Теорвер

$\boxed{11.03.2016}$ Моделирование сл. в. при помощи $X \sim U(0,1)$

Опр $F = F(x)$ — $\forall$ ф-я распределения

$$F^{-1}(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{ t : F(t) \le y \}, \quad (F^{-1}(1) = +\infty)$$

Утв 1: Пусть $X \sim U(0,1)$, $F(x)$ — $\forall$ ф. распр, тогда $Y = F^{-1}(X)$

$\Longrightarrow F_Y(x) = F(x)$

Δ

1. Покажем $F(F^{-1}(y)) \le y$. $D_y = \{ t : F(t) \le y \}$.
   Пусть $t_y = \sup_t D_y$, по св-вам $F(x)$

   $$F(t_y) = \lim_{t \to t_y - 0} F(t)$$

   Очевидно, что $\forall t < t_y$ $F(t) < y$
   ($\exists\exists t_0 < t_y : F(t_0) > y$: $\forall t \in D_y$ имеем $F(t) \le y < F(t_0)$ и из монот F $\forall t \in D_y$ $t \le t_0$ $t_0 < t_y$, верх. гр. D_y)

2. Пусть $F(x) \in C(\mathbb{R})$, тогда $F(t_y) = F(F^{-1}(y)) = y$
   $y = 1$, $y \in (0,1)$ — "y" достигается, т.е. $\exists\, \tilde{t}$, что $F(\tilde{t}) = y \Rightarrow \tilde{t} \in D_y$ и $y = F(\tilde{t}) \le F(t_y) \le y$

3. Равны множества

   $A := \{ t : F(t) \le y \}$ и $B := \{ t : t \le F^{-1}(y) \}$
   пусть $t \in A$, тогда $F(t) \le y$, отсюда $t \le t_y \Rightarrow A \subset B$
   пусть $t \in B$, то есть $t \le t_y$, тогда $F(t) \le F(t_y) \le y \Rightarrow B \subset A$.

4. $\overline{A} = \overline{B}$: $\{ t : y < F(t) \} = \{ t : F^{-1}(y) < t \}$

Докажем утв:

$$F_Y(y) = P(F^{-1}(X) < y) \overset{\text{следств 4}}{=\!=} P(X < F(y)) \overset{def}{=} F_X(F(y)) = \begin{cases} 0, & F(y) = 0 \\ F(y), & F(y) \le 1 \\ 1, & F(y) > 1 \end{cases}$$

не бывает $\to$ ($1,\ F(y) > 1$)

∇

Примеры

- $Y \sim Exp_\lambda$ $F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$ $\quad y = 1 - e^{-\lambda t}$, $e^{-\lambda t} = 1 - y$

  $\lambda t = -\ln(1-y)$, $t = -\ln(1-y)/\lambda$

  $\Longrightarrow Y = -\ln(1 - X)/\lambda \sim Exp_\lambda$

- $Y \sim U(a, b)$ $\quad F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \le a \\ \frac{t-a}{b-a}, & t < b,\ t \ge a \\ 1, & t \ge b \end{cases}$

  $y = \frac{t-a}{b-a} \Rightarrow Y = a + (b-a)X \sim U(a,b)$ $\quad X \sim U(0,1)$

Утв 2 $\exists X$ - сл. в. и $F_X(x) \in C(\mathbb{R})$, тогда $F_X(X) = Y \sim U(0,1)$

Заметим, что $P(X=c)=0$ — нет дискр. сост.

Δ

$$P(F_X(X) \le y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ P(X \le F_X^{-1}(y)) = P(X < F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

$$P_Y \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow P_Y(F_X(X) = y) = 0$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ y & 0<y\le 1 \\ 1 & y>1 \end{cases} \quad \text{т.е. } Y \sim U(0,1)$$

∇

$X \sim Exp_\lambda \quad \lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases} \qquad EX = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathcal{D}X = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x>0 \end{cases}$$

Опр Неотр. сл. в. X обладает св-вом отсутствия последействия, если

1. $P(X>x)>0, \quad \forall x>0$
2. $P(X>x+y \mid X>y) = P(X>x) \quad \forall x,y>0$

Если 1 верно, то 2 можно записать в более удобном эквивалентном виде

2'. $P(X>x+y) = P(X>x)\cdot P(X>y)$

Действ.
$$P(X>x+y \mid X>y) = \frac{P(\{X>x+y\} \cap \{X>y\})}{P(X>y)} = \frac{P(X>x+y)}{P(X>y)} \overset{2}{=} P(X>x).$$

Утв. Только пок. распр. во всей полноте (это без x,y) обладает свойством отсутствия последействия.

а) $\exists X \sim Exp_\lambda, \lambda>0$, тогда X обл. св-вом посл.

$$P(X>x) = P(X \ge x) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} > 0 \quad \forall x>0$$

$$\text{и } P(X>x+y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x}\cdot e^{-\lambda y} = P(X>x)P(X>y).$$

Пусть X обладает св-вом отс. последействия.
т.е. $P(X>x)>0 \quad \forall x>0$ и $P(X>x+y) = P(X>x)P(X>y)$

Обозначим $u(x) = P(X>x) \Rightarrow u(x+y) = u(x)\cdot u(y)$

Лемма $\exists u = u(x)$ задана на $[0,\infty)$, огр. на $\forall \Delta \subset (0,\infty)$ и $u(x+y) = u(x)u(y)$, тогда $u(x) = e^{-\lambda x}$, $-\infty < \lambda \le +\infty$

$\triangle$

$\forall x>0: \quad u(x) = u\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = u^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$

1. $u(x)=0 \Rightarrow \lambda=+\infty$
2. $\exists x_0: \quad u(x_0)>0. \qquad v(x) = \dfrac{u(x\cdot x_0)}{u(x_0)^x}$

$v(x+y) = \dfrac{u((x+y)x_0)}{u(x_0)^{x+y}} = \dfrac{u(xx_0)}{u(x_0)^x}\cdots \quad v(1)=1 \quad v(x)v(y)$

Почему? Достаточно показать, что $v(x)=1$, тогда $u(xx_0)=e\ldots$

- $v(n) = v(n-1)\,v(1) = \ldots = (v(1))^n = 1$
- $v\left(\frac{1}{n}\right): \; v(1)=1=v\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\left(v\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{\geq 0}; \quad v\left(\frac{1}{n}\right)=1$?

$\mathbb{Q}$ • $\forall \frac{m}{n}$, $n,m\in\mathbb{N}$ имеем $v\left(\frac{m}{n}\right)=1$ [m сумм $\frac{1}{n}$] Упорядо... по порядку

$\mathbb{R}$ • $\exists c: \; v(c)\neq 1, \quad c\notin\mathbb{Q}, \quad c>0$

$v(c+\underbrace{[c+1]-c}_{>0}) = v(c)\cdot v([c+1]-c)$, считаем, что $v(c)>1$

$\forall M>0 \;\exists N \quad (v(c))^N>M$

для $Nc>0 \quad \exists \alpha\in\mathbb{Q}, \; \alpha>0$

$Nc-1<\alpha<Nc$

$p = Nc-\alpha\in(0,1)$ и $v(p) = v(Nc-\alpha)\cdot v^{-1}(\alpha) = v(Nc) = (v(c))^N>M$ но v огр на $(0,1)$ ↯

$u(x)=P(X>x) \qquad u(x) = e^{-\lambda x}, \; x>0, \quad \lambda\in(-\infty,+\infty]$ по усл. ↯

$\triangleright$

18.03.2016 Д-во теоремы, что показ. – единств. распред.

$\triangle$ X – сл.в., обл. св-вом отсутствия последействия
($P(X\geq 0)=1, \quad P(X>x)>0 \;\forall x>0, \quad P(X>x+y)=P(X>x)P(X>y)$)

$\exists u(x):=P(X>x) \Rightarrow u(x)$ удовл. условиям леммы.

$u(x)=P(X>x) = e^{-\lambda x}, \; \forall x>0$

$u(x)\leq 1 \Rightarrow \lambda\geq 0 \qquad P(X>x)=e^{-\lambda x}, \; \lambda\geq 0$

$[\,0\leq P(X=x)\leq P(X>x-\varepsilon)-P(X>x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \forall x>0\,]$ вер-ть попасть в точку нулевая

$P(X\geq x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda\geq 0$

В точках $\lambda\in\{0,+\infty\}$ проблемы.

если $\lambda=0$, то $P(X\geq x)=1 \Rightarrow$ при любом x X – несобств. сл. величина, такие мы не рассматр.

$\lambda=+\infty$, то $\left.\begin{array}{l} P(X\geq x)=0 \quad \forall x>0 \\ P(X\geq 0)=1 \end{array}\right\}$ — вырожденная сл. величина – не рассм.

$\Rightarrow F_X(x) = 1-P(X\geq x) = 1-e^{-\lambda x}, \; x>0 \Rightarrow X\sim Exp_\lambda$

$\triangledown$

Но рассмотрим св-во отс. последействия только для m и n, где $m,n\in\mathbb{N}$. Тогда N – номер 1го успеха в последовательности Бернуллиевских испытаний с вер-ю $P(N=k)=pq^{k-1}, \; p\in(0,1)$.

Утв Покажем, что св-во отс. п. работает при $n, m \in \mathbb{N}$

Δ

$$P(N>k) = P(N=k+1)+P(N=k+2)+\dots = \sum_{k=k+1}^{\infty} P(N=k) \ominus$$

С по несовместности сразу раскрыли в Σ

$$\ominus\ p\frac{q^k}{1-q} = q^k > 0$$

$$P(N>n+m) = q^{n+m} = q^n q^m = P(N>n)P(N>m)$$

∇

Связь геометрического и показательного р-й

Теор $\exists\ N_m$ – послед. с.в. имеющих геометр. распределение.

$p_m = p(m) = \frac{\lambda}{m} = \lambda\Delta$ (p_m – вер-ть p в $\{0,1\}$ геом распр. N)

Кроме того, испытание Бернулли для соотв. N_m происх в момент. времени $0, \Delta, 2\Delta, \dots$; X_m – время до появл. первого успеха сл. величины N_m

$\Rightarrow N_m = k \Leftrightarrow X_m = \Delta k$, то есть $X_m = \frac{N_m}{m}$ (по мере)

Тогда $X_m \xrightarrow[m\to\infty]{d(F)} X \sim Exp_\lambda$

Δ

Пусть $F_{X_m}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{x>0} F_X(x)$ (поточечно) и $F_{X_m}(x) \equiv F_X(x) = 0$ if $x \le 0$

$F_{X_m}(x) = P(X_m < m) = 1 - P(X_m \geq m)$. Найдем $\lim\limits_{m\to\infty} P(X_m \geq x)$

$P(X_m = m) \overset{N_m = mX_m}{=} P(N_m = mx) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $\qquad q_m = 1 - p_m = 1 - \frac{\lambda}{m}$

$P(X_m > x) = P(N_m > mx) = P(N_m > [mx]) = \left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{mx+\beta} \rightarrow$, $\beta \in [0,1]$

$\xrightarrow{(1-\frac{\lambda}{m})^\beta \to 1} \left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^\beta \left[\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{-\frac{m}{\lambda}}\right]^{-\frac{mx}{m}\lambda} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{2 зам предел}} 1\cdot e^{-\lambda x} \Rightarrow F_{X_m}(x) \to F_X(x)$

$\{(1+\frac{1}{x})^x \to e\}$

∇

Опр $X \sim N(a, \sigma^2)$, $a, \sigma \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x-a}{2\sigma^2}\right) \qquad \{X_{a,\sigma^2}\}$$

X имеет нормальное распределение с a, σ^2 (Гауссовское)

$\exists\ a=0, \sigma^2 = 1 \Rightarrow X_{0,1} \sim N(0,1)$ – стандартное распр

Утв Линейное преобразование сохраняет $\{X_{a,\sigma^2}\}$

$X \sim N(a, \sigma^2)$, тогда $Y = \frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$

Δ

$$F_Y(y) = P(Y<y) = P\left(\frac{X-a}{\sigma} < y\right) = P(X < \sigma y + a) = F_X(a+\sigma y) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a+\sigma y} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \left\{t := \frac{x-a}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma = F_{N(0,1)}(t)$$

∇

Следствие $Y = \frac{X-a}{\sigma}$, $X = a + \sigma Y$, $Y \sim N(0,1)$ $\forall X \sim N(a, \sigma^2)$

$\Rightarrow EX = a + \sigma EY$, $DX = \sigma^2 DY$

Моменты $Y \sim N(0,1)$

$EY = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$ {есть сходимость + нечётн.}

$DY = E(Y^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \stackrel{\text{abs.cx}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \{t = \frac{y^2}{2}\} =$

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} 2t e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3}{2}) = 1$

Следствие Моменты $X \sim N(a, \sigma)$. $EX = a + \sigma EY = a$
$DX = \sigma^2 DY = \sigma^2$

Замечание $F_Y(+y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+y} e^{-t^2/2} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$

$= \{$в силу чётности$\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - F_Y(-y)$

Правило 3σ:

Пусть $X \sim N(a, \sigma^2)$. Найдём $P(|X - a| < 3\sigma) = P(\sigma|Y| < 3\sigma) =$

$= P(|Y| < 3) = F_Y(3) - F_Y(-3) = 2F_Y(3) - 1 = 0.9973$ много!

Распр. и нахождение моментов ф-й от сл. величины.

Пусть $X = X(\omega)$ – сл.в. $((\Omega, \Sigma, P))$ и $\varphi = \varphi(x)$ – борел. ф-я

$\Rightarrow Y = \varphi(X)$ – сл.в.

Моменты сл. Y.

$EY \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \varphi(X(\omega)) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} y \, dF_Y(y)$

Найдём распределение Y.

1. $F_Y(y) = P(Y < y) = P(\varphi(X) < y) = P(X \in \varphi^{-1}(-\infty, y))$

2. Пусть $\varphi(x)$ – возр. и $\exists \varphi^{-1}(y)$, тогда $F_Y(y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) =$
$= F_X(\varphi^{-1}(y))$

Если X – непр. сл.в., а φ – дифференцируема, то $\exists$ плотность, равная

$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y)) (\varphi^{-1}(y))'_y = \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(y)|}$
φ-строго монот.

3. $\varphi(x) = ax + b$, $a > 0$. $F_Y(y) = P(aX + b < y) = P(X < \frac{y-b}{a}) =$
$= F_X(\frac{y-b}{a})$

$f_Y(y) = f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{|a|}$

Пример $X \sim N(1, \sigma^2)$, $Y = |X - 1|$, $F_Y(y) = P(|X-1| < y) =$

$= \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ -y+1 < X < y+1, & y > 0 \end{cases} = y > 0 \, ? \, [F_X(y+1) - F_X(y-1)] : 0 =$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{y+1} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} dx - \int\limits_{-\infty}^{-y+1} \exp\left(\frac{-(x-1)^2}{2\sigma^2}\right)\right) = \{ t = x-1 \} \ldots, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) - (-1)\exp\left(\frac{(-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

~~$|Y| \sim N(0, \sigma^2)$~~

$|Y|$ при $\sigma = 1$ в нег. плотности имеет ф-ю Лапласа.

25.02 2016

Системы случайных величин.

Опр Общий вариант — случайные векторы или системы случайных величин.

Пусть $X_1 \ldots X_n$ — упорядоченный набор сл. величин, зад. на (Ω, Σ, P)

Тогда $\overline{X} = (X_1 \ldots X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega) \ldots X_n(\omega))$, т.е. $\overline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется системой сл величин или случайным вектором.

Мера $p = p(d\bar{x})$ переносится на $\mathbb{R}^n$:
$P_{\bar{x}}(D) = p(\overline{X} \in D) \quad \forall D \in \Sigma_{B,n}$

Возникает вероятностное пространство $(\mathbb{R}^n, \Sigma_{B,n}, P_{\bar{x}})$, т.е. $\overline{X} = (X_1 \ldots X_n)$ порождает вер. пр-во

$P_{\bar{x}} = p(d\bar{x})$ называется распределением сл. вектора $\overline{X}$.

Опр $F_{\bar{x}}(t_1 \ldots t_n) = p(x_1 < t_1 \ldots x_n < t_n) = P_{\bar{x}}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} \{-\infty, t_i\}\right)$

Свойства $F_{\bar{x}}$ (аналогичны F_x):

1. $F_{\bar{x}}(x_1 \ldots x_n)$ не убывает покомпонентно

$\triangle$

$\exists\, x_{11} < x_{12}$; $\quad B_1 = \{X_1 < x_{11}\} \cdot \prod\limits_{i=2}^{n} (X_i < x_i) \le \{X_1 < x_{12}\} \prod\limits_{i=2}^{n} (X_i < x_i) = B_2$

$\Rightarrow p(B_1) \le P(B_2)$

$\Longleftrightarrow F_{\bar{x}}(x_{11} \ldots x_n) \le F_{\bar{x}}(x_{12}, \ldots x_n)$

$\triangleright$

2. $\lim\limits_{x_i \to +\infty} F_{x_1 \ldots x_n}\underbrace{}_{(x_1 \cdots x_n)} = F_{x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n}(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)$

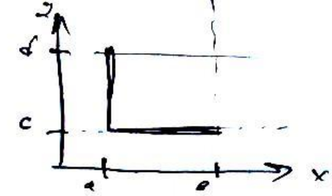
3. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_{x_1 \ldots x_n} = 0$

4. $F_{\bar{x}}(\bar{x})$ — покомпонентно непрерывна

Утв $F(\bar{x})$ обладающая св-вами 1-4 порождает выборочное вер. пр-во со счетно аддитивной мерой и какой-то один случайный вектор на нем: $\overline{X}$: $F_{\bar{x}}(\bar{x}) = F(\bar{x})$

Утв Задание $F_{\bar{x}}(x) \Longleftrightarrow$ задание $P_{\bar{x}}(d\bar{x})$ на $\mathbb{R}^n$

$\triangle$ $n=2$, тогда $\Sigma_{Б,2}$ порождение $[a,b)\times[c,d)$



$\uparrow$ при $n>2$ аналогично. На алгебре меры будут совпадать:
$F_{XY}(u,v)$ опр $\Rightarrow P_{XY}([a,b)\times[c,d)) =$
$= F_{XY}(b,d) - F_{XY}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,b)$
(типа площади)

∇

Опр $\overline{X}=(X_1\dots X_n)$ называется дискретным сл. в., если мн-во его значений не более чем счетно $(\{\overline{X}(\omega), \omega\in\Omega\})$

Опр $\overline{X}$ наз-ся непр. сл. вектором (имеет непр. распределение), если $\exists f_{\overline{X}}(x)\geq 0: \ \forall D\in\Sigma_{Б,n} \ P_{\overline{X}}(D)=\int\limits_D f_{\overline{X}}(\overline{x})dx$

Опр $\overline{X}$ распределен сингулярно, если нет дискретной компоненты и $\exists A: P_{\overline{X}}(A)=1$, $\lambda(A)=0$ ← мера Лебега

Свойства $f_{\overline{X}}(\overline{x})$:

1. $\prod\limits_{i=1}^{n}(-\infty, x_i)=A\in\Sigma_{Б,n} \Rightarrow P_{\overline{X}}(A)=F_{\overline{X}}(\overline{x})=\int\limits_A f_{\overline{X}}(\overline{x})d\overline{x}=$
$=\int\limits_{-\infty}^{x_1}dt_1\int\limits_{-\infty}^{x_2}dt_2\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}f_{\overline{X}}(\overline{t})dt_n$

2. $f_{X_1\dots X_n}(t_1\dots t_n)=\left\{\begin{matrix}\text{полагаем, т.к.}\\ \text{плотность - не}\\ \text{ф-я, а класс ф-й}\end{matrix}\right\}=\frac{\partial^n F_{\overline{X}}(\overline{x})}{\partial x_1\dots\partial x_n}(t_1\dots t_n)$

3. $\lim\limits_{x_1\to\infty}F_{X_1\dots X_n}(x_1\dots x_n)=\lim\limits_{x_1\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{x_1}dt_1\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}f_{X_1\dots X_n}(t_1\dots t_n)dt_n=$
$=F_{X_2\dots X_n}(x_2\dots x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_2}dt_2\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}f_{X_2\dots X_n}(t_2\dots t_n)d\overline{t}$

3'. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1\dots X_n}(t_1\dots t_n)dt_1=f_{X_2\dots X_n}(t_2\dots t_n)$

4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n}f_{X_1\dots X_n}(t_1\dots t_n)d\overline{t}=P_{\overline{X}}(\mathbb{R}^n)=1$

Следствие Пусть $\overline{X}$ - непр. сл. вектор, тогда $\forall j_1\dots j_k\in\mathbb{N}$
$j_i\leq n$, $1\leq k<n$, $j_1<j_2<\dots<j_k$
$(X_{j_1}, X_{j_2}\dots X_{j_k})$ - непр. случайный вектор.

Независимость сл. величин и распределений

Опр 1. Сл. величины $\{X_i\}_{i=1}^n$ независимы по сов-ти, если
$\forall j_1\dots j_k\in\mathbb{N}: (j_i\neq j_l \ \ k_i\neq l) \& (2\leq k\leq n)$ и $\forall D_1\dots D_k\in\Sigma_Б$
Новое понятие без повтор.
(1) $P(X_{j_1}\in D_1,\dots X_{j_k}\in D_k)=P(\prod\limits_{i=1}^{k}(X_{j_i}\in D_i))=\prod\limits_{i=1}^{k}P(X_{j_i}\in D_i)$

2. $A_1,\dots,A_n$ — наборы мн-в событий

Данная система наборов называется независимой если $\forall b_{j_1}\in A_1, B_{j_2}\in A_2\dots B_{j_k}\in A_{j_k}$
(2) $P(\prod\limits_{i=1}^{k}B_{j_i})=\prod\limits_{i=1}^{k}P(B_{j_i})$

3. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ - сл. вел., тогда $\sigma(X)=\{X^{-1}(D), D\in\Sigma_Б\}$ - σ-ал. порожденная X
под σ-алгебра Σ

Утв. Независимость сл.в. $X_1 \dots X_n \Leftrightarrow$ независимость $\sigma(X_1) \dots \sigma(X_n)$

Δ следует из равенства:

$$P\left(\prod_{i=1}^{k} X_{v_i} \in \mathcal{A}_i\right) \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{k} P(X_{v_i} \in \mathcal{A}_i) = \prod_{i=1}^{k} P(X_{v_i}^{-1}(\mathcal{A}_i))$$

∇

Теорема 1 Независимость $X_1 \dots X_n \Leftrightarrow F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$ (3)

Δ ($\Rightarrow$) $\exists\ \mathcal{A}_i = (-\infty, x_i) \Rightarrow F_{\bar{X}}(x_1 \dots x_n) = P(\bar{X} \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i) = P_{\bar{X}}(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i(\mathcal{A}_i)) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

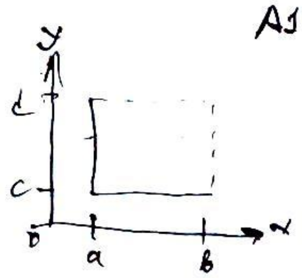
($\Leftarrow$) $F_{\bar{X}}(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

схема: 1) (3) $\Rightarrow$ незав. алг. порожд. сл.в.
2) нез. алгебр $\Rightarrow$ незав. σ-алгебр

при $n = 2$

(1.04.2016) Докажем при $n = 2$

$\Leftarrow$ А. Докажем, что независимы $\mathcal{A}_1 = \{X^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A}_Б\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{Y^{-1}(B),\ B \in \mathcal{A}_Б\}$



А1. Пусть $A = [a, b)$, $B = [c, d)$

$A_1 = X^{-1}([a,b))$, $A_2 = Y^{-1}([c,d))$

$P(\omega : X \in A, Y \in B) = P(X^{-1}(A)\ Y^{-1}(B)) = P((x,y) \in A \times B) =$

$= (F_X(b) - F_X(a))F_Y(d) - (F_X(b) - F_X(a))F_Y(c) =$

$= P(X \in [a,b)) \cdot P(Y \in [c,d))$

А2. $\mathcal{A}_Б = \{A : A = \sum^{m} \underbrace{[a_i, b_i)}_{\Delta_i},\ \Delta_i \cdot \Delta_j \overset{i \neq j}{=} \varnothing\}$

$\Rightarrow \forall A \in X^{-1}(\mathcal{A}_Б),\ B \in Y^{-1}(\mathcal{A}_Б)$

$A = X^{-1}(\sum_{i=1}^{m} \Delta_i)$, $B = Y^{-1}(\sum^{k} \Gamma_j)$, $\Delta_i = [a_i, b_i)$, $\Gamma_j = [c_j, d_j)$

$P(A \cdot B) = P(\omega : X(\omega) \in \sum \Delta_i,\ Y(\omega) \in \sum \Gamma_j) =$
$= P(\sum^{m} X^{-1}(\Delta_i) \sum Y^{-1}(\Gamma_j)) =$
$= P(\sum^{m} \sum^{k} X^{-1}(\Delta_i)\, Y^{-1}(\Gamma_j)) =$
$= \sum^{m} \sum^{k} P(X^{-1}(\Delta_i)\, Y^{-1}(\Gamma_j)) \overset{А1}{=} \sum^{m} \dots \sum^{k} \dots = P(A) \cdot P(B)$

Б. Утверждение

$\exists\ (\Omega, \Sigma, P)$ и $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — 2 алгебры, содерж. только мн-ва из Σ, $\Sigma_1 = \sigma(\mathcal{A}_1)$ $\Sigma_2 = \sigma(\mathcal{A}_2)$ под сигма

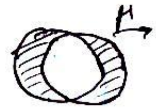
Из незав. $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2 \Rightarrow$ незав. Σ_1 и Σ_2

В. Д-во утверждения

В1. Теорема аппроксимации $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$

$\exists\ (\Omega, \Sigma, P)$ $\mathcal{A}$ — алгебра некот. подмн-в из Σ, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$ под σ-ал Σ

Тогда $\forall A \in \mathcal{U}$ $\exists$ последоват. $A_n \in \mathcal{A}$. $d(A, A_n) =$

Доказ-во позже  $\xrightarrow{}0$ $= P(A\bar{A}_n + \bar{A}A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Важные свойства:

$\boxed{1}$ $d(A, B_n) \to 0 \iff P(A\bar{B}_n) \to 0$ и $P(\bar{A}B_n) \to 0$

$0 \le d(AB_n) = P(A\bar{B}_n + \bar{A}B_n) \overset{несовм}{=} P(A\bar{B}_n) + P(\bar{A}B_n) \to 0$

$\boxed{2}$ Из $(A, A_n) \to 0 \Rightarrow \lim P(A_n) = P(A)$

$d(A, A_n) = P(\bar{A}A_n) + P(A\bar{A}_n) = P(\bar{A}A_n) + P(A) - P(AA_n) \le$

$\overset{\shortparallel}{\Omega - A_n}$ $(\le P(A\bar{A}_n) + P(A) + P(AA_n) \le \dots)$

$\le \underset{\to 0}{P(A_n)} + \underset{\to 0}{P(A)} \to 0$

$P(A) = \underset{\to 0}{P(A\bar{A}_n)} + P(AA_n) = P(A\bar{A}_n) + P(A_n) - P(\bar{A}A_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_n) \to P(A)$

?② $d(A, A_n) \to 0 \Rightarrow P(A_n) \to P(A)$

③ Св-ва (метрики)

а) $d(AB) = d(BA)$

б) $d(A,B) \ge 0$

в) неравенство Δ: $d(A, C) = P(A\bar{C}) + P(\bar{A}C) = P(A\bar{C}B) + P(A\bar{C}\bar{B})$ $(B+\bar{B})$ $(B+\bar{B})$

$+ P(\bar{A}CB) + P(\bar{A}C\bar{B}) \le P(\bar{C}B) + P(C\bar{B}) +$
$+ P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$
$= d(A,B) + d(B,C)$

г) $|P(A) - P(B)| \le d(A,B)$

$0 \le P(A) - P(AB) + P(A\bar{B}) = P(B) - P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) \le P(B) + d(A,B)$

Отсюда $|P(A) - P(B)| \le d(A,B)$ в силу симметрии

То есть $d(A,B) = 0 \Rightarrow P(A) = P(B)$
$P(A\setminus B) = P(B\setminus A) = 0.$ $(A\setminus B = A - AB \Rightarrow P(A) - P(B) = P(AB))$

То есть d с точн. до факторизации по мн-вам нулевой меры следует равенство d – расстояние.

Доказательство теор. аппрокс:

$\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{U}$. Назовем $\forall$ мн-во $A \in \mathcal{U}$ аппроксимируемым, если $\exists A_n \in \mathcal{A}$: $d(A, A_n) \to 0$. $\exists$ $\mathcal{U}^*$ – мн-во всех апр. событ. из $\mathcal{U}$

Покажем $\mathcal{U}^*$ – сигма-алгебра, тогда теор. аппрокс. доказана
$(\mathcal{A} \subset \mathcal{U}^* \Rightarrow \mathcal{U} = \sigma(\mathcal{A})$ – под σ-ал $\mathcal{U}^*)$

Покажем $\mathcal{U}^*$ – алгебра

$\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{U}^*$. $\exists A \in \mathcal{U}^*$ $\exists A_n \in \mathcal{A}$, $d(A A_n) = P(A A_n) + P(\bar{A} A_n) =$

$= P(\bar{\bar{A}} A_n) + P(\bar{A} \bar{\bar{A}}_n) = d(\bar{A}, \bar{A}_n) \to 0 \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{U}^*$.

$d(A+B, A_n+B_n) = P((A+B)\cdot \overline{A_n \cdot B_n}) + P(\overline{A}\,\overline{B}(A_n+B_n)) \le$

$\le P(A \bar{A}_n \bar{B}_n) + P(B \bar{A}_n \cdot \bar{B}_n) + P(\bar{A}\bar{B} A_n) + P(\bar{A}\bar{B} B_n) \le$

$\le d(A, A_n) + d(B, B_n) \to 0$

1) не пусто
2) $A \in \mathcal{U}^* \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{U}^*$
3) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A+B \in \mathcal{U}$

Итого $\mathcal{U}^*$ – алгебра. Покажем, что она σ-алгебра.

$\exists\, C = \sum^{\infty} C_k,\ C_k \in \mathcal{U}^* \overset{?}{\Rightarrow} C \in \mathcal{U}^*$

$D_n = \sum^{n} C_k \Rightarrow D_n \in \mathcal{U}^*\ \forall n$, т.е. D_n – дизъюнк.

$D_n \subseteq D_{n+1} \ldots \Rightarrow \lim P(D) \overset{\text{т. акс.}}{=} P(C)$

Найдем $d(D_n, C)$ $\qquad d(D_n, C) = P(\bar{C}, D_n) + P(C \bar{D}_n) =$

$= P(C(\Omega \setminus D_n)) = P(C) - P(D_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\qquad \Pi\, C_k \quad \sum C_k \quad \sum^{\infty} C_k : \Pi\, C_k$

D_n – апр C, $D_n \in \mathcal{U}^*$
$\forall D_n\ \exists A_{ni} \in A \qquad d(D_n, A_{ni}) < 1/n$

$d(C, A_{nN}) \overset{\text{нр. о}}{\le} d(C, D_N) + d(D_n, A_{nN}) < d(C, D_n) + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

∇ чтд

(8.04.2016) Независимость эквивалентна расщеплению ф-и распределения. Независимость алгебр влечет незав. σ-алгебр.

Утв A_1, A_2 – независимые алгебры, $\Sigma_1 = \Sigma(A_1)$, $\Sigma_2 = \Sigma(A_2)$
$\Rightarrow \Sigma_1$ и Σ_2 независимы.

Δ

$A_1 \in \Sigma_1 = \Sigma(A_1)$, $A_2 \in \Sigma_2 = \Sigma(A_2)$
по т. аппроксимации $\exists A_{1,n} \in A_1$ и $A_{2,n} \in A_2$ – аппроксимирующие A_1 и A_2
(т.е. $d(A_{1,n}, A_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $d(A_{2n}; A_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

$\forall$ событие $B = A_1 \cdot A_2$, обозначим $B_n = A_{1n} \cdot A_{2n}$.
Покажем, что B_n аппрокс. B.

$d(B, B_n) = P(\bar{B} \cdot B_n) + P(B \cdot \bar{B}_n) = P((\bar{A}_1 + \bar{A}_2) A_{1n} A_{2n}) + P(A_1 A_2 (\bar{A}_{1n} + \bar{A}_{2n})) \le$

$\le P(\bar{A}_1 \cdot A_{1n}) + P(\bar{A}_2 A_{2n}) + P(A_1 \bar{A}_{1n}) + P(A_2 \bar{A}_{2n}) =$

$= d(A_2, A_{2n}) + d(A_1, A_{1n}) \to 0$

по 2му свойству аппроксимизации.

$P(A_1 \cdot A_2) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_{1n} A_{2n}) \underset{\text{алгебры}}{\overset{\text{незав.}}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} (P(A_{1n}) P(A_{2n})) = \lim \cdot \lim = P(A_1) \cdot P(A_2) \Rightarrow$

Σ-алгебры Σ_1 и Σ_2 независимы.

Было доказано, что при $n=2$ если $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\Leftrightarrow$ X и Y независимы

$\Rightarrow A_1$ и A_2 независимы!

∇

<u>Пример</u> $F_{XY}(x,y) = a(1-e^{-2x})(1-e^{-3x}) = a_1(1-e^{-2x})\,a_2(1-e^{-3x})$ $\quad a = a_1 = a = 1$

$\Rightarrow$ X и Y независимы

<u>Теорема 2</u> Критерий независимости абс. непр. сл. величин

(A) $\exists\, \vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ - непр. случайный вектор, т.е. $\exists f_{\vec{x}}(\vec{x})$ — плотность, порождающая $P_{\vec{x}}(dx)$.

~~Тогда~~ известно, что X_i — непр. случайная величина.

~~и если~~ Тогда $\{X_i\}$ - независимы $\Leftrightarrow (*)$ $f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i)$

(B) Пусть $X_1 \dots X_n$ - непр. сл. величины.

и, ~~если~~ $X_1 \dots X_n$ независимы, тогда сл. вектор $\vec{X} = (X_1 \dots X_n)$ - непр. случайный вектор и $(*)$ справедливо.

<u>Замечание</u> Независимость нужна уже даже для непрерывности $\vec{x}$ (очень нужна)

(A) Δ $(n=2)$

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $f_{x_1x_2}(t_1,t_2)$, тогда $F_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{x_1x_2}(t_1,t_2)\,dt_2$

и знаем, что $\exists f_{x_1}(t_1) = \int_{\mathbb{R}} f_{x_1x_2}(t_1,t_2)\,dx_2$ (аналогично для x_2)

и $F_{x_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_{x_i}(t_i)\,dt_i$

Пусть X_1 и X_2 независимы, тогда:

$$F_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{x_1x_2}(t_1,t_2)\,dt_2 \overset{\{\text{независимость}\}}{=} F_{x_1}(x_1)\,F_{x_2}(x_2) = \int \cdot \int =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2\, f_{x_1}(t_1) f_{x_2}(t_2) \Rightarrow f_{x_1x_2}(t_1,t_2) = f_{x_1}(t_1) f_{x_2}(t_2)$$

∇

(B) Δ

X_1 и X_2 - независим. и непр. сл. величины. $\Leftrightarrow F_{x_1x_2}(x_1,x_2) = F_{x_1}(x_1)\cdot F_{x_2}(x_2)$

Нужно показать, что (x_1, x_2) — непр. вектор и $(*)$

$$F_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} f_{x_1}(t_1)\,dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{x_2}(t_2)\,dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} (f_{x_1}(t_1) f_{x_2}(t_2))\,dt_2$$

т.е. $\exists\, f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = f_{x_1}(x_1)\cdot f_{x_2}(x_2)$

$\Rightarrow$ Q.E.D

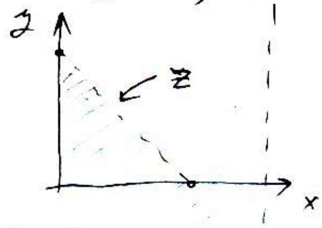
∇

16.04.16

<u>Пример</u> $\exists\, X \sim Y \sim Exp_2$ и незав. $Z = X+Y$

Найти $f_{X|Z}(x|z)$:

1. $\exists z < x$,

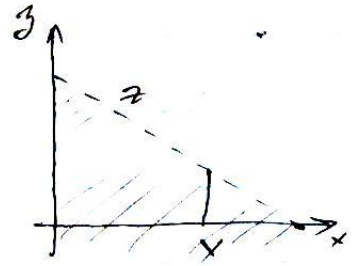


$F_{z,x}(z,x) = P(X\ Y < z,\ X < x) =$

$$= \int_0^z du \int_0^{z-u} f_x(u) f_y(v)\, dv \ ; \quad \frac{\partial^2 F(z,x)}{\partial x \partial z} = 0,$$

т.к. $F(z,x)$ не зависит от x

2. $\exists z > x$



$$F_{z,x}(z,x) = \int_0^x du \int_0^{z-u} f_x(u) f_y(v)\, dv$$

$$f_{z,x}(z,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0 f_x(x) f_y(v)\, dv =$$

$$= f_x(x) f_y(z-x)\cdot 1 = \lambda e^{-\lambda x}\cdot \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} = \lambda^2 e^{-\lambda z}$$

$0 < x < z$

$f_z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$

$$f_{x|z}(x|z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda z}}{\lambda^2 z e^{-\lambda z}}, & 0 < x < z \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & 0 < x < z \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

– равномерное распределение при каждом фиксир. z

Найдем регрессию.

$$E(X|Z=z_0) \overset{z_0>0}{=} \int_0^{z_0} x \cdot \frac{1}{z_0}\, dx = \frac{z_0}{2}, \quad m_{x|z}(z) = \frac{z}{2},\ z > 0$$

ФПМО $EX = \frac{1}{\lambda}$

$$E(E(X|Z)) = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty z^2 e^{-\lambda z}\, dz = \frac{\lambda}{2}\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} = EX$$

Многомерный нормальный закон

Опр. $(X_1 \dots X_n)$ имеет центрированное нормальное (n-мерное) распределение, если:

$$f_{x_1 \dots x_n}(x_1 \dots x_n) = \frac{\sqrt{\det(A)}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q(x_1 \dots x_n)\right),$$

где $A = (a_{ij})$, $Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, $Q = xAx^T$,
$A = K^{-1}$ – обратная матрица ковариации.

Пример $n = 2 \Rightarrow K_{x,y} = \begin{pmatrix} D(X) & K(X,Y) \\ K(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$, $\det K = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - K^2(X,Y) =$
$= \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - r^2(X,Y))$ при $r \neq 1$.

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists A = K^{-1} = \frac{1}{\det(K)}\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & -K(X,Y) \\ -K(X,Y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-r^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{r}{\sigma_x \sigma_y} \\ -\frac{r}{\sigma_x \sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix}$$

$$Q(x,y) = (x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1-r^2}\left(\frac{x}{\sigma_x^2} - \frac{yr}{\sigma_x \sigma_y} \quad -\frac{xr}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y}{\sigma_y^2}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1-r^2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - 2\frac{xy\,r(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}\right)$$

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_x^2 \sigma_y^2 r^2 \frac{1}{1-r^2}(Q(x,y))\right)$$

Следствие Если X, Y - нормальные, тогда

некоррелированность $\Longleftrightarrow$ независимость

Понятие условного матожидания в общем случае

(NB) В дискретном случае было показано:

$$E(E(X|Y), Y \in B) = E(X, Y \in B) \quad \forall B \in \Sigma_5$$

Средние по $E(X, Y)$ и X по всем прообразам Y совпадают на $\sigma(Y)$

Опр. Условным матожиданием н-ое $E(X|Y) = \varphi$ такая $\sigma(Y)$ — измеримая сл. величина

$$\forall B \in \Sigma_5 \quad E(E(X|Y), Y \in B) = E(\varphi, Y \in B) \stackrel{*}{=} E(X, Y \in B)$$

(NB) 1. $\sigma(Y)$ - измеримость означает, что сл. в. Y обладает тем св-вом, что $\sigma(\varphi)$ — подалгебра $\sigma(Y)$

2. $\sigma(Y)$ - измеримость означает, что φ - ф-я от y.

Неравенства для моментов

Утв (Н-во Шварца)

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Δ

$(a \pm b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2|ab| \leq a^2 + b^2 \Rightarrow$] $a^2 = \frac{X^2}{E(X^2)}$, $b^2 = \frac{Y^2}{E(Y^2)}$

Отсюда

$$2\frac{|XY|}{\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}} \leq \frac{X^2}{E(X^2)} + \frac{Y^2}{E(Y^2)} \cdot \Big| E(\cdot)$$

$$2\frac{E(|XY|)}{\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}} \leq 1 + 1 \Rightarrow \text{чтд.}$$

∇

Утв (Неравенство Йенсена) 22.04.2016

Напоминание:

] $f(x)$ выпукла на $\Delta = [a, b]$

$\Rightarrow f \in C(a,b)$ п. в. dif $\forall x \in (a,b)$, $\exists\ f'_{лев}(x) = f'_{пр}(x)$

$x > x_0$: $f(x) - f(x_0) \geq f'_{пр}(x_0)(x - x_0) \geq f'_{лев}(x_0)(x - x_0)$

$x < x_0$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_{лев}(x) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq f'_{лев}(x)(x - x_0) \geq f'_{лев}(x_0)(x - x_0)$

$\Rightarrow$ т.е. $f(x) - f(x_0) \geq f'_{лев}(x_0)(x - x_0)$

$g = g(x)$ - выпукл. ф-я, тогда $g(E(X)) \leq E(g(X))$

Δ

- $g = g(x)$ — выпукл. и $\forall$ фикс. x_0] $c(x_0) = g'_{лев}(x_0)$

$g(x) - g(x_0) \geq c(x_0)(x - x_0) \Rightarrow g(X) - g(EX) \geq c(x_0)(X - EX) \geq 0$

$x = X$, $x_0 = EX$

$$E\,g(X) - g(EX) \geq 0 \Rightarrow E g(X) \geq g(EX)$$

∇

Следствие (моментальное нер-во)

$\exists\ 0 < s < t$, $(E(|X|^s))^{1/s} \le (E(|X|^t))^{1/t}$

Δ

$g(x) = |x|^t$, $t > 1 \Rightarrow g(x)$ выпукл. ф-я

$\exists\ \xi$ — произв. сл. в., из нер-ва Йенсена $E(g(\xi)) = E(|\xi|^t) \ge$
$\ge g(E(\xi)) = |E\xi|^t$

$0 < s < r$, $t = \frac{r}{s} > 1$, $\xi = |X|^s$

$E(|X|^{s \cdot \frac{r}{s}}) \ge (E(|X|^s))^{r/s} \Rightarrow E(|X|^s)^{1/s} \le (E(|X|^r))^{1/r}$

∇

Н-во Чебышева

Теорема Нер-во Маркова (частн. случай)

$\exists\ P(X \ge 0) = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$
$P(X \ge \varepsilon) \le \frac{EX}{\varepsilon}$

Δ $EX = \int_0^\infty x\, dF_X(x) \ge \int_\varepsilon^\infty x\, dF_X(x) \ge$
$\ge \varepsilon \int_\varepsilon^\infty dF_X(x) = \varepsilon P(X \ge \varepsilon)$
∇

Следствие Нер-во Чебышева

$P(|X - EX| \ge \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Δ $P((X-EX)^2 \ge \varepsilon^2) = P(|X - EX| \ge \varepsilon) \overset{\text{марк}}{\le}$
$\le E(X-EX)^2/\varepsilon^2 = DX/\varepsilon^2$
∇

(Правило 3σ) Пример

X - сл. в., $\exists DX$. $P(|X - EX| \ge 3\sigma_x) \le \frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2}$
$\Rightarrow P(|X - EX| < 3\sigma_x) \ge 0{,}8(8) = \frac{8}{9}$

Слабый закон больших чисел.

Опр $\exists\ X_1, \dots X_n, \dots$ — посл. случ. величин, заданных на одном (Ω, Σ, P)
тогда
1 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ посл $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ сх-ся к сл. вел. X по вероятности
означает, что $P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{\forall \varepsilon > 0} 0$

2. $E(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — среднеквадр. сходимость

Теорема Слабый закон больших чисел.

$\exists\ X_1 \dots X_n \dots$ — посл. сл. вел. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — незав. и одинак. распред.
$X_n \sim X$, $\exists\ DX = \sigma^2$, $EX = m$
Тогда $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ — посл. средних арифм.
$\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} EX$, и по среднеквадратичном.

Δ $E\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i = EX$, $D\overline{X}_n = \{\text{независимость}\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow E(\overline{X}_n - E(\overline{X}_n))^2 = E(\overline{X}_n - EX)^2 = D\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ — сх. в ср.квадрат.

$P(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| > \varepsilon) = P(|\overline{X}_n - EX| > \varepsilon) \le \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

∇

Теорема (Якоб Бернулли)

$X_i \sim X$

X_i	0	1
p_i	$1-p$	p

$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{\xi}{n}$, $\xi \sim B_{n,p}$.

И $EX = p \Rightarrow \overline{X}_n \to EX$ имеем $\frac{\xi}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p(A)$

ξ — кол-во успехов в „n" испыт. $\frac{\xi}{n} = \frac{K_n}{n}$ — частота

Теорема

Усиление ~~св-во~~ слаб. закона б. чисел

$\exists X_1 \dots X_n, \dots \quad \forall i \ \exists DX_i = \sigma_i^2, \ EX_i = m_i$

$\overline{m}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$, $\overline{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n}$ тогда, если $\frac{\overline{\sigma}_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\overline{X}_n - \overline{m}_n \xrightarrow{P} 0$

Δ такое же как в с.з.б.ч. ∇

Пример

$X_n = \begin{cases} n, & p = \frac{1}{n} \\ 0, & p = 1 - \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} 0$, но $EX_n = \frac{1}{n} n = 1 \not\to E(0) = 0$.

Т.е. из сх-ти по мере не следует среднеквадр. сх-ть.

Теорема (о сх-ти матожиданий к константе) (NB) путь $u = id = x$ — иначе

$\exists X_1, \dots X_n, \dots$ и $X_n \xrightarrow{P} c \Leftrightarrow E(u(X_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(c)$

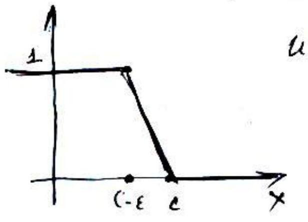
$\forall u = u(x)$ — огр. и непр. в точке „c" ф-ии

огр. н?

(21.04.2016) Δ

($\Leftarrow$) Строим дополнительные (вспомог.) функции.

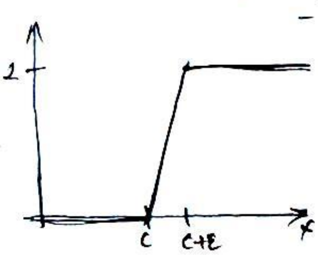
$\forall \varepsilon > 0$ фикс.



$u(x) = \begin{cases} 1 & x \le c-\varepsilon \\ 0 & x > c \\ \frac{c-x}{\varepsilon} & x \in (c-\varepsilon, c] \end{cases}$ $u(x)$ ограничена и $u(x) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow$ непр в c

$u_1(x) = \begin{cases} 1 & x \le c-\varepsilon \\ 0 & x > c-\varepsilon \end{cases}$ $u_1(x) \le u(x)$

$P(X_n < c-\varepsilon) = \int_{-\infty}^{c-\varepsilon} 1 \cdot P_{X_n}(dx) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{I_{(-\infty, c-\varepsilon)}(x)}_{u_1(x)} P_{X_n}(dx) = E u_1(X_n) \le E u(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{0}{\underset{\parallel}{u(c)}}$



$\tilde{u}(x) = \begin{cases} 1 & x \ge c+\varepsilon \\ \frac{x-c}{\varepsilon} & x \in [c, c+\varepsilon) \\ 0 & x < c \end{cases}$ $P(X_n > c+\varepsilon) = \int_{c+\varepsilon}^{\infty} 1 \cdot P_{X_n}(dx) = \int_{\mathbb{R}} I_{(c+\varepsilon, \infty)}(x) P_{X_n}(dx)$

$= E(\tilde{u}_1(X_n)) \le E\tilde{u}(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{u}(c) = 0$

$\tilde{u}_1(x) = \begin{cases} 1 & x \ge c+\varepsilon \\ 0 & x < c \end{cases}$

$P(c-\varepsilon \le X_n \le c+\varepsilon) = P(X_n \le c+\varepsilon) - P(X_n < c-\varepsilon) = 1 - \underbrace{P(X_n > c+\varepsilon)}_{\to 0} - \underbrace{P(X_n < c-\varepsilon)}_{\to 0} \longrightarrow 1$

$P(|X_n - c| \le \varepsilon) = 1 - P(|X_n - c| > \varepsilon) \longrightarrow 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$

$(\Rightarrow)$ $\exists \delta$, $|E(u(X_n)) - u(c)| = |E(u(X_n) - u(c))| = \left|\int_\Omega (u(X_n(\omega)) - u(c)) P(d\omega)\right| \le$

$\le \left|\int_{\{\omega : |X_n(\omega) - c| \le \delta\}} \text{---}\,//\,\text{---}\right| + \left|\int_{\{\omega : |X_n(\omega) - c| > \delta\}} \text{---}\,//\,\text{---}\right| \le \int_{|x-c|<\delta} |u(x) - u(c)| P_{X_n}(dx) + 2MP(|X_n - c| > \delta) \le$

интеграл по мере ≤ 1, вынесем max и заменим на 1

$\le \max\limits_{x : |x-c|<\delta} |u(x) - u(c)| + 2MP(|X_n - c| \ge \delta)$.

непрерывность и

$\forall \varepsilon\ \exists \delta : |x-c| < \delta$, то $|u(x) - u(c)| < \varepsilon$ и даже $\delta > 0$.

$\exists N\ \forall n > N\ \ 2MP(|X_n - c| > \delta) < \varepsilon \longleftarrow X_n \to c$ по вероятности

$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N \quad |E(u(X_n)) - u(c)| < \varepsilon \Rightarrow E(u(X_n)) \longrightarrow u(c)$

∇

<u>Теорема</u> (Обобщение теоремы о моментах)

$\exists X_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow E(u(X_n)) \longrightarrow E(u(Y))$, $\forall u \in C(\mathbb{R})$ и $|u(x)| \le M$

Δ Аналогично с некотор. изменениями

$0 \le |E(u(X_n)) - E(u(Y))| = |E(u(X_n) - u(Y))| \le E|u(X_n) - u(Y)| \le$

$\le \underbrace{E(|u(X_n) - u(Y)|, |X_n - Y| < \delta)}_{I} + 2MP(\underbrace{|X_n - Y| > \delta}_{\downarrow\, n\to\infty\ 0})$

$I = \underbrace{\int_{\{\omega : |X_n(\omega) - Y(\omega)| < \delta \wedge |Y(\omega)| \le N\}} |u(X_n(\omega)) - u(Y(\omega))| P(d\omega)}_{II} + \underbrace{\int_{\{\omega : |\cdot| < \delta \wedge |Y(\omega)| > N\}} \text{---}\,//\,\text{---}}_{III}$

$III = \int_{\{\omega : |X_n - Y| < \delta \wedge |Y| > N\}} |u(X_n(\omega)) - u(Y(\omega))| P(d\omega) \le 2M \int_{|Y|>N} P_Y(dy) < \varepsilon$

При соотв. выборе N

∇

<u>Замечание</u>: В смысле пред. теоремы
сходимость в среднем $\Rightarrow$ сх-ть по вер-ти
сходимость по вер-ти $\Rightarrow$ слабая сходимость

<u>Опр</u> Хар. ф-ей сл. величины X называется $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) =$
$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x)$. Опр. корректно т.к. интеграл от модуля
равен 1. (поточечн. нечто на ф. опр.)

<u>Свойства</u> хар. ф-ии:

1) $\varphi_X(0) = 1$, $|\varphi_X(t)| \le 1$. Δ $\varphi_X(0) = E(e^0) = 1$
$|\varphi_X(t)| \le \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| dF_X(x) = 1$ ∇

2) $\forall a b \in \mathbb{R}$ $\varphi_{aX+b}(t) = E(e^{itaX} \cdot e^{itb}) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$

X и Y независимы $\Rightarrow$

3) $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$

Δ $\varphi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = E(e^{itX}e^{itY}) = \{$независимость$\} = E(e^{itX})E(e^{itY}) =$

$= \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ ∇

4) $\exists E|X|^n$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $\forall k \in [1..n]$

$E(X^k) = (-i)^k \varphi^{(k)}(0)$, $\left.\frac{d^k(\varphi_X(t))}{dt^k}\right|_{t=0}$ — все моменты производные хар. ф-ии

Δ

$\varphi(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}dF_X(x)$, $\varphi'(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} ixe^{itx}dF_X(x), \dots; \varphi^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx}dF_X(x)$. ↑можно так! Ди

$\int\limits_{\mathbb{R}} |(ix)^k e^{itx}| dF_X(x) \le \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^k dF_X(x) = E|X|^k \le \{$н-во для моментов$\} \le \underbrace{(E|X|^n)^{k/n}}_{\text{конечно}}$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, т.к. правая часть — абс. сходящийся интеграл.

При $k \le n$ $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

∇

NB $EX = -i\varphi_X'(0)$
$EX^2 = -\varphi''_X(0)$
$DX = -\varphi''_X(0) + (\varphi'_X(0))^2$

Не пиши сюда

5) $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

Δ $\varphi_X(t) = E(e^{iXt}) = \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \cos tx \cdot dF_X(x)}_{I} + i\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \sin tx\, dF_X(x)}_{II}$

$\overline{\varphi_X(t)} = I - iII = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(-tx) + i\sin(-tx)\, dF_X(x) = E(e^{-itX}) = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

$\{\cos\alpha = \cos(-\alpha),\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\}$

∇

Опр X и $P_X(dx)$ назыв. симметричными, если $P_X(dx) = P_X(-dx)$ или распределения X и $(-X)$ совпадают.

В частности, для непр. случ. величины $f_X(x) = f_X(-x)$, то есть плотность чётная

Пример Хар ф-я сл. величины $\sim N(0,1)$ — вещественна

т.е. $\varphi_X(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos tx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})\, dx$

Если X симм, то φ_X чисто вещ.

Найдем $\varphi_{N(0,1)}(t)$.

6.05.2016 $(\varphi_X(t))'_t = \int\limits_{\mathbb{R}} (-\sin tx) \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx\, d(-\frac{x^2}{2}) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{\sin tx\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos tx\, t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Big) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \cos tx\, e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Итого получим $\begin{cases} \varphi'(t) = -t\varphi(t) \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$ — Задача Коши

$\frac{d\varphi}{\varphi} = -t\,dt \Rightarrow \ln|\varphi| = -\frac{t^2}{2} + c$ при $\varphi \ne 0$. $\Rightarrow \varphi(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}$

Тогда $\varphi(0) = C = 1$. $\Rightarrow$ $\underline{\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}}$ – хар. ф-я для норм. распределения ($X \sim N(0,1)$)

$Y \sim N(a, \sigma^2)$, $X = \frac{Y-a}{\sigma} \sim N(0,1)$, следовательно $Y = a + \sigma X$

И по св. 2 $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$, т.е. $\underline{\varphi_Y(t) = e^{iat} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$

Свойства (продолж)

6) $\varphi_X(t)$ – равномерно непр.

$\forall t$ рассм $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \le \int |e^{i(t+h)x} - e^{itx}| dF_X(x) =$

$= \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| dF_X(x) = \underbrace{\int\limits_{|x|<M} |e^{ihx} - 1| dF_X(x)}_{I} + \underbrace{\int\limits_{|x|\ge M} |e^{ihx} - 1| dF_X(x)}_{II} \circledeq$

вренил e^{itx} (по модулю!)

≤ 2 M произвольный пока что

II). $\int\limits_{|x|\ge M} |e^{ihx} - 1| dF_X(x) \le 2(P(X > M) + P(X < -M)) = 2(-F_X(M) + 1 + F_X(-M))$

По св. $F_X(x)$ $\exists M$ такое что $II \le \frac{\varepsilon}{2}$. Зафикс. M.

I) $\int\limits_{|x|<M} |e^{ihx} - 1| dF_X(x) \le \{ |e^{ihx} - 1| = |\cos hx - 1 + i \sin hx| = \sqrt{(\cos hx - 1)^2 + \sin^2 hx} = \sqrt{2 - 2\cos hx} = \sqrt{4\sin^2 \frac{hx}{2}} = 2|\sin\frac{hx}{2}| \le 2|h||x|/2 = |h||x| \} \le$

тут уже M фикс.

$\sin^2 = 1 - \cos^2$

$\le |h| \int\limits_{|x|<M} |x| dF_X(x) \le |h||M|$. Выберем h | $I \le \frac{\varepsilon}{2}$

$\circledeq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Итого есть равном. непрерывность.

Виды сходимости и их связи

Знаем:

1 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

2 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P=1} X$, т.е. $P\{\omega: X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\} = 0$ – почти всюду

3. Слабая сходимость (фрагментарно)

Связи: $(X_n \xrightarrow{P=1} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{P} X) \Rightarrow (F_n(x) \xRightarrow{n\to\infty} F(x))$

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ по распределению

Это вытекает из почему $\rho d\varepsilon$

Это было показано

Слабая сходимость

Опр $\exists F_n(t)$ – послед. ф-й распр. $F(t)$ – некот. функ. ф.р.

Будем говорить, что $F_n(t)$ слабо сх. к $F(t)$ ($P_n(dx)$ сл. сх. $P(dx)$)

Обозначение – $P_n(dx) \Rightarrow P(dx)$ или $F_n(t) \Rightarrow F(t)$

Если $\forall u = u(x) \in C(\mathbb{R})$, $\exists M$, $|u(x)| < M$ спр-во $\int\limits_{\mathbb{R}} u(x) dF_n(x) \to \int\limits_{\mathbb{R}} u(x) dF(x)$

Если X_n - послед. случайных величин и $F_{X_n}(x) = F_n(x)$,
X - сл. в. и $F_X(x) = F(x)$, то

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ — слабая сходимость. (слаб. сходимость распред. или мер)

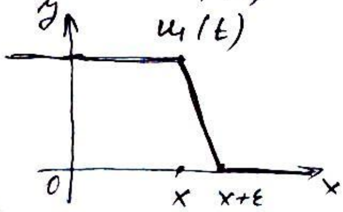
Это экв. $E(u(X_n)) \to E(u(X))$

Теор 1 $F_n \overset{сл.сх}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} F$ тогда и только тогда, когда $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ в ∀ точке непрерывности $F(x)$

Δ ∃ $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x)$ для $\forall u(x) \in C(\mathbb{R})$, $|u(x)| \le M$

(⇔)

(⇒) $\forall x$ (точки непр $F(x)$), $\forall \varepsilon > 0$ строим 2 вспомог. ф-и

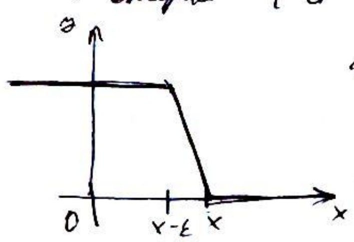


$u_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t-x}{\varepsilon}, & t \in [x, x+\varepsilon) \\ 1 \text{ или } 0, & \text{очев.} \end{cases}$

$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 1 \cdot dF_n(t) = \int_{-\infty}^{x} u_1(t)\, dF_n(t) \le \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} u_1(t)\, dF_n(t) \le$
$\le \int_{-\infty}^{x+\varepsilon} dF_n(t) = F_n(x+\varepsilon)$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x) \le \lim \int_{\mathbb{R}} u_1(t)\, dF_n(t) \underset{\text{условие}}{=} \int_{\mathbb{R}} u_1(t)\, dF(t) \le F(x+\varepsilon)$

И вторая ф-я



$u_2(t) = \begin{cases} \frac{x-t}{\varepsilon} & t \in [x-\varepsilon, x] \\ 0, 1 & -//- \end{cases}$ $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 1\, dF_n(t) \ge \int_{-\infty}^{x} u_2(t)\, dF_n(t)$
$\ge F_n(x-\varepsilon)$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x) \ge \lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_2(t) \cdot dF_n(t) = \int_{\mathbb{R}} u_2(t)\, dF(t) \ge F(x-\varepsilon)$

То есть для „x"-точки непр $F(x)$ имеем
$\underset{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F(x)}{F(x-\varepsilon)} \le \underline{\lim}\, F_n(x) \le \overline{\lim}\, F_n(x) \le F(x+\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} F(x)$

Итого предел сущ. предел $F_n(x)$ и он равен $F(x)$

(⇐) ∃ $F_n(x) \to F(x)$ в $\forall x$ - точке непр $F(x)$
у $F(x)$ - ф.р. не более чем счетное кол-во точек разрыва (скачки)
∃ $x = -A$, $x = B$ - точки непр F_x | $F(-A) < \varepsilon$, $1 - F(B) < \varepsilon$
∃ N такое, что при $n > N$ $F_n(-A) < 2\varepsilon$ и $1 - F_n(B) < 2\varepsilon$

$n > N$ $\int_{-A}^{B} u\, dF_n$ и $\int_{-A}^{B} u\, dF$ - эти интегралы отличаются от своих пар по $\mathbb{R}$ не больше чем на $4\varepsilon M$, где M - огр. на u

Хотим сравнить $\int_{\mathbb{R}} u\, dF_n$ и $\int_{\mathbb{R}} u\, dF$

$[A, B]$ $u = u(x)$ - равном. непр., то можно $[-A, B]$ на „m" отрезков $x_0 = -A < x_1 < \dots < x_m = B$ и $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ - точки непр F

Рассм. $g_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{m} u(x_i)\, \Delta_{(x_{i-1}, x_i]}$ ($[x_0, x_1]$) - кусочно-пост. ступ. ф-я
$g_\varepsilon(x)$ на $\forall\, \Delta_i = (x_{i-1}, x_i]$ отл. от $u = u_x$ не более чем на ε

(В. Ос. 2016)

$g_\varepsilon(x)$ отл. на $u(x)$ на у-ке $[A, B]$ не более чем на ε

$g_\varepsilon(x) - \varepsilon \le u(x) \le g_\varepsilon(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in [-A, B]$

$$\int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF_n(x) = \sum^n \int_{\Delta_i} u(x_i)\, dF_n(x) = \sum^n u(x_i)\big(F_n(x_i) - F_n(x_{i-1})\big)$$

$\{x_i\}$ – точки непр. $F(x)$

$$\longrightarrow \sum^n u(x_i)\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF_x \qquad \Big| \quad g_\varepsilon - \varepsilon \le u \le g_\varepsilon + \varepsilon$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{[-A,B]} u\, dF_n \le \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF_n + \varepsilon = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF(x) + \varepsilon \le \int_{[-A,B]} u(x)\, dF(x) + 2\varepsilon$$

$$\underline{\lim} \int_{[-A,B]} u(x)\, dF_n(x) \ge \lim \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF_n(x) - \varepsilon = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x)\, dF(x) - \varepsilon \ge \int_{[-A,B]} u(x)\, dF(x) - 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x)$$

∇

<u>Следствие</u> $F(x) \in C(\mathbb{R}) \overset{\text{то}}{(\Longrightarrow)} (F_n \Rightarrow F) \Longleftrightarrow F_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} F(x)$

Δ

$F(x) \in C(\mathbb{R})$. Находим M: $F(-M) < \varepsilon$, $1 - F(M) < \varepsilon$

Выбираем δ: $|x-y| < \delta$: $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$, делим $[-M, M]$ на m $\Delta_1 \dots \Delta_m$, $\Delta_i < \delta$

$-M = x_0 < x_1 \dots < x_m = M$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \forall i$ для $x, y \in \Delta_i$ имеем $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$

$F_n(x) \to F(x)$ для $\forall \{x_i\}^m$ по ε находим $N_i(\varepsilon)$ такое, что $n > N_i(\varepsilon)$: $|F_n(x_i) - F(x_i)| < \varepsilon$, $\exists N = \max_{i=1..m} N_i(\varepsilon)$

Тогда $\forall t \in [-M, M]$, $t \in \Delta_i$ где $i = 1..m$, $n > N$

$$|F_n(t) - F(t)| = \begin{cases} F_n(t) - F(t) \\ F(t) - F_n(t) \end{cases} \quad x_{i-1} \le t \le x_i \quad \le$$

$$\le \begin{cases} F_n(x_i) - F(x_{i-1}) + F(x_i) - F(x_i) \\ F(x_i) - F_n(x_{i-1}) + F(x_{i-1}) - F(x_{i-1}) \end{cases} \le \begin{cases} \underbrace{|F_n(x_i) - F(x_i)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|F(x_i) - F(x_{i-1})|}_{<\varepsilon\ (\text{т.к. } |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon)} \\ \underbrace{|F(x_i) - F(x_{i-1})|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|F(x_{i-1}) - F_n(x_{i-1})|}_{<\varepsilon} \end{cases}$$

$$< 2\varepsilon$$

∇

<u>Теорема 2</u> $\quad \forall c = const \quad X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} c \Longleftrightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} c$

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} X \Longleftrightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} X$ } теорема о сх. монотону. и ее обобщение

<u>Теорема 3</u> (Формула обращения)

$\exists F_X(x)$ – ф-я распределения сл.в X, $\varphi_X(t)$ её (X) хар. ф-я.

тогда $\forall x, y$ – точки непр. $F_X(t)$ спр-ва ф-ла обращения (авермм)

$$F_X(y) - F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_X(t)\, dt$$

<u>Следствие</u> (теор. единственности)

$\varphi_X(t)$ однозначно определяет $F_X(t)$

б) Доверительное — построение G

$p(\theta \in G) \geq \gamma$, θ — реальное значение пар.
γ — надёжность
Умеем строить дов. инт-лы на базе ф. норм

г. Проверка гипотез (обнаружение)

$(X_1 \cdots X_n)$ — выборка. ~~Например~~ Н — ∀ предположение по данным, напр $X \sim Exp$, $EX = 5$, $H_1 \cdots H_s$

$H : \mathcal{X}_n \to \{$номера$^{1 \cdots S}$ гипотез$\}$ Пусть $S = 2$

H_0 $\theta \in \Theta_0$ — основная гипотеза
H_1 $\theta \in \Theta_1$ — альтернатива

Θ_i — состоит из одного эл-та
↳ гипотеза простая $\Theta_i \subset \Theta$, $\Theta_i \cap \Theta_j \overset{i \neq j}{=} \varphi$
из > 1 → сложная

Способ соотнес. $(X_1 \cdots X_n) \in \mathcal{X}_n$ и $\{0,1\}$ def тестом или критерием проверки гипотез.

$\varphi : \mathcal{X}_n \to \{0,1\}$, $\varphi(\overline{X}_n) = 0 \Rightarrow$ принимается H_0
$\varphi(\overline{X}_n) = 1 \Rightarrow$ альтернатива

Тест разбивает на 2 множества

$\mathcal{X}_{n,0} \cup \mathcal{X}_{n,1} = \mathcal{X}_n$, $\mathcal{X}_{n0} \cap \mathcal{X}_{n1} = \varphi$
допустимое критическое

Max vance
тест что? Порог?

$\mathcal{X}_{n,i} = \{ \overline{X}_n \in \mathcal{X}_n : \varphi(\overline{X}_n) = i \}$, $i = 0, 1$

Качество теста характеризуется ошибками теста
Ошибка I рода : осн. гипотеза верна, но приняли H_1 (false pos.)
Ошибка II рода осн. неверна, но принимаем (false negative)

Колич. хар-ка теста — вероятности ошибок I и II рода.
$\alpha(\varphi, \theta) = P_\theta(\mathcal{X}_1)$, $\theta \in \Theta_0$
$\beta(\varphi, \theta) = P_\theta(\mathcal{X}_0)$, $\theta \in \Theta_1$

Мощность теста $\gamma(\varphi, \theta) = 1 - \beta(\varphi, \theta)$
Тест def несмещ. : $\gamma(\varphi, \theta_1) \geq \alpha(\varphi, \theta_0)$, $\forall \theta_0 \in \Theta_0$, $\theta_1 \in \Theta_1$

Обычно тест строится на базе тестовой статистики (φ-ии от $\overline{X}_n \in \mathcal{X}_n$) и порога: $L = L(\overline{X}_n)$, $\forall \overline{X}_n \in \mathcal{X}_n$
T - порог $\in \mathbb{R}$

Пример $H_0 : EX = 5$, $H_1 : EX \neq 5$ проверка критерия согласия

$$L(X_1 \cdots X_n) = \left| \frac{1}{n} \sum^n X_i - 5 \right|, \quad T = 0{,}05, \quad \varphi(X_1 \cdots X_n) = \begin{cases} 0 & L(X) < 0{,}05 \\ 1 & L(x) \geq 0{,}05 \end{cases}$$

~~эта~~ статистика

Подход Неймана-Пирсона

Желательно, $\alpha(\varphi, \theta)$, $\beta(\varphi, \theta)$ — малы, но и эти требов. обычно противоречивы
Ǝ тест строится на базе стат. $L = L(X_1 \cdots X_n)$

$\alpha(\varphi, \theta) = P_\theta(\mathcal{X}_1) = P_\theta(L(X_1 \cdots X_n) \geq T) = 1 - F_L(T)$ ↘ при увел T
$\beta(\varphi, \theta) = P_\theta(\mathcal{X}_0) = P_\theta(L(X_1 \cdots X_n) < T) = F_L(T)$ ↗

Чтобы это нарисовать, задаётся α — уровень значимости и

$$\Phi_\alpha = \{ \varphi : \mathcal{X}_n \to \{0,1\},\ \alpha(\varphi) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \alpha(\varphi, \theta) \le \alpha \}$$

Расм. только тесты $\varphi_\alpha \in \Phi_\alpha$, среди них ищут тест с наиб. β

~~Если~~ Последоват. тестов φ_n def тест В этом случае ограничен. → φ_n — тест на выборке разм. n

→ Φ_α на $\lim_{n\to\infty} \sup \alpha(\varphi_n, \theta)$.

$$\alpha(\varphi_n) = \sup (\alpha(\varphi_n, \theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha(\varphi) \le \alpha$$ — асимптотич. уровень значимости

Если при этом ~~$\beta(\varphi_n)$~~ $\beta(\varphi_n, \theta) \to 0$ — тест def состоят. асимпт. уровня значимости α

Нужно пройтись о генеральной совок.

Методы построения оценок:

1. Выборочный
2. Моментов (сравнивают теор. и эмп. моменты):
   $X \sim \Gamma_{\alpha,\beta}$ $\quad \overline{X}_n,\ \theta_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum^n (X_i - \overline{X}_i)^2$
3. Метод макс. правдоподобия — выбирают то θ, кот. дает max вероятность попасть в dP_x

?

Выборочный — $\exists$ все значения равновозможны. $(X_1 \dots X_n)$

$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ — вар. ряд. выборки (упоряд. выборка)

Y_i	$X_{(1)}$	$X_{(2)}$	...	$X_{(n)}$
p_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

В качестве оценок вер. хар-к ген. совокупности X расм. значение соотв. хар-к Y

Пример ① Оценка матожид.

$g(\Theta) = \mathbb{R}$

$$EY = \sum^n X_{(i)} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum^n = \overline{X}_n$$ — выборочн. среднее

Св-ва $\overline{X}_n$ 1. несмещенность (не асимпт.) $E_x(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_i E_x(X_i) = EX$

2. Состоятельность
   $\exists EX$, тогда по усиленному ЗБЧ (Хинчина) $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} EX$
3. $\overline{X}_n$ — асимпт. нормальна.
   по ЦПТ $Y_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{\sigma \overline{X}_n} \to Y \sim N(0,1)$

② Оценка $E(X^k)$

$$\mu_k(X_1 \dots X_n) = E(Y^k)_{,n} = \sum Y_i^k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum^n X_i^k$$

Обозначим $Z = X^k$, $\overline{Z}_n$ — несмещ., сост., ас. норм. EZ; т.е. μ_k — несм. сост. ас. норм. оценка $E(X^k)$

③ Выборочная оценка дисперсии

$$S_n^2 \overset{def}{=} DY_n = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - EY)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}_n^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum^n (Y_i - \overline{X}_n)^2$$

Св-ва:

1. Сост. оценка DX; $\mu_n \to E(X^2)$, $\overline{X}_n \to EX$
2. Оценка смещённая, $\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1} S_n^2$ — несм. оценка DX

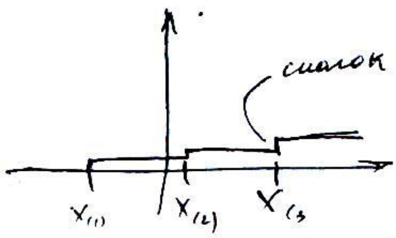
(4) Оценка ф-ии распределения

ЭФР - эмпир. ф-я распределения

$F_n(t)$ – оценка $F_X(t)$ – ф-ии распред. ген. сов-ти X

$F_n(t)$ – ф-я распр. $F_Y(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(x_i) = \frac{K_n(-\infty,t)}{n}$

кол-во знач. выборки $< t$



Св-ва $F_n(t_0)$: $F_n(t_0) = \frac{K_n(-\infty,t)}{n}$, т.е. $\forall X_i \Rightarrow$

φ	0	1
p_i	$1-p$	$p(X<t)$

т.е. $K_n(-\infty,t) = \frac{\varphi_1 + \dots + \varphi_n}{n} = \bar{\varphi}_n$

$F_n(t_0) = \frac{\sum \varphi_i(-\infty,t_0)}{n}$ – частота. По теор. Я. Бернулли

1. $F_n(t) \to E\varphi = p$.
2. Несмещ.
3. Асимпт. норм.