - x) + x_n(\alpha_n - \alpha)\| \leq$
$\leq \|\alpha(x_n - x)\| + \|x_n(\alpha_n - \alpha)\| =$
$= \underbrace{|\alpha|}_{\text{огр}} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \underbrace{\|x_n\|}_{\text{огр}} \to 0$
▽

Примеры

1. $\mathbb{R}^n$
$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum x_k^2}$ ← l_2 – Гильбертова норма (Эвкл.)
$\|\bar{x}\|_1 = \sum |x_k|$ — l_1 – Гильб. (манхэтт. расст.)
$\|\bar{x}\|_\infty = \sup\{x_1, \dots x_n\}$ – l_∞ – норма

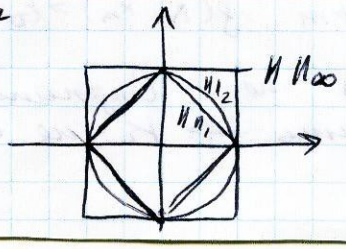
2. $C[a,b]$ – ф-ии непр. на $[a,b]$
$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

3. $L_p(E)$ E – изм. $p \geq 1$
$= \{f$ изм. $| \int_E |f|^p < +\infty\}$
$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$$

Опр $\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2$ – нормы эквивалентны, если сх-сть одинаковая ($x_n \xrightarrow[\|\ \|_1]{} x$, $x_n \xrightarrow[\|\ \|_2]{} x$)

Проверка на экв-ть: $\exists a, b > 0$ $\forall x \in X$ $a\|x\|_1 < \|x\|_2 < b\|x\|_1$

Пример $\mathbb{R}^n$



$\|\ \|_1 \sim \|\ \|_2 \sim \|\ \|_\infty$

← это $\|x\| < 1$ в 3х нормах

Теорема (Рисса)

$\dim X < +\infty$, тогда любые 2 нормы эквивалентны

Δ

$\{e_1 \dots e_n\}$ – ЛНЗ из X; $\forall x \longleftrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) =: \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n$

в базисе $\{e_i\}$ коэфф

$\|\ \|$ – норма в X

$$\|x\| \underset{\text{н-во } \Delta}{\le} \sum^n \|e_k\| |\alpha_k| \underset{\text{Коши}}{\le} \overbrace{\sqrt{\sum^n \|e_k\|^2}}^{const = b} \cdot \sqrt{\sum^n |\alpha_k|^2} = \|\bar{\alpha}\| = \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 := \sqrt{\sum^n \alpha_k^2} \qquad x = \sum \alpha_i e_i$$

$$\|x\| \le b \cdot \|x\|_1$$

(!) $\exists a$ – const > 0 $\quad a\|x\|_1 \le \|x\| \Longrightarrow \|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$

$\triangleleft$ $f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \|\sum^n \alpha_k e_k\|$; $\quad |f(\bar{\alpha} + \Delta\bar{\alpha}) - f(\bar{\alpha})| =$

$$= \left| \|\sum^n \alpha_k e_k + \sum^n \Delta\alpha_k e_k\| - \|\sum^n \alpha_k e_k\| \right| \le$$

$$\le \|\sum^n \Delta\alpha_k e_k\| \le \sum \|e_k\| \underbrace{|\Delta\alpha_k|}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Тогда f непрер. в $\mathbb{R}^n$

$\triangleleft$ $S_1 = \{\sum^n |\alpha_k|^2 = 1\}$ – единич. сфера в $\mathbb{R}^n$

По т. Вейерштрасса S_1 – компакт.

f непр на S_1, $\exists \bar{\alpha}^* \in S_1$: $f(\bar{\alpha}^*)$ – min, то есть $\forall \alpha \in S_1$, $f(\bar{\alpha}^*) \le f(\bar{\alpha})$

Если $f(\bar{\alpha}^*) = 0$, то $\|\sum \alpha_k^* e_k\| = 0$

$\sum^n \alpha_k^* e_k = 0$, но т.к. $\bar{\alpha}^* \in S_1$ не все $\alpha_k^* = 0$

и отсюда противоречие с ЛНЗ базисных точек.

Значит $f(\bar{\alpha}^*) = m > 0$.

$$\|x\| = \|\sum \alpha_k e_k\| = f(\bar{\alpha}) = \sqrt{\sum \alpha_k^2} \left\| \sum \frac{\alpha_k}{\sqrt{\sum \alpha_k^2}} e_k \right\| \ge$$

$\ge \beta_k$, где $\bar{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_n) \in S_1$

$$\ge m \cdot \|x\|_1$$

из вот мы нашли константу $a := m$.

$\triangleright$

11.10.2016 (взято у Яши)

<u>Следствие</u> из т. Рисса:

X - НП, Y - линейное ЛП подмножество X, $\dim Y < +\infty$

Тогда $\mathrm{Cl}\, Y = Y$, т.е. Y замкнуто

<u>Замечание</u> в ФА принято различать линейное подмножество (м-во точек замкнутых относ. αx и $x+y$) и линейное подпространство (замкнутое лин. подмножество)

Δ

$$Y = \mathcal{L}(\underbrace{e_1 \dots e_n}_{ЛНЗ}) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ e_1 \dots e_n - ЛНЗ\}$$

$y_m \in Y$ $(y_m \to y$ в $X \overset{(!)}{\Rightarrow} y \in Y)$ хотим

$\|y_m - y\| \to 0 \Rightarrow \|y_m - y_p\| \to 0$ $m, p \to \infty$

Y - конечномерно, $\|y\|$, где $y \in Y$ - норма и по т. Рисса они все эквивалентны.

$y = \sum^{n} \alpha_i e_i$ $\quad \|y\|_0 = \sqrt{\sum \alpha_i^2}$ - норма в силу базиса ЛНЗ

по т. Рисса $\|\ \| \sim \|\ \|_0$

$\underbrace{\|y_m - y_p\|}_{\in Y} \to 0 \Rightarrow \|y_m - y_p\|_0 \to 0$

$\|\ \|_0$ - норма, $\overline{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad y_m = \sum \alpha_i^{(m)} e_i$

$|\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(p)}| \to 0$ $\forall i = 1 \dots n$ $\quad \overline{\alpha_m} = (\alpha_1^{(m)} \dots \alpha_n^{(m)}) \to \alpha^*$

$y^* = \sum \alpha_i^* e_i \in Y$ $\quad \|y_m - y\| \to 0$

$\|y_m - y^*\|_0 \to 0 \Rightarrow \|y_m - y^*\| \to 0$

$y = y^* \Rightarrow y \in Y$.

∇

Если НП полно в смысле МП, то оно (пр-во) называется Банаховым. (В-пр-во)

<u>Примеры</u>

1. $C[a, b]$
2. Пр-во Лебега, $p \geq 1$ $\quad L_p(E) = \{f$ изм, $\int_E |f|^p < +\infty\}$

$p < 1$ $\quad |x|_p = \int_E |x|^p d\mu$ $\quad |x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

$\rho(x, y) = |x - y|_p$

<u>Лемма</u> в В-пр-вах работает т. абс. сх-ти числов. рядов

Δ X - В-пр-во, $\sum^{\infty} x_n = \lim_{N \to \infty} \sum^{N} x_k$, $\sum^{\infty} \|x_k\| < +\infty$

Тогда $\|S_N - S_M\| = \|\sum_{M+1}^{N} x_k\| \le \sum_{M+1}^{N} \|x_k\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \|S_n - S_m\| \to 0 \Rightarrow \exists \lim S_n$, тогда $\sum^{\infty} x_n$ сх-ся.

▷

Лемма Рисса о перпендикуляре. Y – собств. ПП X – НП, $\forall \varepsilon \in (0,1)$ → п-п-во – лишнее замкн. мн-во

$\exists z_\varepsilon \in X$:

1) $\|z_\varepsilon\| = 1$
2) $\rho(z_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon$

△

$\exists x \notin Y$, $d = \rho(x, Y)$;

Если $d = 0$, то $\exists y_n \in Y : \|x - y_n\| < \frac{1}{n}$

$n \to \infty \Rightarrow y_n \to x$

Но Y – замкнуто, тогда $x \in Y$, что противоречит условию.

Тогда $d > 0$.

возьмем $\varepsilon \in (0,1)$, $\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$;

По опр. расстояния $\exists y_\varepsilon \in Y : \|x - y_\varepsilon\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d$

$z_\varepsilon = \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|}$, $\|z_\varepsilon\| = 1$; $\forall y \in Y$ $\|z_\varepsilon - y\| =$

$= \left\| \frac{x - y_\varepsilon}{\|x - y_\varepsilon\|} - y \right\| = \frac{\|x - (y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\| y)\|}{\|x - y_\varepsilon\|}$.

В этом выр-и числитель $\ge d$

знаменатель $< \frac{1}{1-\varepsilon} d$, тогда

получ. $\longrightarrow$ $\|z_\varepsilon - y\| > 1 - \varepsilon$

▽

Следствие Пусть $\dim X = +\infty$. S – единичная сфера.

$\Rightarrow S$ – не компакт. (тут разграничение с $\dim < +\infty$)

△

- $\forall x_1 \in S$, $Y_1 := \mathcal{L}(x_1)$, Y – конечн. мн. мн-во, значит оно замкнуто в X и п-пво

Тогда по т. Рисса $\exists x_2 \in S$, что $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$

- $Y_2 = \mathcal{L}(x_1, x_2)$. Y_2 – собств пп-во.

Тогда $\exists x_3$ $\|x_3 - x_j\| > \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$

⋮

- Прошлое не остает. в силу $\dim X = +\infty$

Получим $\{x_n \in S \mid \|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}, n \ne m\}$.

Тогда не выделим сход. подпоследовательность.

Тогда сфера – не компакт

▽

Унитарные Пространства

Опр X – линейное мн-во, $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$
(над полем $\mathbb{R}$)

φ:

1. $\varphi(x,x) \geq 0 \qquad \varphi = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
3. $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z)$

Тогда φ – скалярное произведение.
Обозначение $\langle x, y\rangle := \varphi(x,y)$

Тогда $(X, \langle,\rangle)$ – Унитарное пр-во.

Пример $\mathbb{R}^n$: $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Утв (Шварц) $\forall x,y \in X \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$

Δ

$\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda) \equiv \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle \geq 0$

$f(\lambda) = \lambda^2\langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$, у этой ф-ии $D \leq 0$

$D = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0$

А это и есть н-во Шварца

∇

Замечание $X - \mathbb{R}^n$ Шварц $\to$ Коши для сумм
$\left(\left|\sum a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}\right)$

Замечание $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ – норма. Первые две аксиомы тривиально. Н-во Δ:

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y^2\| \leq$

$\leq \{\text{Шварц}\} \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Любое УП – частный случай НП

Опр Специфика – углы между точками.

$x \perp y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \langle x,y\rangle = 0$

И тут же мгновенно $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
(Пифагор.)

Утв В Унит. Простр. есть р-во параллелогр.

$\forall x y \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Δ Раскрыть $\|x+y\|^2, \ldots$ все легко.

∇

Утв Мы знаем, что $\langle , \rangle$ порождает $\| \cdot \|$

Наоборот, $\|x\| =: \sqrt{\langle x, x \rangle} \Leftrightarrow$ работает р-во параллелогр.

Опр $\{e_1; e_2, \dots\}$ – ОНС (м.б. конечная / бесконеч.)

1. $\|e_i\| = 1$
2. $\forall i, j \quad i \neq j \quad i \perp j$

Утв ОНС $\Rightarrow$ лин. незав.

{Аналога} $\Rightarrow$ О.С $\longrightarrow$ Грамм-Шмидт $\longrightarrow$ ОНС

Опр $x \in X$, $\{e_i\}$ – ОНС

Тогда $\langle x, e_j \rangle$ – коэф Фурье т. x.

$\sum\limits_{1 \le e_j \le n} \langle x, e_j \rangle e_j$ – ряд Фурье т. x

Ряд Фурье – частичная сумма ортогональн. рядов.

Опр $\sum x_j$ – ортогональный, если $\forall i \neq j \quad x_i \perp x_j$

Если ряд до ∞, то $\|S_m\|^2 = \langle \Sigma, \Sigma \rangle = \sum \|x_i\|^2$
(S_m – част. суммы)

Этот факт очень удобный.

Опр X – НП, Y – его подпространство.

$\forall x \in X$; $E_Y(x) \equiv \rho(x, Y) = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$

наилучшее приближение x точками Y

При этом

$\forall y^* \in Y \quad E_Y(x) = \|x - y^*\|$, то y^* – элемент наилучшего приближ.

Теорема (Борель)

$\dim Y < +\infty \Rightarrow \forall x \in X \ \exists y^* \in Y$ – эл-т наил. приб.

$\triangle$

Y – это $\mathcal{L}(\underbrace{e_1 \dots e_n}_{\text{лин. незав.}})$, тогда $f(\alpha_1 \dots \alpha_n) \equiv \|x - \sum^n \alpha_k e_k\|$

Найдем $\min f = : \bar{\alpha}$.

Из н-ва $\triangle$ $f(\bar{\alpha})$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$

$f \geq 0$ по постр.

$E_Y(x) = \inf\limits_{\mathbb{R}^n} f(\bar{\alpha})$. Легко установить (HW) что можно найти шар $B(0, r) \in \mathbb{R}^n$ вне пределов которого $f \leq 2E_Y(x)$

Значит само лучшее приближ. нужно искать в шаре.

Шар – компакт f непр. на нём, тогда по т. Вейерштрасса f имеет min на шаре.

$\triangledown$

Для абстрактных рядов Фурье можно теорему усилить, явно указав min

<u>Теорема</u> Экстремальное св-во частичных сумм ряда Фурье.

$\{e_i\}$ - ОНС $\quad H_n = \mathcal{L}(e_1 \dots e_n)$

$\forall E_{H_n}(x), \quad S_N(x) = \sum^n \langle x, e_i \rangle e_i.$

Тогда $\quad E_{H_n}(x) = \|x - S_n(x)\|.$

$\triangle$

$\forall y = \sum^n \alpha_i e_i \in H_n;$

$\|x-y\|^2 = \langle x - \sum^n \alpha_i e_i, x - \sum^n \alpha_i e_i \rangle =$

$= \|x\|^2 - 2\sum^n \langle x, e_i \rangle \alpha_i + \sum \alpha_i^2 =$ за счет ортонорм. ортогон. $\{e_i\}$

$= \underbrace{\|x\|^2}_{\text{const}} + \underbrace{\sum (\alpha_j - \langle x, e_j \rangle)^2}_{\text{это минимально когда } \alpha_j = \langle x, e_j \rangle} - \underbrace{\sum \langle x, e_j \rangle^2}_{\text{const}}$

Элемент наил. приближ. - сумма Фурье.

$\triangledown$

<u>Следствие</u> Для коэфф Фурье верно:

$\sum \langle x, e_i \rangle^2 \le \|x\|^2$ - н-во Бесселя

$\triangle$

$0 \le \|x - y^*\|^2 = \underbrace{\|x\|^2 - \sum \langle x, e_j \rangle^2}_{\ge 0}$

$\triangledown$

<u>Следствие</u> Ряд из квадратов коэфф. Фурье сходится

$\triangle$ Из Бесселя $\triangledown$

26.10.2016

Пространства Гильберта

Опр Пр-во Гильберта — полное бесконечномерное унитарное пространство. (H)

Пример • $L_2(E)$ $\langle f, g\rangle = \int_E f\cdot g\, d\mu$

Частный случай:

• $\ell_2 - \{\{x_1 \dots x_n \dots\} \ \sum x_n^2 < +\infty\}$

$\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \sum^{\infty} x_n y_n$

$E = \mathbb{N}$, $\mu\{n\} = 1$, тогда $\ell_2 \subset L_2$
(счет. мера)

Опр Полнота $\Rightarrow$ ортонорм. базис $\equiv \{e_n\}$, что

$\forall x \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n$

В силу непр. $\langle , \rangle$:

$\langle x, e_m\rangle = \sum \alpha_n \langle e_n, e_m\rangle = \alpha_n$

Разлож. по базису — ряд Фурье

Опр Полная ОНС:

$\{e_i\}$ полна если $H = \overline{\mathcal{L}(\{e_i\})}$
(по опр. ПО — непрер. сумма)

Замкнутая ОНС:

все $\langle x, e_m\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Лемма Полная $\{e_i\} \Longleftrightarrow \{e_i\}$ замкнутая

Δ

Обнаружить это легко:

$\Rightarrow$ $\sum^{\infty} y_n$ в H, ортогон.

$\|S_n - S_m\|^2 = \sum \|y_n\|^2$; $\|S_n + S_m\| \to 0 \Leftrightarrow \sum^{\infty} \|y_n\|^2 = 0$

Отсюда в H сх-я, если сх-я $\sum^{\infty} \|y_n\|^2$

Если есть ОНС, то мы можем сопоставить

$x \to \sum^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle e_k}_{y_k}$; $\sum \langle x, e_k\rangle^2 \le \|x\|^2 < +\infty$
по н-ву Бесселя

В H ряд Ф. $\forall$ любой ОНС сходится сх-я.

Поэтому если система полная, то $\forall x \in H$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k_j} e_{k_j}$, так что

$\|x - \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k_j} e_{k_j}\| < \varepsilon^2$ (за счет полноты)

Но частичные суммы Фурье обладают экстремал. св-м.

$\|x - \sum^{p} x_{k_j} e_{k_j}\|^2 \ge \|x - \sum_{j=1}^{k_p} \langle x, e_j\rangle e_j\|^2$

Более того, если $S_m(x)$ – част. сумма:

$$\|x - S_{m+p}(x)\|^2 \le \|x - S_m(x)\|^2 \le \varepsilon^2$$

Отсюда x действ. разлаг. в Фурье.
(част. суммы $\to x$)

($\Leftarrow$) Поэтому если все $\langle x, e_i\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
тогда e_i замкнута

($\Leftarrow$) В H рад по любой ОНС сх-я.

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_j\rangle}_{=\langle y, e_j\rangle} e_j$$, то есть $\langle x, e_j\rangle = \langle y, e_j\rangle$

Отсюда по линейности $\langle , \rangle$: $y - x = 0$
$y = x$, тогда

$$x = \sum_{1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j$$, тогда система полная

▷

<u>Опр</u> Топологич. пр-во сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное мн-во точек.

$(X = Cl\{a_1 \dots a_n \dots\})$

<u>Лемма</u> (Следствие) H – сепарабельно $(\{a_1 \dots a_n \dots\})$, то мы можем применить Грамма-Шмидта и оно будет базисом по пред. лемме

И наоборот — если есть базис, то H – сепарабельно. (суммы с $\alpha_i \in \mathbb{R}$)

$(\text{Сепар. } H \Longleftrightarrow \exists \text{ базис в } H)$

△ из пред. леммы ▷

<u>Теорема</u> О наилучшем приближении в $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ – пр-во, M – замкнутое выпуклое подмножество в $\mathcal{H}$.

Тогда $\forall x \in H$ $\exists! y \in M$, что $\|x - y\| = \inf\limits_{z \in M} \|x - z\|$

(в M у любого x сущ! эл-т наил. приближ.)

△ $d = \inf\limits_{z \in M} \|x - z\|$; M_0 огр нижней грани

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in M$: $d \le \|x + y_n\| < d + \frac{1}{n}$

Пусть $\exists\, y = \lim y_n$, тогда по замкнутости M
$y \in M$ и предельный переход в посл. н-ве.
$\|x - y\| = d$

Покажем, что y y_n есть предел.

Возьмем $y_n, y_m \in M$. Из выпуклости $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$.

Значит:

$$d \le \left\| \frac{y_m+y_n}{2} - x \right\|^2 = \frac{1}{4}\|(y_m-y_n) - 2x\|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\|\underbrace{(y_m-x)}_{z_1} + \underbrace{(y_n-x)}_{z_2}\|^2 =$$

Р-во параллелограмма: $\|z_1+z_2\|^2 + \|z_1-z_2\|^2 = 2\|z_1\|^2 + 2\|z_2\|^2$

Отсюда:

$$= \frac{1}{4}\left(2\|y_m-x\|^2 + 2\|y_n-x\|^2 - \|y_m-y_n\|^2\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\|y_m-x\|^2\right.}_{\le \frac{(d+\frac{1}{m})^2}{2}} + \underbrace{\left.\|y_n-x\|^2\right)}_{\le \frac{(d+\frac{1}{n})^2}{2}} - \underbrace{\frac{\|y_m-y_n\|^2}{4}}_{\le ?}$$

Короче $\|y_n - y_m\| \le 4d\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + 4d\frac{1}{m} + \frac{d}{m^2} \to 0$

Отсюда $\|y_n - y_m\| \to 0$, то есть $\exists \lim y_n$.

Единственность вытекает из р-ва параллелограмма (сделать самим).

▽

<u>Следствие</u> H, H_1 - замкнутое линейное подм-во H.

<u>Определение</u> (подпространство)

$$H_2 = H_1^{\perp} = \{y \in H \mid y \perp x,\ x \in H_1\}$$

<u>Следствие</u> $\forall x \in H$ $x = x_1 = x_2$, $x_1 \in H_1$, $x_2 \in H_1^{\perp}$

<u>Определ.</u> Разлож. в прямую сумму:

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$$

2.12.2015.

<u>Следствие</u> $x \in H$ $H_2 = H_1^{\perp}$ $\exists x_1 \in H_1 : \|x - x_1\| = \inf_{u \in H_1} \|x - u\|$

$x_2 = x - x_1 \in H_2$?

$\forall y \in H_1$ $y \perp x_1$, $\lambda > 0$ $x_1 + \lambda y \in H_1$

Отсюда

$$\forall \lambda > 0 \quad \|x - (x_1 + \lambda y)\|^2 \ge \|x - x_1\|^2$$

$$\langle x - x_1 - \lambda y, x - x_1 - \lambda y\rangle \ge \langle x - x_1, x - x_1\rangle$$

$\cancel{Tu = x - x}$

$$\langle x_2 - \lambda y, x_2 - \lambda y\rangle \ge \langle x_2, x_2\rangle \Rightarrow \langle x_2, x_2\rangle - 2\langle \lambda y, x_2\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \ge \langle x_2, x_2\rangle$$

Итого имеем: $2\langle y, x_2\rangle \le \lambda\langle y, y\rangle$

Устремим $\lambda \to +0$

$$\langle y, x_2\rangle \le 0$$

В силу произв. y также верно:

$\langle -y, x_2\rangle \le 0$, тогда $\langle y, x_2\rangle = 0$.

Счётно-нормированные пространства

Опр X – лин. мн-во. Полунорма p на X – это функционал, удовл. всем условиям нормы, но 1 аксиома ослаблена:

1. $p(x) \ge 0$. 2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ 3. $p(x+y) = p(x) + p(y)$

Но p может иметь 0 на ненулев. эл-х.

Пусть на X задана $\{p_i\}$ – счетная (не обяз. чет) мн-во полунорм.
Они согласованы: $\forall n\ p_n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\langle X, \{p_i\}\rangle$ – счетно-норм. пр-во

Опр $x = \lim x_n \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{m\to\infty} p_n(x_m - x) = 0$.

Зам Норм. пр-ва – частн. случай СНП
Согласованность $\{p_i\}$ необходима для ед-ти предела.

Зам. Если $\rho(x,y) \equiv \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$ $\mathbb{R}^\infty$
Тогда СНП метризуемо, всегда.

Зам Операции $x+y$ и αx непрерывны.
СНП = ТВП (тополог. векторное пр-во)

Опр Пример: $C^\infty[a,b] = \{x(t), t \in [a,b]$, бесн. дифференц.$\}$

$p_n(x) = \max\limits_{[a,b]} |x^{(n)}(t)|$ $n = 0, 1, \dots$

Кстати, C^∞ не нормируемо.

Опр Монотонная система полунорм, $\{p_n\}$, если $\forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}$: $p_n(x) \le p_{n+1}(x)$

Опр Эквив. на системах. $\{p_n\} \sim \{q_n\}$, если в них одинаковая сходимость

Опр $p_i \in \{p_i\}$ существенна, если она не мажорируется любой p_j $j < n$ (пред. полуц.)

p_m мажорирует p_n, если $\exists C\ \forall x \in X\ p_n(x) \le C p_m(x)$

Утв. Для любой системы полунорм $\exists$ эквив. ей монотонная система.

$\triangle$

$\exists\, q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$; $\{q_n\}$ полунормы

Проверим, что $\{q_n\} \sim \{p_n\}$:

$\triangle$ $p_n(x_m - x) \to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} p_k(x_m - x) \to 0 \Rightarrow q_n(x_m - x) \to 0$

Обратное аналогично $\triangledown$

$\triangledown$

Замечание $\forall$ сист. полунорм она монотонна по умножению

Утв $\{p_i\} \sim \{q_i\} \Leftrightarrow \{p_i\}$ мажор. $\{q_i\}$ и наоборот
$\forall i\ \exists j\ \exists q_j$ мажор. p_i и наоборот

$\triangle$

$\Leftarrow$ Очевидно, по опр. предела.

9.11.2016 $\Rightarrow$ Проверим: $\{p_n\}, \{p_n'\}$: $\forall p_n\ \exists p_m'$, $C = const$,
$\forall x \in X\ p_n(x) \le C p_m'(x)$

$\leftarrow$ $\downarrow$: Пусть это не так.

$\exists p_{n_0}\ \forall p_m'\ \exists x_m \in X$: $p_{n_0}(x_m) \ge m\, p_m'(x_m)$

формально $\forall C$ из возьмем m.

Перепишем н-во:

$p_m'\left(\frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)}\right) \le \frac{1}{m}$; $y_m \equiv \frac{x_m}{p_{n_0}(x_m)}$, для таких y_m верно: $p_m'(y_m) \le \frac{1}{m}$, $p_{n_0}(y_m) = 1$.

Зафиксируем m_0. по монотонности $m \ge m_0$:

$p_{m_0}'(y_m) \le p_m'(y_m) \le \frac{1}{m}$. отсюда при $m \to \infty$

$\forall m_0\ p_{m_0}'(y_m) \to 0$; то есть $\{p_m'\}\ y_m \to 0$

но $p_{n_0}(y_m) = 1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $\rightarrow\leftarrow$

$\triangledown$

Теорема (критерий нормируемости)

Нетип-норм. п-во с мон. системой нормируется $\Leftrightarrow$ в нем можно ввести сужительную полунорму

$\triangle$

$\Leftarrow$ Пусть $\{p_{n_k}\}_{k=0}^{m}$ - сужительная.

Положим $\|x\| = \sum_{k=1}^{n_m} p_k(x)$, тогда исходная система и с такой нормой мажор.

$\Leftarrow$ По доказанной теор. (предыдущей) это очевидно

∇

<u>Пример</u> $\mathbb{R}^\infty$ $\quad p_n(\bar{x}) = |x_n| \quad (\bar{x} = (x_1 \dots x_n \dots))$

Получаем СКП.

(Раньше мы рассм-ли как НП с матрицей Грэмма)

Каждая полунорма существенна, отсюда $\mathbb{R}^\infty$ не нормируется.

$C^\infty[a, b]$ – аналогично

Функционал Минковского

<u>Опр</u> X – линейное множество. $M \subset X$, M выпукло ($x, y \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$)

M поглощает $A \subset X$, если $\exists \lambda_0$, что $\forall \lambda \ |\lambda| \geq \lambda_0 \quad A \subset \lambda M = \{\lambda x, x \in M\}$.

<u>Опр</u> Если M поглощает любое конечное число точек, то M – радиальное мн-во

<u>Опр</u> M – закругленное, если $\forall \lambda \ |\lambda| < 1 \quad \lambda M \subset M$.

<u>Пример</u> X – НП $\quad \bar{V} = \{\|x\| \leq 1\}$. $\bar{V}$ радиально и закругленно

<u>Опр</u> M – радиальное множество.

$\forall x \in X, \quad \varphi_M(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda M\}$

φ_M – функционал Минковского.

<u>Пример</u> На шаре $\bar{V}$ $\varphi_M(x)$ – норма x. $= \|x\|$.

Можно смотреть на $\|\cdot\|$ как на частный случай φ_M.

<u>Утв</u> φ_M будет полунормой на $X \Leftrightarrow M$ радиально, выпукло, закругленно.

Δ $\boxed{\text{Упр}}$ ∇

Линейные функционалы и коразмерность

<u>Опр</u> X – линейное мн-во. $Y \subset X$ – линейно.

$\forall x, y \in X \quad x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in Y$

$[x] = \{y : y \sim x\}$ ← класс эквивал. x

$X/Y = \{[x]\}$ — фактор-множество

$[x] + [y] \equiv [x + y]$; $\alpha[x] \equiv [\alpha x]$ — линейность

Опр X; $\operatorname{codim}_X Y \equiv \dim(X/Y)$

Утв $\dim(X/Y) = p < +\infty$; тогда $\exists e_1 \dots e_p \in X$, что

$$\forall x \in X \quad x \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i + y, \quad y \in Y \ (\text{лин з})$$

Δ тривиально, исходя из линейности $\square$ ∇

Опр Если $\operatorname{codim} Y = 1$, то Y – гиперплоскость в X.

Опр Аналит. описание гиперплоск. дается с пом-ю функционалов

$f: X \to \mathbb{R}$, $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ $\quad f(0) = 0$

тогда f – линейный функционал

Опр $\operatorname{Ker} f = \{x : f(x) = 0\}$; по линейности f $\operatorname{Ker} f$ линейно.

Утв Любая гиперплоскость может быть записана как $\operatorname{Ker} f$ для некоторого f. (аналитически)

Δ

1) Пусть f – нетривиальный линейный функционал ($f \neq 0$ для хотя бы одной точки)

$Y := \operatorname{Ker} f$.

Проверим, что $\operatorname{codim} Y = 1$.

В силу нетривиальности f. $x_0 \in X$ $f(x_0) \neq 0$.

$\triangleleft$ $e = \frac{x_0}{f(x_0)}$ $\quad f(e) = 1$.

$\forall x \in X$, $\exists!$ (подберем) $t \in \mathbb{R}$, что $x - te \in \operatorname{Ker} f$.

$y := x - te$

$x = te - y$. Тогда $\operatorname{codim} Y = 1$.

$$\left[\begin{array}{l} f(x-te) = 0 \\ f(x) = tf(e) \\ t = f(x) \end{array}\right.$$

2) Если $\operatorname{codim} Y = 1$, то

$\forall x \in X \quad x = te + y$, $y \in Y$

Определим тогда $f(x) = t$. В силу единственности записи x.

Тогда $f(x) = t \Rightarrow f(x) = 0$.

∇

Теорема Колмогорова

Опр ТВП X – множество на X. τ – топология на X.

$\alpha \cdot x$ и $x + y$ – непрерывны на X.

$E(x)$ – окрестность x $= \{y, \exists G \in \tau, x \in G \subset E(x)\}$

Непрерывность. $\equiv$ $\forall E(\alpha_0 x_0)$ $\exists \delta > 0, \exists E(x_0)$: $\Leftrightarrow \alpha_0 x_0 = \lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ x \to x_0}} \alpha x$

$|\alpha - \alpha_0| < \delta$, $x \in E(x_0) \Rightarrow \alpha x \in E(\alpha_0 x_0)$

Непрерывность суммы: $\forall E(x_0+y_0)\ \exists E(x_0), E(y_0)$:
$x \in E(x_0),\ y \in E(y_0) \Rightarrow x+y \in E(x_0+y_0)$

$x_0+y_0 \equiv \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} x_0+y$

Утв Нормированные и СН-пр-ва — частные случаи ТВП.

16.11.2015

Лемма x_0, $f(x)=x+x_0$, $f'(y)=y-x_0$ f — биекция X на X

В силу непр. сложения f и f^{-1} непрерывны.
Тогда f — гомеоморфизм (биекция, непр. в обе стороны)
Т.к. непр. ф-ии сохр. открытость множеств, тогда
$\forall G$ откр $x_0+G=\{x_0+x,\ x\in G\}$ открыто

Свойства сохр. открытость

Опр $\mathfrak{B}$ — база окрестностей нуля $=\{B$, что B — окр. нуля и любая другая $C\notin\mathfrak{B}=$
$=\forall B\in\mathfrak{B}\}$

Свойства элементов числа $\mathfrak{B}$, подобны базы окрестностей любой другой точки.

Лемма $x\to 0$, то $x+x\to 0+0=0$.
$\forall V\in\mathfrak{B}$ $\exists U\in\mathfrak{B}$: $U+U\subset V$, $2U\subset U+U\subset V$

$\lambda x\to 0$ $\lambda\to 0$ $x\to 0$
$\forall V\in\mathfrak{B}$ $\exists\varepsilon>0$, $\exists U\in\mathfrak{B}$ $|\lambda|\le\varepsilon \Rightarrow \lambda U\subset V$

$\bigcup\limits_{|\lambda|\le\varepsilon}\lambda U$ — замкнутое.

Тогда исходная откр. мн-во инвариантна по сдвигу и всегда можно создать такое $\mathfrak{B}$, что:
1. $\forall V\in\mathfrak{B}$ $\exists U\in\mathfrak{B}$ $U+U\subset V$
2. Все эл-ты $\mathfrak{B}$ рациональные и замкнутые

Эти условия полностью хар-ют топологию лок. пр-ва. (обеспеч. непр. + и $\alpha\cdot$)

Теорема Колмогорова:
Пр-во Хаусдорфово, если $\forall x,y$ можно разделить x,y

ТВП нормируется $\Longleftrightarrow$ 0 имеет хотя бы 1 ограниченная выпукл. окр-ть
↑ пополнение множ. окр. $\emptyset$

$\triangle$

($\Rightarrow$) Очевидно, ед. шар будет огр. выпукл. окрест. 0

($\Leftarrow$) Имея вып. ог. окр. $\emptyset$ можно считать, что мы имеем раз. замкн. окр-ть.
Тогда строим функционал Минковского

Тогда он будет полунормой.

Проверим что это норма ($\varphi = 0 \Rightarrow x = \varphi$)
база окр. нуля сохр. в лок. топологии.

V - окр. вып. замкн. $\{\frac{1}{n}V, n \in \mathbb{N}\}$ - базис.

$\forall W$ - окр 0. Она должна быть в V.
W поглощает V $\quad V \subset \lambda W \quad \forall \lambda > |\lambda_0|$

$P_V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$?

$$x = \bigcap^{\infty} \left(\frac{1}{n}V\right) = \{0\}$$

$\subset$ по хаусдорфовости пр-ва.

$\triangledown$

$$\mathbb{R}^{\infty} = \{(x_1 \dots x_n, \dots)\}$$

<u>Пример</u> $\{\bar{x} : x_{i_1} \in (-\delta_1; \delta_1) \quad x_{i_2} \in (-\delta_2, \delta_2) \dots x_{i_p} \in (-\delta_p, \delta_p)\}$ $\delta_i > 0$

Тут нету ни одной огр. вып. окрестности нуля.
Если была бы хотя бы одна, то должна была бы пом. любым эл-ом базы.
Но возьмем:
$\{\bar{x} : -\delta < x_1 < \delta\}$ огр окр-ть не может быть

$P_n(\bar{x}) = |x_n|$
В такой систему все существенны. $\mathbb{R}^{\infty}$ не норм.

<u>Пример</u> $g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \sin(xt) f(t)\, dt$ $\quad f$ - непр. нетрив. g - непр.

Как найти f?
Сведение к Фуку Ну: подберем правильное ф. пр-во.
$\mathbb{R}^n$ хорошо, но базис не задать (базис - конеч. мн-во)
метризовать - можно (упрощ)
нормировать - нет.

Г. Элементы лин. ф-го анализа.

6 Непрер. функционалы, теоремы Хана - Банаха.

X - КП, f - непр на X линейный функционал $(\forall x_n \; x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x))$
В силу непр. $(\alpha \cdot)$ и $(+)$ в КП по линейности функционала:
$f(x_n) - f(x) = f(x_n - x)$, $\quad x_n \to x \Leftrightarrow x_n - x \to 0$, $f(0) = 0$ по опр. лин. ф-ла

<u>Утв</u> $\Rightarrow f$ непр на $X \Leftrightarrow f$ непр. в 0

<u>Опр</u> Норма функционала $\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$; f огр $\Leftrightarrow \|f\| < +\infty$

Утв $\forall x \neq 0 \quad \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1, \quad \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq \|f\| \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$

Утв Функционал непрерывен $\Leftrightarrow$ функционал ограничен.

Δ

1. $\Leftarrow$ $\|f\| < +\infty, \quad |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|, \quad x_n \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0$

$$|f(x_n)| \leq \underbrace{\|f\| \cdot \|x_n\|}_{\to 0} \Rightarrow f(x_n) \to 0$$

2. $\Rightarrow$ $\leftarrow \neg$: $\exists \|f\| = \infty = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$. Раскроем опред. sup:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n : \|x_n\| \leq 1, \quad |f(x_n)| > n$

$\left|f\left(\frac{x_n}{n}\right)\right| > 1 \ (*), \quad \left\|\frac{x_n}{n}\right\| = \frac{\|x_n\|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \frac{x_n}{n} \to 0$

Тогда по непр. f $f\left(\frac{x_n}{n}\right) \to 0$, что противоречит $(*)$

∇

Алгебр. смысл ядра связан с коразмерностью

Теор f непрерывен $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f$ - замкнуто в X

Δ

1. $\Rightarrow$ Если f непр, $x_n \in \operatorname{Ker} f$, тогда по непр. $\underbrace{f(x_n)}_{0} \to f(x)$, откуда $f(x) = 0$, тогда $x \in \operatorname{Ker} f$

2. $\Leftarrow$ $\operatorname{Ker} f$ замкнуто. В силу того, что $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$, $\exists e \in X \quad \forall x = y + te, \ y \in \operatorname{Ker} f, \ t \in \mathbb{R}$.

Откуда $f(x) = \underbrace{f(y)}_{\text{по опр.}} + tf(e) = tf(e)$

$x_n = y_n + t_n e \to x = y + te \Rightarrow f(x_n) = t_n f(e)$.

Если проверим, что $t_n \to t$, тогда $t_n f(e) \to tf(e) = f(x)$ а значит $f(x_n) \to f(x)$ и всё ок

$x_n = y_n + t_n e \quad x_n \to x \quad y, y_n \in \operatorname{Ker} f$

$x = y + te$

Если, следя логике анализа, доказать, что все сход. подпосл. $t_{n_k} \to t$, то тогда $t_n \to t$.

$\exists t_{n_k} \to t^*, \quad \underbrace{y_{n_k}}_{\in \operatorname{Ker} f} = \underset{\downarrow\, x}{x_{n_k}} - \underset{\downarrow\, t^*}{t_{n_k}} e \to x - t^* e. \in \operatorname{Ker} f$

Но ядро замкнуто

Тем самым $x = z + t^* e$ ← в общем виде

$x = y + te$ ← в нашем случае

Откуда из единств. записи $t^* = t$

∇

Утв. (Теорема) X - НП, Y - линейное множество в X, $\mathrm{Cl}\, Y = X$
(Y всюду плотно в X)

Пример всюду плотн.:

$C[0,1]$, тогда возьмем кор Вейерштрасса о равном. прибл. ф-ми полиномами.
$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n(x) \ |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [0,1])$ =

С.Н. Бернштейн указал конструктивно полиномы для т. В.
$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ — на них реализ. т. Вейерш.

С точки зрения функция $Y = \{P_n(x)\}$ - линейное множество в $C[0,1]$. Тогда $\mathrm{Cl}\, Y = C[0,1]$ — пример плотного всюду многообразия

На Y задан f_0 - непр. лин функционал.
$\exists$? непр. лин. ф-л на X. $f|_Y = f_0$, $(\|f|_X\| = \|f_0|_Y\|)$
$\|f\|_X = \|f_0\|_Y$
Поставленная задача всегда разрешима ед. образом.

Δ а) f непр на X, g - непр. на X $f|_Y = g|_Y$
$\forall x \in X$, $\mathrm{Cl}\, Y = X$, $\exists y_n \in Y$. $y_n \to x$

$= \begin{cases} f(y_n) \to f(x) \\ g(y_n) \to g(x) \end{cases} \Rightarrow$ по ед. предела $f(x) = g(x)$.

30.11.2015 б) Т.к. $\mathrm{Cl}\, Y = X$ $\forall x \in X$ $\exists y_n \in Y$ $y_n \to x$
f_0 непрерывен на Y, тогда $\|f_0\|_Y < +\infty$

$|f_0(y_m) - f_0(y_n)| = |f_0(y_m - y_n)| \le \|f_0\|_Y \underbrace{\|y_m - y_n\|}_{\to 0 \text{ т.к. } y_n \to x}$

$\Rightarrow \{f_0(y_n)\}$ сх. в. себе на $\mathbb{R}$.

Тогда по критерию Коши $\exists$ $f_0(y_n)$ есть предел $f(x)$
$f(x) = \lim f_0(y_n)$, $y_n \to x$

Проверим, что если $y_n \to x$, $y_n' \to x \Rightarrow \lim y_n = \lim y_n'$
$|f_0(y_n) - f_0(y_n')| \le \|f_0\|_Y \underbrace{\|y_n - y_n'\|}_{\to 0}$ $\quad f_0(y_n) - f_0(y_n') \to 0$

$f(x) = \lim f_0(y_n)$, $y_n \to x$ $\quad \downarrow a \quad \downarrow b$ тогда $a = b$
В силу единств. предела $f(x)$ - лин. функц.
Очевидно, что на Y $f(x) = f_0(x)$
Докажем, что $\|f\|_X = \|f_0\|_Y$.
Так как $Y \subset X$, по опр $\|\cdot\|$ и sup, получаем $\|f_0\|_Y \le \|f\|_X$
Проверим обратное неравенство:
Sup достигается на $\|x\| = 1$. $(\Leftarrow: \|x\| < 1 \ x' = \frac{x}{\|x\|}, \ \|x'\| = 1)$
$(|f(x)| = \|x\| \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \le f(x')$

$\|x\| = 1$, $\exists y_n \in Y$ $y_n \to x$ $\|y_n\| \to \|x\| = 1$, $y_n' = y_n / \|y_n\| \to \frac{x}{1} = x$
$\|y_n'\| = 1$ $\quad y_n' \in Y$.
Возьмем $\{y_n\} \mid \|y_n\| = 1$. По опр. ф-ла $f_0(y_n) \to f(x)$

С другой стороны: $|f_0(y_n)| \le \|f_0\|_Y$; $\|y_n\| = 1$

$$|f(x)| \le \|f_0\|_Y \Rightarrow \|f\|_X \le \|f_0\|_Y$$

▷ Итого мы умеем продолж. л.ф. со всюду плотного линейного мн-ва на все пространство.

<u>Теорема</u> (Хан-Банах) X, $p(x)$ – полунорма. Y – линейное мн-во в X, f_0 – лин. ф-л, удовл. условию подчиненности полунорме $\forall y \in Y, |f_0(y)| \le p(y)$

Любой линейный ф-л, задан. на линейном мн-ве в X и удовл. усл. подчиненности, можно продолжить на X с сохр. условия.

$\exists f: X \to \mathbb{R}$

1. $f|_Y = f_0$
2. $\forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le p(x)$

<u>Лемма</u> (Банаха)

X – линейное множество $p(x)$, Y – собств. линейное подмножество X.

$f_0: Y \to \mathbb{R}$ – лин. $|f_0(y)| \le p(y)$

$e \notin Y$ $\quad Y_1 = \mathcal{L}(Y, e) = \{\alpha y + \beta e,\ y \in Y,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Тогда

$\exists f: Y_1 \to \mathbb{R}$ лин, что

1. $f|_Y = f_0$
2. на Y_1 $|f(y)| \le p(y)$

△ $\alpha y + \beta e \in Y$. f – лин + $f|_Y = f_0 \iff f(\alpha y + \beta e) = \alpha f_0(y) + \beta f(e)$

если хотим $\qquad$ ищем в виде

Пусть $f(e)$ – единств. неизв.

$c := f(e)$.

Как выбрать c? Хотим, чтобы $|f(\alpha y + \beta e)| \le p(\alpha y + \beta e)$

Т.к. $\alpha y \in Y$, то $y \in Y$.

$f(y + te) = f_0(y) + t \cdot c$, пусть $|f_0(y) + t \cdot c| \le p(y + te)$ $\quad \forall y \in Y$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$|f_0(y)| \le p(y)$ – дано

Заменим "$y + te$" на "$y - te$" без потери общности.

$$f_0(y) - p(y - te) \le t \cdot c \le f_0(y) + p(y - te), \quad t > 0$$

$$f_0\left(\frac{y}{t}\right) - p\left(\frac{y}{t} - e\right) \le c \le f_0\left(\frac{y}{t}\right) + p\left(\frac{y}{t} - e\right)$$

$\frac{y}{t} \in Y$, тогда: $f_0(y) - p(y - e) \le c \le f_0(y) + p(y - e)$ $\quad (*)$

$\forall y_1, y_2 \in Y$ $\quad f_0(y_1) - p(y_1 - e) \le f_0(y_2) + p(y_2 - e)$ ← проверим что верно

$f_0(y_1) - f_0(y_2) \le p(y_2 - e) + p(y_1 - e)$

$f_0(y_1 - y_2) \le p(y_1 - y_2)$ ← по усл. подчиненности

$f_0(y_1 - y_2) \le p(y_1 - e) + p_2(y_2 - e)$ ← по пров. △

$$\sup_{y \in Y} (f_0(y) - p(y - e)) \le f_0(y_2) + p(y_2 - e)$$

$$\sup_{Y} (f_0(y) - p(y - e)) \le \inf_{Y} (f_0(y) + p(y - e))$$

Тогда $\nexists$ (*). $\exists\ a = \sup(f_0(y) - p(y-e))$
$b = \inf(\cdots + \cdots)$

Тогда $\forall c \in [a,b]$ (*)@c — верно, то есть c подходит.

▽

△ (Т. Хана - Банаха)

Нам нужна лемма Цорна!
По лемме берем новый плотный и Y увел.
Для того, чтобы понять, как заполнить X, нужна лемма Цорна.

Проведем частное д-во для сепар. пр-в,

▽

Т. Хана - Банаха' (частное)

X - сепарабельно, нормировано, (т.е. содержит всюду плотное мн-во)
Y - линейное мн-во в X.
f_0 - непр. лин. ф-л на Y.

Тогда $\exists$ непр. лин. ф-л на X, что:
1. $f|_Y = f_0$
2. $\|f\|_X = \|f_0\|_Y$

(Если сравн. эту теор. с продолж. непр. с всюду пл. мн-ва — одно и то же (частн. случай), кроме усл. сепарабельности).

△ Раз X сепарабелен, то $A = \{a_1 \cdots a_n \cdots\}$, что $\mathrm{Cl}\, A = X$
Будем считать, что в A все точки различны. И ЛНЗ.

Сепарабельность обеспеч. возможность для $L_n = \mathcal{L}(Y, a_1 \cdots a_n) \subset L_{n+1}$
$L = \bigcup L_n$ — тоже лин. мн-во, что $\mathrm{Cl}\, L = X$

Отсюда по лемме продолжаем с Y на L_1, с L_1 на L_2, ...
Типа $L_n = \mathcal{L}(L_{n-1}, a_n)$, $L_0 = Y$
Получим на L ф-л и тогда по непр. продолжим на X (по теореме о продолж. с лин. мн-ва), т.к. L плотно в X.

▽

Следствие. $\forall x_0 \neq 0$, $\exists$ лин. непр. ф-л f, что:

1. $\|f\| = 1$
2. $f(x_0) = \|x_0\|$

△ $Y = \{t x_0,\ t \in \mathbb{R}\}$. Потр на Y лин. ф-л f_0: с помощью $f_0(t x_0) = t f_0(x_0)$, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.
$\|f_0\|_Y = 1$, $f_0(x_0) = \|x_0\|$.
Тогда по т. X-5 продолжим на X.

▽

Следствие: $\forall x_1 \neq x_2 \ \exists$ л. ф $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\triangle$ возьмем $x_0 = x_2 - x_1$ $\triangledown$

7.12.2015 Теорема Штейнгауза. (на самом деле, нет)

Следствие: два пред. следствия $\in$ "каждый ф-й можно записывать лин. огр. ф-л в каждому зад. пр-ву"

Теорема (Рисс)

$H, f \to \exists y \in H \mid$ 1) $\forall x \in H \quad f(x) = \langle x, y \rangle$

2) $\|f\| = \|y\|$

$\triangle$

2: Пусть известно, что $f(x) = \langle x, y \rangle$.

Тогда по н-ву Шварца $|f(x)| \leq \|y\| \, \|x\|$

$\Rightarrow \|f\| \leq \|y\|$.

$x_0 = \frac{y}{\|y\|}$, $\|x_0\| = 1$, $|f(x_0)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} = \|y\|$

Поскольку $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$, $\|x_0\| = 1$, $\|f\| \leq \|y\|$,

Отсюда $\|f\| = \|y\|$

1: $H_1 = \operatorname{Ker} f$ – замкнуто. H_1 – п-нво H.

$\exists H_2 = H_1^{\perp}$, тогда $H = H_1 \oplus H_2$.

С другой стороны, $\operatorname{codim}(H_1) = 1$, значит $\operatorname{codim}(H_2) = 1$ тоже.

$H_2 = \{te, t \in \mathbb{R}, e \in H_2\}$. $\forall x \in H \quad x = \underset{\in H_1}{x_1} + te$

$f(x) = f(x_1) + tf(e) = tf(e)$

$\forall y = \alpha e, \alpha \in \mathbb{R}$; $\langle x, \alpha e \rangle = \langle x_1 + te, \alpha e \rangle = \alpha t \|e\|^2$

Подберем α, чтобы $f(x) = (\cancel{\langle x, y \rangle}) = \langle x, \alpha e \rangle \quad \forall x \in H$.

Проверим $tf(e) = \alpha t \|e\|^2$, отсюда $\alpha = \frac{f(e)}{\|e\|^2}$.

Отсюда возьмем $y = \frac{f(e)}{\|e\|^2} \cdot e$.

$\triangledown$

Пример $H = L_2[0,1]$. $\forall$ лин. ф-л $\in L_2[0,1] \ \exists g \in L_2[0,1]$

$f(\hat{g}) = \int_0^1 g(t) \hat{g}(t) dt$

Пример $C[0,1]$ f – лин. ф-л $\exists g$, что $f(\hat{g}) = \int_0^1 \hat{g}(t) dg(t)$

Это интегр. Римана-Стилтьеса

Линейные ограниченные операторы.

Опр X, Y — норм. пр-ва

$A: X \to Y$ лин. $(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2))$

тогда A — линейный оператор.

В частном случае $Y = \mathbb{R}$ лин. ф-онал.

Опр A - непр. $\Leftrightarrow x_n \to x \quad Ax_n \to Ax \Leftrightarrow x_n \to 0 \quad Ax_n \to 0 = A0$

Опр A ограничен, если $\exists$ const $M: \|Ax\| \le M\|x\| \ \forall x \in X$

$\Leftrightarrow \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ax\| < +\infty =: \|A\|$

То есть огр $A \Leftrightarrow$ конечность $\|A\|$.

Более того, $\|Ax\| \le \|A\|\|x\| \quad \forall x \in X$.

Опр Норма оператора обладает всеми атрибутами ст. нормы.

Δ $\|x\| \le 1 \quad \|(A+B)(x)\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\|\|x\| + \dots \le$
$\le \|A\| + \|B\|$.

При переходе к sup

$\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|(A+B)(x)\| \le \|A\| + \|B\|$

Дет. аналогично

∇.

Теор A непр $\Leftrightarrow$ A ограничен.

Δ полностью аналогично д-ву для ф-ла # ∇

Опр $L(X, Y)$ — лин. пр-во л. огр операторов из X в Y, нормированное операт. нормой.

Теор Y-B — пр-во. $\Rightarrow L(X, Y)$ — B. пр-во. (B — полное)

Δ

(14.12.15) $A_n \in L(X, Y)$, $\|A_n - A_m\| \to 0$. ? $\exists A \in L(X, Y): \|A_n - A\| \to 0$

Аналогично: $\|A_n - A\| \to 0 \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{V} A$, $V = \{\|x\| < 1\}$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \forall n > N$
$\forall x \in V \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$

$\forall x \in X \quad \|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \le \underbrace{\|A_n - A\|}_{\to 0}\|x\| \Rightarrow A_n x - Ax \to 0$ в Y-B пр-ве

тогда по B-пр-ву $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n x =: Ax$

Тогда по арифм. предела A — лин. оператор. Проверим, что он огр. и явл. пределом A_n в $L(X, Y)$

$x \in V$. $\|Ax\| \le \|A_n x - Ax\| + \|A_n x\|$, $\|A_n x - A_m x\| \le \varepsilon \quad \forall n, m > N$
$\forall x \in V$

В силу сх. в себе

Устремим в посл. н-ве $n \to \infty$. Тогда по непр. нормы и опр A:

$\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon \Rightarrow \|(A_n - A)x\| \le \varepsilon \quad \forall x \in \overline{V}$

Тогда по опр. нормы оператора $\|A_n - A\| \le \varepsilon \quad \forall n > N$

Отсюда $A_n - A$ ограничен $\in L(X, Y)$

$A = \underset{\text{огр}}{A_n} - \underbrace{(A_n - A)}_{\text{огр}} \Longrightarrow A$ тоже ограничен по линейности

Поскольку $\|A_n - A\| < \varepsilon$, и оба опер. ограничены, то A — предел A_n.

▷

<u>Следствие</u> X — НП, $\mathbb{R}$ — В-пр-во, $L(X, \mathbb{R})$ — тоже В-пр-во

<u>Опр</u> $X^* = L(X, \mathbb{R})$ — пространством, сопряженным с X

В этих терминах X^* полно, даже если X — нет.

<u>Теорема</u> Банах — Штейнгауз

X — В-пр-во, Y — НП. $A_n \in L(X, Y)$

$\forall x \in X$, $\sup_n \|A_n x\| < +\infty$

Послед. операторов поточ. огран.

Тогда $\sup_n \|A_n\| < +\infty$

Равномерная ограниченность.

△ По опр $\|\cdot\|$ покажем $\forall x \in \overline{V} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \|A_n x\| \le M$:

$]\exists \overline{V_r}(a)$: $\forall x \in \overline{V_r}(a), n = 1, 2, 3 \dots \Rightarrow \|A_n x\| \le P$

$x = ry + a$, $y \in \overline{V}$, $\overline{x} \in \overline{V_r}(a)$, $y = \frac{x - a}{r}$

$\|A_n y\| = \frac{1}{r}\|A_n x - A_n a\| \le \frac{1}{r}(\underset{\in \overline{V_r}(a)}{\|A_n x\|} + \underset{\in \overline{V_r}(a)}{\|A_n a\|}) \le \frac{2P}{r}$

Тогда теорема доказана

Покажем сущ. $\overline{V_r}$

$\leftarrow \bigcap V_i \ne \overline{V_r}(a)$ ...; $\forall \overline{V_{r_1}}(a_1) \ \exists n_1, \exists x_1 \in \overline{V_{r_1}}(a)$, $\|A_{n_1}(x_1)\| > 1$

Но оператор A_{n_1} непрерывен. Тогда по непр н-во сохранится в некот. шаре в x_1.

$\exists V_{r_2}(x_1) : \forall x \in \overline{V_{r_2}}(x_2) \Rightarrow \|A_{n_1}(x)\| > 1$

В нем тоже неверно, тогда

$\exists n_2 > n_1$, что $\exists x_2 \in \overline{V_{r_2}}(x_1)$: $\|A_{n_2}(x_2)\| > 2$, $\overline{V_{r_3}}(x_2)$

Можно считать, что радиусы уменьшаются не менее чем в 2 раза.

По индукции построим послед. влож. шаров с $r \to 0$. Учитывая Банаховость, есть пересечение вложенности: $\bigcap V_i = a$. Если на некот. шаге x попадается на границу, возьмем шар поменьше. По постр. $\|A_{n_k}(a)\| > k$, но $\sup \|A_n(a)\| < +\infty$

$\|A_{n_k}(a)\| \to \infty$. $\times$

▷

Следствие X, Y – B-пространства, $A_n \in L(X, Y)$
$\forall x \in X \quad A_n x - A_m x \to 0$,

Тогда $\exists A \in L(X, Y)$ ограниченный. $\forall x \in X \quad A_n x \to Ax$

Δ Проверить с пом. т. Б-Ш ▽

Непрерывно обратимые операторы

Опр $A \in L(X, Y)$, $A: X \xrightarrow{\text{биекция}} Y$, $\exists A^{-1}: Y \xrightarrow{\text{лин.}} X$
если A^{-1} как оператор ограничен, то A – непрерывно обратим.

Теорема Банаха (очередная) и так далее!

$C \in L(X) := L(X, X)$, $\|C\| < 1$ $\boxed{X - \text{B-пр-во}}$

$\Rightarrow I - C$, $Ix = x$ непрерывно обратим.

Δ

$\ast \sum_{n=0}^{\infty} C^n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} C^k$, $S_n(I - C) = S_n - S_n \cdot C =$
$= S_n - \sum_{n=1}^{n+1} C^k = I - C^{n+1}$.

Очевидно, если поменять местами, то все он
$(I - C) S_n = I - C^{n+1}$

$\|C^n\| \le \|C\|^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|C^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|C\|^n < +\infty$, $\|C\| < 1$.

Тогда $\exists S = \sum_{n=0}^{\infty} C^n$, S ограничен (по B-пр-ву)
и $C^n \to 0$

$\ast \left.\begin{array}{l} S_n(I - C) \ominus \\ \ominus\ I - C^{n+1} \end{array}\right\} n \to \infty \Rightarrow \begin{array}{l} S(I - C) = I \\ (I - C) S = I \end{array}$

Тогда $S = (I - C)^{-1} \in L(X)$

▽

Опр $A: X \to Y$, $R(A) = \{Ax, x \in X\}$ – линейное мн-во в Y

Опр Априорная оценка решения операторного ур-я.
$y \in R(A) \Rightarrow Ax = y$ имеет решение.

$Ax = y$ имеет а о. р, если $\exists \alpha \in \mathbb{R} > 0$,
$\exists$ реш $\tilde{x}$ $A\tilde{x} = y$, $\forall y \in R(A)$, $\|\tilde{x}\| \le \alpha \|y\|$

Теорема $Ax = y$ имеет стр. о. для своих решений, то множество $R(A)$ замкнуто $(R(A) = Cl(R(A))$