Ситань Александр

Концепции современного естествознания

$\nearrow \vec{r}_i(t)$, $i = 1 \div N$, Ньютоновская: $m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \vec{\varphi}_{ij}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) + \vec{F}_i(\vec{r}_i)$

Очень много частиц.

Микроскоп. описание $\longrightarrow$ $\vec{r}_i\Big|_{t=0} = \vec{r}_{i0}$, $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}\Big|_{t=0} = \vec{V}_{i0}$

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}$

По пользованию мерлодчня мысой,

Макроскоп. описание:

- представл. о сплошности — выделены из среды некоторый объем, сохраняющ. св-ва всей среды
- Законы сохр., записанные в представл. о сплошности — дифф-лы в частных производных
- Кинематические соотношения
- Начальные / граничные условия.

Противоречие между макроск. и микроскоп. описании. Пример — обратимость во времени. (обратимы скорости) Механика Ньютона обл. св-вом. Однозначно — гораздо более вероятно, что из любого нач. условия система приходит в некоторый постоянный вид. ~~до~~

Будем работать с макроскоп. описанием.

О ОНБ — ортонорм. базис

$a = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\mathcal{S}$

скалярное $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum\limits_i^3 a_i \cdot b_i = ab\cos(\vec{a},\vec{b}) = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

диадное $\vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \ldots & a_1b_3 \\ & & \\ & & a_3b_3 \end{pmatrix}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_1(a_2b_3 - a_3b_2) + e_2(\ldots) + e_3(\ldots)$

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = a\cdot(b\times c) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad -(c\ b\ a) = -(b\ a\ c) = -(a\ c\ b)$

$|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = W_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$ $\leftarrow$ объем параллепипед.

$$\nabla = \vec{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \vec{a}(\vec{r}) = a_1(x_1,x_2,x_3)\vec{e}_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

$$\varphi(r) = \varphi(x_1,x_2,x_3)$$

$$\nabla\varphi = e_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

$$\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \mathrm{div}\,\vec{a}$$

$$\nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\,\vec{a}$$

$$\nabla\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} (a_1\ a_2\ a_3) = J^T$$ ← транспонир. Якоби

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{13} \\ & & \\ & & T_{33} \end{pmatrix} \qquad \nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \cdots \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \mathrm{Div}\,\overleftrightarrow{T}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\varphi\cdot\vec{a} + \varphi(\nabla\cdot\vec{a})$$

$$\nabla\times(\varphi\vec{a}) = \nabla\varphi\times\vec{a} + \varphi(\nabla\times\vec{a})$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + a\times(\nabla\times\vec{b}) + b\times(\nabla\times\vec{a})$$

$$a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})$$

Кочин Н. Е.

Векторное и начала тензорного исчисления.

$$\nabla(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \cdots = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$$

$$\nabla(\nabla\vec{a}) = \nabla^2\vec{a} + \nabla\times(\nabla\times\vec{a})$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = 0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{a}) = 0$$

17.09.2015

Индексные

$\vec{r}_i(t)$ $1 \div N$

i — дискретный,

[Эйлерова парам:

$\vec{r}$ $x_1 x_2 x_3$

$\vec{V}(\vec{r}, t)$

$\rho(\vec{r}, t)$

$T(\vec{r}, t)$

геом. точка

выделен. объем.

Лагранж. — параметризация

[$\vec{r}_{\vec{c}}(t) = \vec{r}(\vec{c}, t) = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$

$\vec{c}$ — непрер. $\vec{\xi} = \vec{r}|_{t=0}$

$\rho(\vec{\xi}, t)$, $T(\vec{\xi}, t)$, $q(\vec{\xi}, t)$, $\sigma(\vec{\xi}, t)$

ξ — характеризация маленького объема.

матер. точка

Можно выразить одно через другое при желании

NB [$f(x, y)$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \leftarrow$ const

— Субстанциональная производная

$\varphi(\vec{\xi}, t)$ — в опис. Лагранжа. $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\xi}$ — Лагранжева произв.

$\varphi(\vec{r}, t)$ — в Эйлеровом $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$ — Эйлерова произв.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi[\vec{r}(\xi, t), t] = \varphi[x_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3 t), x_2(\ldots), x_3(\;)]$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x_2 x_3 t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}V_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}V_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}V_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla \varphi) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\varphi \rightarrow \text{субстанциональная пр-е}$$

Или: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{V} \cdot \nabla)\varphi$

конвективная пр-е — нестационарная производная

NB [Лагранжа — предст. частицы
Эйлера — предст. поле]

Для стацион. поля ($\varphi(\vec{r}, t) = \text{const}(t) = \varphi(\vec{r})$)

нестацион. произв $= 0$.

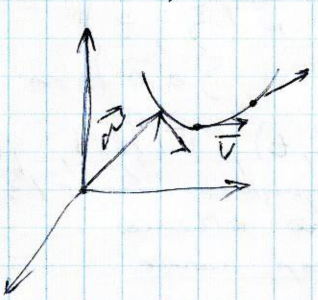
Пример. $\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}$

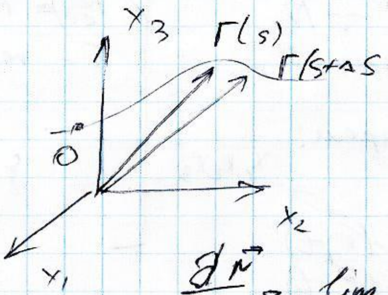
$\nabla(V^2) = 2(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + V \times (\nabla \times \vec{V})$ (по ф-ле $\nabla(a \cdot b)$)

$(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}$

$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\xi} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V}$ — представл. Лэмба

$\vec V(\vec r, t)$, тогда линия тока — касательная в каждой точке которой совп. с локальным вектором скорости





$$\frac{d\vec r}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\vec r(s+\Delta s) - \vec r(s)}{\Delta s} = \vec \tau$$

$$\vec\tau \parallel \vec V \qquad \vec\tau \times \vec V = 0$$

$$\frac{d\vec r}{ds} \times \vec V = 0$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{ds}V_3 - \frac{dx_3}{ds}V_2 = 0 \\ \frac{dx_3}{ds}V_1 - \frac{dx_1}{ds}V_3 = 0 \\ \frac{dx_1}{ds}V_2 - \frac{dx_2}{ds}V_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3} = \frac{ds}{V} = d\tau$$

$\uparrow$ условн. время

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$$

$\Downarrow t$

Уравнение линий тока

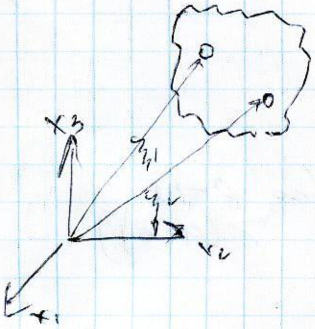
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = V_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = V_2(\ldots) \\ \frac{dx_3}{d\tau} = V_3(\ldots) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = V_2(\ldots) \\ \frac{dx_3}{dt} = V_3(\ldots) \end{cases}$$

Траектория:

Разлож. движение ~~на~~ сплошн. среды на поступ., вращ., деформационное

Т. Гельмгольца

Твердое тело:



$$\vec r_1 = \vec r(\xi_1, t)$$

$$\vec r_2 = \vec r(\xi_2, t)$$

$$|\vec r_2 - \vec r_1| = const(t)$$

$$|r(\xi_2, t) - r(\xi_1, t)| = const$$

$\forall$ дв. твердого тела

$$\vec V(\vec r, t) = \underbrace{\vec V(\vec r^0, t)}_{\text{поступ.}} + \vec\omega(t) \times (\vec r - \vec r^0)$$

мгнов. угл. скорость

поступ. движ. фиг. вместе с полюсом

вращ. относ. полюса

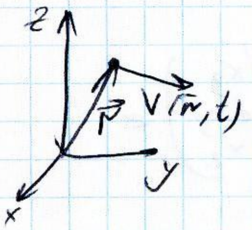
$$\begin{cases} v_1 = v_1^0 + \omega_2(x_3 - x_3^0) - \omega_3(x_2 - x_2^0) \\ v_2 = v_2^0 + \omega_3(x_1 - x_1^0) - \omega_1(x_3 - x_3^0) \\ v_3 = v_3^0 + \omega_1(x_2 - x_2^0) - \omega_2(x_1 - x_1^0) \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} (\nabla \times \vec{V})_1 = \omega_1 - (-\omega_1) = 2\omega_1 \\ (\nabla \times \vec{V})_2 = 2\omega_2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{V} = 2\vec{\omega}}$$

Ландау Лифшиц Теорет. физика VI Гидродинам.
Лойцянский ЛГ Механика жидкости и газа
Седов Механика сплошной среды 1970

28. 09. 2015



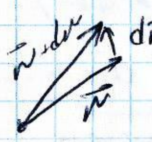
$\vec{V}(\xi, t)$, тогда ускорение $-\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\xi}$

Мы на прошлом занятии указали, что:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\xi} = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{V} \cdot \nabla)\varphi$$

~

$$V(r,t) = \vec{V}(\vec{r}_0) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$



$$V(\vec{r} + d\vec{r}) = \begin{pmatrix} V_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ V_2(\ldots) \\ V_3(\ldots) \end{pmatrix}$$

$$V_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) = V_1(x_1 x_2 x_3) + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)_{x_1 x_2 x_3} dx_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)_{x_1 x_2 x_3}}_{\text{зависи } \varphi\text{-я от } (x_1 x_2 x_3)} dx_2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)_{x_1 x_2 x_3} dx_3 + \ldots$$

$V_2(\ldots) = \ldots$

$V_3(\ldots) = \ldots$

$$(\nabla \vec{V}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} (V_1 V_2 V_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\vec V(\vec r + d\vec r) = \vec V(\vec r) + (\nabla \vec V)^T d\vec r + \ldots =$$

$$= \vec V(\vec r) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\nabla \vec V)^T + (\nabla \vec V)\right]}_{S} d\vec r + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\nabla \vec V)^T - (\nabla \vec V)\right]}_{R} d\vec r + \ldots$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \\ & & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)}^{-\omega_3} & \overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)}^{\omega_2} \\ & 0 & \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)}_{-\omega_1} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор завихренности

если $\vec a = A\vec b$, то A — тензор.

$$\operatorname{rot} \vec V = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = e_1(\ldots) + e_2(\ldots) + e_3(\ldots)$$

$$\operatorname{rot} \vec V = 2\vec\omega$$

$$\overleftrightarrow{R}\, d\vec r = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 dx_2 + \omega_2 dx_3 \\ \omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3 \\ -\omega_2 dx_1 + \omega_1 dx_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec\omega \times d\vec r$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \vec V) \times d\vec r$$

Итого $$V(\vec r + d\vec r) = V(\vec r) + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \times \vec V)_{\vec r}}_{\text{мгновен. угл. скорость}} \times d\vec r + \underbrace{S\, d\vec r}_{\text{деформ. движение}} + \ldots$$

$(***)$

Диагон. компоненты тензора скорост. деформации опр. скорости отн. [illegible] в начале Лагр. объема параллелеп., ориент. по осям.

$$W|_t = l_1|_t\, l_2|_t\, l_3|_t$$

$$W|_{t+dt} = l_1|_{t+dt}\, l_2|_{t+dt}\, l_3|_{t+dt} = l_1|_t \left[1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) dt\right] \cdot$$

$$\cdot\, l_2|_t \left[1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) dt\right] l_3[\ldots] = \ldots = l_1|_t\, l_2|_t\, l_3|_t \cdot$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) dt + \ldots\right]$$

$$\frac{W|_{t+dt}-W|_t}{dt} = W|_t\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)$$

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (!) = Tr(S') = \nabla\cdot\vec{v}$$

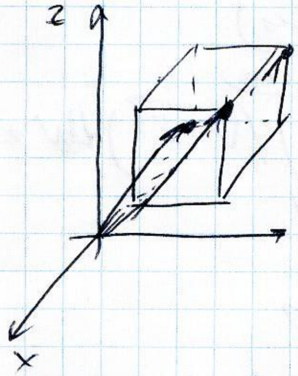
$$dm = \rho\, dw = const(t)$$

$\rho = const$ - несжим. среда (!) $dW = const(t)$

Ур-е несжимаемости. $\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$ (!)

!

*** —



Физический смысл компонент тензора деформации

$$l_1|_{t+dt} = [x_1'' + v_1(x_1'', x_2', x_3')] - [x_1' + v_1(x_1', x_2', x_3')] =$$

$$= (x_1''-x_1') + [v_1(x_1''\ldots) - v_1(x_1'\ldots)]dt =$$

$$= (x_1''-x_1') + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)_{x_1', x_2', x_3'}(x_1''-x_1')dt =$$

$$= (x_1''-x_1')\left[1+\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)dt\right] = l|_t\left[1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)dt\right]$$

$$\frac{l_1|_{t+dt} - l_1(t)}{dt} = l_1(t)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{1}{l_1}\frac{dl_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \qquad \frac{1}{l_1}\frac{dl_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \qquad \frac{1}{l_3}\frac{dl_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\frac{1}{l_2}\frac{dl_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

Диаг. компоненты тензора ск. деф-ции определяют отн. скорости изм-ния длин малого Лагранж. объема в виде параллелепипеда ориент. по коорд. осям

Диаг. - за растяж./сжатие, недиаг. - за перенос

$$d\varphi_1' = \frac{v_2(x_1 x_2 x_3'')dt - v_2(x_1' x_2' x_3')dt}{x_3''-x_3} =$$

поворот φ стороны за малый промеж. t

$$d\varphi_1'' = -v_3(x_1' x_2'' x_3')dt + v_3(x_1' x_2' x_3')dt = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}dt$$

$$= -\frac{\partial v_3}{\partial x_2}dt$$

$$d\varphi_1 = -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)dt, \quad -\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) = S_{23}$$

Теорема о сохр. вихревых линий.

Вихр. линия – линия, кас. в кажд. точке котор. совп. с линией лок. ротора

$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$

$\exists\, l_1$ – не вихр. линия контура

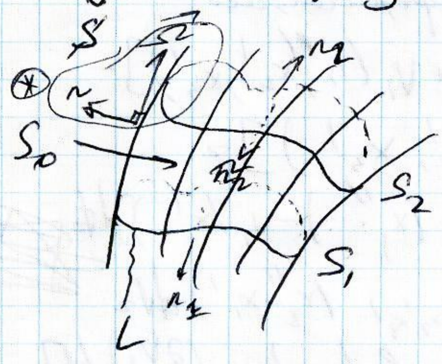
l_1 – вихревая пов-ть

l_3 – замкн. l_2 – вихрев. трубка.

∡ поток вектора ротора через срез трубки

Т: $\int (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\, dS = const$ (для трубки)

Δ



$$\int_{S=S_1+S_2+S_0} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega})\, ds \overset{\text{т. Гаусса}}{=} \int_W (\nabla \cdot \vec{\Omega})\, dW = \int_W \nabla (\nabla \times \vec{V})\, dW = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{n}\vec{\Omega}\, ds_1 + \int_{S_2} \vec{n}\vec{\Omega}\, ds_2 + \underbrace{\int_{S_0} \vec{n}\vec{\Omega}\, ds_0}_{\overset{(*)}{=} 0} = 0, \text{ т.к. } \vec{n} \perp \vec{\Omega}$$

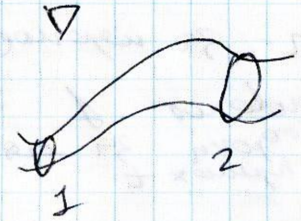
$\int_{S_1} \vec{n}_1 \vec{\Omega}\, ds_1 = - \int_{S_2} \vec{n}_2 \vec{\Omega}\, ds_2$, но возьмем $\tilde{\vec{n}}_2$ – обр. n_2

тогда $\int_{S_1} \vec{n}_1 \vec{\Omega}\, ds_1 = \int_{S_2} \vec{n}_2 \vec{\Omega}\, ds_2$

Более того, по Т. Стокса:

$$\int_{S_1} \dots = \int_{S_2} \dots = \oint_{L_1} \vec{V} \vec{\tau}_1\, dl_1 = \oint_{L_2} \vec{V} \vec{\tau}_2\, dl_2 = \Gamma$$

∇



$\overset{2\omega_1}{\Omega_1} S_1 = \overset{2\omega_2}{\Omega_2} S_2$

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$ – кинематич. эффект, вода завихряется.

1.10.2015

Приведение тензора скоростей деформации к главным осям

$A\vec{x} = \vec{y}$. Интересуемся, есть ли такие x, что $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ – это поиск с. векторов и соб. чисел.

$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$,

отсюда многочлен $P_3(\lambda) = 0$,

имеем 3 решения: $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ – могут совпадать
оба.

Δ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, соотв. 3 ЛНЗ $\vec{x}_1 \vec{x}_2 \vec{x}_3$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

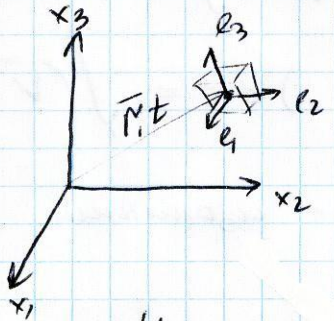
Чтобы $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (не $\mathbb{C}$), НИД A – симметр. $(A^T = A)$

что эквивалентно ортогональности векторов.

Возьмем $\overleftrightarrow{S}$, $S_{ij} = S_{ji}$, возьмем ортог. сист. вектор. собств.

тогда $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix}$.

Мы хотим избавиться от деформ. сдвига, которая зависит от недиаг. компонент.



Хотим в окрестн. точки найти $\{e_1\ e_2\ e_3\}$ такие, чтобы объем не испытывал деформ. сдвига (измен. углов)

Несжимаемая среда. Безвихревое течение.

Среда должна удовлетворять: $\nabla \cdot \vec{V} = 0$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Longleftrightarrow \vec{V} = \nabla \times \vec{A}$$

векторный потенциал

A – вект. потенциал $\Rightarrow$ $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ – тоже в.п.

где ψ – любая скал. ф-я.

Δ

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla\psi)}_{=0} = \vec{V}$$

∇

То есть A опр. неоднозначно. С другой стороны, его можно откалибровать, чтобы $\vec{\nabla} \cdot A' = \vec{\nabla} \cdot (A + \nabla\psi) = 0$

Это решается:

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \vec{A} \text{ – уравнение Пуассона}$$

(имеет 1 решение при нах. ус.)

Подбор нужной ψ назыв. калибровкой. Будем считать, что она всегда совершена.

Плоское течение: $\vec{V}(\vec{r}) \Longleftrightarrow \begin{matrix} V_1(x_1, x_2, x_3) \\ V_2(\dots) \\ V_3(\dots) \end{matrix}$

Тогда пл. течение — ситуация, когда

$$\begin{cases} V_1 = const\,(V_3) = V_1(x_1, x_2) \\ V_2 = const\,(V_3) = V_2(x_1, x_2) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

Для такой ситуации $\vec{A} = (0, 0, A_3(x_1, x_2))$

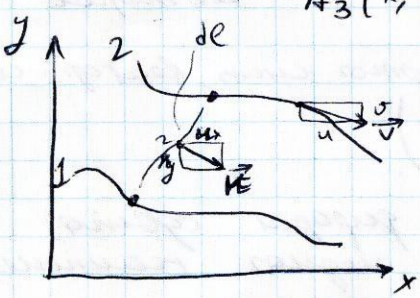
Легко показать:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & A_3(x_1, x_2) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $x_1\, x_2\, x_3 \to x, y$

$V_1\, V_2\, V_3 \to u(x,y),\ v(x,y)$

$A_3(x_1, x_2) \to \psi(x,y)$ — функция тока.



Пусть 1 и 2 — линии тока.

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) =$$

$$= \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy) \overset{*}{=} \int_1^2 (-v\cos\alpha + u\sin\alpha)\, dl =$$

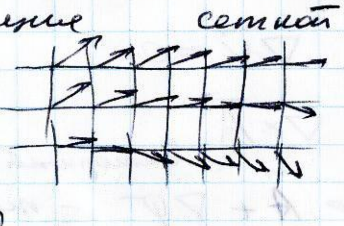
$$= \int_1^2 (v n_y + u n_x)\, dl = \int_1^2 (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dl$$

$*$ $dx = dl\cos\alpha$

$dy = dl\sin\alpha$

Отсюда $\psi_1 = \psi_2$; т.е. линии тока — изолинии функции тока.

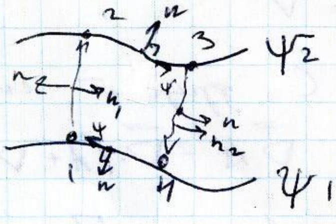
При численном решении вводится дискретизация сеткой.



— не наглядно. Нужно трассировать, построив линию тока.

Не дает замкнут. линию тока, скорее спираль.

Вместо этого можно строить изолинии ф-ции 2х переменных.



$$\oint_{12341} (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dl \overset{\text{Гаусс}}{=} \int_S (\nabla \cdot \vec{v})\, dS = 0$$

0 для несж. жидкости

$$0 = \int_1^2 + \cancel{\int_2^3} + \int_4^1 + \cancel{\int_3^4} = \int_1^2 + \int_3^4 = 0 \Rightarrow \int_1^2 \vec{V}\vec{n}_1\, ds_1 = \int \vec{V}\vec{n}_2\, ds_2$$

Безвихревое течение — такое, что $\nabla \times \vec{v} = 0$

$\Updownarrow$

$\exists \varphi$, что $\vec{V} = \nabla \varphi$ ← скалярный потенциал

φ определен с точностью до константы.

$\varphi' = \varphi + C$

$$\nabla \varphi' = \nabla(\varphi + C) = \nabla \varphi$$

$$V_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$\vdots$

$$V_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

Плоское течение $\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$

Пусть выполнены одновременно св-ва несжим. и безвихренность.

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$ | условие Коши-Римана!

$\exists\ z = x + iy$, $\zeta = \varphi + i\psi$, тогда $\boxed{\zeta = \zeta(z)}$

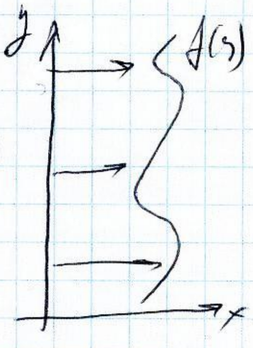
└ комплексный потенциал

Ура! Можем применить аппарат ТФКП.

Вот, например, плоское крыло:

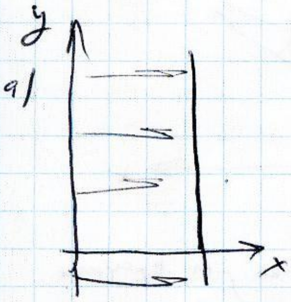
8.10.2015

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$



1. Сдвиговые течения $\begin{cases} u(x,y) = \text{const}(x) = f(y) \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$

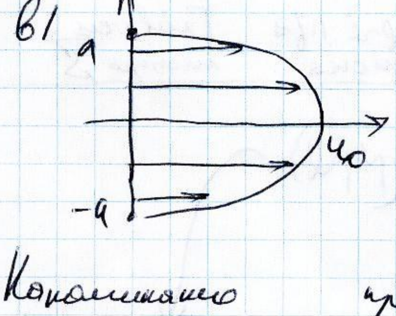
Частные случаи

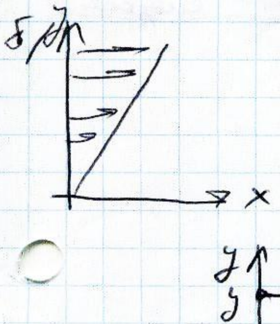


а) $f(y) = \text{const}(y) = U$ поршневое течение

б) $f(y) = U_0 \cdot \left(\frac{y}{a}\right)$ — течение Куэтта

в) $f(y) = U_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2\right)$ — течение Пуазейля





Напоминание про декарт-поляр коорд.

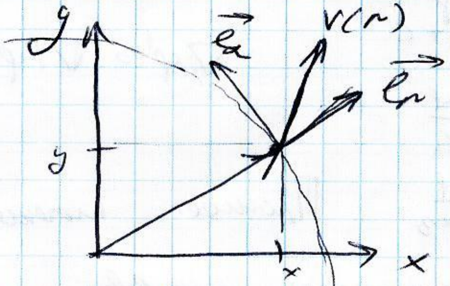
$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \end{cases}$$

$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$

$e_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right)_{q_2} \quad e_2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right)_{q_1}$

$\left(\vec{e_r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad \vec{e_\alpha} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right)_r\right)$ Локальный базис

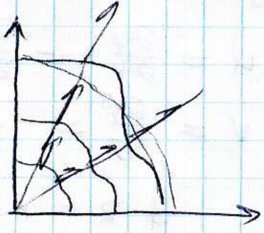


2 Течение типа „источник"

$V_r = \frac{f(\alpha)}{r} \qquad V_\alpha = 0$

Частн. случай простой пример:

$f(\alpha) = c, \quad V_r = \frac{c}{r}$ — круговое

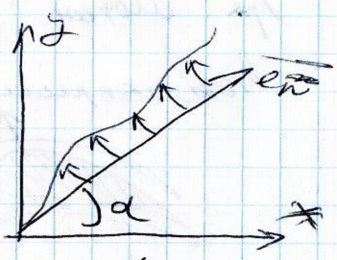


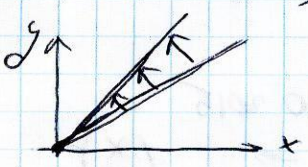
3. Течение типа вихрь

$V_r = 0, \quad V_\alpha = f(r)$

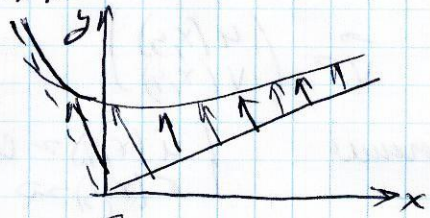
а) $f(r) = cr$

Квазитвердое вращение





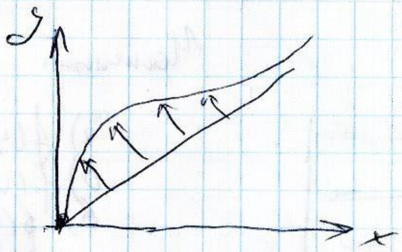
б) $f(r) = c/r$



в) $f(r) = \frac{c}{ar + b/r}$

$r \to 0 \quad f(r) \sim \frac{c}{b} r$

$r \to \infty \quad f(r) \sim \frac{c}{a} \frac{1}{r}$



Характер / Течение	div	rot	скал. пот. (if ∃)	ф-я (if ∃) тока	Глав. оси тензора	Картина лин. тока и профиле скорости
Течение Куэтта						
Седловое течение $\begin{cases} u(x,y) = cy \\ v(x,y) = cx \end{cases}$		это	в (r,φ)			
Простой	V	V			V	
Квазитвер.	V	V			V	

15.10.15. Источники, погрешности

a – точное a^* – приближенное. (известно)

О Тогда $\Delta(a^*) = |a^* - a|$ – погрешность абсолютн.

Поскольку a, $\Delta(a^*)$ неизвестны, но обычно пользуются оценками — $\Delta(a^*) \le \bar{\Delta}(a^*)$

О Относит. погрешность: $\delta(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|} = \dfrac{|a-a^*|}{|a|}$

$\delta(a^*) \le \bar{\delta}(a^*)$ ← верхн. оценка.

Часто используют альтерн. опред: $\delta(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$

Л Разница между ними невелика.

$$|a^*| = |a + (a^* - a)| \le |a| + |a^* - a| = |a| + \Delta(a^*)$$
$$|a^*| = |a - (a - a^*)| \ge |a| - |a - a^*| = |a| - \Delta(a^*)$$

Отсюда $-\Delta(a^*) \le |a^*| - |a| \le \Delta(a^*)$

Аналогично $\dfrac{1}{|a|+\Delta(a^*)} \le \dfrac{1}{|a^*|} \le \dfrac{1}{|a| - \Delta(a^*)} \Big| \times \Delta(a^*)$

$$\frac{\Delta(a^*)}{|a| + \Delta(a^*)} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a| - \Delta(a^*)}$$

$|a|\left(1 + \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|}\right)$ $\qquad$ $|a|\left(1 - \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|}\right)$

$\delta(a^*)$ $\qquad$ Применим Тейлора

$$\delta(a^*)(1 - \delta(a^*) + \dots) \le \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \le \delta(a^*)(1 + \delta(a^*) + \dots)$$

Отсюда $\delta(a^*) = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|} \approx \dfrac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$ С точностью до членов 2 порядка

позиционные:

$$a^* = \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \alpha_{-m} = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{p} + \frac{\alpha_{-2}}{p^2} + \dots + \frac{\alpha_{-m}}{p^m}$$

После первых незначащих идет нуль значимых, и они могут быть верными / нет.

О α_k верная, если $\Delta(a^*) \le p^k$ (верная знач. цифра)

Л $a^* = \underbrace{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_{n-N+1}}_{\text{верные}}, \underbrace{\alpha_{n-N}}_{\text{неверные}}$ $\qquad$ N верных цифр.

Оценка δ:

$\Delta(a^*) \le p^{n-N+1}$ $\qquad$ $|a^*| \ge p^n$

Тогда $\delta(a^*) \approx \dfrac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \le \dfrac{p^{n-N+1}}{p^n} = \dfrac{1}{p^{N-1}}$

$\begin{matrix}\Delta(a^*) \ge p^{n-N} \\ |a^*| \le p^{n+1}\end{matrix} \Big| \quad \delta(a^*) \approx \dfrac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \ge \dfrac{p^{n-N}}{p^{n+1}} = \dfrac{1}{p^{N+1}}$

Итого: $\dfrac{1}{p^{N+1}} \lessapprox \delta(a^*) \lessapprox \dfrac{1}{p^{N+1}}$

$\delta(a^*) \sim 1 / p^N$

Это удобно, например размер мантиссы в double/float задает N, δ однозначно.

Источники погрешностей:

неустранимые
{ — Ошибки измерений
— Ошибки модели (может плохо приближать)

устранимые
{ — Ошибки метода
— Ошибки компьютерного представления.

Будем дальше предполагать, что устранимые погрешности устранены.

(+) $a, b \to c = a \pm b$
$a^*, b^* \to c^* = a^* \pm b^*$ (плюс не машинный)

$\Delta(c^*) = \Delta(a^* \pm b^*) = |(a^* \pm b^*) - (a \pm b)| =$
$= |(a^* - a) \pm (b^* - b)| \le |a^* - a| + |b^* - b| = \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

$\delta(c^*) \le \dfrac{|a|\,\delta(a^*) + |b|\,\delta(b^*)}{|a \pm b|} \le \dfrac{|a| + |b|}{|a \pm b|}\delta_{max}$

$|a \pm b| \leftrightarrow |c|$

Таким образом мы видим ухудшение δ относ. Δ.

Аналогично.

(*) $a, b \to c = ab$
$a^*, b^* \to c^* = a^* b^*$

$\Delta(c^*) = |a^* b^* - ab| = |(a^* - a)b + (b^* - b)a + (a^* - a)(b^* - b)| \le$
$\le |a^* - a||b| + |b^* - b||a| + |a^* - a||b^* - b| =$
$= \Delta(a^*)|b| + \Delta(b^*)|a| + \Delta(b^*)\Delta(a^*)$

Относ: $\delta(c^*) = \dfrac{\Delta(c^*)}{|c|} \le \dfrac{|b|\Delta(a^*) + |a|\Delta(b^*) + \Delta(a^*)\Delta(b^*)}{|a||b|} =$

$= \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$

(/) $a\ b \to c = a/b$
$a^*\ b^* \to c^* = a^*/b^*$ $\Big| \to$ $\delta(c^*) \le \dfrac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)} \le \delta(a^*) + \delta(b^*)$

(foo) $x \to y = f(x)$
$x^* \to y^* = f(x^*)$

$\Delta(y^*) = |y^* - y| = |f(x^*) - f(x)| = |f(x) + f'(x)(x^* - x) + \ldots$
$- f(x)| \approx |f'(x)||x^* - x|$

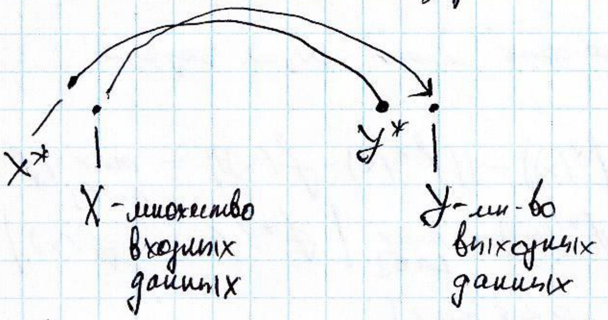
$|y|\,\delta(y^*) \approx |f'(x)||x|\,\delta(x^*)$

$\delta(y^*) \approx \dfrac{|f'(x)||x|}{|f(x)|}\delta(x^*)$

(fooN) $x_1 \ldots x_n \to y = f(x_1 \ldots x_n)$
$x_1^* \ldots x_n^* \to y^* = f(x_1^* \ldots x_n^*)$

$\delta(y^*) = \dfrac{1}{|f(\vec{x})|}\sum \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}} |x_i|\,\delta(x_i)$

Корректность и обусловленность вычисл. задач



$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x\|}$$

$$\Delta(y^*) = \|y^* - y\|$$

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{\|y\|}$$

① Устойчивость $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ $\Delta(x^*) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Delta(y^*) \le \varepsilon$
$(\delta(x^*) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \delta(y^*) \le \varepsilon)$

Устойчивость
Существование
Единственность
$+ \longrightarrow$ Корректность вычисл. задачи по Адамару

$$\nu_\Delta = \frac{\Delta(y^*)}{\Delta(x^*)}, \quad \bar{\nu}_\Delta = \frac{\bar{\Delta}(y^*)}{\Delta(x^*)}$$

$$\nu_\delta = \frac{\delta(y^*)}{\delta(x^*)}, \quad \bar{\nu}_\delta = \frac{\bar{\delta}(y^*)}{\delta(x^*)}$$

Некоторые действие дают ужасную погрешность:
Например $e^x \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{x^i}{i!}$ ← вычитаем ± числа с погрешностью, результат плох.

29.10.2015

Примеры

1° Арифм. слож/вычитание

$$a, b \longrightarrow c = a \pm b \;; \quad a^* b^* \longrightarrow c^* = a^* \pm b^*$$

$$\vec{A} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{A}^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}, \quad \delta(\vec{A}^*) \equiv \|\vec{A}^* - \vec{A}\| = \max(\delta(a^*), \delta(b^*)) = \delta_m$$

Мы знаем, что: $\delta(c^*) \le \frac{|a|+|b|}{|a \pm b|} \delta_m = \underbrace{\frac{|a|+|b|}{|a \pm b|} \delta(\vec{A}^*)}_{= \bar{\delta}(c^*)}$

$$\nu_\delta \le \frac{\bar{\delta}(c^*)}{\delta(A^*)} = \frac{|a|+|b|}{|a \pm b|}$$

2° Вычисл. корней ур-е

$$(x-1)^4 = 0 \qquad P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(\sqrt{x}+1)^4(\sqrt{x}-1)^4$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

$$\exists\, \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 - 10^{-8} \end{pmatrix} \quad (x-1)^4 = 10^{-8}, \quad (x-1)^2 = \pm 10^{-4}$$

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1 + 10^{-2} \\ 1 - 10^{-2} \\ 1 + i10^{-2} \\ 1 + i10^{-2} \end{pmatrix}$$

Отсюда $\Delta(\vec{a}^*) = \max |a_i^* - a_i| = 10^{-8}$
$\Delta(\vec{x}^*) = \max |x_i^* - x_i| = 10^{-2}$ $\Rightarrow J_\Delta = \dfrac{\Delta(\vec{x}^*)}{\Delta(\vec{a}^*)} = 10^6$

Это очень плохо обусл. задача.

3. $\underset{[a,b]}{f(x)} \longrightarrow \underset{[a,b]}{f'(x)}$ $\quad \Delta(f^*(x)) = \|f^*(x) - f(x)\| = \max\limits_{[a\,b]} |f^*(x) - f(x)|$

$f^*(x) \longrightarrow f^{*\prime}(x)$ $\quad \Delta(f^{*\prime}(x)) = \max\limits_{[a\,b]} |f^{*\prime}(x) - f'(x)|$

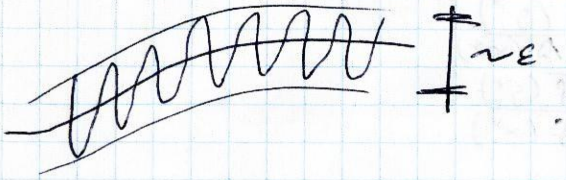
$\exists\, f^*(x) = f(x) + \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) \quad 0 < \varepsilon \ll 1$

$\Delta(f^*(x)) = \varepsilon$

$\exists\, f^{*\prime}(x) = f'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\cos\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$

$\Delta(f^{*\prime}(x)) = \frac{1}{\varepsilon}$

$$J_\Delta = \frac{\Delta(f^{*\prime}(x))}{\Delta(f^*(x))} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$



При дифференцировании наклон увеличивается.

4. Вычисление определенного интеграла.

$f(x)$ на $[a,b] \longrightarrow I = \int_a^b f(x)\,dx$

$f^*(x)$ на $[a,b] \longrightarrow I^* = \int_a^b f^*(x)\,dx$

$\Delta(f^*) = \max\limits_{[a\,b]} |f^*(x) - f(x)|$

$\Delta(I^*) = |I^* - I| = \left|\int_a^b [f^*(x) - f(x)]\,dx\right| \leq$

$\leq \int_a^b |f^*(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \Delta(f^*)\,dx =$

$= \Delta(f^*)(b-a) =: \bar{\Delta}(I^*)$

$\bar{J}_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(I^*)}{\Delta(f^*)} = b - a$ $\qquad \exists\, \delta(f^*) = \dfrac{\Delta(f^*)}{\langle |f| \rangle}$ ← сред. знач

$\Delta(I^*) = |I|\,\delta(I^*) \leq \langle |f| \rangle\, \delta(f^*)(b-a)$

$\delta(I^*) \leq \dfrac{\langle |f| \rangle\, \delta(f^*)(b-a)}{|I|} =: \bar{\delta}(I^*)$

$J_\delta = \dfrac{\bar{\delta}(I^*)}{\delta(f^*)} = \dfrac{\langle |f| \rangle (b-a)}{|I|} = \dfrac{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx\,(b-a)}{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|} =$

$= \dfrac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$; Это плохо обусл., если мы много осциллируем вокруг нуля

5. Вычисление суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_n^* = \sum^{n} a_k^*$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longrightarrow S_n \qquad \vec{a}^* = \begin{pmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} \longrightarrow S_n^*$$

$$\Delta(S_n^*) = |S_n^* - S_n| = \left|\sum^{n} (a_k^* - a_k)\right| \le \sum |a_k^* - a_k| \le$$
$$\le \sum^{n} \Delta(\vec{a}^*) = \Delta(\vec{a}^*)\cdot n =: \bar{\Delta}(S_n^*)$$

$$\nu_\Delta = \frac{\bar{\Delta}(S_n^*)}{\Delta(\vec{a}^*)} = n \qquad \delta(\vec{a}^*) = \frac{\Delta(\vec{a}^*)}{\langle |a_k| \rangle}$$

$$\Delta(S_n^*) \le \Delta(\vec{a}^*)\, n \;; \quad |S_n|\,\delta(S_n^*) \le \langle |a_k| \rangle\, \delta(\vec{a}^*)\, n$$

$$\delta(S_n^*) \le \frac{\langle |a_k| \rangle\, \delta(\vec{a}^*)\, n}{|S_n|}$$

$$\nu_\delta = \frac{\bar{\delta}(S_n^*)}{\delta(\vec{a}^*)} = \frac{\langle |a_k| \rangle\, n}{|S_n|} = \frac{\frac{1}{n}\sum^{n} |a_k|\, n}{\left|\sum^{n} a_k\right|} = \frac{\sum^{n} |a_k|}{\left|\sum^{n} a_k\right|}$$

Вот возьмем $e^x \simeq \sum^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \Big| \; x < 0, \; |x| \gg 1$

$$\bar{\nu}_\delta(S_n^*) \approx \frac{e^{|x|}}{e^{-|x|}} = e^{2|x|}$$

Компьютерное предст. $\mathbb{R}$

если мантисса — m бит $\Rightarrow \delta(a^*) \sim \frac{1}{2^m}$

Более точно. $\frac{1}{2^{m+1}} \le \delta(a^*) \le \frac{1}{2^{m-1}}$

5.11.2015

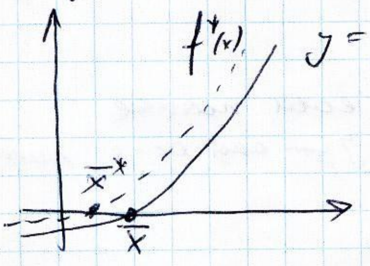
$P_n(\bar{x}) = 0$ — алгебраическое ур-е

$F(\bar{x}) = 0$ — трансцендентное

1) Аналитическое исследование корней
2) Локализация корней $\quad a_i \le \bar{x}_i \le b_i$
3) $\boxed{3}$ Итерационное уточнение корней $\quad x_i^0 \; x_i^1 \ldots x_i^k \ldots$

$$\lim x_i^k = \bar{x}_i$$
$$|x_i^k - \bar{x}_i| < \varepsilon$$

Обусловленность задачи нахождения корней



$f(x) \to \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$

$f^*(x) \to \bar{x}^* : f^*(\bar{x}^*) = 0$

$$\Delta(f^*) = \max_{[a,b]} |f^*(x) - f(x)|$$

$$\Delta(\bar{x}^*) = |x^* - x|$$

$|f^*(x) - f(x)| \le \Delta(f^*)$

$|f^*(\bar{x}^*) - f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*) \Rightarrow |f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*)$

$|f(\bar{x} + (\bar{x}^* - x))| \le \Delta(f^*)$, разложим в ряд

$|f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\bar{x}^* - x) + \dots| \le \Delta(f^*)$

$|f'(x)||\bar{x}^* - \bar{x}| \le \Delta(f^*)$

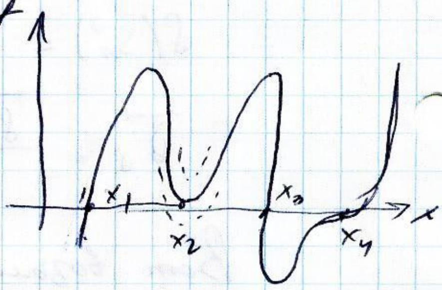
$\Delta(\bar{x}^*) = |\bar{x}^* - \bar{x}| \le \dfrac{\Delta(f^*)}{|f'(x)|} = \bar{\Delta}(\bar{x}^*)$

Тогда $\bar{\nu}_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(\bar{x}^*)}{\Delta(f^*)} = \dfrac{1}{|f'(\bar{x})|}$

Кратный корень:

$f(\bar{x}) = 0,\ f'(\bar{x}) = 0, \dots, f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0,\ f^{(m)}(\bar{x}) \ne 0$

$\bar{x}$ – корень кратности m



$|f^*(x) - f(x)| \le \Delta(f^*)$ на $[a\ b]$

$|f^*(\bar{x}^*) - f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*)$

$|f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*)$

$|f(\bar{x} + (\bar{x}^* - \bar{x}))| \le \Delta(f^*)$ $\Rightarrow$ $|f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(\bar{x}^* + \bar{x}) + \dots + \dfrac{f^m(\bar{x})}{m!}(\bar{x}^* - \bar{x})^m + \dots| \le \Delta(f^*)$

тогда $\dfrac{|f^{(m)}(\bar{x})|}{m!} \underbrace{|\bar{x}^* - \bar{x}|}_{\Delta(\bar{x}^*)}{}^m \le \Delta(f^*)$

$\Delta(\bar{x}^*) \le \left[\dfrac{m!\,\Delta(f^*)}{f^m(\bar{x})}\right]^{1/m} = \left[\dfrac{m!}{f^m(\bar{x})}\right]^{1/m} \Delta(f^*)^{\frac{1}{m}} = \bar{\Delta}(\bar{x}^*)$

$\bar{\nu}_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(\bar{x}^*)}{\Delta(f^*)} = \left[\dfrac{m!}{f^m(\bar{x})}\right]^{1/m} \Delta(f^*)^{\frac{1-m}{m}}$

$m \to \infty \quad \dfrac{1-m}{m} \to -1$

$m! = (2\pi m)^{1/2} \left(\dfrac{m}{e}\right)^m [1 + \dots]$

$(m!)^{1/m} = (2\pi m)^{1/2m} \left(\dfrac{m}{e}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(2\pi m)}{2m}\right)\dfrac{m}{e} \sim \dfrac{m}{e}$

Оценка скорости сходимости итерационной послед-ти

1. Линейная скорость сходимости

$|x^{m+1} - \bar{x}| \le q|x^m - \bar{x}|$, $q < 1$ – если такое верно для $\{x^i\}$ — она сх-я линейно

$\le q^{m+1}|x^0 - \bar{x}|$

2. Сверхлинейная скорость сх-ти

$$|x^{m+1}-\bar{x}| \le q\,|x^m-\bar{x}|^p, \quad p>1 \ (p^2 \text{ — квадратич.}, \ p^3 \text{ — кубич.} \dots)$$

$$|x^{m-1}-\bar{x}| \le \dots \le q^{1+p+\dots+p^n}\,|x^0-\bar{x}|^{p^{m-1}} =$$

$$= q^{\frac{p^{m+1}-1}{p-1}}\,|x^0-\bar{x}|^{p^{m+1}} = q^{\frac{1}{1-p}}\left(q^{\frac{1}{p-1}}|x^0-\bar{x}|\right)^{p^{m+1}}$$

$$\underbrace{q^{\frac{1}{p-1}}|x^0-\bar{x}|<1}_{\text{условие сходимости}}$$

<u>Метод простых итераций</u>

$f(x)=0 \iff x=\varphi(x)$ $\qquad x^0;\ x^1=\varphi(x^0);\ x^2=\varphi(x^1)\dots$ $x^{n+1}=\varphi(x^n)$

Эта посл-ть сх-ся?

$$x^{n+1}=\varphi(x^n) \ \Big|\lim_{n\to\infty} \qquad \lim x^{n+1}=\lim\varphi(x^n)$$

$$\bar{x}=\varphi(\bar{x})$$

Да, если lim сущ., то

Условия сходимости:

1) $|\varphi'(x)| \le q < 1$ в ε-окрестности $\bar{x}$

2) $x^0 \in \varepsilon$-окрест. $\bar{x}$

$\Downarrow$

1) $x^m \in \varepsilon$-окрестности

2) $\lim x^n = \bar{x}$

$$\begin{matrix} x^1=\varphi(x^0) \\ \bar{x}=\varphi(\bar{x}) \end{matrix} \qquad x^1-\bar{x}=\varphi(x^0)-\varphi(\bar{x})=\varphi'(\xi)(x^0-\bar{x}),\ \xi\in[x^0;\bar{x}]$$

$$|x^1-\bar{x}|=|\varphi'(\xi)|\,|x^0-\bar{x}| \le q|x^0-\bar{x}|$$

$$|x^2-\bar{x}| \le q|x^1-\bar{x}| \le q^2|x^0-\bar{x}|$$

$$\dots$$

$$|x^m-\bar{x}| \le q^n|x^0-\bar{x}|$$

$$x^{n+1}-\bar{x}=\varphi(x^n)-\varphi(\bar{x})=\varphi'(\xi_n)(x^n-\bar{x})=$$

$$=\varphi'(\xi_n)\cdot(x^n-x^{n+1}+x^{n+1}-\bar{x})=\varphi'(\xi_n)(x^n-x^{n+1})+\varphi(\xi_n)(x^{n+1}-\bar{x})$$

$$|x^{n+1}-\bar{x}| \le |\varphi'(\xi_n)|\,|x^n-x^{n+1}|+|\varphi'(\xi_n)|\,|x^{n+1}-\bar{x}|$$

$$(1-|\varphi'(\xi_n)|)\,|x^{n+1}-\bar{x}| \le |\varphi'(\xi_n)|\,|x^{n+1}-x^n|$$

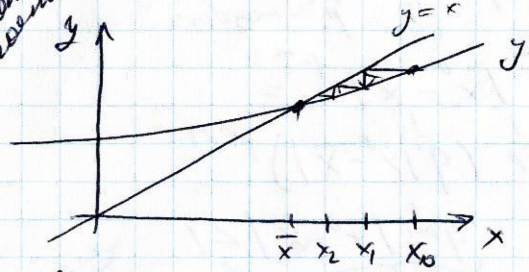
$$|x^{n+1}-\bar{x}| \le \frac{|\varphi'(\xi_n)|}{1-|\varphi'(\xi_n)|}\,|x^{n+1}-x^n| \le \frac{q}{1-q}|x^{n+1}-x^n| \le \varepsilon$$

$$|x^{n+1}-x^n| \le \varepsilon\frac{1-q}{q} \Rightarrow |x^{n+1}-\bar{x}| \le \varepsilon$$

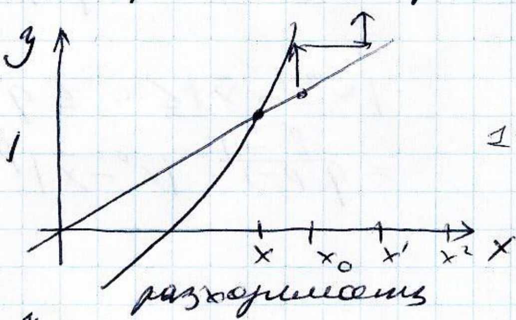
геометр. интерпретация

$x=\varphi(x)$ $\quad |\varphi'(x)| \le q < 1$ в ε-окрестности корня

монотонная сходимость

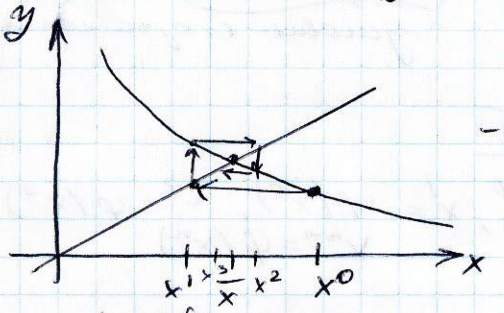


$0 < \varphi'(x) < 1$



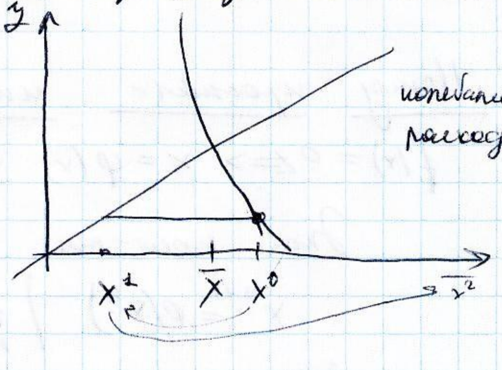
$1 < \varphi'(x)$

расходимость



колебательная сходимость

$-1 < \varphi'(x) < 0$



колебательная расходимость

Метод Ньютона

$f(\bar{x})=0$

$f(x^0)\neq 0$

$$f[x^0+(\bar{x}-x^0)]=0$$

$$x^1 = x_0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)}$$

$$x^2 = x^1 - \frac{f(x^1)}{f'(x^1)}$$

$$\vdots$$

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$$

$$x^{n+1}-\bar{x} = x^n - \bar{x} - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} = -\frac{f(x^n)-f'(x^n)(x^n-\bar{x})}{f'(x^n)}$$

$$f(\bar{x})=0$$

$$f(x^n-(\bar{x}-x^n))=0$$

$$\underbrace{f(x^n)+f'(x^n)(\bar{x}-x^n)}_{f(x^n)-f'(x^n)(x^n-\bar{x})} + \frac{1}{2}f''(\xi^n)(\bar{x}-x^n)^2=0$$

$$x^{n+1}-\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi^n)}{f'(x^n)}(x^n-\bar{x})^2$$

Отметим, что:

$\frac{1}{2}\frac{f''(\xi^n)}{f'(x^n)} \le q$ в окрестности $\bar{x}$: $|x^{n+1}-\bar{x}| \le q|x^n-\bar{x}|^2$ — квадратич. сх-ть $\le \frac{1}{q}(q|x^0-\bar{x}|)^{2^{n+1}}$

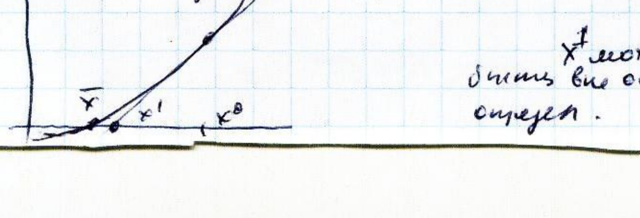
Условие сх-ти метод. Ньютона

1) $\frac{1}{2}\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \le q$ в ε-окр.

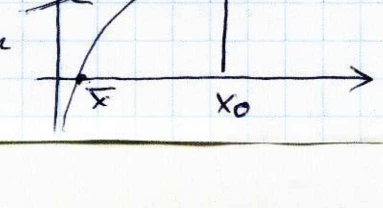
2) $q|x^0-\bar{x}|<1$

3) $x^0 \in \varepsilon$-окрестности корня

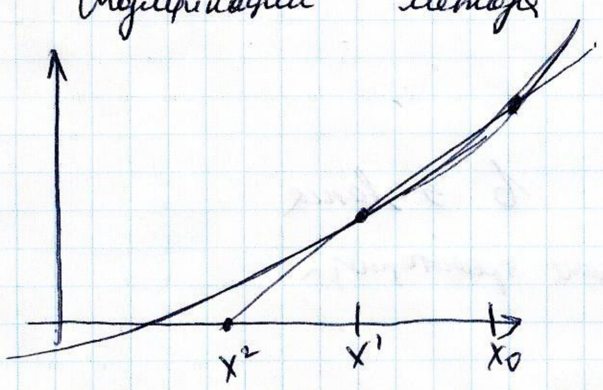
~~$|x^{n+1}-\bar{x}| \le q|x^n-x|$~~ Иллюстрация.



x^1 может быть вне обл. определ.



Модификации метода Ньютона



$$l(x): f(x_0) + \frac{f(x^1) - f(x^0)}{x^1 - x_0}(x - x^2) = 0$$

$$l(x^2) = 0 \qquad f(x_0) + \frac{f(x^1) - f(x_0)}{x^1 - x_0}(x^2 - x^0) = 0$$

$$x^2 = x^0 - \frac{x^1 - x^0}{f(x^1) - f(x^0)} f(x_0)$$

$$f'(x^0) \approx \frac{f(x^1) - f(x^0)}{x^1 - x^0}$$

$$x^{n+1} = x^0 + \frac{x_n - x^0}{f(x^n) - f(x^0)} f(x_0) \text{ — метод ложного положения}$$

$$x^{n+1} = x^n + \frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})} f(x^{n-1}) \text{ — метод секущих}$$

Домашнее задание

1. $x = rx(1-x)$ — решить методом простых итераций.

$X_2 = 1 - \frac{1}{r}$

$0 < r < r' \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_1 = 0$ монот.

$r' < r < r'' \Rightarrow x_n \to x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ монот.

$r'' < \underbrace{r < r'''}_{r_1} \Rightarrow x_n \to x_2$, колебательно.

$r_1 < r < r_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{2k} \to x_3' \\ x_{2k+1} \to x_3'' \end{array}\right\}$ бифуркация

$r_2 < r < r_3 \Rightarrow$ $x_{2k} \to x_4'$, $x_{2k+1} \to x_4''$, $x_{4k+2} \to x_4'''$, $x_{4k+3} \to x_4''''$

$r_n = r_\infty - \frac{c}{\delta^n}$

r_∞, δ — вещ. числа (иррациональные)

Константы Фейгенбаума

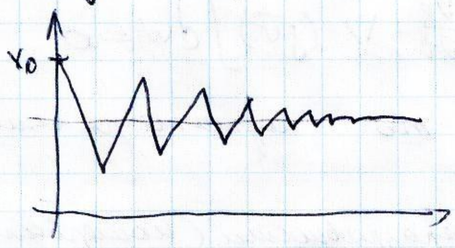
$r_\infty < 4$

$r_\infty < r < 4$ детерминированный хаос.

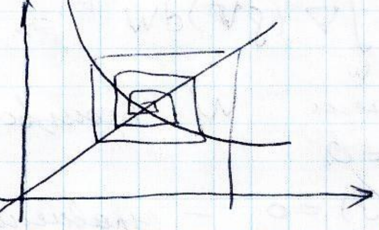
$r > 4$ — расхождение

Написать это, графики:

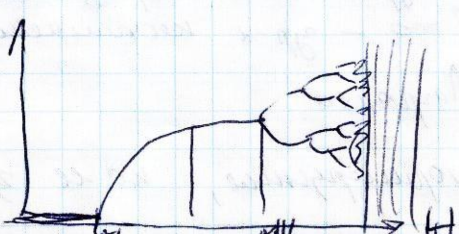
1. Сход. от номера

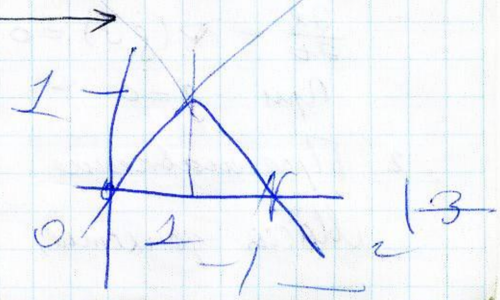


2. Траектория.

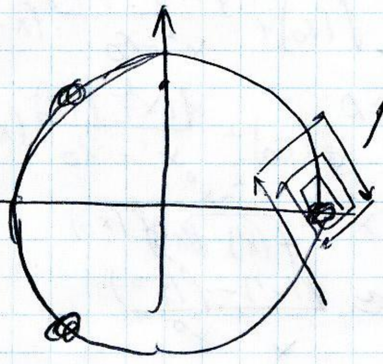


3. Диаграмма:





(2). $z^3 = 1$. $z \in \mathbb{C}$



Раскрасить в 3 цвета

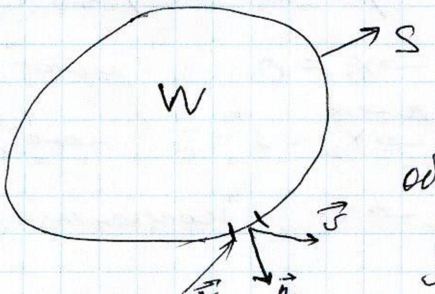
ломаные траектории.

10.12.2015

Законы сохранения в механике сплошной среды.

Закон сохранения массы

1. Представление Эйлера



фиксированный в пространстве объем W с площадью пов-ти S)

Как меняется масса среды в этом объеме за некоторый промежуток времени?

$\rho = \lim\limits_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$ — плотность

Выделим некоторый участок поверхности ΔS, через который проходит среда со скоростью $\vec{v}$. $\vec{n}$ - положение участка, $\vec{n}$ - нормаль с ΔS. За время dt из объема выйдет среда, заключенная объемом $\vec{v}dt\,dS\cos(\vec{v},\vec{n})$.

$$\underbrace{d_E \int\limits_W \rho\, dW}_{\text{полная масса } W} = -\oint\limits_S \rho v\, dt\, dS \cos(\vec{v},\vec{n})$$

объем вытекает

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_E \int\limits_W \rho\, dW = -\oint \rho \vec{v}\vec{n}\, dS$$ преобразование по т. Гаусса.

$$\int\limits_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = -\int\limits_W \nabla\cdot(\rho\vec{v})\, dW \Rightarrow \int\limits_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right] dW = 0$$

Если объем W произволен, то подынтегральное выражение $=0$.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0$ — уравнение неразрывности (консервативная форма)

При $\rho = 0 \Leftrightarrow \nabla\vec{v} = 0$ — ур-е несжимаемости

2. Представление Лагранжа.

Масса движется, деформируется, но ее значение постоянно.

$d_t \int_W \rho \, dW = 0$

$\int_W \frac{d}{dt} \rho \, dW = 0$ — тут субстанциональная производная.

$\frac{d\rho}{dt} dW + \rho \frac{d}{dt}(dW) = 0$

$T(\overleftrightarrow{S}) = \frac{1}{dW} \frac{d}{dt}(dW) = \nabla \cdot \vec{V}$, где $\vec{v}$ — скорость изменения малого лагранжевого объема.

$\frac{d}{dt}(dW) = dW \, \nabla \cdot \vec{v}$

$dW \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \vec{v}) \right] = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \vec{v}) = 0$ — уравнение неразрывности (неконсерват. форма)

3. Эквивалентность не- и консервативных формул.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v} + \rho \nabla \vec{v} = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} v_3 = \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \rho = (\vec{V} \nabla) \rho$

Это оператор конвективного переноса

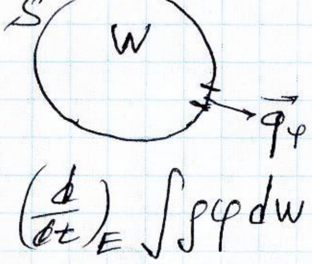
$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \rho}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$. Ну всё верно.

4. Величины, аддитивные по массе.

$\Phi: m \mapsto \Phi(m)$. Если $m = m_1 + m_2$, $\Phi(m) = \Phi(m_1) + \Phi(m_2)$, то Φ — физ. величина, аддитивн. по массе.

$\varphi = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta m}$ — удельная величина.

Запишем закон сохр. именно для таких величин, как Φ.



$\vec{q}_\varphi$ — вектор плотности потока величины Φ. Показывает, какое количество φ протекает через единицу площади за единицу времени.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_E \int_W \rho \varphi \, dW = -\oint_S \rho \varphi (\vec{v} \vec{n}) \, dS - \oint \vec{q}_\varphi \vec{n} \, dS + \int_W \rho \, Q_\varphi \, dW$$

конвективный перенос/поток' релаксационный перенос/поток' источник

Полный поток.

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) \, dW = -\int_W \nabla (\rho \varphi \vec{v}) \, dW - \int_W \nabla \vec{q}_\varphi \, dW + \int_W \rho \, Q_\varphi \, dW$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) + \nabla (\rho \varphi \vec{v}) + \nabla \vec{J}_\varphi - \rho \, Q_\varphi = 0$$

Это уравнение переноса величины φ / Φ в консервативной форме.

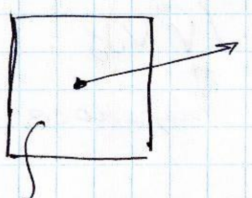
$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \int_W \rho\varphi\, dW = -\oint_S (\vec{q_\varphi}, \vec{n})\, dS + \int_W \rho\, Q_\varphi\, dW$$

$$\int_W \rho \frac{d\varphi}{dt}\, dW = -\int_W \nabla \vec{q_\varphi}\, dW + \int_W \rho\, Q_\varphi\, dW$$

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} + \nabla \vec{q_\varphi} - \rho\, Q_\varphi = 0$$ — уравнение переноса φ в неконсервативной форме.

Упр. Доказать эквивалентность ур-й переноса.

Распределение сил в сплошной среде



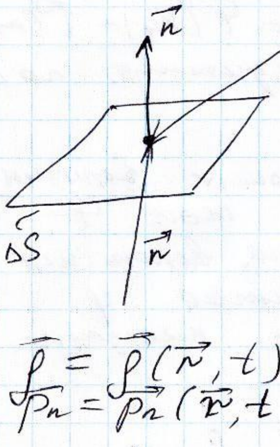
— Лагранжев объем, на который действует сила со стороны внешнего поля.

$d\vec{F}$ — аддитивна по массе. (концепция дальнодействия)

dm

$\vec{f} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}$; $[f] = \frac{м}{с^2}$ — это типа ускорение

$d\vec{F}$ — объемная, полевая сила.



ΔS — делит среду на две половины,

ΔP_n — поверхностная, контактная сила, аддитивная по площади.

$P_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S}$ — напряжение (тут концепция близкодействия)

$[p_n] = \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot м^2} = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Па.$

$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$ является полем.

$\vec{p_n} = \vec{p_n}(\vec{r}, t, \vec{n})$ не является полем

Формула Коши и тензор напряжений

Выразим Лагранжев объем в виде тетраэдра, три стороны которого ориентированы по координатным осям

Три его грани ориент. по коорд. плоскостям, 4-я по произвольной

$\Delta S_1 \perp e_1 \quad \Delta S_2 \perp e_2 \quad \Delta S_3 \perp e_3 \quad \Delta S_n \perp \vec{n}$

2-й закон Ньютона. (−), т.к. орт $\vec{e_i}$ направлен внутрь тетраэдра

$$\underset{\text{масса тетраэдра}}{\Delta m}\ \underset{\text{ускорение}}{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}} = \underbrace{\vec{p_n}\Delta S_n - \vec{p_1}\Delta S_1 - \vec{p_2}\Delta S_2 - \vec{p_3}\Delta S_3}_{\text{сумма всех сил (контакт.)}} + \underset{\text{объемные силы}}{\Delta m \cdot \vec{f}}$$

$\Delta m = \rho \Delta W = \rho \frac{1}{3} \Delta S_n \cdot h$ высота ← для тетраэдра

$$\rho \frac{1}{3} h \frac{d^2 z}{dt^2} = \vec{p}_n - \vec{p}_1 \frac{\Delta S_1}{\Delta S_n} - \vec{p}_2 \frac{\Delta S_2}{\Delta S_n} - \vec{p}_3 \frac{\Delta S_3}{\Delta S_n} + \frac{1}{3} h \rho \vec{F}$$

$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_n} = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = proj(\vec{n}, e_1) = n_1$ Устремим $h \to 0$.

угол между гранями

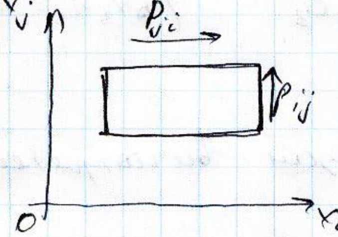
$\vec{p}_n = \vec{p}_1 n_1 + \vec{p}_2 n_2 + \vec{p}_3 n_3$. Напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}$ однозначно задается напряжениями на площадках, ортогональных осям.

Спроектируем равенство на оси:

$$\begin{cases} p_{n1} = p_{11} n_1 + p_{21} n_2 + p_{31} n_3 \\ \vdots \\ p_{n3} = p_{13} n_1 + p_{23} n_2 + p_{33} n_3 \end{cases}$$

Введем матрицу $\overleftrightarrow{P} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$

первый индекс — № коорд. плоск.
второй — номер куда проецируем напряжение



Тогда ф-ла Коши записывается коротко:

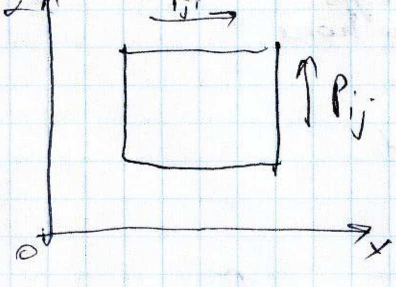
$$\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P}^T \vec{n}$$

$\vec{p}_n$ и $\vec{n}$ — вектора, преобразующиеся по векторному закону. Значит, по признаку тензора из этого равенства следует, что $\overleftrightarrow{P}$ — тензор, т.е. преобразуемые по тензорному закону.

$\overleftrightarrow{P}$ — тензор напряжения. При этом мы берем маленький локальный тетраэдр, и этот тензор зависит от точки, т.е. это тензорное поле.

Теперь мы умеем описывать поле поверх. силы.

Симметрия тензора напряжения



Эта сила создает момент и вращ. тело. Покажем симм. $\overleftrightarrow{P}$.

Закон сохр. момента импульса:

$\overleftrightarrow{I}$ — тензор инерции

$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}$ — момент импульса

$\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости

$$\frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega}\right) = \text{сумма моментов всех сил} = \underbrace{\vec{r}_n \times (\underbrace{\vec{p}_n \Delta S_n}_{\text{сила}})}_{\text{момент силы}} - \vec{r}_1 (\vec{p}_1 \Delta S_1) - \vec{r}_2 (\vec{p}_2 \Delta S_2) - \vec{r}_3 (\vec{p}_3 \Delta S_3) + \vec{r}_0 \times (\vec{F} \Delta m)$$

$r_n, r_1 \ldots r_3$ — радиус-вектора центров масс граней тетраэдра

r_0 — радиус-вектор центра масс тетраэдра.

$\frac{d}{dt}(\overline{I}\cdot\overline{\omega}) \sim h^5$ (сложно показать)

$\overline{r_i}\times(p_i \Delta S_i) \sim h^2$

$\overline{r_0}\times(f\Delta m)\sim h^3$

Устремим $h\to 0$. $\overline{r_n}(\overline{p_n}\Delta S_n)$

$$\overline{r_n}\times(\overline{p_n}\Delta S_n) = \overline{r_1}\times(\overline{p_1}\Delta S_1)+\overline{r_2}\times(\overline{p_2}\Delta S_2)+\overline{r_3}\times(\overline{p_3}\Delta S_3)$$

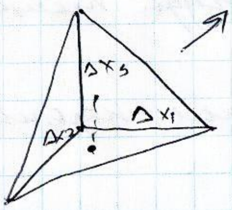
Условие уравновешивания моментов.

$\overline{p_n} = \overline{p_1}n_1+\overline{p_2}n_2+\overline{p_3}n_3$ подставим

$$(\overline{r_n}-\overline{r_1})\times(\overline{p_1}n_1)+(\overline{r_n}-\overline{r_2})\times(\overline{p_2}n_2)+(\overline{r_n}-\overline{r_3})(\overline{p_3}n_3)=0$$

$\overline{r_3}$ — центр масс — точка пересеч. медиан.

$\overline{r_n}-\overline{r_3} = \frac{1}{3}\Delta x_3\overline{e_3}$, т.к. нижняя грань — проекция верх.



$(\overline{r_n}-\overline{r_3})^{in}x_3 = \frac{1}{3}\Delta x_3 \overline{e_3} n_3 = \frac{1}{3} h\overline{e_3}$ $(\Delta x_3 n_3 = h)$

Поделим всё на $\frac{1}{3} h$:

$\overline{e_1}\times\overline{p_1}+\overline{e_2}\times\overline{p_2}+\overline{e_3}\times\overline{p_3}=0$ Спроецируем все напряжения.

$$\overline{e_1}\times(p_{11}\overline{e_1}+p_{21}\overline{e_2}+p_{31}\overline{e_3})+\dots+\overline{e_3}\times(p_{13}\overline{e_1}+p_{23}\overline{e_2}+p_{33}\overline{e_3})=0$$

$\overline{e_i}\times\overline{e_j}=0$

$(p_{23}-p_{32})\overline{e_1}+(p_{31}-p_{13})\overline{e_2}+(p_{12}-p_{21})\overline{e_3}=0$

$\begin{cases} p_{23}=p_{32}\\ p_{13}=p_{31}\\ p_{12}=p_{21}\end{cases} \Rightarrow$ Симметрия!

b) Обобщённая теорема Гаусса

Обычная формула Гаусса: $\oint\limits_S(\overline{a}\cdot\overline{n})d\sigma = \int\limits_W(\overline{\nabla}\cdot\overline{a})dW$

В выводе этой формулы использовалось утверждение $\oint\limits_S n_i\varphi\, d\sigma = \int\limits_W \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dW$

проекция на i-й орт — какое-нибудь скалярное поле

Из неё получается ф-ла Гаусса

$$\oint\limits_S(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3)dS = \int\limits_W\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)dW$$

Можно обобщить так:

$\int\limits_S(n\otimes \overleftrightarrow{T})dS = \int\limits_W(\nabla\otimes\overleftrightarrow{T})dW$ — обобщённая теорема Гаусса

любое тензорное поле (векторное / скалярное)

любая допустимая операция, ведущая нам простр.

Пример: $\oint\limits_S n\varphi\, dS = \int\limits_S\underbrace{(\nabla\varphi)}_{=\mathrm{grad}\,\varphi}dW$

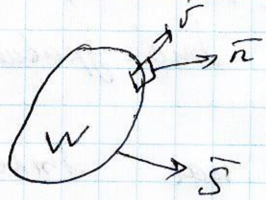
$$\oint_S (\bar n\cdot\bar a)\,dS = \int_W (\nabla\bar a)\,dW \qquad \oint (n\cdot\overleftrightarrow{T})\,dS = \int_W (\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})\,dW$$

Вспомним: $\bar n\cdot\overleftrightarrow{T} = (n_1 \cdots n_3)\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & \\ & & T_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1T_{11}+n_2T_{21}+n_3T_{31}; \\ \cdots \\ n_1T_{13}+n_2T_{23}+n_3T_{33}\end{pmatrix}$

$$\bar\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & \\ & & T_{33}\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{31}}{\partial x_3}\right) \ \cdots \ \left(\frac{\partial T_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}\right)$$

Уравнение переноса импульса.

∀ Лагранжев объём



2й закон Ньютона в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_W \rho\bar v\,dw\right) = \oint_S \bar p_n\,dP + \int_W \rho\bar f\,dW$$

Лагр. объем может деформироваться, поэтому ρ и dw не постоянны, но масса ρdw постоянна.

$$\int_W \rho\frac{d\bar v}{dt}\,dw = \int_S \bar n\overleftrightarrow{P}\,dP + \int_w \rho\bar f\,dw$$

$$\int_S \bar n\overleftrightarrow{P}\,dP = \int_W \bar v\,\overleftrightarrow{P}\,dw$$

$$\int_w \left(\rho\frac{d\bar v}{dt} - \bar v\overleftrightarrow{P} - \rho\bar f\right)dw = 0$$

$$\rho\left(\frac{d\vec v}{dt}\right) = \vec\nabla\,\overleftrightarrow{P} + \rho\vec f$$

↑ субстанциональная производная $= \dfrac{\partial\vec v}{\partial t} + (\bar v\cdot\nabla)\bar v$

Проекции на оси:

$$\frac{\partial\bar v}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1$$

$$\frac{\partial\bar v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad k\in\{1,2,3\}$$

Уравнение переноса энергии

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_i \underbrace{\int_W \rho\big(\underset{\text{внутр. эн.}}{E} + \underset{\text{кинемат. эн.}}{\frac{v^2}{2}}\big)dw}_{\text{изменение энергии}} = \underbrace{\oint_S (\overset{A}{\bar p_n}\cdot\bar v)\,dS}_{\text{Мощность (работа в t) конт. сил}} + \underbrace{\int_W \rho\bar f\bar v\,dw}_{\text{Мощ. объем. сил}} - \int_S (\bar q\cdot\bar n)\,dS + \underbrace{\int_W \rho Q\,dS}_{\text{выдел. энергия}}$$

B

$$\int_W \rho\frac{d}{dt}\left(E + \frac{v^2}{2}\right)dw$$

$$A = \oint_S (\overline{n}\cdot\overline{p})\,\overline{v}\,dS = \int_S \overline{n}\cdot(\overline{p}\cdot\overline{v})\,dS = \int_W \nabla\cdot(\overline{p}\,\overline{v})\,dw$$

$$B = \int_W \nabla\overline{q}\,dw$$

$$\int_W \left(\rho\frac{d}{dt}\left(E+\frac{\overline{v}^2}{2}\right) - \overline{v}(\overline{p}\cdot\overline{v}) - \rho\overline{f}\,\overline{v} + \nabla\overline{q} - \rho Q\right)dw = 0$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(E+\frac{v^2}{2}\right) = \overline{v}(\overline{p}\cdot\overline{v}) + \rho\overline{f}\,\overline{v} - \nabla\overline{q} + \rho Q$$

Это уравнение баланса полной энергии (1)

У нас было $\rho\frac{d\overline{v}}{dt} = \nabla\overleftrightarrow{P} + \rho\overline{f}$

Домножим скалярно на $\overline{v}$

$$\rho\,\overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt} = (\nabla\cdot\overleftrightarrow{P})\cdot\overrightarrow{v} + \rho\overline{f}\,\overrightarrow{v}$$

Заметим, что: $\frac{d}{dt}(\overline{v}^2) = \frac{d}{dt}(\overline{v}\cdot\overline{v}) = \frac{d\overline{v}}{dt}\overline{v} + \overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt} = 2\overline{v}\frac{d\overline{v}}{dt}$

Отсюда: $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{v}^2}{2}\right) = (\nabla\overleftrightarrow{P})\overline{v} + \rho\overline{f}\,\overline{v}$ – Ур-е баланса кинет. энергии (2)

Вычтем (1)-(2): $\rho\frac{dE}{dt} = \underbrace{\nabla(\overleftrightarrow{P}\cdot\overline{v}) - (\nabla\overleftrightarrow{P})\cdot\overline{v}} - \nabla\overrightarrow{q} + \rho Q$

$$\sum_{ij}{}' \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{ij}v_j) - \sum_{ij}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j =$$

$$= \sum_{ij}\left(\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j + P_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_i\right) = \sum_{ij} P_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} =$$

Представим как сумму симм и антисимм. части

$$= \sum_{ij} P_{ij}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}\right) = \sum_{ij}{}' P_{ij}S_{ij} = \overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S}$$

↑ свертка по i,j

Компоненты тензора скоростей деформации $\overleftrightarrow{S}_{ij}$

Комп-ты тензора завихренности $\overleftrightarrow{R}_{ij}$

(S_{ij} симм, R_{ij} антисимм $\Rightarrow$ свертка – 0)

Отсюда: $\rho\frac{dE}{dt} = \underbrace{\overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S}} - \nabla\overrightarrow{q} + \rho Q$ – уравнение переноса энергии

↑

Определяет скорость ???

24.12.2015

⊕ Законы сохр.
- массы
- импульса
- энергии

⊕ Распр. силы
- объемные
- поверхностные

⊕ Обобщенная т. Гаусса

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\vec{v}) \qquad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathcal{P}} + \vec{f} \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho}\overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} - \nabla\cdot\vec{q} + Q$$

И $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)$ (субст. произв.)

Основные неизвестные $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{V}(\vec{r},t)$, $E(\vec{r},t)$
Дополнительные: $\overleftrightarrow{P}(\vec{r},t)$, $\vec{q}(\vec{r},t)$, $\vec{f}(\vec{r},t)$, $Q(\vec{r},t)$

Нужны дополнительные (замыкающие соотношения)

для $\overleftrightarrow{P}$, $\vec{q}$ (потоки)
и $\vec{f}$, Q (источники)

Из типа, если среда заряжена, то $\vec{f} = \sigma(\vec{E} + \vec{H}\times\vec{V})$

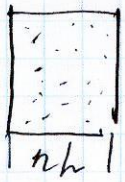
$$\begin{cases} \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}) & \left(S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right) \\ \vec{q} = \vec{q}(T) & (E \approx C_p T) \end{cases}$$

← Задают конкретные модели сплош. сред

Феноменолог. подход — обобщение опытных фактов.

\> Модели сплошной среды:

1) $\overleftrightarrow{P} = 0$, $\vec{q} = 0$ „Вакуум" В класс. интерпр.



вакуум — среда, в кот. $\left[\begin{array}{l} \lambda \ll L \Rightarrow \text{континуум} \\ \uparrow \text{сред. длина свободного пробега частицы} \\ \lambda \gg L \Rightarrow \text{вакуум} \end{array}\right.$

2) $\overleftrightarrow{P} = -\underset{\text{давление}}{p}\,\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$, $\vec{q} = 0$, $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}$ — единичный тензор $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(подстановка в ур. переноса => ур. Эйлера)

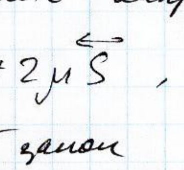
Идеальная среда

Нет касательного напряжения = нет внутр. трения

3) $\overleftrightarrow{P} = -p\overleftrightarrow{\mathcal{E}} + 2\mu\overleftrightarrow{S}$, $q = -\lambda\nabla T$

Обобщенный закон Ньютона — Закон Фурье — подстановка => ур. Навье–Стокса динамики вязкой среды (несжим.)

$\tau \sim \mu\frac{du}{dy}$



4) $\overleftrightarrow{P} = -\left[p - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{V})\right]\overleftrightarrow{\mathcal{E}} + 2\mu\overleftrightarrow{S}$, $\vec{q} = -\lambda\nabla T$

то же самое, но для сжимаемой

5) Нелинейные среды

$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S})$, $\vec{q} = \vec{q}(E)$

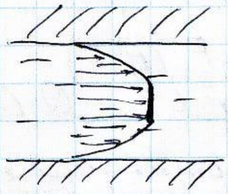
нелинейные ф-ции

6) $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{Q})$, $\vec{q} = \vec{q}(E)$

тензор деформации (и скоростей деформации)

7) $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}, \overleftrightarrow{Q})$ $\vec{q} = \vec{q}(E)$

вязкотвердые среды



$\longrightarrow \tau = P_{xy}$

Есть крит. значение

< его — тв. тело

> его — вязкое, течет

Профиль скорости, как узкое в трубе тв. тело

8) Нелокальные среды

$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S})$, $\vec{q} = \vec{q}(E)$

$$\overleftrightarrow{P}(\vec{r}) = \int\limits_{(\vec{r}\,')} K_4(\vec{r}\,' - \vec{r}) : \overleftrightarrow{S}(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'$$

$\vec{q}(\vec{r}) = \dots$ — прост. нелокальность

$$\overleftrightarrow{P}(t) = \int\limits_{t'<t} F(t-t')\, \overleftrightarrow{S}(t')\, dt'$$

$\vec{q}(t) = \dots$ — времен. нелокальность (среда с памятью)