12.02.2013 Лекция-лекция :3

Спектральная теория линейных операторов

§18 Линейные операторы и их матричная запись

Опр: $\mathcal{A}: X \to Y$ (X, Y – л.п. над F) – линейным

если $\forall x$ $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$;

$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x)$;

NB $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$

Пример: ① $\mathcal{J}: X \to X$ (автоморфизм) $\mathcal{J}x = x$ – тожд оператор

② $\mathcal{O}: X \to Y$ $\mathcal{O}x = 0$ – нулевой оператор

③ $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to L_1$, $\forall \underset{X}{x} = \underset{L_1}{x_1} + \underset{L_2}{x_2}$ $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x_1$

④ $X = \mathcal{P}_n$, $\mathcal{D}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ по ф-ле $\mathcal{D}(p(t)) = \frac{dp(t)}{dt}$;

⑤ $X = C^\infty(0,1)$

⑥ $\mathcal{K}(y(t)) = \int_\alpha^\beta q(t,s)\, y(s)\, ds$

Матрица ЛО:

$\underset{\dim X = n \;\; \dim Y = m}{\mathcal{A}: X \to Y}$ Базис X: $\{e_i\}_{i=1}^n$; базис Y: $\{h_k\}_{k=1}^m$

Матрицей ЛО $\mathcal{A}$ в базисах e_i и h_k называется матрица $\|\alpha_i^k\|$, такая, что

$\mathcal{A}e_i = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k h_k$ (то есть $((\mathcal{A}e_i)^k = \alpha_i^k)$)

Пример: $\mathcal{J}: X \to X$: $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}(e_1) \quad\quad \mathcal{A}(e_n) \end{array}$; для нулевого оператора нулевая матрица

Еще пример: $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$ $L_1: \{e_1 \dots e_s\}$ в L_2 $\{e_{s+1} \dots e_n\}$

Тогда $\forall x_1 \in L_1$ $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_1 = x_1$; $\forall x_2 \in L_2$ $\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x_2 = 0$

$$P_{L_1}^{L_2} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

Понятно?

$\mathcal{D}: P^n \to P^n$
$\{1, t, t^2 \ldots t^n\}$

$$D = \begin{array}{c} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^{n-1} \\ t^n \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}_1 = 0 \quad \mathcal{D}_2 = 1 \quad \mathcal{D}_3 = 2t \quad \mathcal{D}_n = nt^{n-1}$

Теорема: Задание линейного оператора эквив. заданию его матрицы в паре фикс. базисов

$A: X \to Y \quad \{e_i\}_{i=1}^n \quad \{h_k\}_{k=1}^m \quad A = \|\alpha_i^k\|: \alpha_i^k = (Ae_i)^k$

Δ в одну сторону очевидно.

в другую: $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$, $\boxed{Ax = y = \sum_{k=1}^m \eta^k h_k}$

$Ax = A\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \overset{ЛО}{=} \sum_{i=1}^n \xi^i Ae_i =$

$= \sum_{i=1}^n \xi^i \left(\sum_{k=1}^m \alpha_i^k h_k\right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^k \xi^i\right) h_k$

∇

$$x \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}; \quad \underset{(Ax)}{y} \leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow Y = AX$$

Опр Прямым произведением X и Y над F называется

$X \times Y = \{$все л.о. $X \to Y\}$

Опр $C = A + B$, если $C(x) = Ax + Bx$

Лемма C — лин. оператор

1. $C(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) + B(x_1 + x_2) = A(x_1) + B(x_1) + A(x_2) + B(x_2) = C(x_1) + C(x_2)$
2. $C(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda[A(x) + B(x)] = \lambda C(x)$

Опр $\mathcal{D}$ ...
Лемма ...
Теорема ...
Базис X ...
Упражнение ...
Теорема ...
NB A ...
$\dim(X \times$ ...
NB ...
Лемма ...
Теорема: ...
§19 Ал...
Опр. ЛГ...
если ...
Коммут...

Опр. $\mathcal{D}$ — произведением $\mathcal{A}$ на $\mathbb{B}$ λ, если

$$\mathcal{D} = \alpha\mathcal{A} \to \forall x \in X \quad \mathcal{D}(x) = \alpha\mathcal{A}x$$

Лемма. $\mathcal{D}$ линеен. (очевидно)

Теорема $X * Y$ — ЛП над F (Д-во — проверка 8 аксиом)

Базис $X * Y$: $\mathcal{E}^i_k : X \to Y$ по ф-лам

$$\mathcal{E}^i_k x = \xi^i h_k \quad \left[x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i,\ \{h_k\}_{k=1}^m \text{ — базис } Y\right]$$

$$\mathcal{E}^i_k \xrightarrow{\{e_i\}\{h_k\}} E^i_k \quad \begin{array}{c|c} & e_1\ e_2 \ \cdots\ e_i\ \cdots\ e_n \\ \hline h_1 & \\ \vdots & \\ h_k & \\ \vdots & \\ h_m & \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

$\boxed{\text{Упражнение !!!}}$

Теорема $\{\mathcal{E}^i_k\}$ — базис $X * Y$

NB $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha^k_i \mathcal{E}^i_k$

$\dim(X * Y) = n * m$ $\quad F^m_n$ — матрицы $m * n$

NB $\measuredangle$ F^m_n $(\mathbb{C}^m_n, \mathbb{R}^m_n)$, $\dim F^m_n = m \cdot n$, ?? ~ ?

Лемма $\mathcal{A} \to A$, $\mathcal{B} \to B$

Тогда $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \leftrightarrow C = A + B$,

$\mathcal{D} = \mathcal{A} \cdot \alpha \leftrightarrow D = \alpha \cdot A$;

Теорема: пространство $X * Y$ и F^m_n изоморфны

§19 Алгебра операторов и матриц

Опр. ЛП X над полем F называется алгеброй, если для него определена билинейная замкнутая бинарная операция ($[\bar{a}, \bar{b}]$)

Коммутативность, две дистрибутивности, ассоциативность.

3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\det AB = \det A \cdot \det B$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\hat{g}(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$ $\quad A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$g(A) = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad 1$

Д/З (с запасом)))

19.02.2014 Лекция — хуекция. :С ГРУСТПИЧАЛ

Опр $\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$ (где $\mathcal{A}: X\to Y$; $\mathcal{B}: Y\to Z$. $X\,Y\,Z$ - ЛП над F)

$\quad \mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, $\forall x\in X$ $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$

Лемма $\mathcal{C}$ - ЛО, т.е. $(\mathcal{C}: X\to Z) \Rightarrow \mathcal{C}\in X\times Z$

$\quad (\mathcal{C}(x_1+x_2) = \mathcal{C}(x_1)+\mathcal{C}(x_2),\ \mathcal{C}(\lambda x) = \lambda\mathcal{C}(x))$

$\exists \dim X = n$ $\quad \dim Y = m$, $\dim Z = p$;

$\{e_i\}_{i=1}^n$ $\quad \{h_j\}_{j=1}^m$ $\quad \{\ell_k\}_{k=1}^p$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A = \|\alpha_i^\nu\|$ $\quad \mathcal{B} \leftrightarrow B = \|\beta_j^k\|$ $\quad \mathcal{C} \leftrightarrow C = \|\gamma_i^k\|$

$\triangle$ $\mathcal{C}e_i \overset{\text{def } C}{=} \sum_{k=1}^p \gamma_i^k \ell_k$

$\mathcal{C}e_i = (\mathcal{B}\cdot\mathcal{A})e_i = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_i) \overset{\text{def } A}{=} \mathcal{B}\left(\sum_{\nu=1}^m \alpha_i^\nu h_\nu\right) \overset{\mathcal{B}\text{-ЛО}}{=}$

$= \sum_{\nu=1}^m \alpha_i^\nu \mathcal{B}h_\nu \overset{\text{def } B}{=} \sum_{\nu=1}^m \alpha_i^\nu \left(\sum_{k=1}^p \beta_\nu^k \ell_k\right) = \sum_{k=1}^p \left(\underline{\sum_{\nu=1}^m \beta_\nu^k \alpha_i^\nu}\right)\ell_k$

$\gamma_i^k = \sum_{\nu=1}^m \beta_\nu^k \alpha_i^\nu$ $\quad C = B\cdot A$

$\widetilde{\triangle}$ $X\times X = \{\mathcal{A}: X\to X\}$ - мн-во всех автоморф.

Теорема. $X \cdot X$ - алгебра над F ($X \overset{\text{л/п}}{\text{над}} F$)

$BA : X \to X$

$X \xrightarrow{A} X \xrightarrow{B} X$, $\quad BA$

$\triangleleft\ F^n_m = \{A_{(n \times n)} = \|\alpha^i_k\|,\ \alpha^i_k \in F\}$

Теорема. F^n_m — алгебра над F

Определ. Две алгебры X и Y над F называются изоморфными, если между элементами можно установить соответствие, сохраняющее линейную и мультипликативную структуру, то есть:

1) $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$
2) $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$ для $\forall x, y$ $\quad x \in X$, $y \in Y$
3) $x_1 x_2 \leftrightarrow y_1 y_2$

Теорема $X \cdot X$ и F^n_n изоморфны

б20 Обратная матрица. Обратный опер.

Опр Пусть X - алгебра. Единица алгебры e н. $e \in X$: $\forall x \in X\ xe = ex = x$

Лемма e — единственная $ee' = e'e = \dots$ ∇

Опр Пусть $x, y \in X$, пусть $x \cdot y = e$, тогда x н. левым обратным элементом к y, а y — правым обратным к x;

Опр Пусть z имеет и левый и правый обратный (z^*) одинаковый эл-т. Тогда z называется обратимым, а z^{-1} — обратным к z.
$zz^{-1} = z^{-1}z = e$

Лемма Пусть z имеет имеет левый a и правый b, тогда z обратим, а $z^{-1} = xzy$; z^{-1} — !

$x \cdot z = e$

$z^{-1} z \tilde{z}^{-1}$

// Haskell -

Опр Пусть $A \in$

Опр Квадр

Теорема

Доказ. $\Leftarrow$ 1 B

① $\triangleleft\ A \cdot B = E$

$\begin{pmatrix} \beta^1_k \\ \beta^2_k \\ \vdots \\ \beta^n_k \end{pmatrix}$ - нал

det сущ.

② $\triangleleft\ CA = E$

Пусть фикс

Необх: ($B =$

Вычислен

① Гаусс:
$\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \beta$

② Метод

Опр. $A =$

$x \cdot z = e$, $z \cdot y = e$; $\forall\, x \cdot z \cdot y = ey = y$
$x \cdot (z \cdot y) = xe = x$ ищи наоборот все

$z^{-1} z z^{n-1} = \dots = \nabla$

// Haskell – Jowowitch – Bdjenzewskiy

Опр $\exists A \in F^n_n$, $A^{-1} \in F^n_n$ — обратная к A если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Опр Квадратн. матрица A — невыр. если $\det A \neq 0$.

Теорема A^{-1} exists $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Доет $\Leftarrow$ 1 B: $AB = E$ 2 A: $BA = E$ $\Rightarrow C = B = A^{-1}$

① $\forall\, A \cdot B = E$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k$ (1) $\forall k$ фикс:

$\begin{pmatrix} \beta^1_k \\ \beta^2_k \\ \vdots \\ \beta^n_k \end{pmatrix}$ — как неизв. в (1) det сист $= \det A$

det сущ, $\det \neq 0 \Rightarrow$ Крамер $\begin{pmatrix} \beta^1_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta^n_n \end{pmatrix} = B$

② $\forall\, CA = E$ $\sum \gamma^i_j \alpha^j_k = \delta^i_k$ $\{ i=1 \; (\gamma^i_1 \dots \gamma^i_n) = e$

$\exists$ фикс „i"

Необх: $B = A^{-1}$ $AB = E$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k$

И куча слов.........................

Вычисление A^{-1}

① Гаусс: $(A|E) \rightsquigarrow_{\text{гаусс}} \sim (E|A^{-1})$

$\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \beta^j_k = \delta^i_k$ $\begin{cases} \alpha^1_1 \beta^1_1 & \alpha^1_2 \beta^2_1 \dots = \delta^1_k \\ \vdots \\ \alpha^n_1 \beta^1_k & \alpha^n_2 \beta^2_k \dots = \delta^n_k \end{cases}$ & ...... ?

② Метод союзной матрицы

Опр $\tilde{A} = \| A^i_j \|$ / $A^i_j = (-1)^{i+j} M^i_j$

И д-во...?

Теорема $A^{-1} = \dfrac{(\check{A})^T}{\det A}$, $\exists A = (a_1 \dots a_n)$ $a_j = \begin{pmatrix} \alpha^1_j \\ \vdots \\ \alpha^n_j \end{pmatrix}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^i_\nu \beta^\nu_k = \delta^i_k$$

k фикс. Сл-р $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ «k», $\beta^\nu_k = \dfrac{\det(a_1 \dots a_n / a_j \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} «k»)}{\det A}$

$$«k» \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \dots & \overset{«\nu»}{0} & \dots & \alpha^1_n \\ \vdots & & & & \\ \alpha^k_1 & \dots & 1 & \dots & \alpha^k_n \\ \vdots & & & & \\ \alpha^n_1 & \dots & 0 & \dots & \alpha^n_n \end{vmatrix} = 0 + 0 + \dots + 1 \cdot (-1)^{k+\nu} M^k_\nu + \dots + 0 = A^k_\nu$$

$$B = A^{-1} = \frac{(\check{A})^T}{\det A}$$

Обратный оператор

Опр. $\exists A: X \to X$: $A \in X \times X$, A^{-1} — обратный, если
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Теорема: A^{-1} ex $\Leftrightarrow$ в $\{e_i\}_{i=1}^n$ (каком-нибудь) $\det A \neq 0$

Д-во через соотв. с $A \leftrightarrow A$

10.02.2014 Д/З

3.109 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

3.112 $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$

3,115

3.118

3,121

3,125

3,126

3,127

(26.02.2014) Лекция

Опр $\exists A: X \to Y$; $\operatorname{Im} A = \{y \in Y \mid y = Ax\}$
$\operatorname{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$

Теорема о ядре и образе: Лемма: $\operatorname{Ker} A$ – пп X, $\operatorname{Im} A$ – пп Y

$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim X$

Д-во: $\dim \operatorname{Ker} A = k$, $\exists \{e_1, e_2, e_3 \dots e_k\}$ – базис $\operatorname{Ker} A$
$\dim X = n$, $\{\underbrace{e_1 \dots e_k}_{\text{базис } \operatorname{Ker} A}, e_{k+1} \dots e_n\}$ – базис ~~dim~~ X

1. соображение: $\operatorname{Im} A = ЛО \{Ae_{k+1} \dots Ae_n\}$

$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i$; $Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi^i Ae_i \overset{e_1 \dots e_k \in \operatorname{Ker}}{=} \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i Ae_i$

2. $\{Ae_{k+1} \dots Ae_n\}$ – ЛНЗ $\qquad A: X \to X$

$\longleftarrow$ П: $\exists \alpha_i \neq 0 \mid \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ae_i = 0$

$x = \alpha_{k+1} e_{k+1} \dots \alpha_n e_n \in \operatorname{Im} A$
$Ax = A\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ae_i = 0$ $\quad Ax = 0$, $x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i$ $(\in \operatorname{Ker} A)$

Значит $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim X = n$.

Теорема Инвариантная формулировка существ. обр. опер.
для $\exists A^{-1}$ НиД $\begin{cases} \operatorname{Ker} A = \{0\} \\ \operatorname{Im} A = X \end{cases}$ $(A: X \to X)$

Д-во: $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$
$Ax = 0$; $\longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = 0$ $(i = 1 \dots n)$,
значит $\det A \neq 0$ (Крамер) $A^{-1} \longleftrightarrow A^{-1}$

(§21) Преобразование (координат в-в X и X^*) и (матрицы $A: X \to X$) при замене базиса

$\{e_i\}_{i=1}^{n} \longleftrightarrow \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{n}$ $\quad T = \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \dots & \tau^1_n \\ \tau^n_1 & \dots & \tau^n_n \end{pmatrix}$, $\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \tau^i_k e_i$,
т.е. $\tau^i_k = (\tilde{e}_k)^i$

Лемма T невырожденная, т. е. $\det T \neq 0$;

$(\tilde{e}_1 \ldots \tilde{e}_n) = (e_1 \ldots e_n)\cdot T \;\Big|\; T^{-1}$

$\tilde{e} = eT; \quad \Rightarrow e = \tilde{e}T^{-1}$

$\exists\, T = \|\tau^i_k\| \quad T^{-1} = S = \|\sigma^i_k\|$

$\{e_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow \{f^k\}_{k=1}^n \quad (f^k, e_i) = \delta^k_i$

$X \qquad X^*$

$\forall\, \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n \longleftrightarrow \{\tilde{f}^k\}_{k=1}^n \quad (\tilde{f}^k, \tilde{e}_i) = \delta^i_k$

$\boxed{\tilde{f}^k = \sum_{\nu=1}^n \beta^k_\nu f^\nu} \; (*) \; \left(\sum_{\nu=1}^n \beta^k_\nu f^\nu, \sum_{s=1}^n \tau^s_i e_s\right) = (X^*\text{-лин} + \text{св-ва})$

$= \sum_{\nu=1}^n \sum_{s=1}^n \beta^k_\nu \tau^s_i \underbrace{(f^\nu, e_s)}_{\delta^\nu_s} = \sum_{\nu=1}^n \beta^k_\nu \tau^\nu_i = \delta^k_i$

Значит $B = T \cdot E \quad B\cdot T = E$

$B = T^{-1} = S$

Отсюда $\{f^i\} \underset{T}{\overset{T^{-1}}{\rightleftarrows}} \{\tilde{f}^k\}$

$x \in X$, x разлагается и по $\{e\}$ и по $\{\tilde{e}\}$

$x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i \qquad \xi^i = (f^i, x)$

$= \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k \qquad \tilde{\xi}^k = (\tilde{f}^k, x)$

$\tilde{\xi}^k = (\tilde{f}^k, x) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma^k_i f^i, \sum_{\nu=1}^n \xi^\nu e_\nu\right) = \ldots =$

$= \sum_{i=1}^n \sigma^k_i \xi^i$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \tilde{\xi}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}^n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} \qquad \boxed{\tilde{\xi}^k = \sum_{i=1}^n \sigma^k_i \xi^i} \quad (1)$$

Лемма

$f \in X^*$ $\boxed{\text{упр}}$ $\quad f = \sum_{i=1}^n \eta_i f^i = \sum_{k=1}^n \tilde{\eta}_k \tilde{f}^k \quad$ Тогда $\boxed{\tilde{\eta}_k = \sum_{i=1}^n \tau^i_k \eta_i} \quad (2)$

Опред. Величины, преобразующиеся при замене базиса по тому же закону, как векторы базиса исходного пр-ва называются ковариантными и снабжаются нижним инд.

Опр Величины, преобр. по обр. закону ($c\ T^{-1}$) назыв. контрвариантными величинами и снабжаются верхним индексом

$\varphi \xrightarrow{\{e_i\}} C = \| \gamma^i_k \|$ $\quad \gamma^i_k = (\varphi e_k)^i = (f^i, \varphi e_k)$

$\varphi \xrightarrow{\{\tilde e_i\}} \tilde C = \| \tilde\gamma^i_k \|$ $\quad$ Аналогично для $\tilde\gamma$

$$\tilde\gamma^i_k = \Big(\sum_{j=1}^n \sigma^i_j f^j, \varphi\Big(\sum_{s=1}^n \tau^s_k e_s\Big)\Big) = \sum_{s,j=1}^n \sigma^i_j \tau^s_k (f^j, \varphi e_s) =$$

$$= \sum_{j,s=1}^n \sigma^i_j \tau^s_k \Big(f^j, \sum_{t=1}^n \gamma^t_s e_t\Big) = \sum_{j,s,t=1}^n \sigma^i_j \tau^s_k \gamma^t_s \underbrace{(f^j, e_t)}_{\delta^j_t} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \sigma^i_j \gamma^j_s \tau^s_k ,$$

Выходит, что $\tilde\gamma^i_k = \sum_j \sum_s \sigma^i_j \gamma^j_s \tau^s_k$,

$$\tilde C = T^{-1} C T$$

Опр. $\exists T: \det T \neq 0$, $\tilde C = T^{-1} C T$ – преобр. подобия м. C с коэффициентом подобия T

Теорема при замене базиса матрица ЛО получается преобр. подобия с коэфф подобия $T(e_1 \to e_2)$

(5.22) Независимое (от ПЛФ) определение тензора. Свертка ПЛФ и тензоров

$\exists U \in \Omega^p_q \ \| \ \tilde\omega^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = U(\tilde e_{i_1} \dots \tilde e_{i_p}, \tilde f^{j_1} \dots \tilde f^{j_q}) =$

$= U(\tau^{s_1}_{i_1} e_{s_1}, \dots, \tau^{s_p}_{i_p} e_{s_p}, \sigma^{j_1}_{t_1} f^{t_1}, \dots, \sigma^{j_q}_{t_q} f^{t_q}) =$

$= \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} \sigma^{j_1}_{t_1} \dots \sigma^{j_q}_{t_q} \omega^{t_1 \dots t_q}_{s_1 \dots s_p}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde e_k\} \\ \tilde e_k = \sum_{i=1}^n \tau^i_k e_i \\ \hline \{f^j\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde f^t\} \\ T^{-1} = S = \|\sigma^i_k\| \\ \tilde f^t = \sum_{j=1}^n \sigma^t_j f^j \end{array}}$$

Опр $\exists$ задан закон преобразования

$$\tilde\omega^{j_q}_{i_p} = \tau^{s_1}_{i_1} \dots \tau^{s_p}_{i_p} \sigma^{j_1}_{t_1} \dots \sigma^{j_q}_{t_q} \omega^{t_q}_{s_p} \qquad (*)$$

Тогда набор из n^{p+q} чисел $\omega^{i_p}_{j_q}$ с $(*)$ при зам. базиса наз. p – ковар. q – контрвар. тенз.

Свёртки

Опр $\exists\, U$ − ПЛФ $\in \Omega^p_q$

$\sphericalangle\; V(x_1 \ldots x_{s-1}, x_{s+1} \ldots x_p, y^1 \ldots y^{t-1}, y^{t+1} \ldots y^q) \overset{def}{=}$

$= U(x_1 \ldots x_{s-1}, \overset{s}{e_i}, x_{s+1} \ldots x_p, y^1 \ldots y^{t-1}, \overset{t}{f^i}, y^{t+1} \ldots y^q)$

Тогда ПЛФ $V \in \Omega^{p-1}_{q-1}$ зв свёрткой ПЛФ U по аргументам x_s и y^t

Лемма предыдущее определение корректно в том смысле, что свёртка не зависит от пары сопр. базисов.

$\sphericalangle\; U(\ldots \overset{s}{\tilde{e}_i} \ldots \overset{t}{\tilde{f}^i} \ldots) = U(\ldots \tau_i^k e_k, \ldots, \sigma_j^i f^j, \ldots)$

$= \tau_i^k \sigma_j^i U(\ldots e_k \ldots f^j \ldots) = \delta_j^k U(\ldots e_k \ldots f^j \ldots) =$

$= \sum_{k=1}^n 1 \cdot U(\ldots e_k \ldots f^k \ldots)$

← немая сумма (потенциал расширит)

Опр $\omega^{j_q}_{i_p}$ − тензор ранга (p, q)

$\sphericalangle\; \overset{i_s j_t}{\omega}{}^{j_1 \ldots j_{t-1}, j_{t+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{s-1}, i_{s+1} \ldots i_p} \overset{def}{=} \omega^{j_1 \ldots j_{t-1}\, l\, j_{t+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{s-1}\, l\, i_{s+1} \ldots i_p} \quad (**)$

Тогда $\overset{i_s j_t}{\hat{\omega}}$ зв свёрткой ω по i_s и j_t

Лемма $\overset{i_k \wedge j_l}{\overset{i_s \wedge j_t}{\omega}}{}^{j_{q-2}}_{i_{p-2}} = \overset{i_s j_t}{\overset{i_k j_l}{\omega}}{}^{j_{q-2}}_{i_{p-2}}$

Лемма Можно свернуть по 1 в. или 1 ниж., но нельзя сворачивать по 2 верх. или 2 ниж.

Опр $\exists\, \omega^{j_p}_{i_p}$, тогда p-кратная свёртка назыв. полной свёрткой

Пример

Тензор ω^i_k − ранг $[1; 1]$

$\omega^i_i = \omega$

$\tilde{\omega}^i_k = \tau^i_t \sigma^s_k \omega^t_s \Rightarrow \tilde{\omega}^i_i = \delta^s_t \omega^t_s = \omega^s_s$

Опр $\exists\, A \overset{\{e_i\}}{\longleftrightarrow} A = \|\alpha^i_k\|$ $\quad Tr A = \sum_{i=1}^n \alpha^i_i$ зв следом A

Эрартия

Теорема $T_r A$ не зависит от базиса A (инвариант)

§23 Транспонирование тензора

$\measuredangle$ ~~тензо~~ многомер. матрица $\alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$

$$\alpha_{ijk} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{111} & \alpha_{121} \\ \alpha_{211} & \alpha_{221} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{matrix} \right\|, \quad i,j,k = 1,2$$

Опр. Двумерным слоем $\alpha_{i_p}^{j_q}$ отв. индекс. j_1, j_2 назыв. двухмерная матрица, получаемая фиксированием всех, кроме j_1 и j_2

Опр. Транспонированием матрицы $\alpha_{i_p}^{j_q}$ по j_1 и j_2 $\rangle$ такая ее перестановка элементов, что все двумерные слои, отвечающие этим индексам, транспонируются обычным образом

$$\beta_{i_1 i_2\ldots i_p}^{j_1 j_2\ldots j_q} = \alpha_{i_1\ldots i_p}^{j_2 j_1\ldots j_q}$$

$$\beta_{ijk} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{111} & \alpha_{211} \\ \alpha_{121} & \alpha_{221} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha_{112} & \alpha_{212} \\ \alpha_{122} & \alpha_{222} \end{matrix} \right\|$$

$\exists\, \omega_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$ - тензор (p,q), $\exists$ в каждом базисе.

$$\omega_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \longleftrightarrow \mathcal{X}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} = \omega_{i_1\ldots i_p}^{j_2 j_1\ldots j_q}$$

Теорема $\mathcal{X}_{i_p}^{j_q}$ — тоже тензор ранга (p,q) $\begin{pmatrix} t_2 \Rightarrow t_1 \\ t_1 \Rightarrow t_2 \end{pmatrix}$

Док-во: $\measuredangle\ \tilde{\mathcal{X}}_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q} \overset{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{i_1\ldots i_p}^{j_2 j_1\ldots j_q} = \sigma_{t_1}^{j_2}\sigma_{t_2}^{j_1} \ldots \sigma_{t_q}^{j_q} \tau_{i_1}^{s_1} \ldots \tau_{i_p}^{s_p} \omega_{s_1\ldots s_p}^{t_1\ldots t_q} =$

$$= \sigma_{t_1}^{j_1}\sigma_{t_2}^{j_2} \ldots \sigma_{t_q}^{j_q} \tau_{i_1}^{s_1} \ldots \tau_{i_p}^{s_p} \omega_{s_1\ldots s_p}^{t_2 t_1\ldots t_q} = \sigma_{t_1}^{j_1}\sigma_{t_2}^{j_2} \ldots \sigma_{t_q}^{j_q} \tau_{i_1}^{s_1} \ldots \tau_{i_p}^{s_p} \mathcal{X}_{s_1\ldots s_p}^{t_1\ldots t_q}$$

Лемма Трансп. тензор без ущерба можно либо по паре 2 верхних либо по 2 нижних.

(1-24) Определитель ЛО. Внешняя степень ЛО. Теорема об умножении определителей.

Опр. Пусть $\{y^1 \dots y^n\} \subset X^*$ $(\dim X^* = n)$; $\det\{y^1 \dots y^n\}$ — число, опр. равенством:

$$y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = \det\{y^1 \dots y^n\}\, f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \quad (1)$$

$[\Lambda^n \ (n;0): \dim \Lambda^n = C_n^n = 1$

$$F^{1,2..n} = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n]$$

Теорема: $\det\{y^1, y^2 \dots y^n\} = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \eta^1_{j_1} \eta^2_{j_2} \dots \eta^n_{j_n} = \det \|\eta^i_j\|$

— $y^1 \wedge y^2 \wedge \dots \wedge y^n = (\eta^1_{s_1} f^{s_1}) \wedge (\eta^2_{s_2} f^{s_2}) \wedge \dots \wedge (\eta^n_{s_n} f^{s_n}) =$

$= \sum_{s_1 \dots s_n = 1}^{n} \eta^1_{s_1} \eta^2_{s_2} \dots \eta^n_{s_n} f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge \dots \wedge f^{s_n} =$

$\overset{\#}{=} \left(\sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} \eta^1_{s_1} \eta^2_{s_2} \dots \eta^n_{s_n} \right) f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$

NB $\det[x_1 \dots x_n] = f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n (x_1 \dots x_n) =$

$= \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi^{j_1}_1 \xi^{j_2}_2 \dots \xi^{j_n}_n = \det \|\xi^i_j\|$

Вспомним про естественный автоморфизм

$$(\underset{X^{**}}{\hat{x}}, f) = (f, \underset{X}{x})$$

Опр2 Пусть $\{x_1 \dots x_n\} \subset X (= X^{**})$, $\det\{x_1 \dots x_n\}$ — число, определяемое равенством: $[\dim \Lambda_n = C_n^n = 1]$

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \overset{def}{=} \det\{x_1 \dots x_n\} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$$

Теорема2: $\det\{x_1 \dots x_n\} = \det[x_1, x_2 \dots x_n] = \det \|\xi^i_k\|$

Опр Детерминантом ЛО называется det следующего набора векторов:

$\det A = \det\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$, т.е. $Ae_1 \wedge \dots \wedge Ae_n =$
$= \det A \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$; (*)

Теорема 3:
Тогда: det
[Упражнени
Опр3:
1)
2) На
Теорема
Лемма
Тогда
Теорема
не зав
Теорема

Теорема 3: $\exists \mathcal{A} \overset{\{e_i\}}{\leftrightarrow} A = \|\alpha_k^i\|,\ \alpha_k^i = (\mathcal{A}e_k)^i$

Тогда: $\det \mathcal{A} = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \dots \alpha_n^{j_n} = \det A;$

$\boxed{\text{Упражнение}}$

Опр: $\forall \underset{(0,k)}{\Lambda_k}$ $\mathcal{A}^{\Lambda_k}: \Lambda_k \to \Lambda_k$ — оператор сл. вида:

$(F_{j_1 \dots j_n} = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}$ — базис $\Lambda_k)$

1) $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) \overset{def}{=} \mathcal{A}e_{j_1} \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k}$

2) На остальные — по линейности:

$\mathcal{A}^{\Lambda_k}(\alpha F_{e_{j_1} \dots e_{j_k}} + \beta F_{e_{s_1} \dots e_{s_k}}) = \alpha \mathcal{A}^{\Lambda_k}(F_{e_{j_1} \dots e_{j_k}}) + \beta \dots$

Теорема $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \overset{?}{=} \mathcal{A}x_1 \wedge \mathcal{A}x_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}x_n$ (**)

$\triangle$ $\mathcal{A}^{\Lambda_k}(x_1 \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) = \mathcal{A}^{\Lambda_k}((\sum_{j_1=1}^n \xi_1^{j_1} e_{j_1}) \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_n}) =$

$= \sum_{j_1=1}^n \xi_1^{j_1} \mathcal{A}e_{j_1} \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k} = \mathcal{A}\left(\sum \xi_1^{j_1} e_{j_1}\right) \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k} =$

$= \mathcal{A}x_1 \wedge \mathcal{A}e_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_{j_k}$

Лемма (о внешней степени $\mathcal{A}^{\Lambda_n}$) $\exists \dim X = n$

Тогда $\forall Z \in \Lambda_n$ $\boxed{\mathcal{A}^{\Lambda_n} Z = \det(\mathcal{A}) Z}$ (*)

$\triangle$ $\dim \Lambda_n = 1 = C_n^n \Rightarrow \forall Z_1 \in \Lambda_n: Z_1 = \alpha e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \alpha \cdot F_{1 \dots n}$

$\mathcal{A}^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{(**)}{=} \mathcal{A}(e_1) \wedge \mathcal{A}e_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}e_n \overset{(*)}{=}$

$= \det \mathcal{A} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \,\Big|\cdot \alpha$; $\alpha \mathcal{A}^{\Lambda_n}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) =$

$= \mathcal{A}^{\Lambda_n} Z_1 = \det \alpha \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n = \det \mathcal{A} \cdot Z$, чтд $\triangledown$

Теорема $\det$ любого ЛО и $\det$ любой матрицы не зависит от базиса

Теорема $\exists \mathcal{A}, \mathcal{B}: X \to X$, Тогда $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$

$\det(\mathcal{A}\mathcal{B})\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n \overset{(*)}{=} (\mathcal{A}\mathcal{B})^{\Lambda_n} e_1 \wedge \dots \wedge e_n \overset{(**)}{=}$

$= (\mathcal{A}\mathcal{B}e_1) \wedge (\mathcal{A}\mathcal{B}e_2) \wedge \dots \wedge (\mathcal{A}\mathcal{B}e_n) = \mathcal{A}(\mathcal{B}e_1) \wedge \dots \wedge (\mathcal{A}(\mathcal{B}e_n)$

$\overset{(**)}{=} \mathcal{A}^{\Lambda_n}(\mathcal{B}e_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}e_n) \overset{(*)}{=} \det \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}e_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{B}e_n) \overset{(**)}{=}$

$= \det A \cdot B^{\wedge n}(e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{(*)}{=} \det A \det B\, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$,

Отсюда следует $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;

<u>Следствие</u> №1 $\exists A: X \to X$, $\det A \neq 0$, тогда:

$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$

<u>Факт</u> $\det A = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}; \exists A^{-1}$;

$AA^{-1} = E$, $\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow$

<u>Следствие</u> №2 (о независимости $\det A$ от базиса)

$\exists \{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\}$ ($\det T \neq 0$), $\exists A: X \to X$

Тогда $\det \tilde{A} = \det A$, где $\tilde{A} = T^{-1} \times A \times T$;

<u>Д-во</u>: $\det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T =$

$= (\det T)^{-1} \det A \det T = \det A$;

<u>Спектральный</u> <u>анализ</u> <u>по</u> <u>скалярному</u> <u>типу</u>

Умеем: $p(A) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s A^s$ $(A^s = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{s})$, $A^0 = J$

Квазиполиномы: $\tilde{p}(A) = \sum_{s=-m}^{k} \alpha_s A^s$

Но $\frac{df}{dt} = Af$, $f(t) = e^{At}$, экспонента от матрицы

$\forall J$; $\forall A = \lambda J$; $f(A) = f(\lambda) J$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, тогда

$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>План</u> спектр. анализа:

1) Найти инвариант. пп по A, т.е. $L_i: x \in L_i \Rightarrow Ax \in L_i$
2) $X = \dot{+}\sum_{i=1} L_i$
3) Как действует A в L_i $\quad Ax = \lambda_i x$
4) Строить функции

$f \leftrightarrow (1;1;2;2)$ $\quad \Lambda^3$

$g \leftrightarrow (1;1;1;3)$ $\quad \dim \Lambda^3 = C_3^4 = 4$

$h \leftrightarrow (1;1;1;2)$

$$f\wedge g\wedge h^{(3;0)} = AF^{123} + BP^{124} + CF^{134} + DP^{234} =$$

$=$

36,38 1
36,40 1
36,39 1
36,41 1
36,42 1 3
38,2
38,3 3
38,4 4
38,5 4

§25 Инварианты матриц ЛО. Инвариантные подпространства.

Опр Инвариантом матриц ЛО называется ее числовая хар-ка, не зависящая от выбора базиса

Опр Хар-стический полином ЛО A — $\det(A-\lambda I)$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda E)$$

△ $\det(A-\lambda E) = \det\|\alpha^i_j - \lambda\delta^i_j\| =$

$$= \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} (\alpha^1_{j_1} - \lambda\delta^1_{j_1}) \dots (\alpha^n_{j_n} - \lambda\delta^n_{j_n}) =$$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha^i_i}_{\text{TRACE-inv}} + \dots + \lambda_0 \underbrace{\det A}_{\det\text{-inv}};$$

Опр ∃A:
если ∀x
Пример
2. ∡A=
3. $X = L_1 \dotplus$
$L_1; L_2$ -
§26 Со
Опр ∃x ≠ 0
Тогда x
Опр ∃x ≠ 0
собств. вект
Лемма Опр
△ Опр1 →
$x = \alpha e,$
Опр2 →
▽
Пример ∃
Опр Множе
оператора
$\tilde{\sigma}_A = \{$
(2) $X = L_1 \dotplus$
∡ $P_{L_1}^{\|L_2}$

Опр $\exists \mathcal{A}: X \to X$, пп L пп X — инвариант. для $\mathcal{A}$ если $\forall x \in L \Rightarrow \mathcal{A}x \in L$. $(\mathcal{A}(L) \subseteq L)$

Пример 1. Трив. пп X и $\{0_x\}$ — инв. для $\forall \mathcal{A}: X \to X$

2. $\triangleleft \mathcal{A} = \lambda \mathcal{I}$; $\forall$ пп L — инв.

3. $X = L_1 \dot{+} L_2$; $\mathcal{A} = \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}: X \to X$

$L_1; L_2$ — инварианты: $\forall x \in L_1\ \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x$, $\forall y \in L_2\ \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0$

(5.26) Собственные вектора и значения ЛО

Опр $\exists x \neq 0_x$ $\exists x \in L$, где L — 1-мерное инв пп по $\mathcal{A}: X \to X$. Тогда x — собственный в-р $\mathcal{A}$

Опр $\exists x \neq 0_x$ $\exists \mathcal{A}x = \lambda x$ ($\lambda \in F$, X — над F). Тогда x — собств. вектор $\mathcal{A}$, при этом λ — собств. значение

Лемма Опр 1 $\Longleftrightarrow$ Опр 2.

Δ Опр 1 $\to$ Опр 2; $\dim L = 1$; $\exists L = \text{ло}\{e\}$

$x = \alpha e$, $e = \frac{x}{\alpha}$. $\mathcal{A}x \in L = \beta e = \frac{\beta}{\alpha} x = \lambda x$

Опр 2 $\to$ Опр 1 $\mathcal{A}x = \lambda x$ $\triangleleft L = \text{ло}\{x = e\}$

∇

Пример ① 3 $\mathcal{A} = \lambda \mathcal{I}$ $\quad \lambda_3 = \lambda, \lambda$ $\quad$ Св — $\forall$ в $x \in X$ $\quad \sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda\}$

Опр Множество всех собственных значений оператора есть его спектр.

$\sigma_{\mathcal{A}} = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$. — вот так :3

② $X = L_1 \dot{+} L_2$;

$\triangleleft \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2}$ $\quad \mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} x = x$ $\quad \lambda_1 = 1 \longleftrightarrow \forall$ в $x \in L_1$

$\mathcal{P}_{L_1}^{\parallel L_2} y = 0$ $\quad \lambda_2 = 0$

Лемма Все собственные вектора, отвечающие одному и тому же собств. значению образуют собственное пп

$$\mathcal{A}(x_1+x_2) = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1+x_2)$$

Теорема $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ — с.з. $\mathcal{A}$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)

$\quad\; \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow$

$x_1, x_2 \dots x_k$ — с.в. ($\mathcal{A}x_i = \lambda_i x_i$)

Тогда $\{x_1 \dots x_n\}$ — ЛНЗ

Д-во: 1. $\{x_1 \neq 0_x\}$

2. $\exists \{x_1 \dots x_{m-1}\}$ — ЛНЗ $\overset{?}{\Rightarrow} \{x_1 \dots x_m\}$ — тоже ЛНЗ
$m \leq k$

$\forall\, \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} = 0_x \Rightarrow \alpha_1 = \dots = 0 \quad (*)$

Надо: $\forall\, \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_x \quad (**)$

$$\mathcal{A}(**) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0_x$$

$$-\ \lambda_m(**) = \alpha_1 \lambda_m x_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m = 0_x$$

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} x_1 + \dots + \alpha_{m-1} \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} x_{m-1} + 0_x = 0_x$$

Значит $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$

Подставим в $(**) \Rightarrow \alpha_m = 0$. $(*)$ верно.

∇

Следствие у л.о. $\mathcal{A}: X \to X$ ($\dim X = n$) не может быть больше n собств. значений

О схеме и $\exists$ собств. векторов

(!) Далее (если не оговорено) X над $F = \mathbb{C}$

$\forall\, \mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathcal{A}x - \lambda \mathcal{I} x = 0_x$

Лемма $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ — н.и.д. $\exists$ с.в. x

Теорема у
1 с.з. и

Основная
у любого
из $\mathbb{C}$

Опр корни
ранте

Лемма
одно

Замеч. в
явле

13.03.2014

Опр Опера
ратор
транс

$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ —

Опр Собств
является
то если

$\forall \exists \lambda$, с

Опр Опера
лоз. опер

Теорема Опе

Процедура

$\mathcal{A}x = \lambda x$
$x \leftarrow c$

1. Рассмо

Теорема: У $A: X \to X$, X над $\mathbb{C}$ всегда $\exists$ по кр. мере 1 с.ч. и 1 с.в.

Основная теорема векторной алгебры:
У любого полинома есть хотя бы один корень из $\mathbb{C}$

Опр: Корни характеристического полинома $\mathcal{P}$ характеристическими числами

Лемма: В случае X над $\mathbb{C}$ все хар. числа явл. одновременно и собственными.

Замеч.: В случае X над $\mathbb{R}$ собственными числами являются вещественные

13.03.2014 Лекция

Опр: Оператором скал. типа (скал. опер.) $\mathcal{A}$ назов. оператор, из собств. векторов которого можно построить базис

$A = \lambda I$ – подходит например

Опр: Собственное значение λ_0 $\mathcal{P}$ простым, если оно является корнем кратности 1 (простым) хар. полинома, то есть

$\exists \lambda_1$ с.ч. A_1 $\quad \exists\, Q(\lambda) = \dfrac{\chi_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$

Опр: Оператор, все собств. значения котор. простые, наз. оператором с простым спектром.

Теорема: Оператор с простым спектром — скалярный.

Процедура счета собств. векторов и знач.:

$A x = \lambda x$ $\qquad$ ИнД $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

$x \leftarrow$ с.з. λ

1. Рассмотрим $\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \{\lambda_1 \dots \lambda_k\} = \sigma_A(\mathbb{C})$

2. $(\lambda = \lambda_1) \to$ в (*)

$(A-\lambda_1 E)\cancel{X} = 0 \to x_1$

Аналогично $\lambda_2 \to x_2$

Аналог. $\lambda_n \to x_n$

§27?!

$$\boxed{\begin{array}{l} (*)\ (A-\lambda E)X = 0 \\ \text{Ур-е на собств. векторы} \\ (**)\ \chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = 0 \\ \text{Ур-е на собств. значения} \end{array}}$$

§27 Спектральный анализ ЛО с прост. спектром

__Дано__ $A: X \to X$ $(\dim X = n)$ $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda ...)^{\beta_x}$

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n\}$, находим собств. $\{x_1 ... x_n\}$, из которых можно сделать базис

$Ax_i = \lambda x_i$

__Теорема__ матрица оператора с простым спектром в базисе из его собств. векторов имеет диагон. вид:

$$A^d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

__Теорема__ $\exists A^d \xleftrightarrow{\{e_i\}} A$, тогда $A^d = TAT^{-1}$, где $T = \{x_1 ... x_n\}$

__Следствие.__ Матрица оператора с простым спектром подобна диагональной

__Теорема__ $\dim Ker(A-\lambda I) = 1$
(собств. пр-во L_λ, ЛО с прост. спектром - одномерное)

$Ker(A-\lambda_1 I) = \{x \in X \mid (A-\lambda_1 I)x = 0\}$

$Ax = \lambda_1 I x$;

$L_{\lambda_1} = Ker(A-\lambda_1 I)$

Д-во: $\lambda_1 \leftrightarrow x_1$; пусть: $\lambda_n \leftarrow \{x_n', x_n''\}$ — ЛНЗ
$\vdots$ $\dim L_n - 2$
$\lambda_n \leftrightarrow x_n$

тогда $\{x_1 ... x_n', x_n''\}$ — $\dim n+1$, противор. с усл.

__Теорема__ X...

$\forall x \in X$ ∃...

__Опр__ Спектр... проекто...

P_{λ_1} ⟸...

P_λ и его...

__Теорема__:

∃ $\{f^k\}$ - ...

$P_{\lambda_1} x =$...

__Тогда__ P...

т.о. 1) ...
2) ...

__Опр__ - Опер...

Пример: P...

__Спектр.__ ...

$A = \sum$...

Δ 1) $x \in$...

2) $Ax =$...

Пример:

Теорема $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i}$, $L_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$

$\forall x \in X \quad \exists\, x \doteq \underset{L_{\lambda_1}}{\underset{\cap}{y_1}} + y_2 + \dots + \underset{L_{\lambda_n}}{\underset{\cap}{y_n}}$ ‖ (ОВ) если $\{x_i\}$ – базис из с.в. A, $x = \sum \underbrace{\xi x_i}_{y_i}$

Опр Спектр. проектором P_{λ_i} отвечающим с.з. λ_i, P проектор на L_{λ_i} ‖ to остальных собств. векторов

$P_{\lambda_i} \leftrightarrow$ с.з. λ_i

$P_{\lambda}^{\parallel \{\text{го ост}\}}$ понятно))

Теорема: $\exists \{e_i\}_{i=1}^{n}$ – базис X из с.в. A

$(f^k, e_i) = \delta^k_i$

$\exists \{f^k\}$ – сопр. базис, тогда P_{λ_i} определяется так:

$P_{\lambda_i} * = (*, f^i)\, e_i$, т.е. $\forall x \quad P_{\lambda_i} x = (f^i; x)\, e_i$

Надо: $P_{\lambda_i} = P_{L_{\lambda_i}}^{\parallel (\dot{+}\sum L_{\lambda})}$ Надо: $\forall x \in L_{\lambda_i}$: $P_{\lambda_i} x = x$

$\forall y \in \dot{+}\sum L_{\lambda_k}$ $P_{\lambda_i} y = 0$.

т.о. 1) $\triangle\ x = e_i \quad P_{\lambda_i} e_i = (f^i, e_i)\, e_i = e_i$

2) $\triangle\ y = e_k,\ k \neq i \quad P_{\lambda_i} e_k = \underbrace{(f^i; e_k)}_{\delta^i_k = 0\ (k \neq i)} e_i = 0$

Опр. Оператор $\mathcal{A}$ идем-потентный если $A^2 = A$

Пример: $P^2_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}$

Спектр. теорема для оператора с прост. спектром

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$

Δ 1) $x = \sum_i \xi^i e_i = \sum_i (f^i, x)\, e_i = \sum_i \overbrace{P_{\lambda_i} x}^{\in L_{\lambda_i}}$; (*)

2) $Ax = A \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i} x = \sum_{i=1}^{n} A(P_{\lambda_i} x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} x$ ∇

Пример: $A^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k}\right) = \sum_{i,k} \lambda_i \lambda_k \underbrace{P_{\lambda_i} P_{\lambda_k}}_{\delta^i_k P_{\lambda_i}}$

$\| x$: C

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$ || $\sin A = \sum_{i=1}^{n} \sin(\lambda_i) P_{\lambda_i}$

$$\sin A = \begin{pmatrix} \sin\lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \sin\lambda_n \end{pmatrix}$$

(128) Спектральный анализ по симметр. типа (не прост. сп

$A: X \to X$ – сим. типа $\quad \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda-\lambda_i)^{k_i}$

где: $k<n$: $\sigma_A = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\}$ $k<n$

Лемма. $L_{\lambda_i} = ЛО\{$во с.в. $x_i \leftrightarrow \lambda_i\}$

Сборник Вишняк, 18.03.14

36,38

1. $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\| \qquad a^{(ij)}_{kl} = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ \hline -4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -6 & 3 & 8 \end{array}\right\|$$

$$a^{ij}_{(kl)} = \frac{1}{2}\left(a^{ij}_{kl} + a^{ij}_{lk}\right)$$

$$\cancel{a^{ij}_{(kl)} =} \qquad \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -0{,}5 & 1 \\ -4 & -3 & 1 & -\frac{7}{2} \\ \hline -0{,}5 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 7 & 8 \end{array}\right\|$$

$$a^{(ij)}_{(kl)} = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -0{,}5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -\frac{7}{2} \\ \hline -0{,}5 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -\frac{7}{2} & 3 & 8 \end{array}\right\|$$ — неверно

$\alpha_{1121} = 1112 + 1211 +$

36,40

1 $$\left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\|$$

$\alpha^{[21]}_{11} = -\frac{1}{2}($

$\alpha^{[12]}_{11} = \frac{1}{2}($

$\alpha^{11}_{[11]} = \frac{1}{2}($

$\alpha^{11}_{[12]} = \frac{1}{2}($

$\alpha^{[12]}_{[11]} = \frac{1}{24}(\alpha$

36,39

1. A_{600}

$\alpha_{[ij]k} =$

$\alpha_{[i][k]} =$

$\alpha_{[ijk]} =$

36,41

$A_{726} =$ 1 4 9

$\alpha_{(ijk)} =$ 1 $\frac{10}{3}$ $\frac{10}{3}$ $\frac{19}{3}$

18.03.2014 Лекция

$A: X \to X$ $\quad (\dim X) = n$

$\sigma_A = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k\}$ $k < n$ (не простой спектр ($k<n$)

$\{ \boxed{e_1^{(1)} \dots e_1^{(r_1)}} \ \square \ \boxed{e_k^{(1)} \dots e_k^{(r_k)}} \} = \mathcal{B}_X$

$L_{\lambda_i} = \text{л.о.}\{e_i^{(1)}, e_i^{(2)} \dots e_i^{(r_i)}\}$.

$X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_{\lambda_i}$

Опр $\dim L_{\lambda_i} = r_i$ — спектральной (геом.) кратностью λ_i

Опр $\exists \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, тогда n_i — полной кратностью λ_i

Теорема Геом. кратность и полная кратность для скал. оператора одинаковы.

$\forall A \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\end{smallmatrix}}}_{r_1} & & 0 \\ & \underbrace{\boxed{\begin{smallmatrix}\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}}}_{r_2} & \\ 0 & & \ddots \ \underbrace{\boxed{\begin{smallmatrix}\lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_k\end{smallmatrix}}}_{r_k} \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_X$ = базис с.в.

∇ $Rg(A-\lambda_i E) = n - r_i$??)))00)0

$L_{\lambda_i} = \text{л.о.}\{e_i^{(1)} \dots e_i^{(r_i)}\}$

Теорема $\exists \{f_{(s)}^{i}\}_{i=1}^{k}$ — базис сопр. к $\{e_i^{(t)}\}_{i=1..k,\ t=1..r_i}$

т.е. $(f_{(s)}^{j}, e_i^{(t)}) = \delta_i^j \delta_{(s)}^{(t)}$, тогда спектральный проектор P_{λ_i} имеет сл. вид: → на L_{λ_i} — с.п.

$P_{\lambda_i} x = \sum_{s=1}^{r_i} (f_{(s)}^{i}, x) e_i^{(s)}$

$\boxed{\text{Упр!!!}}$ — проверить P_{λ_i} на $x \in L_{\lambda_i}$, $x \notin L_{\lambda_i}$

Лемма $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_{\lambda_i}$

$x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{s=1}^{r_i} (f_{(s)}^{i}, x) e_i^{(s)} = \sum_{i=1}^{k} P_{\lambda_i} x$

Теорема Спектральная теорема для оператора скалярного типа:

$\boxed{A = \sum_{i=1}^{k}}$

∇

$\cos A = \sum$

Теорема:

$\exists \chi_A(\lambda)$

Д-во: $\chi_A($

Опр Пусть

алгебр-

$\exists X: X$

$\forall S_A:$

Лемма:

1) $\alpha r(t)$
2) $r(t)q(t$
3) $r(t)+q($

Это не

Ако $r($

Теорема

полную

$\{e_i\} \xrightarrow{T}$

∇

29

Опр $\exists A: X$
тогда

$\boxed{A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_{\lambda_i}}$ – применим к $Ax = \sum P_{\lambda_i} x$ и все зайдет

∇

$\cos A = \sum_{i=1}^{k} \cos(\lambda_i) P_{\lambda_i}$

Теорема: Тождество Кэли

$\exists \chi_A(\lambda)$ – х.п. $A: X \to X$, тогда $\chi_A(A) = 0$

Д-во: $\chi_A(A) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\chi_A(\lambda_i)}_{0} P_{\lambda_i} = 0$ ∇

Опр Пусть X и Y – алгебры над F. Гомоморфизм алгебр – это

$\exists \Phi: X \to Y$, сохр-щее линейную и мультипл. структуру.

$\exists S_A: P_\infty \to X \times X$

Лемма: S_A – гомоморфизм $(r, q) \in P_\infty$ (полиномы) $\alpha \in F$ $\qquad f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$

1) $\alpha r(t) \longrightarrow \alpha r(A)$

2) $r(t) q(t) \longrightarrow r(A) q(A)$

3) $r(t) + q(t) \longrightarrow r(A) + q(A)$

Это не биекция ($\dim P_\infty = \infty$; $\dim X \cdot X = n^2$)

Also $r(t) + \chi_A(t) q(t) \longrightarrow r(A) + \underbrace{\chi_A(A)}_{0} q(A) = r(A)$

Теорема коэфф. хар. полинома скалярного по образуют полную систему инвариантов.

$\{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_i\}$, $\tilde{A} = T^{-1} A T$, $\qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$

∇ $\qquad \chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$

§29 Инвариантные подпространства

Опр $\exists A: X \to X$, $\exists L$ – пп X $\forall x \in L \Rightarrow Ax \in L$, тогда L – инв. пп.

Опр L – инв, $A_L: L \to L$ по формуле $A_L x = Ax$ ($\forall x \in L$). Тогда A_L зв. частью по A в инв. пп L.

Опр Инв. п-во L зв. ультраинвариантным, если $\exists L'$ – дополнение L до тоже инвариантно.

$(X = L_1 \dot{+} L_2 = L \dot{+} L'$ – инв. п-ва$)$

Лемма Если L – у.инв п-во, то и L' – тоже.

Опр $\exists L$ – уинп, тогда A_L – компонента A в L

Опр $\exists L$ – уинп Тогда $P_L^{\parallel L'}$ – ультрапроектор.

Лемма $\exists L, L'$ – уинп, $A_L, A_{L'}$ – компоненты A в L и L', тогда A может быть представлен:

$$A = A_L P_L^{\parallel L'} + A_{L'} P_{L'}^{\parallel L} \qquad (*)$$

(для $\forall x$)

Д-во: $\forall x \overset{!}{=} \underset{}{y} + z = P_L^{\parallel L'} x + P_{L'}^{\parallel L} x$, ($y \in L$, $z \in L'$); к y и применим A

Опр $\exists X = L \dot{+} L'$, $A_L: L \to L$, $A_{L'}: L' \to L'$ какие-нибудь

$\exists A \overset{(*)}{=} A_L P_L^{\parallel L'} + A_{L'} P_{L'}^{\parallel L}$, тогда $A = A_L \dot{+} A_{L'}$

Лемма $\exists L$ и L' – дополнительные уинп A, тогда $A = A_L \dot{+} A_{L'}$

(NB) X, трив – X и $\{0_X\}$

Опр Минимальным уинп'ом зв уинп, который не содержит в себе уинп меньшей размерности, а соотв. ультрапроектор на него – минимальный

Лемма Минимальные уинпы либо дизъюнктны, либо совпадают.

Теорема (упр) Для операторов (автоморф.) в конечн. л.п. число дизъюнктных мин. уинпов конечно

2.04.2014.

§30 Ан…

2.04.2014. Almost Blay

(§30) Алгебра скалярных полиномов. Идеал!

Вводные норм)))

$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P} = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{C},\ \deg p(\lambda) - \forall\} \mid p(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s \lambda^s$

Лемма: $\mathcal{P}$ — коммутативная алгебра

$\exists p, q, r \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$
1. $p(q \cdot r) = (p \cdot q) r$
2. $pq = qp$
3. $(p+q) r = pr + qr$
4. $(\alpha p) q = p(\alpha q) = \alpha (pq)$

Опр: пп J пп $\mathcal{P}$ называется ее идеалом, если $\forall q \in J$ и $\forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow qp \in J$

Опр: $\mathcal{P}$ и $\{0\}$ — трив. идеалы

Пример 1: $J_\alpha = \{\varphi \in \mathcal{P} \mid \varphi(\alpha) = 0\}$ — $pq = p \cdot 0 = 0$

Пример 2: $\exists J = q \cdot \mathcal{P}_p$

$\forall r \in J$: $r = q \cdot p$, $\forall r \cdot \tilde{p} = q \cdot (p \cdot \tilde{p}) \in J$

Опр: q — порождающий полином для $J = q\mathcal{P}$

Опр: Любой идеал, содержащий един. полином, тривиален — $\mathcal{P}$

Теорема: $\exists J_1$ и J_2 — идеалы $\mathcal{P}$. Тогда $J_1 \cap J_2$ и $J_1 + J_2$ — идеалы.

Δ. $\exists J = J_1 \cap J_2$; $q \in J$. $\forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow q \cdot p \in J$
1. $q \in J \rightarrow q \in J_1 \Rightarrow q \cdot p \in J_1$ (опр J_1) $\Rightarrow q \cdot p \in J$.
2. $q \in J \rightarrow q \in J_2 \Rightarrow q \cdot p \in J_2$ (опр J_2)

б) — $\boxed{\text{Упр!!}}$

∇

Опр: $p_J(\lambda)\ (\neq 0)$; полином p_J мин. степени $\in J$ называется миним. полиномом

Лемма: в нетрив. идеале J степень $\deg p_J(\lambda) > 0$

Если $\{0\}$ — то 0, если $\mathcal{P}$ — $1 + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots$

Теорема (о min полиноме): $\exists J$ – идеал, Тогда $\forall p \in J$ $p \vdots p_J$

$\Delta \leftarrow$?: $\frac{p}{p_J} = q + \frac{r}{p_J}$ $\quad r: \deg r < \deg p_J$

$p = p_J \cdot q + r$, $r = p - p_J \cdot q$

$r = \underset{\substack{\cap \\ J}}{p} - \underbrace{p_J \cdot q}_{J\,(\text{опр}\,J)} \in J \Rightarrow \begin{cases} r \in J \\ \deg r < \deg p_J \end{cases} \rightarrow\leftarrow$ ∇

Следствие $\tilde{p}_J \vdots p_J$, $p_J \vdots \tilde{p}_J$ $\quad \tilde{p}_J = \alpha \cdot p_J$ $(\alpha \neq 0)$

Теорема мин. полином является порождающим $J = p_J P$

Δ 1) $J \subseteq p_J P$, 2) $p_J P \subseteq J$ $\Rightarrow J = P$ $\quad$ 2) Очевидно 1) Очевидно по опр $p_J \in J$ $\quad p = p_J q \in p_J P$

Теорема $\exists J_1 \leftrightarrow p_{J_1}$ $J_2 \leftrightarrow p_{J_2}$ $J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \vdots p_{J_2}$

$J_1 \subset J_2 \Rightarrow \forall$ эл. т J_1 в т.ч. $p_{J_1} \in J_1 \subset J_2 \Rightarrow p_{J_1} \in J_2$

Теорема (о min полиноме $\wedge$) $\exists J_1 \leftrightarrow p_{J_1}$; $J_2 \leftrightarrow p_{J_2}$

$J = J_1 \wedge J_2 \leftrightarrow p_J$, Тогда $p_J = \text{НОК}\{p_{J_1}, p_{J_2}\}$

Д-во: $p_J \in J_1$; $J_2 \Rightarrow \begin{cases} p_J \vdots p_{J_1} \\ p_J \vdots p_{J_2} \end{cases} \Rightarrow p_J$ – кратное

$\exists q$ – кратное p_{J_1}, p_{J_2}, тоже $q \in J$ Но! p_J – min полином $J \Rightarrow q \vdots p_J \Rightarrow p_J = \text{НОК}$

Теорема (о min полиноме $+$) $\exists J = J_1 + J_2$

Тогда $p_J = \text{НОД}\{p_{J_1}, p_{J_2}\}$.

Теорема (о взаимно простых полиномах)

$\exists p_1$ и p_2 – взаим. пр. $\text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

Тогда $\exists q_1, q_2$: $p_1 q_1 + p_2 q_2 = \mathbb{1}(z) = 1$

$\Delta \exists J_1 = q_1 P$, $J_2 = q_2 P$ $\quad q_1$ – min J_1, q_2 – min J_2

$\measuredangle J = J_1 + J_2 \leftrightarrow p_J = \text{НОД}(p_1, p_2) = 1$

Т.о. $p_J = \mathbb{1} \in J \Rightarrow J = P$

$p_J = \underset{\substack{\cap \\ J_1}}{\tilde{p}_1} + \underset{\substack{\cap \\ J_2}}{\tilde{p}_2} = p_1 q_1 + p_2 q_2$ ∇

Следствие:

$\sum_{i=1}^{k} p_i q_i =$

Следствие 2

просто де

$\exists p_i' = \frac{p}{p_i}$

(531) А

полином

$\measuredangle A: X \rightarrow$

$\exists p(A) =$

$\measuredangle P_A =$

Лемма: P

Тогда

$\measuredangle S_A$; $A: X \rightarrow X$

Лемма

1) p_1

2) λp_1

3) $p_1 p_2$

Теорема

Тогда $\exists$

$p_1(A) \cdot q_1$

Теорема

Тогда Ко

(1)

Следствие: $\exists$ НОД $\{p_1 \dots p_k\} = \mathbb{1}$. Тогда $\exists q_1 \dots q_k$:
$$\sum_{i=1}^{k} p_i q_i = \mathbb{1}$$

Следствие 2 $\exists p = p_1 p_2 \cdots p_k$ | где p_s – попарно взаимно простые делители p.

$\exists p_i' = \frac{p}{p_i}$. Тогда $\exists q_1 \dots q_k$: $\sum_{i=1}^{k} p_i' q_i = \mathbb{1}$

(§31) Алгебра операторных полиномов. Минимальный полином ЛО.

фиксир.

∢ $A: X \to X$ ∢ $X \times X = \{$все $B: X \to X\}$.

$\exists \underbrace{p(A) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s A^s}_{\text{Операторный полином}}$, $(A^0 = I)$, $\alpha_s \in \mathbb{C}$

∢ $P_A = \{$все опер. $p(A)\} =$ пп $X \times X$

Лемма: P_A – подалгебра (коммут.) в $X \times X$

Тут всё очевидно, кроме $A^n A^m = A^m A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n+m}$

∢ $S_A: P \to P_A$ по формуле $p(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s \lambda^s \xrightarrow{S_A} p(A) = \sum \alpha_s A^s$

$A: X \to X$ фикс.

Лемма S – гомоморфизм $P \to P_A$

1) $p_1 + p_2 \to p_1(A) + p_2(A)$
2) $\lambda p_1 \to \lambda p_1(A)$
3) $p_1 p_2 \to p_1(A) \cdot p_2(A)$

Теорема $\exists p_1(\lambda); p_2(\lambda)$ – вз. простые скал. полиномы,
Тогда $\exists q_1(\lambda); q_2(\lambda)$

$p_1(A) \cdot q_1(A) + p_2(A) \cdot q_2(A) = I$ (перенесенное св-во)

Теорема $\exists p(\lambda) = p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda)$, где p_1 и p_2 вз. простые

Тогда $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A)$

①.

10.04.2014 Лекция

<u>Теорема</u> $\exists\, p(\lambda) = p_1(\lambda)\cdot p_2(\lambda)$, p_1, p_2 — вз. пр-е дел.

Тогда $\operatorname{Ker} p(A) = \operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A)$

Δ

1. $\operatorname{Ker} p_1(A) + \operatorname{Ker} p_2(A) \overset{?}{\subseteq} \operatorname{Ker} p(A)$

$\forall\, x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \operatorname{Ker} p_1(A)$, $x_2 \in \operatorname{Ker} p_2(A)$

$p(A)x = p(A)x_1 + p(A)x_2 = p_2(A)\underbrace{p_1(A)x_1}_{=0} + p_1(A)\underbrace{p_2(A)x_2}_{0} = 0$

2. $\operatorname{Ker} p(A) \subseteq \operatorname{Ker} p_1(A) + \operatorname{Ker} p_2(A)$

$\exists\, q_1, q_2 : p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$; — нами была теорема

$\forall\, x \in \operatorname{Ker} p(A)$: $x = Ix = \underbrace{p_2(A)\, q_2(A)\, x}_{x_1} + \underbrace{p_1(A)\, q_1(A)\, x}_{x_2} = x_1 + x_2$ $\quad (x : p(A)x = 0)$

$\forall\, p_1(A)x_1 = \underbrace{p_1(A)\, p_2(A)}_{p(A)}\, q(A)\, x = q_2(A)\, p(A)\, x = q_2(A)\, 0 = 0 \Rightarrow x_1 \in \operatorname{Ker} p_1(A)$

Аналогично $p_2(A)x_2 \Rightarrow x_2 \in \operatorname{Ker} p_2(A)$

3. Отсюда $\operatorname{Ker} p_1(A) \dotplus \operatorname{Ker} p_2(A) = \operatorname{Ker} p(A)$

Докажем прямоту суммы: $\operatorname{Ker} p_1(A) \cap \operatorname{Ker} p_2(A) =$

$\forall\, z \in \operatorname{Ker} p_1(A) \cap \operatorname{Ker} p_2(A)$

$z = Iz = z_1 + z_2 = p_2(A)\, q_2(A)\, z + p_1(A)\, q_1(A)\, z$

$= q_2(A)\underbrace{p_2(A) z}_{0} + q_1(A)\underbrace{p_1(A) z}_{0} = 0.$

∇

<u>Следствие</u>: $\exists\, p(\lambda) = \prod_{i=1}^{e} p_i(\lambda)$, где $p_i(\lambda)$ — взаимнопр. делит. $p(\lambda)$

Тогда: $\operatorname{Ker} p(A) = \dotplus \sum_{i=1}^{e} \operatorname{Ker} p_i(A)$

<u>Определение</u> Скал. полином $p(\lambda) \in \mathcal{P}$ наз. аннулирующим полиномом для $A : X \to X$, если $p(A) = 0$, то есть $\forall\, x \in X$ $p(A)x = 0$ или $\operatorname{Ker} p(A) = X$ или $\operatorname{Im} p(A) = \{0\}$

Теорема $\exists A: X \to X$ $(\dim X = n < \infty)$, тогда

$\exists$ анн. полином для A

Δ $A \in X \times X = \{$все $B: X \to X\}$, $\dim X \times X = n^2$

$\Delta \underbrace{\{I, A, A^2, \dots A^{n^2}\}}_{n^2+1} = ЛЗН$ – значит $\exists \alpha_s \neq 0$, такие, что $\sum\limits_{s=0}^{n^2} \alpha_s A^s = \Theta$

A^0

Отсюда следует, что $p(\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n^2} \alpha_s \lambda^s$ – анн. полином.

∇

Лемма Множество всех аннулирующих полиномов (аннулир.) оператора A образует идеал в $P \to P_A$

$p \in P_A$, $\forall q \in P \Rightarrow \Delta\ p \cdot q = q \cdot p \to q(A)p(A) = \Theta$

$\in P_A$

Опред. Мин. полином идеала P_A аннулирующих полиномов оператора Γ его ~~анну~~ миним. полиномом.

Пример $\exists A: X \to X$ – л.о. с простым спектром т.е. $\chi_A(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)$ $m = \dim X$

Так вот $\chi_A(\lambda) = p_A(\lambda)$

Δ

1. Аннул: $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i} \Longrightarrow \chi_A(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_A(\lambda_i) P_{\lambda_i} =$

Но $\forall\ \chi_A(\lambda) \vdots\ p_A(\lambda)$ (т.к. $\chi_A(\lambda) \in P_A$) $= \Theta$

$\Delta\ \tilde{\chi}_A(\lambda) = \prod\limits_{i=1, i \neq j}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, т.е. $\tilde{\chi}_A(\lambda_j) \neq 0$

$\Delta\ x_j \neq 0 \in Ker(A - \lambda_j I)$ $\tilde{\chi}_A(A) x_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\chi}_A(\lambda_i) x_i =$

$x_j \in L_{\lambda_j}$ (с.в. $\leftrightarrow \lambda_j$) $= \tilde{\chi}_A(\lambda_j) x_j \neq 0$

$\tilde{\chi}_A(\lambda)$ – не анн. полином

∇

(NB) $\forall A\ \chi_A(A) = \Theta$, $\chi_A(\lambda) \neq p_A(\lambda)$

Лемма Для того, чтобы $p(A) = q(A)$, Н.и.Д. $(p(\lambda) - q(\lambda)) \vdots\ p_A(\lambda)$

Δ $p(\lambda) - q(\lambda) = m(\lambda) \cdot p_A(\lambda) \xrightarrow{S_A} p(A) - q(A) = m(A) \underbrace{p_A(A)}_{\Theta}$

∇

Следствие: $\exists \frac{p(\lambda)}{p_A(\lambda)} = q(\lambda) + \frac{r(\lambda)}{p_A(\lambda)} \Rightarrow p(A) = r(A)$

$p(\lambda) = q(\lambda) p_A(\lambda) + r(\lambda) \to$ к опер. виду

Теорема $\exists p_A(\lambda)$ — мин.п. A $\quad \exists p_A(\lambda) = \prod p_i(\lambda)$ (попарно вз. пр.)

Тогда $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{l} \operatorname{Ker} p_i(A)$

Теорема о ядре и образе:

$\exists p_A(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$, тогда $\operatorname{Ker} p_1(A) = \operatorname{Im} p_2(A)$

Δ

1. $\operatorname{Im} p_2(A) \overset{?}{\subseteq} \operatorname{Ker} p_2(A)$.

$p_A(A) X = \Theta X = \Theta$; $\quad p_1(A)(p_2(A)X) = 0$

$\forall y \in \operatorname{Im} p_2(A) = p_2(A)X \Rightarrow p_1(A)y = 0 \Rightarrow y \in \operatorname{Ker} p_1(A)$

2. Докажем, что $\dim(\operatorname{Im} p_2(A)) = \dim(\operatorname{Ker} p_1(A))$

$n = \dim X = \dim \operatorname{Ker} p_1(A) + \dim(\operatorname{Ker} p_2(A))$

(из того, что $X = \operatorname{Ker} p_1(A) \dot{+} \operatorname{Ker} p_2(A)$)

А но $\dim \operatorname{Ker} p_2(A) + \dim \operatorname{Im} p_2(A) = n$

Что доказывает утверждение.

∇ (одно с второе, dim равны)

Теорема (о проекторах)

$\exists p_A(\lambda)$ — min полином A; $\exists p_A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$ (попарно вз.пр. дел.)

$\exists p_i' = \frac{p_A}{p_i}$, $\exists q_i: \sum_{i=1}^{l} p_i' q_i = 1$ (то есть $\sum p_i'(A) q_i(A) = I$) (*)

Тогда 1) (*) дает разлож. X в

$x = \sum_{i=1}^{l} x_i = \sum_{i=1}^{l} p_i'(A) q_i(A) x$, где $x_i \in \operatorname{Ker} p_i(A)$

2) $p_i'(A) q_i(A)$ — проекторы $L_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$ ║ о.от. L_j ($j \neq i$)

Д-во: 1) $p_i'(A) q_i(A) x \in L_i = \operatorname{Ker} p_i(A)$

$p_A(\lambda) = p_i'(\lambda) p_i(\lambda) \Rightarrow \operatorname{Ker} p_i(A) = \operatorname{Im} p_i'(A)$

$x_i = p_i'(A)(q_i(A) x) \in \operatorname{Im} p_i'(A)$

2) $\mathcal{P}_{L_i} x_i = I x_i = \sum_{i=1}^{l} p_i'(A) q_i(A) x_i = \underset{L_i}{0} + \ldots + x_i + 0 \ldots = x_i$

$\mathcal{P}_{L_i} = p_i'(A$

Теорема

$\operatorname{Ker} p$

Δ $\forall x$

$p(A$

∇

Теорема

$\exists p_A = p_1$

Тогда

Δ $\exists \operatorname{Ker}$

$\Rightarrow p_1(\lambda$

p_A

Ker

dim(

~~dim~~

Блеф,
22.04.201

§32 Спе

1) $\forall p(A$,
2) $\exists$ min
$\operatorname{Ker} p_i($

Лемма 1

Лемма 2

Лемма 3

$P_{L_i} = p_i'(A)\, q_i(A)$

<u>Теорема</u> $\exists A: X \to X$, $p(\lambda)$ – $\forall$ опр. полином. <u>Тогда</u>
$\operatorname{Ker} p(A)$ – инв. пп A)

Δ $\forall x \in \operatorname{Ker} p(A) \Rightarrow Ax \in \operatorname{Ker} p(A)$

$p(A)x = 0$ $\quad \forall Ax;\ p(A)(Ax) = A(p(A)x) = A0 = 0.$

∇

<u>Теорема</u> $\exists p_A$ – min полином A

$\exists p_A = p_1 p_2 \cdots p_l$ (Т. вз. дел) $\deg p_i > 0$

<u>Тогда</u> $\operatorname{Ker} p_i(A)$ – нетрив. инвар. п-ва

Δ $\exists \operatorname{Ker} p_i(A) = \{0_x\} \underset{\text{невырожд}}{\Longrightarrow} \ldots = X \Rightarrow p_i(A) = \Theta \Rightarrow$

$\Rightarrow p_i(\lambda)$ – анн. полином $\;\cancel{\Rightarrow}\;$ $p_A(\lambda)$ – min

$p_A = p_i \cdot p_i'$

$\operatorname{Ker} p_i(A) = \operatorname{Im} p_i'(A)$ $\cancel{\dim \operatorname{Ker} p_i'(A) = \dim \operatorname{Im} p_i}$

$\dim(\operatorname{Ker} p_i(A)) = \dim(\operatorname{Im} p_i'(A)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} p_i'(A) = \{0\}$

$p_i'(A) = \Theta$

$p_i'(\lambda)$ – аннул.

~~dim~~

Блядь, Лера, не $\boxed{\text{забирай}}$ мои чёрные ручки!

22.04.2014

§32 Спектр. теорема для ЛО общего вида

1) $\forall p(A)$ $\operatorname{Ker} p(A)$ – инв. п.п. A

2) $\exists$ min полином $p_A = p_1 p_2 \cdots p_k$; $\deg p_i > 0$

$\operatorname{Ker} p_i(A)$

<u>Лемма 1.</u> $X = \dot{\sum} \operatorname{Ker} p_i(A)$, $\operatorname{Ker} p_i(A)$ – инв A.

<u>Лемма 2.</u> $\exists p_i' = \frac{p_A}{p_i}$ $\exists q_i$ $\sum_{i=1}^{k} q_i p_i' = 1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} p_i'(A)\, q_i(A)$

Тогда $p_i'(A)\, q_i(A) = P_{L_i}$ $(L_i = \operatorname{Ker} p_i(A))_{i=1}^{k} = \mathcal{I}$

<u>Лемма 3.</u> $\exists A_i = A|_{L_i} \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_{L_i} = \dot{\sum}_{i=1}^{k} A_i$

Лемма 4 $p_i(\lambda)$ — мин полином A_i

$\exists p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, т.е. $p_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$
$(A-\lambda_i J)^{m_i}$

$\exists L_i = \operatorname{Ker} p_i(A-\lambda_i J)^{m_i}$

Теорема 1. $X = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} L_i$ (L_i — инв A)

2. $P_{L_i} = p_i'(A) q_i(A)$ — ультрапроектор на L_i

3. $A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_i = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} A_i$

4. $p_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ — мин полином A_i

Δ ? ? ? ∇

Опр m_i — индекс соотв. инв L_i

Опр $T: X \to X$ н. нильпотентным, если $\exists m_i \in \mathbb{N}$
$T^{m_i} = 0$, но $T^{m_i-1} \neq 0$, а m_i н. порядком T

Теорема m_i — ранг $L_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i J)^{m_i}$
Тогда $T_i = A_i - \lambda_i J$ — нильпотентный по по m_i

Δ $T^{m_i} = (A-\lambda_i J) = O$ — $\nu (\lambda-\lambda_i)^{m_i-1}$
но $\nexists$ $T^{m_i-1} = (A_i - \lambda_i J_i)^{m_i-1} \neq O$
∇
мин пол. A_i

$T_i = A_i - \lambda_i J_i$ $\boxed{A_i = \lambda_i J_i + T_i}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \sum (\lambda_i J_i + T_i) P_i \\ A &= \dot{+}\sum \lambda_i J + T_i \end{aligned}}$$

Лемма $\sigma_{A_i} = \{\lambda_i\}$

Опр 1. $L_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda J)^{m_i}$ — спектральное инв A

2. P_n — спектральный

3. $A_i = A|_{L_i}$ — спектральн. компонента $A_i = \lambda_i J_i + T_i$

4. (NB) $\{\lambda_i\}$ — элемент. порция спектра ($\bigcup \lambda_i = A$)

(33) Структура нильпотентного оператора

Опр $\exists m: \mathcal{T}^m = 0,\ \mathcal{T}^{m-1} \neq 0,\ m \in \mathbb{N}$

Пример $\mathcal{T}: X \to X,\ \dim X = m$

$$\mathcal{T} \longleftrightarrow T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{m}$$ – Жорданова клетка порядка m

Лемма 1. $\mathcal{T}^m = \theta,\ \mathcal{T}^{m-1} \neq \theta$

т.е. $\mathcal{T}$ нильпотентный л.о. $\sim m$

Лемма 2 $\mathcal{T}e_1 = 0,\ \mathcal{T}e_2 = e_1, \dots \mathcal{T}e_m = e_{m-1}$ $(\mathcal{B}_X = \{e_i\}_{i=1}^{n})$

Лемма 3 $L_i = \text{ло}\{e_1 \dots e_i\}$ – инв, но не умп.

$(\mathcal{T}L_i = \text{ло}\{e_1 \dots e_{i-1}\} = L_{i-1},\ \mathcal{T}^2X = L_{m-1} \dots \mathcal{T}^m X = 0)$

$\nexists L_i' = \text{ло}\{e_{i+1} \dots e_m\}$

Лемма 4 $\sigma_{\mathcal{T}} = \{0\},\ 0 \longleftrightarrow$ с.в. e_1

$\chi_{\mathcal{T}}(\lambda) = -(\lambda)^m = 0$ $\quad (T - E)X = 0 \quad TX = 0$

Лемма 5 $p_{\mathcal{T}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{T}}(\lambda)$

Опр Ло, матрица которого жорданова в некотором базисе, р одноклеточным нильпотентным опер.

Теорема Прямая сумма одноклеточных нильпот. операторов нильп. опер. Причем порядок нильпотентности равен макс. размеру жордановой клетки из прямых слагаемых.

$$T = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} T_i \qquad T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1}^{m_1} & & \\ & \boxed{T_2}^{m_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{T_k} \end{pmatrix} \qquad m = \max_{i = 1..k} m_i$$

Теорема любой нильпот. ло $\mathcal{T}$ может быть представлен в виде

$\mathcal{T} = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i$, где $\mathcal{T}_i$ – одноклет. нильпот. ло

без док-ва

Базис Жордано $\mathcal{B}_x = \cup \mathcal{B}_{L_i}$ L_i - цикл

$T_i : L_i \to L_i$ - жорданов диоклет нильпот. по

$\mathcal{B}_{L_i} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots\}$; $\dim X = n = \sum_{i=1}^{k} m_i$; $T_i e_1^{(i)} = 0$

присоед. векторы

$T_i e_2^{(i)} = e_1$

(534) Жорданова форма матрицы по общему виду кратности с.3.

$A = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i J_i + T_i) P_i$ $A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 E + T_1} & & 0 \\ & \boxed{\lambda_2 E + T_2} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

Далее: $\exists$ для всех $i = \overline{1,k}$, в L_i введены Жорд. базисы

$\lambda_i \leftarrow L_i \leftrightarrow \mathcal{B}_{L_i} = \{e_s^{(i,j)}\}$ № ж. клетки, s ← внутри ж.к.

$\sigma_{A_i} = \{\lambda_i\}$

Опр $n_i = \dim L_i = \dim \operatorname{Ker} (A - \lambda_i J)^{m_i}$ полной ар. кратность λ_i

Опр m_i = порядок нильпотентности T_i алгебр. кратность λ_i

Опр $r_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i J)$ геом. кратностью спектрального λ_i

23.04.2014

Жорданова форма:

$A: X \to X$ $k \le n = \dim X$ $\sigma = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$; $p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$

① $X = \dot{\sum_{i=1}^{k}} L_i$ $(L_i = \operatorname{Ker} (A - \lambda_i J)^{n_i})$

② $A = \sum_{i=1}^{k} A_i P_i$ $(A_i = A|_{L_i})$, где

$A_i = \lambda_i J_i + T_i$ $(T_i^{m_i} = \Theta)$

$\mathcal{B}_x = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{A_i}$, $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$

③ A внутри:

$A_i \leftrightarrow A_i$

λ_i, n_i = а
m_i - п
r_i =

Кратные с

② Если $\forall$

$\boxed{\begin{matrix} n_i \ge m_i \\ n_i \ge r_i \end{matrix}}$

Теорема

① $\chi_A(\lambda)$

② $\chi_A(\lambda)$

(535) М
нав

① Метрик

Опр.

$\rho : M \times M$ -

1) $\rho(x,y)$
2) $\rho(x,y) =$
3) $\rho(x,y) =$

$\rho(x,y)$

Примеры

1. Дискр

$$A_i \leftrightarrow A_i = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{matrix}}}_{m_i} \; \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \ddots \; \square \end{pmatrix};$$

λ_i, $n_i = \dim L_i$ — полная кратность
m_i — порядок нильпотентности
$r_i = \dim L_{\lambda_i} = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i I)$

Крайние случаи: ① Если $\forall i = \overline{1,k}$, $m_i = 1 \Leftrightarrow n_i = r_i \Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ - л.о. скал. типа

② Если $\forall i = \overline{1,k}$, $m_i = n_i$, $r_i = 1$

$\hookrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = p_{\mathcal{A}}(\lambda)$ $\quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix} n_i \geq m_i \\ n_i \geq r_i \end{matrix}}$

<u>Теорема</u> Гамильтона-Кэли

① $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ — анн. полином $\mathcal{A}$, т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$

② $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) \vdots p_{\mathcal{A}}(\lambda)$, и $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = p_{\mathcal{A}}(\lambda) \Leftrightarrow m_i = n_i \Leftrightarrow r_i = 1$ $\underline{(i = \overline{1,k})}$

Евклидово Пространство

§35 Метрические, нормированные, вещественные псевдоевклидовы и евклидовы пр-ва. Примеры

① Метрическое пр-во.

<u>Опр.</u> $\exists M = \{x, y \dots\}$, $\exists M \times M$ — на нем. введена ф-ция

$\rho: M \times M \to \mathbb{R}$:

1) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ — рефлексивность симметр.
2) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x,y) \geq 0$ — полож. опр.
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ — н-во $\triangle$

$\rho(x,y)$ — расстояние, M — метр. пр-во

Примеры:

1. Дискретная метрика: $\begin{cases} \rho(x,y) = 1 & x \neq y \\ \rho(x,y) = 0 & x = y \end{cases}$

2. $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ — Евклидова метрика

3. $\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|$ f, g — ф. на X

$\rho(f,g) = \int_{x\in X} f(x)g(x)$ — самостоятельно или неверно

② Нормированное пр-во

X — л.п. над F, $\exists$ на X задана $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$ со св-ми:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$ — полож. определ.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in F$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Пример: 1) $X = \mathbb{R}^n$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

2) $X \times X = \{A: X \to X\}$, $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$

Лемма Всякое нормированное пр-во является метрическим. Обратное неверно

Δ $\rho(x,y) = \|x-y\|$ например ∇

③ Вещественное псевдоевклидово пр-во

Опр $\exists X$ — лп над $\mathbb{R}$ $\exists G(x,y)$ — т.н. метр. форма на X

1. $G(x,y) = G(y,x)$
2. $G(x,y)$ — билин. форма
3. $G(x,y) = 0$ для всех $y \in X$ только при $x = 0$

Тогда X ~ псевдоевкл. пр-вом.

NB $G(x,y) = \langle x, y \rangle_G$ ~ скал. пр-ем x и y

NB $G(x,y): X \times X \to \mathbb{R}$

Пример: пр-во Минковского:

$X = \mathbb{R}^4$ $G(x,y) = \xi^0\eta^0 - \xi^1\eta^1 - \xi^2\eta^2 - \xi^3\eta^3$

$x=(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ Опр. x и y $\perp$, если
$y=(\eta^0,\eta^1,\eta^2,\eta^3)$ $\langle x,y\rangle=0$
Опр X $\in$ 0-векторов в $b(x,y)$ если $\langle x,x\rangle=0$
$x=(\sqrt{3},1,1,1)$

(4) Вещественное евкл. пр-во

Опр. Пусть X - л.п. над $\mathbb{R}$, $\exists$ сущ $b(x,y)$ - т.ч. метр. ф-ция на X со св-ми:

1. $b(x,y)$ - билин. ф.
2. $b(x,y)=b(y,x)$
3. $b(x,x)\geq 0$, $b(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0_x$ - полож. определ.

Тогда X - вещ. евкл. пр-во.

Лемма Всякое вещ. евкл. пр-во явл. метрическим.
причем $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$

1) $\|x\|\geq 0$ $\|x\|=0 \Rightarrow x=0_x$
2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ $\sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle}=\sqrt{\lambda^2\langle x,x\rangle}=\lambda\sqrt{x\ldots}$
3) В виноградове

Пример 1) $X=\mathbb{R}^3$ $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{3}\xi^i\eta^i$
2) $X=\mathbb{R}^n$ $\langle x,y\rangle=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi^i\eta^k$
где g_{ik} - метр. тензор
$g_{ik}=g_{ki}$ - симм. тензор
g устроен так, что $\langle x,y\rangle\geq 0$ или $=0$, если $\xi^i=0$..

(33б) Элементарная геометрия вещ. евкл. пр-ва

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)
Пусть $x,y\in E$ (евкл. пр-во), тогда $|\langle x,y\rangle_b|\leq\|x\|_b\|y\|$ (*)
$\|\lambda x-y\|^2=\langle\lambda x,\lambda x\rangle-\langle\lambda x,y\rangle-\langle y,\lambda x\rangle-\langle y,y\rangle=$

$= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \ge 0$ кв. трёхчлен от λ

$\frac{D}{4} = (\langle x,y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \le 0$ — для выполн.

$\Rightarrow |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$

Лемма. Когда $y = \lambda x$ — равенство

Следствие: неравенство ∇: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le$

$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

1) Длина вектора $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

2) Расст. м. (·) Евкл: $\rho(x,y) = \sqrt{\langle x-y; x-y\rangle}$

3) $\mathbb{R}^3$ $\langle x,y\rangle = |x||y|\cos\varphi$

E $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Опр L, M — пп E, $\cos(\widehat{L,M}) = \sup\limits_{x\in L,\, y\in M} \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Опр $\rho(x, L) = \inf\limits_{y\in L} \rho(x,y)$

37) Комплексное Евклидово пространство. Ортогональн.

Опр $\exists X$ — л.п. над $\mathbb{C}$ $\exists G(x,y): X \times X \to \mathbb{C}$

1) „Полуторалинейная" $G(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 G(x_1, y) + \ldots$

$G(x, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \bar{\alpha}_1 G(x, x_1) + \ldots$

2) Эрмитова: $G(x,y) = \overline{G(y,x)}$

3) Полож. опред. $G(x,x) \ge 0$ $G(x,x) = 0$, т. и т.т. $x = 0_X$

Из это скал. пр-е.

Опр $\exists X$ — л.п. над $\mathbb{C}$ $\exists$ на X задано $G(x,y)$ тогда X — компл. евкл. пр-во

Теорема (К

$\forall x, y \in$

Δ $\measuredangle$ $\|$

$-\langle \lambda x,$

$= \lambda\bar{\lambda}\langle$

$= \lambda^2\|$

$\frac{D}{4} \le$

$\measuredangle$ $\langle x, y$

$|Re($

$|Re$

$|\langle$

Следствие:

$\|x+y$

Апло

Теорема:

$\rho(x,y$

Пример:

К-5

$|\sum \xi^i \eta^i| \le$

Или

<u>Теорема</u> (К-Б для ℓ):

$\forall x, y \in E$ верно: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Δ $\forall$ $\|\lambda x - y\|^2 = \langle \lambda x - y, \lambda x - y\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle -$

$- \langle \lambda x, y\rangle - \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle =$

$= \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle - \bar{\lambda}\langle y,x\rangle + \|y\|^2 =$

$= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \geq 0$

$\frac{D}{4} \leq 0$: $(\operatorname{Re}\langle x,y\rangle)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ ∇

Д $\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \cdot e^{i\varphi}$

$|\operatorname{Re}(\underbrace{\langle x, e^{i\varphi} y\rangle}_{|\langle x,y\rangle|})| \leq \|x\|\underbrace{\|e^{i\varphi}\cdot y\|}_{1\,\|y\|}$

$|\operatorname{Re}(|\langle x,y\rangle|)| \leq \|x\|\|y\|$

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

<u>Следствие</u>: н-во Δ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle}_{\leq 2\|x\|\|y\|} + \|y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$

Аналог. $\|x+y\| \geq \big|\|x\| - \|y\|\big|$ — упр.

<u>Теорема</u>: X — нормированное. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

$\rho(x,y) = dist(x,y) = \|x-y\|$

<u>Пример</u>: $X = \ell^n$ 1) $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \bar{\eta}^i$

2) $\overline{\langle x,y\rangle} = \sum \bar{\xi}^i \eta^i = \langle y,x\rangle$

К-Б

$\left|\sum \xi^i \bar{\eta}^i\right| \leq \sqrt{\sum|\xi^i|^2}\cdot\sqrt{\ldots}$ 3) $\langle x, x\rangle = \sum \xi \bar{\xi} = \sum |\xi^i|^2 \geq 0$

Или вот мягкий пример:

② $X = \mathbb{C}^n$ $\quad \langle x, y\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\xi^i \overline{\eta^k}$

1. Ок
2. $g_{ik} = \overline{g_{ki}}$ $\quad G = \|g_{ik}\| : G = \overline{G^T}$
3. $\langle x, y\rangle \geq 0$

Ортогональность

Опр $\exists x, y \in E$. говорят, что $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$

Опр x — 0-вектор G, если $G(x,x) = 0$

Лемма в к.е.п. E 0-вектор ! (из аксиом силы)

Лемма $\exists x \perp y_1$, $x \perp y_2$, $x \perp \ldots y_n$, тогда $x \perp \forall$ л.к. $\sum \alpha_i y_i$

Опр $x \perp L$ — пп E, если $x \perp \forall y \in L$

Опр $\exists L$ и M - пп E. Говорят, что $L \perp M$, если $x \perp y$ $(\forall x \in L, \forall y \in M)$

Опр $\exists L$ - пп E. Множество $L^{\perp} = \{x \in E, x \perp L\}$ называется ортогональным дополнением L

Лемма ортогон. дополн. к L является пп. E

Лемма $\exists \{x_1 \ldots x_k\}$, $x_i \perp x_j$ $(\forall i, j \; i \neq j)$ $x_i \neq 0$
$k \leq \dim X$
Тогда $\{x_i\}$ — ЛНЗ

Δ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$

...

∇

Теорема Пифагора

$\{x_i\}_{i=1}^{k}$ $\quad [x_i \perp x_j]$, тогда $\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$

Δ $\text{Л}ч = \langle \sum x_i, \sum x_i\rangle = \sum \langle x_i, x_i\rangle = \sum \|x_i\|^2$

(538) Орт… Орт…

Опр. Б…
e_i —

Опр Ба…

Теорема

Пр…

$\{x_1 \ldots x$

1) $e_1 =$
2) $e_2 =$
⋮
k) $e_k =$

Δ

NB e_k

(38) Ортогональный и ортонормированный базис E. Ортогональный проектор.

<u>Опр.</u> Базис E $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортогональный, если $e_i \perp e_j$ $(i \neq j)$

<u>Опр.</u> Базис E $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$, если $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_i^j$

<u>Теорема</u> В нен E $\exists$ ортогон. базис

Процесс ортогонализации Грам-Шмидта

$\{x_1 \dots x_n\}$ — базис (ЛНЗ)

1) $e_1 = x_1$

2) $e_2 = x_2 + \alpha_1 e_1$ из соотр: $e_1 \perp e_2$ $\alpha_1 = -\frac{\langle x_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$

$\vdots$

k) $e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \dots \beta_i e_i + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$

$\forall (e_k, e_i) = 0 = \langle x_k, e_i \rangle + \dots + \beta_i \langle e_i, e_i \rangle + \dots$

$\beta_i = -\frac{\langle x_k, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$

(NB) $e_k \neq 0$ $e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_{k-1} e_{k-1}$ — ЛК $\{x_1, \dots x_{k-1}\}$ $\neq 0$

* * *

$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\langle f_1, f_2 \rangle$

$\langle x, y \rangle_{\{f\}} = g_{11} x_1 y_1 + g_2 x_1 y_2$

~~ДЗ~~

25,18 5б) 6б
25,11 1) 2)
25,13 2)
25,17

30.04.14 Лекция

$\{x_1 \dots x_n\} \xrightarrow{ГШ} \{e_1 \dots e_n\}$ $\quad e_i \perp e_j \ (i \neq j)$

NB1 $\|e_i\| \le \|x_i\| \quad i = \overline{1,n}$

Δ

$e_k = x_k + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots \beta_{k-1} e_{k-1}$

$\beta_i = -\frac{\langle x_i, e_k \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}; \quad \langle e_k, e_k \rangle = \langle x_k, e_k \rangle$

$|\langle e_k, e_k \rangle| = |\langle x_k, e_k \rangle| \le \|x_k\| \cdot \|e_k\|$

$e_i \perp e_j \quad \|e_k\|^2 \le \|e_k\| \|x_k\|$

$\|e_k\| \le \|x_k\|$

∇

NB2 $\{x_1 \dots x_{k-1}\}$ – ЛНЗ
$\{x_1 \dots x_k\}$ – ЛЗ, тогда $\{e_1 \dots e_{k-1}\} \ne 0$, $e_k = 0$

$\boxed{\text{УПР}}$

$\{x_i\} \xrightarrow{ГШ} \{e_i\}$

Следствие: $\cancel{B}\ \forall E$ (евкл) $\exists$ ортн. базис $\{e_i\}$

$\langle \tilde e_i, \tilde e_k \rangle = \delta_{ik}$, т.е $\tilde e_i \perp \tilde e_k$, $\|e_i\| = 1$

$\exists \{e_i\}$ — орт базис $\exists\ \tilde e_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$

$\{\tilde e_i\}$ — ортн. базис

Теорема $\exists L$ — лп E, $\exists M = L^\perp = \{x \in E \mid x \perp L\}$

Тогда: $\forall x \in E$: $x \doteq g + h$ $(g \in L,\ h \in L^\perp = M)$ т.е. $E = L \dotplus M$

Δ $\exists \{e_1 \dots e_k\}$ — ортн. б. L $(\dim L = k)$

$\underbrace{\{\underbrace{e_1 \dots e_k}_{\text{ортн } L}, \underbrace{e_{k+1}, \dots e_n}_{\text{ортн } M}\}}_{\text{баз. } X}$ $\quad \dim L = k$, $\operatorname{codim} L = \dim L^\perp$

$x = \sum_{i=1}^{k} \xi^i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \xi^i e_i = \underset{L}{\underset{\cap}{g}} + \underset{M}{\underset{\cap}{h}}$. А единственность?

Вот:

$\Leftarrow ?$: $\exists\ x = g - h = g_1 - h_1 \Rightarrow [g - g_1 = h_1 - h]$ $(+)$

$\langle (+), g - g_1 \rangle = \langle h - h_1, g - g_1 \rangle = 0$ $\quad \langle g - g_1, g - g_1 \rangle = 0$

$\|g - g_1\|^2 = 0 \Rightarrow g = g_1$. $h = h_1$ аналог.

∇

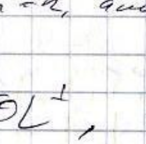
$E = L \dotplus L^\perp$ $\quad$ (NB) $E = L \oplus M = L \oplus L^\perp$, $\oplus \sum \dots$

Опр $\exists E = L \oplus M$, $M = L^\perp$, тогда $P_L^{\parallel M} = P_L^\perp$ и ~ орт проект

Опр $P_L^\perp x$ ~ орт. проекция x на L

$P_M^\perp x = x - P_L^\perp x$ — орт. составляющая x, $\perp L$

Удобство ОРТН базиса



Лемма 1 $\exists \{e_i\}$ — ОРТН базис E, тогда $\forall x, y$ $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \eta^i$

Δ (NB) $\{e_i\}$ — базис E, тогда $g_{ik} = \langle e_i, e_k \rangle$ ~ метр. тенз. $G = \|g_{ik}\|$ ~ матрицей Грамма

$\langle x, y \rangle = \langle \sum \xi^i e_i, \sum \eta^k e_k \rangle = \sum \xi^i \eta^k \langle e_i, e_k \rangle = \sum g_{ik} \xi^i \eta^k$

∇

Примечание: $g_{ik} = \delta_{ik} \Rightarrow \langle x,y\rangle = \sum_{i,k} \delta_{ik}\xi^i\overline{\eta^k} =$

default $\longrightarrow = \sum_i \xi^i\overline{\eta^i}$

Лемма 2: Пусть $\forall x,y\in E$ в $\{e_i\}$ $\langle x,y\rangle = \sum \xi^i\overline{\eta^i}$, тогда $\{e_i\}$ – ОРТН

Δ

$\langle e_i, e_k\rangle = \delta_{ik}$, далее тривиально

∇

Лемма 3: для $\{e_i\}$ – ОРТН $G = E$ $g_{ik} = \delta_{ik}$

Теорема: Пусть $E = L \oplus M$
Пусть $\{e_1 \dots e_k\}$ – ОРТН б. L
$\{e_{k+1} \dots e_n\}$ – ОРТН б. M, тогда:

$$\forall x\in E: \mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i=1}^{k} \langle x; e_i\rangle e_i$$

Δ

$\mathcal{P}_L^\perp = \mathcal{P}_L^{\parallel M}$ т.е. 1) $\forall x\in L: \mathcal{P}_L^\perp x = x$
2) $\forall y \in M: \mathcal{P}_L^\perp y = 0$

Проверим:

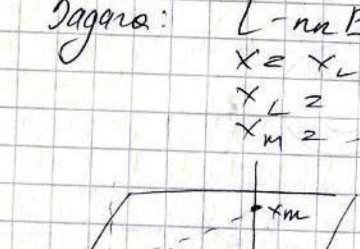
① Пусть $x = e_j$ $(j=1\dots k)$, $e_j \in L$: $\mathcal{P}_L^\perp e_j = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle}_{\delta_{ij}} e_i = e_j$

② Пусть $y = e_s$ $(s = k+1 \dots n)$: $\mathcal{P}_L^\perp e_s = \sum_i \underbrace{\langle e_s, e_i\rangle}_{0} e_i = 0$

∇

§39 Задача о перпендикуляре

Задача: L – пп E, $E = L\oplus M$. Нам нужно
$x = x_L + x_M$
$x_L = \mathcal{P}_L^\perp x$ – орт. пр. x на L
$x_M = x - \mathcal{P}_L^\perp x$ – орт. сост. x к L



Иллюстрация

В базисе ОРТН пишем
$$\mathcal{P}_L^\perp x = \sum_{i}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i = x_L$$
$$x_m = x - x_L$$

Лемма: $\|x\| \geq \|\mathcal{P}_L^\perp x\|$

Δ $\|x\| = \|\mathcal{P}_L^\perp x\| + \|\mathcal{P}_M^\perp x\|$, + Пифагор ∇

Лемма 2:

Δ $\|x -$

∇

(NB)

Лемма

Δ

$\langle \mathcal{P}$

$=$

$=$

∇

Следствие

Опр Пусть $\{$

$\|x\|$

Теорема

Δ (И) На...

(Д) $\|$

Лемма 2: $\|x-l\| \geq \|x - P_L^\perp x\|$

Δ $\|x-l\| = \|\underbrace{(x-P_L^\perp x)}_{M} + \underbrace{(P_L^\perp x - l)}_{L}\|$, тогда пифагор

$$\|x-l\|^2 = \|x-P_L^\perp x\|^2 + \|l - P_L^\perp x\|^2.$$

∇

(NB) $\|x-l\| = \|x-P_L^\perp x\| \iff l = P_L^\perp x$

Лемма $\|P_L^\perp x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle x, e_i\rangle|^2$

Δ

$$\langle P_L^\perp x, P_L^\perp x\rangle = \langle \sum \langle x,e_i\rangle e_i, \dots \rangle =$$

$$= \sum_{i,j}^{n} \Big[\langle x,e_i\rangle \overline{\langle x,e_j\rangle} \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ik} \text{ в ОРТН б.}}\Big] = \sum_{i=1}^{n} \big[\langle x,e_i\rangle \overline{\langle x,e_i\rangle}\big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |\langle x,e_i\rangle|^2$$

∇

Следствие $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\langle x,e_i\rangle|^2$ (Н-во Бесселя)

$\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Н-во Парсеваля)

Опр Пусть $\{e_i\}$ - ОРТН сист. векторов в E, тогда $\{\varphi_i = \langle x,e_i\rangle\}_{i=1}^{k}$ - коэфф. Фурье относ. $\{e_i\}$

$$\cancel{\|x\|}\,\|P_L^\perp x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2, \quad \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i|^2$$

Теорема Для того, чтобы ОРТН сист. $\{e_i\}$ была бы полной в E, НиД чтобы $\forall x \quad \|x\|^2 = \sum |\langle x,e_i\rangle|^2$

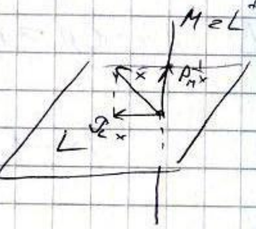
Δ (Н) Неравенство Парсеваля юзаем, поскольку полная система $\{e_i\}$ - базис - ОРТН. И работаем.

(Д) $\|x\|^2 = \sum \dots \Rightarrow \{e_i\}$ - полн. набор?

$\dim E = m < \infty$ Тривиально [illegible]

Решение задачи о $\perp$ в неортон. базисе

$$x = P_L^{\perp} x + P_M^{\perp} x \qquad (E = L \oplus M)$$



$\{a_i\}_{i=1}^{k}$ — базис L (не ортн), $\dim L = k$

$$x = \underbrace{\alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots + \alpha^k a_k}_{P_L^{\perp} x} + P_M^{\perp} x$$

$\langle a_1, (*)\rangle$: E над $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} \bar\alpha_1 \langle a_1; a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_1; a_2\rangle + \dots + \alpha_k \langle a_1; a_k\rangle + 0 = \langle a_1; x\rangle & \langle a_1,(*)\rangle \\ \bar\alpha_1 \langle a_2; a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_2; a_2\rangle + \dots + \bar\alpha_k \langle a_2; a_k\rangle + 0 = \langle a_2; x\rangle & \langle a_2,(*)\rangle \\ \dots & \dots \\ \bar\alpha_1 \langle a_k, a_1\rangle + \bar\alpha_2 \langle a_k; a_2\rangle + \dots + \alpha_k \langle a_k; a_k\rangle + 0 = \langle a_k; x\rangle & \langle a_k;(*)\rangle \end{cases}$$

$$\measuredangle\ G(a_1 \dots a_k) = \begin{vmatrix} \langle a_1; a_1\rangle & \langle a_1; a_2\rangle & \dots & \langle a_1; a_k\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_k; a_1\rangle & \langle a_k; a_2\rangle & \dots & \langle a_k; a_k\rangle \end{vmatrix}$$

det Грамма

$$\alpha_j = \begin{vmatrix} \langle a_1; a_1\rangle & \dots & \langle a_1; x\rangle & \dots & \langle a_1; a_k\rangle \\ \langle a_k; a_1\rangle & \dots & \langle a_k; x\rangle & \dots & \langle a_k; a_k\rangle \end{vmatrix} \Big/ G(a_1 \dots a_k)$$

$$P_L^{\perp} x = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i a_i$$

Теорема $\boxed{\text{Упр}}$ $\exists \{e_1 \dots e_k\}$ — результат ортог. (Г-Ш) для $\{a_1 \dots a_k\}$, тогда $G(a_1 \dots a_k) = \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 \cdots \|e_k\|^2$

Следствие (Упр) $0 \le G(a_1 \dots a_k) \le \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \cdots \|a_k\|^2$

(NB) $G(a_1 \dots a_k) = 0 \iff \{a_i\}_{i=1}^{k}$ — ЛЗ

§10 Естественный изоморфизм евклидова пр. E и его сопряженного E^*

$\dim E = \dim E^* < \infty$ (n)

Теорема: Пусть в E задана $b(x,y) = \langle x,y\rangle_b$ (л. форма)

Тогда: $\tilde{b}: E \to E^*$ действ. по формуле

$\tilde{b}x = f$, где $\langle x,y\rangle_b = (f,y)$ $(\forall y \in E)$

Опр. есть изоморфизм между E и E^*

Δ

1. $\tilde{b}$ - лин. форма $\quad f \in E^*: (f, y_1+y_2) = (f,y_1)+(f,y_2)$

$\langle x, y_1+y_2\rangle = \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle$

Аналогично про $(f, \lambda x)$

2. $\leftrightarrow$ $\exists x \rightarrow f_1, f_2 \Big\} \overset{?}{=} f_1 = f_2$

$$\left.\begin{aligned}\langle x,y\rangle = (f_1;y)\\ \langle x,y\rangle = (f_2;y)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (f_1;y) = (f_2;y) \quad \forall y \in E$$

$$f \rightarrow x_1, x_2 \left\} \begin{aligned}\langle x_1;y\rangle = (f;y)\\ \langle x_2;y\rangle = (f;y)\end{aligned}\right.$$

$\langle x_1 - x_2; y\rangle = 0 \quad \forall y \Rightarrow x_1 - x_2 = 0_E \Leftrightarrow x_1 = x_2$

3. $\forall f \xrightarrow{?!} x$ $\left(\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\tilde{b}\\ \mathrm{Ker}\,\tilde{b}\end{aligned}\right)$ $\boxed{\text{Упр}}$ или в учебнике

∇

1. $\tilde{b}(x_1+x_2) = \tilde{b}(x_1) + \tilde{b}(x_2)$
2. $\tilde{b}(\lambda x_1) = \lambda \tilde{b}(x_1)$

$x_1 \leftrightarrow f_1$ по ф-ле $\langle x_1;y\rangle = (f_1;y)$

$\tilde{b}(\alpha x_1 ?)$ $\quad \langle \alpha x_1;y\rangle = \alpha\langle x_1;y\rangle = \alpha(f_1;y) = (\alpha f_1;y)$

$\alpha x_1 \xleftrightarrow{\tilde{b}} \alpha f_1$

$x_1 + x_2 \xleftrightarrow{\tilde{b}} f_1 + f_2$

Следствие $\tilde{b}$ - обратим. т.е. $\exists \tilde{b}^{-1}: E^* \to E$, так что из $\boxed{\tilde{b}x = f} \Rightarrow \boxed{x = \tilde{b}^{-1} f}$ $\quad x \xleftarrow{\tilde{b}} f$

Переходим формы из E^* в E

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис E $\quad \{f^k\}_{k=1}^n$ - сопр. базис в E^*

$(f^k, e_i) = \delta^k_i$

$\exists\, e^k = \tilde{G}^{-1} f^k$; Δ $\{e^k\}_{k=1}^n \subset E$

<u>Лемма</u>: $\{e^1 \dots e^n\}$ — базис E (изом. сохр. линейн. ...)

<u>Лемма</u>: $\langle e_i, e^k\rangle = \langle e^k, e_i\rangle = \delta_i^k$

Δ $\langle x,y\rangle = (f,y)$ $\exists\, \boxed{x=e^k}$ $\langle e^k; y\rangle = (f^k; y)$

$\exists\, y = e_i$: $\langle e^k; e_i\rangle = (f^k; e_i) = \delta_i^k$

<u>Определение</u> $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$ н. биортонормальными базисами в E

Связь $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{e^k\}_{k=1}^n$

<u>Лемма I</u> $\exists\, g_{ik}$ — матр. метр. $\{e_i\}_{i=1}^n$, т.е. $g_{ik} = \langle e_i, e_k\rangle$

$\exists\, g^{ik}$ — элемент матрицы $\|g^{ik}\| = \|g_{ik}\|^{-1}$

Тогда: $e_i = \sum_{k=1}^n g_{ik} e^k$ и $e^k = \sum_{i=1}^n g^{ki} e_i$

Δ

① $e_i = \sum \alpha_{ik} e^k$ — матр. перехода

$\langle e_i, e_j\rangle = \langle \sum \alpha_{ik} e^k, e_j\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \overbrace{\langle e^k, e_j\rangle}^{\delta_j^k} =$
$= 1\cdot\alpha_{ij} = g_{ij}$

② —//—

∇

(NB1) $\exists\, \{e_i\}$ — орт. $\Rightarrow e^k = e_k$, $\|g_{ik}\| = E$, $g_{ik} = \delta_k^i$

<u>Опр</u> $\exists\, x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$ (*)

$\exists\, x = \sum_i \xi_k e^k$ (**), Тогда $\{\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n\}$ н. контр.вар. компоненты x, $\{\xi_1 \dots \xi_n\}$ — ковариантны.

<u>Лемма II</u> $\xi_i = \sum_{k=1}^n \xi^k g_{ki}$ (3) $\quad \xi^k = \sum_{i=1}^n \xi_i g^{ik}$ (4)

(NB) $g_{ik} = g_{ki}$

$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e^k = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i = \sum_{i=1}^n \xi^i\left(\sum_{k=1}^n g_{ik} e^k\right) =$
$= \sum_{k=1}^n \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n \xi^i g_{ik}}_{\xi_k}\Big) e_k \Rightarrow \xi_i = \sum_{k=1}^n \xi^k g_{ki}$, чтд

Лемма III
Δ (6) $\langle x,$
$= \delta_i'$
(5) ан
∇
Теорема
Δ $\tilde{G}x$
$= \sum$
Упр
∇
Далее в
Замена
ч n
Δ (
Если
W'
(§4)
Опр $\exists\, F$
к а
(NB) Есл
Теорема
Δ $\exists\, \{$

Лемма III $\xi^k = \langle x; e^k\rangle$ (5) $\quad \xi_i = \langle x; e_i\rangle$ (6)

Δ (6) $\langle x; e_i\rangle = \langle \sum \xi_k e^k, e_i\rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k \langle e^k; e_i\rangle = \delta^i_i \xi_i = \xi_i$, чтд.

(5) аналогично. $\quad$ NB2 $\{e_i\}$ - ОРТН $\Rightarrow \xi^i = \xi_i$

∇

Теорема $\tilde{G} x = \sum_{i,k=1}^n \xi^i g_{ik} f^k$

Δ $\tilde{G} x = \tilde{G}\left(\sum_{i=1}^n \xi^i e_i\right) \underset{\text{лин } \tilde{G}}{=} \sum \xi^i \tilde{G} e_i = \sum_{i=1}^n \xi^i \tilde{G}\left(\overbrace{\sum g_{ik} e^k}^{(4)}\right) =$

$= \sum_i \sum_k \xi^i g_{ik} \tilde{G} e_k = \sum_{i,k} \xi^i g_{ik} f^k$

$\boxed{\text{Упр}}$ $\tilde{G}^{-1} A = ?$

∇

$\boxed{\text{Далее } \mathbb{R}}$ $\quad \xi_i = \sum g_{ik} \xi^k$ — (3R)

$\xi^i = \sum g^{ik} \xi_k$ — (4R)

Замена 3R — опускание индекса у координаты, 4R — подъём индекса у координаты.

∢ ω^{ij}_{k} $\quad (2, 1)$ ко, контр

Если хотим $\omega_{i\cdot k}^{\cdot j \cdot} = g_{il}\, \omega^{lj}_{\cdot\cdot k}$ (↓ 1-го инд.)

$\omega^{ijk} = g^{kl}\, \omega^{ij}_{\cdot\cdot l}$

§41 Эрмитово сопряжённые и эрмитовы операторы в E

Опр Пусть E - евкл. пр. над $\mathbb{C}$, тогда $A^+ : E \to E$ эрмитово сопряж. к автоморф. A, если $\forall x, y \in E : \langle Ax; y\rangle = \langle x; A^+ y\rangle$

NB Если E над $\mathbb{R}$, A^+ - сопряж. оператор и обозн. A^*

Теорема $\forall A : E \to E \;\exists! A^+$

Δ Пусть $\{e_i\}$ - ОРТН базис E, пусть $x = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$, $y = \sum \eta^k e_k$

$] \mathcal{A} \longleftrightarrow A = \|\alpha^i_k\| \quad \alpha^i_k = (\mathcal{A}e_k)^i$, т.е. $\mathcal{A}e_k = \sum_i \alpha^i_k e_i$

(NB) $\langle x, y\rangle \overset{\text{ортн}}{=} \sum \xi^i \overline{\eta^i}$;

$\forall \langle \mathcal{A}x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}x)^i \overline{\eta^i} = \left[\sum_i \left(\sum_k \alpha^i_k \xi^k\right)\overline{\eta^i}\right] =$

$= \sum_k \xi^k \left(\sum_i \alpha^i_k \overline{\eta^i}\right) = \sum_k \xi^k \overline{\left(\sum_i \overline{(\alpha^T)}^k_i \eta^i\right)} = \langle x, \mathcal{A}^+ y\rangle$

$(\mathcal{A}^+ y) = \left(\sum_i \overline{(\alpha^T)}^k_i \eta^i\right)$

∇

Опр $] A_{[n\times n]} \quad A = \|\alpha^i_k\| \quad A^+ = \overline{A}^T$ — матрицей, эрмитово сопряж. к A $(\in \mathbb{C})$

Опр $]$ —//— $A^* = A^T$ — матрицей, сопряжённой к A $(\mathbb{R})$

Опр $\mathcal{A}: E \to E$ над $\mathbb{C}$ — эрмитовым, если $\forall x, y \in E \ \langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle$, то есть $\mathcal{A} = \mathcal{A}^+$

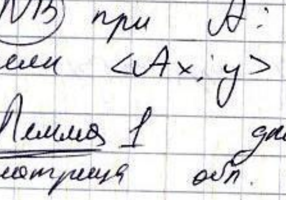
(NB) при $\mathcal{A}: E \to E$ над $\mathbb{R}$ — самосопряжённым (ССО), если $\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle \ \forall x, y \in E$

Лемма 1 для матрицы эрмит. оператора ($\mathbb{C}$) в ОТНБ матрица обл. св-вом: $A = A^+ = \overline{A}^T$

(NB) $A \in \mathbb{C}^n_n$ — эрмитова, если $A = \overline{A}^T$ $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$

Лемма 2 для самосопр. оператора $\mathcal{A}$ $A = A^* = A^T$

Пример $] E = \mathbb{R}^2$, станд. скал. пр-е.



$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ — ортн

$\mathcal{A}_\alpha \longleftrightarrow A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}^*_\alpha \longleftrightarrow A^*_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Т.е. $\mathcal{A}^*_\alpha = \mathcal{A}_{-\alpha}$

Пример $] E = \mathbb{C}^n \quad \{e_1 \dots e_n\}$ — ОРТН $\quad \langle x, y\rangle = \sum \xi \overline{\eta}$

$E = L \oplus M$, где L — л.о. $\{e_1 \dots e_k\}$, M — л.о. $\{e_{k+1} \dots e_n\}$

∡ $P_L^{\perp} = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle x; e_i \rangle e_i$; $\longleftrightarrow$ $P_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \boxed{0} \end{array}\right)$, $\underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{n-k}$

Видно, что $(P_L^{\perp})^T = P_L^{\perp}$

<u>Спектральный анализ эрм. оператора и самосопр.</u>

<u>Лемма 1</u> Пусть A – эрмитов ЛО, тогда спектр $A \subset \mathbb{R}$

Δ ∡ $\lambda \leftarrow$ с.в. x ($Ax = \lambda x$, $x \neq 0$)

для $y = x$: $\langle Ax; x \rangle = \langle x; Ax \rangle$

$\langle Ax; x \rangle - \langle x; Ax \rangle = 0$

$\lambda \langle x; x \rangle - \bar{\lambda} \langle x; x \rangle = 0$

$(\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\| x \|^2}_{\neq 0} = 0 \longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

∇

<u>Лемма 2</u>: Пусть A – эрмитов ЛО, $\lambda_1; \lambda_2$ – с.з., $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \leftrightarrow x_1$, $\lambda_2 \leftrightarrow x_2$. Тогда $x_1 \perp x_2$

Δ

$\langle Ax_1; x_2 \rangle = \langle x_1; Ax_2 \rangle$ (*)

$\langle \lambda_1 x_1; x_2 \rangle = \langle x_1; \lambda_2 x_2 \rangle$

$\lambda_1 \langle x_1; x_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1; x_2 \rangle$

$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle x_1; x_2 \rangle = 0 \rightarrow 0 \Rightarrow \langle x_1; x_2 \rangle = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

∇

<u>Опр</u> ПП L называется пр. E приводящим для ЛО $A: E \to E$, если

1) L – инвариантное д. A

2) $M = L^{\perp}$ – тоже инв. ПП A $\quad E = L \oplus M = L \dotplus M$, L и M – ИПП A

<u>Теорема</u> Для эрмитового A $\forall$ ИПП L – приводящее

Δ

Пусть $x \in L \Rightarrow Ax \in L$ – из опр. ИПП

$y \in M = L^{\perp} \overset{?}{\Rightarrow} Ay \in M$

$\langle x; y \rangle = 0$ $(x \perp y)$ $\left.\begin{array}{l} \langle \underset{L}{Ax}; \underset{M}{y} \rangle = 0 \\ \langle \underset{L}{x}; \underbrace{Ay}_{?!} \rangle = 0 \end{array}\right\}$ $Ay \perp x \Rightarrow Ay \in M$

<u>Теорема</u> Пусть A – эрмитов ЛО (над $\mathbb{C}$), тогда A – скалярный

Δ

$\longleftarrow$ $\perp$: $\{x_1, \dots x_m\}$ - max ЛНЗ из СВ A $(m<n)$

$\sphericalangle$ $L = ЛО\{x_1, \dots x_m\}$ - ин П - L инв отн ($\forall\ Ax_i = \lambda_i x_i \in L$)

$\sphericalangle$ $M = L^{\perp}$ - приводящее, т.е. $E = L \oplus M = L \dotplus M$

Δ компоненту $A_M = A\big|_M$ $\quad A_M : M \to M$, $\quad A_M x \longmapsto Ax \; (\forall x \in M)$

A_M — $\exists \lambda \longleftrightarrow x$ - с.в. A_M : λ и x - с.з. и с.в. A
$Ax = \lambda x$

x - с.в.
$x \in M \Rightarrow \perp x_1, x_2 \dots x_m$

Итого $\{\underbrace{x_1, \dots x_m, x}_{m+1}\}$ - ЛНЗ $\;\longrightarrow\!\!\!\!\!\times$

∇

Следствие: $\forall$ эрм. по A $\exists$ ортн базис из с.в. A.

Построение: 1. $\sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$ $\quad k \le n$
$\forall \lambda : n_i = r_i$ $\quad L_{\lambda_i} = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(r_i)}\}$ $\quad L_{\lambda_i} \perp L_{\lambda_j}$

Теорема ССО - симметрич, из по СВ можно делать ОРТН базис

Если у ССО есть σ_A, то $\sigma_A \in \mathbb{R}$

$\sphericalangle$ $A : E \to E$ - ССО (E - над $\mathbb{R}$), $\dim E = n$
$\{e_i\}_{i=1}^n$ - ортн $(\langle , \rangle)$, $A \longrightarrow A = \|\alpha^i_k\|$, $A = A^T$

Трюк:
E (над $\mathbb{R}$) $\longrightarrow$ $\tilde{E}$ (над $\mathbb{C}$)
$\dim E = \dim \tilde{E}$
$\{e_i\}$ $\quad \{\tilde{e}_i\}$

$A = A^T = \bar{A}^T$ $\quad A$ - эрм. $\xrightarrow{\tilde{E}}$ $\tilde{A}$ - эрмитов
$\chi_A(\lambda) = \det(\alpha^i_k - \lambda \delta^i_k) = 0 \Rightarrow \sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$
$\chi_{\tilde{A}}(\lambda) = \det(\alpha^i_k - \lambda \delta^i_k) = 0 \Rightarrow \sigma_{\tilde{A}} = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$

...

...

∇

14.05.2014

Спектральная теорема

$\langle Ax, y \rangle = \langle x; Ay \rangle$
$A = A^{+}$ ($\mathbb{C}$) $\quad A = A^{T}$ ($\mathbb{R}$)

Пусть $A = A^{+}$ $\sigma_A = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$
(м.б. $\lambda_i = \lambda_j$)

Пусть $\{e_1 \dots e_n\}$ - ортн базис из с.в., т.е. $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$
$Ae_i = \lambda_i e_i$

Тогда: $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$ (где P_{λ_i} - проектор на L_i - по $\{e_i\}$)

NB $\quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i \rangle e_i$ (д-во в спец. опер.)

$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$

Теорема: (min св-во эрмит. оператора)

Пусть $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ - ед. сфера в E

Пусть σ_A: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, тогда:
$\langle Ax, x \rangle$ на S принимает мин. значение на $x_1 \leftrightarrow \lambda_1$ (если λ_1 - простое) или на $\forall$ но... $x_1 \in L_{\lambda_1}$
где L_{λ_1} - собств. пр-во $\leftrightarrow \lambda_1$

т.е. $\langle Ax; x \rangle \geq \lambda_1$; $\langle Ax; x \rangle = \lambda_1$ для x_1

Δ

$\langle Ax; x \rangle$: $\quad Ax = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} x$

$x = \sum P_{\lambda_i} x$

Тогда

$$\langle Ax; x \rangle = \langle \sum \lambda_i P_{\lambda_i} x, \sum P_{\lambda_k} x \rangle =$$
$$= \sum_{ik} \lambda_i \langle P_{\lambda_i} x, P_{\lambda_k} x \rangle = \sum_i \lambda_i \|P_{\lambda_i} x\|^2 \geq$$
$$\geq \lambda_1 \sum \|P_{\lambda} x\| = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \cdot 1$$

Парсеваль

Итого $\langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1$ $\forall x \in S$

Пусть $x = x_1 \Rightarrow \langle Ax_1, x_1 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_1 \rangle = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$

∇

(§42) Унитарные и ортогональные операторы

Опр 1 Пусть E — евкл. пр-во. Пусть $U: E \to E$. U — унит., если $\langle Ux; Uy\rangle = \langle x; y\rangle \quad \forall x, y \in E \quad (1)$

Опр 2 U — унитарный, если $\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in E$

Опр 3 U — унитарный, если $U^{-1} = U^{+}$, т.е. $UU^{+} = J$

Теорема Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 2 $\Rightarrow$ Опр 3 $\Rightarrow$ Опр 1

(1) Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 2 $\langle Ux; Uy\rangle = \langle x; y\rangle$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ Пусть $x = y$

$\langle Uy; Uy\rangle = \langle y; y\rangle$

$\|Uy\|^2 = \|y\|^2$

(2) Опр 2 $\Rightarrow$ Опр 3 $\|Uz\| = \|z\|$ $z = x + y$

① в (2) $\|Uz\|^2 = \|x + y\|^2$

$\cancel{\langle Ux; Ux\rangle} + \langle Ux, Uy\rangle + \langle Uy, Ux\rangle + \cancel{\langle Uy, Uy\rangle} = \cancel{\langle x; x\rangle} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \cancel{\langle y; y\rangle}$

$2\operatorname{Re}\langle Ux; Uy\rangle = 2\operatorname{Re}\langle x; y\rangle$

② в (2) $z = x + iy \Rightarrow \operatorname{Im}\langle Ux, Uy\rangle = \operatorname{Im}\langle x, y\rangle$

Значит $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x; y\rangle$

(3) Опр 1 $\Rightarrow$ Опр 3 ?

$\langle Ux; Uy\rangle = \langle x; y\rangle = \langle x; U^{+}Uy\rangle - \langle x, y\rangle = 0$

$\langle x; U^{+}Uy - y\rangle = 0 \quad \forall y, x \in E$

$U^{+}Uy - Jy = 0_E \Rightarrow U^{+}U = J$

Пусть $\{e_i\}$ — базис E

$\det(U^{+}U) = \det E = 1 \Rightarrow \det U \neq 0 \Rightarrow \exists U^{-1}, \exists U^{-1}$

$\det U \cdot \det U^{+}$

(14) Опр 3 $\Rightarrow$

$UU^{+} = \ldots$

$= \langle Ux \ldots$

Пример

$A_\varphi = \ldots$

Теорема

$U \leftrightarrow \ldots$

Тогда

Δ $U^{+}U \ldots$

$\sum_{i=1}^{n} \ldots$

$\sum \ldots$

∇

Лемма

Δ

Пусть $\{e \ldots$

$= \det \ldots$

∇

Опред. Пусть …

Опр Уни…

Опр: …

(IV) Опр 3 $\Rightarrow$ Опр 1

$UU^+ = U^+U = \mathcal{I} \Rightarrow \langle x,y\rangle = \langle x, \mathcal{I}y\rangle = \langle x, U^+Uy\rangle =$

$= \langle Ux; Uy\rangle$ чтд.

Пример: $\exists\, U = A_\varphi$

$A_\varphi^{-1} = A_{-\varphi} = \overline{A}_\varphi^{T} = A_\varphi^{*}$ $\quad \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \to \begin{pmatrix} \cdots & + \\ - & \cdots \end{pmatrix}$

Теорема: $\exists\, \mathcal{U}$ — ун.о. $\exists \{e_i\}_{i=1}^n$ — ортн.

$\mathcal{U} \leftrightarrow U = \|\vartheta^i_k\|$

Тогда $\sum_{\nu=1}^n \vartheta^i_\nu \overline{\vartheta^k_\nu} = \delta_{ik}$ [ортогон. U по строкам]

$\sum_{\nu=1}^n \overline{\vartheta^\nu_i}\, \vartheta^\nu_k = \delta_{ik}$ [-//- по столбцам]

Δ $\mathcal{U}^+\mathcal{U} = \mathcal{I} \xleftrightarrow{\{e_i\}} U^+U = E$ $\quad \boxed{\overline{U}^T U = E}$

$\sum_{\nu=1}^n \{\overline{U}^T\}^i_\nu \{U\}^\nu_k = \delta^i_k$

$\sum \overline{\vartheta^\nu_i}\, \vartheta^\nu_k = \delta_{ik} \leftrightarrow ②$

∇

Лемма: $\exists\, \mathcal{U}$ — ун.о. Тогда $|\det U| = 1$

Δ $\exists \{e_i\}$ — базис ортн E; $\mathcal{U} \xleftrightarrow{\{e_i\}} U: U^+U = UU^+ = E$

$\measuredangle\ U^+U = E$, $\det(U^+U) = \det U^+ \det U =$

$= \det(\overline{U})^T \det U = \det\overline{U} \det U = |\det U|^2 = \det E = 1$

∇

Опред. $\exists\, U \in \mathbb{C}^n_n$, $U^+ = U^{-1}$, тогда U наз. унитарной.

Опр: Унитарный оператор в $\mathbb{R}$ наз. ортогональным.

Опр: унитарн. матрица в $\mathbb{R}$ наз. ортог.

Спектральный анализ УНО

Лемма 1 Пусть U − УНО, $\sigma_U = \{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$ − спектр
Тогда $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,k}$

Δ

$\exists \lambda$ − с.з. $\Longleftrightarrow$ x − с.в. $\begin{cases} Ux = \lambda x \\ x \neq 0_E \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \langle Ux; Ux \rangle &= \langle x; x \rangle \\ \langle \lambda x; \lambda x \rangle &= \lambda \bar{\lambda} \langle x; x \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda\bar{\lambda}\langle x; x\rangle = \langle x; x \rangle \Rightarrow$$

$|\lambda| = 1$.

∇

Лемма 2. С.В. УНО, отвечающие различным с.з. его являются ортогональными

$$\left.\begin{aligned} \underset{x_i}{\lambda_i} \neq \underset{x_j}{\lambda_j} \quad (\lambda_i, \lambda_j \in \sigma) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_i \perp x_j$$

Δ

$$\langle Ux_1; Ux_2 \rangle \overset{УНО}{=} \langle x_1; x_2 \rangle$$

$$\langle \lambda_1 x_1; \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle x_1; x_2 \rangle =$$

$$= e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} \langle x_1; x_2 \rangle \Rightarrow e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} \langle x_1; x_2 \rangle = \langle x_1; x_2 \rangle$$

$$\underbrace{\left(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1\right)}_{\neq 0} \langle x_1; x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_1; x_2 \rangle = 0$$

$x_1 \perp x_2$

∇

Теорема Пусть L − инв. пп, $\Rightarrow$ M − инв. пп $M = L^{\perp}$

$\forall L$ − инв. пп U − приводящее $\boxed{\text{Упр}} \leftarrow 6$.

Теорема Пусть U − УНО, тогда 1) U − скалярн.
2) Из с.в. можно состав. ОРТН базис

Спектр. теорема $U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{\lambda_i}$

(ОВ) $\{e_i\}$ − ортн. из с.в. U $\quad Ux = \sum e^{i\varphi} \langle x, e_i \rangle e_i$

Вторник

$E =$ ло $\{$

$\langle f, g \rangle$

$\exists \beta >$

Он о

Орт

$\langle Co$

$\{\sqrt{}$

E

x

G

$\{e_1 =$

e' e

$e' =$

$\langle e_1; e' \rangle$

4.05.2014 Session is near! (сук))))00))

Теорема:

$\exists A$ - эрмитов A can be $\to$ diag.
Унитарным - преобразованием
ортонорм. —//— для $\mathbb{R}$ ССО собст-зна

Δ

$\forall A$ - эрм. $\exists \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ - ОРТН базис из СВ

$\Rightarrow$ 1) $\tilde{A} = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
2) $\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_k \rangle = \delta_{ik}$
$T = (E_1; E_2, \dots E_n)$ - ортогон. по столбцам

∇

Теорема $\exists H = \{$во $U: E \to E$ - унитарн.$\}$
Тогда H - группа по $\times$ операторов

Δ $\triangleleft$ ОРТН базис; $U \xleftrightarrow{\{e_i\}} U$ $U^{-1} = U^{+} = \overline{U}^{T}$

① Замкнутость: $U_1, U_2 \in H = \{$во $U_{[n \times n]}\ U^{-1} = U^{+}\} \overset{?}{\Rightarrow}$
$\overset{?}{\Rightarrow} U = U_1 U_2 \in H$
а) $U^{-1} = (U_1 U_2)^{-1} = U_1^{-1} U_2^{-1}$
б) $U^{+} = \overline{U}^{T} = \overline{(U_1 \cdot U_2)}^{T} = \overline{U_2}^{T}\ \overline{U_1}^{T} = U_2^{+} \cdot U_1^{+}$

1] $(U_1 U_2) U_3 = U_1 (U_2 U_3)$
2] $\exists$ нейтр $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3] $\exists$ обр. $\forall U$ $\exists U^{-1} = \overline{U}^{T}$

∇

Теорема $H = \{U_{[n \times n]} : U^{+} = U^{-1}\}$ - группа

NB1 $H = U(n)$

NB2 $\exists \forall$ $SU(n) = \{U \in U(n)\ \det U = 1\}$ - подгруппа $U(n)$

Теорема $\exists Q = \{U \in \mathbb{R}^n_n\ U^{-1} = U^{+} = U^{T}\} = O(n)$ - мн. ортогон. матриц

$U \in O(n)$ $\det U = \pm 1$ $\to SO(n) = \{U \in O(n)\ \det U = 1\}$ - подгр. $O(n)$
$\to \{U \in O(n),\ \det U = -1\}$ - не подгр.

собств. вращение
несобств. вращение

№43 Квадратичные формы — Среда 12^{30} - Тест

I Основные опр. и св-ва

1) $\Phi(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \eta^k$, $x,y\in E$, $x = \xi^i e_i$, $y = \eta^k e_k$

$\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$ симм. билин. форма — $\mathbb{R}$

$\Phi(x,y) = \sum \varphi_{ik}\, \xi^i \overline{\eta^k}$ — $\mathbb{C}$

эрмитова $\varphi_{ik} = \overline{\varphi_{ki}}$

Опр $\mathbb{R}$ Квадр. формой наз-ся объект сл. вида: $\Phi(x,x) = \sum \varphi_{ik}\, \xi^i \xi^k$, $\varphi_{ik}=\varphi_{ki}$ (3)

Опр $\mathbb{C}$ В компл. пр. квадр. формой наз. объект:

$\Phi(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} \varphi_{ik}\, \xi^i \overline{\eta^k}$ (4)

$\Phi = \overline{\Phi^T} = \Phi^+$

$\Phi = \|\varphi_{ik}\|$

Преобразование матр. кв. ф. при замене базиса

$\{e_i\} \xrightarrow{T} \{\tilde e_i\}$

$\mathbb{R}$: $\Phi(x,x)$: $\{e\} \to \Phi = \|\varphi_{ik}\|$, $\{\tilde e\} \to \tilde\Phi = \|\tilde\varphi_{ik}\|$ $\Rightarrow$ $\underline{\tilde\Phi = T^T \Phi T}$

$\mathbb{C}$: $\tilde\varphi_{ik} = \Phi(\tilde e_i, \tilde e_k) = \Phi(\tau^s_i e_s, \tau^t_k e_t) \overset{\text{эрм.}}{=} \tau^s_i \overline{\tau^t_k}\, \Phi(e_s, e_t) = (T^T)^i_s\, \varphi_{st}\, \overline{\tau^t_k}$

$\underline{\tilde\Phi = T^T \Phi \overline{T}}$

II Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Опр. $\mathbb{R}: \varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi^i)^2$ (*)

$\mathbb{C}: \varphi(x,x) = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$ (**)

Методы (методы)

1) Лагранж: 1) выделение ~~множителей~~ полных квадратов, новые переменные

$\mathbb{R}^2: \varphi(x,x) = (\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 + 8(\xi^2)^2 = (\xi^1 + 2\xi^2)^2 + 4(\xi^2)^2$

$\varphi(x,x) = \dots$

2) приведение к Σ кв. унитарным (ортог) преобразов.

$\{e_i\}$ – ОРТН в E (над $\mathbb{C}$)

$\varphi(x,x) = \sum \varphi_{ik} \xi^i \overline{\xi^k}$ $\quad \Phi^+ = \Phi = \overline{\Phi^T}$

$\{e\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}\}$

Если $\tilde{\Phi} = T^T \Phi \overline{T}$

Хотим: $T^{-1} = \overline{T}^T$, $T^T = \overline{T}^{-1} = (\overline{T})^{-1}$,

т.е. $\tilde{\Phi} = (\overline{T})^{-1} \Phi (\overline{T})$

$U = \overline{T}$ $\quad \underbrace{\tilde{\Phi} = U^{-1}\Phi U}$ такое возможно

$\Phi \leftarrow \varphi_{\text{л.о.}}$ $B - \overline{E}$

$\Phi = \overline{\Phi^T} = \Phi^{-1} \Longrightarrow \varphi = \varphi^+$

$\exists U$ – унит. $U = (x_1 \dots x_n)$

Он, использование:

Соотн. анализ $\varphi: \sigma_\varphi = \{ \dots \} \subset \mathbb{R}$

$\{x_i\}$ – ОНТК E из св. $\varphi x_i = \lambda_i x_i$

$U = (X_1 \dots X_n) \rightarrow T = \overline{U} \Rightarrow \tilde{\Phi} = T^T \Phi T = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$

т.е. $\varphi(x,x) = \sum \lambda_i \xi^i \overline{\xi^i} = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$

(III) Закон инерции квадр. формы

Теорема Если кв. форма приведена $\Phi(x,x)=\sum \lambda_i|\xi^i|^2$ к сумме кв. двумя различн. способами, то число полож. коэф. в разложении совпадает. Также совпад. число отр. и нулевых (ℓ)

$$\exists\ \Phi(x,x)=\lambda_1|\xi^1|^2+\ldots+\lambda_p|\xi^p|^2+\lambda_{p+1}|\xi^{p+1}|^2+\ldots+\lambda_{p+q}|\xi^{p+q}|^2;\quad (*)\qquad \begin{cases}\lambda_i>0 & i=\overline{1,p}\\ \lambda_i<0 & i=\overline{p+1,p+q}\\ \lambda_i=0 & i=\overline{p+q+1,n}\end{cases}$$

$$\Phi(x,x)=\tilde\lambda_1|\tilde\xi^1|^2+\ldots+\tilde\lambda_{\tilde p}|\tilde\xi^{\tilde p}|^2+\tilde\lambda_{\tilde p+1}|\tilde\xi^{\tilde p+1}|^2+\ldots+\tilde\lambda_{\tilde p+\tilde q}|\tilde\xi^{\tilde p+\tilde q}|^2;\quad (**)\qquad \{-//-$$

Надо $p=\tilde p,\ q=\tilde q$

$\longleftarrow|: \exists\ p>\tilde p$ $\quad \Delta\ L_1=\text{ЛО}\{e_1\ldots e_p\} \leftarrow \dim=p$

$L_2=\text{ЛО}\{\tilde e_{\tilde p+1}\ldots \tilde e_{\tilde p+\tilde q}+\ldots+\tilde e_n\}$, $\dim L_2=n-\tilde p$

$$\dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2)$$

$$p+n-\tilde p=n+\underbrace{(p-\tilde p)}_{>0}>n \Rightarrow \dim(L_1\cap L_2)\geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ z\in L_1\cap L_2 \begin{cases} z\in L_1 & \Phi(z,z)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i|\xi^i|^2>0\\ z\in L_2 & \Phi(z,z)=\sum_{\tilde p+1}^{n}\tilde\lambda_i|\tilde\xi^i|^2\leq 0\end{cases}$$

$p\leq\tilde p$ значит. поменяем местами L_1, L_2, $\tilde p\geq p$, тогда $\tilde p=p$.

∇

Опр Число полож. λ разлож. в $(*)$ Φ полож. индексом инерции — n_+

Отр — n_-

Нулевых — n_0

$\{n_+, n_-, n_0\}$ — сигнатура $\Phi(x,x)$

NB Иногда сигнатура Φ $n_+ + n_-$

IV Одновременное приведение пары квадр. форм к сумме квадратов

О положит. опр. формах:

<u>Теорема</u> $\Phi(x,x)$ — полож. опр. $\iff$ $n_+ = \dim E = n$

$\Phi(x,x) = \sum \lambda_i |\xi^i|^2$

$n_+ = n \iff \lambda_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

2) $\Phi(x,x) \xrightarrow{\{e_i\}} \Phi = \|\varphi_{ik}\|, \quad \Phi^* = \Phi$

$\sigma_\Phi = \{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$.

<u>Теорема</u> Пусть $\Phi(x,x)$, $\Psi(x,x)$ — пара кв. форм в $E(\mathbb{C})$

Ψ — пол. определена

<u>Тогда</u> $\exists \{e_i\}_{i=1}^n$ — ортн баз. E: $\Phi(x,x)$ и $\Psi(x,x)$ в $\{e\}$ — имеет канонич. вид.

$\Phi(x,x) = \sum \varphi_{ik}\xi^i\bar{\xi}^k \quad \Phi = \|\varphi_{ik}\| \quad \Phi^* = \Phi$

$\Psi(x,x) = \sum \psi_{ik}\xi^i\bar{\xi}^k \quad \Psi = \|\psi_{ik}\| \quad \Psi^* = \Psi$

$\{e_i\} \xrightarrow{T'} \{e_i'\}_{\text{ортн}\,\langle,\rangle_\Psi} \xrightarrow{\tilde{T}} \{\tilde{e}_i\}_{\text{ортн}\,\langle,\rangle_\Psi}$

Д $\Psi(x,x) \to \Psi(x,y)$ — скаляр. произв.

в E $\langle x,y\rangle \to \langle x,y\rangle_\Psi = \Psi(x,y)$

$\{e_i\} \xrightarrow[\text{ОРТН в ск. } \langle x,y\rangle_\Psi]{T'} \{e_i'\}$

NB в $\{e_i'\}$ $\Phi \to \Phi' = \Phi'^*$

$\Psi \to \Psi' = E$

Φ' — эрм. $\tilde{T} = \bar{U} \quad U = (x_1, x_2 \dots x_n)$ $\quad \boxed{x_i = \tilde{e}_i}$

$\tilde{\Phi} = \tilde{T}^T T'^T \Phi \bar{T}' \bar{\tilde{T}}$

3) Можно ли ~~прив.~~ к Σ кв-в, не находя базис

$\tilde{\Phi} - \lambda\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi} - \lambda E = \|\lambda_i\delta_{ik} - \lambda\delta_{ik}\| = \|(\lambda_i - \lambda)\delta_{ik}\|$

$\det(\tilde{\Phi} - \lambda\tilde{\Psi}) = 0 \iff \det(\Phi - \lambda\Psi) = 0$