① ПЭИ, примеры. События, действия. Алгебра / σ-алгебра событий. Условные алгебра и σ-алгебра. Примеры.

- ω - эл. исход $\Rightarrow$ Ω - пр-во эл-х исходов.
- $\forall A \subset \Omega$ - событие.
- Σ - выделенная σ-алгебра событий
- (Ω, Σ) - измеримое пространство
- (Ω, Σ, P) - вероятностное пр-во $(P : \Sigma \to \mathbb{R})$

Примеры: • монета $\times 2$: $\Omega = \{OO, OP, PO, PP\}$ $|\Omega| = 4$ $|\Sigma| = 2^4$
• разрыв нити $\Omega = [a, b] \cdots$

- $\varnothing$ - невозможное событие, Ω - достоверное
- Ω замкнута относительно $[+ \equiv \cup, \cdot \equiv \cap, \setminus]$
- A и B несовместны, если $A B = \varnothing$
- $\Omega \setminus A$ - обратное к A событие
- Для сложения и произв. работают комм., ассоц., дистрибутивность - как обычно.

- Алгебра на Ω - это 2^{Ω} + замкн. отн. $+, \cdot$, содержит $\varnothing$ и Ω, $\forall A B \in \Sigma$ $A \setminus B \in \Sigma$
- σ-алгебра - Алгебра + счетная аддитивность. $\Rightarrow$ $\cdot$ тоже счетно
- Алгебра замкнута отн. $\cdot$, т.к. $A \cdot B = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$.
- $\Sigma_Б$ - алгебра Бореля порожденная $[a, b)$
- $P = P(A)$ - вероятностная мера на (Ω, Σ)

> Если Ω н.б.ч. счетно, мера $p : \Omega \to \mathbb{R}$ $([0,1])$ и $p(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \Rightarrow p(A) = \sum p(\omega)$ ← конечная сумма (счётная)

> В общем случае Аксиомы Колмогорова.

1. $\forall A \in \Sigma$ $p(A) \geq 0$
2. $p(\Omega) = 1$
3. $A_i \cdot A_j \neq \varnothing \Rightarrow P(A_i + A_j) = P(A_i) + P(A_j)$

(2). Дискретная схема: вероят. пр-во, счетная аддитивность меры.

Ω - конечно, тогда $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$, $P(\varnothing) = 0$

Конечный случай $\subset$ Общий, т.к. если $A_1 \dots A_n$ - дизъюнктный набор подмножеств, что $\cup A_i = \Omega$, то $p(\Omega) = \sum p(A_i) = \sum\sum p_i = 1$.

Примеры: монета до выпадания орла:

$$\left.\begin{matrix} O & PO & PPO & PPPO & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \end{matrix}\right\} \sum p_i = \sum \frac{1}{2^i} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

(3). Дискретные схемы

1. Классическая $|\Omega| = n$, $\Omega = \{\omega_i\}$

$p(\omega_i) = p(\omega_j)$ $\forall i, j$ $\Rightarrow \sum p(\omega_i) = 1 \Rightarrow p(\omega_i) = \frac{1}{n}$.

2. Геометрическая схема. последовательность однотипных опытов с 2 исходами. $A, \overline{A}$.

С возвращением

$p(A_i) = p$. $\Omega = \{ A_1, \overline{A_1} A_2, \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3, \dots \}$

$p(\omega_i) = (q)^{k-1} p$ $\quad q = 1-p$ $\quad p(\omega_n) \geq 0$

$\sum^{\infty} p_i = \sum^{\infty} p q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1$

3. Бернулли — n опытов, m успехов Вер-ть усп. p.

$P(B_{nk}) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0$ $\quad \Omega = \sum_{k=0}^{n} B_{nk} \Rightarrow$

$\Rightarrow p(\Omega) = \sum p(\omega_i) = \sum C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

4. Пуассон Π_λ, $\lambda > 0$ $\quad \Omega = \mathbb{N}$

$p(m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$,

$p(m) \geq 0$ $\quad \sum^{\infty} p(m) = e^{-\lambda} \sum^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1$

5. Гипергеом. схема. n однотипных предметов

$n = n_1 + n_2$

Извлекаем k предметов.

$P_{nn_1}(k, k_1)$ — вер-ть что среди k предметов ровно k_1 имеют тип n_1.

$|\Omega| = n$, $\quad P_{nn_1}(k\, k_1) = \dfrac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$, $\quad k_2 = k - k_1$

$P_{nn_1}(k\, k_1) \geq 0$, $\quad \sum = 1$.

6. Полиномиальная схема

Последов. нез. опытов $\Rightarrow \{A_1 \cdot\cdot A_n\}$ с вер. p_i, $\quad \sum p_i = 1$

$$p(B_{n\, m_1 \cdot\cdot m_k}) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}\, p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$$

[вер-ть что выпадет среди n опытов
$m_1 - A_1$
$m_2 - A_2$ и т.д.

(4) Аксиомы Колмогорова, св-ва вероят. меры.

(Ω, Σ, p) — измеримое пр-во.

* повторить д-во, что дискр. схема с общая *

Свойства $P = P(A)$:

$p : \Sigma \to [0, 1]$

1. $\forall A \in \Sigma \quad p(A) \geq 0$
2. $p(\Omega) = 1$
3. $A_i \cdot A_j = \emptyset \Rightarrow p(A_i + A_j) = p(A_i) + p(A_j)$

Аксиоматика ещё раз

1. $P(\emptyset) = 0$

Δ. $\Omega + \emptyset_1 + \cdots + \emptyset_n = \Omega$

$\Rightarrow 1 = 1 + \sum p(\emptyset_i) \Rightarrow p(\emptyset_i) = 0$

2. Конечная аддитивность

3. $p(\overline{A}) = p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$

$A + \overline{A} = \Omega \qquad \overline{A} \cdot A = \emptyset$, тогда $1 = p(A) + p(\overline{A})$ по 3 св-ву.

4. $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$

$\Delta \quad B = A + (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

по 2 св. $\quad p(B) = p(A) + \alpha \geq p(A)$

∇

5. $p(B \setminus A) = p(B) - p(A)$ (следствие)

6. $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$

$\Delta \quad A + B = A + (B \setminus A) \qquad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

$p(A + B) = p(A) + p(B \setminus A) = p(A) + p(B) - p(AB)$

Включение-исключение

7. $p(\sum A_i) = \sum p(A_i A_j) + \sum_{i>j} p(A_i A_j) + \sum A_i A_j A_k - \dots$

$+ (-1)^{n+1} p(\prod_{i=1}^{n} A_i)$

Δ по индукции ∇

Следствие: $p(\sum_{\infty}^{n} A_i) \le \sum^{n} p(A_i)$

$p(\sum A_i) \le \sum^{\infty} p(A_i)$

⑤ Счетная адд. и акс. непрерывности, экв. двух аксиом. Связь счетной адд. и акс. непрер.

1. Акс. непрерывности (сверху)

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \quad B = \lim B_n = \bigcap^{\infty} B_i$

$\Longrightarrow p(B) = p(\lim B_n) = \lim P(B_n)$

2. Акс. непрерывности (снизу)

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \quad A = \lim A_n = \bigcup^{\infty} A_i$

$\Longrightarrow p(A) = p(\lim A_n) = \lim p(A_n)$

Эквивалентность

Δ

$B := \bigcap^{\infty} B_n = \bigcap^{\infty} (\Omega \setminus A_n) = \Omega - \bigcup A_n = \Omega \setminus A$

B_n убывает, $A_n = \Omega - B_n$ — возрастает.

$P(B) = \lim P(B_n) = 1 - P(A) = 1 - \lim p(A_n)$

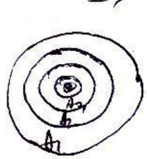
∇

Аксиома счёт аддитивности $\Longleftrightarrow$ конечная адд. + 1 акс. непр.

Δ

$\Longrightarrow \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$

$A_1 = B_1 \setminus B_2 = B_1 \overline{B_2}$, $A_n = B_n \overline{B_{n+1}}$



Каждые A_i и A_j попарно несовместны (вернее, набор $\{A_i\}$ поп. несовместен)

$B_i = B + \sum_{j \ge i}^{\infty} A_j \Longrightarrow p(B_n) = p(B) + \sum_{j \ge n}^{\infty} p(A_j)$

Отсюда $\lim_{n\to\infty} (P(B_n)) = P(B)$

↳ 1 аксиома непр сверху

$\Longleftarrow \quad A_1 \dots A_n, \quad A_i \in \Sigma \quad A_i A_j \overset{i \ne j}{=} \emptyset$

$p(\sum^{\infty} A_i) = p(\sum_{0}^{n} A_i + \sum_{n}^{\infty} A_i) = \sum^{n} p(A_i) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n}^{N} p(A_i) =$

⑥ Незав. попарная / в совокупности. Нез-ть экспериментов. Свойства незав. событий.

- A, B незав $\overset{def}{=} p(A\cdot B) = p(A)p(B)$
- $\exists A_1 \dots A_n \in \Sigma$, $\forall (k_1 \dots k_l)$, где $l \in [2, n]$

  Тогда $\{A_i\}$ независимы в совокупности, если

  $P(\prod_{i=1}^{l} A_{k_i}) = \prod_{i=1}^{l} p(A_{k_i})$ (любой поднабор независим по сов.)
- Из независимости в совокупности следует попарная.
- Пример — тетраэдр, его красят в 3 цвета: З, Ч, Кр.

  A — на тетраэдре выпал черный цвет  Три грани одноцветны, одна содержит 3 цвета сразу

  B — зелёный C — красный

  $p(AB) = p(BC) = p(AC) = 1/4$ ∴ нет незав. в сов.

  $p(A) = p(B) = p(C) = 1/2$ $p(ABC) = 1/4 \neq p(A)p(B)p(C) = 1/8$
- Незав. экспериментов — пусть G_1 и G_2 - 2 экспер.

  $(\Omega_1, \Sigma_1, p_1)$ $(\Omega_2, \Sigma_2, p_2)$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

  $\forall A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \Sigma_1$, $A_2 \in \Sigma_2$,

  $p(A) = p(A_1)\cdot p(A_2) = p(A_1 \times \Omega_2)\cdot p(A_2 \times \Omega_1)$

- Св-ва незав. событий.

  1. A и B незав $\Rightarrow$ A и $\overline{B}$ тоже
  2. A и B незав. A и C незав $\Rightarrow$ A и $B+C$ незав.

     $p(A(B+C)) = p(AB+AC) = p(AB) + p(AC) = p(A)p(B+C)$
  3. Независимость и несовм. — взаимоисключающие понятия

  △ A и B незав $\Rightarrow$ A и B совм.

  $p(A B) = p(A)p(B) \neq 0 \Rightarrow A\cdot B \neq \varnothing$

  A и B несовм $\Rightarrow$ A и B зав.

  $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow p(A B) = 0 \neq p(A)\cdot p(B)$

  ▽

⑦ Условная вероятность. Полная вероятность. Ф-ла Байеса. Примеры.

- (Ω, Σ, P), $B \in \Sigma$, $p(B) \neq 0$. B - произвол. событие.

  Тогда $(\Omega_B, \Sigma_B, P_B)$ - новое в.п., где

  $\Sigma_B = \{A\cdot B \mid A \in \Sigma\}$, $P_B(A) = \frac{P(A B)}{P(B)} =: p(A|B)$

  Отметим, что если A и B независимы, то

  $p(A|B) = p(A\cdot B)/p(B) = p(A)p(B)/p(B) = p(A)$

• $H_1 \dots H_n$. $\sum H_i = \Omega$. $H_i H_j \overset{i\neq j}{=} \emptyset$

Тогда $p(A) = \sum\limits_{p(H_i)\neq 0} p(A|H_i)\,p(H_i)$ — ф-ла полной вер-ти

Δ

$A = A\cdot\Omega = A\cdot\sum\limits^{n} H_i = \sum\limits^{n} AH_i$. Заметим, что $AH_i \cdot AH_j \overset{i\neq j}{=} \emptyset$

Тогда

$$p(A) = \sum^{n} p(A\cdot H_i) = \sum_{p(H_i)\neq 0} p(H_i)\cdot p(A|H_i).$$

раскрыли по ф-ле ↑ усл. вероятности

Переход к предикату $p(H_i)\neq 0$ верен:

$\exists\, p(H_i) = 0$. Тогда $AH_i \subseteq A \Rightarrow 0 \le p(A\cdot H_i) \le p(H_i)$

Откуда $p(A\cdot H_i) = 0$

∇

• Формула Байеса

$$p(A)\neq 0 \Rightarrow p(H_i|A) = \frac{\overbrace{p(A|H_i)\,p(H_i)}^{p(H_i\cdot A)}}{\sum\limits_{i:\,p(H_i)\neq 0} p(H_i)\,p(A|H_i)}$$

• Примеры: не нужны. H_i — изделие произв. i-м заводом $i\in[1,3]$

Также дано 'A — изделие бракованно' для заводов. $p(A|H_i)$. Найти $p(H_i|A)$

? ⑧ Схема Бернулли — незав. по сов. с 2 исх.

$\exists\, Q_i$ — послед. испытание с 2мя исходами

$A_i = A$ — успех $\quad \overline{A_i} = \overline{A}$ — неудача

Хотим: 1. Независимость в совокупности

2. $p(A_i) = p(A) = p$.

$\Omega_1 \dots \Omega_n$ $\;\Omega_i = \{A_i, \overline{A_i}\}$; $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$

$p(A_i) = p(\Omega_1)\cdots p(\Omega_{i-1})\,p(A_i)\,p(\Omega_{i+1})\cdots p(\Omega_n) = p$

$p(\omega) = p(\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_n) = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$

$p(B_{np}(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

+обратное следствие см. Рогаче

(или придумать, там несложно)

⑨ Наивероятнейшее событие в сх. Бернулли

~~$\forall k$~~ m_0 — наив. число успехов, если
$\forall m = 0..n \quad p(B_{np}(m_0)) \geq p(B_{np}(k))$

Теорема. $np - q \leq m_0 \leq np + p$

Δ

$$A = \frac{p(B_{np}(m))}{p(B_{np}(m-1))} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1}(1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{q}\,\frac{n-m+1}{m} = \frac{pn-pm+p}{qm}$$

$$A - 1 = \frac{np - mp + p}{mq} - 1 = \frac{np - mp - mq + p}{mq} =$$

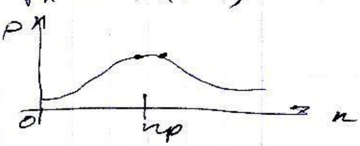
$$= \frac{np - mp - m(1-p) + p}{mq} = \frac{np - m + p}{qm} = \frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} - 1$$

$A > 1 \quad m < np + p$, тогда $A > 1$, то есть $A \nearrow$

$A < 1 \quad m > np + p, \searrow$

$A = 1$, тогда $m = np + p$ (то есть $P_n(m) = P_n(m-1)$)

$$p(B_{np}(m)) \geq \begin{cases} p(B_{np}(m-1)) & m < np+p \\ p(B_{np}(m+1)) & m > np - q \end{cases}$$



∇

⑩ Предельная теорема Бернулли: гипергеом $\leftrightarrow$ бином.

$n = n_1 + n_2$; пусть n_1 — черные, n_2 — белые.
Извлекаются k шаров. $B_{n n_1}(k\,k_1)$ — среди k ровно k_1 с признаком n_1

$n \to \infty$, $\frac{n_1}{n} \to p$ и k фикс.

Тогда $P(B_{n n_1}(k\,k_1)) \to p(B_{k,p}(k_1))$

Δ

$$P_{n n_1}(k\,k_1) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k} = \frac{n_1!\,n_2! \cdot (k!\,(n-k)!)}{k_1!\,(n_1-k_1)!\,k_2!\,(n_2-k_2)!\,n!} =$$

$$= C_k^{k_1} \frac{n_1!\,n_2!\,(n-k)!}{(n_1-k_1)!\,(n_2-k_2)!\,n!} = C_k^{k_1} \frac{(n_1-k_1+1)\cdots n_1 \cdot (n_2-k_2+1)\cdots n_2}{(n-k+1)\cdots n} \to$$

$$\xrightarrow[\frac{n_2}{n} \to (1-p)]{n\to\infty,\ \frac{n_1}{n}\to p} C_k^{k_1} p^{k_1} q^{k-k_1}$$

∇

(11) Предельная теорема Пуассона

Имеется последовательность схем Бернулли
$\{B_{np}(m),\ p(B_{np}(m))\}$.
$p = p(n) \to 0$, $np \to \lambda$, $n \to \infty$

Тогда $\forall m$ есть сходимость

$$p(B_{np}(m)) \longrightarrow p(\Pi_\lambda(m)) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$$

2й зам предел

Тейлор

Δ

$$p(B_{np}(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\,\frac{\overbrace{n\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}^{m\ \text{штук}}}{1}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \sim$$

$$\sim \frac{1}{m!}\,\underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}_{\text{поделили на } n}\cdot\lambda^m\cdot\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\lambda/n+o(1/n)}}\right]^{\varphi} =$$

$\varphi = -n\left(\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$\sim \frac{1}{m!}\lambda^m e^{-\lambda+o(1)} \sim e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!};$$

2-й зам. предел

∇

(12) Локальная теорема М-Л

Имеем последов-ть схем Бернулли $B_{np}(m)$
Тогда $\forall \Delta = \langle a, b\rangle$ при $n \to \infty$ равномерно,
по всем m, таким что:

$$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \in \Delta$$

Верно: $p(B_{np}(m)) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Δ

1. $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,e^{\theta_n}$, $|\theta_n| \le \frac{1}{12n}$ ← Стирлинг
2. $x_{m+1}-x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}} \to 0$, $m = x_m\sqrt{npq}+np = np\left(1+x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right) = np(1+o(1))$
3. $P_m = p(B_{np}(m)) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} =$

$$= \frac{n^n e^m e^{n-m}}{e^n m^m (n-m)^{n-m}} \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\, e^{\theta_n} e^{-\theta_m} e^{-\theta(n-m)}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m}\sqrt{2\pi}\sqrt{n-m}} \cdot p^m q^{n-m} =$$ Разложили по ф. Стирлинга

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}}_{} \; e^{\theta_n - \theta_m - \theta(n-m)} ; \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{I} \; \mathrm{II} \; \mathrm{III}.$$

Оценим их.

4. (I) $A = \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}$; $\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{np(1+o(1))\,nq(1+o(1))}{n}} =$ (заменили по п. 2)

В дополнение к пункту 2

$$\left[\begin{aligned} n-m &= n - np - x_m\sqrt{npq} = \\ &= nq\left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \\ &= nq(1+o(1)) \end{aligned}\right]$$

$$= \sqrt{npq}\,(1+o(1))$$

(II) $A = e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}}$

$$|\ln A| = |\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}| \le \frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)} =$$

$$= \{\text{по п. 2}\} = \frac{1}{12n} + \frac{1}{12np(1+o(1))} + \frac{1}{12nq(1+o(1))} =$$

$$= \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p(1+o(1))} + \frac{1}{q(1+o(1))}\right) \Rightarrow A \to 1$$

(III) $A = \left(\frac{m}{np}\right)^{-m} \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{m-n}$

$$\ln A = -m\ln\left(\frac{m}{np}\right) - (n-m)\ln\left(\frac{n-m}{nq}\right) =$$

$\{$см. пункт 2$\}$

$$= -m\ln\left(1 + x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m)\ln\left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) =$$

$$= \{\text{Тейлор} + \text{п. 2}\} = -\left(\overset{1}{np} + \overset{2}{x_m\sqrt{npq}}\right)\left(\overset{3}{x_m\sqrt{\frac{q}{np}}} - \overset{4}{x_m^2\frac{q}{np\cdot 2}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) -$$

$$- (nq + x_m\sqrt{nqp})\left(-x_m\sqrt{\frac{p}{nq}} - x_m^2\frac{p}{2nq} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) =$$

$$= -\Big(\underset{1\cdot 3}{x_m\sqrt{npq}} + \underset{2\cdot 3}{x_m^2 q} - \underset{1\cdot 4}{x_m^2\frac{q}{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\Big) -$$

$$- \left(-x_m\sqrt{npq} + x_m^2 p - x_m^2\frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{x_m^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x_m^2}{2} + o(1)$$

5. Итого $P_m \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{I}\,\mathrm{II}\,\mathrm{III} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x_m^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$ ∇

(13) Интегральная теорема М-Л

$X_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. $\delta_n = X_{m+1} - X_m = \frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$X_n = \frac{nq}{\sqrt{npq}} = \sqrt{\frac{nq}{p}}$

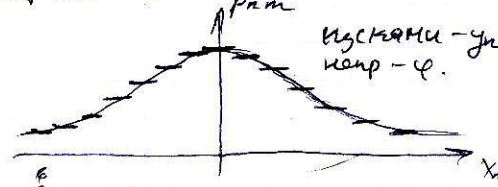
∃ послед. ф-й $\{y_n(x)\}$: $y_n(x)=0$, если $x \notin \left[X_0 - \frac{\delta_n}{2}, X_n + \frac{\delta_n}{2}\right]$

$\Delta_m := \left[X_m - \frac{\delta_n}{2}, X_m + \frac{\delta_n}{2}\right]$

$y_n(x) \overset{x\in\Delta_m}{=\!=} \frac{p_{nm}}{\delta_n} = \sqrt{npq}\, p_{nm}$ $\qquad \exists\, p_{nm} := p(B_{np}(m))$

Заметим, что $y_n(x)$ нормирована

$\int_{\mathbb{R}} y_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{p_{nm}}{\delta_n}\int_{\Delta_m} dx = \sum p_{nm} = 1$



Утв: $\boxed{y_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)}$

Иначе: $\forall \Delta=[a,b]$

$p(a\le X_m \le b) = p(X_m\in\Delta) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b \varphi(x)\,dx$

Δ

$$p\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \sum_{m:\, X_m\in\Delta=[a,b]} p_{nm} = \sum \left[\delta_n\left(y_n(X_m)-\varphi(X_m)\right) + \delta_n\varphi(X_m)\right] =$$

Заметим, что

$$\sum_{m:\, X_m\in\Delta} \varphi(X_m)\,\delta_n \xrightarrow[\delta_m\to 0]{n\to\infty} \int_\Delta \varphi(x)\,dx, \text{ а } y_n(X_m) = \frac{p_{nm}}{\delta_n} \sim \varphi(X_m)$$

по локальной теореме

Отсюда $p(X_m\in[a,b]) \longrightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx$

∇

(14) Случайная величина.

- (Ω,Σ,P) - в.п. $X(\omega): \Omega\to\mathbb{R}$ измерима по Борелю, если $\forall A\in\Sigma_Б$, $X^{-1}(A)=B\in\Sigma$.
  полный прообраз
- Любая измеримая по Борелю ф-я есть случайная величина, порождающая меру $P_X(dx)$ на $\mathbb{R}$:
  $\forall A\in\Sigma_Б\ (A\subset\mathbb{R})$: $P_X(A)=P(X^{-1}(A))$ и $(\mathbb{R},\Sigma_Б,P_X)$ - пр-во.

Δ Покажем, что P_x — мера:
1. $P_x(A) = P(X^{-1}(A)) \geq 0$, т.к. P — вер. мера
2. $P_x(\mathbb{R}) = P(\Omega) = 1$
3. $\exists A_1 \dots A_n \dots$ — попарно несовместны из $\Sigma_б$
$$P_x(\sum^{\infty} A_i) = P(\sum X^{-1}(A_i)) = \sum^{\infty} P(X^{-1}(A_i)) = \sum^{\infty} P_x(A_i)$$
∇

• Примеры — придумать на ходу.

(15) Функция распределения и ее свойства

• $X: \Omega \to \mathbb{R}$ — сл. величина; $(\Omega, \Sigma, \mathbb{R})$ — в.п.
$(\mathbb{R}, \Sigma_б, P_x)$.
$F_x(t)$ — функция распределения сл. величины X, если
$F_x(t) = P(x < t) = P(X^{-1}(-\infty, t)) = P_x(-\infty, t)$.

• Характеристические свойства $F_x(t)$

F1. $F_x(t)$ не убывает
F2. $\exists \lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) = 1$, $\exists \lim\limits_{t\to-\infty} F_x(t) = 0$
F3. $F_x(t)$ непрерывна слева: $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{t\to x-0} F_x(t) = F_x(x)$

Δ
1. $\exists t_1 > t_2$; $A = (-\infty, t_1)$ $\quad B \subset A$ $\quad B\ A\overline{B} = \varnothing$
$B = (-\infty, t_2)$ $\quad A = B + (A\ \overline{B})$
Тогда $F_x(t_1) = P_x(A) = P_x(B) + P_x(A \setminus B) \geq P_x(B) = F_x(t_2)$

2. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} F_x(t) = 1$. Возьмем $\{t_n\}$ — возр. послед-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$
Δ посл. множеств:
$B_1 = (-\infty, t_1)$
$B_2 = (-\infty, t_2)$
$\vdots$
$B_1 \subset B_2 \subset \dots$ $\quad B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \sum B_n = \mathbb{R}$
(по акс. непр.)

$\lim P_x(B_n) = P_x(\lim B_n) = P_x(\mathbb{R}) = 1$
$\lim F_x(t_n) = 1$ (t_n строго монот. возраст.)

Теперь покажем, что $\lim\limits_{t\to-\infty} F_x(t) = 0$.

Уже имеем $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$

То есть, что $\forall \varepsilon \; \exists t_{n_\varepsilon}$ при $n > n_\varepsilon$

$1 \geq F_x(t_n) > 1 - \varepsilon$

По св-ву 1 $t \geq t_{n_\varepsilon}$: $1 - \varepsilon \leq F_x(t_{n_\varepsilon}) \leq F_x(t) \leq 1$

то есть $|F_x(t) - 1| < \varepsilon$

3. $\lim_{t \to x-0} F_x(t) = F_x(x)$. t_n возр. монотонно, $\exists \lim t_n = x$

Тогда $\exists B_i = (-\infty, t_i)$

$B = \lim B_n = (-\infty, x)$

И тогда еще, видимо + непр меры и готово.

Бородинов ∇

(16) Выборочное пространство, построение из $F_1 \; F_2 \; F_3$.

Пусть F обладает св-ми $[F_1 \; F_2 \; F_3]$, тогда:

$\exists$ вер. пространство (Ω, Σ, P)

$\exists$ сл. величина $X(\omega)$

что $F_x(t) = F(t)$, т.о. F - ф-я распр. X

Δ

Построим в.п.

Воспользуемся т. Каратеодори: достаточно построить счетно-адд. меру на обычной алгебре. Тогда она продолжится на Σ_5.

$\exists A = \sum_{i=1}^{n} [a_i \; b_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$

$P(A) = \sum (F(b_i) - F(a_i))$.

Проверим акс. Колмогорова:

1. Из F_1 $F(b_i) - F(a_i) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0 \quad \forall A \in A_B$

2. Из F_2 $P(\mathbb{R}) = \lim_{\substack{b_i \to \infty \\ a_i \to -\infty}} [F(b_i) - F(a_i)] = 1$

3. Счетная адд = кон. адд + 1 акс. непрерывности. по

Конечн. адд. есть: $A, B \in A_B$; $A = \sum^{n_A} \Delta A_i \quad B = \sum B_i$

$A + B = \sum^{n_A + n_B} \Delta n \Rightarrow P(A+B) = \sum_{i=1}^{n_A+n_B} (F(b_i) - F(a_i)) = P(A) + P(B)$

Осталось показать акс. непрерывности.

B_n убывает $(B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots)$ $B_n \in A_5$, $B = \lim B_n \in A_5$

$P(\lim B_n) = P(B) = \lim P(B_n)$
$\lim (P(B_n) - P(B)) = \lim P(B_n \setminus B) = 0$
1 $\lim P(\overline{B} B_n) = P(\lim \overline{B} B_n) = P(\varnothing)$

Будем считать, что $B = \varnothing$

Найдем $B_\varepsilon = [-M_\varepsilon, M_\varepsilon)$, $P(B_\varepsilon) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
т.к. $P(B_\varepsilon) = F(M_\varepsilon) - F(M_\varepsilon)$ и $F(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$
то $M_\varepsilon \cdot F(M_\varepsilon) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$

$0 \leq \lim P(B_n) = \lim P[(B_n \cap B_\varepsilon) \cup (B_n \cap \overline{B_\varepsilon}))\leq$
$\leq \lim P(B_n \cap B_\varepsilon) + \varepsilon/2$

Э $C_n = B_n \cdot B_\varepsilon \in A_5$. Покажем, что $\lim P(B_n \cdot B_\varepsilon) =$
$= \lim P(C_n) = 0$.
$C_n = \sum_{i=1}^{k_n} [a_i, b_i)$. Из F_3 имеем:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_{in} > 0: \; 0 \leq P([a_{in}, b_{in})) - P([a_{in}, b_{in} - \delta_{in}]) \leq \frac{\varepsilon}{k_n 2^n}$
Э $\widetilde{C_n} = \sum [a_{in}, b_{in} - \delta_{in}) \leq C_n$

Тогда $0 \leq P(C_n) - P(\widetilde{C_n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$
Замкнем $\widetilde{C_n}$: $A_n = \sum^{k_n} [a_{in}, b_{in} - \delta_{in}]$
Отсюда: $\widetilde{C_n} \subseteq A_n \subseteq C_n$. Так как $\widetilde{C_n} \to C_n$, то $A_n \to C_n$.

$A = \bigcap^{\infty} A_n \subseteq \bigcap^{\infty} C_n = \bigcap^{\infty} B_n B_\varepsilon = B_\varepsilon (\bigcap^{\infty} B_n) = B_\varepsilon \varnothing = \varnothing$
$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \varnothing$

$P(C_n \setminus A_n) = P(C_n) - p(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. При этом $A_n \subset \overbrace{[-M_\varepsilon, M_\varepsilon]}^{[B_\varepsilon]}$
$A_n \subset [B_\varepsilon] \Rightarrow \Delta_n = [B_\varepsilon] \setminus A_n$ компакт
$\bigcup^{\infty} \Delta_n = \bigcup^{\infty} [B_\varepsilon] \overline{A_n} = [B_\varepsilon] \bigcup^{\infty} \overline{A_n} = [B_\varepsilon] \overline{\underbrace{\bigcap^{\infty} A_n}_{R}} = [B_\varepsilon]$

То есть $\{\Delta_n\}^{\infty}$ - открытое покрытие компакта $[B_\varepsilon]$
Выделим кон. подпокрытие: $[B_\varepsilon] = \sum_{n=1}^{N_0} \Delta_n = \sum^{N_0} \overline{A_n} [B_\varepsilon] =$
$= [B_\varepsilon] \overline{\bigcap^{N_0} A_n}$.
Тогда $[B_\varepsilon] \subseteq \overline{\bigcap^{N_0} A_n}$. Из этого следует, что $[B_\varepsilon] \cap (\bigcap^{N_0} A_n) = \varnothing$
Но $\bigcap^{N_0} A_n \subset [B_\varepsilon]$, тогда $\bigcap^{N_0} A_n = \varnothing$.
Итого $P(C_{N_0}) = P(C_{N_0} \overline{\bigcap^{N_0} A_n}) = P(C_{N_0} \bigcup^{N_0} \overline{A_n}) \leq P(\bigcup^{N_0} C_n \overline{A_n}) \leq$
$\leq \varepsilon \sum \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}$.
$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3$
То есть $P(B_{N_0}) \leq P(C_{N_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. ∇

$\boxed{X(x) = x}$

2

(17) Примеры ф-й распределения
(Возможно, тут стоит рассказать №20)

Это билет 20

что это должно быть? билет 20!

(18) Доп. свойства ф-ии распределения

1. $F_X(t+0) = P(X \le t)$
2. $P_X([a,b]) = F(b) - F(a)$
3. $P(X=a) = F_X(a+0) - F_X(a)$ — скачок F_X
4. $F_X(t) = const$, $t \in \Delta = (a,b) \Rightarrow P(X \in \Delta) = 0$.
5. $P(dx)$ восстанавливается по $F_X(t)$
6. Мн-во точек разрыва $F_X(t)$ н.б.ч. счетно

Δ

$$D_n = \{t : F_X(t+0) - F_X(t) \ge \frac{1}{n}\}.$$
$$|D_n| = \# D_n \le n$$
$$D = \bigcup_n D_n$$

∇

7. $F'(x)$ существует почти везде. (без д-ва)

Д-ва 1–5 очевидны из теор. множеств.

(19) Типы распределений. Дискретные. Св-ва вероятностей значений случайной величины X.

В зависимости от X распределение может быть:

> Дискретным, если X - дискр. случ. в.
> Абсолютно непр., если X - непр. случ. величина
> Сингулярным, если X - сингулярная с.в.

Дискретный случай:

$X = X(\omega)$ имеет не более чем сч. число знач.

$X = \{x_1, x_2, \dots\}$ $p(X = x_i) = p_i$, $p_i \ge 0$, $\sum p_i = 1$.

$P_X(dx)$ сосредоточено в точках $\{x_i\}$

$$F_X(t) = \sum_{i:\, x_i < t} p(X = x_i)$$

1. Не убывает
2. $\forall i, t < x_i \Rightarrow F_X(t) = 0$; $\lim F_X(t) = \lim \sum_t p_n = 1$.

- Примеры дискр. распределений:
  - Бернулли

x_i	0	1
p_i	1-p	p

  - $x = \delta_m \quad p(X=m) = 1$
  - Биномиальное. $p(X=m) = C_n^m p^n (1-p)^{n-m}$
  - Геометрическое
    $N = 1,2,3\ldots \quad p(N=k) = q^{k-1} p$, где $p \in (0,1)$
    $p(X=m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$

(20) Абс. непр. распределения и непр. случайные величины. Плотность распределения, св-ва.

- X – сл. в. на (Ω, Σ, P) и $\exists f_X(t) \geq 0$, что
  $$P(X \in A, A \in \Sigma_5) = \int_A f_X(t)\,dt$$
  Тогда $P_X(dx)$ абс. непрерывна, а $f_X(t)$ – ф-я плотности распред.
- Св-ва $f_X(t)$:
  f_1. $f_X(t) \geq 0$
  f_2. $f_X(t)$ интегрируема отн. Σ_5
  f_3. $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dx = P(X \in \mathbb{R}) = 1$
- Заметим, что $F_X(t) = P(X \in (-\infty, t)) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\,dt$, то есть $f_X(t) = F_X'(t)$.
- $f_{1..3}$ – условие существования $f_X(t)$.
- Покажем, что из $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ следуют $F_{1..3}$:

  F_1. F – не убывает. $\int_{-\infty}^{x_1} f \geq \int_{-\infty}^{x_2} f$ если $x_1 \geq x_2$

  F_2. $\lim_{-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{\infty} F_X(t) = 1$ – из нормировки f

  F_3. F – непрерывна слева.
  $$\lim_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(t)\,dt = F_X(x_0).$$

• Примеры непр. распределений:

1. $X \sim U(a, b)$ — равномерное на (a, b).

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases}$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a < t \le b \\ 1 & t \ge b \end{cases}$$

$f_1: f_X(t) \ge 0$
$f_2:$ кус.-непр $\Rightarrow$ инт. $\exists$
$f_3: \int_{-\infty}^{\infty} f = \int_a^b \frac{dt}{b-a} = 1.$

2. Показательное:

$X \sim Exp \quad \lambda > 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$f_1. f_X(t) \ge 0$
$f_2.$ кус-непр $\Rightarrow$ интегр.
$f_3.$ нормировка ОК

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$

Очевидно работает

3. Нормальное:

$X \sim N(a, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. ($a = 0$, $\sigma = 1$ – стандарт. $[X \sim N(0,1)]$ норм. распр.)

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Проверим $f_{1..3}$.

f_1 очев.

f_2: непр $\Rightarrow$ интегрируемо

$$f_3: \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \left\{x = \frac{t-a}{\sigma}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I.$$ Покажем, что есть I.

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \overset{polars}{=} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{r^2}{2}\right)} r\,dr = 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi$$

Отсюда $I = \sqrt{2\pi}$, значит $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1$.

$f_X(t)$ – плотность.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

(21) Сингулярные распределения, пример построения

- $P(d_x)$ — сингулярная, если
  $\exists B_0$, что 1. $\mu(B_0) = 0$
  2. $p(B_0) = 1$
  3. $p(\{x\}) = 0$, где $\{x\}$ — одноточечное мн-во
- X — сингулярная с. величина
  $\Longrightarrow F_X(t) \in C(\mathbb{R})$.
  $F_X(t)$ непр. слева по определению
  справа: $F_X(t+0) = P(X \le t)$
- Пример — лестница Кантора

Бьем промежуток по X на 3 части, по Y — на две. строим прямую от $1/3\,x$ до $2/3\,x$ и рекурсивно строим сыновей.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x \ge 1 \\ \text{как на рисунке, иначе)))} \end{cases}$$

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} A_{ki}\right) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 4 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

$B_0 = \cancel{B}\ [0,1] \setminus B \quad (B \subset [0,1]),\ \mu(B_0) = 0,\ p(B_0) = 1\}$

Тем не менее F всюду непрерывна, хотя она растет только на B.

(22) ~~∀ верот.~~ Т. Лебега. Смеси. Пример.

теорема Лебега:

? д-во

$\forall$ вероятностного распределения на $\mathbb{R}$, F.
F единств. образом представима в виде

$$P(dx) = p_1 \underbrace{P_1(dx)}_{\text{абс. непр}} + p_2 \underbrace{P(dx)}_{\text{дискр}} + p_3 \underbrace{P(dx)}_{\text{сингул.}}$$

$p_i \ge 0 \qquad \sum p_i = 1$

Δ без д-ва ∇

+ пример

(23) Функциональная зависимость X и Y в случае измеримости Y относ. $\sigma(X)$

- $X = X(\omega)$ – с. вел. : $(\Omega, \Sigma, P) \to (\mathbb{R}, \Sigma_{\text{Б}}, P_X)$
  $\sigma(X)$ – сигма-алгебра, порожденная сл. в. X, то есть $\{X^{-1}(B) : B \in \Sigma_{\text{Б}}\}$
  Сигма-алг. как прообраз $\Sigma_{\text{Б}}$ – σ-ал.

- X измерима относ. $\mathcal{C}$, – σ-алгебры, если $\forall B \in \Sigma_{\text{Б}}$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

- (Ω, Σ, P) – вер. пр-во, X, Y – случ. величины.
  X измерима относительно $\sigma(Y)$
  Тогда $\exists\, g(x) \mid \{g^{-1}(B) \in \Sigma_{\text{Б}} \mid B \in \Sigma_{\text{Б}}\}$ и $X = g(Y)$

Δ We don't need no education 

∇

(24) Представление с. в. измеримой относительно σ-алгебры, порожденной разбиением $\{C_i\}$ of Ω

- $\{C_i\}$ — разбиение Ω, если $C_i C_j \overset{i\neq j}{=} \varnothing$, $\sum C_i = \Omega$
- $\mathcal{C}(\{C_i\})$ — σ-алгебра, порожденная $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$

- $\{C_i\}$ — разбиение Ω. $\mathcal{C}(\{C_i\})$ — σ-алгебра.
  $X = X(\omega)$ — сл. величина, измер. отн. $\mathcal{C}(\{C_i\})$
  Тогда $X(\omega) = \sum_i x_i I_{C_i}(\omega)$ $\quad$ ($I_A = \chi_A$ - хар. ф-я / индикатор)
  То есть $X(\omega)$ постоянна на мн-вах разбиения

$\triangle$

1. $\mathcal{C}(\{C_i\}) = \{\varnothing, C_i \cdots$, объединения $\cdots\}$
2. $\forall C_i \neq \varnothing \cdot \exists \omega_i \in C_i$ и $X(\omega) = x_i$
   По определению измеримости отн. σ-ал.
   $X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{C}$
   $\quad$ одноточечное множество
   $C_i \in \mathcal{C} \Rightarrow A = C_i \cap X^{-1}(\{x_i\}) \in \mathcal{C}$

Свойства A: 1. $\omega \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$
2. $A \in \mathcal{C}$
3. $A \subseteq C_i$

$A = C_i$, потому что в $\mathcal{C}$ больше ничего нету.

Отсюда $C_i \subseteq X^{-1}(\{x_i\})$, то есть $X(\omega) \overset{\omega \in C_i}{=} x_i$.

$\triangledown$

(25) Случайный вектор. Маргинальные распределения для p_{ij}. (дискретный случай)

- (Ω, Σ, P), $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$,
  тогда упорядоченный набор $(X(\omega), Y(\omega)) : \Omega \to \mathbb{R}^2$
  называется (двумерным) случайным вектором

- Дискретный случай: $X(\omega)$ н. б. чем счетно,
  $p_i = P(\omega . X(\omega) = x_i)$.
  $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$. $\{A_i\}$ есть разбиение Ω

$\sum P_i = 1$, $p_i \geq 0$, $\forall i$. $P_x = p(A_i^{-1}) = p(\omega : X(\omega) \in A)$

$P_x(\mathcal{D}) = p(X \in \mathcal{D}) = \sum\limits_{i:\, x_i \in \mathcal{D}} p_i \quad (\mathcal{D} \in \Sigma_6)$

- Случайный вектор ~~задает~~ задает меру ~~задачу~~ $P_{xy}(\mathcal{D}) = P(\omega : (X, Y)(\omega) \in \mathcal{D})$.

$A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$ $\quad \{A_i\}$ } разбиение Ω

$B_i = \{\omega \mid Y(\omega) = y_i\}$ $\quad \{B_i\}$

$p_{ij} = P(\omega : X(\omega) = x_i,\ Y(\omega) = y_j)$ $\quad \{p_{ij}\}$ распределение вектора (X, Y)

- Свойства p_{ij}:

1. $\sum\limits_j p_{ij} = P_{x_i} = P(X = x_i)$

Δ $\sum\limits_j p_{ij} = \sum\limits_j p\{\omega : X(\omega) = x_i,\ Y(\omega) = y_j\} =$

$= \sum\limits_j p\{\underbrace{(\omega : (X(\omega) = x_i))}_{A_{x_i}} \cap \underbrace{(\omega : (Y(\omega) = y_j))}_{B_{y_j}}\} =$

$= \{$счетная аддитивность, $\cancel{A_{x_i} B_{y_j} \neq \emptyset}$ WTF $\} =$

$= p[(\sum\limits_j B_{y_j}) A_{x_i}] = p[A_{x_i}] = P(X = x_i)$

∇

2. $\sum\limits_{ij} p_{ij} = 1$. $\left(\sum\limits_{ij} p_{ij} = \sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = \sum\limits_i p_{x_i} = 1\right)$

3. $p((X, Y) \in \mathcal{D}) = \{\forall \mathcal{D} \in \Sigma_{5r}\} = P\{\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathcal{D}\} = \sum\limits_{\substack{ij: \\ [(x_i, y_j) \in \mathcal{D}]}} p_{ij}$

- Пример про пары близнецов. Нужен?

(26) Независимость случ. величин. Независимость N и T для схемы Бернулли

- X и Y заданные на (Ω, Σ, P) независимы, если $\forall A B \in \Sigma_Б \quad p(X \in A, Y \in B) = p(X \in A) \cdot p(Y \in B)$
- Пусть X и Y - (независимо) случайные величины на дискретном Ω.
Тогда их независимость эквивалентна:
$p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{Y_j}$ для всех i, j.

$\triangle$

$(\Rightarrow)$ X и Y независимы.

$A = [x_i]$; $B = [y_j]$; $\Rightarrow p_{ij} = P\{\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} =$

одноточечные мн-ва $= P\{(X(\omega) \in A) \cdot (Y(\omega) \in B)\} =$

$= \{\text{незав.}\} = P(X = x_i) P(Y = y_j) = p_{x_i} p_{Y_j}$

$(\Leftarrow)$ $\forall C_1 C_2 \in \Sigma_Б \quad p(X \in C_1, Y \in C_2) = P\{\omega : X(\omega) \in C_1\} \cdot \{\omega : Y(\omega) \in C_2\}) =$

$\overset{\text{счетная аддитивность}}{=} \sum_{\{ij : x_i \in C_1, y_j \in C_2\}} P\{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\} =$

$= \sum_{\{ij : -\!\!\!-\}} p_{ij} = \sum_i p_{x_i} \sum_j p_{Y_j} = p(X \in C_1) p(Y \in C_2)$

∇

- Напомним, что $EX \equiv \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_x(x) = \begin{cases} \int x f_x(x)\, dx \\ \sum x_i p_i \end{cases}$
Если EX существует (ряд/интеграл сходится абсолютно), то EX - матожидание
- $E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f_x(x)\, dx$ или $\sum_i x_i^k p_i$
Называется k-м начальным моментом.
- $E(X - EX)^k$ - k-й центральный момент $(k \in \mathbb{N})$
- $\mathcal{D} = E(X - EX)^2$ - дисперсия
- $\sigma(X) = \sqrt{\mathcal{D}(X)}$ — среднеквадратичное отклонение
- $E(X - EX) = EX - EX = 0$.

- Схема Бернулли. n испытаний; $A, \bar{A}$; $p, q = 1 - p$;
$\omega = C_1 \cdots C_n$, $C_i = A_i / \bar{A}_i$.
Пусть $N_i(\omega)$ - номер i-го успеха
$N(\omega) = \min_i \{C_i = A_i\}$; $N(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_m) = m + 1$.

$P(N=m) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_{m-1}, A_m) = q^{m-1} p$

$N_2 - N_1 = T_1 =: T$ — момент 1 успеха в упорядоченной последовательности

$p_{ij} = P(N_1 = i, T_1 = j) = P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{i-1} A_i \bar{A}_{i+1} \cdots A_{i+j}) = q^{i-1} p q^{j-1} p = p_{N_i} \cdot q^{j-1} p$

$p_{T_j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = q^{j-1} p^2 \sum^{\infty} q^{i-1} = q^{j-1} p^2 \frac{1}{1-q} = q^{j-1} p.$

То есть $p_{ij} = p_{N_i} p_{T_j}$, что значит независимость N_1 и T_1.

(27) Свертки целочисленных случайных величин. Теорема о свертке. Распределение момента второго успеха в Бернулли.

- X и Y — целочисленные случайные величины. ($\{x_i\} \subset \mathbb{N}$) Случайная целочисленная величина Z является сверткой X и Y, если
$$p_{Z_n} = \sum_{i=0}^{n} p_{X_i} p_{Y(n-i)} \qquad (\text{обозначение } p_Z = p_X * p_Y)$$
- Теорема о свертке.
X и Y — независимые случайные величины (целочисленные). Тогда $Z = X + Y$ распределена как свертка.

$\triangleright$

$P(Z=n) = ?$ $U_i = \{X = i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

$P(Z=n) = \sum_{i=0} p(Z=n / X=i) \cdot p(X=i)$ ф-ла пол. в.

$p(Z=n / X=i) = p(X+Y=n / X=i) \ominus$

$$\ominus \begin{cases} 0, & i \geq n+1 \\ p(Y=n-i \mid X=i) = p_{Y_{n-i}} \end{cases}$$

Итого $p(Z=n) = \sum_{i=1}^{n} p_{X_i} p_{Y_{n-i}}$ ← свертка

$\triangledown$

- $N_2(\omega)$ — момент второго успеха в Бернулли
$N_2 = N_1 + T_1 \Rightarrow N_2$ — свертка N_1 и T_1.
$p(N_2 = n) = \sum_{i=1}^{n-1} q^{i-1} p q^{n-i-1} p = p^2 \sum^{n-1} q^{n-2} = (n-1) p^2 q^{n-2}$
(сумма до $n-1$, т.к. $P(N=0)=0$, $P(T, n-n) = P(T, 0) = 0$)

(28) Условное распределение. Пример со схемой Бернулли.

- X и Y — две случ. величины, заданные на (Ω, Σ, P).
$A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$ — разбиение Ω; $P_{Y_j} \neq 0$
Будем называть $(B_j, \Sigma_{B_j}, P_{B_j})$ — условным вероятностным пространством, где: $\{B_j\}$ — разб. Ω по Y
> $\Sigma_{B_j} = \{A B_j : A \in \Sigma\}$
> $P_{B_j}(B_j) = 1$, $P_{B_j}(A \cdot B_j) = \frac{P(AB_j)}{P(B_j)}$.
В частности будем описывать
$P_{B_j}(A_i) = P(A_i \cdot B_j) / P(B_j) = \frac{P\{\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}}{P(Y = y_j)} =$
$= \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$
> $p_{i|j} = P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{Y_j}}$;
$p_{i|j} \geq 0$, $\sum p_{i|j} = 1$. (отметим, что предпол. $\forall j: P_{Y_j} \neq 0$)
> $p_{i|j}$ — это условное распределение X отн. Y

- Пусть N_1 и N_2 — номера 1-го и 2-го успехов в схеме Бернулли.
$p_{i|j} = P(N_1 = i \mid N_2 = j) = \frac{P(N_1 = i \mid N_2 = j)}{P(N_2 = j)} = \frac{p^2 q^{i-1} q^{j-i-1}}{p^2 q^{j-2} (j-1)} =$
$= \frac{1}{j-1}$

+На след. странице.

(29) Матожидание в дискретном варианте.

- X — с.в. $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$, если этот ряд сходится
- $\Sigma_+ = \sum_{\omega : X(\omega) > 0} X(\omega) P(\omega)$ $\quad \Sigma_- = \sum_{\omega : X(\omega) < 0} X(\omega) P(\omega)$
Тогда положим $EX = \begin{cases} +\infty, & \Sigma_+ = \infty, \ |\Sigma_-| < \infty \\ -\infty, & \Sigma_- = -\infty, \ |\Sigma_+| < \infty \end{cases}$
- $X = X(\omega)$ случайная величина.
X дискретно, тогда $EX = \sum_i x_i p_i$, если ряд абс. сх.
Δ $EX = \sum_\omega X(\omega) P(\omega) = \{A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}\} = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) X(\omega) =$
∇ $= \sum_i x_i P(A_i) = \sum_i x_i p_i$

- Пусть $T = \{B_j\}$ - разбиение Ω, такое что для любого $\omega \in \Sigma$, что $X(\omega) = x_j$ верно $\omega \in B_j$. Попросту говоря, $\{B_j\}_j$ - подразбиение $\{A_i\}_i$.
Тогда $EX = \sum_i x_i p(B_i)$ (Это следствие пред. утверждения)

- Примеры:
1. X - вырожденная с.в. $P(X=m) = 1$. $EX = m \cdot 1 = m$
2. $I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $p(A) = p$.
$E(I_A(\omega)) = \sum I_A(\omega) p(\omega) = 1 \sum_{\omega \in A} p(\omega) = p(A)$
3. $X \sim \Pi_\lambda$, $\lambda > 0$; $p(X=m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$ (то есть $X = \mathbb{N}$)
Тогда $EX = e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda$
4. N_1 - номер первого успеха в схеме Бернулли
$EN_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} p = p\left(\sum^{\infty} q^n\right)'_q = p\left(\frac{1}{1-q}\right)'_q = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

30
Целочисл. случ. величины
5. $X = \mathbb{N}$, $p_x = p(X=n) = \frac{6}{\pi^2 n^2}$ $\left(\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$
$EX = \frac{6}{\pi^2} \sum \frac{1}{n}$ - расходится. $EX = +\infty$

66 $\exists EX < +\infty$, тогда $EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X>n)$

$\triangle$ $EX = \sum_{n=0}^{\infty} n P(X=n) = \lim_N \sum_{n=0}^{N} n P(X=n) =$
$= \lim_N \sum_{n=1}^{N} [n p(X > n-1) - n p(X > n)] =$
$= \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N-1} (n-1) p(X > n-1) + \sum_{n=1}^{N-1} p(X > n-1) - \sum_{n=1}^{N} n p(X > n)\right] =$
(монотон.)
$= \sum p(X>n) - \underbrace{\lim N p(X>N)}_{0} = \sum^{\infty} p(X>n)$

31. Лемма (задача) о рекордных значениях
$\exists X_0, X_1, X_2 \ldots$ $(X_i \sim X, \forall i)$
$\forall M: P(X > M) > 0$

Δ $N = N(\omega) = \min\limits_{k:\, X_k(\omega) > X_0(\omega)} \{k\}$ — первый случай, что $X_k > X_0$. $N = 0$, если $\forall k$ $X_0(\omega) \geq X_k(\omega)$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ для $i \in \mathbb{N}$

$A_{ni} = \{\omega .\ X_i(\omega) \geq X_0(\omega),\ X_i(\omega) \geq X_1(\omega) \ldots \ldots X_i(\omega) \geq X_n(\omega)\}$

Максимальный выигрыш в i за n игр

$\{N > n\} = \{\omega : X_0(\omega) \geq X_1(\omega) \ldots X_0(\omega) \geq X_n(\omega)\} = A_{n0}$

A_{ni} равновероятны по i в силу независимости и одинаковой распределенности.

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{ni} = \Omega$; $1 = p(\Omega) = p\left(\sum\limits_i A_{ni}\right) = \sum p(A_{ni})$

$\Rightarrow p(N > n) = \dfrac{1}{n+1}$

Тогда $EN = \sum\limits^{\infty} np(N > n) = \sum 1 = +\infty$

Матожидание не существует.

Это значит (физически), что если каждое X_i - это игра в лотерею, то ~~после~~ перво проигрывал каждый раз линейное число денег, выигрыш не получится, количество опущенных денег будет всегда расти.

(29) Продолжение

7. $X \sim B_{np}$, тогда $p(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

$X = \{0 \ldots n\}$

$$EX = \sum_{m=0}^{n} m\, C_n^m p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = n! \cdot \frac{p}{(n-1)!} = np.$$

(Это и понятно, ведь $X = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, а они все независимы и одинаково распределены. А EX линейно)

8. N_k - номер k-го успеха в Бернулли.

$N_k = T_1 + \cdots + T_k$, где $T_i = N_i - N_{i-1}$ $N_0 = \delta_0$ ← Кронекер Наплин

$E(T_i) = \dfrac{1}{p}$, $E(N_k) = \dfrac{k}{p}$ (по линейности)

(32) Свойства матожидания

1. $p(X \geq 0) = 1 \Rightarrow EX > 0$, если $X \neq \delta_0$ $(E\delta_0 = 0)$
$EX = \sum x_i p_i \geq 0$ $\quad EX = 0 \Rightarrow x_i = 0$ либо $p_i = 0$
откуда $p(X=0) = 1$
2. $EI_A = p(A)$, $E(I_{const}) = E(const) = 0$. (maybe const?)
3. X и Y — сл. в и $\exists EX, EY$, тогда $E(X+Y) = EX + EY$
Δ $EX + EY = \sum_\omega (X(\omega) + Y(\omega)) p(\omega) = \sum_\omega (X+Y)(\omega) p(\omega) =$
$= E(X+Y)$
∇
4. $\exists EX \Rightarrow E(cX) = cEX$
5. $\exists EX = m$, $Y = X - m$, $EY = 0$, Y назыв. центрированной случайной величиной X
6. $P(X \geq Y) = 1 \Rightarrow EX \geq EY$ по свойству 1
7. X и Y независимы, $\exists EX$ и EY, тогда $E(XY) = EX \cdot EY$
Δ
$$E(X \cdot Y) = \sum_\omega X(\omega) Y(\omega) p(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} x_i y_j p(\omega) =$$
$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p_{ij} \underbrace{=}_{\text{по независимости}} EXEY$$
∇

(33) Условное матожидание. Связь условной вероятности и условного матожидания. Дост. условия равенства $E(X|A)$ и $E(X)$.

- $\forall B \in \Sigma$ мат. ожидание X по B это число
$$E(X, B) = \sum_{\omega \in B} X(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) I_B(\omega) p(\omega) =$$
$$= E(X \cdot I_B) \text{ — если сходится.}$$
- Условное матожидание $E(X|B) = \frac{1}{p(B)} E(X, B)$.
- $p(A|B) = E(I_A | B)$ $\quad (A, B \in \Sigma, p(B) \neq 0)$

Δ
$$E(I_A | B) = \frac{1}{p(B)} \sum_{\omega \in B} I_A(\omega) p(\omega) = \frac{1}{p(B)} \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) =$$
$$= \frac{p(A \cdot B)}{p(B)} \stackrel{def}{=} P(A|B)$$
∇

- X и I_B независимы, тогда $E(X|B) = EX$

Δ $E(X|B) = \frac{1}{p(B)} E(X, B) = \frac{1}{p(B)} E(X \cdot I_B) = \{\text{незав}\} = \frac{EX \cdot EI_B}{p(B)} = EX$ ∇

(34) Формула полного матожидания, связь с формулой полной вероятности.

- $T = \{A_i\}$ — разбиение Ω
Тогда $EX = \sum\limits_{k: p(A_k)>0} E(X|A_k)\,p(A_k)$

Δ $EX = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega) = \sum\limits_{k} \sum\limits_{\omega \in A_k} X(\omega) P(\omega) =$
$= \sum\limits_{k} E(X, A_k) = \sum\limits_{k: p(A_k)>0} E(X|A_k) P(A_k)$
∇

- Пусть $X = I_A$, тогда $P(A) = E(I_A) = \sum\limits_{k: p(A_k)>0} E(I_A|A_k)\,p(A_k) =$
Формула полной вер-ти $\} = \sum\limits_{\substack{k \\ p(A_k)>0}} p(A|A_k)\,p(A_k)$

(35) Функция регрессии. Равенство $E(m(X)) = E(Y)$. Утверждение о постоянстве функции регрессии для незав. случ. вел. Тождество Вальда. (гостин. случай)

- (Ω, Σ, P) — в.п. Ω не более чем счетно.
$X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ и $\exists\, E|Y| < +\infty$
Пусть $X = x_1 x_2 x_3 \dots$ $\quad B_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$ $\exists\, P(B_j) > 0$

Тогда $m(X) = m_{Y|X}(X) = \begin{cases} E(Y \mid \{\omega : X(\omega) = x\}), & \text{если } P(X=x) \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

m — регрессия Y на X

- $m(x_j) = E(Y | B_j) = \frac{1}{P(B_j)} \sum\limits_{\omega \in B_j} Y(\omega) P(\omega)$

- Рассмотрим ф-ю от X.
$m(X)$: $m(x_1), m(x_2) \dots$
с распределением $P(m(X) = m(x_i)) = P(X = x_i)$
Тогда $m(X) = \sum m(x_i) I_{X_i}$
$E(m(X)) = EY$.

формула п.м.о

Δ $E(m(X)) = \sum m(x_i) P(X = x_i) = \sum E(Y|X = x_i) P(X = x_i) = EY$
∇

- Пусть X и Y независимы $|EY| < +\infty$,
тогда $m(x_i) = EY$ $\quad (\forall i \; p(X = x_i) \neq 0)$

Δ $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$. $B_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$

$p(A_i) \neq 0$ — разбиение Ω

$A_i = A_i\Omega = \sum_j A_i B_j \Rightarrow m(x_i) = \frac{1}{p(X=x_i)} \sum_{\omega\in A_i} Y(\omega) p(\omega) =$

$= \frac{1}{p_{x_i}} \sum_j \sum_{\omega\in A_i B_j} Y(\omega)p(\omega) = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_j y_j \underbrace{p(A_i B_j)}_{p_{ij}} =$

$= \{\text{по незав. } p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j}\} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} \sum y_j p_{y_j} = EY.$

∇

Это оно? полностью

• Частный случай тождества Вальда

$\exists\ Y = \sum_{k=1}^{X} \xi_k$, X — сл. величина не зависит от $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$

$\exists E\xi_i = m$, все ξ_i одинаково распределены.

Тогда $EY = m \cdot EX$

Δ

$EY = \{\text{ФПМО}\} = \sum_{n=1}^{\infty} E(Y, X=n)$ $\quad$ $\{X=n\}_{n=0}^{\infty}$ — разб. Ω (смотрим для $\{\omega : X(\omega)=n\}$)

$E(Y, X=n) \underset{\text{определение } E(Y|B)}{=} \sum_{\omega: X(\omega)=n} Y(\omega)p(\omega) =$

$= \sum_{\omega: Y(\omega)=n} \left(\sum_k \xi_k(\omega) p(\omega)\right) p(\omega) = \sum \sum \xi_k p(\omega) =$

$= \sum_{n=1}^{n} E(\xi_k, X=n) = \cancel{\{\text{ФПМО}\}} = \sum_k E(\xi_k | X=n) p(X=n) =$

$= m \sum_k p(X=n) = nm\,p(X=n)$

Откуда $EY = \sum n \cdot m\, p(X=n) = m \sum n\, p(X=n) = mEX$

∇

(56) Обобщение св-ва $E(m(X)) = EY$ и его следствие о средних значениях Y и $m(X)$.

• Известно, что $EY = E(m(X))$. $\exists\ g(X)$ измерима по Борелю.

$E(g(X)) \overset{def}{=} \int_\Omega g(X(\omega))\, P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF_X(x)$

Тогда $E(g(X) \cdot Y) = E(g(X)\, m(X))$.

Δ

$$E(g(X)\cdot Y \mid X=x_k) = \frac{1}{p(X=x_k)} \sum_{\substack{\omega\in A_k \\ A_k=\{\omega: X(\omega)=x_k\}}} g(X(\omega))Y(\omega)p(\omega) =$$

$$= \frac{g(x_k)}{p(X=x_k)} E(Y, A_k) = g(x_k) E(Y \mid X=x_k)$$

$$E(g(X)\cdot Y) = \sum_k E(g(X)\cdot Y \mid X=x_k)\, p(X=x_k) =$$

$$= \sum_k g(x_k)\, m_{Y|X}(x_k)\, p(X=x_k) =$$

$$= E(g(X)m(X))$$

∇

- Следствие: случайная величина $m(X)$ имеет на множествах то же среднее, что и Y

Δ

$$\exists\, g(X) = I_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{iff } x\in D \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad I_D(X) = \begin{cases} 1 & X(\omega)\in D \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$E(g(X)\cdot Y) = E(I_D(X)\cdot Y) = \sum_\omega I_D(X(\omega))Y(\omega)p(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega: X(\omega)\in D} Y(\omega)p(\omega) = E(Y, X\in D) \in \sigma(X)$$

С другой стороны, $E(g(X)\cdot Y) = E(I_D(X)\cdot m(X)) =$
$= E(m(X), D) = E(m(X), X\in D)$
сахар

Получаем, что $m(X)$
1. Измерима отн. $\sigma(X)$
2. На всех множествах из $\sigma(X)$ есть среднее.

∇

37 Условное матожидание относительно полной системы событий.

- $T - \{C_j\}_j$ - разбиение Ω. $X = X(\omega) = \{x_i\}_i$
$\forall \omega \in C_j \quad X = \sum x_j I_{C_j}$
- Тогда условным матожиданием Y относительно разбиения (полной сист. соб.) T называется случайная величина

$$E(Y|T) = \sum_j \underbrace{E(Y|C_j)}_{\text{константа}} \underbrace{I_{C_j}}_{\text{ф-я}}$$

Иначе говоря, $E(Y|T) \sim E(Y|G_1), E(Y|G_2) \dots$

$$P(E(Y|T) = E(Y|G_i)) = P(G_i),$$

то есть сл. величина заменяется усл. средним

- $G_i = \{w : X(w) = x_i\} = X^{-1}(x_i)$

$$E(Y|T)(w)_{w \in G_i} = \frac{1}{P(G_i)} \sum_{w \in G_i} Y(w)\, p(w)$$

$$E(Y|T) = \sum_i \underbrace{E(Y|G_i)}_{E(Y|X=x_i)} I_{G_i} = \sum m_{Y|X}(x_i) I_{G_i} = m(X)$$

(38) Условное матожидание одной с.в. отн. другой.

- Условное м.о X отн Y это сл.в.

$$E(Y|X) \equiv m(X) = E(Y \,|\, T = \{X^{-1}(x_i)\})$$

- Пример. (к билету 37 скорее)

3 монеты, 1 фальшивая. На ней вер-ть герба $\frac{1}{3}$.

Y - число выпавших гербов.

$\Omega = \Omega_1 \times (\Omega_2 \setminus \Omega_1)$, Ω_1 - выбор монеты

$T = (G_1, G_2)$ G_1 - правильная, G_2 - фальш.

Построим $E(Y|T)$: $p(G_1) = \frac{2}{3}$ $p(G_2) = \frac{1}{3}$

$Y|G_1 = B_{n,p=1/2}$ $E(Y|G_1) = np = n/2$

$Y|G_2 = B_{n,p=1/3}$ $E(Y|G_2) = n/3$

$E(Y|T) = \frac{n}{2} I_{G_1} + \frac{n}{3} I_{G_2}$

$E(Y\|X_i)$	$E(Y\|G_1) = \frac{n}{2}$	$E(Y\|G_2) = \frac{n}{3}$
p_i	$2/3$	$1/3$

- Пример

Бросание прав. кости.

X - остаток от деления на 4

n	1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	0	1	2

Y - на 3

$A_1 = X^{-1}(0) = \{w=4\}$ $p(A_1) = p(A_4) = 1/6$, $p(A_2) = p(A_3) = 2/6$;

$A_2 = \{w=1, w=5\}$ $E(Y|A_1) = 1/p(A_1) \cdot \sum_{w \in A_1} Y(w) p(w) = 6(\frac{1}{6}) = 1$

$A_3 = \{w=2, w=6\}$ $E(Y|A_2) = 3/2$

$A_4 = \{w=3\}$ $E(Y|A_3) = 1$

$E(Y|A_4) = 0$

$E(Y\|X)_i$	0	1	$\frac{3}{2}$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$1/6 + 2/6$

(39) Свойства матожидания относительно полной системы событий.

1. Линейность: $E(X+Y|T) = E(X|T) + E(Y|T)$
$E(kX|T) = kE(X|T)$

Δ
$$E(X+Y|T) = \sum E(X+Y|C_i) I_{C_i} =$$
$$= \sum_i \frac{I_{C_i}}{p(C_i)} \sum_{\omega \in C_i} \underbrace{(X(\omega)+Y(\omega))}_{=(X+Y)(\omega)} = E(X|T) + E(Y|T).$$

Второе аналогично.
∇

2. $X = \sum x_i I_{C_i}$, где $T = \{C_i\}_i$

Тогда $E(X \cdot Y|T) = X \cdot E(Y|T)$

Δ В силу линейности: $E(XY|T) = E((\sum x_i I_{C_i})Y|T) =$
$= \sum x_i E(I_{C_i} Y|T) = \{$при условии что $*$
$E(I_{C_i} Y|T) = I_{C_i} E(Y|T)\} =$
$= \sum x_i I_{C_i} E(Y|T) = X E(Y|T)$.

Покажем $(*)$:
$$E(I_{C_i} Y|T) \overset{def}{=} \sum_j E(I_{C_i} Y|C_j) I_{C_j} = \sum_j \frac{I_{C_j}}{p(C_j)} \sum_{\omega \in C_j} I_{C_i}(\omega) Y(\omega) p(\omega) =$$
$$= \frac{I_{C_i}}{p(C_i)} \sum_{\omega \in C_i} Y(\omega) p(\omega) = I_{C_i} E(Y|C_i) =$$
$$= I_{C_i} \sum_j I_{C_j} E(Y|C_j) = I_{C_i} E(Y|T)$$
∇

3. $E(X|X) = E(X | \{X^{-1}(x_i)\}) = \sum_i E(X|X=x_i) I_{X=x_i} =$
$$= \sum_i \frac{I_{X=x_i}}{p(X=x_i)} \sum_{\omega: X(\omega)=x_i} X(\omega) p(\omega) = \sum_i x_i I_{X=x_i} = X$$

4. Пусть X и Y независимы. Тогда
$E(Y|X) = EY$, $P(Y|X = EY) = 1$. $Y|X$ - вырожд. с. в.

Δ
$$E(Y|X=x_i) = m(x_i) \overset{незав.}{=} EY \Rightarrow E(Y|X) = \sum_i m(x_i) I_{X_i=x_i} =$$
$$= EY \sum_i I_{X=x_i} = EY$$
∇

5. На алгебре $A(T)$ среднее Y и $E(Y|T)$ совпадают

(40) Дисперсия. Опр., св-ва, вычисление для станд. распр.

- $DX = E(X-EX)^2$, если EX существует и DX конечно
- $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ - характеризует разброс
- Свойства дисперсии:

1. $DX = E(X^2) - (EX)^2$ (очев. из линейности E)
2. $E(aX - E(aX))^2 = E(a^2(X-EX)^2) = a^2 DX = D(aX)$
3. Инвариантность отн. сдвига
$D(X-a) = DX$ △ $D(X-a) = E(X-a-E(X-a))^2 = DX$ ▽
4. Равенство Бьенэме
$X_1 \dots X_n$ - незав. случ. величины. $S_n = \sum_1^n X_i$ не читается
Тогда $DS_n = \sum_i^n DX_i$ Ротарь

△

~~Пусть $B_1 \dots B_n \in \Sigma_B$ (можно борел. множества)~~
~~$P(Y_1 \in B_1, \dots, Y_n \in B_n) = P($~~

Лемма. $X_1 \dots X_n$ - незав. $g_1 \dots g_n$ - борелевские ф-ии
$Y_i = g(X_i)$. Тогда $Y_1 \dots Y_n$ незав.

△

Пусть $\{B_i\}_{i=1}^n$ - борел. мн-ва.
$P(Y_1 \in B_1 \dots Y_n \in B_n) = P(g_1(X_1) \in B_1 \dots g_n(X_n) \in B_n) =$
$= P(X_1 \in g^{-1}(B_1) \dots X_n \in g^{-1}(B_n)) \underset{\text{по незав.}}{=} \prod^n P(X_i \in g^{-1}(B_i)) =$
$= \prod^n P(Y_i \in B_n)$

▽

$DS_n = D(S_n - ES_n) = D(\sum^n (X_i - EX_i)) =: D(\sum^n Y_i) \ominus$
//По лемме Y_i независимы.
//$E(X_i X_j) \overset{i \ne j}{=} EX_i EX_j$; $EY_i = 0$, $E\sum^n Y_i = 0$.

$\ominus\ E(\sum_{i=1}^n Y_i)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n E(Y_i^2)}_{\text{одинаковые } i\ j} + \underbrace{\sum_i^n \sum_j^n E(Y_i Y_j)}_{\text{недиагон. члены}} = \sum_{i=1}^n DX_i$

▽

5. $D(X+Y) = E(X+Y-EX-EY)^2 = DX + DY + 2E((X-EX)(Y-EY))$
6. $DX = 0 \Rightarrow P(X = EX) = 1$. очевидно в дискр. случае.

- $E[(X-EX)(Y-EY)]$ - ковариация X и Y (ковариационный момент)
- Свойства $K(X,Y)$

1. $K(X,Y) = K(Y,X) = E(XY) - EXEY$
2. $K(X,X) = DX$ 3. $K(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X$ и Y независимы

• Примеры $\mathcal{D}$.

1. $X = \delta_n \Leftrightarrow \mathcal{D}X = 0$
2. $X \sim B_{1p} \quad X = 0,1 \quad P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$

$EX = p$, $EX^2 = p \Rightarrow \mathcal{D}X = p - p^2 = pq$

3. $X \sim B_{np} \quad X = \{0 \ldots n\}. \quad p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathcal{D}X = npq$ по Бернулли

(41) Условная дисперсия. Формула разложения.

• Усл. дисперсия Y при условии $X = x$ это число:

$$\mathcal{D}(Y|X=x_i) = E\left((Y - E(Y|X=x_i))^2 \mid X = x_i\right) = E\left((Y-m(X))^2 \mid X = x_i\right)$$

• Условная д. Y отн X это

$$\mathcal{D}(Y|X) = E\left((Y - E(Y|X))^2 \mid X\right) = \sum_i \mathcal{D}(Y|X=x_i) I_{X=x_i}$$

• Теорема о разложении дисперсии

$$\mathcal{D}(Y) = \mathcal{D}(E(Y|X)) + E(\mathcal{D}(Y|X))$$

Δ

$$E(m(X)) = E(E(Y|X)) = EY$$

$$\mathcal{D}Y = E(Y - EY)^2 = E(Y - m(X) + m(X) - EY)^2 = \underbrace{\mathcal{D}(m(X))}_{(E(m(X)-EY)^2)} + E(Y-m(X))^2 - 2E[(Y-m(X))(\mathring{m}(X))]$$

$$\mathring{m}(X) := m(X) - \underbrace{EY}_{E(m(X))}$$

Рассмотрим слагаемые.

1. $E(Y-m(X))^2 \overset{*}{=} E(E[(Y-m(X))^2 | X]) = E(\mathcal{D}(Y|X))$

$\{EA = E(m_{A|X}(X))\}$

2. $E((Y-m(X))(\mathring{m}(X))) = E(Y \cdot \mathring{m}(X)) - E(m(X)\mathring{m}(X)) = 0$

Поскольку $E(Y) = E(m(X)) = E(E(Y|X))$,

то $E(\mathring{m}(X) \cdot Y) = E(\mathring{m}(X) m(X))$.

Отсюда 2й член $= 0$.

∇

(42) Условное матожидание как решение экстремальной задачи. Расстояние от Y до $L_x = \{g(X)\}$.

- X и Y — сл. величины, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская функция, тогда

$$\inf_{g \in G_Б} E(Y-g(X))^2 = E(Y-E(Y|X))^2 = E(D(Y|X))$$

Δ

$$E(Y-g(X))^2 = E(Y-m(X)+m(X)+g(X))^2 =$$
$$= E(Y-m(X))^2 + \underbrace{E(m(X)-g(X))^2}_{\geq 0} + \underbrace{2E((Y-m(X))(m(X)-g(X)))}_{=0 \text{ при любом } g(x)}$$

Тогда минимум достигается при $E(m(X)-g(X))^2 = 0$

$(E(Y(m(x)-g(x))) - E(m(x)(\cdot)) = 0)$ см. д-во в 41 билете

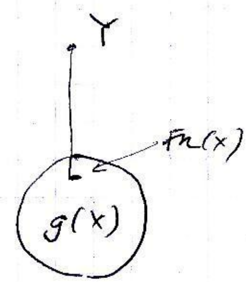
$$0 \leq \underbrace{D(m(X)-g(X))}_{=0} \leq E(m(x)-g(x))^2 = 0.$$

из этого следует, что $P(g(x)=m(x)) = 1$.

Отсюда $\inf_{g \in G_Б} E(Y-g(x))^2 = E(D(Y|X))$

∇

- Регрессия $m_{Y|X}(x)$ — это решение экстремальной задачи



(43) Линейная регрессия.

- $g^* = g^*(x)$ называют линейной регрессией Y на X, если она есть решение экстремальной задачи:

$$\inf_{\substack{g: g(x)=ax+b \\ a,b \in \mathbb{R}}} E(Y-g(X))^2 = E(Y-g^*(X))^2$$

Т.е. это регрессия, ограниченная линейной ф-ей

• Для линейной регрессии $g^* = a^* X + b^*$ верно:

$$a^* = r(X,Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{K(X,Y)}{DX}$$

$$b^* = EY - a^* EX$$

photoed

△ добавим и вычтем EX, EY

$$H(a,b) = E(Y-(aX+b))^2 = E(Y - EY - a(X-EX) + \underbrace{+EY - aEX - b}_{c(a,b)})^2 =$$

$$= DY + a^2 DX - 2aK(Y,Y) + \underbrace{E(Y-EY)}_{0\ ?}c(a,b) + c^2(a,b)$$

Иначе:

$$H(a,b) = D(Y) + a^2 DX - 2aK(X,Y) + (EY - aEX - b)^2$$

$$* \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial a} = 2aDX - 2K(X,Y) + 2c(a,b)\cdot(-a) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial b} = 2c(a,b)(-1) = 0 \end{cases}$$ хотим $=0$.

? сильвестр и хотим

$$\begin{cases} A & \frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = 2DX - 2(c(a,b)\cdot(-1) + aEX) = 2DX + 2(EX)^2 \\ C & \frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b} = (-2)(-EX) \\ B & \frac{\partial^2 H}{\partial b^2} = (-2)(-1) = 2 \end{cases}$$

матрица пол опр. где min

! Смотри дост. условие экстремума !

По критерию Сильвестра A – матрица – полож. полуопред. iff $\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} > 0$

хотим

Применим критерий Сильвестра:

$2\cdot(2DX + 2(EX)^2) - (2EX)^2 > 0$

$4DX > 0$

У системы звездочка (*) решение (нетрудно видеть)

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{K(X,Y)}{DX} \\ \hat{b} = EY - \hat{a}EX \end{cases}$$

Это и есть решение теоремы, а $\hat{a}$ опред. всегда ввиду замечания $DX > 0$

▽

(44). Моменты с.в. Ковариация, коэфф. корреляции. Св-ва.

- Моменты моментов, то $E(X^k)$, центральные моменты – билет 26.
- Смешанный момент:
$$K(X,Y) = E[(Y-EY)(X-EX)]$$ – она же ковариация
- Матрица ковариации: $K = \begin{pmatrix} \mathcal{D}X & K(X,Y) \\ K(Y,Y) & \mathcal{D}Y \end{pmatrix}$
- Матрица корелляции. $R = \begin{pmatrix} 1 & r(Y,Y) \\ r(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$
- $r(X,Y) = \dfrac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ – коэфф. корелляции.
- Ковариация – это количеств. хар-ка взаимодействия. Если $K \neq 0$, то X и Y зависимы.

- Свойства Ковариации:
1. $K(X,Y) = K(Y,X)$
2. X и Y незав $\Rightarrow E(X,Y) = EX\,EY \to K(X,Y) = 0$.
3. $K(X,Y) = E(X\cdot Y) - EXEY$
4. $K(aX+b, Y) = a K(X,Y)$
$\triangle$ $E[(aX+b - E(aX+b))(Y-EY)] = aK(X,Y)$ $\triangledown$
5. $\mathcal{D}(X+Y) = \mathcal{D}X + \mathcal{D}Y + 2K(X,Y)$ ← уже было.

- Свойства корелляционного коэфф.
1. Корелляционный коэфф. – хар-ка зависимости X и Y
2. $\exists\ \mathring{X} = \dfrac{X-EX}{\sigma X}$, $\mathring{Y} = \dfrac{Y-EY}{\sigma Y}$ – центральные величины.
Для них, кстати, $E\mathring{X} = 0$, $\mathcal{D}\mathring{X} = 1$.
Тогда $K(\mathring{X},\mathring{Y}) = E\dfrac{(X-EX)(Y-EY)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = r(X,Y)$

3. $|r(X,Y)| \leq 1$
$\triangle$ $0 \leq \mathcal{D}(\mathring{X} \pm \mathring{Y}) = 1 + 1 \pm 2K(\mathring{X},\mathring{Y}) = 2 \pm 2r(X,Y)$ $\triangledown$
4. X и Y незав $\Rightarrow r(X,Y) = 0$.
5. $|r(X,Y)| = 1 \iff aX + b = Y$, $ar > 0$ ← и эта зависим. это лин. регрессия
$\triangle$
а) $r(X,Y) = 1 \xRightarrow{\text{д-во св-ва 3}} \mathcal{D}(\mathring{X} - \mathring{Y}) = 0$, т.е. $P(\mathring{X} = \mathring{Y}) = 1$. это a
Тогда $\mathring{Y} = \dfrac{Y-EY}{\sigma(Y)} = \dfrac{X-EX}{\sigma(X)}$ или $Y = EY + \overbrace{\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}}(X-EX)$
$ar > 0$, т.к. $\dfrac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} > 0$, $r = 1$

б) $r(X,Y) = -1$, тогда $Y = EY - \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - EX)$

$$a = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} < 0 \Rightarrow ar > 0.$$

в) $\exists\ Y = aX + b$, $EY = aEX + b$

$$r(X, aX+b) = \frac{E[(X-EX)(aX+b-aEX-b)]}{\sigma(X)|a|\sigma(X)} =$$

$$= \frac{a\mathcal{D}X}{\mathcal{D}X|a|} = \operatorname{sign}(a)$$

$\triangledown$

(45) Равномерное распределение. Плотность, ф-я расп. вероятности. Моменты.

- $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases}$ $\quad F_X = \begin{cases} \int_a^x \frac{dx}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & x \le a \\ 1 & x \ge b \end{cases}$
- $EX = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$
- $EX^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{(b^2+ab+a^2)(b-a)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$
- $\mathcal{D}X = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

(46) Экспонента. The same.

- $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$
- $EX = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$
- $EX^2 = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} = \lambda \int_0^\infty \frac{y^2}{\lambda^2} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}$
- $\mathcal{D}X = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$