Теория меры (II курс)

§1 Системы множеств

Опр Дизъюнктный набор множеств $A_1 \dots A_n \Rightarrow \forall i,j \; A_i \cap A_j = \varnothing$

$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ - дизъюнктное объединение

Опр. X мн-во, $\mathcal{P}$-сем-во подмножеств мн-ва X

$\mathcal{P}$ полукольцо: ① $\varnothing \in \mathcal{P}$

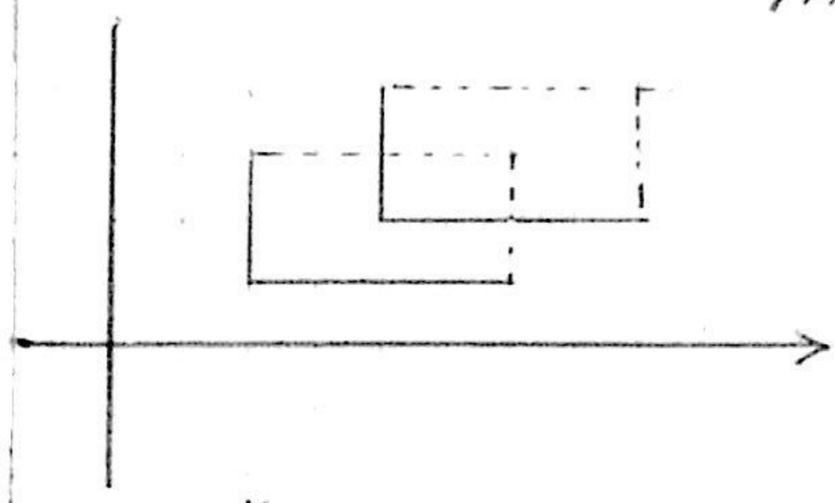
② $\forall A,B \in \mathcal{P} \; (A \cap B) \in \mathcal{P}$

③ $\forall A,B \in \mathcal{P} \; \exists$ кон. дизъюнктный набор $D_1 \dots D_k \in \mathcal{P}$: $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_i$

Пример ① Полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^m$

Ячейка - полуоткрытый параллелепипед: $[a,b) = \{x \mid a_1 \le x_1 < b_1, a_2 \le x_2 < b_2, \dots, a_m \le x_m < b_m\}$, $a,b \in \mathbb{R}^m$

$[a,b) \cap [c,d) = \{x \mid \max(a_1,c_1) \le x_1 < \min(b_1,d_1), \dots, \max(a_k,c_k) \le x_k < \min(b_k,d_k)\}$



$[a,b) \setminus [c,d)$ 3^m „плоскостей"

② 2^X - всевозм. подмн-ва X $\quad A \setminus B = A$

③ $X = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{P}$ = огр подмн-ва

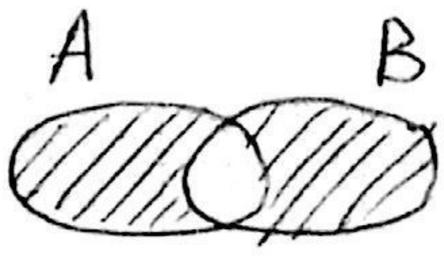
①' Ячейки в $\mathbb{R}^m$ с рац. коорд вершин

Св-ва: ① $A \in \mathcal{P} \Rightarrow A^c \in \mathcal{P}$

② $A,B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P}$

$A,B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{P}$

$A,B \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{P}$ (симм. разн.)



③ $A, B_1 \dots B_n \in \mathcal{P} \; \exists$ кон. дизъ. $\{D_j\}$

$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigsqcup D_j$ ключевое слово - конечное

$$\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right) \setminus B_n = \left(\bigsqcup_k E_k\right) \setminus B_n = \bigsqcup_k (E_k \setminus B_n) = \bigsqcup_k \bigsqcup_j D_{kj}$$

Опр. X, $\mathcal{A} \subset 2^X$ - <u>алгебра</u>, если

① $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $A \setminus B \in \mathcal{A}$

② $X \in \mathcal{A}$

<u>Св-ва:</u> ① $\varnothing \in \mathcal{A}$ $X \setminus X = \varnothing$

② $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

③ $A \in \mathcal{A}$ $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

④ $A, B \in \mathcal{A}$ $A \cup B \in \mathcal{A}$ $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$

⑤ $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{A}$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (трив. индукция)

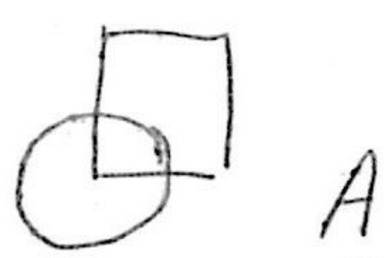
⑥ $\mathcal{A}$ - алгебра $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ - полукольцо

<u>Пример</u> ① 2^X

② Огр. мн-ва в $\mathbb{R}^2$ и дополн. огр. мн-в

A - огр. $A \setminus B$ - огр. A - неогр $\Rightarrow A^c$ - огр

A - неогр B - неогр. $A \setminus B$ - огр



Опр. X $\mathcal{A} \subset 2^X$ - <u>σ-алгебра</u> (<u>сигма-алгебра</u>), если это алгебра и $\forall A_1, A_2 \ldots$ - сч. набор мн-в $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

NB ① $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k^c\right)$

② $E \in \mathcal{A}$ $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$ - <u>σ-алгебра (над E)</u>

σ-алг. $A^c = X \setminus A$ $E \setminus A$

① $A_1 \ldots A_k \subset X$

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1 \ldots$ $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})$

$B_1, \ldots, B_k$ - дизъ. набор

$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$

② $\mathcal{P}$ - полукольцо

$\mathcal{A}_0$ = кон. объединение эл-тов $\mathcal{P}$ и дополн. кон. объед

1) $\mathcal{A}_0$ - алгебра

2) $\forall$ алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$

Огр. мн-ва $\mathbb{R}^2$, их. дол. не явл. б-алгеброй

§2 Объём

<u>Опр</u> $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – <u>аддитивная функция</u>, если

1) μ не принимает беск. знач разных знаков
2) $\mu(\varnothing)=0$
3) $\forall A_1 \dots A_n$ – дизъюнктный набор $\in \mathcal{P}$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

<u>Опр</u> (1) $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – аддитивна, ≥ 0

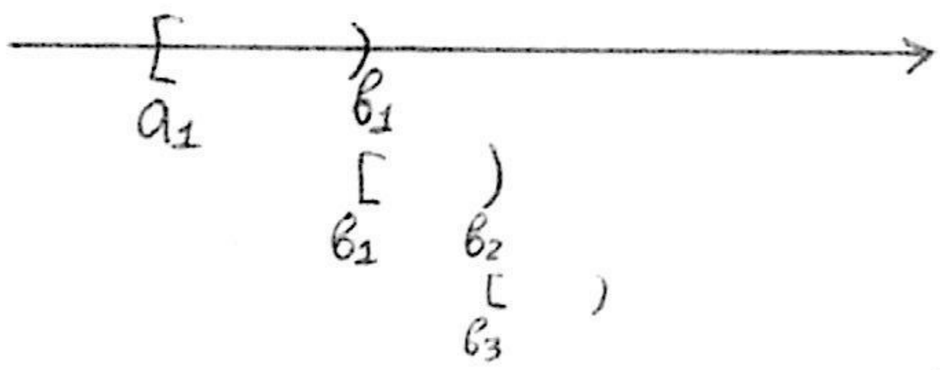
Тогда μ <u>назыв. объемом</u>

(NB) $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{A}$ (3) $\leftrightarrow$ (3') $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \varnothing$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

<u>Опр</u> (2) Если $\forall A \in \mathcal{P}$ $\mu A < +\infty \Rightarrow \mu$ – <u>кон. объем</u>

<u>Пример</u> $\mathcal{P}$ – полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^1$

1) $\mu([a,b)) = b-a$, $b>a$



2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – возр., непр. $V([a,b)) = g(b) - g(a)$
3) Клас. объем в $\mathbb{R}^m$

$$V([a,b)) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

4) $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R}^m \,/\, E$ – огр. либо E^c – огр$\}$

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E\text{-огр.} \\ 1, & E\text{-не огр.} \end{cases}$$

$B \subset A$ $\mu(B) \leq \mu(A)$

(T) $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ Тогда

(1) μ – <u>усиленно монот</u> $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$, $A_k, A \subset \mathcal{P}$

Тогда $\sum_{k=1}^{n} \mu A_k \leq \mu A$

(2) μ – <u>кон. полуаддитивность</u> $A_k, A \in \mathcal{P}$ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_k$

③ $A, B, A\setminus B \in \mathcal{P}$; $\mu(B) < +\infty$ (<u>субтрактивность</u>)

$\mu(A\setminus B) \geq \mu A - \mu B$

[А если $B \subset A$, то $\mu(A\setminus B) = \mu A - \mu B$]

<u>Док-во:</u> ① $\left(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigsqcup_{\ell=1}^{N} B_\ell$

$A = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigsqcup_{\ell=1}^{N} B_\ell}_{\text{кон. набор. мн-в}}$ $\quad \mu A = \sum \mu A_k + \sum \mu B_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \mu A_k \leq \mu A$

③ $B \subset A \Rightarrow \mu(A\setminus B) = \mu A - \mu B$ - это очев. по аддит.

$\mu A = \mu(A\setminus B) + \mu B$

$A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{P}}$ $\quad \mu(A\cap B) \leq \mu(B)$ монот.

$\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(A\cap B) \geq \mu A - \mu B$

② $B_k = A \cap A_k \subset \mathcal{P}$ (д-ть $A_k, A \in \mathcal{P}$ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_k$)

$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

$C_1 = B_1, \ldots C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right)$, $\underline{A = \bigsqcup C_k}$

$C_k = B_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i = \bigsqcup_j D_{kj}$ $\quad D_{kj} \in \mathcal{P}$

$\underline{A = \bigsqcup_{kj} D_{kj}}$ $\quad \underbrace{\mu A = \sum_{kj} D_{kj}}_{(\text{кон.})}$

$\sum_j \mu(D_{kj}) \leq \mu A_k$

$\left(\bigsqcup_j D_{kj} \subset C_k \subset B_k \subset A_k\right)$

$\mu A = \sum_k \sum_j \mu D_{kj} \leq \sum_k \mu A_k$

Упр. ① $X = \{1, 2, 3\}$ $\quad ?\ \mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{P} = 2^X$ $\quad \mu(\{1\}) = 1 \quad \mu(\{1,2,3\}) = 100$

② $\mu : \underset{\text{алг.}}{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ $\quad \mu(A\cup B\cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A\cap B) - \mu(B\cap C) - \mu(A\cap C) + \mu(A\cap B\cap C)$

Мера

Опр. $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – мера, если ① μ – объём

② μ – объ. св-ом сч. аддит.

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i;\ A_i \in \mathcal{P},\ A \in \mathcal{P}\quad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

(NB) Пример 4 §2 – не явл сч. аддитивным (см. в тетр.)

$\sum 0 \neq 1$, а должна быть $=$ (клеточки в тетради)

Пример X – мн-во, $A_1, A_2 \ldots$ – попарно разл. точки в X

$k_1, k_2 \ldots\ k_i > 0$

$\mathcal{P} = 2^X\quad \mu E = \sum_{i: A_i \in E} k_i$ считающая мера (сумма весов выбранных элементов)

(T) (о сч. полуадд.)

$\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, μ – объём

Тогда экв.

① μ – сч. адд. (т.е. μ – мера)

② μ – сч. полуадд $A; A_1 \ldots \in \mathcal{P};\ A \subset \bigcup A_i\quad \mu A \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

$A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Док-во: 1) $\Rightarrow$ 2) очев (равенство)

2) $\Rightarrow$ 1) (?) $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i\quad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

$\forall n\ \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \underset{\text{усил. монот.}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu A_i \leq \mu A \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i \leq \mu A$

$A \subset \bigsqcup A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

$\Rightarrow \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$

Сл. $A \in \mathcal{P},\ A_n \in \mathcal{P},\ \mu A_n = 0$, μ – мера

$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = 0$

(T) $\mathcal{A}$ – алг. $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$

Экв: ① μ – мера

② μ – непр. снизу

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots;\ A,\ A_i \in \mathcal{A}\quad A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Тогда в этих условиях $\mu A = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu A_n$

<u>Док-во:</u> 1) $\Rightarrow$ 2)

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, ...

$A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} B_i$ $\quad \mu A = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu B_i = \lim \sum\limits_{i=1}^{N} \mu B_i = \lim \mu A_N$

2) $\Rightarrow$ 1) $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} C_i$ $\quad \mu C \overset{?}{=} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu C_i$

$D_1 = C_1$, $D_2 = C_1 \sqcup C_2$, ... $D_n = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} C_i$

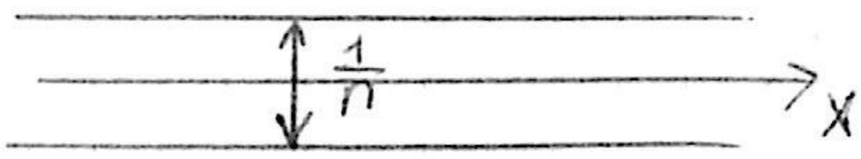
$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \quad \cup D_i = C$

$\mu C = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu D_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu C_i = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mu C_i$

(T) <u>(о непр-ти сверху)</u>

(NB) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \cap A_i = A$ $\quad \mu A_i \to \mu A$

$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, μ - объём



$\bigcap A_n =$ ось Ox

Экв.:

1) μ - мера

2) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$; $\cap A_i = A$ $\quad A_i, A \in \mathcal{A}$ $\quad \lim\limits_{i\to+\infty} \mu A_i = \mu A$

3) μ непр. сверху на $\varnothing$:

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \quad \cap A_i = \varnothing$; $A_i \in \mathcal{A}$ Тогда $\lim\limits_{i\to+\infty} \mu A_i = 0$

$C = \bigsqcup C_j$

$A_k := \bigsqcup\limits_{j \geq k} C_j$

$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \quad \cap A_i = \varnothing$

(3) (T) <u>о продолжении меры</u>

<u>Опр.</u> $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ - полукольца $\quad \mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu_1 : \mathcal{P}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ - мера

μ_1 - <u>продолж. μ_0</u> (с $\mathcal{P}_0$ на $\mathcal{P}_1$) $\quad \mu_1|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ $\quad (\forall A \in \mathcal{P}_0 \ \mu_1(A) := \mu_0(A))$

<u>Опр.</u> μ - <u>полная мера</u> $\quad \mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$,

если $\forall A \in \mathcal{P}$: $\mu A = 0$ верно $\forall B \subset A$: $B \in \mathcal{P}$ (и тогда $\mu B = 0$)

Опр $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ - объём, μ - <u>σ-конечный объём</u>, если $\exists \{A_k\} \in \mathcal{P}$
↳ подмнож. X $\quad \mu A_k < +\infty$ $\left(X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \text{ при этом}\right)$

(Т) (<u>о стандартном (Лебеговском) продолжении меры</u>)
μ_0 - σ-кон. объём на $\mathcal{P}_0$. Тогда
$\exists$ σ-алгебра $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}_0$, мера $\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$:
(1) μ - продолж. μ_0 с $\mathcal{P}_0$ на $\mathcal{A}$ (мера сильнее объёма)
(2) μ - полная мера
(3) минимальность: $]\tilde{\mu}$ - мера на σ-алг: $\tilde{\mu}$ - продолжает μ_0, $\tilde{\mu}$ - полное. Тогда $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ $\quad \tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$
(4) $\mathcal{P}_1$ - п/к $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{A}$ $\quad \tilde{\mu}$ - продолж. μ_0 на $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mu|_{\mathcal{P}_1} = \mu_1$
(5) $\forall A \in \mathcal{A}$ $\mu(A) = \inf\left\{\sum \mu(P_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k,\ P_k \in \mathcal{P}\right\}$

<u>Следствие</u>: $A \subset \mathcal{A}$ $\quad \mu A < +\infty$ $\quad \forall \varepsilon > 0$
$\exists \underset{\in \mathcal{P}_0}{P_1, P_2, \ldots}$ $A \subset \bigcup P_k$ $\quad \mu A \leq \sum \mu P_k < \mu A + \varepsilon$

(§5) <u>Мера Лебега</u>
$\mathbb{R}^m$ $\mathcal{P}^m$ - п/к ячеек $[a,b) = \{x \mid \forall k\ a_k \leq x_k < b_k\}$ $\quad \mu[a,b) := \prod_{k=1}^{m}(b_k - a_k)$
(Т) Пусть μ - класс. объем в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \mu$ - σ-кон. мера на п/к ячеек
Док-во: σ-кон. очевидна $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(-n, \ldots -n), (n, n \ldots, n))$
(?) μ - сч. аддитив
(?) μ - сч. полуаддитив $\quad P \subset \bigcup P_k$ $\quad \mu P \underset{?}{\leq} \sum \mu P_k$
$P = [a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k; b_k)$ - (объединение ячеек в $\mathbb{R}^m$)

$\mu[a,b) \leq \sum \mu[a_k, b_k)$

$[a,b'] \subset [a,b)$
выберем b' так, чтобы $\mu[a,b) - \mu[a,b'] < \varepsilon$
$[a,b'] \subset [a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k', b_k)$ $\quad$ это <u>компакт</u>: замк. парал. $[a,b']$ покрыт $\bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k', b_k)$ - открыт
$[a_k, b_k) \subset (a_k', b_k) \subset [a_k', b_k]$ $\quad \Rightarrow \exists$ кон. набор K_i:
$\mu[a_k', b_k) - \mu[a_k, b_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ $\quad [a_k, b') \subset [a,b'] \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_{k_i}', b_{k_i}) \subset \bigcup [a_{k_i}'; b_{k_i})$

$\mu[a,b') \leq \sum \mu[a_{k_i}, b_{k_i})$

$\mu[a,b) - \varepsilon \leq \sum \mu[a_{k_i}; b_{k_i}) + \varepsilon$ — это $\forall \varepsilon$

<u>Опр.</u> $\mathbb{R}^m$ $\mathcal{P}^m$ μ-класс. объём <u>Рез-т Лебеговского продолжения μ</u> γ <u>мера Лебега в $\mathbb{R}^m$</u>

$\mathcal{A}$ - σ-алгебра Лебеговских мн-в $=: \mathfrak{M}^m$ (мн-в изм. по Лебегу)

λ_m - мера Лебега
(λ)

<u>Св-ва:</u> ① $A_1, A_2, \ldots$ - измеримы $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$; $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ - изм.

$\mathbb{R} \setminus A_i$ - изм.

$\lambda A = 0$, A - изм. $\Rightarrow \forall B \subset A$ - тоже изм. $\lambda B = 0$

$\{a\}$ - изм. $[a, a+(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})] = \{a\}$ $\lambda\{a\} = 0$

B - сч. $\Rightarrow B$ - изм. и $\lambda B = 0$ $\lambda\{a\} \leq \lambda(\text{ячейки}) = \frac{1}{n^m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

в $\mathbb{R}^1$: Q - изм. $\lambda_1 Q = 0$

② A - откр. $\Rightarrow A \subset \mathfrak{M}^m$ (B - замк. $\Rightarrow B \subset \mathfrak{M}^m$)

<u>Лемма</u> A - откр. Тогда (о построении откр. мн-ва с помощью ячеек)

1) $\exists$ ячейки $P_1, P_2 \ldots$ $A = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k$

2) Можно считать, что P_i - кубы; верш. которых имеют рац. координаты; $\overline{P_i} \subset A$

замыкание куба P_i

3) E - изм. $\lambda E = 0$: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_i$ - куб. ячейки $E \subset \bigcup P_i$ $\sum \lambda P_i < \varepsilon$

<u>Док-во:</u> 1) $\forall x \in A$ возьмём какую-нибудь ячейку $P(x)$ с рац. коорд. $x \in P(x) \subset A$

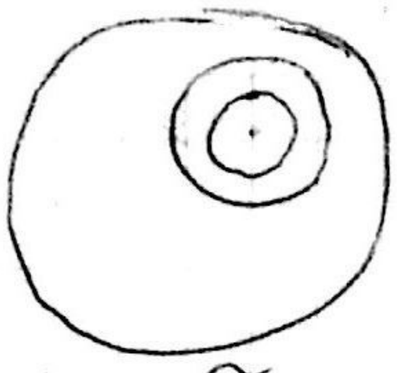
$A = \bigcup_{x \in A} P(x)$ — в этой совок. ячеек не более чем сч. мн-во;

пронумеруем их: $R_1, R_2 \ldots$

$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i$ R_1; $R_2 \setminus R_1 = \bigcup_{\text{кон.}} S_i$; $R_3 \setminus (R_1 \cup R_2) = \bigcup_{\text{кон}} \mathcal{D}_i$. и т.д.

$R_1, S_1, S_2 \ldots$ $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \ldots$

2) как в пункте 1: $\forall x \in A$ $Q(x)$ - двоич. рац., куб ячейка; $\overline{Q} \subset A$

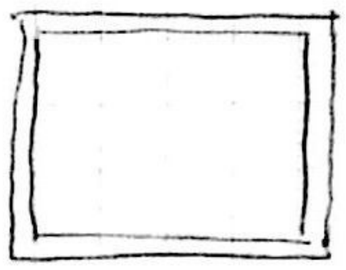


$\frac{1}{10Tm}R$

$A \subset \bigcup \tilde{Q}_i$ повторить рассужд. из п.1)

$E \subset \bigcup P_i \quad \sum \mu P_i < \frac{\varepsilon}{2}$

$P_i \subset Q_i: \ \lambda(Q_i) - \lambda(P_i) < \frac{\varepsilon/2}{2^i}$



$E \subset \bigcup P_i = \underbrace{\bigcup \tilde{Q}_i}_{\text{двоичн. разб. шара ретелем на кубы}}$

③ Неприв. мн-во меры 0

Канторово мн-во

$\Delta_0 = [0; 1]$

$\Delta_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$

$\Delta_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$K := \bigcap \Delta_i$ - замк. $\cong \{x \in [0;1]$ троич. запись из 0 и 2$\}$ - несчётное мн-во

$\forall n \ K \subset \Delta_n$ изм. т.к. построено из отр.

$\lambda K \leq \lambda \Delta_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \lambda K = 0$

④ $\exists$ неизм. мн-во (в $\mathbb{R}$)

Отн. экв-ти в $\mathbb{R}$ $\quad x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$

$A = \mathbb{R}/_\sim \quad \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$ и объ. дизъ.

сдвиг на q $\quad A+q \quad A+r$

$x+q \quad x+r$

$\tilde{A}$ - такое фактор-мн-во $\mathbb{R}/_\sim \subset [0,1]$

$\tilde{A} = [0,1]/_\sim \quad \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1;1]} (\tilde{A} + q) \supset [0,1] \quad \lambda \tilde{A} = \alpha \quad \lambda(\tilde{A} + q) = \alpha \quad \lambda(\bigsqcup(\tilde{A} + q)) = \sum \lambda(\tilde{A} + q) = \sum \lambda(\tilde{A})$

⑤ A - откр. $\quad \lambda A > 0$

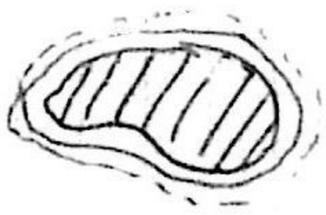
A - огр. $\quad \lambda A$ - кон.

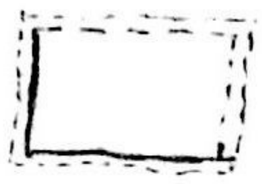
$\lambda A = 0$ см. п3 леммы 1

⑥ $A \subset m^n$ Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G_\varepsilon$ - откр; F_ε - замк.

огр.

$F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon \quad \lambda(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$



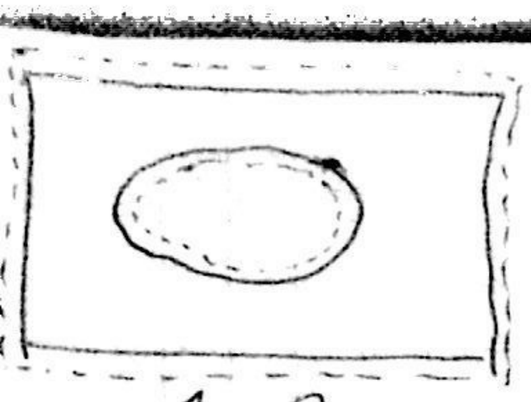


$A \subset \bigcup P_k$

$\sum \lambda P_k - \lambda A < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall P_k$ возьмем откр. парал. Q_k

$\sum \lambda Q_k - \lambda A < \sum (\lambda Q_k - \lambda P_k) + (\lambda P_k - \lambda A) < \quad \lambda(Q_k \setminus P_k) = \frac{\varepsilon/4}{2^k}$

$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad A \subset \bigcup P_k \subset \bigcup Q_k = G_\varepsilon$



$A \subset B$

↳ замк. парал.

$A^c = B \setminus A$

Для A^c найдем откр H_ε : $A^c \subset H_\varepsilon$ $\quad \lambda(H_\varepsilon \setminus A^c) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lambda(H_\varepsilon \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$

$F_\varepsilon = (B \setminus H^\varepsilon)$ - замк. $\subset A$

$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$

NB A - огр - не обязательно

σ-конечное $\mathbb{R}^m = \bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i \quad Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots$

$\forall \varepsilon \ \exists$ откр. $G_\varepsilon \ A \subset G_\varepsilon \ \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon \quad (A \cap Q_k) \subset G_k$ - откр.

$\lambda(G_k \setminus (A \cap Q_k)) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

$A \subset \bigcup G_k \quad \lambda(\bigcup G_k \setminus A) = \lambda(\bigcup (G_k \setminus A)) \leq \lambda(\bigcup (G_k \setminus (A \cap Q_k))) \leq \sum \underbrace{\lambda(G_k \setminus (A \cap Q_k))}_{< \varepsilon}$

<u>Опр</u> $\mathcal{B}$ - <u>борелевская σ-алгебра в $\mathbb{R}^m$</u> - это

min σ-алг., содерж. все откр. мн-ва

Число эл-тов в $\mathcal{B}$ - континуум

$2^k > C$

<u>Следствие</u> $A \subset m^m \ \exists B$ - борелевское (вида сч. объ. замк. мн-в)

$\exists C \ \lambda(C) = 0 \quad A = B \sqcup C$

$\exists \mathcal{D}$ - сч. пересеч. откр $\mathcal{E} \ \lambda(\mathcal{E}) = 0$

$A = \mathcal{D} \setminus \mathcal{E}$

$F_{\frac{1}{n}} \subset A \quad B := \bigcup F_{\frac{1}{n}} \qquad \mathcal{D} = \bigcap G_{\frac{1}{n}}$

$C := A \setminus B \qquad \mathcal{E} := \mathcal{D} \setminus A$

Сл. ал. $\lambda A = \inf\limits_{\substack{G \supset A \\ G\text{-откр}}} \lambda(G) = \sup\limits_{\substack{F \subset A \\ F\text{-замк.}}} \lambda(F) = \sup\limits_{\substack{K \subset A \\ K\text{-комп.}}} \lambda(K)$

$A \in \mathfrak{M}^m$

$A = B \cup C$

B - борелевское (вида $\cup F_k$, F_k - замк.)

C - мн-во меры 0

(Т) <u>преобразование меры Лебега при движениях и лип. отобр-ях</u>

<u>Лемма</u> $(X, \mathfrak{A}) \to (X', \mathfrak{A}', \mu)$

$T: X \to X'$

$\forall A \in \mathfrak{A} \quad T(A) \in \mathfrak{A}'$

$T(\emptyset) = \emptyset$, Пусть $T(X) = X'$

Положим $\nu(A) := \mu(T(A))$ для $A \in \mathfrak{A}$

Тогда ν - мера $\nu(\sqcup A_i) = \mu(T(\sqcup A_i)) = \mu(\sqcup T(A_i)) = \sum \mu T(A_i) = \sum \nu(A_i)$

<u>Лемма</u>: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\forall C \in \mathfrak{M}^n \quad \lambda_m(C) = 0$ мн-во $\lambda_m(T(C)) = 0$

Тогда $\forall A \subset \mathfrak{M}^n \quad T(A)$ - изм. по Лебегу

Док-во: 1) $A \in \mathfrak{M}^m$, A - огр. Тогда $A = (\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k) \sqcup C$, где $\lambda C = 0$, B_k - комп.

$T(A) = T(\bigcup B_k \sqcup C) = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{+\infty} T(B_k)}_{\text{комп. т.к. } T\text{-непр.}} \cup \underbrace{T(C)}_{\text{изм.}} \Rightarrow T(A)$ - изм.

$\lambda(T(C)) = 0$

2) A - не огр. $A = \bigcup A_k \quad T(A) = \bigcup T(A_k)$

созерцаем клеточки

(Т) <u>(об инв меры Лебега относительно сдвига)</u>

$x_0 \in \mathbb{R}^m \quad T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - сдвиг

$x \mapsto x + x_0$

$\forall A$ - изм $T(A)$ - изм $\lambda A = \lambda T(A)$

Док-во: $\forall$ ячейки P $T(P)$ - тоже ячейка $\lambda P = \lambda T(P)$

Проверим $\forall A$ - изм $T(A)$ - изм. T - непр

По лемме 2 дост. проверить A - изм $\lambda A = 0 \Rightarrow T(A)$ - изм $\lambda T(A) =$

теор. о продолж. п.5 $\forall B$ - изм. $\lambda(B) = \inf\{\sum \lambda(P_k)$, где $B \subset \bigcup P_k$, P_k - ячейки$\}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \{P_k\}\ A\subset \bigcup P_k\ \sum \lambda P_k<\varepsilon \qquad T(A)\subset \underbrace{\bigcup T(P_k)}_{\text{ячейки}} \leftrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon$

$\sum \lambda T(P_k)<\varepsilon$

$T(A)\subset \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\frac{1}{n}}}_{\text{изм. мн-во меры 0}} \Rightarrow T(A)$ - измеримо и $\lambda(T(A))=0$ (регулярность меры Лебега)

$\Rightarrow$ 1-сохр. измеримость

$\tilde{\lambda}(A):=\lambda(T(A))$ – $\tilde{\lambda}$-мера · задана на $\mathfrak{M}^m$ (по лемме 1)

$\tilde{\lambda}(P)=\lambda(P) \Rightarrow \tilde{\lambda}(A)=\lambda(A)$ при $A\in\mathfrak{M}^m$

(Т) (<u>о мерах, инв. отн. сдвига</u>)

$\mathcal{P}^m\subset\mathcal{A}\subset\mathfrak{M}^m$

μ - мера на $\mathcal{A}$, μ - <u>инв. отн. сдвига</u>

$\forall A\in\mathcal{A}\ \forall$ сдвига $T\quad T(A)\in\mathcal{A}$

$\mu(T(A))=\mu(A)$

$]\exists$ ячейка $P\quad 0<\mu P<+\infty$

Тогда $\exists C>0\ \forall A\in\mathcal{A}\ \lambda(A)=C\mu(A)$

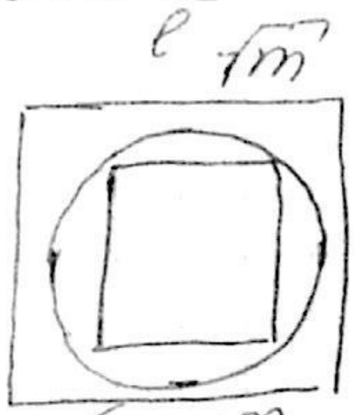
<u>Лемма</u> $C\in\mathfrak{M}^m\ \lambda C=0$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists(B_k)$ - посл-ть шаров

$C\subset\bigcup B_k\ \sum\lambda B_k<\varepsilon$

<u>Док-во</u>: $C\subset\underset{\text{откр}}{\bigcup G_k}=\bigcup_{k,l} P_{kl}\subset\bigcup B_{kl}\ \bigsqcup_l P_{kl}=G_k$

$\mu(B_{kl})<(\sqrt{m})^m\mu P_{kl}$



$Q(0,1)\subset B(0,\frac{\sqrt{m}}{2})\subset Q(0,\sqrt{m})$

$\sum\mu G_k<\varepsilon \qquad \sum\lambda B_{kl}<(\sqrt{m})^m\cdot\varepsilon$

(Т) (<u>об инвар меры Лебега при ортогональн. преобр</u>)

$T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ - лин. орт. преобр.

$\forall A\in\mathfrak{M}^m\quad T(A)\in\mathfrak{M}^m$ и $\lambda(A)=\lambda(T(A))$

<u>Док-во</u>: 1) Сохр. измеримости

T-непр. дост. проверить для A: $\lambda A=0$

$\forall \varepsilon \ \exists \mathcal{U}_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k \supset A \quad \lambda \mathcal{U}_\varepsilon < \varepsilon$

$\lambda \mathcal{U}_\varepsilon < \sum \lambda B_k < \varepsilon$

$T(A) \subset \bigcup T(B_k)$ шар т.к. T-ортог. $\quad \lambda T(B_k) = \lambda B_k$ т.к. радиусы одинак

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - ортог.

$\lambda, \mathfrak{M}^m$

$\mu(A) = \lambda(T(A))$ - это мера по Л.1. на $\mathfrak{M}^m$

? μ - инв. отн. сдвигов

A - мн-во $a \in \mathbb{R}^m \quad a + A = \{a + x, x \in A\}$

$\mu(a+A) = \lambda(T(a+A)) = \lambda(\underline{Ta} + T(A)) = \lambda(T(A))$

Значит $\exists C \quad \mu A = C \cdot \lambda(A) \qquad \mu(B(0,1)) = \lambda(T(B(0,1))) = \lambda(B(0,1)) \Rightarrow$

<u>Следствие</u> Объем любого (прямоуг) прмп = произв. сторон $\Rightarrow C = 1$

Следствие $L \subsetneq \mathbb{R}^m$ - лин. подпр-во $\Rightarrow \lambda L = 0$

<u>Док-во:</u> $\dim L = k \xrightarrow{\text{ортог.}} \{x : x_{k+1} = 0, \dots, x_m = 0\} \subset \{x_m = 0\} =: M$

M - это $(m-1)$-мерное подпр.-во $\quad \lambda(M) = 0$

$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$\boxed{K_i}$

$\lambda(P_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(P_i) = \varepsilon$

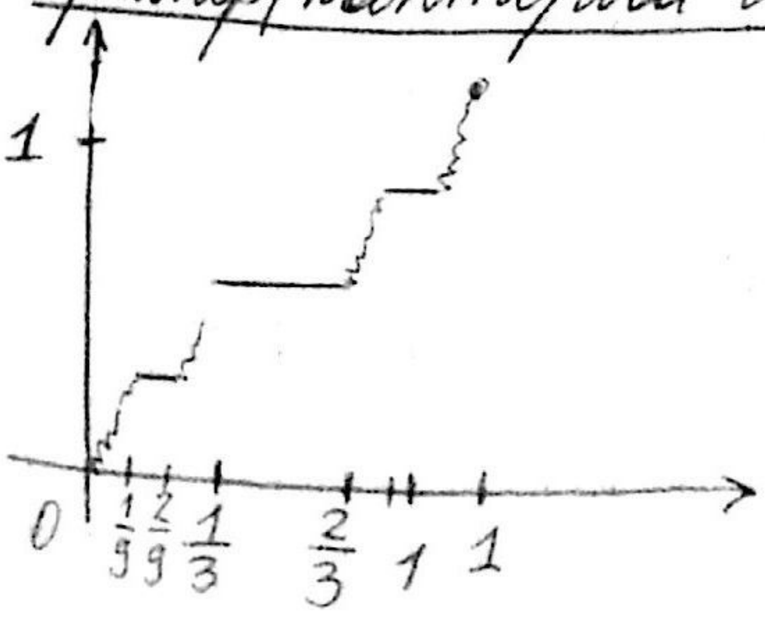
$M \cong \mathbb{R}^{m-1}$ разбиваем $\mathbb{R}^m$ на куб. яч. со стороной 1 $\quad (*, \dots, *, 0)$

(Т) <u>(о сохр. измеримости при гладком преобр.)</u>

$F: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ F \in C^1$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad F(A)$ - измеримо

<u>Пример (Канторова лестница)</u>



на мн-ве меры 1 принимает сч. мн-во знач.

ф-ция монотонна, непрерывна

$\Rightarrow$ непр. недостаточно для сохраненности меры

Док-во: 1) Q - замк. куб. с O

$A \subset Q$ $\lambda A = 0$? $\lambda(F(A)) = 0$

$K = \max\limits_{x \in Q} \|F'(x)\|$ ($\exists$ по т. Вейерштрасса)

$a, b \in Q$ $|F(b) - F(a)| \underset{\exists c \in Q}{\leq} \|F'(c)\| \cdot |b-a| \leq K \cdot |b-a|$

$\forall \varepsilon > 0$ $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} P_i$, $P_i \subset Q$ замк. кубы $F(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} F(P_i)$ $\sum \lambda P_i < \varepsilon$

P_i - куб со стор. d, тогда $F(P_i) \subset B(F(A), kd\sqrt{m}) \subset$ куб (центр $= F(a)$, стор $= 2kd\sqrt{m}$)

диагональ $d\sqrt{m}$ $A \in P_i$

$d^m = \lambda F(P_i) \leq (2k\sqrt{m}d)^m = C_0 \cdot d^m$, где $C_0 = (2k\sqrt{m})^m$

$\sum \lambda F(P_i) \leq C_0 \cdot \sum \lambda P_i < C_0 \cdot \varepsilon$

2) O - откр. мн-во - разобьём на кубы Q_i: $\overline{Q_i} \subset O$

$A = \bigcup\limits_i (A \cap Q_i)$

$F(A) = \bigcup \underbrace{F(A \cap Q_i)}_{\lambda = 0}$

Лемма (О „структуре компактного оператора")

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - лин., невырожд. $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ два ортогон. базиса ОНБ $h_1 \ldots h_m$, $g_1 \ldots g_m$

$\exists$ числа $s_1 \ldots s_m > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^m$ $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} s_i \cdot \langle x, g_i \rangle \cdot h_i$

при этом $|\det V| = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$ $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Док-во: ◄ $W = V^T \cdot V$ - симм. м-ца

Пусть $c_1 \ldots c_m$ - собств. числа, $g_1 \ldots g_m$ - соотв. собств. вектора (они еще и нормированные)

$\forall g_i$ $\langle V^T V g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle$ $c_i |g_i|^2 = |V g_i|^2$ $c_i > 0$ $s_i := \sqrt{c_i}$

$\langle c_i g_i, g_i \rangle$ $h_i := \frac{1}{s_i} V(g_i)$

◄ $\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V(g_i), V(g_j) \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V^T V g_i, g_j \rangle = \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle = 0$ $i \neq j$

$= 1$ $i = j$

$V(x) = V(\sum \langle x, g_i \rangle g_i) = \sum \langle x, g_i \rangle \cdot V(g_i) = \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$

$V(g_i) = s_i \cdot h_i$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det W = \det V^T \cdot \det V = (\det V)^2 =$

$\parallel$

$C_1 \ldots C_m$

(T) (о преобр. меры Лебега при линейном отобр.)

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейное Тогда

1) $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$

2) $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$ считаем, что $0 \cdot \infty = 0$

Док-во: 1) V - выпукло $V(\mathbb{R}^m) \subsetneq$ подпр-во $\Rightarrow \lambda(V(\mathbb{R}^m)) = 0$ очевидно

2) $\det V \neq 0$ сохр. измеримости, т. к. V - гладкое (по Л.)

$\mu E = \lambda(V(E))$ - мера по Л. 1; инв. отн. сдвигов $\mu(a+E) = \lambda(V(a+E)) =$

$= \lambda(V(a) + V(E)) =$

$= \lambda(V(E)) = \mu E$

$\Rightarrow \exists c \quad \mu E = c \cdot \lambda E \qquad E := \text{куб}(g_1 \ldots g_m)$

$V(E) := \text{прп.}(s_1 h_1 \ldots s_m h_m)$

$\lambda E = 1$

$\lambda(V(E)) = \mu E = s_1 \ldots s_m = |\det V|$

Следствие $\lambda(B(0,r)) = r^m \cdot \lambda(B(0,1))$

(§) Мера Борелля Лебега-Стилтьеса

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - монот. возр., непр.

$P_1 \quad \mu[a,b) = g(b) - g(a)$ - кон. адд. объём и даже мера

g - возр. $\quad g(c-0), g(c+0) = \lim\limits_{x \to c+0} g(x) \qquad g(c-0) \neq g(c) \quad d > c$

при отсутствии непр. μ не мера $\qquad \bigcap\limits_n [c - \frac{1}{n}, d) \supseteq [c, d)$

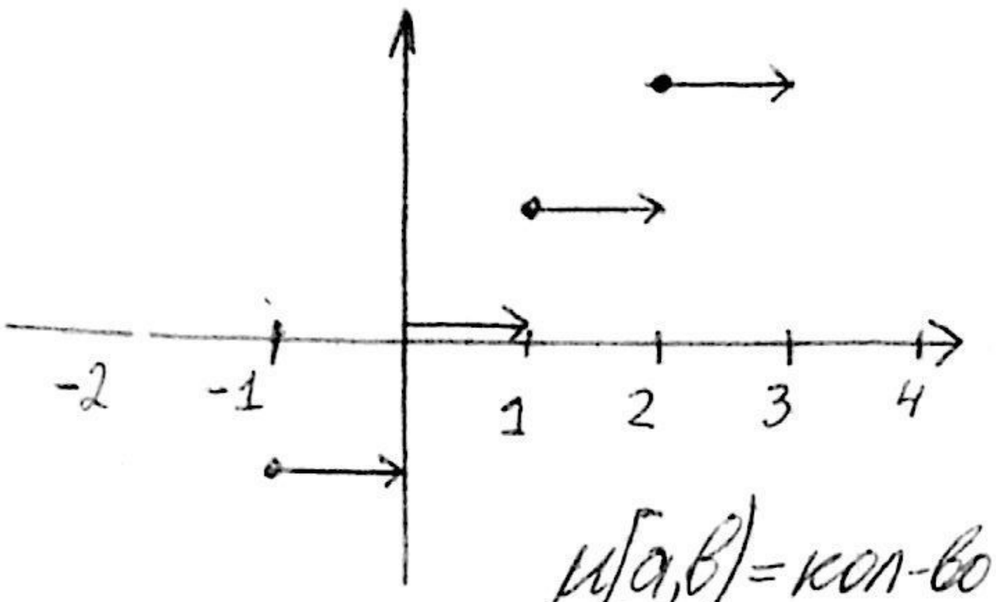
$\lim \mu[c - \frac{1}{n}, d) \neq \mu[c, d)$

$\mu[a,b) = g(b-0) - g(a-0)$

(T) μ - σ-кон. мера на п/к ячеек P^1

Опр. Лебеговское продолж. меры μ δ мерой Лебега-Стилтьеса, порожд. ф-ей g

Обозначение μ_g



$\mu[a,b)$ = кол-во целых точек в $[a,b)$

$\exists$ продолжение μ_g на $2^{\mathbb{R}}$

Опр. Мера Борелю-Стилтьеса $= \mu_g|_{\mathcal{B}}$

Гл. Интеграл

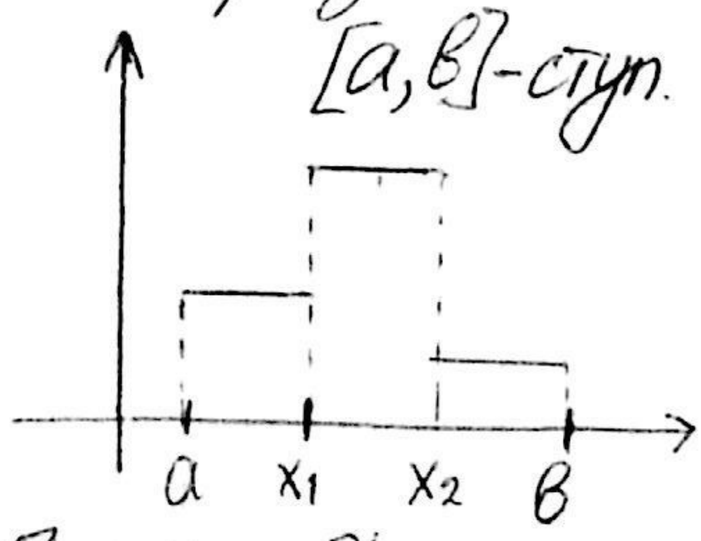
§1 Измеримые функции

Опр. 1) E - мн-во Разбиение мн-ва $E = \bigsqcup_{i=1}^{n} e_i$

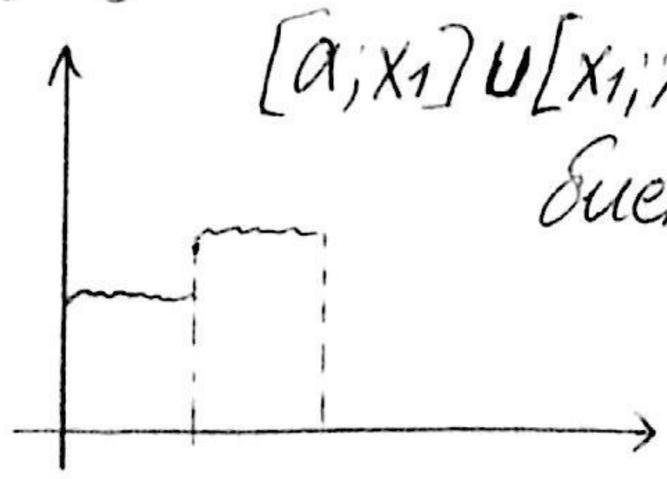
2) X - мн-во $f: X \to \mathbb{R}$ - ступенчатая, если $\exists$ разбиение $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$

$f|_{X_i} \equiv const = c_i$

Такое разбиение δ допустимым по отн. к ступ. ф-ции



$[a,b]$-ступ.



$[a;x_1] \sqcup [x_1;x_2] \sqcup [x_2;b]$ - допустимое разбиение

Пример χ_E - хар. ф-ция мн-ва E: $\begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$

$(E \subset X)$

Произв. ступ. ф-ция $\sum c_i \chi_{X_i}(x)$

Св-ва: ① f_1, f_2 - ступ. ф-ции на X

Тогда $\exists$ разбиение X, допустимое по отн. к обеим ф-ям

$f_1 = \sum c_i \chi_{X_i}$ $f_2 = \sum d_j \chi_{Y_j}$

$X = \bigsqcup X_i$, $X = \bigsqcup Y_j$

$E_{ij} := X_i \cap Y_j \qquad \bigcup_{i,j} E_{ij} = X$

$f_1 = \sum_{i,j} c_i \chi_{E_{ij}} \qquad f_2 = \sum d_j \chi_{E_{ij}}$

② f_1 и f_2 - изм. $\Rightarrow f_1 + f_2,\ f_1 \cdot f_2,\ \max(f_1, f_2),\ f_2 \neq 0\ \frac{f_1}{f_2},\ |f_1|$ - изм.

const - изм.

<u>Опр.</u> <u>Лебегово мн-во</u> $E(f<a)$

$f: X \to \mathbb{R},\ E \subset X,\ a \in \mathbb{R} \qquad E(f<a) = \{x \in E : f(x) < a\}$

$f^{-1}((-\infty; a)) \cap E \qquad X(f<a)$

$E(f>a),\ E(f \geq a)$

<u>Опр</u> $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $E \subset X$, $E \in \mathfrak{A}$ f - <u>измеримое</u> на мн-ве E $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ - пр-во с мерой

$\forall a \in \mathbb{R}$ $E(f<a)$ - измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

„f - изм. на X" = „f - измерима" μ-измерима, изм. по отн. к мере μ

f - измерима по Лебегу $X = \mathbb{R}^m$ $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^m$

(NB) Эквивалентно:

① $\forall a$ $X(f<a)$ - измеримо $\qquad (X(f<a))^c = X(f \geq a)$

② $\forall a$ $X(f \leq a)$ - измеримо $\qquad X(f \leq a) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X(f < a + \frac{1}{n})$

③ $\forall a$ $X(f>a)$ - измеримо

④ $\forall a$ $X(f \geq a)$ - измеримо

<u>Пример</u> 1) E - изм. χ_E - изм.

2) $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - непр. Тогда она изм. по Лебегу

в силу тополич. опр. непрерывности $\forall a$ $E(f<a)$ - откр.

<u>Св-ва:</u> 1) f - изм. $\Rightarrow E(f=a)$ - изм. мн-во для $\forall a$

$E(f \leq a) \cap E(f \geq a)$

$\forall a<b$ $E(f \in \langle a, b \rangle)$ - изм.

2) f - изм. $\Rightarrow \forall \alpha > 0$ αf - изм., $-f$ - изм

$E(\alpha f < a) = E(f < \frac{a}{\alpha})$

3) f - изм. на E_k, $k = 1, 2 \ldots \Rightarrow f$ - изм. на $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ $\quad E(f<a) = \bigcup E_k(f<a)$

4) f - изм. на E, $E' \subset E$: E' - изм. $\Rightarrow f$ - изм. на E' $\quad E'(f<a) = E(f<a) \cap$

⑤ f-изм., $f \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$-изм.

⑥ $f \geq 0$, изм. $\forall \alpha > 0$ f^{α}-изм.

Ⓣ 1) f_n-изм. $\Rightarrow \sup\limits_n \{f_n\}$-изм., $\operatorname{Inf}\{f_n\}$-изм.

$F(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$

2) $\underline{\lim} f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$ - изм.

3) $\forall x \ \exists \lim f_n(x) = f(x)$, тогда $f(x)$-изм.

Док-во: ② $\Rightarrow$ ③ трив.

① $g(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\}$ $\quad X(g > a) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} X(f_n > a)$

② $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) =$, где $g_n(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$

$= \inf\limits_n g_n(x)$

<u>Следствие</u>: f-изм. $\Rightarrow f_+, f_-, |f|$-изм.

Ⓣ (<u>о хар-ции изм. ф-ций с пом. ступенчатых</u>)

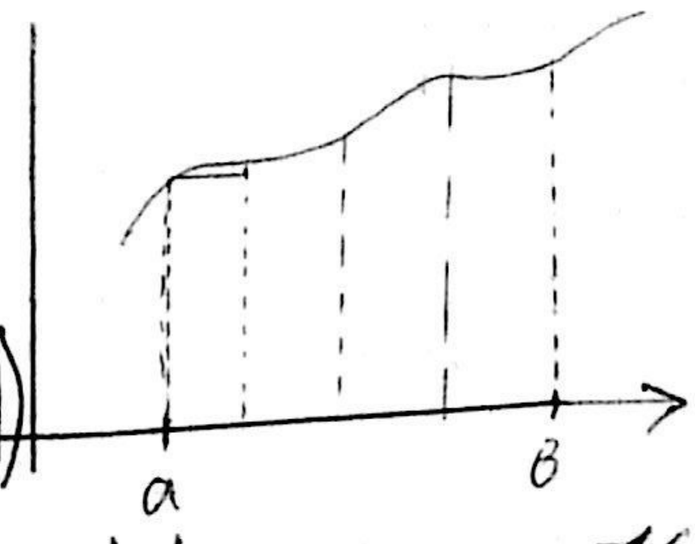
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ - изм. $f \geq 0$

Тогда $\exists$ посл-ть ступ. $\{g_n\}$

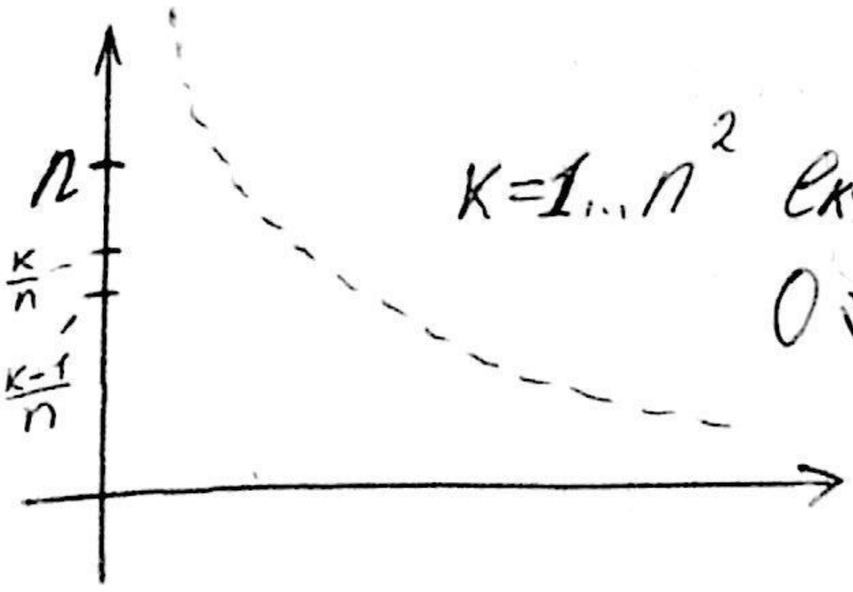
1) $0 \leq g_n(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X$

2) $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \quad \forall x \in X$

3) $\forall x \ \lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x)$



$X(f \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}])$



$k = 1 \dots n^2$ $\quad e_k := f^{-1}([\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}))$ $\quad e_0 := f^{-1}([n; +\infty))$

$0 \leq h_n = \sum\limits_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k} + n \chi_{e_0} \leq f$

$\lim\limits_{n \to +\infty} h_n(x) = f(x)$, т.к. если $f(x) = +\infty$, то $h_n(x) = n \quad \forall n$

если $f(x) < +\infty$, то $|f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}$ при $n > f(x)$

$g_n(x) := \max(h_1(x) \dots h_n(x))$

$h_n \leq g_n \leq f \quad g_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ (g_n удовл. 2)

Следствие f-изм $\Rightarrow$

$\exists$ ступ. g_n: $\forall x$ $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = f(x)$

$|g_n| \le |f|$ $\quad 0 \le \overline{g_n} \le f^+$ $\quad \overline{g_n} + \widetilde{g_n} \le f^+ + f^-$

$0 \le \widetilde{g_n} \le f^-$

Следствие f, g-изм $\Rightarrow$ fg-изм $[0\cdot\infty = 0]$

$F_n \to f$ $\quad G_n \to g$

$|F_n| \le |f|$ $\quad |G_n| \le |g|$ $\qquad g(x)=0 \Rightarrow G_n(x)=0$ при $\forall n$

$F_n G_n \to fg$ $\qquad f(x) = \pm\infty$ $\quad F_n G_n(x) = 0$

Следствие f, g-изм., $\forall x$ $\{f(x), g(x)\} \ne \{-\infty; +\infty\}$

Тогда $f+g$ - изм. $\quad F_n + G_n \to f+g$

Лемма (об измеримости ф-ций, непр. на мн-ве полной меры)

$e \in \mathfrak{M}^m$ $\lambda_m e = 0$ $\quad E := \mathbb{R}^m \setminus e$?

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad f|_E$ - непр. Тогда f-изм

Док-во: $\forall a \in \mathbb{R}$ $E(f<a)$ - откр. в E = (откр. в $\mathbb{R}^m$) $\cap E$

изм. в $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m(f<a) = \underbrace{E(f<a)}_{\text{изм}} \vee \underbrace{e(f<a)}_{\text{меры } 0}$

① f, g $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$-изм

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - непр

$x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ - изм

② f-изм Тогда

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x;y) \mapsto \underbrace{f(x-y)}_{\text{изм}}$

③ ? f-изм

При исправл. на мн-ве меры 0 ф-ция не станет непр. ни в одной точке

§2 Сх-ть почти всюду и по мере

Опр „почти всюду"

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\forall x \in X$ $\omega(x)$ - высказывание (μ-полная)

Утв. $\omega(x)$ вып. почти всюду (= почти при всех x)

если мн-во $\{x \mid \omega(x)\text{-ложно}\}$ - меры 0

Пример f_n-изм $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ при почти всех x

Тогда $f(x)$-изм

$e = \{x \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$

$E = X \setminus e$ - изм

на E $f_n \to f$

f_n - изм. на $X \Rightarrow f_n$ - изм. E $\Big\} \Rightarrow f$ - изм. на E

$E(f<a) \cup e(f<a)$

(2) μ - полная f - изм $f = g$ п.в. Тогда g - изм.

„$f = g$ п.в." - отн. экв.

$f \sim f$ $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$ $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$

(NB) $\forall n$ ω_n - выск. верно п.в.

Тогда утв. „все $\omega_n(x)$ имеют место" вып. п.в.

<u>Опр</u> f_n - сх. к f по мере

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

f_n, f - п.в. конечны

$f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$, если $\forall \varepsilon > 0$ $|f_n - f| > \varepsilon$

(1) $\mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{x}{n}$

(2) $X = [0,1]$ $\mu(X \mid |f_n - f| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$f_1 = \chi_{[0,1]}$

$f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f_n \to f$ п.в.

$\{x \mid f_n(x) \not\to f(x)\} = e$ - изм. $\mu e = 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$ $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$

(3) $(\mathbb{R}, m, \lambda)$ $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ ($x \neq 0$, что-нибудь при $x = 0$)

$f_n(x) \to 0$ п.в.

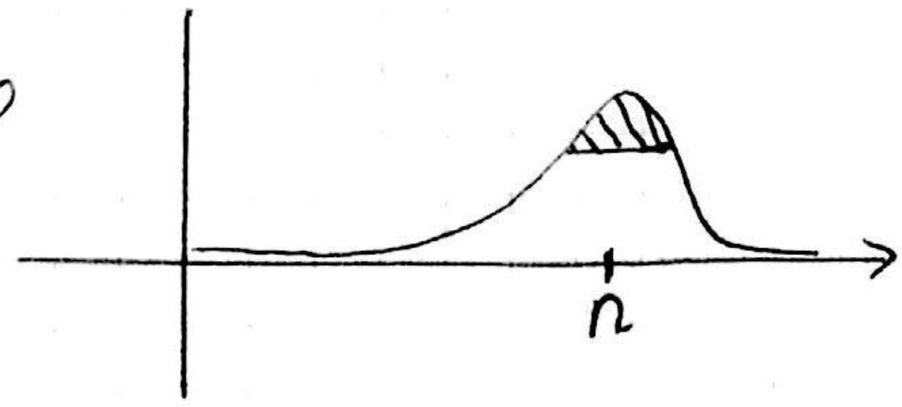
$f_n(x) \rightrightarrows 0$ по мере

$\left|\frac{1}{nx}\right| > \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{n\varepsilon}$

$\lambda X(|f_n| > \varepsilon) = \frac{2}{n\varepsilon} \to 0$

② $f_n(x) = e^{-(n-x)^2}$ $f_n(x) \to 0$

$f_n \not\rightrightarrows 0$



Т (Лебега о сх-ти почти везде и сх-ти по мере)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\quad$!! $\mu X < +\infty$!!

$f_n \to f$ п.в. Тогда $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$

Док-во: поправим f_n и f на мн-ве нулевой меры

$f_n \to f$ всюду на X

① $f_n \to 0$ $\quad \forall x$ $f_n(x)$ - монот. по n посл-ть (убывает)

$X(f_n > \varepsilon) \supset X(f_{n+1} > \varepsilon)$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} X(f_n > \varepsilon) = \varnothing$ $\quad \Big| \Rightarrow \mu X(f_n > \varepsilon) \longrightarrow 0$

здесь исп. $\mu X < +\infty$

② $f_n \to f$ $\quad g_n(x) := \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$ при фикс. x $\quad g_n(x) \to 0$ (т.к. $f_n(x) \to f(x)$)

$g_n(x) \geq 0$ $\quad g_n \geq g_{n+1}$

$X(|f_n - f| > \varepsilon) \subset X(g_n > \varepsilon)$

$\mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \mu X(g_n > \varepsilon) \longrightarrow 0$ по п.1

NB $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$, $f_n \sim \tilde{f}_n$, $f \sim \tilde{f} \Rightarrow \tilde{f}_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} \tilde{f}$

Упр. $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$, $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} g$

Тогда $f \sim g$

Т (Рисса о сх-ти по мере и сх-ти п.в.)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\quad f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$

Тогда $\exists n_k$ $\quad f_{n_k} \to f$ п.в.

Док-во: $\forall k$ $\quad \mu X(|f_n - f| > \frac{1}{k}) \to 0$

$\exists n_k$ $\quad \mu X(|f_n - f| > \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ при $n \geq n_k$ $\quad (*)$

Можно считать $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

? $f_{n_k} \to f$ п.в. $\quad E_k = \bigcup_{j \geq k} X(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j})$ $(**)$ $\quad E_0 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$

1) $\mu E_0 = 0$?

$E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots$ (очев. по опр. E_k)

$\mu E_k \leq \sum_{j \geq k} \mu X(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}$

по непр. меры сверху $\mu E_k \to \mu E_0$, т.е. $\mu E_0 = 0$

2) $x \notin E_0$ $f_{n_k}(x) \to f(x)$

$\exists k$ $x \notin E_k$ т.е. при $j > k$

$x \notin X(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j})$, т.е. $0 \leq |f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \to 0$

<u>Следствие</u> $\left.\begin{array}{l} f_n \rightrightarrows f \\ |f_n| < g \text{ п.в.} \end{array}\right\} \Rightarrow |f| \leq g$ п.в.

Т (<u>Егорова</u>) $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$\mu X < +\infty$ f_n, f - изм., п.в. кон

$f_n \to f$ п.в.

Тогда эта сх-ть „почти равномерная"

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists e \subset X$ изм. $\mu e < \varepsilon$ $f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

Док-во: $g_n(x) = \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

$g_n(x) \to 0$ п.в. $\underset{\mu X < +\infty}{\Longrightarrow} g_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} 0$

(*) n_k $\mu X(g_n > \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ при $n > n_k$

(**) $E_k = \bigcup_{j \geq k} X(g_{n_j} > \frac{1}{j})$ $E_0 = \bigcap E_k$

$\lim \mu E_k = 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k$ $\mu E_k < \delta$ $e := E_k$

$x \notin E_k$

т.е. $x \notin X(g_{n_j} > \frac{1}{j})$ $j \geq n_k$

$g_{n_j}(x) \leq \frac{1}{j}$ $j \geq n_k$

$n > n_k$ $g_n(x) < g_{n_k}(x) \leq \frac{1}{k}$

при $n>n_k$ $\sup\limits_{k\geq n}|f_k-f|\leq\frac{1}{k}$

$f_n \rightrightarrows f$ на $X\setminus e$

§3 Интеграл

$(X,\mathcal{A},\mu)$ $\mathcal{L}^0(X)$ – пр-во изм. ф-ций

Опр. f – ступ. изм. ф-ция $f=\sum\limits_{\text{кон.}}\alpha_i\chi_{E_i}$

$\int\limits_X f\,d\mu := \sum\alpha_i\cdot\mu(E_i)$ [соглашение $0\cdot+\infty=0$]

Св-ва: ① Для другого доп. разбиения интеграл получится тот же самый

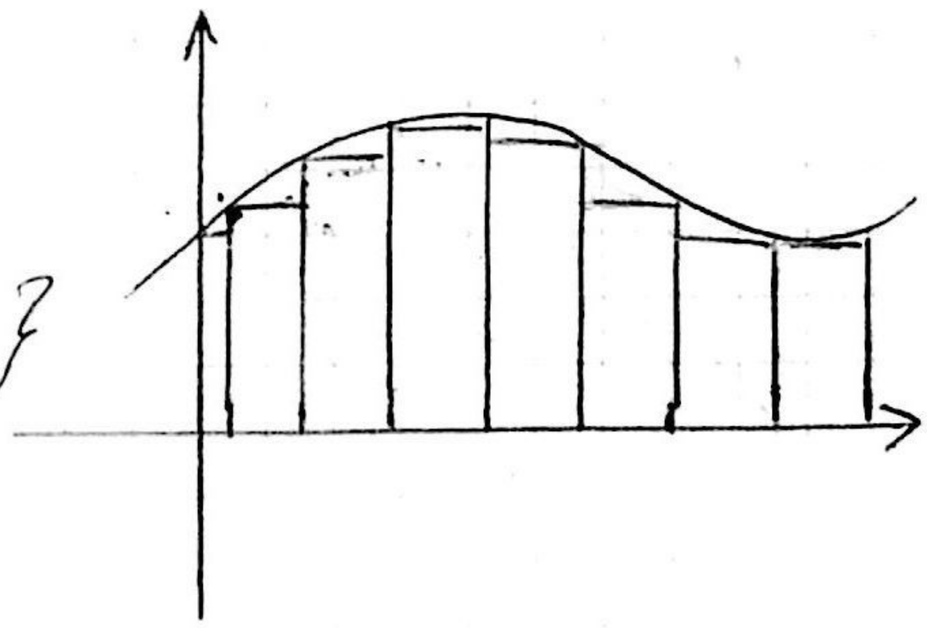
$f=\sum\beta_j\chi_{F_j}=\sum\underbrace{\alpha_i}_{\beta_j}\chi_{E_i\cap E_j}$ $\int f=\sum\alpha_i\mu E_i=\sum\limits_{i,j}\alpha_i\mu(E_i\cap F_j)=$

$=\sum\beta_j\mu F_j \overset{\text{II}}{=} \int f$ для II реализ.

② $0\leq f\leq g$ ступ. $\int\limits_X f\,d\mu\leq\int\limits_X g\,d\mu$

$f=\sum\alpha_i\chi_{F_i}$ $g=\sum\beta_i\chi_{E_i}$

$\alpha_i\leq\beta_i$



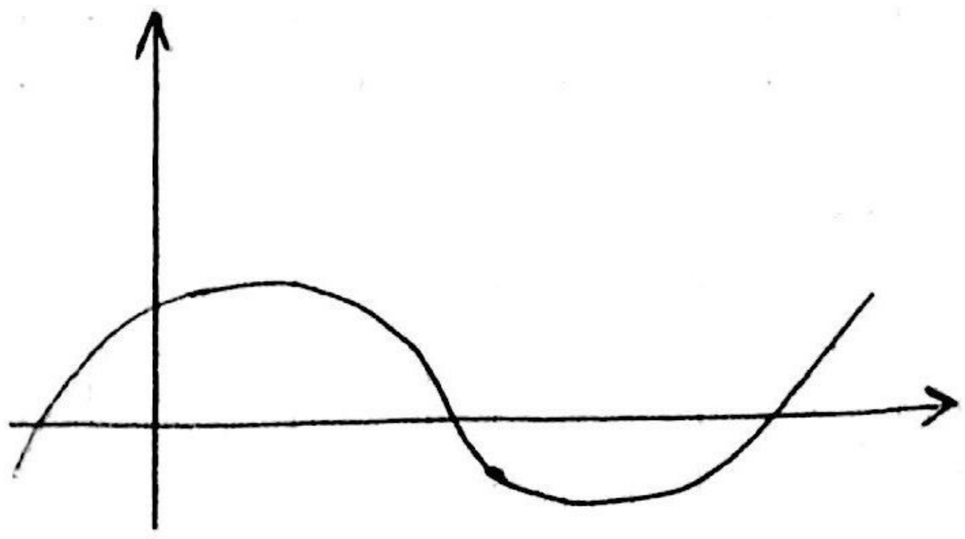
Опр. f – изм. $f\geq 0$

$\int\limits_X f\,d\mu=\sup\{\int g\,d\mu: 0\leq g\leq f, g\text{ – ступ.}\}$

NB ① f – ступ., то инт. в смысле 2 равен инт. в смысле 1

② $\forall$ изм. $f\geq 0$ $0\leq\int\limits_X f\,d\mu\leq+\infty$

③ $0\leq g\leq f$ (изм.) $\Rightarrow\int\limits_X g\leq\int\limits_X f$



Опр. f – произв. изм. $f_+=\max(f,0)$

$f_-=\max(-f,0)$

Пусть $\int f_+$ или $\int f_-$ – конечен

$\int\limits_X f\,d\mu=\int\limits_X f_+\,d\mu-\int\limits_X f_-\,d\mu\in\overline{\mathbb{R}}$

$\int\limits_X f\,d\mu\neq\pm\infty\Rightarrow f$ – суммируемая ф-ция

① $f \geq 0$ изм., то инт. в смысле ③ равен инт. в смысле ②

② f - сумм. $\Leftrightarrow \int\limits_X |f| d\mu < +\infty$

<u>Док-во:</u> $|f| = f_+ + f_- \Rightarrow f$ - сумм. $\int f_+ < +\infty$, $\int f_- < +\infty$

$\int (f_+ + f_-) < +\infty$

<u>Опр.4</u> $E \subset X$, E - изм. $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_E d\mu$

$\int f$ - кон. $\Rightarrow \int f_+ \chi_E$ - кон., т.к. $f_+ \chi_E \leq f_+$

① $f: E \to \mathbb{R}$ - сумм.

$f = \sum d_k \chi_{E_k}$ $\quad \int\limits_E f = \sum d_k \cdot \mu E_k + 0 \cdot \mu(X \setminus E)$

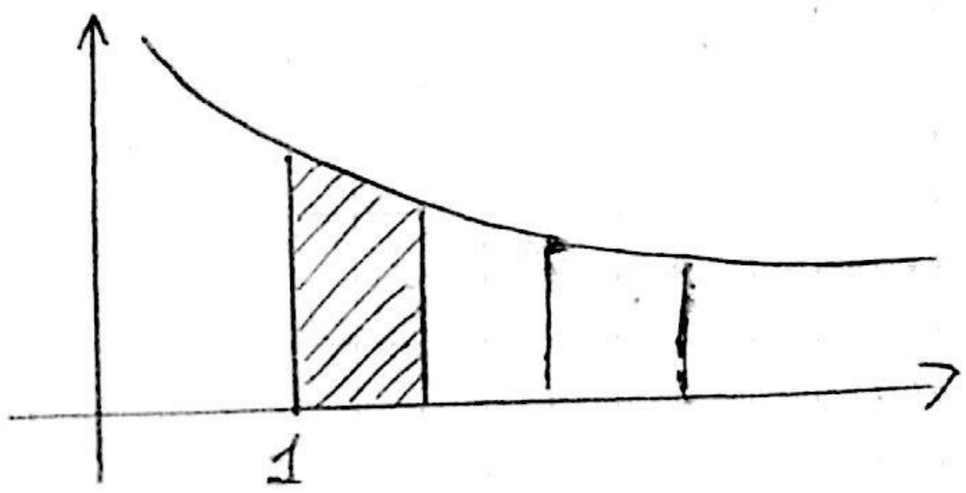
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$$

② $\int\limits_E f d\mu = \sup\{\int\limits_E g d\mu : 0 \leq g \leq f$ на $E\}$

($f \geq 0$ - изм.)

③ $\int\limits_E f d\mu$ - не зависит от знач. ф-ции вне мн-ва E

Пример 1) $\int\limits_{[1;+\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda_1(x) = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$



2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ - не сущ. как инт Лебега

$\frac{\sin x}{x}$ - не сумм. ф-ция на $[0;+\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)_+ = +\infty$ | т.к. нет абс. сх-ти

$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)_- = +\infty$

Св-ва инт-ла

① f и g - сумм. ф-ции $f \leq g \Rightarrow \int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$

<u>Док-во:</u> ① $f, g \geq 0$ см. выше

② f, g - произв. $\int f = \int f_+ - \int f_-$ $\quad g_+ \leq f_+$ $\quad -\int f_+ \leq \int g_+$

$\int g = \int g_+ - \int g_-$ $\quad g_- \geq f_-$ $\quad \int f_- \geq \int g_-$

$\int f \leq \int g$

② $\int_E 1\,d\mu = \mu E \qquad \int_E 0\,d\mu = 0$

③ $\mu E = 0$, f - изм. Тогда $\int_E f\,d\mu = 0$

① f - ступ. $= \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\quad \int_E f\,d\mu = \sum \alpha_k \underbrace{\mu(E_k \cap E)}_{=0} = 0$

② $f \geq 0$ - изм. $\int_E f\,d\mu = \sup\{\int_E g,\ g$ - ступ. $0 \leq g \leq f\} = 0$

③ f - сумм. $= f_+ - f_-$

$\int f = \int f_+ - \int f_-$

④ f - сумм. $\alpha \geq 0$ $\quad \int_X \alpha f = \alpha \int_X f \qquad \int_X (-f)\,d\mu = -\int_X f\,d\mu$

Док-во: $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+ \Rightarrow$ дост. рассм. случай $f \geq 0$, изм.

$\int_X \alpha f = \alpha \int_X f$? $\quad \sup\{\int_X g\,d\mu,\ 0 \leq g \leq f\} \quad \sup\{\int h\,d\mu\ \ 0 \leq h \leq \alpha f,\ h$ - ступ.$\}$

$g \leftrightarrow h := \alpha g$

⑤ f - сумм.

$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu \qquad -\int_E |f|\,d\mu \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

$-|f| \leq f \leq |f| \overset{①}{\Longrightarrow} \int_E -|f| \leq \int_E f \leq \int_E |f|$

⑥ f - изм. на E

$a \leq f \leq b$ на E

Тогда $a \cdot \mu E \leq \int_E f\,d\mu \leq b \cdot \mu E$

$\int_E a\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu \leq \int_E b\,d\mu$

Следствие: $\left.\begin{array}{l} f \text{ - изм. на } E \\ f \text{ - огр} \\ \mu E < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f$ - сумм. на E

$f_+ \leq \max(|a|, |b|)$

$f_- \leq \max(|a|, |b|)$

⑦ f - сумм. на $E \Rightarrow f$ - почти всюду конечна на E

$f \geq 0$ $N = \{x : f(x) = +\infty\}$ - изм. $= \bigcap X(f > n)$

$\mu N > 0 \Rightarrow f \geq n\,\chi_N$ при всех $n \in \mathbb{N}$ $\int f \geq n \cdot \int \chi_N = n \cdot \mu N$

$\int f = +\infty \Rightarrow f$ - несумм.

$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A g d\mu,\ 0 \le g \le f \ \ g\text{-ступ.}\}$

$\int f = \int f_+ - \int f_-$ $\qquad \int_A |f| d\mu < +\infty$

<u>Лемма</u> $A = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, A, A_k - измеримы

g-ступ, ≥ 0 $\quad \int_A g d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} g d\mu$

<u>Док-во:</u> $g = \sum_{k\text{ОН}} d_i \chi_{E_i}$ $\qquad E_i \cap A = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (E_i \cap A_k)$

$$\int_A g d\mu = \sum_i d_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i,k} d_i \mu(E_i \cap A_k) = \sum_k \Big(\sum_i d_i \mu(E_i \cap A_k)\Big) =$$

$$= \sum_k \int_{A_k} g d\mu$$

(T) $A = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, A, A_k - изм. f - изм., ≥ 0

Тогда $\int_A f d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_A} f d\mu$

Док-во ($\le$) возьмем ступ. $0 \le g \le f$

$$\int_A g d\mu \underset{\text{Лемма}}{=\!=} \sum \int_{A_k} g d\mu \le \sum \int_{A_k} f d\mu \text{ - это верхние гр.}$$

$\downarrow \sup$

($\ge$) 1) $]\ A = A_1 \sqcup A_2$

f, $\quad 0 \le \underset{\text{ступ.}}{g_1} \le f \cdot \chi_{A_1} \qquad 0 \le \underset{\text{ступ.}}{g_2} \le f \cdot \chi_{A_2}$

$]\ g_1 = \sum d_i \chi_{E_i}$, $\quad g_2 = \sum \beta_j \chi_{E_j}$

совместное допустимое разбиение

$g_1 + g_2 \le f$

$$\int_A g_1 + \int_A g_2 \le \int_A f$$

$$\parallel$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \le \int_A f d\mu$$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f \le \int_A f$$

2) по индукции утв. верно для любого натур. числа мн-в

3) $A=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, фикс. n $\Rightarrow$ $A=\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \sqcup B_n$, где $B_n=\bigsqcup_{k>n} A_k$

$$\int_A f \overset{②}{\geq} \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f + \underbrace{\int_{B_n} f}_{\geq 0} \geq \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f \Rightarrow \int_A f \geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f$$

Сл. Ф-ция: $\mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$

$\int f \geq 0$ - изм. $A \mapsto \int_A f d\mu$ является мерой.

Сл. $f \geq 0$, изм. $A \supset B$ - изм. $\int_A f \geq \int_B f$

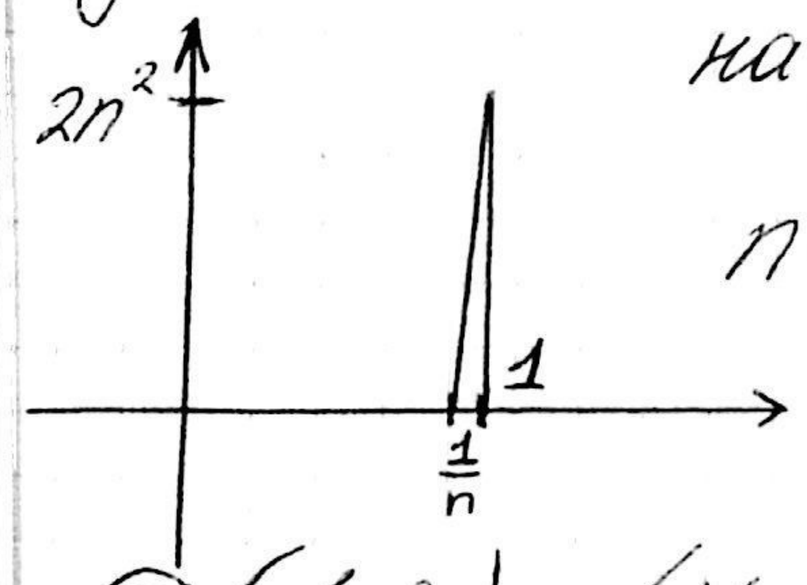
Сл. f - сумм.; $A=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ A, A_k - изм.

Тогда $\int_A f_\pm d\mu = \sum \int_{A_k} f_\pm d\mu$

Упр f - сумм. $g \sim f$ Тогда g - сумм. $\int_X f = \int_X g$

(5) Предельный переход под знаком интеграла

$f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



на $[0,1]$ $f_n \to f \equiv 0$

$$n = \int_{[0,1]} f_n \not\to \int_{[0,1]} f = 0$$

(T) (Леви) $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$f_n \geq 0$ - изм. $\forall x$ $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \ldots \leq f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Тогда $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_X f_n d\mu\right) = \int_X f d\mu$

Док-во: (≤) $\forall n$ $\int_X f_n(x) \leq \int_X f(x)$

$\int f_n \leq \int f_{n+1}$ $\Big| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_X f_n \leq \int_X f$

(≥) $0 \leq \overset{\text{ступ}}{g} \leq f$ хотим: $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu \geq \int_X g d\mu$

будем док. $\forall c \in (0,1)$ $\lim_{n\to\infty}\int f_n \geq c \cdot \int_X g d\mu$

$E_n = X(f_n \geq cg)$ $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = X$ [т.к. $c<1$]

$E_n \subset E_{n+1}$ $\quad \underline{\underline{\int_X f_n}} \underset{\text{сл.2}}{\geq} \int_{E_n} f_n \geq \underline{\underline{c \cdot \int_{E_n} g\,d\mu}}$

$E_n \mapsto c \cdot \int_{E_n} g\,d\mu$

исп. непр меры снизу.

(Т) $f, g \geq 0$ - изм. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Тогда $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

<u>Док-во:</u> g_n - смуп. ≥ 0 $\quad g_n \leq g_{n+1} \leq \ldots \quad g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

h_n - смуп. ≥ 0 $\quad h_n \leq h_{n+1} \leq \ldots \quad h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$

$g_n + h_n$ - смуп., ≥ 0 $\quad (g_n + h_n) \leq (g_{n+1} + h_{n+1}) \quad g_n + h_n \to f + g$

$$\int_X (g_n + h_n)\,d\mu = \int_X g_n\,d\mu + \int_X h_n\,d\mu$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

<u>Сл. 1</u> f, g - сумм. Тогда $f+g$ - сумм

$$\int_X f+g = \int_X f + \int_X g$$

Док-во: упр.

<u>Сл. 2</u> $\mathcal{L}(X)$ - мн-во сумм. ф-ций на X

Тогда это мн-во явл. лин. пр-вом

(Т) (об интегрировании пож. рядов)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$u_n(x)$ - изм. ф-ции на X, $u_n(x) \geq 0$ почти везде

$$\int_X \left(\sum u_n(x)\right) d\mu = \sum \left(\int u_n(x)\,d\mu\right)$$

Док-во: $f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ $\quad f = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $\quad f \uparrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \int \sum_{k=1}^{n} u_n(x)\,dx \qquad\qquad 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_X f_n\,d\mu\right)=\int_X f\,d\mu$$

Сл. $(X,\mathcal{A},\mu)$ u_n – измер. ф-ции ($u \Rightarrow$ изм.)

$\sum\left(\int_X |u_n|\,d\mu\right)$ – кон. Тогда $\sum u_n(x)$ – абс. сх. п.в. ?

$$S_n(x)=\sum_{n=1}^{N}|u_n(x)|\geq 0,\ \text{изм.}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\int_X S_N(x)=\int_X\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(x)|\underset{\text{по Т.}}{=}\sum\int_X|u_n(x)|\,d\mu<+\infty$$

$\Rightarrow \sum|u_n(x)|$ – кон. п.в. по св-ву $f\geq 0$ $\int f<+\infty$ $\Rightarrow f<+\infty$ п.в.

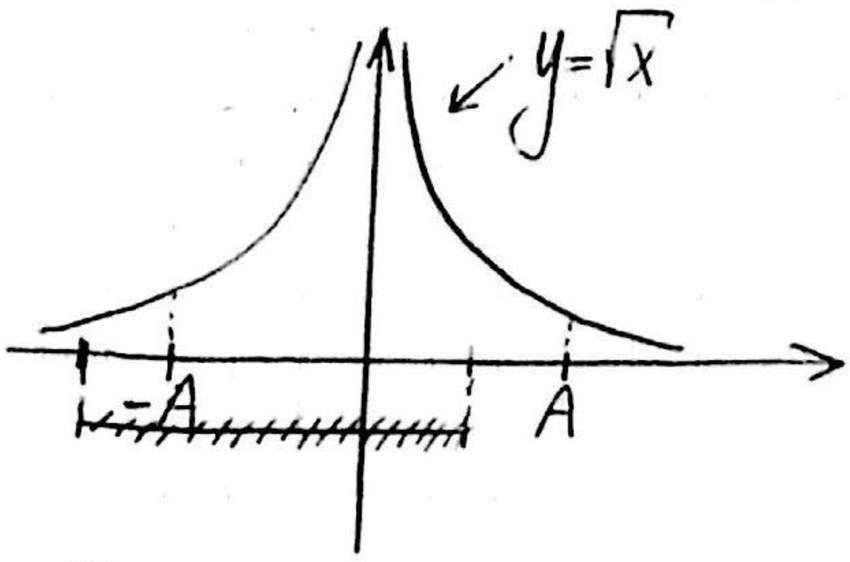
<u>Странный пример</u>

в $\mathbb{R}$ a_n $\sum|a_n|<+\infty$

$\sum\frac{a_n}{\sqrt{|x-a_n|}}$ – абс. сх. при почти всех $x\in\mathbb{R}$

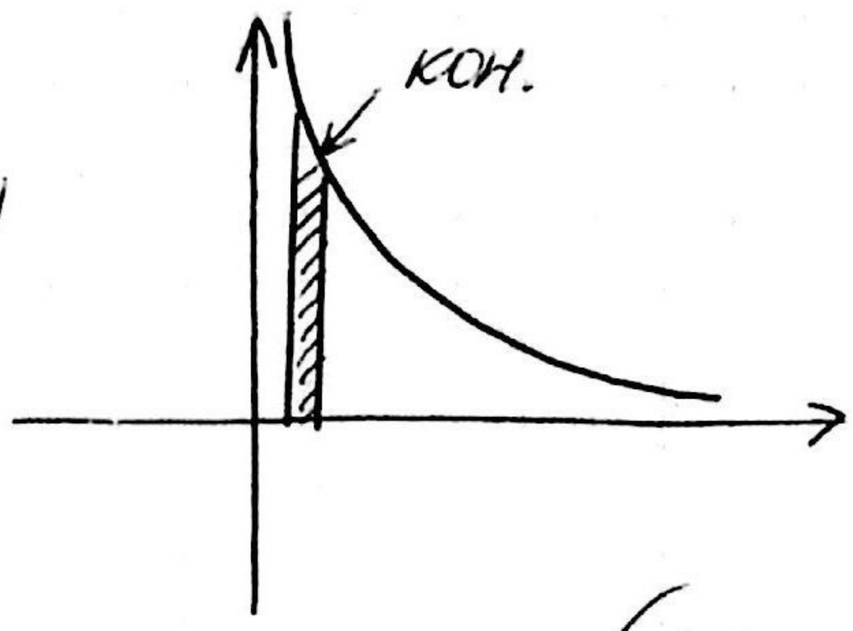
$[-A;A]\ni x$? Есть абс. сх. при п.в. $x\in[-A;A]$

$$\int_{[-A;A]}\frac{|a_n|}{\sqrt{|x-a_n|}}\,d\lambda=\int_{-A}^{A}\frac{|a_n|}{\sqrt{|x-a_n|}}\,dx\leq|a_n|\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{|x-a_n|}}=|a_n|\int_{-A-a_n}^{A-a_n}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}\leq$$



$$\leq|a_n|\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{|x|}}=|a_n|\cdot 2\int_0^A\frac{dx}{\sqrt{x}}=4\sqrt{A}|a_n|$$

т.к. $\sum_{n=1}^{+\infty}4\sqrt{A}|a_n|<+\infty$



Т (<u>об абсолютной непр. интеграла</u>)

$(X,\mathcal{A},\mu)$ f – измер.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall E\in\mathcal{A}: \mu E<\delta$

$\int_E|f|<\varepsilon$

$X_n:=X(|f|>n)$ $X_n\supset X_{n+1}\supset\ldots$ $\bigcap X_n=e$ $\mu e=0$ (можно считать, что $e=\varnothing$)

$E\mapsto\int_E|f|\,d\mu$ – это мера ☺ ν Тогда $\nu(X_n)\to 0$

$\nu(X)<+\infty$ – ф-ция сумм.

берём $\varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon$ $\nu(X_{n_\varepsilon})<\frac{\varepsilon}{2}$ т.е $\int\limits_{X_{n_\varepsilon}}|f|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$

$\delta:=\frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$ берём $E: \mu E<\delta$

$$\int\limits_E|f|d\mu=\int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}}+\int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}^c}\leq\int\limits_{X_{n_\varepsilon}}|f|+\int\limits_{E\cap X_{n_\varepsilon}^c}n_\varepsilon d\mu\leq\frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{n_\varepsilon\cdot\mu E}_{<\frac{\varepsilon}{2}}=\varepsilon$$

$X_{n_\varepsilon}=X(|f|>n_\varepsilon)$

<u>Сл.</u> $(X,\mathcal{A},\mu)$ $e_n\in\mathcal{A}$ - посл-ть мн-в $\mu e_n\to 0$

f - сумм. на X Тогда $\int\limits_{e_n}f d\mu\to 0$

$$\left|\int\limits_{e_n}f d\mu\right|\leq\int\limits_{e}|f|d\mu$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ (и тогда $\exists N: \forall n>N$ $\mu e_n<\delta$)

$\Rightarrow\int\limits_{e_n}|f|d\mu<\varepsilon$

$f_n\to f$ $\qquad f_n\underset{\mu}{\rightrightarrows}f$

$\forall\varepsilon>0$ $\mu(X(|f_n-f|>\varepsilon)\to 0$

$\int\limits_X|f_n-f|d\mu\to 0$ (1)

$f_n=\frac{1}{nx}$ $\quad f_n\underset{\lambda}{\rightrightarrows}0$ (очев.) $\quad\int\limits_0^{+\infty}|f_n-f|=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{nx}dx=+\infty$

$X=(0;+\infty)$, λ

Есть! $\mu(\underbrace{X(|f_n-f|>\varepsilon)}_{X_n})=\int\limits_{X_n}1\,d\mu\leq\int\limits_X\frac{|f_n-f|}{\varepsilon}d\mu\leq\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_X|f_n-f|d\mu$

$1<\frac{|f_n-f|}{\varepsilon}$ $\qquad$ Н-во Чебышева

(T) (<u>Лебега о пр. перех. под знаком интеграла</u>)

$(X,\mathcal{A},\mu)$ f_n, f - изм. ф-ции $f_n\underset{\mu}{\rightrightarrows}f$

и при этом вып.: а) $\exists g(x)$ $\forall n$ $|f_n(x)|\leq g(x)$ при п.в. x

б) g - сумм. ф-ция

Тогда f_n, f - сумм. и $\int\limits_X|f_n-f|d\mu\to 0$

и тем более $\int\limits_X f_n d\mu\to\int\limits_X f d\mu$

• f_n - измер. $\int |f_n| \le \int g < +\infty$

• f - измер. $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ п.в. $|f_{n_k}| \le g \Rightarrow |f| \le g$

• $\left|\int_X f_n - \int_X f\right| = \left|\int_X f_n - f\right| \le \int_X |f_n - f|$

① $\mu X < +\infty$ берём $\varepsilon > 0$ сх-ть $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$

$X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$ $\mu X_n \to 0$

$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} \le \int_{X_n} 2g\, d\mu + \int_{X_n^c} \varepsilon\, d\mu \le \underbrace{2\int_{X_n} g\, d\mu}_{\text{в силу абс. непр. инт. мало, если } \mu X_n < \delta} + \varepsilon \underbrace{\mu X}_{<+\infty} \le$$

$|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$

$\le \varepsilon(2 + \mu X)$

$\forall \varepsilon > 0\ (\exists N)\ \forall n > N \int |f_n - f| d\mu < \varepsilon(2 + \mu X)$

тот N, для кот. $\mu X_n < \delta$

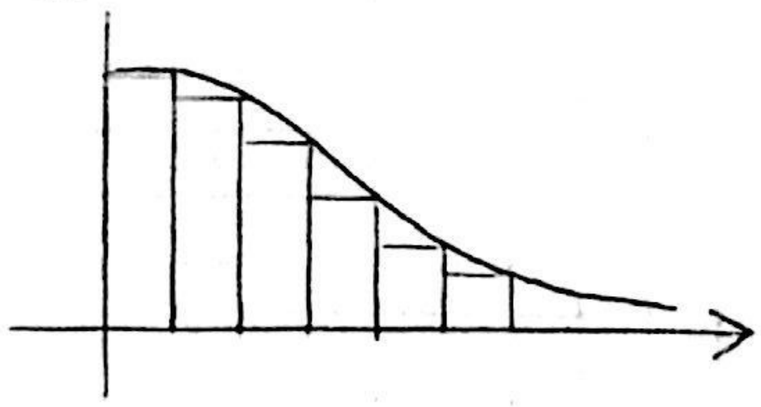
② $\mu X = +\infty$ берём $\varepsilon > 0$

$\exists A \in \mathfrak{A}$ $\mu A < +\infty$ $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$

$\int_X g = \sup\left(\int h_k,\ 0 \le h_k \le g,\ h_k \text{ - ступ.}\right)$

возьмём h - ступ. $\int_X (g - h) d\mu < \varepsilon$

$A =$ „носитель h" $= \{x : h(x) \ne 0\}$



$$\int_{X \setminus A} g = \int_{X \setminus A} g - h = \int_X g - h < \varepsilon$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} |f_n - f| \le \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\text{мало по п.1}} + \underbrace{2\int_{X \setminus A} g}_{<2\varepsilon} <$$

Т (Лебега о пр. перех. под знаком интеграла)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ f_n, f - изм. $f_n \to f$ п.в.

и при этом $\exists g$: а) $\forall n\ |f_n(x)| \le g(x)$ п.в. x

б) g - измер.

Тогда $\int_X |f_n - f| \to 0$ и уж тем более $\int_X f_n \to \int f$

Док-во: $f_n \in f$ сумм. (пред. переходо в $\int$)

$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots)$

$h_n \geq h_{n+1} \geq \dots$ Так как $|f_n - f| \leq 2g$, то $h_n \leq 2g$

Кстати: $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \overline{\lim}|f_n - f| = 0$ п.в. X

ф-ции $2g - h_n \geq 0$ и $\uparrow$

$\lim \int_X (2g - h_n) = \int_X \lim (2g - h_n) = 2\int_X g$

$\lim (2\int_X g - \int_X h_n) \Rightarrow \int_X h_n \to 0$ $\quad \int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$

$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$ $\quad f: X \times Y \to \mathbb{R}$

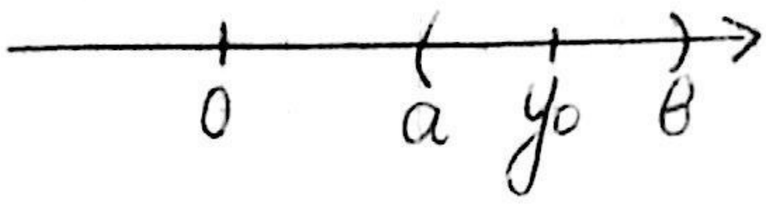
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Y-м.п.

$\forall y$ $x \mapsto f(x,y)$ - сумм

<u>Опр.</u> f удовл. условию L_{loc} в точке y_0, если $\exists U(y_0)$ $\exists g(x)$ - изм $\forall y \in U(y_0)$ $\forall x$ (п.в.) $|f(x,y)| \leq g(x)$ и $g(x)$ - сумм.

$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$

$\forall y_0 > 0$ $x^{y-1} e^{-x}$ удовл. усл. $L_{loc}(y_0)$



$U(y_0) = (a, b)$ $\quad \forall y \in (a,b)$ $\forall x$

$|x^{y-1} e^{-x}| \leq \begin{cases} \underbrace{x^{a-1} e^{-x}}, & x \in (0;1) \\ x^{b-1} e^{-x}, & x \in [1; +\infty) \end{cases}$

$\int g(x) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} + \int_1^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}$

кон

$a - 1 > -1$

кон.

(Т) <u>(о непр инт по параметру)</u>

$f: X \times Y \to \mathbb{R}$ $\forall y$ $x \mapsto f(x,y)$ сумм (по x) т.е. $\forall y$ $\int_X f(x,y) d\mu(x)$ имеет смысл.

пр-во с мерой $\quad$ метр. пр-во

Пусть вып. 2 усл.: $y_0 \in Y$

(2) f - удовл. усл Леоб(y_0)

(1) $f(x,y)$ - непр. в т. y_0 при п.в. x

$\left(f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} f(x,y_0) \text{ при п.в. } x\right)$

Тогда ф-ция $I(y) = \int\limits_X f(x,y)\,d\mu(x)$ непр. в y_0

<u>Док-во:</u> проверим по Гейне: $y_n \to y_0$ $I(y_n) \to I(y_0)$ (?)

$f_n(x) := f(x,y_0)$

1) $\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_0(x)$ при п.в. x

2) НСНМ $y_n \in U(y_0)$ $|f_n(x)| \le g(x)$ при п.в. x

по Т. Лебега $\underbrace{\int\limits_X f_n(x)\,d\mu}_{I(y_n)} \to \underbrace{\int\limits_X f_0\,d\mu}_{I(y_0)}$

(Т) (<u>Лебега о дифф. инт. по параметру</u>)
мер пр-во

$f: X\times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ - пр-к

0) $\forall y$ $x \mapsto f(x,y)$ сумм.; $I(y) = \int\limits_X f(x,y)\,d\mu(x)$

1) $\forall y$ при п.в. x $\exists^* f'_y(x,y)$

2) $y_0 \in Y$ $f'_y(x,y)$ - удовл. усл. Леоб(y_0) $\left(\exists U(y_0)\ \exists g(x)\ |f'_y(x,y)| \le g(x)\right)$

Тогда: $I'(y_0) = \int\limits_X f'_y(x,y)\,d\mu(x)$

<u>Док-во</u> $F(x,h) = \dfrac{f(x,y_0+h) - f(x,y_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \overset{\text{def}}{=} \overset{F(x,0)}{} f'_y(x,y)$ п.в. x (g - сумм. на X) $\Rightarrow$ измеримая $f'_y(x,y)$

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int\limits_X F(x,h)\,d\mu(x) \xrightarrow[h\to 0]{?} \int\limits_X f'_y(x,y)\,d\mu(x)$$

F - вып. Леоб(0) $\exists \tilde{U}(0) := U(y_0) - y_0$ (сдвиг)

$$|F(x,h)| = \frac{|f(x,y_0+h) - f(x,y_0)|}{h} = |f'_y(x,y_0+\theta h)| \le g(x)$$

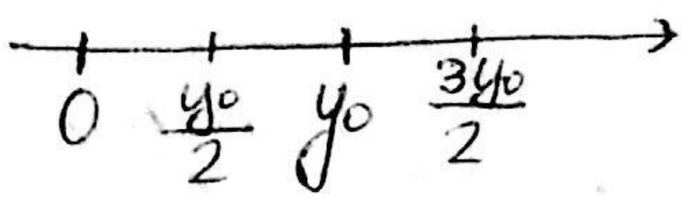
$\Rightarrow$ по 1 т. Лебега о непр. инт. по пар., что f'_y удовл. Леоб(y_0)

① $\Gamma(y)=\int_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x}dx,\ y>0$

у.1) $\forall y_0>0$ Γ - непр. в $(0)y_0$

у.0) y - фикс. $x\mapsto x^{y-1}e^{-x}$ - сумм. по x $[0;+\infty)$

$x^{y-1}e^{-x}$ - непр. по y при всех x

$L_{loc}(y_0):=$ 

$|x^{y-1}e^{-x}|\le\begin{cases} x^{\frac{3}{2}y_0-1}e^{-x}, & x\in[1;+\infty) \\ x^{\frac{y_0}{2}-1}e^{-x}, & x\in[0;1)\end{cases}$

$\forall y_0>0$ Γ - дифф. в y_0

$\Gamma'(y_0)=\int_0^{+\infty} x^{y_0-1}e^{-x}\ln x\,dx$ $\quad |x^{y-1}e^{-x}\ln x|\le\begin{cases} x^{\frac{3}{2}y_0-1}e^{-x}\ln x & x\in[1;+\infty) \\ x^{\frac{y_0}{2}-1}e^{-x}|\ln x|, & x\in[0;1)\end{cases}$

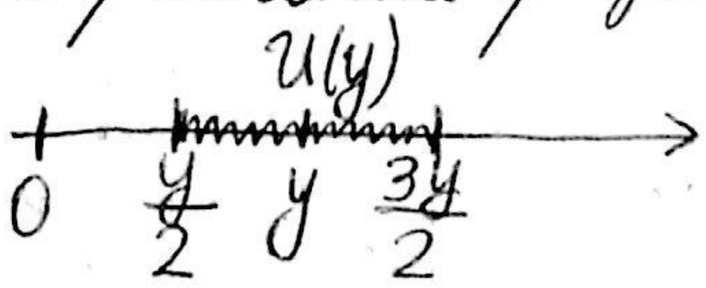
log удваивается

② $I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ y>0$

$\forall y>0$ $I'(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$ ⊜

у.0) $\forall y>0$ $x\mapsto e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$ сумм. по x $\left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right|\le e^{-xy}$

1) подынтегральная ф-ция - дифф-ма

2) $L_{loc}(y)$  $|e^{-xy}\sin x|\le e^{-\frac{y_0}{2}x}$ - сумм. по x

⊜ $\mathrm{Im}\int_0^{+\infty}\underbrace{e^{-xy}\cdot e^{-ix}}_{e^{-x(y+i)}}dx=\mathrm{Im}\frac{-1}{y+i}e^{-x(y+i)}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\mathrm{Im}\frac{1}{y+i}=\mathrm{Im}\frac{y-i}{y^2+1}=$

$=-\frac{1}{y^2+1}$

$I'(y)=-\frac{1}{y^2+1}$

$I(y)=-\mathrm{arctg}\,y+C$

Очев.: $I(y)\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$ (по т. Лебега о непр. инт. по парам.)

$e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[y\to+\infty]{}0$ при п.в. x

при $y>A$ $\left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right|\le e^{-Ax}\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ - сумм.

$$I(y) = \int^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$$

$$\text{?}\ \downarrow y\to 0 \qquad\qquad \downarrow y\to 0$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$$

$$Z(y) = I(y) - \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{xy}-1}{x}\sin x\,dx$$

$$\text{?}\ Z(y) \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$\left|\int_0^t \frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx\right| \le \int_0^t |\dots| \le \int_0^t y|\sin x|\,dx \le \int_0^t y\,dx = yt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^t \ge 1+t \\ e^t \le 1+t \end{array}}$$

$$\int_t^{+\infty}\frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx \underset{\text{по частям}}{=\!=\!=} \frac{1-e^{-xy}}{x}\cos\Big|_{x=t}^{x=+\infty} + \int_t^{+\infty}\left(\frac{e^{-xy}-1}{x}\right)'_x \cos x\,dx$$

$$\frac{1-e^{-xy}}{t}\cos t \qquad \dots\ \frac{1-e^{-xy}}{x^2} - \frac{y}{x}e^{-xy} = \frac{3}{t}$$

$$\left|\int_t^{+\infty}\frac{e^{-xy}-1}{x}\sin dx\right| \le \frac{1}{t} + \int_t^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_t^{+\infty}\frac{y}{x}e^{-xy}\,dx$$

$$\frac{1-e^{-xy}}{x^2} \qquad \le \frac{y}{t}\int_t^{+\infty} e^{-xy} = \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{1}{t}$$

$$Z(y) \le ty + \frac{3}{t} \to 0 \quad < \varepsilon$$

хотим.

берем t: $\frac{3}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$

берем y: $yt < \frac{\varepsilon}{2}$

NB $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xy}}{x}\sin x\,dx$ $\qquad L_{loc}(y_0) \leftrightarrow \exists\, U(y_0)$: в $U(y_0)$ инт. равн. сх.

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx \xrightarrow[y\to 0]{} \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$y \in [0; +\infty)$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ - сх-ся

$|e^{-xy}| \le 1$; мон. по x

§5 Замена переменных в интеграле

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \dots)$ $\quad \varphi: X \to Y$

Упр. $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varphi^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ - это σ-алгебра

Пусть $\varphi^{-1}(B) \subset \mathcal{A}$ - изм.

$\nu: \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad \nu(B) := \mu(\varphi^{-1}(B))$

↳ это мера? образ меры μ при отобр. φ

$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(\sqcup B_i)) = \mu(\sqcup \varphi^{-1}(B_i)) = \sum \mu\varphi^{-1}(B_i) = \sum \nu(B_i)$

Кстати: $\nu(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} 1\, d\mu$

$f: Y \to \mathbb{R}$ - изм. (отн. $\mathcal{B}$) $\Rightarrow f\circ\varphi$ - изм. отн. $\mathfrak{A}$

$f\circ\varphi$ - изм.? $\forall a \in \mathbb{R}$ $X(f(\varphi(x)) < a)$ - изм. (лежит в $\mathfrak{A}$)

$\varphi^{-1}(\underbrace{Y(f<a)}_{\text{изм.}})$ $\varphi^{-1}(B) \subset \mathfrak{A}$

<u>Опр.</u> $w \geq 0$, - изм. на X ф-ция

$\varphi: X \to Y$, $\varphi^{-1}(B) \subset \mathfrak{A}$ - изм.

$\nu(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} w\, d\mu$ - взвешенный образ меры μ при отобр. φ

(Т) (о взвешенном образе меры, w - вес)

$\varphi: X \to Y$, $\varphi^{-1}(B) \subset \mathfrak{A}$, $w \geq 0$ - изм. на X

$\nu(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} w\, d\mu$ - взвеш. образ меры,

$f \geq 0$ - изм. на Y

Тогда $\int\limits_Y f\, d\nu = \int\limits_{\varphi^{-1}(Y)} f(\varphi(x))\, w(x)\, d\mu(x)$ ← также ф-ла верна, если f - суммм. на φ (произв.)

Док-во: 0) $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}$

л.ч. $= \nu(B)$ $\chi_B(\varphi(x)) = \begin{cases} 1, & x \in \varphi^{-1}(B) \\ 0, & x \notin \varphi^{-1}(B) \end{cases}$

$\int\limits_{\varphi^{-1}(B)} w(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(Y)} \chi_{\varphi^{-1}(B)}\, w(x)\, d\mu(x)$

(1) $\forall$ ступ. ф $f = \sum \alpha_k \chi_{B_k}$ ф-ла (*) верна

(2) $f \geq 0$ - изм

$\int f\, d\mu = \sup\{\int \rho\, d\nu,\ 0 \leq \rho \leq f\}$

↳ ступ.

Возьмем $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \ldots \leq f$ $\forall x$ $\rho_k(x) \to f$

т. Леви $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_Y \rho_k\, d\nu = \int\limits_Y f\, d\nu$

$\rho_k(\varphi(x))\, w(x) \leq \rho_{k+1}(\varphi(x))\, w(x) \leq \ldots$

$\rho_k(\varphi(x))\, w(x) \to f(\varphi(x))\, w(x)$

$$\int_Y f\,d\nu = \int_Y f_+ - \int_Y f_- = \int_{\varphi^{-1}(Y)} f_+(\varphi(x))\,w(x) - \dots$$

$$f_+(\varphi(x))\,w(x) = (f(\varphi(x))\,w(x))_+ \qquad = \int_{\varphi^{-1}(Y)} f(\varphi(x))\,w(x)\,d\mu(x)$$

Сл. в усл. теоремы

$$\forall E \in \mathcal{B} \quad \int_E f\,d\nu = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x))\,w(x)\,d\mu(x)$$

Ч. сл. $X = Y \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} \quad \varphi = id$

$$\nu(B) = \int_B w(x)\,d\mu(x) \qquad w \geq 0, \text{ изм.}$$

$$\int_B f\,d\nu = \int_B f(x)\,w(x)\,d\mu(x)$$

↳ плотность меры ν отн. меры μ

(Т) (о плотности)

$(X, \mathcal{A}, \mu) \qquad w$ - изм., ≥ 0

w - плотность ν отн. $\mu \iff$

$\iff \forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) \inf\limits_A w \leq \nu(A) \leq \mu(A) \cdot \sup\limits_A w$

<u>Док-во:</u> $\Rightarrow$ очев.

$\Leftarrow$ $w > 0 \quad e_0 = X(w = 0) \quad \nu(e_0) = 0$

$A(q^k \leq w \leq q^{k-1})$

$q \in (0,1) \qquad A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} A(q^k \leq w \leq q^{k-1})$

$$q^k \mu A_k \leq \nu(A_k) \leq q^{k-1} \mu A_k$$

$$q^k \mu A_k \leq \int_{A_k} w\,d\mu \leq q^{k-1} \mu A_k$$

$$q \int_{A_k} w\,d\mu \leq q^k \mu A_k \leq \nu(A_k) \leq \frac{1}{q} q^k \mu A_k \leq \frac{1}{q} \int_{A_k} w\,d\mu$$

$$q \int_A w\,d\mu \leq \nu(A) \leq \frac{1}{q} \int_{\mathcal{A}} w\,d\mu$$

$$q \to 1-0$$

$$\int_A w \leq \nu(A) \leq \int_A w$$

Опр Мн-во B - мн-во положительности: $\forall E \subset R$ $\mu E \geq R$
($\Rightarrow \exists B \subset A$ B-мн-во пол. $\mu B \geq \mu A$)

(Л) $A \in \mathfrak{A}$, $\mu A \geq 0 \Rightarrow \exists B \subset A$ B-мн-во пол. $\mu B \geq \mu A$

Док-во: C-мн-во ε-пол. $\forall B \subset C$ $\mu B \geq -\varepsilon$
($\varepsilon > 0$)

Утв: $\forall \varepsilon > 0$ A содерж. мн-во ε-пол.

1) Если A-мн-во ε-пол. ок

2) Если нет: $\exists B_1 \subset A$ $\mu B_1 < -\varepsilon$ $C_1 := A \setminus B_1$ $\mu C_1 > \mu A$

- если C_1-мн-во ε-пол. - то ок

- если нет: $\exists B_2 \subset C$ $\mu B_2 < -\varepsilon$ $C_2 := C_1 \setminus B_2$ $\mu C_2 \geq \mu C_1$

если бы это продолж. до беск. $B := \bigcup_i B_i$ $\mu B > -\infty$ (противр.)

A $C_1 \subset A$ мн-во 1-пол. $\mu C_1 \geq \mu A$

$C_2 \subset C_1$ мн-во $\frac{1}{2}$-пол.

. . . . . .

$C_n \subset C_{n-1}$ - мн-во $\frac{1}{n}$-пол $\mu C_n \geq \mu C_{n-1}$

$B := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ $\forall C \subset B$ $\mu C \geq 0$, т.к.: $\mu C = \frac{1}{100}$ $C \not\subset C_{101}$

$\mu B = \lim_{i \to \infty} \mu C_i \geq \mu A$

Норма в пр-ве мер: $\|\mu\| = |\mu(E_1)| + |\mu(E_2)|$ E_1-макс. пол. E_2-макс. отр.

ν μ

$\nu A = \int_A \omega d\mu$

$\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Опр. $\mu, \nu : \mathfrak{A} \to R$ - меры: $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\mu A = 0$ вып. $\nu(A) = 0$

ν-наз. абс. непр. по отн. к μ ($\nu \ll \mu$)

(Т) (Радон, Никодим)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\nu : \mathfrak{A} \to R$ μ и ν-кон. меры

ν-абс. непр. по отн. к μ

Тогда $\exists! f$-сумм. отн. μ: f-плотн. ν отн. μ

(NB) $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\nu(A) = \int_A f d\mu$

Док-во: ① Единственность:

Лемма f, g - изм. (отн. μ) $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu \Rightarrow f = g$ п.в.

Док-во: $h := f - g$ $h = 0$ п.в. ?

$\forall A \in \mathfrak{A}$ $\int_A h d\mu = 0$

? $\int_A |h| = 0$ $X = X(h \geq 0) \cup X(h < 0)$ $\int_{X(h\geq 0)} h = 0$ $\int_{X(h<0)} h = 0$

$\int_X |h| = \int h_+ + \int h_- = \int_{X(h\geq 0)} h - \int_{X(h<0)} h = 0 \Rightarrow h = 0$ п.в.

② Существование:

$P := \{h \geq 0 : h$ - изм. $\forall A$ $\int_A h d\mu \leq \nu(A)\}$

$h_1, h_2 \in P \Rightarrow \max(h_1, h_2) \in P$

$\int_A \max(h_1, h_2) = \int_{A(h_1 \geq h_2)} h_1 + \int_{A(h_1 < h_2)} h_2 \leq \nu A(h_1 \geq h_2) + \nu A(h_1 < h_2) = \nu(A)$

$\forall h_1 \ldots h_m \in P$ $\max(h_1 \ldots h_m) \in P$

$I := \sup\{h \in P \int_X h d\mu\} \leq \nu(X)$

$h_1, h_2 \ldots$ $\int_X h_i d\mu \to I$

$\widetilde{h_m} = \max(h_1 \ldots h_m)$ $\widetilde{h_1} \leq \widetilde{h_2} \leq \ldots \leq$ $\int_X \widetilde{h_i} \to I$ $\int_X h_i \leq \int_X \widetilde{h_i} \leq I$

$f := \lim_{i \to +\infty} \widetilde{h_i}$ $\int_X \widetilde{h_i} d\mu \xrightarrow[i \to +\infty]{} \int_X f d\mu$ (т. Леви)

$I = \int_X f d\mu \leq \nu(X)$ $f \in P$ $\forall A$ - изм. $\underbrace{\int_A \widetilde{h_i}}_{\nu(A)} \to \int_A f \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \mu(A)$

$\overset{?}{=}$

? $\forall A$ $\int_A f d\mu = \nu(A)$

Доп., что $\exists A$ $\int_{A_0} f d\mu < \nu(A_0)$

$\mu A_0 > 0$ $\nu(A_0) - \int_{A_0} f d\mu > a \cdot \mu(A_0)$

↳ подберем $a > 0$

Возьмем заряд φ: $\varphi(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu - a\mu(E \cap A_0)$ $\varphi(A_0) > 0$

$\nu(E) \geq \varphi(E)$

$\exists B \subset A_0$ – мн. пит. $\varphi(B) \geq \varphi(A_0) > 0$ (Тогда $\nu(B) > 0$ $\mu B > 0$ т.к. $\nu \ll \mu$)

Проверим: $f + a\chi_B \in B$

$$\forall E \int_E (f + a\chi_B)\,d\mu = \int_E f + a\mu(E \cap B) = \int_{E \setminus B} f + \int_{B \cap E} f + a\mu(E \cap B)$$

$$= \int_{E \setminus B} f + \nu(E \cap B) - \varphi(E \cap B) \leq \nu(E \setminus B) + \nu(E \cap B) - \varphi(E \cap B) =$$

$$= \nu(E) - \varphi(E \cap B) \leq \nu(E)$$

$$\int_X f + a\chi_B = \int_X f + a \cdot \mu B = I + a \cdot \mu B > I \text{ (противор.)}$$

$$\nu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \omega\,d\mu \qquad \int_A f\,d\nu = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(x))\,\omega(x)\,dx$$

$$\lambda(L(A)) = |\det A| \cdot \lambda A$$

<u>Лемма</u> $\varphi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in O$ φ – дифф. в $(\cdot)\,a$

Пусть $c > |\det \varphi'(a)|$ λ – мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\exists\, U(a)$ $\forall$ куба $Q \in U(a)$, $a \in Q$ $\lambda(\varphi(Q)) < c \cdot \lambda Q$

$\varphi(x) = \varphi(a) + L(x-a) + \bar{o}(x-a)$, где $L = \varphi'(a)$

$a + L^{-1}(\varphi(x) - \varphi(a)) = x + \bar{c}_1(x-a)$ $\bar{o}_1 = L^{-1}(\bar{o})$ $\|L^{-1}\|$

$\psi(x) = x + \bar{o}(x-a)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists B(a)$ $\forall x \in B(a)$ $|\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} |x-a|$

$U(a) :=$

$Q \subset U(a)$ $x \in Q$ $|x-a| \leq \sqrt{m} \cdot h$

куб со стороной h $|\psi(x) - x| < \varepsilon \cdot h$

$x, y \in Q$ $|\psi_i(x) - \psi_i(y)| \leq |\psi_i(x) - x_i| + |\psi_i(y) - y_i| + |x_i - y_i| \leq$

$\leq |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + |x - y| \leq (1 + 2\varepsilon) \cdot h$

$\psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$

$\lambda(\psi(Q)) \leq (1+2\varepsilon)^m \lambda Q$

$$\lambda(\varphi(Q)) \leq \underbrace{|\det L|\,(1+2\varepsilon)^m}_{\text{выберем } \varepsilon_i} \lambda Q$$

(Т) (преобр. меры Лебега при диффеоморфизме)

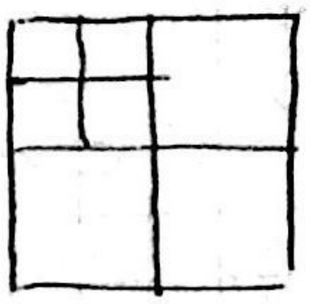
$\varphi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм

Тогда $\forall A \subset \mathfrak{M}^m$ $\lambda(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det \varphi'(x)| d\lambda(x)$

Док-во: $\nu(A) = \lambda\varphi(A)$ – мера $J_\varphi(x) := |\det \varphi'(x)|$

J_φ – из-ть $\downarrow$ отн. λ? $\forall A$ $\inf J_\varphi(x)\lambda A \le \nu(A) \le \sup J_\varphi(x)\lambda A$

Дост. д-ть правое $\frac{1}{\inf J_\varphi} = \sup J_\varphi$



проверим н-во $\forall Q$ $\nu(Q) \le \sup J_\varphi \lambda Q$

$\exists Q$ $\nu(Q) > \sup J_\varphi \lambda Q$

половинное деление: на 2^m кусков $\exists$ часть Q_1: $\lambda Q_1 \cdot C < \nu(Q_1)$

$\exists$ еще более мелкий Q_2: $\lambda Q_2 \cdot C < \nu(Q_2)$ $\quad \operatorname{diam} Q_i = \frac{\operatorname{diam} Q}{2^i}$

$a := \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} Q_i$

$\forall k$ $a \in Q_k$ $\lambda Q_k \cdot C < \nu(Q_k)$ при больших k это противоречит Лемме

$\exists C > \sup J_\varphi \ge |\det \varphi'(a)|$

$\nu(A) \le \sup\limits_{x \in A} J_\varphi(x) A$ – верно для кубов

– верно, если A – откр. мн-во (т.к. откр. мн-во предст. в виде $\cup$ кубов)

$A = \cup Q_i$

$\nu A = \sum \nu Q_i \le \sum \sup J_\varphi \lambda Q_i \le \sum \sup J_\varphi \lambda Q_i = \sup\limits_A J_\varphi \cdot \lambda A$

$\nu(A) = \inf\limits_E (\nu E) \le \inf(\sup\limits_{x \in E} J_\varphi \cdot \lambda E) \approx \sup\limits_A J_\varphi \cdot \lambda A$

$A \subset \underset{\text{откр}}{E} \subset O$ $\quad$ (E – откр $\Leftrightarrow \varphi^{-1}(E)$ – откр)

$\nu(A) = \lambda\varphi(A) = \inf\limits_{\substack{E' \\ \varphi(A) \subset E' \\ A \subset \varphi^{-1}(E')}} \{\lambda E'\}$

Док-во „$\approx$": рассм. случай $A \subset \underset{\text{откр в } Q}{E} \subset \underset{\text{замк куб}}{\bar{Q}} \subset O$ $\quad (\infty \cdot 0 = 0)$

$\lambda A = 0$ тогда „$\approx$" очев.

„$\ge$" – очев. нам нужно „$\le$" $\quad J_\varphi^{-1}(-\infty; C_1)$ – откр. мн-во

$\lambda A > 0$ $\quad \sup\limits_{x \in A} J_\varphi(x) < C$

$\sup J_\varphi < C_1 < C_2$

откр. $E_0 \supset A$ $\lambda(E_0 \setminus A) < \varepsilon$ $E := E_0 \cap J_\varphi^{-1}(-\infty; c_1)$

$\lambda(E \setminus A) < \lambda(E_0 \setminus A) < \varepsilon$

$\sup\limits_{x \in E} J_\varphi \cdot \lambda E \leq c_1(\lambda A + \varepsilon) \leq \lambda A \cdot c$

хотим такой ε

$$\boxed{c_1 \lambda A + c_1 \varepsilon \leq c_1 \lambda A + (c - c_1)\lambda A}$$

в общ. случае: разбить O на кубы

(Т) $\varphi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм

Тогда $\forall$ изм. $E \subset O$ и $f: \mathbb{R}^m \to R$ – (сумм.)

$O' := \varphi(O)$ $f \geq 0$ – изм. на O' (или сумм. на O')

Тогда $\int\limits_{O'} f(y)\,dx = \int\limits_{O} f \circ \varphi(x) |\det \varphi'(x)|\,dx$

(NB) $\forall E \subset O'$ $\int\limits_E f(y)\,d\lambda = \int\limits_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)|\,dx$

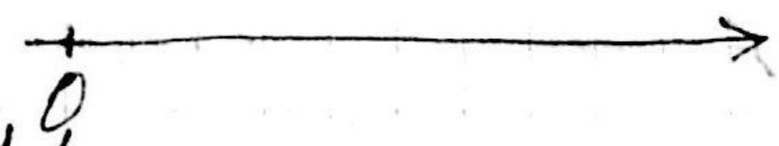
Док-во: $\nu(E) = \lambda(\varphi(E))$ – имеет вес $|\det \varphi'(x)|$ отн. λ

$\lambda(B) = \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} |\det \varphi'(x)|\,d\lambda$

(П) Рассм. $\varphi: (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi; r\sin\varphi)$

$x = r\cos\varphi$ $\varphi: (0; +\infty) \times [0, 2\pi)$

$y = r\sin\varphi$



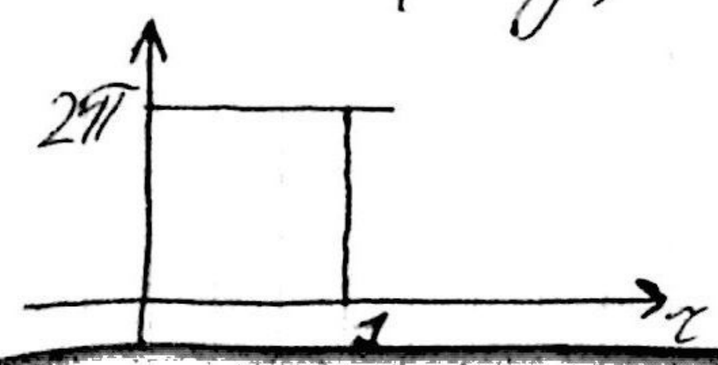
$\int\limits_A f(x)\,d\lambda_n = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(y)) |\det \varphi'(y)|\,d\lambda_m$

$\varphi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$\det \varphi' = r$

Пример: $\int \frac{d\lambda_2}{(x^2+y^2)^p} = \int\limits_{(0;1] \times [0;2\pi)} \frac{d\lambda_2 \cdot r}{r^{2p}} = \int r^{-2p+1}\,d\lambda_2 \underset{*}{=}$

т. Тонелли



$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r^{2p-1}}\,d\varphi \right) dr = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{2p-1}}\,dr = \frac{-\pi}{(p-1)r^{2p-2}} \Big|$

$$= \begin{cases} \rho = +\infty, & \rho \geq 1 \ (!) \\ \text{кон} & \rho < 1 \end{cases}$$

② $\mathbb{R}^3$ $\quad x = r\cos\varphi$ цилиндрич. коорд.

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$$|\det \varphi'| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

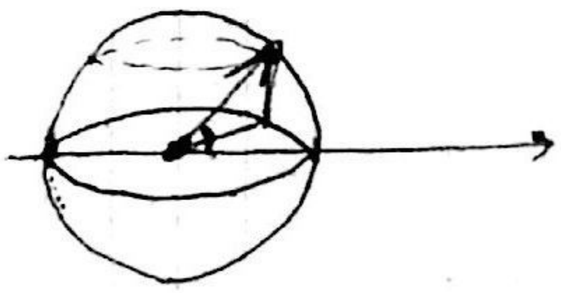
$x = r\cos\psi\cos\varphi$

$y = r\cos\psi\sin\varphi$

$z = r\sin\psi$

$$\det \varphi' = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot r\cos\psi \cdot r = r^2\cos\psi$$

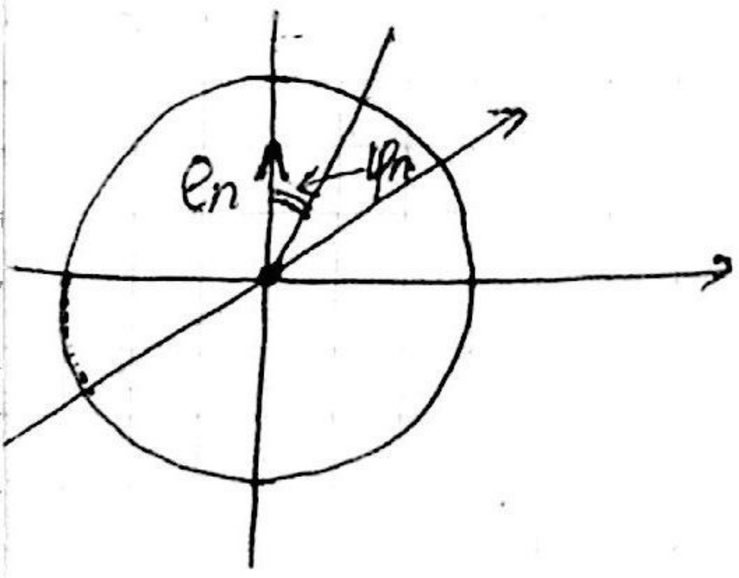


ψ - широта $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

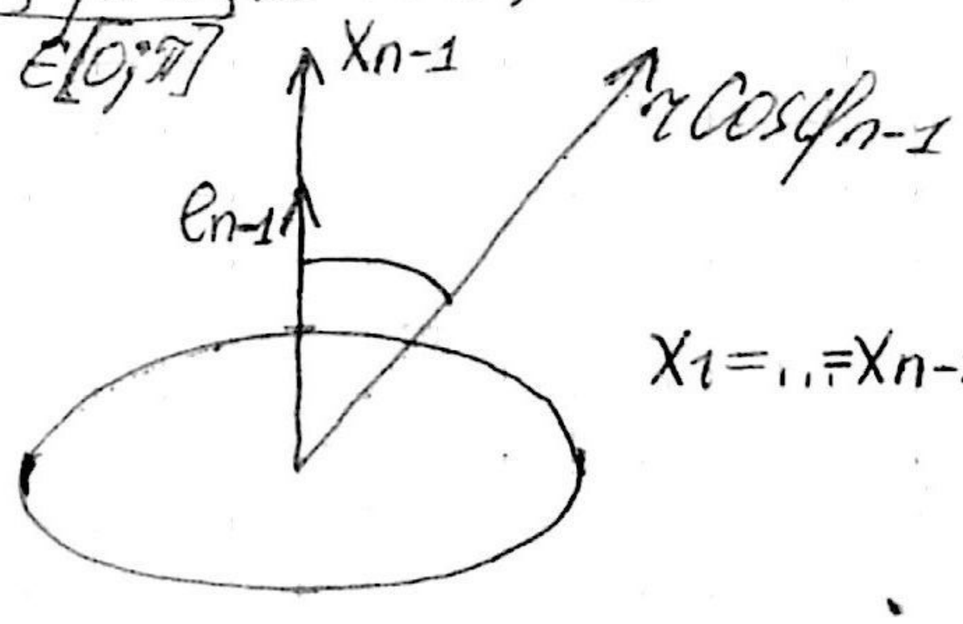
φ - долгота $[0; 2\pi]$

③ Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$

$r, \underbrace{\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}}_{\in[0;\pi]}, \ldots \varphi_1 \in [0; 2\pi]$



$x_1 = x_2 =$



$x_1 = \ldots = x_{n-2} = 0$

$x_n = r \cdot \cos\varphi_{n-1}$

$x_{n-1} = r\sin\varphi_{n-1} \cdot \cos\varphi_{n-2}$

$x_{n-2} = r\sin\varphi_{n-1} \cdot \sin\varphi_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-3}$

$\vdots$

$x_3 = r\sin\varphi_{n-1} \ldots \sin\varphi_3 \cdot \cos\varphi_2$

$x_2 = r\sin\varphi_{n-1} \ldots \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1$

$x_1 = r\sin\varphi_{n-1} \ldots \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1$

$x_n = \rho_{n-1}\cos\varphi_{n-1}$

$x_{n-1} = \rho_{n-1}\sin\varphi_{n-1}$

$x_1 \ldots x_{n-2}$ - ост. прежние $\quad \rho_{n-1} = \rho_{n-2} \cdot \cos\varphi_{n-2}$

$x_1 \ldots \underline{x_{n-2}, \rho_{n-1}}, \varphi_{n-1} \quad x_{n-2} = \rho_{n-2} \cdot \sin\varphi_{n-2}$

W_1

$x_2 = \rho_2 \cos\varphi_1$

$x_1 = \rho_2 \sin\varphi_1$

$x_3 \dots x_n$ – ост. прежними

$\varphi_1, \rho_2, x_3 \dots x_n$

тут замены...

W_2

$\rho_2 = \rho_3 \sin\varphi_2$

$x_3 = \rho_3 \cos\varphi_2$

$$\int f(x_1, \dots, x_n)\, d\lambda_n = \int f(\varphi_1, \rho_2, x_3 \dots x_n)\, \rho_2\, d\lambda_n = \int f(\varphi_1, \varphi_2, \rho_3, x_4 \dots)\, \rho_3^2 \sin\varphi_2$$

$$= \int f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \rho_4, x_5 \dots)\, \rho_4^2 \sin^2\varphi_3 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \underset{\uparrow \text{ якобиан}}{\rho_4}$$

$\rho_3 = \rho_4 \cdot \sin\varphi_3$

$x_4 = \rho_4 \cdot \cos\varphi_3$

$$= \int f(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}, r)\, r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_{n-1} \cdot (\sin\varphi_{n-2})^{n-3} \cdot \dots \cdot \sin\varphi_2$$

это якобиан сферической замены

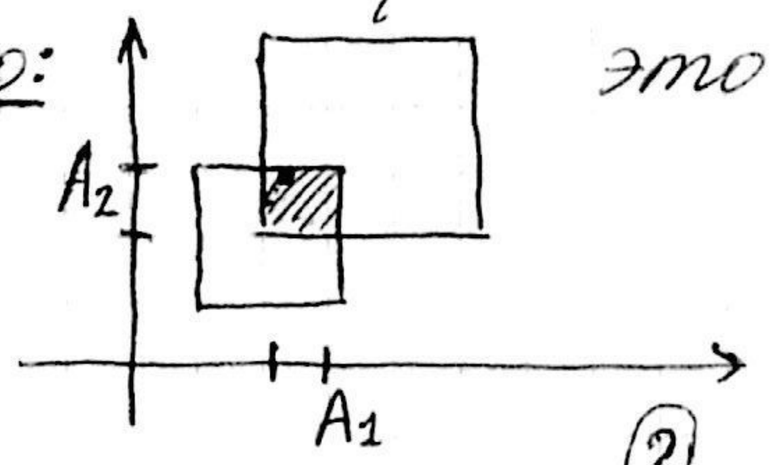
§ Произведение мер

$(X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{B}, \nu)$

<u>Лемма</u> $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – п/к

Тогда $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ – п/к

<u>Док-во:</u> это п/к обобщённых прямоугольников



Заведем на $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ меру (?) $m(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$

<u>Лемма:</u> ① m_0 – мера на п/к $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

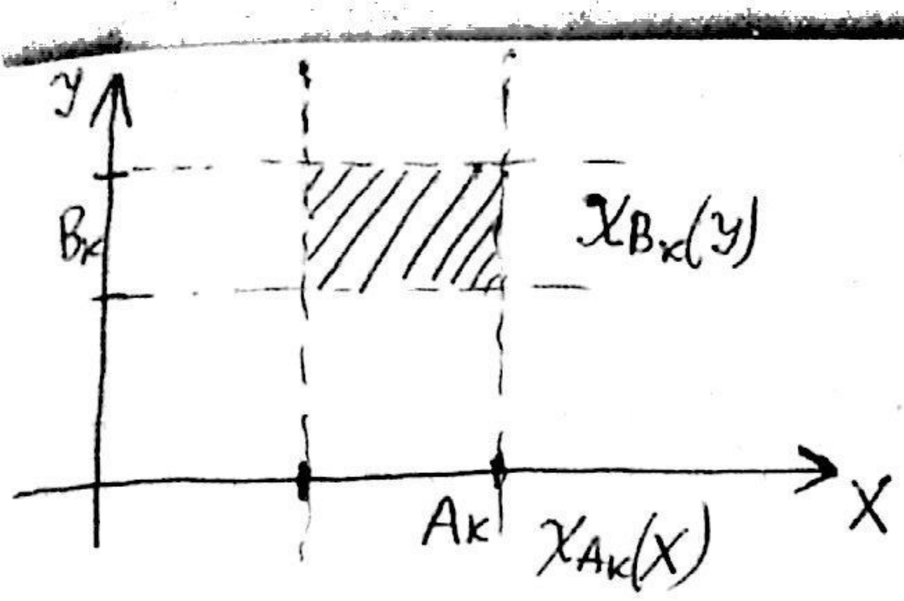
② μ, ν – σ-кон. меры $\Rightarrow m_0$ – тоже σ-кон. мера

Док-во: ① ? сч. аддит. m_0

$A \times B = \sqcup A_k \times B_k \qquad \chi_{A \times B} = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$

$?\, m_0(A \times B) = \sum m_0(A_k \times B_k) \qquad \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$

$\mu A_k \cdot \nu B_k$



произв. по мере ν

$\chi_A(x)\cdot\nu(B)=\sum\chi_{A_k}(x)\cdot\nu(B_k)$

$\int\sum\chi_{A_k}\cdot\chi_{B_k}=\sum\left(\int\chi_{A_k}\cdot\chi_{B_k}\right)$

$\mu(A)\cdot\nu(B)=\sum\mu A_k\cdot\nu B_k$

Док-во: $X=\bigcup X_k$ $\quad X_1\subset X_2\subset X_3\subset\ldots$ $\forall k\ \mu X_k<+\infty$

$Y=\bigcup Y_\ell$ $\quad Y_1\subset Y_2\subset Y_3\subset\ldots$ $\forall \ell\ \mu Y_\ell<+\infty$

$X\times Y=\bigcup\limits_{k,\ell} X_k\times Y_\ell$

<u>Опр</u> $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ $\quad\mu,\nu$ – σ-кон.

Возьмем меру m_0 и п/к $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

применим теорему о Лебеговском продолжении меры

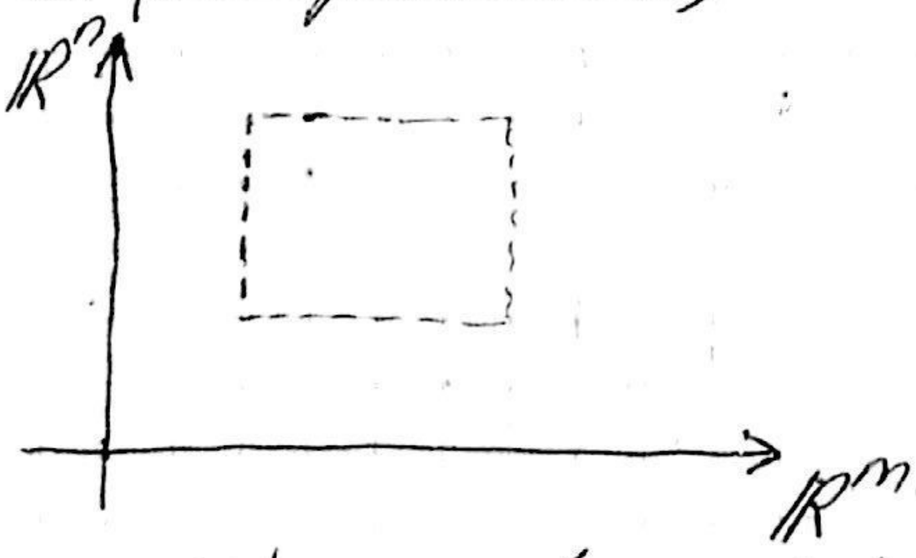
получим σ-ал. $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\supset\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ и мера m

$m(A\times B)=m_0(A\times B)=\mu A\cdot\nu B$

(часто обозначают $m=\mu\times\nu$)

$(X\times Y,\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ \mu\times\nu)$ – произведение пр-в $(X,\mathcal{A},\mu)$ $(Y,\mathcal{B},\nu)$

(T) <u>(в пр-вах $\mathbb{R}^m$)</u> $\lambda_m\times\lambda_n=\lambda_{m+n}$



$m(A)=\inf\left(\sum m_0(P_k):\ A\subset\bigcup P_k,\ P_k\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\right)$

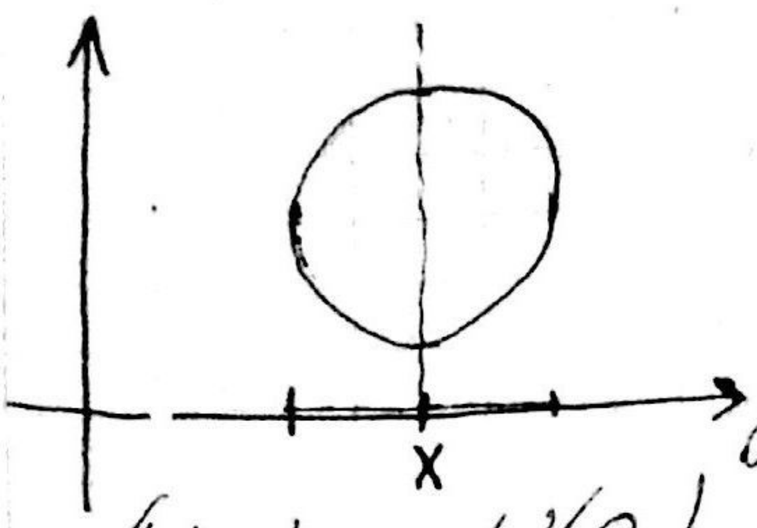
Регул. меры Лебега $\forall A$-изм $\exists$ борелевское B $A\subset B$ $m(B\setminus A)=0$

$\left(\bigcup P_i^{(1)}\right)\left(\bigcup P_i^{(i)}\right)\cap\left(\bigcup P_i^{(3)}\right)\cap\ldots$

$\bigcap\limits_j\left(\bigcup\limits_i P_{ij}\right)$

$\forall A$ изм. $A\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ $\exists P_{ij}\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Для $B_i=\bigcap\limits_j\left(\bigcup\limits_i P_{ij}\right)$ верно $A\subset B$ $m(B\setminus A)=0$



$C \subset X \times Y$

$x \in X \quad C_x = \{y \in Y \ (x,y) \in C\}$

$y \in Y \quad C^y = \{x \in X \ (x,y) \in C\}$

$(\bigcup C_k)_x = \bigcup (C_k)_x$

$(\bigcap C_k)_x = \bigcap (C_k)_x$

$(C_1 \setminus C_2)_x = (C_1)_x \setminus (C_2)_x$

<u>Теорема (принцип Кавальери)</u>

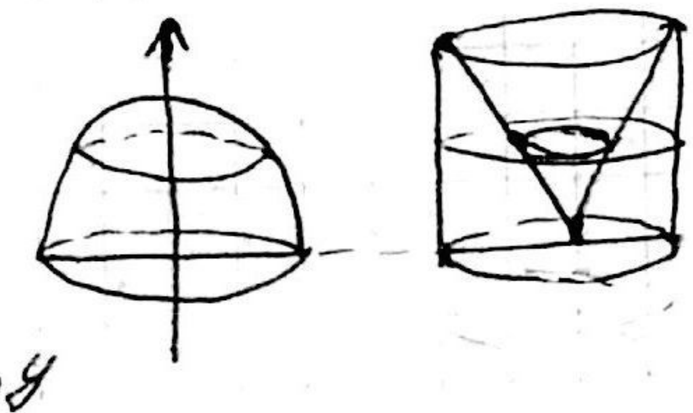
$(X, \mathcal{A}, \mu) \quad (Y, \mathcal{B}, \nu) \quad \mu, \nu$ – σ-кон.; μ, ν – полные меры

$m = \mu \times \nu \quad C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ Тогда

① C_x – изм. (ν-измеримое) при п.в. X

② $X \mapsto \nu(C_x)$ – изм.* на X

③ $m(C) = \int_X \nu(C_x)\,d\mu$

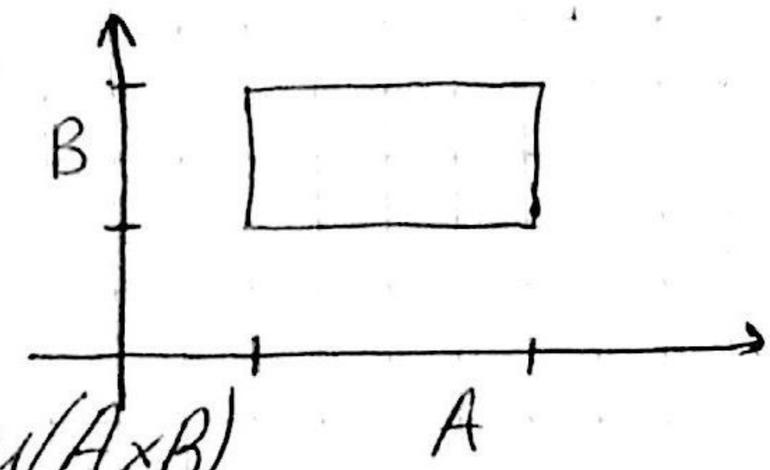


Аналогично верно для сечений C^y

$\mathcal{D}$ – класс мн-в $\in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ удовл. ①, ② и ③

1) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{D} \quad A \times B = C$

$$C_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$



① очев.

② эта ф-ция $\chi_A \nu(B)$

③ $\int_X \nu(C_x)\,d\mu = \int \chi_A(x)\nu B\,d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = \mu(A \times B)$

2) $E_1, E_2 \ldots \subset \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup E_i \in \mathcal{D}$

$(\bigcup E_i)_x = \bigcup (E_i)_x$

$(\bigcup E_i)_x = \bigsqcup (E_i)_x \quad \nu(E_x) = \nu(\bigsqcup (E_i)_x) = \sum \nu((E_i)_x)$ сумма изм. ф-ций

3) $m(C) \overset{?}{=} \int_X \nu(C_x)\,d\mu$

$\int_X \nu(E_x) = \sum \int_X \nu((E_i)_x) = \sum m E_i = mE$

$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}$ $\quad$ $\exists\, E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{D}$ $\quad E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ $\quad \forall i\ m(E_i)$ – кон.

проверим, что $(\bigcap E_i) \in \mathcal{D}$

$\forall i\ mE_i = \int_X \nu(E_{i_x})\,d\mu$ – кон. $\Rightarrow \nu(E_{i_x})$ – кон. при п.в. X $\quad (**)$

$E := \bigcap E_i \qquad E_x = \bigcap(E_{i_x}) \qquad E_{1x} \supset E_{2x} \supset E_{3x} \supset \ldots$ – изм. при п.в. X $(*)$

$(*)+(**)$: E_x изм. при п.в. X
$(*)+(**)+(***)$ $\Big\} \Rightarrow \nu(E_x)$ – кон. при п.в. X, т.к.
$\nu(E_x) = \lim\limits_{i\to+\infty} \nu(E_{i_x})$ по непр. меры сверху

и ф-ция $X \mapsto \nu(E_x)$
изм. как пр. изм ф-ций

$\nu(E_{1x}) \geq \nu(E_{2x}) \geq \ldots$

$\int_X \nu(E_x)\,d\mu = \lim\limits_{i\to+\infty} \int \nu(E_{i_x})\,d\mu = \lim m(E_i) = mE$

т. Лебега

$\nu(E_{1x})$ – сумм. мажоранта для ф-ций $\nu(E_{i_x})$

$m(A) = \inf\left(\sum m(P_i \times Q_i) : A \subset \bigcup (P_i \times Q_i)\right)$

$\forall A \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \quad \exists\, \mathcal{D}_{ij} \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$

$A \subset \bigcap_i \bigcup \mathcal{D}_{ij} \qquad m(\bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij} \setminus A) = 0$

④ $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ $\quad mE = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$\exists$ мн-во $H = \bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij}$, где $\mathcal{D}_{ij} \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$: $E \subset H$, $mH = 0$

т.е. $H \in \mathcal{D}$

при п.в. X $\quad H_x$ – изм; $\quad E_x \subset H_x$

$mH = 0 = \int_X \underbrace{\nu(H_x)}_{\geq 0}\,d\mu \Rightarrow$ ф-ция $X \mapsto \nu(H_x)$ – п.в. равна 0
$E_x \subset H_x$ $\Big\} \Rightarrow$

$0 \leq \int_X \nu(E_x) \leq \int_X \nu(H_x) = 0$

$\int_X \nu(E_x) = 0 = mE$

$\Rightarrow$ при п.в. X E_x – изм. $\nu(E_x) = 0$

⑤ E – изм. $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ $\quad E = H \setminus N$ $\quad H, N \in \mathcal{D}$
$mE < +\infty$ $\qquad H = \bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij}$ из п.п. $\qquad N$ – нулевой меры

$E_x = H_x \setminus N_x$ – изм. при п.в. X

$X \mapsto \nu(E_x) = \nu(H_x) - \underbrace{\nu(N_x)}_{=0,\ \text{п.в.}}$ – изм.

$\int\limits_X \nu(E_x) = \int\limits_X \nu(H_x) = mH = mE$

(6) E-произв изм. $E \in \mathcal{D}$

$X \times Y =$

$X = \bigsqcup X_i \quad \mu X_i < +\infty, \quad Y = \bigsqcup Y_i \quad \nu Y_i < +\infty$

$X \times Y = \bigsqcup\limits_{ij} X_i \times Y_j$

$E = \bigsqcup E_{ij} \quad E_{ij} = E \cap (X_i \times Y_j)$

$E_x = \bigsqcup E_{ij_x}$

$\nu(E_x) = \sum \nu(E_{ij_x})$

$\underbrace{\int \nu(E_x)}_{\geq 0} = \sum \int \nu(E_{ij_x}) = \sum m E_{ij} = mE$

(NB) В д-ве изм. и т.д. $\nu(E_x)$ исп. только полнота меры ν

<u>Следствие</u>: $E \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $\quad P_1$-проекция E „на X" $=$

$= \{x \in X \ \exists y \ (x,y) \in E\}$

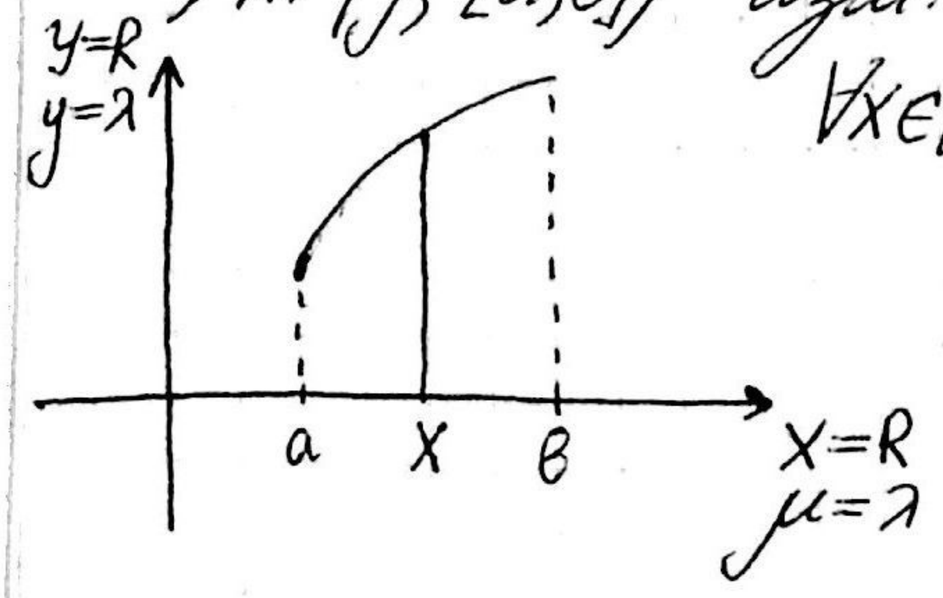
Если P_1-изм. в X, то $mE = \int\limits_{P_1} \nu(E_x)\,d\mu$ (на $X \setminus P_1$ $\nu(E_x) \equiv 0$)

(NB) E-изм. $\not\Rightarrow$ P_1-изм.

<u>Следствие</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непр.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda$

$\Rightarrow \Pi\Gamma(f, [a,b])$ - изм. в $\mathbb{R}^2$



$\forall x \in [a;b] \quad \Pi\Gamma_x = [0; f(x)]$

$\nu(\Pi\Gamma_x) = f(x)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int\limits_{[a;b]} \nu(\Pi\Gamma_x)\,d\mu = \int\limits_{[a,b]} f\,d\lambda$

$f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X \quad f_x(y) := f(x,y) : Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall y \in Y \quad f^y(x) := f(x,y) : X \to \overline{\mathbb{R}}$

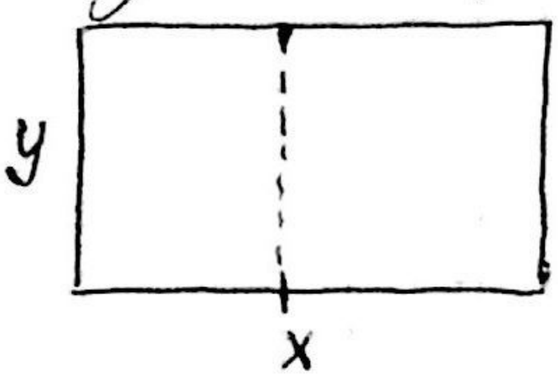
(T) (Тонелли)

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ μ, ν – σ-кон. полные меры

$m = \mu \times \nu$ – мера на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, ≥ 0 – m-измеримая

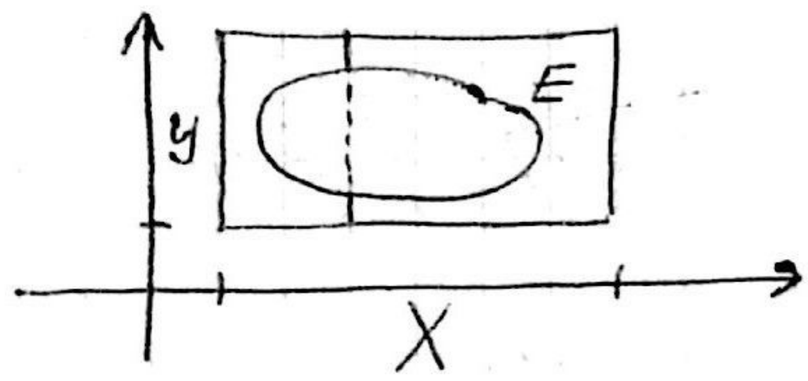
Тогда: (1) при п.в. x f_x – ν-изм. ф-ция (1') f^y – изм по μ п.в. x



(2) $x \mapsto \varphi(x) := \int_Y f_x(y)\, d\nu(y)$ – эта ф-ция μ-изм. *

(3) $\int_{X \times Y} f\, dm = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu$ (3')

(3') $\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$



1) $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ $f = \chi_E$

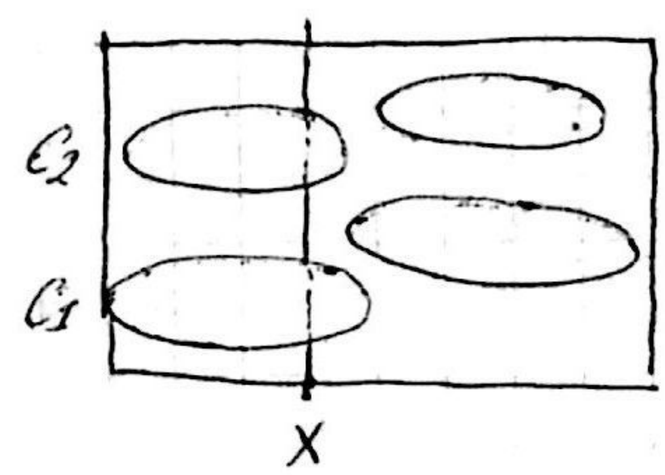
$f_x(y) = \chi_{(E_x)}(y)$

E_x – изм. при п.в. $x \iff \chi_{E_x}$ – изм. при п.в. x

$\varphi(x) := \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x}\, d\nu = \nu(E_x)$

$\varphi(x)$ – это ф-ция $x \mapsto \nu(E_x)$ – изм. по принципу Кавальери

$\int_X \varphi(x)\, d\mu = \int_X \nu(E_x)\, d\mu = mE = \int_{X \times Y} f$



2) f – ступ. $f = \sum_{\text{кон.}} c_k \cdot \chi_{E_k}$ E_k – dis

$f_x = \sum c_k \chi_{(E_k)_x}$ – изм. при п.в. x

$\int_Y f_x = \sum c_k \int_Y \chi_{(E_k)_x}\, d\nu$

$\int_X \varphi(x)\, d\mu = \sum c_k \int_X \left(\int_Y \chi_{(E_k)_x}\, d\nu \right) d\mu = \sum c_k \cdot mE_k = \int_{X \times Y} f$

3) f – изм., ≥ 0 $f = \lim g_n$, где все g_i – ступ, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$

$\forall x$ $f_x = \lim_{n \to +\infty} (g_n)_x$ $\Rightarrow$ f_x – изм. как предел изм ф-ций при п.в. x

$\varphi(x) = \int_Y f_x\, d\nu(y) \underset{\text{Т. Леви}}{\overset{?}{=}} \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \int_Y (g_n)_x\, d\nu(y)}_{\text{при фикс. } x \text{ это вар возрастает по } n\ (*)}$ – изм. ф-ция от x как предел изм. при п.в. x

$$\int_X \varphi(x) \underset{(*)\ \text{т.Леви}}{=} \lim \int_X \left(\int_Y (g_n)_x \, d\nu(y)\right) d\mu(x) \overset{п.3}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{X\times Y} g_n \, dm \underset{\text{т.Леви}}{=} \int_{X\times Y} f \, dm$$

$\{g_n\}$ возр. $g_n \to f$

<u>Следствие</u> $C \subset X\times Y$ - m-изм.

$P_1(C)$ - проекция на X - μ-изм.

$f: X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, ≥ 0 изм.

$$\int_C f\,dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x)$$

<u>Док-во</u>: очев. $\int_C f\,dm = \int_{X\times Y} f\cdot\chi_C\,dm = \int_X \left(\int_Y f\cdot\chi_C\,d\nu\right) d\mu =$

$$= \int_{P_1}\left(\int_Y f\cdot(\chi_C)_x\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_{P_1}\int_{C_x} f_x \cdot \underbrace{\chi_{C_x}}_{1} \equiv ☺$$

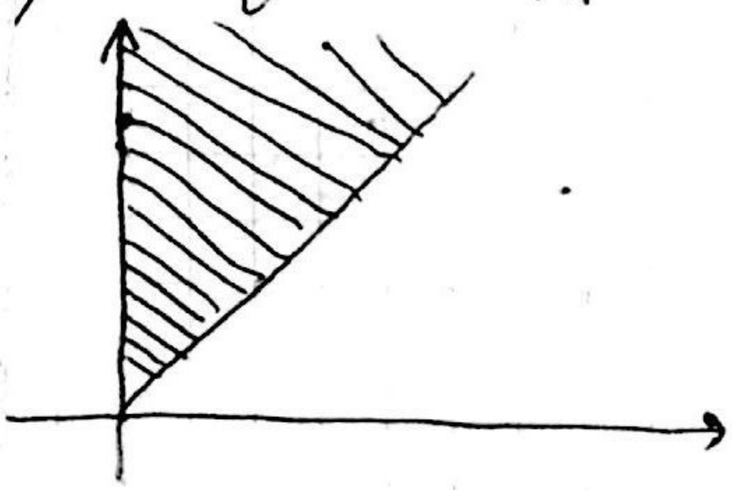
<u>Пример</u> $s,t>0$ $B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$

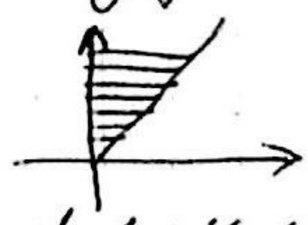
$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,dx,\ t>0$$

Тогда $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\cdot\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \cdot \left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e^{-y}\,dy\right) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}\cdot e^{-y}\,dy\right)dx =$$

$$\underset{y=u-x}{=} \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_x^{+\infty}(u-x)^{t-1}e^{-u+x}\,du\right)dx = \iint x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}\,d\lambda_2(u,x) =$$





$$= \int_0^{+\infty} du \left(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}\,dx\right) =$$

$$\left[x = u\cdot \underset{\text{нов.пер.}}{z}\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} du\, e^{-u}\int_0^1 x^{s-1+t-1+1} z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz = \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}\cdot e^{-u}\cdot B(s,t)\,du$$

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(t) = \Gamma(s+t)\cdot B(s,t)$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \Gamma(1)\cdot B(s;1-s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-s}\,dx = \frac{\pi}{\sin\pi s}$$

$s+t=1 \Rightarrow t=1-s$

(T) (Фубини)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ μ, ν – σ-кон., полные

$m = \mu \otimes \nu$ $f: X \times Y \to \overline{R}$ – m-сумм.

Тогда: (1) f_x – сумм. при п.в. x; f^y – сумм. при п.в. y

(2) $x \mapsto \varphi(x) := \int_Y f_x \, d\nu$ – сумм.* на X (*) – не при всех x определена

$y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y \, d\mu$ – сумм* на Y

(3) $\int_{X \times Y} f \, dm = \int_X \varphi(x) \, d\mu = \int_Y \psi(y) \, d\nu$

$\int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Док-во: $f = f_+ - f_-$ $\int_{X \times Y} f_\pm \, dm$ – кон. $\int_{X \times Y} f = \int_{X \times Y} f_+ - \int_{X \times Y} f_-$

1) $\int_Y (f_x)_+$, $\int_Y (f_x)_-$ – кон. п.в. x

$\int_{X \times Y} f_+ = \int_X \left(\int_Y (f_x)_+ \, d\nu \right) d\mu$ – кон. $\Rightarrow \int_Y (f_x)_+ \, d\nu$ – кон. при п.в. x

2) $x \mapsto \varphi(x) := \int_Y f_x \, d\nu$ – сумм* на X

$\varphi(x) = \int_Y (f_x)_+ - \int_Y (f_x)_-$

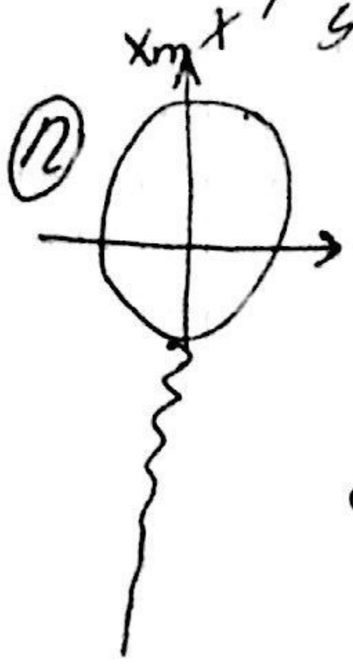
$\int_X |\varphi(x)| \, d\mu = \int_X \left| \int_Y f_{x+} - \int_Y f_{x-} \right| d\mu \le \int_X \left| \int_Y f_{x+} \, d\nu \right| + \left| \int_Y f_{x-} \, d\nu \right| d\mu =$

$= \int_X \int_Y f_{x+} + \int_X \int_Y f_{x-}$ – кон.

3) $\int_{X \times Y} f \, dm = \int_{X \times Y} f_+ - \int_{X \times Y} f_- = \int_X \int_Y f_+ - \int_X \int_Y f_- \; (=) \; \left(= \int_X \int_Y f_{x+} - \int_X \int_Y f_{x-} \right)$

$(=) \int_X \left(\int_Y f_{x+} - \int_Y f_{x-} \right) = \int_X \int_Y f_x$

(12)



$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \le r^2$ (?) Объём $\lambda_m(B(0,r))$

$d_m = \lambda_m(B(0,1))$ $\lambda_m(B(0,r)) = d_m \cdot r^m$

$d_m = \int_{B(0,1)} 1 \cdot d\lambda_m = \int_{[-1,1]} (\ldots) \underset{d\lambda_1(x_m)}{\underset{\parallel}{dx_m}} = \int_{[-1;1]} \left(\int_{B(0,\sqrt{r^2 - x_m^2})} 1 \cdot d\lambda_m \right) \underset{d\lambda_1(x_m)}{\underset{\parallel}{dx_m}} =$

шар в $\mathbb{R}^{m-1}$

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{m-1}^2 \le r^2 - x_m^2$

$= \int_{-1}^{1} d_{m-1} \cdot (1 - x_m^2)^{\frac{m-1}{2}} \, dx_m =$

$$= 2 d_{m-1} \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} dx \underset{x=\sqrt{t}}{=} d_{m-1} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} d_{m-1}$$

$$dx = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$d_m = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\cdot\cancel{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\cancel{\Gamma(2)}} \underset{2}{\overset{d_1}{\shortparallel}}$$

$$= \left(\sqrt{\pi}\right)^m \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \qquad m=1 \quad \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad m=3 \quad \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\pi$$

Т (Фату)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ f_n - изм. ≥ 0 $f_n \to f$ п.в.

$\exists C > 0$ $\forall n$ $\int f_n d\mu \leq C$

Тогда $\int_X f d\mu \leq C$

Д-во: $g_n(x) = \inf(f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), \ldots)$

$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \ldots$ $\lim g_n = \underline{\lim} f_n = f$

$\int g_n \leq \int f_n \leq C$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \leq C$

$\int f$

$$f_n = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

$X = [0,1]$ $f_n \to f \equiv 0$

$\int f = 0$

Следствие: f_n - изм. $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$

$\exists C$ $\forall n$ $\int f_n \leq C$

Тогда $\int_X f d\mu \leq C$

Д-во: $f_{n_k} \to f$ п.в

Следствие (антипедагогический вариант)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $f_n \geq 0$-изм. Тогда

$$\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$$

Док-во: возьмем g_n... как в д-ве т. Фату

$\lim g_n = \underline{\lim} f_n \not\equiv f$

$\int g_n \leq \int f_n$ $\quad n_k: \int f_{n_k} \to \underline{\lim} f_n$

$$\int g_{n_k} \to \int_X \underline{\lim} f_n$$

(8) Функции распределения

Опр. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $h: X \to \mathbb{R}$ - такая ф-ция, что $\forall t \in \mathbb{R}$ $\mu X(h<t)$ - кон.

Ф-ция распределения (для ф-ции h) $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $H(t) := \mu X(h<t)$

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \ )$ $h: X \to \mathbb{R}$ - изм.

$\exists$ мера в $\nu = h(\mu)$ $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$ $A \in \mathcal{B}$ $\quad X(h<t)$ - изм.

$\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} 1 \, d\mu$ $\quad$ Факт: по опр $\nu(A)$ задано на лучах $(-\infty; t)$ $(t; +\infty)$

$H(t)$ - возр. μ_H $\mu_H[a;b) = H(b-0) - H(a-0)$

прод. этой меры с п/к ячеек даёт меру... μ_H - зад. на $\mathcal{B}$

Лемма $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

h - изм., п.в. кон. и $\forall t$ $\mu X(h<t)$ - кон.

$\nu = h(\mu)$ H - ф-ция распр.

μ_H - мера Борля-Стилтьеса

Тогда $\mu_H = \nu$ на $\mathcal{B}$

Док-во: $[a;b)$ $\mu_H[a,b) = H(b-0) - H(a-0)$ $=$

$H(b - \frac{1}{n}) = \mu X(h < b - \frac{1}{n})$

$H(b-0) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu X(h < b - \frac{1}{n}) = \mu X(h<b)$ (по непр. меры слева)

$\bigcup\limits_n X(h < b - \frac{1}{n}) = X(h<b)$

$= H(b) - H(a) = \mu X(h<b) - \mu X(h<a) = \mu X(a \leq h < b) = \mu h^{-1}([a;b)) =$

$\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} 1 \, d\mu$ $\quad = \nu([a;b))$

(Т) (попаде)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ≥ 0 - изм. по Борелю (отн. $\mathcal{B}$) $\{x: f(x)<t\}$ - борелевское при всех t

$(X,\mathcal{A},\mu)$ $h: X\to\overline{\mathbb{R}}$ - изм, п.в. кон, имеет ф.р. H

$\nu=h(\mu)$. Тогда

$$\int_X f(h(x))\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu_H(t)$$

(NB) $f\geq 0 \longleftrightarrow f$ - сумм. отн. μ_H, изм. по Борелю

<u>Док-во:</u> $\nu(A)=\int_{h^{-1}(A)} 1\,d\mu$ очев. по т. о замене перем.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ $(Y,\mathcal{B},\nu)$, $\nu:=h(\nu)$, $h: X\to Y$ $\int_X f(h(x))\,d\mu(x)=\int_Y f(y)\,d\nu$

или даже $\nu(A)=\int_{h^{-1}(A)} w\,d\mu$

(П) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, возр., дифф. C^1 μ_g

$f\geq 0$, изм. $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu_g(t)=\int_{\mathbb{R}} f(t)g'(t)\,dt$

$\mu_g[a,b)=g(b)-g(a)=\int_a^b g'(t)\,dt$

$\int_X f(h(x))w(x)\,d\mu(x)=\int_Y f(t)\,d\nu$

$\nu(A)=\int_{h^{-1}(A)} w(x)\,d\mu(x)$ $\quad X=Y=\mathbb{R}$

$h=id$ $\quad w=g'$

$\nu\leftrightarrow\mu_g$ $\quad \mu\leftrightarrow\lambda$

<u>Пример</u> $f\geq 0$ - изм. по Борелю

$\int_{\mathbb{R}^m} f(\|x\|)\,d\lambda_m=$

$\int_X f(h(x))\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu_H(t)=\int_{\mathbb{R}} f(t)\cdot d_m\cdot m t^{m-1}\,dt=m d_m\int_{\mathbb{R}} f(t)t^{m-1}\,dt$

$h(x)=\|x\|$

$H(t)=\lambda_m\{x: \|x\|<t\}=\lambda_m B(0,t)=d_m\cdot t^m$

$\mathbb{R}^m\setminus\{0\}=(0;+\infty)\times S^m$

<u>Упр.</u> Упростить вер. $\int_{[0;1]^m} f(\max(x_1\ldots x_n))\,d\lambda_m$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Глава Ряды Фурье

§1 Пространства L_p

1° Интег. компл.-знач. ф-ций

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ а) f-изм., если $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ - изм.

б) $\int\limits_X f = \int\limits_X \operatorname{Re} f + i \int\limits_X \operatorname{Im} f$

f-сумм. $\operatorname{Re} f$-сумм., $\operatorname{Im} f$-сумм.

Упр. $\left|\int\limits_X f\, d\mu\right| \leq \int\limits_X |f|\, d\mu$

2° Н-во Гёльдера $(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f, g: X \to \mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$ - изм., п.в. кон $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Тогда $\int\limits_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int\limits_X |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_X |g|^q\right)^{1/q}$

Док-во: по н-ву для ступ. ф-ций + т. Леви

Н-во Минковского $p \geq 1$

$$\left(\int\limits_X |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g|^p\right)^{1/p}$$

$f \to \left(\int\limits_X |f|^p\right)^{1/p} = \|f\|$, тогда $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Глава Поверхностные интегралы

§ Инт. по мере на 2-мерной пов-ти в $\mathbb{R}^3$

$l = \int\limits_a^b |\gamma'|\, dt$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\int f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dt$

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$

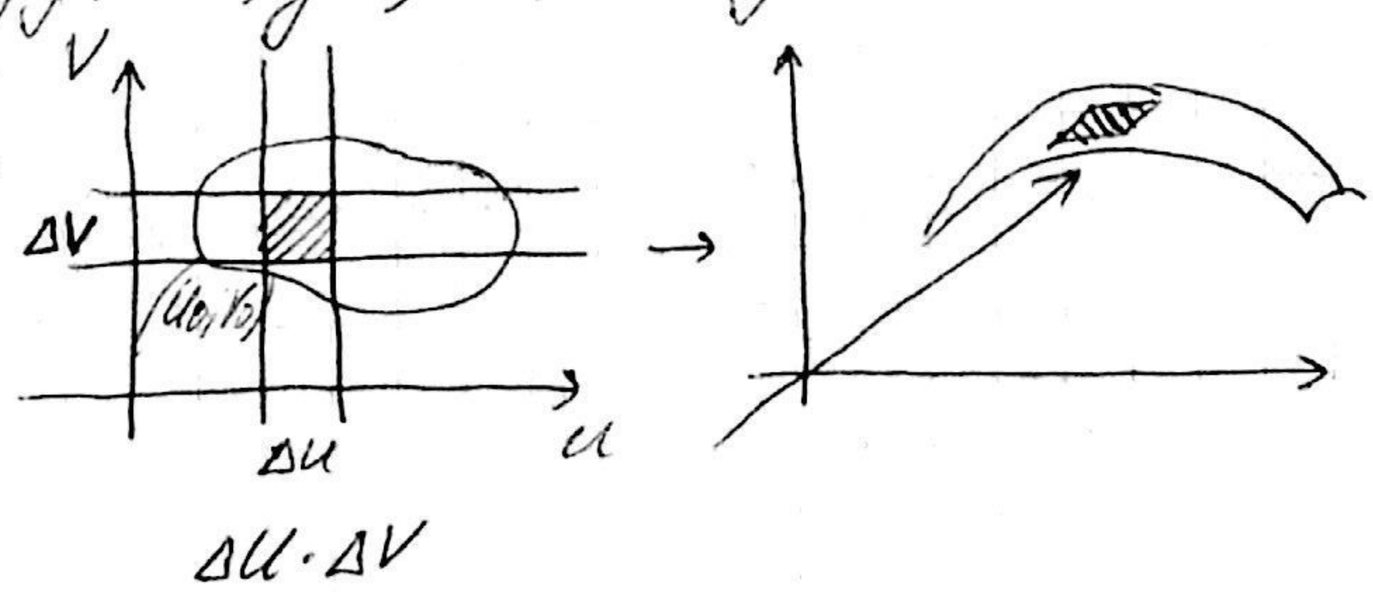
$\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

φ - невыр. м-ция

φ'_u φ'_v

$\varphi'_u \Delta u + \varphi'_v \Delta v$

$S(\varphi'_u \Delta u, \varphi'_v \Delta v) = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot \Delta u \Delta v$



Опр. M - простая гл. 2-мерн. пов. в $\mathbb{R}^3$

$\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ - гл. парам.

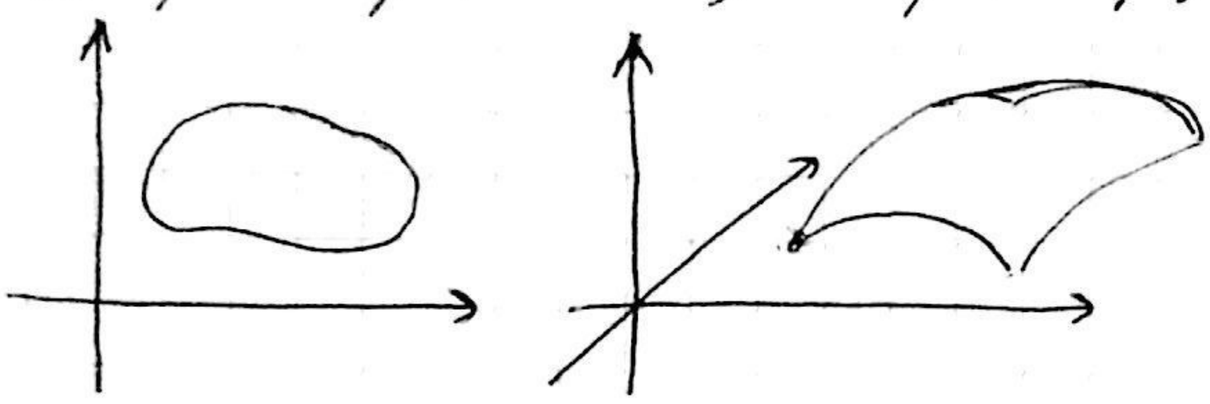
$A \subset M$ - изм. (по Лебегу), если изм. $\varphi^{-1}(A) (\in \mathfrak{M}^2)$

$A \in \mathfrak{A}_M$

↳ σ-алг изм. мн-в

Мера на $\mathfrak{A}_M$: $\sigma(A) = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du \, dv$

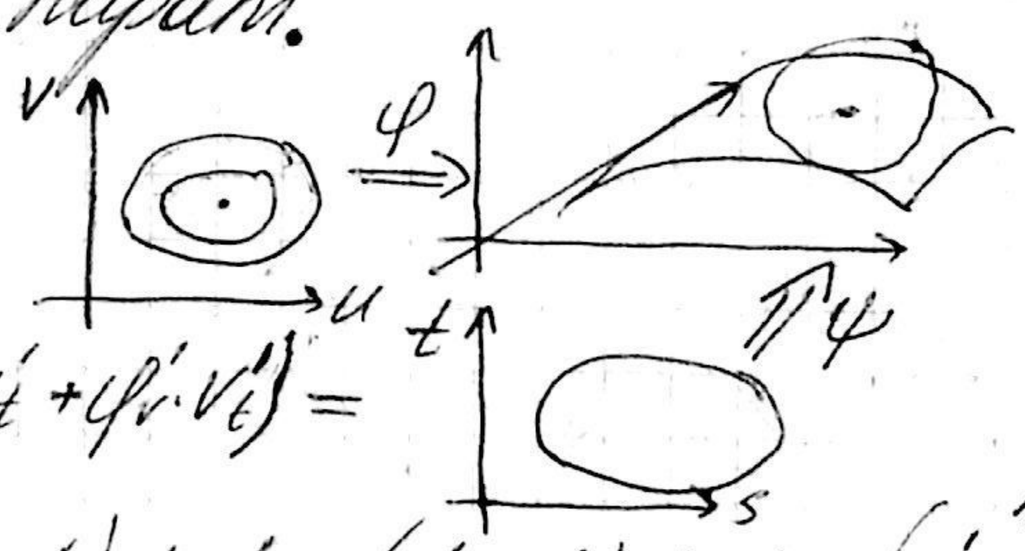
① φ - непр. $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ $\varphi^{-1}(\text{откр.}) = \text{откр.}$, т.е. изм.



окр. точки и любое откр. мн-во - изм. $\Rightarrow$ замк. мн-во изм.
комп. мн-во изм.

② Эти опр. не зависят от парам.

$u(s,t)$, $v(s,t)$ $\quad \psi(s,t) = \varphi(u(s,t), v(s,t))$



$$\psi'_s \times \psi'_t = (\underbrace{\varphi'_u}_{\text{в-р}} \cdot \underbrace{u'_s}_{\text{скалер}} + \varphi'_v \cdot v'_s) \times (\varphi'_u \cdot u'_t + \varphi'_v \cdot v'_t) =$$

$$= (\varphi'_u \times \varphi'_u) u'_s u'_t + (\varphi'_u \cdot \varphi'_v) u'_s \cdot v'_t - (\varphi'_u \cdot \varphi'_v) v'_s u'_t + (\varphi'_u \times \varphi'_v) =$$

$$= (\varphi'_u \times \varphi'_v) \cdot \det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{pmatrix}$$

$$|\psi'_s \times \psi'_t| = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot J$$

$$\sigma(A) = \iint\limits_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du \, dv =$$

$$= \iint\limits_{\psi^{-1}(A)} |\psi'_s \times \psi'_t| \, ds \, dt =$$

$$= \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} \int |\varphi'_u \times \varphi'_v| \underbrace{J J_1}_{=1} \, du \, dv$$

Мера в M с весом $|\varphi'_u \times \varphi'_v|$ - взвеш. образ меры Лебега в $\mathbb{R}^2$

f - изм. на M $\quad \int\limits_A f \, d\sigma = \iint\limits_{\varphi^{-1}(A)} f \circ \varphi \cdot |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du \, dv$

$\Updownarrow$

$f \circ \varphi$ $\quad f(\varphi(u,v))$ - изм. в $\mathbb{R}^2$

$\{x \in M \mid f(x) < a\}$

$\{(u,v) \in \Omega \mid f(\varphi(u,v)) < a\}$

$$\iint_A f\,d\sigma = \iint_{\varphi^{-1}(A)} f\circ\varphi \underbrace{|\varphi'_u \times \varphi'_v|}_{\sqrt{EG-F^2}}\,du\,dv$$ → инт. первого рода от f по мере Лебега на пов. M

$$\iint_A f(x,y,z)$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u|\cdot|\varphi'_v|\cdot \sin(\varphi'_u;\varphi'_v) \qquad \cos(\varphi'_u;\varphi'_v) = \frac{\langle \varphi'_u, \varphi'_v\rangle}{|\varphi'_u|\cdot|\varphi'_v|}$$

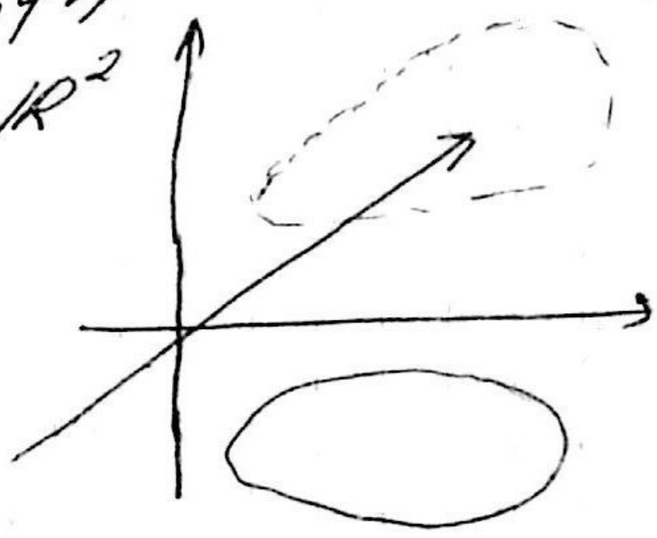
$$E = |\varphi'_u|^2 = (\varphi_{1u})^2 + (\varphi_{2u})^2 + (\varphi_{3u})^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$$

$$G = |\varphi'_v|^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$$

$$F = \langle \varphi'_u; \varphi'_v\rangle = x'_u\cdot x'_v + y'_u\cdot y'_v + z'_u\cdot z'_v$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{|\varphi'_u|^2|\varphi'_v|^2 - |\varphi'_u|^2|\varphi'_v|^2\cos^2(\varphi'_u,\varphi'_v)}$$

Ч.сл. M - график ф-ции над $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



$\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$

$$\varphi'_x: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \qquad \varphi'_y: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 0 & 1 \\ k & f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -i f'_x + j\cdot(-f'_y) + k\cdot 1 \qquad \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}$$

$$\iint_{\Gamma_f} k\,d\sigma = \iint_\Omega f(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dx\,dy$$

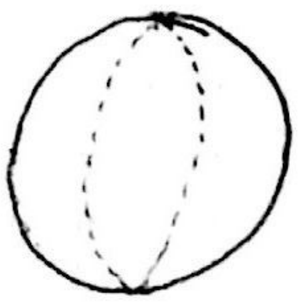
$$\sigma(\Gamma_f(\Omega)) = \iint_\Omega \sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}\,dx\,dy$$

<u>Опр.</u> $M \subset \mathbb{R}^3$ - наз. кус.-гл., если M предст. собой объед. кон. числа гладких пов., кон. числа простых гл. дуг и кон. числа точек

дизъ.

$\sigma = 0$

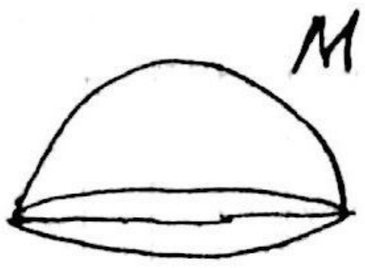
$$\sigma(A) = \sum \sigma(A \cap M_i)$$



$(\varphi;\psi)$

$\varphi \in (0; 2\pi)$

$\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



M

$m_1 \quad m_2 \quad m_3$

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$x_c = \frac{\iint_M x\,d\sigma}{\iint_M d\sigma}$$

$x = \cos\varphi\cdot\cos\psi$

$y = \sin\varphi\cdot\cos\psi$

$z = \sin\psi$

$$\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cdot\cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \quad E=\cos^2\psi \quad G=1 \quad F=0$$

$$\iint_M d\sigma = \iint_{\substack{\varphi\in[0,2\pi) \\ \psi\in[0,\frac{\pi}{2})}} \cos\psi\, d\varphi\, d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cos\psi = 2\pi$$

$$\iint_M x\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \cos\varphi\, d\psi = 0$$

$$\iint_M z\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin\psi = 2\pi\cdot\frac{-\cos 2\psi}{4}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} =$$

$$z_c = \frac{2\pi\frac{1}{2}}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

4° Пр-во L_p $1\le p<+\infty$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ $L^p(X)$, $L^p(X,\mu)$

пр-во с мерой

$\{f: X\to\overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}})$ - изм. $\int_X |f|^p$ - кон. $\}$ - лин. пр-во в силу н-ва Минковского

$f \to \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ - удовл. н-ву Δ $\int \chi_{\{a\}}^p = 0$

Отн $\underset{п.в.}{=}$ отождествим ф-ции, α равны п.в.

Рез-т этого $= L^p$

5° L^∞ $L^\infty(X,\mu)$

Опр. $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ Существенный супремум $\operatorname{ess\,sup} f$ (vrai sup)

$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{M\in\overline{\mathbb{R}}\ f(x)\le M$ при п.в. $x\}$

1. $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup_X f = S$
2. $f(x)\le \operatorname{ess\,sup} f$ при п.в. x
3. f - измер. на X g - изм. огр. на X $\operatorname{ess\,sup}|g|<+\infty$

Тогда $\left|\int_X fg\,d\mu\right| \le \operatorname{ess\,sup}|g|\cdot\int_X |f|\,d\mu$

Д-во: 1. Очев., т.к. $\sup f$ - изм. в.г.

2. $S+\frac{1}{n}$ - изм. в.г, т.е $f(x)\le S+\frac{1}{n}$ при п.в. x

для всех $n \in \mathbb{N}$ сразу верно $f(x) \leq S + \frac{1}{n}$ при п.в. x

Если $f(x) \leq S + \frac{1}{n}$ для всех n сразу

$f(x) \leq S$

③ Следует из 2 „поправ. g" $|\hat{g}(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}|\hat{g}|$ при п.в. x

$\left|\int_X f g \, d\mu\right| = \left|\int f \hat{g} \, d\mu\right| \leq \operatorname{ess\,sup}|\hat{g}| \cdot \int |f|$

$L^\infty(X, \mu)$ – лин. норм. пр-во

сост. из ф-ций $f: X \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}})$

- изм.
- сущ. огр. $\operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty$
- отожд. ф-ции, кот. совп. почти везде
- очевидно, это лин. пр-во

$\operatorname{ess\,sup}(f+g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$

$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$

н-во Гёльдера: $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p \to 1$

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

$f \in L^p(X, \mu)$

$1 \leq p \leq +\infty$

Т $(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \mu X < +\infty$

① $1 \leq s < r < +\infty \Rightarrow L^r \subset L^s$

② $\|f\|_s \leq (\mu X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \|f\|_r$

NB 1) $L^\infty \subset L^p \quad 1 \leq p < +\infty$ очев.

2) значок $\|f\|_p$ опр. $\forall$ изм. f

<u>Док-во:</u> ① следует из ②

② $\frac{r}{s} = p > 1 \quad q = \frac{r}{r-s} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$\|f\|^s = \int_X |f|^s = \int_X |f| \cdot 1 \underset{\text{Гельдера}}{\leq} \left(\int |f|^{s \cdot \frac{r}{s}}\right)^{\frac{s}{r}} \left(\int 1^{\frac{r}{r-s}}\right)^{\frac{r-s}{r}}$

при p, q

$= \|f\|_r^s (\mu X)^{1 - \frac{s}{r}}$

<u>Сл.</u> f_n, f – изм. на X

$f_n \xrightarrow[L^r]{} f$ (т.е $\|f_n - f\|_r \to 0$) $\mu X < +\infty$

Тогда $\forall s$ $1 \le s < r$ $f_n \xrightarrow[L^s]{} f$

X $\in L$ - лин. норм. пр-во

x_n - фунд. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N, m > N$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$x_n \to x \Rightarrow x_n$ - фунд. $\|x_n - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$

L-полное, если $\forall$ фунд. x_n $\exists \lim x_n = x \in X$

$\mathbb{R}$-полное

$C(K)$ K-компакт $C(K)$-мн-во непр. ф-ций: $K \to \mathbb{R}$

$\|f\| = \max|f|$ - норма

Утв. $C(K)$-полное пр-во

$f_1, f_2, \ldots \in C(K) \Rightarrow \forall x \in K$ $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists f \in C(K)$ $f_n \to f$

fix x: $|f_k(x) - f_n(x)| \le \|f_k(x) - f_m(x)\| = \max\limits_{x \in K} |f_k(x) - f_m(x)|$

$\Rightarrow f_k(x)$ - фунд в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x) =: f(x)$

$I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha) dx$

① Первообр. f-равн. огр. $F(x, \alpha)$ $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx$

② g-монот. (по x, при фикс. α) $\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ $\alpha \in A$

Т $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $L^p(X)$-полное $(1 \le p < +\infty)$

<u>Док-во</u>: f_n - фунд. посл. в L^p

① Строим кандидата на роль предела

$\varepsilon := \frac{1}{2}$ $\exists N_1$ $\forall n, m > N_1$ $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$

$\varepsilon := \frac{1}{4}$ $\exists N_2 > N_1$ $\forall n, m > N_2$ $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{4}$

$\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ $\exists N_k > N_{k-1}$ $\forall n, m > N_k$ $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^k}$

Дано, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p < 1$

$S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)| \in [0; +\infty]$

$$\|S_N\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{N} \dots\right\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p < 1$$

т.е. $\int_X |S_N|^p d\mu(x) < 1$ при всех X $S_N(x) \to S(x)$

$\Downarrow$ т. Фату

$\int_X |S(x)|^p d\mu(x) < 1 \Rightarrow S(x)$ п.в. конечна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ряд $\sum f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)$ абс. сх. при п.в. X

$$f_N(x) = f_{N_1}(x) + \sum f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)$$

п.в. X $f(x) = \lim\limits_{K\to+\infty} f_{N_1} + \sum\limits_{k=1}^{K}(\dots) = \lim\limits_{k\to+\infty} f_{N_{k+1}}(x)$

$\|f\|_p \le \|f_{N_1}\|_p + \sum \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p$ – кон.

$\|f(x) - f_n(x)\|_p \to 0$?

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n > N\ \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon^p$

берем $m := N_k > N$ $\|f_n - f_{N_k}\|_p^p < \varepsilon^p$

$$\int_X \underbrace{|f_n(x) - f_{N_k}(x)|^p}_{\downarrow \text{п.в.}} d\mu < \varepsilon^p$$

$|f_n(x) - f(x)|^p$ $\Downarrow$ т. Фату

$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$

<u>Опр.</u> X – метр. пр-во

$A \subset X$ – (всюду) плотно в X

$\forall$ откр. мн-ва $G \subset X$ $A \cap G \ne \varnothing$ (или $\forall$ шара $B(x_0, r)$ – в нем есть точка из мн-ва A)

<u>Пример</u> $X = \mathbb{R}$ $A = \mathbb{Q}$

в (a,b) есть рац. число

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ f-ступ. $= \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ $X = \bigsqcup E_k$

$\mu X(f \ne 0)$ – кон

<u>Лемма</u> в $L^p(X,\mu)$ $(1 \le p \le +\infty)$ мн-во ступ. ф-ций плотно

<u>Док-во:</u> ① $p = \infty$ $f \in L^\infty$ $\|f - h\| < \varepsilon$ $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f| < +\infty$

поправив f на мн-ве м-ра 0 $\forall x \in X$ $|f(x)| \le \|f\|_\infty$

$f \ge 0$ $\sup|f - h_n| \to 0$ $\|f - h_n\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f - h_n| \le \sup|f - h_n| \to 0$

$h_1 \le h_2 \le \dots \le f$ $\leftarrow$ f-изм., огр $\exists$ посл. h_n

② $p<+\infty$ $f\in L^p$ $B(f,\varepsilon)$ – есть ли тут ступ. ф-ции?

$f\geq 0$ $\exists$ступ. ф-ции h_n $h_n\leq h_{n+1}\leq\ldots$ $h_n\to f$ $h_n\leq f$

$\int\limits_X |f-h_n|\to 0$

$$\|f-h_n\|_p^p=\int\limits_X |f-h_n|^p d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\downarrow$ п.в. 0 т. Лебега

Нормальность

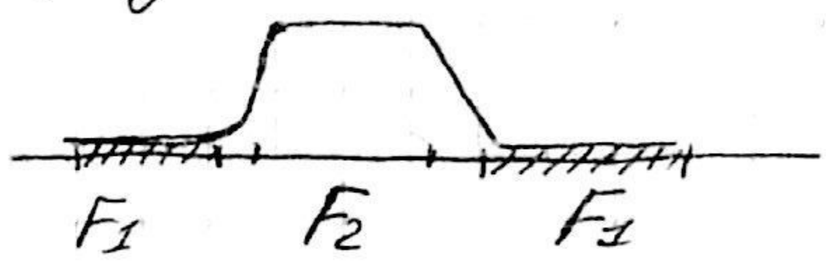
Если F_1, F_2 два непересек. замк. мн-ва

Тогда $\exists G_1, G_2$ – откр. $G_1\cap G_2=\varnothing$ $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$

в $\mathbb{R}^n$ такое выполнено

<u>Лемма</u> (Урысона) F_1, F_2 – два непер. замк. мн-ва в $\mathbb{R}^n$, то

$\exists f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $f|_{F_1}=0$ $f|_{F_2}\equiv 1$



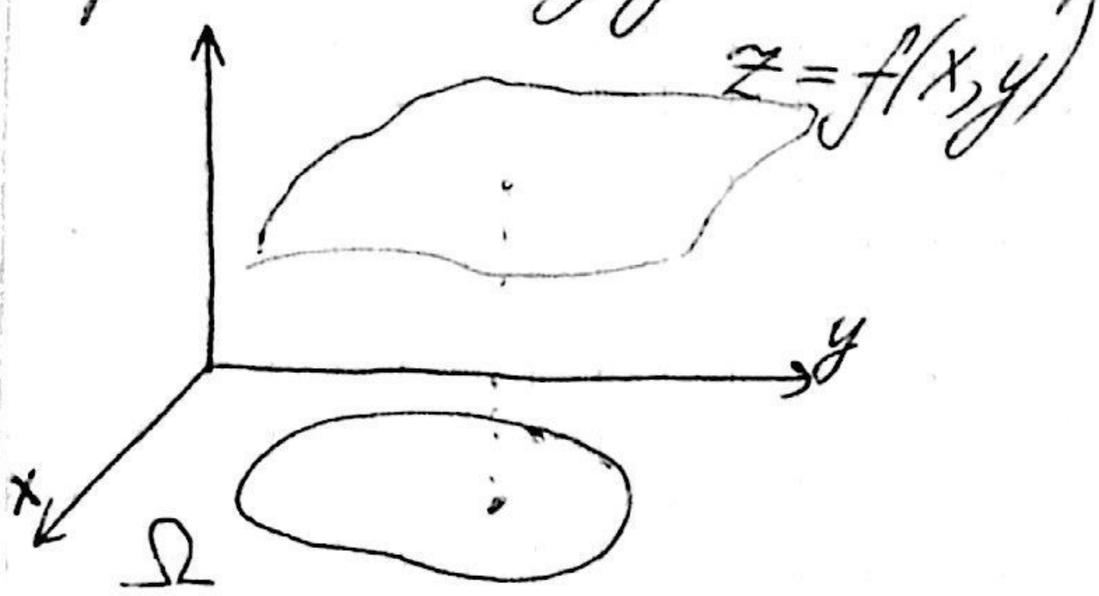
§ Пов. инт. II рода

<u>Опр</u> Сторона поверхности – непр поле единичных нормалей на пов-ти

$M\subset\mathbb{R}^3$ $n_0: M\to\mathbb{R}^3$

$x\mapsto n_0(x)$ $|n_0|=1$, n_0 – в-р норм. к пов-ти

<u>Опр</u> Пов-ть с заданной стороной – ориентированная пов-ть

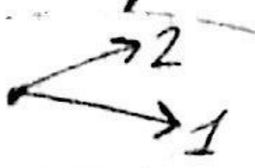


$x=x$
$y=y$
$z=f(x,y)$ $\begin{pmatrix}1\\0\\f'_x\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\\f'_y\end{pmatrix}$

$n=(-f'_x, -f'_y, 1)$

$$n_0=\left(\mp\frac{f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \mp\frac{f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}\right)$$

<u>Опр</u> Репе́р – упор. набор из двух (неколл.) кас. в-ров к пов.



поле реперов $=(V_1,V_2)$: $V_1,V_2: M\to\mathbb{R}^3$ непр.

$\forall x\in M$ $V_1(x), V_2(x)$ – кас. репе́р

① непр. поле кас. реперов задает сторону: $n_0=\dfrac{V_1(x)\times V_2(x)}{|V_1(x)\times V_2(x)|}$

Опр $M \subset \mathbb{R}^3$ – простая гл. двуст. пов-ть, n_0 – её сторона

$F: M \to \mathbb{R}^3$ – вект. поле

Инт.: $\int\limits_M \langle F, n_0 \rangle d\sigma$ – пов. инт. II рода

Смена стор. = смена знака

длина столбика vt

$V_{об} = d\sigma \langle v, n_0 \rangle$

$F = (P, Q, R) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$\iint\limits_M P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ $\quad \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$

$\Omega \in \mathbb{R}^3$

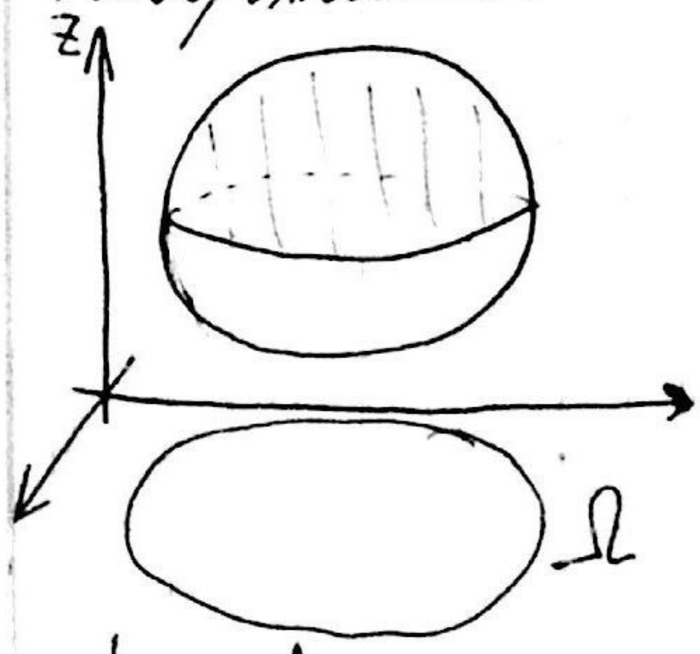
$z = f(x,y)$; M – гр. $\iint\limits_M R\,dx\,dy = \iint\limits_M \langle (0,0,R), n_0 \rangle d\sigma = \iint\limits_\Omega R \cdot \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}} \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}$

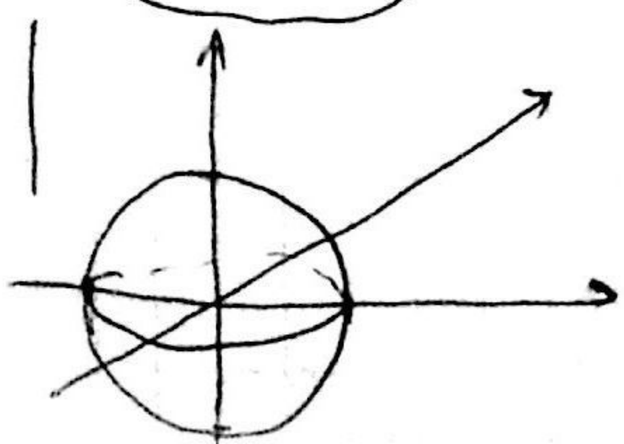
n_0 – верх. сторона графика $\quad n_0 = \left(\frac{-f'_x}{\sqrt{\dots}}, \frac{-f'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{\dots}} \right)$

$= \iint\limits_\Omega R(x, y, f(x,y))\,dx\,dy$

Забавное св-е: если M – гр. огр. фигуры $\mathcal{M}$, кот. явл. кус.-гл. поверхностью

$$\int \mathcal{M} = \frac{1}{3} \iint\limits_M x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

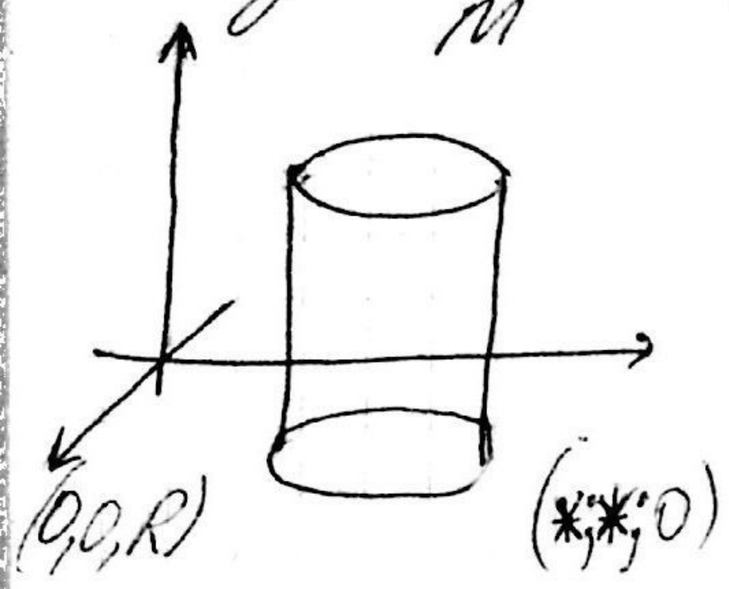




$$V = \frac{1}{3} \iint\limits_M \langle (x,y,z), n_0 \rangle d\sigma = \frac{1}{3} \iint 1\,d\sigma = \frac{4}{3}\pi$$

Сл. M-цилиндрич. пов хас над кривой $C \subset \mathbb{R}^3$

Тогда $\iint\limits_M R\,dx\,dy = 0$



<u>Лемма</u> $F_1, F_0 \in \mathbb{R}^m$ - замк., непер. $F_1 \cap F_0 = \varnothing$

Тогда $\exists$ непр. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad f|_{F_1} = 1 \quad f|_{F_0} = 0$

$\forall$ замк. F и $\forall$ откр. $G \ni F$ $\exists$ откр. H: $F \subset H \subset \overline{H} \subset G$

F_1, F_0 $\exists \underset{\text{откр}}{U(F_1)}, \underset{\text{откр}}{\exists U(F_0)}$: не пересек.

$F_0 \subset \underset{\text{откр}}{G_0} \subset \overline{G_0} \subset \underset{G_1}{\underset{\parallel}{F_1^c}}$

$\overline{G_0} \subset G_1$

замк. откр. $\quad \exists G_{1/2}$ $\quad \underbrace{\overline{G_0} \subset G_{\frac{1}{2}}} \subset \overline{G}_{1/2} \subset G_1$

$G_{1/4}$: $\overline{G_0} \subset G_{\frac{1}{4}} \subset \overline{G_{\frac{1}{4}}} \subset G_{\frac{1}{2}}$ $\qquad G_{\frac{3}{4}}$: $\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset G_{\frac{3}{4}} \subset \overline{G_{\frac{3}{4}}} \subset G_1$

$\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ - дв. рац. из $[0,1]$

$f(x) := \sup\{\alpha \text{ - дв. рац } x \in G_\alpha\}$ - она непр.

$f^{-1}((a,b)) = \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in (a,b) \\ \alpha \text{ - дв. рац}}} G_\alpha \setminus \overline{G_a}$

$(a,b) \subset [0,1]$

$x \in f^{-1}(c)$

$c \in (a,b)$ $\quad c < \alpha_0 < b$

$x \in G_{\alpha_0}$

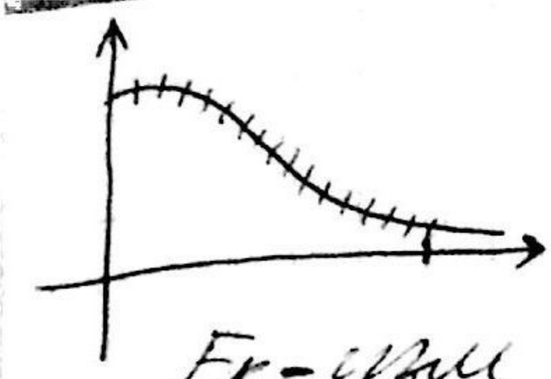
<u>Опр</u> f - финитные в $\mathbb{R}^m$ $=0$ вне нек-ого шара

$C_0(\mathbb{R}^m)$ - мн-во непр. финитных ф-ций

$\forall p$ $C_0 \subset L^p(\mathbb{R}^m)$

(Т) $\forall p$: $1 \le p < +\infty$ $C_0(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^m)$

Док-во: $f \in L^p$, $\varepsilon > 0$ $B(f, \varepsilon)$ - сод. непр. финитную ф-ции



E_k – изм

$\exists$ ступ. ф-ция h: $\|f-h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$? как приблизить χ_{E_k}

$F_k \subset E_k \subset G_k$ $\quad f_k$ – ф-ция из л. Урысона

$\lambda(G_k \setminus F_k) < \delta$ $\quad \|\chi_{E_k} - f_k\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\chi_{E_k} - f_k|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G_k \setminus F_k} |\chi_{E_k} - f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \delta^{\frac{1}{p}}$

$\|h - \sum a_k f_k\|_p = \|\sum a_k(\chi_{E_k} - f_k)\|_p \le$

$\le \sum |a_k| \cdot \|\chi_{E_k} - f_k\|_p \le \max|a_k| \cdot n \cdot \delta^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}$

(NB) 1. в L^∞ это не работает; C_0 – не входит пл. в L^∞

2. в L^p также вс. пл. мн-вом явл. $(1 \le p < +\infty)$

- непр. ф-ции
- гладкие фин. ф-ции
- мн. колиб. х. ф. ячеек

! – разл. к. разл. ячеек ☺ (в L^∞ этого нет)

$L^p[0;T]$ – как пр-во T-пер. ф-ций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с усл. сумм. $\left(\int_0^T |f|^p d\lambda\right) < +\infty$

h $\quad f_h(x) = f(x+h)$ $\quad \int_0^T \ldots = \int_h^{T+h} \ldots$

$\tilde{C}[0,T]$ – непр. ф-ций $[0,T]$

$f(0) = f(T)$

Упр. $\tilde{C}[0,T]$ – пл. в $L^p[0,T]$

(T) (о непр-ти сдвига) $\quad f_h(x) = f(x+h)$

1) f – равн. непр. на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \|f_h - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

2) $1 \le p < +\infty$ $\quad f \in L^p(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

3) $f \in \tilde{C}[0,T] \Rightarrow \|f_h - f\|_\infty \to 0$

4) $1 \le p < +\infty$ $\quad f \in L^p([0,T])$ $\quad \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Док-во: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x, y\ |x-y| < \delta\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1\ \forall h: |h| < \delta_1\ \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x) - f(x+h)| \le \varepsilon$

2) и 4) $f \leftrightarrow$ финитная

$$\|f_n - f\|_p \le \|f_n - g_n\|_p + \|g_n - g\|_p + \|g - f\|_p$$

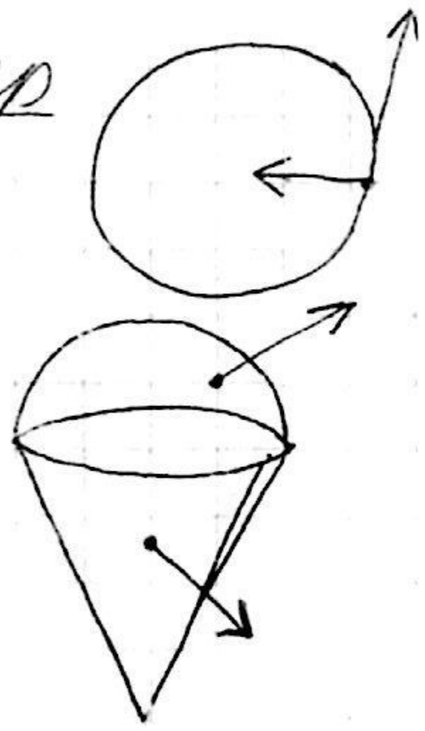
$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x+h) - g(x+h)|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_h^{T+h} \dots\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^T \dots\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p$$

$< \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad < \frac{\varepsilon}{3}$

④ $$\left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_x |g(x+h) - g(x)| \cdot \left(\int_0^T 1\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|g_h - g\|_\infty \cdot T^{1/p} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

<u>Опр</u>



Ф. контура сов. с ор. (стороной) пов-ти

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $\qquad V = (A_1 \dots A_m)$

$$\int_\gamma A_1 dx_1 + \dots + A_m dx_m = \int_a^b \langle V, \gamma' \rangle dt$$

инт. второго рода по ориент. кривой

Ориентация = непр. поле един. кас. в-ров

Ірода $\int_\gamma f ds := \int_a^b f \circ (\gamma') dt$

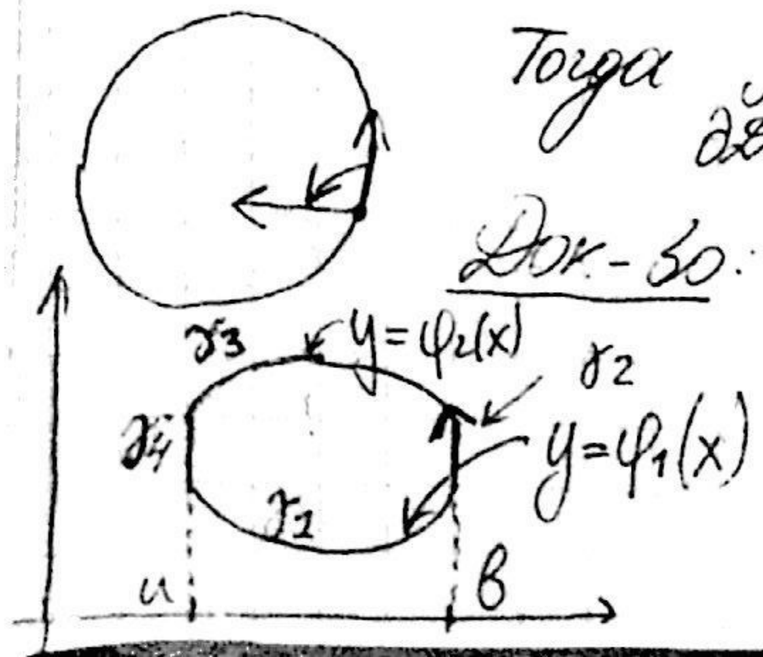
Ⓣ <u>(Грина)</u>

$\mathbb{R}^2$ – ф. с пом. нумерацией координат: x – I, y – II

$D \subset \mathbb{R}^2$ – комп., связн., односв. с C^2-гл. границей

(P, Q) – гл. вект. поле, пусть ∂D – ориент. сов. с ориент. пп-ти

Тогда $$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$



<u>Док-во</u>: Для случая D – „криволин. 4-угольник"

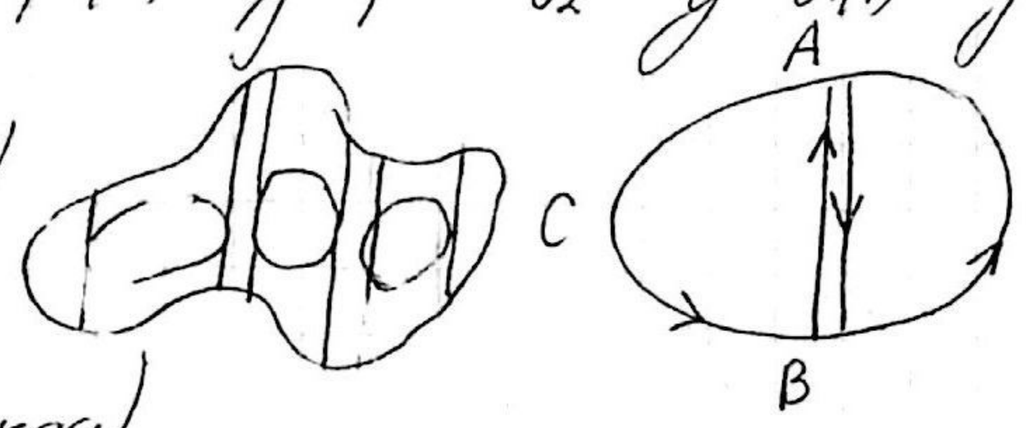
$V=(P;0)$

$$-\iint \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = -\int_a^b dx\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) = \int_a^b P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\,dx \quad (*)$$

$$\int_{\partial D} P\,dx + 0\,dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_a^b P(t,\varphi(t))\,dt + \int 0 + \int_b^a P(t,\varphi_2(t)) = (*)$$

$x=t$, $y=\varphi_1(t)$; $x'=1$, $y'=\varphi'$; γ_2: $x=b$, $y=d(t)$; $x'=0$, $y'=\alpha'$

$x=t$, $y=\varphi_2(t)$



$$\int_{\partial I} + \int_{\partial II} = \left(\int_{ACB} + \int_{BDA}\right) + \left(\int_{BEA} + \int_{ADB}\right)$$

(Т) (Стокса)

$D \subset \mathbb{R}^3$ – гладкая гл. 2-ная пов-ть в $\mathbb{R}^3$

∂D – C^2-гладкая кривая

По-сторона пов-ти; ориент. ∂D – согл. с сторон$\neq$ой

(P,Q,R) – гл. вект. поле на D. Тогда

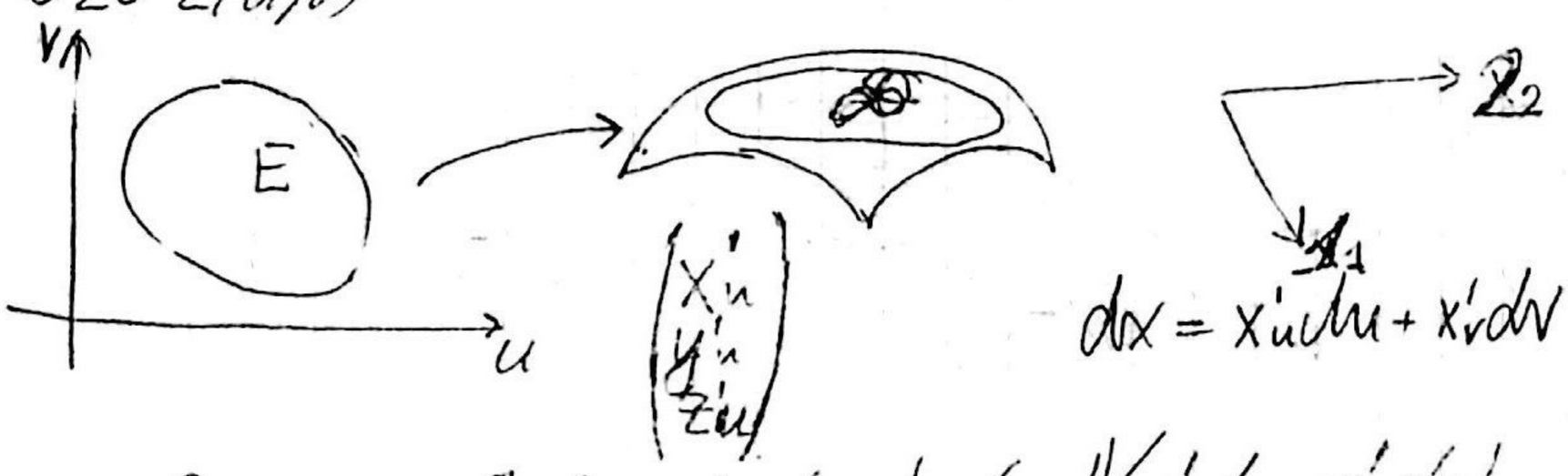
$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{D} (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$dx\,dy = -dy\,dx$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + 0\,dz = \iint P'_z\,dz\,dx - P'_y\,dx\,dy$$

$$\int_{\partial D} P\,dx =$$

$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ – порядок перем. (u,v) сог. с выбран. стор. пов-ти



$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \qquad dx = x'_u\,du + x'_v\,dv$$

▲ $\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\partial E} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))(x'_u\,du + x'_v\,dv)$ $\quad (u(t),v(t))$ – нар.-я ∂E

$$\text{п. т.} = \int_a^b P(x'_u(u(t),v(t))\,u'_t + x'_v \cdot v'_t)\,t$$

$x=x(u(t),v(t))$, $y=y(u(t),v(t))$ $\quad$ $\text{п. т.} = \int_a^b P(x'_u(u(t),v(t))\,u'_t + x'_v \cdot v'_t)\,dt =$

$$= \int_{\partial E} P\cdot x'_u\,du + P\cdot x'_v\,dv = \iint_E (P\cdot x'_v)'_u - (P\cdot x'_u)'_v\,du\,dv =$$

$$= \iint_E (P'_x\cdot x'_u + P'_y\cdot y'_u + P'_z\cdot z'_u)\cdot x'_v - (P'_x\cdot x'_v + P'_y\cdot y'_v + P'_z\cdot z'_v)\cdot x'_u +$$

$$+ \cancel{P\cdot x''_{vu} - P\cdot x''_{uv}}\,du\,dv =$$

$$= \iint_E P'_z\,(z'_u\cdot x'_v - z'_v\cdot x'_u) - P'_y\,(y'_v\cdot x'_u - y'_u\cdot x'_v)\,du\,dv =$$

$$= \iint_D P'_z\,dz\,dx - P'_y\,dx\,dy$$

$$\int \langle (0, P'_z, P'_y), n_0\rangle\,d\sigma$$

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} \qquad \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)}{\|\vec{n}\|}\cdot\|\vec{n}\|\,du\,dv \qquad \bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

a, b - дв. рац. $\alpha < \beta$ $\alpha, \beta \in [0,1]$

$G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \inf(\{\alpha \mid \text{дв. рац. } x \in G_\alpha\})$

$f: X \to F_1 \to \mathbb{R}$

$x \in F_1 \Rightarrow f(x) := 1$

$f^{-1}([-\infty, t)) = \bigcup_{\alpha<t} G_\alpha$

$\supset$ $x \in G_\alpha$ $f(x) < \alpha < t \Rightarrow x \in f^{-1}((-\infty; t))$

$\subset$ $x \in f^{-1}((-\infty; t))$ $f(x) < t$ $f(x) < \alpha < t \Rightarrow x \in G_\alpha$

$f^{-1}((-\infty; t))$ - откр.

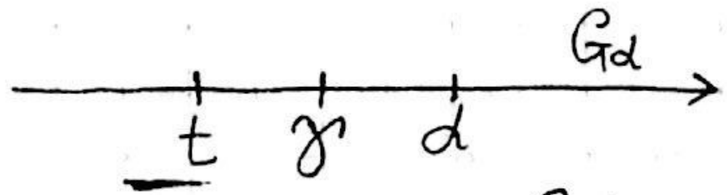
$f^{-1}([-\infty; t]) = \bigcap_{\alpha>t} G_\alpha = \bigcap_{\alpha>t} \overline{G_\alpha}$ - замк.

$\boxed{\subset}$ очев

$\boxed{\supset}$ $G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$

$\boxed{\subset}$ $x \in$ л.т. $\Rightarrow x \in$ пр.т. очев

$\boxed{\supset}$ $x \in$ всем G_α, $\alpha > t \Rightarrow f(x) \leq t$



$\overline{G_\gamma} \subset G_\alpha$ $\bigcap G_\alpha \supset \bigcap \overline{G_\gamma} \supset \bigcap_{\gamma>t} \overline{G_\gamma}$

$$f^{-1}((a,b)) = \underbrace{f^{-1}((-\infty, b))}_{\text{откр.}} \setminus \underbrace{f^{-1}((-\infty; a])}_{\text{замк.}} \text{ - откр.}$$

§2 Гильбертовы пространства

Лин. пр-во над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{C}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\langle a, b \rangle \leq \|a\| \cdot \|b\| \qquad \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$

Опр. $\mathcal{H}$ - лин. пр-во со скал. пр-ем, полное ∂° Гильбертовым пр-вом

Пример 1) $L^2(X, \mu) \quad \|f\| = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$

$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g}\, d\mu$

сумм. по нер-ву Гёльдера $\leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$

2) $\ell^2 = \{(x_i)_{i=1}^{+\infty} : x_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C});\ \sum |x_i|^2 < +\infty\}$

$X := \mathbb{N}$, μ - счит. мера $\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2} \qquad \langle x, y \rangle = \sum x_i \cdot \overline{y_i}$

Опр $\mathcal{H}$ - Гильб. пр-во

1) $x, y \in \mathcal{H} \quad x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$

2) $A \subset \mathcal{H} \quad x \perp A \iff \forall a \in A \ \langle x, a \rangle = 0$

3) $\sum_{k=1}^{N, +\infty} x_k$ - орт. ряд, если $\forall k \forall j \ x_k \perp x_j \ (k \neq j)$

(Т) (О св-ах сх-ти в Гильбертовом пр-ве)

(1) $x_n \to x \quad y_n \to y$ Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - ряд сх. в Г.П. Тогда $\forall y \ \langle y, \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, x_n \rangle$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ - ортог. ряд $\sum x_n$ - сх. $\iff \sum \|x_n\|^2$ - сх.

пример: $e_k = (0, \ldots \underset{(k)}{1}, 0 \ldots) \in \ell^2 \quad \|e_k\| = 1$

$\sum \frac{1}{k} e_k$ = сх. ряд $\quad \left\|\frac{1}{k} e_k\right\|^2 = \frac{1}{k^2}$

1) $\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| =$

$= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \underbrace{\|x_n\|}_{\text{огр.}\ (?)} \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y\|}_{\text{const}}$

2) $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ - ч. сумма „ряд сх" $\iff \exists S \in \mathcal{H} \ S_N \to S$

$\langle y, S_N \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n \rangle$

$\langle y, S_N \rangle \to \langle y, S \rangle$

$\sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n \rangle \to \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, x_n \rangle$

③ $S_N = x_1 + \ldots + x_N$

$$\|S_N\|^2 = \langle S_N, S_N\rangle = \langle x_1 + \ldots + x_N, x_1 + \ldots + x_N\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\langle x_i, x_j\rangle \underset{орт.}{=} \sum_i \langle x_i, x_i\rangle$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\|x_i\|^2}_{C_N} \text{ т.Пифагора}$$

$N>M$: C_N

$$\|S_N - S_M\|^2 = C_N - C_M$$

S_N и C_N – если они фунд., то одновременно $\|S_N - S_M\| \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} 0$

$\|S_N\|^2 = C_N \Rightarrow \exists \lim C_N$, т.е. $\sum \|x_n\|^2$ – сх.

$\downarrow$

$\|S\|^2$

<u>Опр</u> H – гильб. пр-во

1) Мн-во $\{e_1, e_2, \ldots, \cancel{e_n}\}$ – ортог. система (в-ров) О.С., если
сем-во

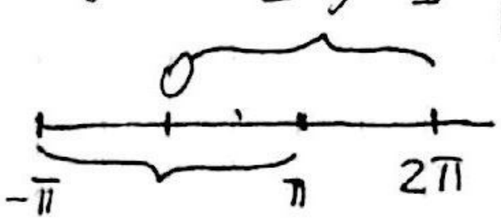
$\forall i, j \quad i \neq j \quad e_i \perp e_j$

2) Если к тому же $\|e_k\| = 1$ ортонормир. сист. О.Н.С.

$\{e_k\}$ – О.С. $\quad \left\{\frac{e_k}{\|e_k\|}\right\}$ – О.Н.С.

<u>Пример</u> 1) $\ell^2 \quad e_k = (0, \ldots 1, 0 \ldots 0)$ – О.Н.С.

2) $L^2[0, 2\pi]$ (или $\neq L^2[-\pi, \pi]$)



$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \ldots$ – О.С.

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx \, dx = 0$ из нечетности

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x - \cos(k+l)x \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-l)x}{k-l} - \frac{\sin(k+l)x}{k+l}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2kx \, dx = \pi \end{array}\right.$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}$

③ $L^2[0; 2\pi]$ над $\mathbb{C}$

$\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ОНС

Опр (P, Q, R) - гл. вект. поле в обл. $E \subset \mathbb{R}^3$

$V = (P, Q, R)$

$\operatorname{rot} V = (R'_y - Q'_z;\ P'_z - R'_x;\ Q'_x - P'_y)$

(NB) $\operatorname{rot} V$ не зав от с.к. в $\mathbb{R}^3$

ф-ла Стокса (сокр. вид): A - вект. поле $\int_{\partial\Omega} A e\, dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n\, d\sigma$

$\operatorname{rot} A = (B_1; B_2; B_3)$

$n = (n_1; n_2; n_3)$

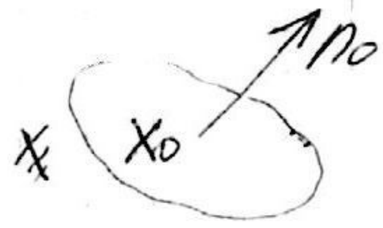
$l = (l_1, l_2, l_3) = (l_1(t), l_2(t), l_3(t))$

$$\iint_{\Omega} \frac{B_1 n_1 + B_2 n_2 + B_3 n_3}{\cancel{\|n\|}} \cancel{\|n\|}\, du\, dv = \int_a^b \frac{A_1 l'_1 + A_2 l'_2 + A_3 l'_3}{\|l'\|} \|l'\|\, dt =$$

$$= \iint (B_1 n_1 + B_2 n_2 + B_3 n_3)\, du\, dv = \int_a^b A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

$$= \iint B_1 dy\, dz + B_2 dz\, dx + B_3 dx\, dy$$

$E \subset \mathbb{R}^3$ $x_0 \in E$ $A: E \to \mathbb{R}^3$ гл. вект. поле



Ω = круг $B(x_0, r)$ лет. в пл-ти, $\perp \vec{n}$

$$(\operatorname{rot} A(x_0))_n = \lim_{r \to 0} \frac{\iint_{B(x_0, r)} (\operatorname{rot} A)_n\, d\sigma}{\pi r^2} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial B} (Ae)\, dl}{\pi r^2}$$

Считаем ротор в.п.:

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Omega} (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)\, dx + \ldots =$$

$$= \iint \mathrm{I}\text{сл.} + (P'_z - R'_x)\, dz\, dx + \mathrm{III}\text{сл}$$

(T) (Ф-ла Гаусса-Остроградского; II сл.)

] $D \subset \mathbb{R}^3$ = разность полупространств $f, F: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \Omega$ $F(x, y) \geq f(x, y)$

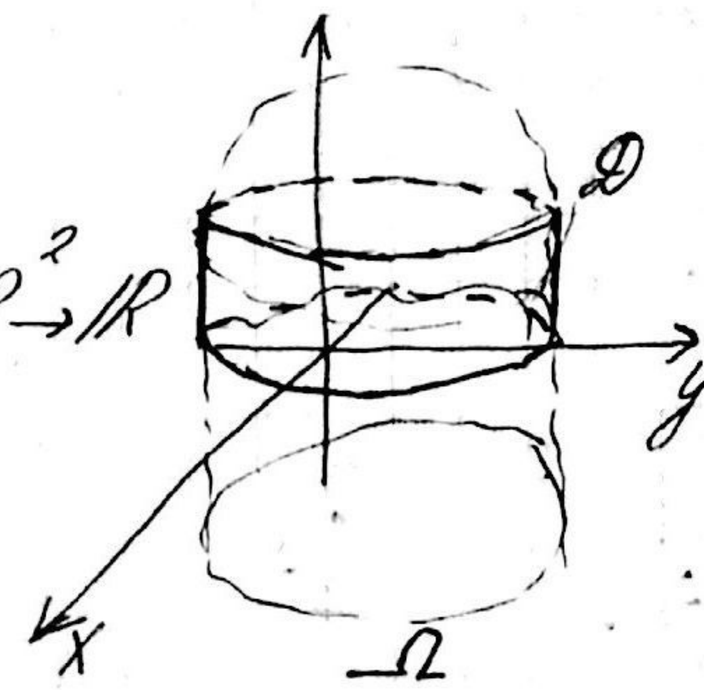
] $R: D \to \mathbb{R}$ - гл. ф-ция

Тогда $\iint_{\partial D} R(x, y, z)\, dx\, dy = \iiint_{D} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$

инт II рода

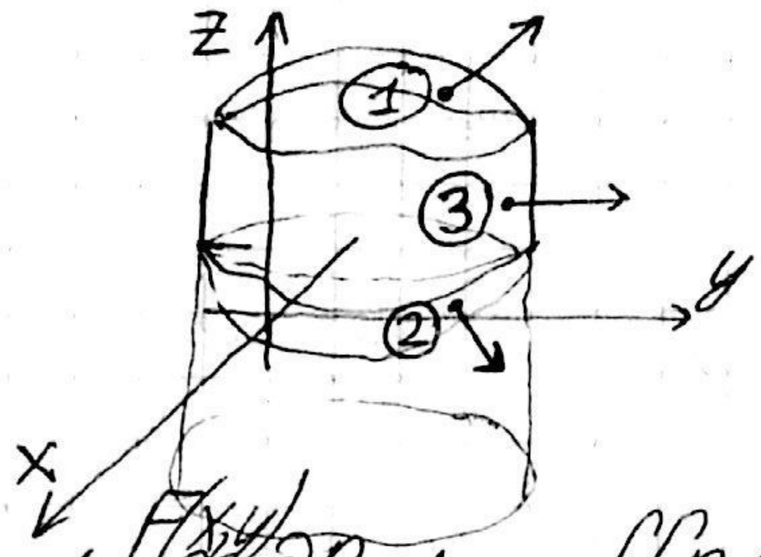
$0\, dy\, dz + 0\, dz\, dx + R\, dx\, dy$

где у ∂D - ориент. полем внешних нормалей



∂D = график F + гр. f +

$\partial D = \underset{\text{гр.}F}{\partial D_1} + \underset{\text{гр.}f}{\partial D_2} + \underset{\text{цилиндр}}{\partial D_3}$



$$\iiint \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega} dx\,dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_{\Omega} R(x,y,F(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\partial D_1} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{\partial D_2} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{\partial D_3} R\,dx\,dy = 0$$

<u>Сл. (ф-ла Гаусса-Остроградского)</u>

$D \subset \mathbb{R}^3$ ∂D - ориент. полем внешн. нормалей

(P,Q,R) - гл. вект. поле в D. Тогда

$$\iint_{\partial D} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_{D} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz$$

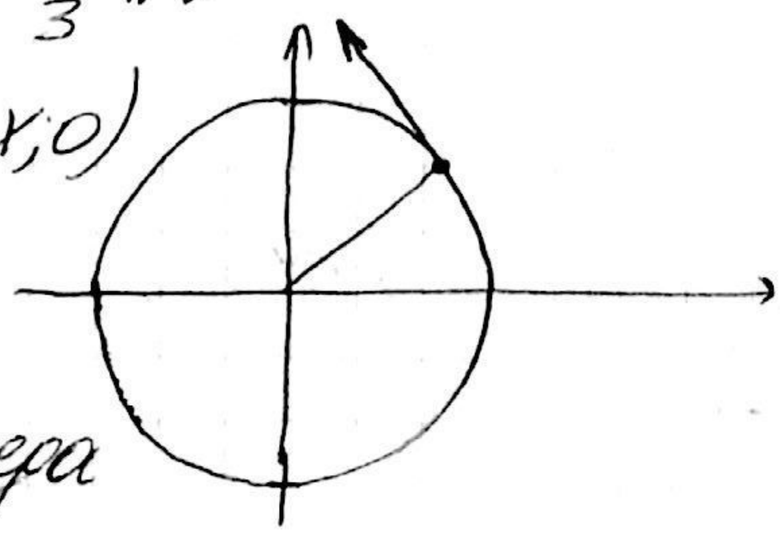
$V = (P, Q, R)$

$\operatorname{div} V = P'_x + Q'_y + R'_z$

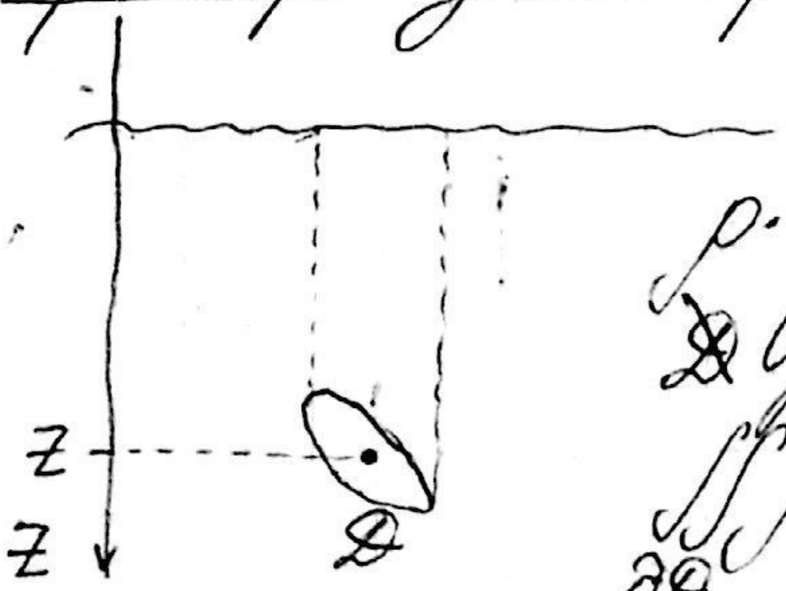
$$\operatorname{div} V(a) = \lim_{r\to 0} \frac{\iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} V\,dx\,dy\,dz}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \lim_{r\to 0} \frac{\iint \langle V, n\rangle\,d\sigma}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

вихрь в.п. $V = (-y; x; 0)$

$\operatorname{rot} V = (Q'_x - P'_y)$



<u>Пример:</u> закон Архимеда



$\rho \cdot z \cdot d\sigma \cdot n_0$

Сумм. давление на фигуру:

$$\iint_{\partial D} \rho((z,z,z), n_0)\,d\sigma$$

$n_0 = (n_1; n_2; n_3)$

$$\rho z\,d\sigma\,n_0 = \begin{pmatrix} \rho z n_1\,d\sigma \\ \rho z n_2\,d\sigma \\ \rho z n_3\,d\sigma \end{pmatrix}$$

давл. $= (P_x; P_y; P_z)$

$$P_x = \iint_{\partial D} \rho z n_1\,d\sigma = \rho \iint_{\partial D} \langle (z,0,0); n_0\rangle\,d\sigma = \rho \iint z\,dy\,dz + 0\,dz\,dx + 0\,dx\,dy$$

$= \iiint_{\mathcal{D}} (z'_x + 0'_y + 0'_z)\, dx\,dy = 0$

$P_y = \ldots = 0$

$P_z = \rho \iint \ldots + z\,dx\,dy = \rho \cdot \iiint_{\mathcal{D}} 1\,dx\,dy\,dz = \rho \cdot Vol(\mathcal{D})$

$(P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)\, dy\,dz$

$x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$

$dx\,dy = (x'_u du + x'_v dv)(y'_u du + y'_v dv) =$
$= (x'_u \cdot y'_v - y'_u \cdot x'_v)\, du\,dv$

Р.П. $\sum x_k$

$\sum_{кон.}^{ЛНЗ} c_j e_j = 0 \Rightarrow \forall j\ c_j = 0$

(Т2) $\mathcal{H}$ - г.п.

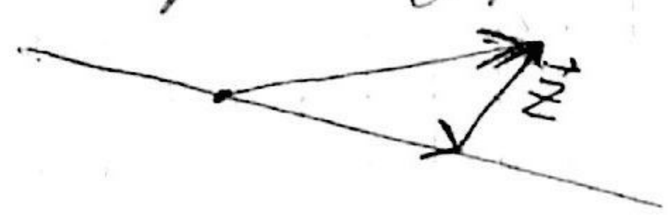
$\{e_k\}$ - О.С. $\quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \cdot e_k$

Тогда: (1) $\{e_k\}$ - ЛНЗ

(2) $c_k = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$

(3) $c_k e_k$ - это проекция x на 1-мерное подпр.-во, порожд. e_k

$x = c_k e_k + z \Rightarrow z \perp e_k$



Док-во: 1) $\sum_{кон} c_j e_j = 0$

$\sum c_j (e_j e_{j_0}) = 0$
$\quad \| $
$c_{j_0} \|e_{j_0}\|^2 \Rightarrow c_{j_0} = 0$

2) $\sum_{кон} c_k e_k = x \qquad \sum c_k (e_k \cdot e_{k_0}) = \langle x, e_{k_0} \rangle$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad c_{k_0} \|e_{k_0}\|^2 = \langle x, e_{k_0} \rangle$

3) $z \perp e_k$? $\langle z, e_k \rangle = (x - c_k e_k, e_k) = c_k \cdot \|e_k\|^2 - c_k \langle e_k, e_k \rangle = 0$

<u>Опр</u> $\{e_k\}$ - О.С. в $\mathcal{H}$ $\quad x \in \mathcal{H}$

$c_k = \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ - коэф. Фурье эл-та x по О.С. $\{e_k\}$

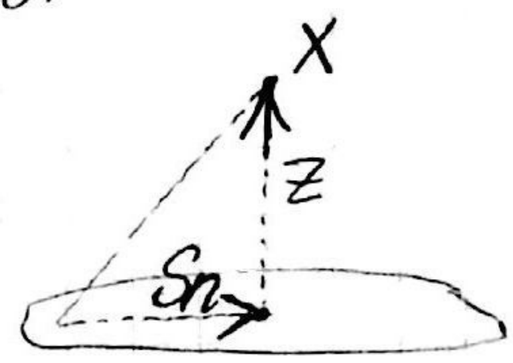
$\sum c_k \cdot e_k$ - ряд Фурье x по О.С.

$\sum \dfrac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k \qquad \dfrac{\langle x, 10 \cdot e_k \rangle}{\|10 e_k\|^2} (10 \cdot e_k)$

Т (о частичных суммах ряда Фурье)

$\{e_k\}$ – О.С. в $\mathcal{H}$ $x \in \mathcal{H}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, e_k$ – ч.с.р. Ф



$\mathcal{L}_n := Lin(e_1, \dots, e_n)$

Тогда: ① S_n – проекция x на $\mathcal{L}_n$

$X = S_n + Z \Rightarrow Z \perp \mathcal{L}_n$

$\langle Z, e_k\rangle = \langle X - S_n, e_k\rangle = \langle X, e_k\rangle - c_k \|e_k\|^2 = 0$ по опр. c_k

② S_n – эл-т наилучшего прибл. (в $\mathcal{L}_n$) для x

$\|x - S_n\| = \inf_{y \in \mathcal{L}_n} \|x - y\|$

③ $\|S_n\| \le \|x\|$

$\|x - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \ge \|z\|^2 = \|x - S_n\|^2$

$\|x\|^2 = \|S_n + z\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \ge \|S_n\|^2$

Сл. (н-во Бесселя)

$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$

$\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$

$S_k = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, e_k$

Т (Рисс, Фишер)

$\{e_k\}$ – О.С. в $\mathcal{H}$ $x \in \mathcal{H}$

① Ряд Фурье x сх-ся в $\mathcal{H}$

② $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k + z$. Тогда $\forall k$ $z \perp e_k$

③ $x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) \cdot e_k \iff \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

① Т. 3) $\sum x_k$ – сх. $\iff \sum \|x_k\|^2$ – сх. $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$

Бессель: $\sum |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$

$\langle z, e_k\rangle = \langle x - \sum, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum c_j(x) \langle e_j, e_k\rangle =$

$= \langle x, e_k\rangle - c_k(x) \cdot \|e_k\|^2 = 0$

③ $\Rightarrow x = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k \Rightarrow x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n}$

$\|x\|^2 = \lim \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 \Rightarrow$ п. т. выполнена

(3) $x = \sum c_k(x) e_k + z \qquad z \perp e_k$

$x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} + z$

$\|x\|^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$

$\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 + \|z\|^2 \Rightarrow \|z\| = 0$

(NB) (1) $\mathcal{L} := Cl(Lin(e_1, e_2, e_3, \dots))$ (2) $z \perp \mathcal{L}$

(2) $\{e_k\}$ - ОН.С $\{c_k\} \in \ell^2 \Rightarrow \sum c_k \cdot e_k$ - сх-ся в $\mathcal{H}$

<u>Следствие</u>: все гильбертовы ∞-мерные пр-ва изоморфны (сепарабельно)

сепарабельно = $\exists$ счётное плотное подмн-во

↳ в каждом шаре есть точка

<u>Упр.</u> Если фст. ряд сх-ся, то он явл. р. Фурье своей суммы

<u>Опр.</u> 1) $\{e_k\}$ - О.С. - базис, если $\forall x \in \mathcal{H}$ $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$

2) $\{e_k\}$ - О.С. полная в $\mathcal{H}$, если $(\forall k\ z \perp e_k \Rightarrow z = 0)$

3) $\sum |c_k(x)|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ ∀ рав-ом Парсеваля (ур-е замкнутости)

О.С. $\{e_k\}$: $\forall x$ вып. ур-е замк. $\Rightarrow \{e_k\}$ - замкнутая О.С.

(T5) <u>(о хар-ке базиса)</u>

$\{e_k\}$ - О.С. в $\mathcal{H}$. Тогда эквивалентны:

(1) $\{e_k\}$ - базис

(2) вып. обобщ. ур-е замкнутости $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k(x) \cdot \overline{c_k(y)} \|e_k\|^2$

(3) Ур-е замк. выполнено: О.С. замкнута

(4) О.С. полна $(\forall k\ z \perp e_k \Rightarrow z = 0)$

(5) $Lin(e_1, \dots, e_k)$ - плотно в $\mathcal{H}$

<u>Док-во</u>: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$; $4 \Leftrightarrow 5$

$1 \Rightarrow 2$: $x = \sum c_k(x) e_k$; $y = \sum c_k(y) \cdot e_k$

$\langle x, y\rangle = \langle \sum c_k(x) e_k, \sum c_j(y) e_j\rangle = \sum c_k(x) \langle e_k, \sum c_j(y) e_j\rangle =$

$= \sum c_k(x) \overline{c_k(y)} \langle e_k, e_k\rangle$

$2 \Rightarrow 3$: ок. $(x := y)$

$3 \Rightarrow 4$: ? $\{e_k\}$ - не полна $\exists z \neq 0$ $z \perp \{e_k\}$ $\|z\|^2 = \sum |c_k(z)|^2 \|e_k\|^2 \Rightarrow$ Р.Ф. 3

$\overset{}{\underset{Р.Ф.3}{\Longrightarrow}} z=\sum c_k(z)e_k$ – противор. 1

$4\Rightarrow 1$: x $\quad ?x\overset{?}{=}\sum c_k(x)e_k$

не так, то по Т.Р.Ф.п.2 $x=\sum c_k(x)e_k+z$ $\quad \forall k\ z\perp e_k$

(P,Q,R) – потенциально $\quad \exists f\ (P,Q,R)=\operatorname{grad} f$

$$\begin{cases} R'_y-Q'_z=0 \\ P'_z-R'_x=0 \\ Q'_x-P'_y=0 \end{cases} \qquad \operatorname{rot}(P,Q,R)=0$$

<u>Опр.</u> Векторное поле (P,Q,R) – соленоидальное, если $\exists$ „векторный потенциал", т.е. в. поле B: $V=\operatorname{rot}B$

$\operatorname{grad} f: \mathcal{F}\to\mathcal{V}$

$\operatorname{rot}: \mathcal{V}\to\mathcal{V}$

$\operatorname{div}: \mathcal{V}\to\mathcal{F}$

(Т) V – гл. вект. поле. Эквивалентны: ① $V=\operatorname{rot}B$ для нек. в. поля B, ② $\operatorname{div}V=0$

<u>Док-во:</u> $1)\Rightarrow 2)$ $\operatorname{div}\operatorname{rot}B=0$ (?)

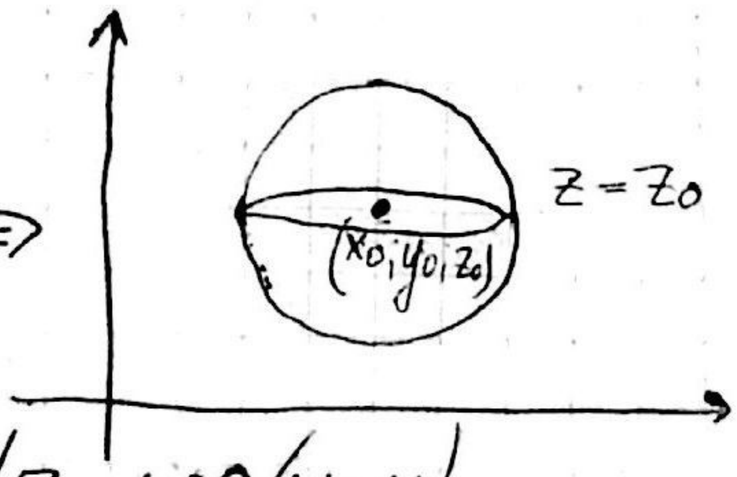
$(V_1)'_x+(V_2)'_y+(V_3)'_z$

$(R'_y-Q'_z)'_x+(P'_z-R'_x)'_y+(Q'_x-P'_y)'_z=0$

$2)\Rightarrow 1)$ $V=(A_1;A_2;A_3)$ $\quad A'_{1x}+A'_{2y}+A'_{3z}=0$

найдем $B=(B_1;B_2;B_3)$: $\operatorname{rot}B=V$

$$\begin{cases} B'_{3y}-B'_{2z}=A_1 \\ B'_{1z}-B'_{3x}=A_2 \\ B'_{2x}-B'_{1y}=A_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} B_3=0 \\ -B'_{2z}=A_1 \\ B'_{1z}=A_2 \\ B'_{2x}-B'_{1y}=A_3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$



$$B_1(x;y;z)=\int_{z_0}^{z}A_2(x,y,z)\,dz+\varphi(x;y)$$

$$B_2(x,y,z)=-\int_{z_0}^{z}A_1(x,y,z)\,dz$$

$$B'_{2x}-B'_{1y}=-\int_{z_0}^{z}A'_{1x}(x;y;z)\,dz-\int_{z_0}^{z}A'_{2y}(x,y,z)\,dz-\varphi'_y(x,y)\overset{?}{=}A_3$$

$$A_3(x,y,z)-A_3(x,y,z)-\varphi'_y(x,y)=A_3(x,y,z)$$

$$\int_{z_0}^{z}A'_{3z}(x,y,z)\,dz-\varphi'_y=A_3(x,y,z)$$

$$\varphi'_y=-A_3(x,y,z)$$

$$\varphi=\int_{y_0}^{y}-A_3\,dy$$

продолж. док-ва Т о хар-ке базиса:

4)⇒5) Пусть $\exists z \notin Cl(Lin\{e_k\})$

$z = \sum C_k(z) e_k + w$ по Т. Рисса-Фишера $\forall k$ $w \perp e_k \Rightarrow w = 0$ полнота О.С.

т.е. $z = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(z) e_k \Rightarrow z \in Cl(Lin(\{e_k\}))$

5)⇒4) $\forall k$ $y \perp e_k \Rightarrow y = \sum C_k(y) e_k$ $\forall z \in H$ $y \perp z$ $z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$,

$z_n \in Lin\{e_k\}$,

$z_n \perp y$

$(z_n; y) = 0 \to (z; y) = 0$

$Cl(Q) = \mathbb{R}$

z-ортогонален всему H

§3 Тригонометрические ряды Фурье

① $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ – тригонометрич. многочлен

$1, \cos kx, \sin kx$ $k \in \mathbb{N}$ (степени n)

$\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{ikx}$ $(k \in \mathbb{Z})$

② Триг. ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{ikx} = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$

S_n – част. сум. ряда

<u>Лемма</u> $T(x)$ – триг. ряд $S_n(x)$ – част. суммы

Пусть $\exists f \in L^1[-\pi; \pi]$ $S_N \to f$ в пр-ве L^1

<u>Тогда:</u> $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$, $k = 0, 1 \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$, $k = 1 \ldots$ $L^p[-\pi; \pi]$

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

<u>Док-во:</u> a_k: $\langle S_n(x), \cos kx \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum a_j \cos jx \cos kx + \sum b_j \sin jx \sin kx = a_k \pi$ при $n \geq k$

$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \right| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| |\cos kx| dx \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| dx = \|S_n - f\|_{L_1} \to 0$

т.е. $a_k \pi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$

Опр $f \in L^1[-\pi;\pi]$ Тогда числа a_k, b_k, c_k - коэфф Фурье f.

а ряд $\frac{a_0(f)}{2} + \sum a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx$ - рядом Фурье

(2) $L^2[-\pi;\pi]$ f - четная $\Rightarrow b_k = 0$ $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$

f - нечетная $\Rightarrow a_k = 0$ $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

(3) $f \in L^1[0;\pi]$

$$f \leftrightarrow \frac{a_0(f)}{2} + \sum a_k(f)\cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx$$

$$f \leftrightarrow \sum b_k(f)\sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx$$

(4) $$A_k(f,x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & k=0 \\ a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx, & k=1,\dots \end{cases}$$

Тогда: $$A_k(f,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt, & k=0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos kt\,dt, & k=1,\dots \end{cases}$$

$$A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cdot\cos kx + \sin kt\cdot\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,dt$$

$$\underset{\substack{t-x=\tau \\ t=x+\tau}}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau$$

Следствие: $f \in L^1[-\pi;\pi]$ Тогда

$$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ |2c_k(f)| \le \frac{1}{\pi}\|f\|_{L_1}$$

$$|A_k(f,x)| \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 \\ \frac{1}{\pi}\|f\|_1, & k \ge 1 \end{cases}$$

$$A_k(f,x) = |(*)| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos kt\,dt \Big| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\|f\|_1$$

(NB) f - непр. $\not\Rightarrow$ ряд Фурье сх-ся во всех точках

$\exists f \in L^1$: р.ф. всюду расх. (утв. Колмогорова)

Карлесон: $f \in L^2$ р.ф. п.в. сх.

Хант $f \in L^p$ $1<p$

Т (Римана-Лебега)

$E\subset\mathbb{R}$-изм. $\qquad$ $E\subset\mathbb{R}$-изм., $f\in L^1/E$

Тогда $\int\limits_E f(x)e^{ikx}dx\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ $\qquad$ $\int\limits_E f(x)\cos kx\to 0$

$\int\limits_E f(x)\sin kx\to 0$

Док-во: считаем, что $f\equiv 0$ вне E

f-сумм. $\mathbb{R}$ $\quad \int\limits_E f(x)e^{ikx}=\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}\underset{y:=x-\frac{\pi}{k}}{=\!=\!=}\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(y+\frac{\pi}{k}\right)e^{ik\left(y+\frac{\pi}{k}\right)}=$

$=-\int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)e^{ikx}dx$

$\left|\int\limits_E f(x)e^{ikx}\right|=\frac{1}{2}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right)e^{ikx}dx\right|\le\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right|dx=$

$=\left\|f-f_{\frac{\pi}{k}}\right\|_1\to 0$

<u>Следствие</u> $a_k(f), b_k(f), c_k(f)\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, если $f\in L^1$

<u>Следствие</u> $f\in C^1[-\pi;\pi]$-периодич.

$a_k(f')=k\cdot b_k(f)$

$b_k(f')=-k a_k(f)$ $\qquad$ $a_k(f')=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx\,dx=$

$c_k(f')=ik c_k(f)$ $\qquad$ $=\frac{1}{\pi}f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}+k\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$

Значит, $a_k(f)=a_k(f')\frac{1}{k}=\bar{o}\left(\frac{1}{k}\right)$

Сл1(Сл.2): $f\in C^2[-\pi,\pi]$-периодич. $\Rightarrow a_k(f)=\bar{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

<u>Опр</u> ① Ф-ция $D_n(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\right)$ - $b_k(f)=c_k(f)$

ядро Дирихле

$h(x):=\int\limits_a^b K(x;y)f(y)dy$

② $\Phi_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}D_k(t)$ - ядро Фейера

<u>Лемма:</u> ① $D_n(t)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$

② $\Phi_n(t)=\dfrac{1}{2\pi(n+1)}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$

③ $\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(t)=1$ $\quad\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)dt=1$, $\quad\Phi_n\ge 0$, $\quad\Phi_n, D_n$ - четные

④ $f\in L^1[-\pi;\pi]$ $\quad S_n(f)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt$

интеграл Дирихле

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t \overset{?}{=} \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} \qquad \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\cos kt-\cos(k+1)t\right)=\frac{1}{2}\left(1-\cos(n+1)t\right)=\sin^2\frac{n+1}{2}t$$

(4) $$S_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}f(x+t)\cos kt\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt$$

$f\in L^1$

$f\longleftrightarrow$ триг. ряд φ $\quad a_n, b_n, c_n\to 0$

$$D_n(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$S_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt$$

(T) <u>(принцип локализации Римана)</u>

$f,g\in L^1[-\pi;\pi]$ $\quad x_0\in[-\pi;\pi]$ $\quad\exists\delta>0$

$f(x)=g(x)$ при $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$

Тогда ряды Ф. f и g ведут себя одинаково в $(\circ)\,x$

$$\left|S_n(f,x)-S_n(g,x)\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

(NB) $h=f-g$ $\quad h\equiv 0$ на $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ Тогда $S_n(h,x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt$$

$$S_n(h,x)=\int_{-\pi}^{\pi}h(x+t)D_n(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{h_0(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}_{h_1(t)}\sin nt+\underbrace{h_0(x+t)}_{h_2(t)}\cos nt$$

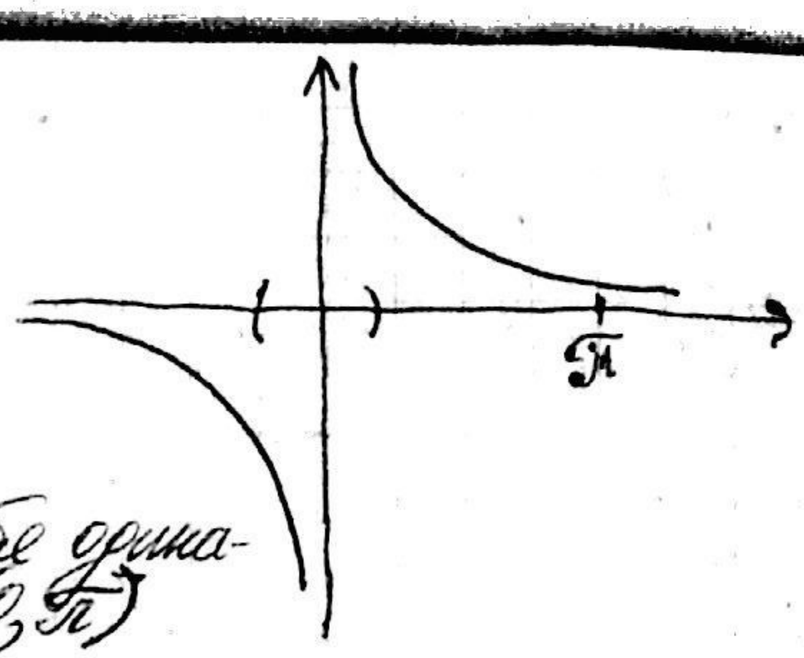
$$=b_n(h_1)+a_n(h_2)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Это рассуждение работает, если $h_1,h_2\in L^1[-\pi;\pi]$

$h_2\in L^1$ - это очев

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h_1(t)|\,dt=\int_{(-\delta;\delta)}+\int_{[-\pi;\pi]\setminus(-\delta;\delta)}\frac{\left|h_0(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}{2}\leqslant\frac{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}{2}\int_{[-\pi;\pi]\setminus(-\delta;\delta)}|h(x_0+t)|<+\infty$$

$$\leq \frac{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x_0+t)|\,dt$$



Следствие: $f\in L^1[0;\pi]$

$f\sim\sum a_k\cos kx \sim \sum b_k\sin kx$ – ведут себя одинаково на $(0,\pi)$

f чет. продолж. $[-\pi;\pi]$ $\underset{\text{на}[0;\pi]}{=}$ f-нечет

(T) (признак Дини)

$f\in L^1[-\pi;\pi]$ $\quad x_0\in[-\pi;\pi]$ $\quad S\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$\cancel{S_n(f,x)=\sum_{k=-N}^{N}c_k e^{ikx}=c_0+\sum_{k=1}^{N}}$$

Пусть $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S|}{t}dt<+\infty$

Тогда $S_n(f;x_0)\to S$ $\left|\text{т.е. } \sum a_k\cos kx+b_k\sin kx+\frac{a_0}{2}=S\right|$

<u>Док-во:</u> $\displaystyle S_n(f,x_0)-S=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)\,dt-\int_{-\pi}^{\pi}S\cdot D_n(t)\,dt$

$$=\int_0^{\pi}\underbrace{(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S)}_{\varphi(t)}D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\cdot\sin nt+\cos nt\right)dt=b_n(h_1)+a_n(h_2)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

где $h_1=\frac{\varphi(t)}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $h_2(t)=\frac{\varphi(t)}{2}$

$h_2\in L^1[-\pi;\pi]$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|h_2|\leq\frac{1}{2}(2\cdot\|f\|_1+2S\cdot 2\pi)$

$\frac{1}{2}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\in L^1$ $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|\leq\int_0^{\pi}\frac{|\varphi(t)|}{t}\underbrace{\left(t\cdot\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)}_{\text{непр}}dt$

$\displaystyle\leq 2015\cdot\int_0^{\pi}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty$ $\qquad 2\,\frac{t}{2}\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big|\Rightarrow$ огр. на $[0,\pi]$ ≤ 2015

(NB) (1) Вместо усл. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty$

гост. усл.: $\exists\delta$ $\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty$

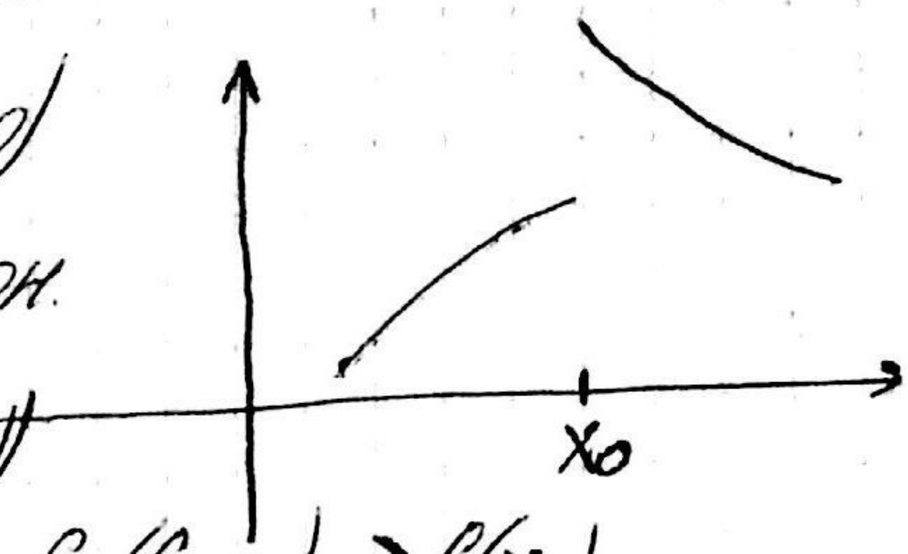
(2) f-непр $\not\Rightarrow$ вып. усл. Дини

$f(x):=\dfrac{1}{\ln\left(\frac{x}{10}\right)}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ $\quad x_0=0$

$$\int_0^{\pi}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S|}{t}dt=\int_0^{\pi}\frac{1}{t\ln\frac{t}{10}}dt \text{ – расх.}$$

Сл. $f \in L^1[-\pi;\pi]$ $\exists f(x_0+0), f(x_0-0)$

$\exists d_\pm := \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} \dfrac{f(x) - f(x_0 \pm 0)}{x - x_0}$ – кон.



Тогда $S_n(f; x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

[т. ан. f – непр. x_0] $\exists f'_\pm(x_0) \Rightarrow S_n(f; x_0) \to f(x_0)$

$$\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} d_+ - d_- \Rightarrow \frac{\varphi(t)}{t} - \text{огр}$$

(п) $f(x) = x$ $[-\pi, \pi]$

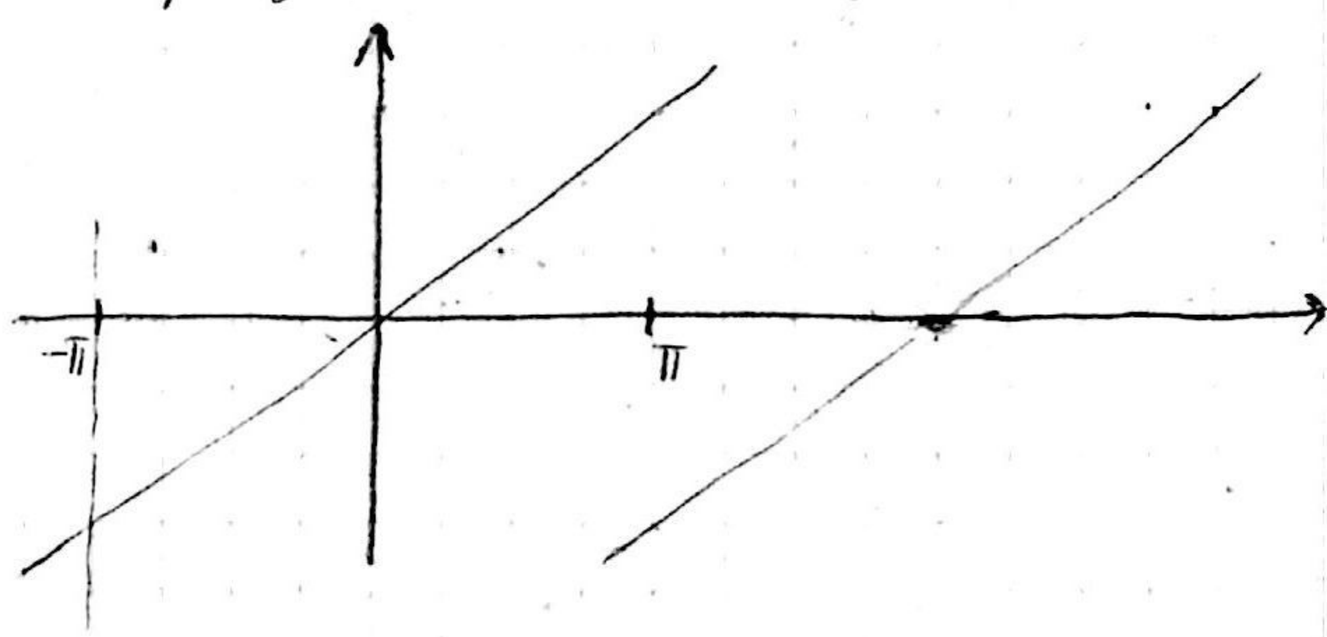
$a_k = 0$ в силу нечетности

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\sin kx}_{du} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right) \cdot x \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx}_{=0} =$$

$$= -\frac{2}{k}\cos \pi k = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k}$$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k} \sin kx \quad x \in (-\pi; \pi)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$



§ Свёртки и аппроксимативные единицы.

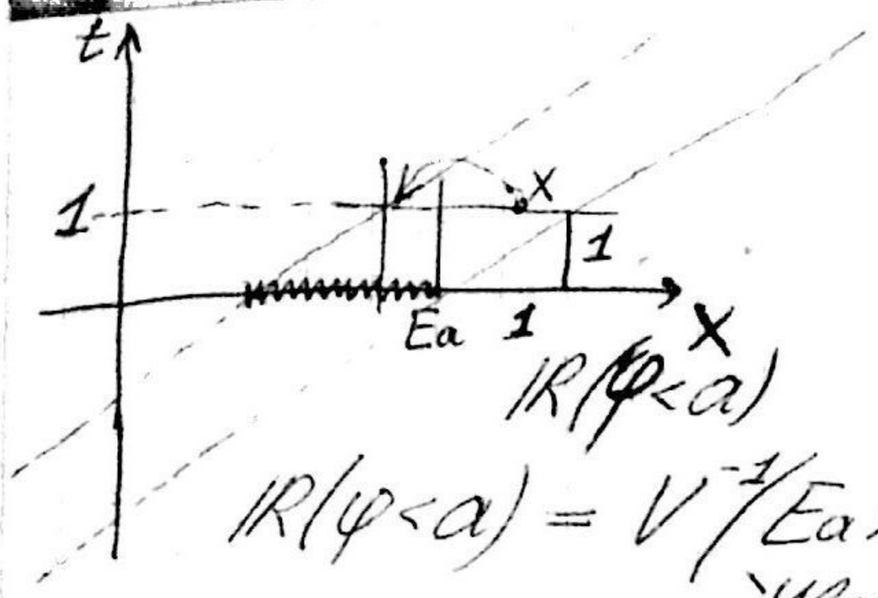
Опр. $f, K \in L^1[-\pi, \pi]$ $(f * K)(x)$ – свертка

$$(f * K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t)\, dt$$

Св-ва: 1) $f * K = K * f$

2) Корректность опр. $g(x,t) = f(x-t)K(t)$

а) $\varphi(x,t) = f(x-t)$ $\mathbb{R}(f<a)$: $E_a = \{x \mid f(x) < a\}$



$V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto (x-y; y)$

$V(\mathbb{R}(\varphi<a)) = Ea \times \mathbb{R}$ – изм.

$\mathbb{R}(\varphi<a) = V^{-1}(\underbrace{Ea \times \mathbb{R}}_{\text{изм.}})$

б) $g(x,t) \in L^1([-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi])$ $\iint\limits_{[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]} |g| \underset{\text{т. Тонелли}}{=\!=\!=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |k(t)|$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\cdot|k(t)|\,dx\right)dt =$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} |k(t)|\cdot\underbrace{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,dx\right)}_{=\|f\|_{L^1}}dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}|k(t)|\cdot\|f\|_1\,dt = \|f\|_1\cdot\|k\|_1$

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)$ – опр. п.в. x $\quad g(x,t)$ 1) при п.в. x $g_x(t)$ – сумм.

2) $x \mapsto \int g_x(t)\,dt$ – сумм

3) $\int g = \iint (g(x,t))$

③ $f, k \in L^1$ $C_n(f*k) = C_n(f)\cdot C_n(k)\cdot 2\pi$

$2\pi\cdot C_n(f*k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx$

$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}dt\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}k(t)\cdot e^{-int}\,dx\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}dt\,k(t)\cdot e^{-int}\underbrace{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cdot e^{-in(x-t)}\,dx\right)}_{2\pi C_n(f)} =$

$= 2\pi C_n(k)\cdot 2\pi C_n(f)$

Оператор свёртки $f \in L^1$ $f \mapsto f*k \in L^1$

Ⓣ $f \in L^p$ $k \in L^q[-\pi;\pi]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ $1 \le p < +\infty$

Тогда $f*k$ – непр. $[-\pi;\pi]$

$\|f*k\|_\infty \le \|f\|_p * \|k\|_q$

<u>Д-во</u>: н-во Гёльдера $\int|fg| \le \left(\int|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$|(f*k)(x+h)-(f*k)(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+h-t)\cdot k(t) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k(t)\right| =$

$= \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+h-t)-f(x-t))\,k(t)\,dt\right| \underset{\text{н-во Гельдера}}{\le} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+h-t)-f(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\|k\|_q =$

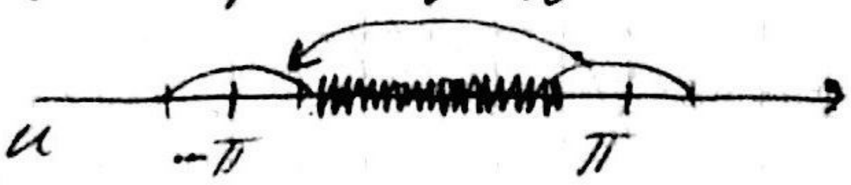
$= \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(s+h)-f(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|k\|_q$

$s = x-t$

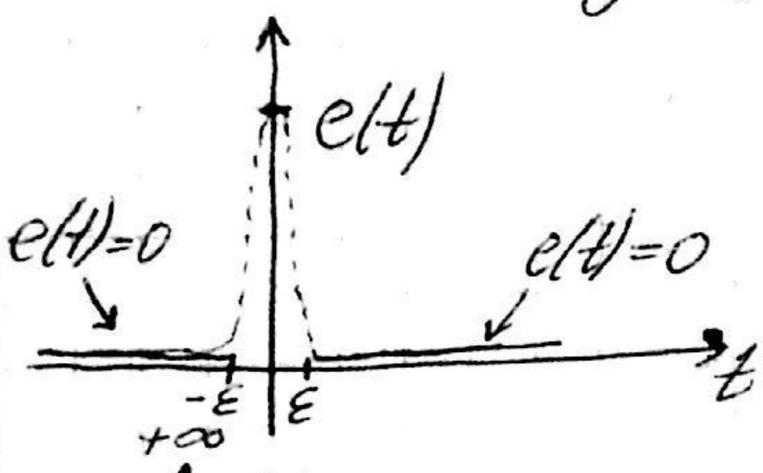
$ds = -dt$

$\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi}|f(s+h)-f(s)|^p(-ds) = \|f_n - f\|_p\,\|k\|_q \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Кстати можно взять $p=\infty$, $q=1$ и получить Лебега



? $\exists e \in L^1 \quad \forall f \quad f * e = f$



$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-t)\cdot e(t)dt \approx f(x)\cdot\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e(t)dt \approx f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(x) = 1$$

$$E_\delta := [-\pi;\pi] \setminus [-\delta;\delta]$$

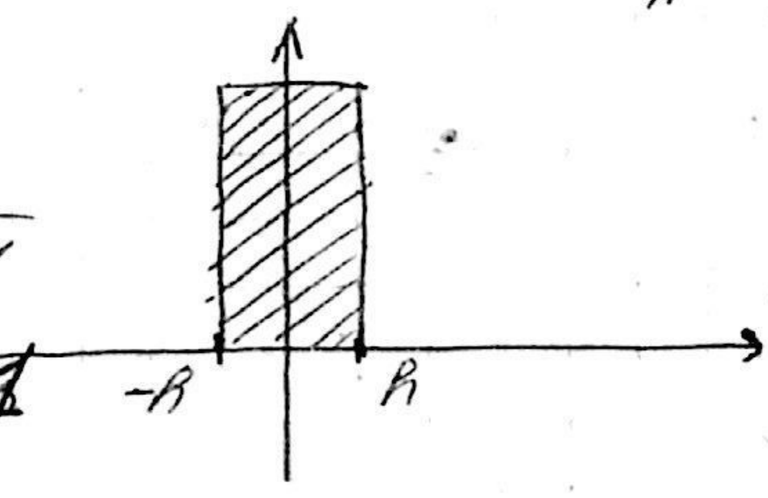
<u>Опр.</u> $D \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ – пред. точка для D

$\forall h \in D$ определена ф-ция $K_h(x)$, удовл. св-ву:

Аппрокс. единица: 1) $\forall h \in D$ $K_h \in L^1[-\pi;\pi]$ $\int_{-\pi}^{\pi} K_h(t) = 1$

AE 2) L_1-норма ф-ции K_h – огр. в совокупн.: $\exists M$ $\forall h \in D$ $\int_{-\pi}^{\pi} |K_h| dt \le M$

AE 3) $\forall \delta > 0$ $\int_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h \to x_0]{} 0$



Тогда сем-во ф-ций K_h δ аппр. единицей

(NB) Если $K_h \ge 0$, тогда AE2 след. из AE1 при ($M := 1$)

② Пусть $K_h \in L^\infty[-\pi;\pi]$

AE3') $\operatorname{Esssup}_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h \to x_0]{} 0$

Тогда AE1, AE2, AE3' – усиленные AE

③ K_h – A.E. $\dfrac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$ – тоже AE (в том числе усиленная)

(T) (об аппр. единицах)

] K_h – a.e. ($h \to h_0$) Тогда ① Если $f \in \widetilde{C}[-\pi;\pi]$ (периодич. ф-ция), то $f * K_h \rightrightarrows f$ $h \to h_0$

② $f \in L^p[-\pi;\pi]$ $\|f * K_h - f\|_p \to h_0$ при $h \to h_0$

③ $f \in L^1$, f – непр. x_0, K_h – усил. AE

$f * K_h$ – непр. (·) x_0

$(f * K_h)(x_0) \xrightarrow[h \to h_0]{} f(x_0)$

<u>Док-во</u>: п.2 при $p = 1$

$$f * K_h(x) - f(x) \overset{\text{св-во N1: } \int_{-\pi}^{\pi} K_h(t)dt = 1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\,dt$$

① f-равн. непр. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x_1, x_2 : |x_1-x_2|<\delta\ \ |f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

M из AE.2

$$|f*K_h(x)-f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\,K_h(t)\,dt =$$

фикс. ε, δ - из опр. равн. непр.

$$= \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E\delta} \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \le \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2M}\cdot|K_h(t)|\,dt \le \varepsilon\cdot\frac{1}{2M}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|K_h(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

по AE.2

$$\int_{E\delta} \le \max_{[-\pi;\pi]}|f|\cdot 2\cdot\int_{E\delta}|K_h|\,dt \xrightarrow[AE.3]{} 0 \Rightarrow \boxed{\exists U(h_0)\ \forall h\in U(h_0):}\ \int_{E\delta}|K_h|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x$

~ - равн. сх-ть

$$|f*K_h(x_0)-f(x_0)| \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0+t)-f(x_0)|\,|K_h(t)|\,dt = \int_{-\delta}^{\delta}+\int_{E\delta}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \le \int_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2M}\cdot|K_h(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{2M}\int_{-\pi}^{\pi}|K_h(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{E\delta} \le \operatorname*{ess\,sup}_{E\delta}|K_h|\cdot\int_{E\delta}|f(x_0-t)|+|f(x_0)|\,dt \le \operatorname*{ess\,sup}_{E\delta}|K_h|\left(2\pi|f(x_0)|+\|f\|_1\right)$$

$$\int_{E\delta}|f(x_0-t)|\,dt \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x_0-t)|\,dt = \|f\|_1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f*K_h-f| = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x-t)-f(x)\right)K_h(t)\,dt\,dx \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\cdot|K_h(t)|\,dx\,dt =$$

$$g(t)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx \qquad ①\ |g(t)|\le 2\cdot\|f\|_1$$

$$= \|K_h\|_1\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{g(-t)}_{g(0-t)}\cdot\underbrace{\frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1}}_{AE}\,dt \to \|K_h\|_1\cdot g(0)=0$$

② g - непр. в 0 по лемме о непр. сдвига

g-огр. $\Rightarrow g\in L^1$

g-непр. в 0 ③ $g*\tilde{K}_h(0)\xrightarrow[h\to h_0]{} g(0)$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad S = \lim S_n$

<u>Опр.</u> Выражение $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}$ б суммой ряда $\sum a_n$ по Чезаро (в смысле метода ср. арифм.) $\sum a_n \underset{\text{ср.ар}}{=} S$

(Т) Если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{\text{ф.ар.}}{=} S$

<u>Д-во:</u> $S = +\infty$ - упр. *

$$\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} S_k}{n+1} - S\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{S_k - S}{n+1}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|S_k - S|}{n+1} \quad (\leq)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n > N_1 \ |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

$$(\leq) \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ при больших } n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |S_k - S|}{n+1}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ (по *)}}$$

$\forall \varepsilon > 0$ „при больших n" $\left|\frac{\sum S_k}{n+1} - S\right| < \varepsilon$

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \underset{\text{ср.ар.}}{=} \frac{1}{2}$

0 1 2 3

$S_{чет} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_0 + \ldots S_n}{n+1} = \frac{1}{2}$

$S_{нечет} = 0$

$f \in L^1$

$S_n(f)$ - ч.с. ряда Фурье $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$ - сумма Фейера

$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)$

$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\,dt$

$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t)\,dt = \quad \Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$ - ядро Фейера

$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \Phi_n(t)\,dt$

(Т) Фейера

(1) f-непр. $f \in \tilde{C}[-\pi;\pi]$ $\sigma_n(f;x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f(x)$

(2)* $f \in L^p[-\pi;\pi]$ $\|\sigma_n(f;x) - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (NB) 2* знаем док-во только для $p=1$

(3) $f \in L^1$; f-непр. $x \Rightarrow \sigma_n(f;x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

Док-во: $\sigma_n(f;x) = f * \varphi_n(x)$ φ_n – А.Е. усиленная

AE1. $\varphi_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}$ – непр. на $[-\pi;\pi] \in L^\infty, L^1$

AE1) $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n = 1$ AE.2) $\varphi_n \geq 0$ $\|\varphi_n\|_1 = \int \varphi_n = 1$

AE.3) $\operatorname{ess\,sup}_{E_\delta} |\varphi_n| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Сл.1. $f \in L^1$; f-непр. x_0 $S_n(f;x_0)$ – сх.

Тогда $S_n(f;x_0) \to f(x_0)$

$\sigma_n(f;x_0) \to f(x_0)$ Если $\exists S = \sum a_n$, то $\sum a_n \underset{ср.ар.}{=} S$

Сл.2 (1) Триг. система полна в L^2 $\sin kx$, $\cos kx$

(2) $f \in L^1[-\pi;\pi]$ $\forall k$ $a_k(f) = 0$

$b_k(f) = 0$

$(\forall n\ c_n(f) = 0)$

Тогда $f = 0$ почти всюду.

Док-во: (2) $\Rightarrow$ (1) трив. $\langle f, \sin kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx = \pi b_k(f)$

(2) $f \in L^1[-\pi;\pi]$ $\underset{\overset{\parallel\!\!|}{0}}{\sigma_k(f;x)} \to f$ в L^1

Сл.сл. $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 \cdot 2\pi$ (рав-во Парсеваля)