ь, пол

1 2 3 4

(1) Аксиомы вещ. чисел

(1). Поле: коммут, ассоц, сущ. нуля, обр элемент +
коммут, ассоц, сущ. нуля, обр элемент ·
дистрибутивность

(2) Порядок: $a \le b \vee b \le a$; $a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a = b$; $a \le b,\ b \le c \Rightarrow a \le c$
$a \le b \Rightarrow a + z \le b + z$; $a \ge 0,\ b \ge 0 \Rightarrow ab \ge 0$

(2) Де Морган

$$Y \setminus \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \qquad Y \setminus \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

Д-во тривиальное через опр. объед/пересеч.

$$Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap X_\alpha) \qquad Y \cup \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} Y \cup X_\alpha$$

—//—

(3) Архимед + плотность множества рац. чисел

(1) $\forall x, y \ \exists n \ \ xn > y$

(2) В любом интервале есть $q \in \mathbb{Q}$:

Δ $(a;b)$, $a < b$, $\frac{1}{b-a} > 0$, $\exists n > \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < b - a$

$\exists\, c = \frac{[na]+1}{n}$; $c \le \frac{na+1}{n} \le \frac{1}{n} + \frac{na}{n} < b$; $\cancel{c \ge a + \frac{1}{n}}$ $c > \frac{na}{a} = a$.

$a < c < b$ ∇

(4) Счетные мн-ва, 2 св-ва

(1) Из любого беск. мн-ва можно выделить счетное подмн

(2) Беск. подмножество счетного множества счетно.

$\Delta\nabla$ (тривиально выкидываем эл-ты из X)

5. Счетность $\mathbb{Q}$.

Δ $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$. $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \dots\}$ счетно $(q \in \mathbb{N})$

$\mathbb{Q}_- = \{-\frac{1}{q}, -\frac{2}{q} \dots\}$ счетно.

Объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно. ∇

Или
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \dots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \sim \mathbb{N}^2$$

6. Несчетность отрезка

Δ $\exists$ отрезок счетен, $(a;b) = \{x_1, \dots x_n\}$
тогда методом половинного деления всегда (на n-том шагу) будем выбирать часть (лево-право) в которой нет x_n. По аксиоме Кантора $(n \to \infty)$ $[a_n; b_n]$ непусто, но $c \in [a_n b_n] \notin \{x_1, \dots x_n\}$.
∇

7. Несчетность Bin

$\mathbb{R} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(0.0000\dots = 0.1111\dots)$

биекция φ: $-2\ -1\ 0\ 1\ 2$; $-4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ \frac{2}{2}\ \frac{2}{2}$

$\mathrm{Bin} = \{x_1x_2x_3\dots \mid x_n \in \{0;1\}\}$

$\exists$ биекция $\varphi: \mathrm{Bin} \to \mathbb{R}$ $\varphi: x \mapsto$ десятич. вид x.
А $\mathbb{R}$ несчетно, так как эквивалентно $(0;1)$

8. Несчетность $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ (можно придумать биекцию)
Ну или $(0;1)^2 \leftarrow$ куб в $\mathbb{R}^2$, $(0;1)^2 \sim \mathbb{R}^2$ по теор. Кантора в $\mathbb{R}^n$ (покоорд. стяжение отрезков)

9. Ед. предела и огр. сход. последовательности

1) $\{x_n\} \in X$, $x_n \to b$, $x_n \to a \Rightarrow a = b$.

Δ $(a \neq b)$ $\exists\, \varepsilon = \frac{\rho|b-a|}{2}$, тогда при $\rho(x_n; a) < \varepsilon$ для $n > N_1$ и $\rho(x_n; b) < \varepsilon$ для $n > N_2$

для $n > \max\{N_1; N_2\}$:

$$\rho(a;b) \leq \rho(a;x_n) + \rho(x_n;b) < \varepsilon + \varepsilon = \rho(a;b) \ \nabla$$

2) $\{x_n\} \to a$ ограничена.

Δ $\exists\, \varepsilon = \xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, тогда для ξ $\exists N\ \forall n > N$ $\rho(x_n; a) < \xi$.

$\exists R = \max\{\rho(x_1;a); \rho(x_2;a) \cdots \rho(x_n;a), \xi\}$.

А значит $\forall n\ \rho(x_n; a) \leq R$ ∇

10. Пред. переход в неравенстве

$\{x_n\} \to a$, $\{y_n\} \to b$ $x_n \leq y_n$ для всех n, тогда $a \leq b$.

Δ $\exists\, a < b$ по опр. предела $\begin{pmatrix} x_n > a - \varepsilon, & y_n \leq b + \varepsilon \\ x_n \leq a + \varepsilon, & y_n \geq b - \varepsilon \end{pmatrix}$, $\exists\, \varepsilon = \frac{a+b}{2}$

$x_n \leq a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon \leq y_n$ $\quad x_n \leq y_n$, все верно ∇

11. О двух городовых

$x_n \leq z_n \leq y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to a$, тогда $z_n \to a$

Δ $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$, что и означает $z_n \to a$. ∇

12. Бесконечно малая последов.

$\{x_n y_n\} \to 0$ если $x_n \to 0$ y_n - огран.

Δ. по опр. огр. послед. $y_n \leq K$ для $\forall n$
по опр б.м. посл. $x_n \leq \varepsilon$ для $n > N$
тогда для $n > N$

$x_n y_n < \varepsilon K$ $\quad \exists \varepsilon > \frac{\varepsilon}{K}$ $\quad x_n y_n < \frac{\varepsilon}{K} K = \frac{1}{1}\varepsilon$, что
значит $x_n y_n \to 0$

∇

(13) Арифм. св-ва предела

$x_n \to a,\ y_n \to b \quad \lambda_n \to \lambda_0$, тогда:

(1). $x_n + y_n \to a + b$
(2). $\lambda_n x_n \to \lambda_0 a$
(3). $x_n - y_n \to a - b$
(4). $\|x_n\| \to \|a\|$
(5) Для $\mathbb{R}$ $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

Δ. (1) $\|(x_n + y_n) - (a + b)\| = \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \leq \|(x_n - a)\| + \|y_n - b\| <$
$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

(2). $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 a\| = \|\lambda_n x_n + \lambda_n a - \lambda_n a - \lambda_0 a\| \leq$

$\|\lambda_n\| \|x_n - a\| + \|a\| \|\lambda_n - \lambda_0\| \Rightarrow 0.$

$\underset{\text{огр.}}{\uparrow} \quad \underset{\text{б.м}}{\uparrow} \quad \underset{\text{огр}}{\uparrow} \quad \underset{\text{б.м}}{\uparrow}$

(3) $x_n + y_n \cdot (-1) = x_n - y_n \to (a + b \cdot (-1)) = a - b$
(4) $|\|x_n\| - \|a\|| \leq \|x_n - a\| \to 0$
(5) $x_n \cdot \frac{1}{y_n};\ \frac{1}{y_n} \overset{?}{\to} \frac{1}{b}$

$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < (b - y_n)\frac{1}{y_n}\frac{1}{b} \quad b - y_n \to 0,\ \frac{1}{b}$ огран. $\frac{1}{y_n}$ – огран?

не то. $y_n: \forall n > N\ |b - y_n| < \varepsilon.\ \ \varepsilon = \xi$ – фикс., $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
тогда при $K = \min(|y_1 - b|, |y_2 - b|, \dots, \xi)$
$|y_n - b| < K \dots$ не то

$|y_n| = |y_n + b - b| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2}$ при $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$

тогда $k = \min\{|y_1|, |y_2| \dots \frac{|b|}{2}\} \Rightarrow |y_n| \geq k$

$\frac{1}{|y_n|} \leq \frac{1}{k}$, значит посл. ограничена ∇

14. Неравенство Коши-Буняковского в ~~(X, g)~~ Л.П.

Норма, порожденная скалярн. произв.

1) $|(x;y)|^2 \leq (x;x)(y;y)$

Δ $|(x+\lambda y; x+\lambda y)| = (x; x+\lambda y) + (\lambda y; x+\lambda y) =$

$= (x;x) + \bar{\lambda}(x;y) + \lambda(y;x) + |\lambda|^2(y;y) =$

$\boxed{\exists \lambda = -\frac{(x;y)}{(y;y)}} = (x;x) - \frac{|(x;y)|^2}{(y;y)} - \cancel{\frac{|(x;y)|^2}{(y;y)}} + \cancel{\frac{|(x;y)|^2}{(y;y)}}$;

$* \left(x - \frac{(x;y)}{(y;y)}y; x - \frac{(x;y)}{(y;y)}y\right)(y;y) = (x;x)(y;y) - |(x;y)|^2$.

значит $|(x;y)|^2 \leq (x;x)(y;y)$ ∇

2) $p(x) = \sqrt{(x;x)}$ – норма

а) $p(0) = 0$ ✓ б) $p(\lambda x) = \sqrt{|\lambda|^2 (x;x)} = \lambda p(x)$ ✓

в) $p^2(x+y) = (x;x) + (x;y) + (y;x) + (y;y) \leq$

$\leq (x;x) + 2\,\mathrm{Re}\,(x;y) + (y;y) \leq (x;x) + 2|(x;y)| + (y;y) \leq$

$(x;x) + 2\sqrt{(x;x)}\sqrt{(y;y)} + (y;y) = p^2(x) + 2p(x)p(y) + p^2(y) =$ Δ

$= (p(x)+p(y))^2$

15. Непрерывность скал. произв. и лемма о покоорд. сход.

① $x_n \to x_0;\ y_n \to y_0 \Rightarrow (x_n; y_n) \to (x_0, y_0)$

$$|(x_n;y_n)-(x_0;y_0)| = |(x_n; y_n - y_0) - (x_n - x_0; y_0)| \le$$

$$\le \underset{\text{огр}}{\|x_n\|}\ \underset{\text{б.м}}{\|y_n - y_0\|} - \underset{\text{б.м}}{\|x_n - x_0\|}\ \underset{\text{огр}}{\|y_0\|} = 0.$$

② Покоорд. сходимость ~ сходимость по евкл. норме

$$\underset{\downarrow 0}{|x_j^{(n)} - x_j^{(0)}|} \le \underset{\shortparallel\ 0}{|x^{(n)} - x^{(0)}|} = \underset{\shortparallel\ 0}{\left|\sum_{i=0}^{m} (x_i^n - x_i^0)\right|} \le \underset{\downarrow 0}{\sqrt{m}\max_{i \le i \le m}(x_i^n - x_i^0)}$$

16. Теорема о стягивающихся отрезках

$a_n \le b_n$ Если $a_{n+1} \ge a_n$, $b_{n+1} \ge b_n$, $a_n - b_n \to 0$, то

① $[a_n; b_n] \underset{n\to\infty}{=} C$, причем если $[a_n; b_n] = c, d$, то $c = d$.

$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} [a_n; b_n] = C.$!!!

② $a_n \to c$, $b_n \to c$.

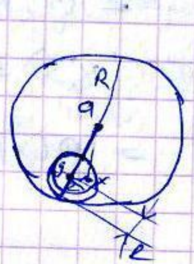
Δ ① $a_n \le c \le b_n$, $a_n \le d \le b_n \Rightarrow \underset{\downarrow 0}{a_n - b_n} \le \underset{\downarrow 0}{c - d} \le \underset{\downarrow 0}{b_n - a_n}$

Тогда $c = d$

② $0 \le c - d \le \underset{\downarrow 0}{a_n - b_n}$, $0 \le c - a_n \le \underset{\downarrow 0}{b_n - a_n}$; ∇

17. Открытость открытого шара.

Δ рассмотрим $g \in B(a; R)$: $\rho(g, a) < R$,
рассмотрим окрестность g и x из нее:
$V_g = B(g; \ell)$, $\rho(x, g) < \ell$ по опр. окрестности,
тогда $\rho(x, a) \le \rho(x, g) + \rho(g, a) < R - \ell + \ell = R$.
В силу произв. g g-вн. т. B. Δ



18. С…
①
②
Δ. (…
опре…
Е…
входи…
Ес…
в н…
∇

19. Ос…
①
②
①
②

20. Тео…
множе…
Ми…
допол…
①. Ј…
значи…
Δ Пусть…
②. Ј…
содержи…
$V_0 \notin$ Г…

18. Описание внутренности множества

1) Внутренность — объединение всех подмножеств D (открытых...)
2) Вн. D — макс. по включению откр. подмнож. D.

Δ. Согласно 19 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$, $G_\alpha \subset D$ открыто как объед. открытых множеств.

Если x — вн. точка G, то она вся с окрестностью входит в D как подмножество.

Если x — вн. точка D, то она содержится вся с окр. в некотором G_α, а значит и в G.

∇

19. Основные свойства открытых множеств.

1) Объединение любого числа откр. множеств открыто
2) Пересечение конечного числа откр. мн-в открыто

1) Если $x \in \bigcup\limits_{\alpha=0}^{\infty} G_\alpha$ — вн. точка, то она и вн. точка G_α при неком α. И наоборот
2) Если $x \in \bigcap\limits_{\alpha=0}^{n} G_\alpha$, то возьмем V_x такую, что $V_x = B(x; \min(\varepsilon \text{ in } G_\alpha, \alpha \ldots))$, то есть с мин. окрестн. тогда x открыта, так как такая окрестность может быть найдена с помощью min от n аргументов.

20. Теорема о связи открытых и замкнутых множеств, свойства замкн. мн-в $\underline{(\text{св-ва открытых})^c} \leftarrow \Delta\nabla$

Множество открыто тогда и только тогда когда его дополнение замкнуто; —//— замкнуто —//— открыто...

1) $\exists$ D открыто, тогда в D по открытости нет пред. точек. значит они все в D^c. Ибо $x \in D^c$ — не вн. точка D

Δ Пусть $x \in D^c$ — пред. точка, тогда x — не вн. т. D, $x \notin D$, $x \in D^c$

2) $\exists$ D замкнуто, тогда Δ $\exists x \in D^c$ — не пред. т. D, т.к. D содержит все свои пред. точки, значит $\exists$ окр. V_x такая, что $V_x \notin D$, значит $V_x \in D^c$, x — вн. точка D^c.

(21) Описание замыкание в терминах пересечений

(1) Замык. D — пересечение G, $D \subset G$
(2) Замык D — мин. по включению G, $D \subset G$

Δ $G = \bigcap_{i=0} G_i$ — мин. по включению G; как пересечение

замкнутых G замкнуто.
Если $x \in \overline{D}$, то очевидно $x \in G$ (x — т. прикосновения)
Если $x \notin \overline{D}$ (x — т. прикосн.), то сущ. окрестность
x в которой нет ничего из D, тогда $V_x \in D^c$ $G \subset D^c$
$V_x^c \supset G$ V_x^c замкнуто, $V_x \in G^c$, $V_x \notin G$. ∇

(22) Теорема о сущ. супремума.

Огр. сверху/снизу множество имеет sup/inf:

Δ. рассмотрим огр. сверху.

$\exists$ $x \leq K$ для всех $x \in D$.

Возьмем любой x и K, $\exists [x; K] = [a; b]$.
$\exists [a_1; b_1] = [a; \frac{a+b}{2}]$, если пересечение $(\frac{a+b}{2}; b] \cap D$ пусто,
иначе $[a_1; b_1] = [\frac{a+b}{2}; b]$
Составим такие стягивающиеся отрезки, тогда:

(1). $[a_i; \frac{a_i+b_i}{2}] \cap D \neq \varnothing$ (2). $(\frac{a_i+b_i}{2}; b) \cap D = \varnothing$
иначе
(1) $[a_i; b_i] \cap D \neq \varnothing$; (2). $(b_i; +\infty) \cap D = \varnothing$

Тогда $\bigcap_i [a_i; b_i] = C$ — $\sup D$. докажем.

(1). По опр. $\sup D$ $x_n \leq \sup D$, на это указывает (1) ($x_n \leq b_n$)
(2). $C - \varepsilon$ — не $\sup D$, так как найдется такое i, что
$[a_i; b_i]$ сущ, а значит $\exists x \in [a_i; b_i]$ ($a_n \to C$)

(23) ...
(1) ...
(2) ...
(24) ...
(25) ...

23. Лемма о св-в супремума.

1) $D \subset F \Rightarrow \inf D \geq \inf F$, $\sup D \leq \sup F$.

Δ. рассмотрим $\sup F$ в D, тогда $\sup F$ - какая-то верхняя граница, могут быть и меньше, значит $\sup D \in F$. Для inf аналогично

2) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ $\quad \inf(\cdot + \cdot) = \inf + \inf$
$\sup \lambda X = \lambda \sup X$ $\quad$ —//—
$\sup(-X) = -\inf Y$

Докажем для sup:

по опр $X+Y = \{\gamma = x+y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Остальное очевидно (или нет? мне не очень.)

24. Теорема о пределе монот. последовательности.

Любая возраст. огр. сверху посл. сходится
Любая убыв. огр. снизу посл. сходится
Любая монотонная ограниченная посл. сходится

Δ. Докажем для возрастания. У множества $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть $c = \sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда по опр. sup

$\forall \varepsilon \ \exists x_N > c - \varepsilon$.

x_n возрастает, значит $\exists x_n \geq x_N$, причем $x_n \leq c$ (опр.)

$c - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq c < c + \varepsilon$, что означает $x_n \to c$.

∇

25. Определение e, сущ. замеч. предела.

$$e := \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

① Докажем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ сходится.

Δ Докажем, что $f=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходится, тогда $\frac{f}{1+\frac{1}{n}}$ сходится по опр. предела частного.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n+1}{(n+1)(n-1)}\right)\frac{n-1}{n} = 1. \quad \nabla$$

② Жирное доказательство для $x \in \mathbb{R}\setminus[-1;0]$

$f(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}$; докажем, что при $\{x_n\}\to\infty$ $f(x_n)\to e$.

① $\exists\, x_n \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon\ \exists K\ \forall k>K\ |f(k)-e|<\varepsilon$

С некоторого номера $x_n>K$, тогда $|f(x_n)-e|<\varepsilon$.

② $\exists\, x_n \to \infty$

Тогда $\exists\, x_n \geq 1$, пусть $x_n \geq 1$ для всех n.

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

Перепишем в виде

$$\frac{f([x_n]+1)}{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)} \leq f(x_n) \leq f([x_n]+1)\cdot\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)$$

тогда $f(x_n)\to e$ по сжатой функции

$(f([x_n]+1)\to e,\ f(x_n)\to e)$

(3) Пусть $x_n \to -\infty$ тогда пусть $y_n = -x_n \to +\infty$

$y_n - 1 \to +\infty$

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)\cdot f(y_n-1) \to e.$$

(4) Рассмотрим $x_n \to \infty$ $x_n \notin [-1;0]$

Если сущ. бесконечно много членов посл. >0 (<0) и ограниченное <0 (>0), то это уже доказано в (2) и (3). Иначе (бесконечно много и >0 и <0) разобьем натур. ряд на 2 подпоследовательности.

$x_{m_n} < -1$; $x_{n_l} > 0$ $\quad x_{m_n} \to e$ $\quad x_{n_l} \to e$

Тогда по лемме (?) (с 81 Виноградов лемма 5) $x_n \to e$.

∇

$$\boxed{y_n = \sup_{k>n} x_k \quad z_n = \inf_{k>n} x_k}$$

(26) Св-ва $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$:

(1) $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$ Δ $z_n \le x_n \le y_n$ + переход ∇

(2) для $x_n \le y_n$ $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, y_n$ $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, y_n$

Δ $x_n \le y_n \to \sup x_n \le \sup y_n \to$ (по св-вам sup/inf) $\lim \ldots$ ∇

(3) для $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda \overline{\lim}\, x_n$ (+ для нижн. $\underline{\lim}$)

Δ $\sup \lambda x_n = \lambda \sup x_n \ldots$ ∇

(4) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$; $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim}\, x_n$ Δ $\sup -x = -\inf x$ ∇

(5) $\overline{\lim}(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ Δ Св-ва sup + логика ∇ (+ для нижних)

⑥ $\exists \lim t_k = l \in \mathbb{R}$: $\overline{\lim}(x_n + t_k) = \overline{\lim}\, x_n + l$

$\underline{\lim}(x_n + t_k) = \underline{\lim}\, x_n + l$

Δ $l - \varepsilon < t_k < l + \varepsilon$

$x_n + l - \varepsilon < t_k + x_n < x_n + l + \varepsilon$

$\sup x_n + l - \varepsilon < \sup(t_k + x_n) < \sup x_n + l + \varepsilon$ + пред. переход

⑦ t_k: $\underline{\lim}\, x_n t_k = \underline{\lim}\, x_n \cdot l$

$\overline{\lim}\, x_n t_k = \overline{\lim}\, x_n \cdot l$ Δ аналогично в ∇

27. Техническое описание верхнего и нижнего пределов.

$$a = \overline{\lim}\, x_n \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N & x_n < a + \varepsilon \\ \forall \varepsilon\ x_n \geq a - \varepsilon & \text{выполнено для } \infty\ x_n \end{cases}$$

$$b = \underline{\lim}\, x_n \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N & x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon\ \forall K\ \exists n > N & x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

(другая запись)

Д-во. (для $\overline{\lim}$, для $\underline{\lim}$ аналогично)

① Δ $\exists y_n = \sup\limits_{k \geq n} x_n$ со св-вами: $x_n \leq y_n$, $y_n \to a$, y_n убыв.

$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N$ $y_n < a + \varepsilon$ $(y_n \to a)$

Тогда $\sup x_n < a + \varepsilon$, но $x_n \leq \sup x_n$

$x_n < a + \varepsilon$ ∇

② Δ $x_n \leq y_n$, Предположим, что $\{ x_n > a - \varepsilon$ членов x_n конечное число, тогда их бесконечное число на $(-\infty; a - \varepsilon)$ где-то. Тогда $\sup y_n \leq a - \varepsilon$, то есть по опр $\overline{\lim}$ sup возрастает и $y_n \to b$, а тут $\sup x_n$ убывает и меньше $a - \varepsilon$. Значит, неверно. ∇

(28.) Верхний предел — наиб., а нижний — наим. из част. пределов последовательности

$\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$, где l — част. предел.

Казалось бы, $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ — частичные пределы по определению, но это может быть не так

Δ $z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}$ $x_{n_k} \to l$ ← некий частичный предел

перейдем к пределам

$\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$ (слишком просто!) ∇

(29.) Теорема о существовании предела в терминах верхнего и нижнего предела.

$\lim x_n$ сущ., только если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l$, причем $\lim x_n = l$.

Δ по опред. $z_n \le x_n \le y_n \xrightarrow{\text{пред. переход}} \underline{\lim} \le \lim \le \overline{\lim}$

Понятно, что если $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l$, то $\lim x_n = l$. С другой стороны, если сущ. $\lim x_n$, то все частичные пределы, в том числе $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ с ним совпадают (отсылка к компактности) ∇

(30.) Эквивалентность определений по Коши и по Гейне.

(1) Δ Пусть верно опред. по Коши. тогда извлечем из X последовательность $x_n \to x_0$,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \setminus \{x_0\}\ \ \rho(x_n, x_0) < \delta : \rho(f(x_n), \cancel{f(x_0)}\, A) < \varepsilon$.

Но последнее означает, что $f(x_n) \to \cancel{f(x_0)}\, A$. ∇

② Пусть верно определение по Гейне

Δ $\forall \{x_n\}\ x_n \to x_0\ f(x_n) \to \cancel{f(x_0)}\ A$
$(x_n \in X\setminus\{x_0\})$

Примем во внимание условие предела по Коши:

~~$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n>N\ \rho$~~ (хочется спать, ошибаюсь)

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D\setminus\{a\}\ \rho(x;a)<\delta$

Пусть $\delta=\frac{1}{n}$, тогда $0<\rho(x;a)<\frac{1}{n} \to \rho(x;a)=0$
$x \to a$

Тогда по опр. Гейне $f(x)\to A$, что записывается как

$\rho(f(x);A)<\varepsilon$

∇

31. Единственность предела, локальная ограниченность функции, имеющей предел, теорема о стабилизации знака. $f: X\to Y$ или $f: D\subset X\to Y$
отображения!

① Единственность предела. $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} A$ $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} B \Rightarrow A=B$

Δ. Воспользуемся определением по Гейне и теоремой о единственности предела последоват. ∇

② Лок. ограниченность, если $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}A$, то сущ. такая V_a, что $f(V_a\cap D)$ ограничена в Y

Δ По опр. предела отображения в форме множеств $\exists \dot V_a$ $f(\dot V_a\cap D)\subset V_A$ для $\forall V_A$.
Если $a\notin D$, то доказательство окончено.
$(\dot V_a\cap D = V_a\cap D)$, выберем любую V_A

B иначе случае положим $R = \max(\xi, \rho(f(a); A))$;
Тогда $f(V_a \cap D) \subset B(A, R)$. ∇

3. Теорема о стабилизации знака
если $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, то
$\forall a \in D,\ a \neq 0 \quad \exists V_{\cancel{f(a)}}A, \quad \forall x \in V_A \quad \operatorname{sign} x = \operatorname{sign} A$.

Δ Пусть для определенности $A > 0$
Воспользуемся посл. Гейне, построим $x_n \to a$, $f(x_n) \to A$, тогда для $x \in (A; A+\varepsilon)$ теорема доказана, а иначе (для $x \in (A-\varepsilon; A)$) мы подберем такое ε, что $\rho(0; A) = 2\varepsilon$ тогда для всех членов x_n по опр. посл. $x_n > \frac{A}{2} > 0$.
∇

32. Арифм. св-ва пределов. $f, g, \cancel{h}: D \subset X \to Y$
$\lambda: D \subset X \to \mathbb{R}$

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A, \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} B \quad \lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda_0,$

Тогда:
1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A + B$
2. $f(x) \cdot \lambda(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda_0 \cdot A$
3. $f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A - B$
4. $\|f(x)\| \to \|A\|$
5. если $g(x) \to B$ и f, g - ф-ции $B \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$

Δ Доказывается на основании 3 и последоват. Гейне ∇ (по аналогии)

33. Теорема о сжатой функции, предельный переход в неравенстве.

1. Сжатая функция. Если $f, g, z: D \subset X \to \mathbb{R}$, причем $f \leq z \leq g$, и если $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$, то $z(x) \xrightarrow[x \to a]{} A$ (a - пред. точка D)

Δ Применим опр. Гейне: $f(x_n) \leq z(x_n) \leq g(x_n)$, + переход ∇

2. Пред. переход: $f, g: D \subset X \to \mathbb{R}$, a - пред. точка D, $f(x) \leq g(x)$, тогда $A \leq B$ ($f(x) \to A$, $g(x) \to B$)

Δ Используем Гейне, $f(x_n) \to A$, $A \leq B$ ∇

34. Теорема о пределе монотонной функции.

1. Если $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает и огран. сверху на D_1, то сущ. конечный предел $f(a-)$, где a – пред. точка D, $D_1 = D \cap (-\infty; a)$

2. Если f убывает и ограничена снизу на D_1, то сущ. конечный предел $f(a+)$.

Δ докажем 1, 2 аналогично.

Примем $A = \sup_{x \in D} f(x)$, тогда $A \in \mathbb{R}$ в силу огр. функции сверху.

$$f(a-) = A. \quad (A - \varepsilon < \underbrace{f(x_0)}_{\text{верхн. грань огр.}} \leq f(x) \leq A < A + \varepsilon)$$

Подберем

$\delta = a - x_0$ или $\Delta = \max\{x_0, 1\}$

Тогда равенство верно.

∇

35. Теорема об открытых и замкнутых множествах в пространстве и подпространстве

$X \subset Y$: 1. D открыто в X тогда и только, когда в Y $\exists G$, такой что $D = G \cap X$, G открыто

Y X

2. D замкнуто в X тогда и только тогда, когда в $Y \exists G$, такой, что $D = G \cap X$, G замкнуто

Δ 1. Пусть D открыто в X, докажем, что сущ. G в Y, что G открыто и $D = G \cap X$.
Рассмотрим произвольную точку $x \in D^X$; в силу открытости D^X существует $V_x^X = B(x; \varepsilon)$. Поскольку объед. откр. мн-в открыто, построим
$G^Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x; \varepsilon)$ – открыто, причем $G^Y \cap X = \bigcup_{x \in D} B^Y(x; \varepsilon) \cap X =$
$= \bigcup_{x \in D} B^X(x; \varepsilon) = D$

Пусть теперь существует G, докажем открытость D^X.

Возьмем $a \in D^X$ и докажем ее открытость (блин, типа a - внутр. точка).
$\exists V_a^Y$ в Y. Поскольку $D^X = G^Y \cap X$, V_a^Y содержится в G^Y. Тогда $V_a^X = V_a^Y \cap D$ — окрестность a в X.
Тогда в силу произв. a D открыто в X;

(2). Замкнутость D равносильна открытости $X \setminus D$ в X. Тогда необходимо существование G в Y, $X \setminus D = G \cap X$, что мы доказали
$X \setminus D = G \cap X \iff D = G^c \cap X$.

∇

36. Теорема о компактности в пространстве и подпространстве

Свойства компактности в простр. и подпространстве равносильны

Δ. $\exists X \subset Y$, K компактно, $K \subset X$

(1) K компактно в X.
покроем K с помощью множеств V_α, открытых в Y, пусть $G_\alpha = V_\alpha \cap Y$, тогда G_α открытые в X. Выберем конечное подпокрытие $\bigcup_{\alpha=0}^{n} G_\alpha$ множества K, но тогда $\bigcup_{\alpha=0}^{n} V_\alpha$ — конечное подпокрытие K в Y, K компактно в Y.

(2). K компактно в Y
Покроем K мн-вами из X - G_α, тогда $G_\alpha = V_\alpha \cap X$, $K \subset \bigcup G_\alpha \subset \bigcup V_\alpha$; Выберем конечное подпокрытие $\bigcup_{\alpha=1}^{N} V_\alpha$, но тогда $(K \subset X)$

$$K \subset \bigcup_{\alpha=1}^{N} (V_\alpha \cap X) = \bigcup_{\alpha=1}^{N} G_\alpha; \quad \nabla$$

37. Простейшие свойства компактов

1. Если K компактно, то K замкнуто и ограничено
2. Если $K \subset X$, X компактно, K замкнуто $\longrightarrow$ K комп.

1. Δ Замкнутость. Докажем открытость K^c.

$\exists\, l_c = \frac{\rho(a,c)}{2}$, где $a \in K^c$, $c \in K$;

$G_c = B(c; l_c)$ $\quad V_c = B(a; l_c)$

Покроем K G_c: $K \subset \bigcup_{c \in K} G_c$, выберем конечное в силу компактности:

$K \subset \bigcup_{i=0}^{N} G_{c_i}$, тогда $\left(\bigcup_{i=0}^{N} G_{c_i} = G\right)$ $\bigcap_{i=0}^{N} V_{c_i}$ — окрестн., полностью лежащая в K^c; K^c открыто;

Ограниченность

? Покроем K семейством множеств $\{B(q; \rho(q;a))\}_{q \in K}$ для фиксированной $a \in K^c$.
Нет, не построим. Лучше так:

Возьмем точку $a \in K$ и покроем K покрытием $\{B(a,n)\}_{n \in A}$. Тогда K содержится в $B(a, \max\{n\}, n \in A)$ — K ограничено. ∇

2. Δ Докажем... докажем!

$\exists \{W_i\}_{i \in A}$ — покрытие $K \subset X$, открытое.
Поскольку K замкнуто, $\{W_i\}_{i \in A} \cup K^c$ — открытое покрытие X. Извлечем из него конечное подпокрытие согласно компактности X:

$\{W_i\}_{i=1}^{N} \cup \{K^c\}$, но $\{W_i\}_{i=1}^{N}$ — конечное подпокрытие K, K компактно.

∇

38. Компактность замкнутого куба в $\mathbb{R}^m$

Куб (замкнутый) в $\mathbb{R}^m$ компактен

Δ — Пусть из какого-либо покрытия куба $[a;b]$ (назовем его $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$) нельзя извлечь конечное подпокрытие. Тогда поделим куб на 2^m равных частей и выберем из тех, что не покрываются, любую. Получим новый куб $I_1 \subset I_0$. $\exists$ d — диагональ I_0.

Повторим данное действие n раз, $n \to \infty$. Тогда:

1. $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n \supset \ldots$
2. I_n не покрывается никаким набором (конечным) из $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$
3. Если $a, b \in I_n$, то $\rho(a;b) \le \frac{d}{2^n}$

По теореме о стягивающихся (вложенных) параллелепипедах $\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n;b_n]$ непусто. $\exists c \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n;b_n]$, $c \in I$ (очевидно), тогда $c \in G_{\alpha'}$.
Поскольку $G_{\alpha'}$ открыто, $\exists B(c;\varepsilon)$ такая, что $B(c;\varepsilon) \subset G_{\alpha'}$, а поскольку $\frac{\delta}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\exists n$ такое, что $I_n \subset B$. ($\frac{\delta}{2^n} < r$, $|a-x| < \frac{\delta}{2^n} < r$, $I_n \subset B$).
Тогда I_n покрывается $G_{\alpha'}$, что противоречит 2.

∇

39. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$

Равносильны утверждения:

1. K замкнуто и ограничено
2. K компактно
3. K секвенциально компактно (из любой последовательности в K можно извлечь подпоследовательность, стремящуюся к элементу K)

Δ Докажем цепь $1 \overset{1}{\Rightarrow} 2 \overset{2}{\Rightarrow} 3 \overset{3}{\Rightarrow} 1$:

① Если K ограничено, то оно содержится в некотором замкнутом кубе I^n. Поскольку K замкнуто, K компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

② Если K компактно, то оно замкнуто и содержит в себе все свои предельные точки (Если нет, то окружим каждое x_n из $\{x_n\}$ $x_n \to a$, $a \notin K$, окрестностью, в которой нет элементов кроме x_n; из такого покрытия конечное подпокрытие не возможно).

$\exists D$ - множество значений x_n.
D ограничено — последовательность стационарная и ее предел - один из $x_n \in K$.

D неограничено — выберем из $x_n \to a$ $(a \in K)$ некоторую подпоследовательность; поскольку любая подпоследовательность сход. посл. сходится к тому же пределу, $x_{n_k} \to a$, $a \in K$.
Пусть a - предельная точка, но мы не определили, как будем строить x_n. Возьмем шар $B(a;1)$ и $\cancel{x^{(1)}}$, $x^{(n_1)} \in B(a;1)$ (такой найдется). Возьмем шар $B(a;\frac{1}{2})$ и выберем $x^{(n_2)}$, повторим процесс неограниченно, тогда $\rho(a, x^{(n_k)}) \to 0$;

③ Если K не замкнуто, то построим последовательность $x_n \to a$, где a - пред. точка K, тогда любая подпосл. $\to a$, но $a \notin K$.

Если K не ограничено, то любая подпосл. $x_n \to +\infty$ имеет подпосл., стремящуюся к ∞, но такая подпоследовательность не сходится.

∇

40. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса:

Из любой сход. последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно выбрать сход. подпоследовательность.

Δ Сход. п-ть ограничена, поместим ее в I, I компактен, воспользуемся секвенциальной компактностью I. ∇

41. Сходимость в себе и ее свойства

1. Сходящаяся в себе последовательность ограничена
2. Если у сход. в себе посл. есть сход. подпослед., то сама последов. сходится.

1. Δ По условию $\exists N, \forall n,k > N \ |x_n - x_k| < \varepsilon$, ну тогда зафиксируем $\varepsilon = \xi$, тогда, в частности, $|x_n - x_N| < \xi$

$\exists R = \max(\rho(x_1;b), \rho(x_2;b) \ldots \xi + \rho(x_N;b))$;

неравенство Δ для $\rho(x_n;b)$

тогда $\rho(x_n;b) \leq R$ ∇

2. Δ Пусть $x_n (\to x_0)$ сходится в себе, пусть у нее есть $x_{n_k} \to x_0$, тогда по величинам определения предела

$\rho(x_n;x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k};x_0)$. $\exists n_k > n$

распишем по пределу фунд. сходящаяся

Тогда все это равенство $< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \sim \varepsilon$, то есть посл. сходится. ∇

42. Критерий Коши для отображений

Существование предела отображения f в x_0 равносильно сходимости $f(x_n)$ в себе относительно двух любых прообразов $f(\bar{x}), f(\tilde{x})$.

Δ. (1) Влево: в любом метрическом пространстве любая сходящаяся последовательность сходится в себе:

$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ \rho(x_n; x_0) < \varepsilon$

Ну тогда $(x_k; x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ (подберем, $k > n$)

$\forall j, k > N\ \rho(x_n; x_k) \leq \rho(x_n; x_0) + \rho(x_0, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Аналогично для предела отображения, значит

при $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$, тогда по Гейне $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to A$, $f(x_n)$ сходится в себе.

(2). Вправо: по принципу выбора Больцано-Коши выберем из сход. в себе $f(x_n)$ подпосл., значит согласно 41 2 она сходится.

(Я тут сжульничал, Б-К работает только в $\mathbb{R}^m$, а тут $X \to Y$)

∇

43. Свойства непрерывных отображений: арифметические, стабил. знака, композиция

(1) Арифметические:

$f, g: D \subset X \to Y$, $\lambda: D \subset X \to \mathbb{R}$, все они непрерывны в x_0, тогда:

(1). $f(x) + g(x)$ непрерывно в x_0 (3) $f(x) - g(x)$ непрерывно в x_0
(2). $f(x)\lambda(x)$ непрерывно в x_0 (4). $\|f(x)\|$ непрерывно в x_0
(5). Если $g(x_0) \neq 0$, то $f(x)/g(x)$ непрер. в x_0

Δ Ссылаемся на определение непрерывности в x_0 через предел и арифм. св-ва отобр., имеющего предел ∇

② Стабилизация знака (непрер. в x_0 отображения)

Если имеется $f: X \to Y$ и f непрерывно в x_0, то $\exists V_{f(x_0)}$, что $\forall x \in V_{f(x_0)}$ $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} f(x_0)$ ($f(x_0) \neq 0$)

Δ Построим некую последовательность $x_n \to x_0$, тогда $f(x_n) \to f(x_0)$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$; тогда для $x_n \to x_0$, вернее $f(x_n) \to f(x_0)$ подберем такое ε, что $\varepsilon = \frac{f(x_0) - 0}{2}$, тогда любой член окрестности $(f(x_0) - \varepsilon; f(x_0) + \varepsilon)$ (а их бесконечно много), больше нуля.

∇

44 Топологическое определение непрерывности, теорема

Для непрерывности $f: X \to Y$ на X необходимо и достаточно, чтобы прообраз любого открытого в Y множества был открыт в X

Δ ① Пусть f непрерывно на X, G открыто в Y по опр. непрерывности для $\forall V_{f(a)}$ ($V_{f(a)}$ - точка G в Y) $\exists V_a$, что $f(V_a) \subset V_{f(a)}$... Короче $V_a \subset X$, значит $V_a \subset f^{-1}(G)$.

② Пусть для любого $U \subset Y$ $\exists G \subset X$, такое, что $f(G) = U$, G и U открыты. Тогда рассмотрим $a \in X$, докажем непрерывность f в a. Возьмем $V_{f(a)}$, тогда $\exists V_a$ - открытое. Тогда $V_a \subset V_{f(a)}$ (по опр. образа) и по опр. непрерывности f непрерывно в какой-то a. В меру произв. a f непрерывно на X.

∇

45 Теорема Вейерштрасса о непрерывности компакта, следствие.

Непрерывный образ компакта - компакт

Δ Имеем $f: X \to Y$, f непрерывно на X,
$K \subset X$, K компактно.

Поскольку K компактно, то покроем его семейством множеств $\{Z_\alpha\}$.
Покроем $f(K)$ покрытием $\{W_\alpha\}$ ~~и выделим~~ из него конечное $\bigcup\{W_\alpha\}_{\alpha=0}^{M}$. Значит по предыд. теореме $f^{-1}(\bigcup_{\alpha=0}^{\infty} W_\alpha)$ открыто в X.

$K \in \bigcup_{\alpha=0}^{\infty} f^{-1} W_\alpha$ по св-вам образа и прообраза

Выделим конечное $\bigcup_{\alpha=0}^{N} f^{-1} W_\alpha$ подпокрытие K.
Но тогда

$f(K) \subset \bigcup_{\alpha=0}^{N} W_\alpha$ по св-вам образа и прообраза

$f(K)$ компактно.

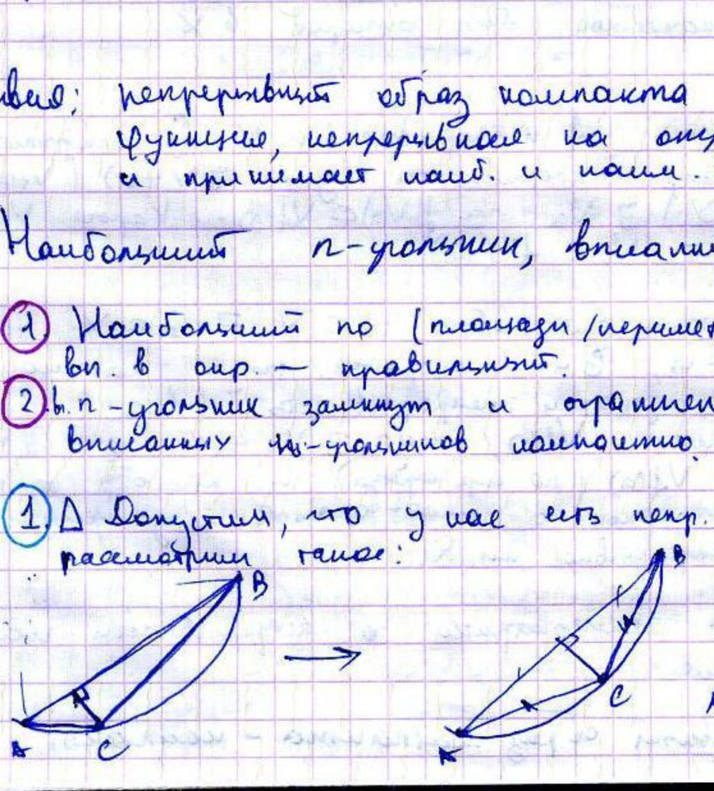
∇

+ Следствие: непрерывный образ компакта замкнут и огран.
Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и принимает наиб. и наим. значение

46. Наибольший n-угольник, вписанный в окружность.

1) Наибольший по (площади /периметру) n-угольник, вп. в окр. — правильный.
2) в. n-угольник замкнут и ограничен, множество вписанных n-угольников компактно.

1) Δ Допустим, что у нас есть непр. многоугольник
рассмотрим такое:



$AC + CB \to AB$
если $C \to A$ или $C \to B$,
тогда максимум $AC + CB$ когда $AC = CB$.

∇

(2) Δ Возьмем многоугольник X_n^*, где

неверно ?

$$X_n^k = \{\{(x_1;y_1), (x_2;y_2), (x_3;y_3) \dots (x_n;y_n)\}\} / (x_n;y_n) \in \text{окр.}\}$$

Возьмем $X_n^{(k)} \to X_n^{(0)}$ (сход. посл. n-угольн.)

Тогда $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = ??$

Не, путь другое.

Пусть $y_n = \{\{y_1, y_2, \dots, y_n\}\} \mid y_n$ — градусная мера угла дуги окр., ограниченной точкой x_n и x_{n+1} (или x_n и x_1 где $k=n$)$\}$

Тогда $\exists\, y_n^{(k)} \to y_n^{(0)}$?

$$\begin{cases} y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k = 2\pi \\ y_m^k \geq 0 \end{cases} \quad 1 \leq m \leq n$$

Осущ. пред переход $k \to \infty$

$$\begin{cases} y_1^0 + y_2^0 + \dots + y_n^0 = 2\pi \\ y_m^0 \geq 0 \end{cases}$$

— тоже n-угольник, вписан в окр.

Поскольку многоугольник стремится к многоуг., мн-во замкнуто.

Поскольку $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2\pi$, то мн-во огран.

Мн-во компактно

∇

(47) Теорема Кантора о равном. непрерывности.

Непрерывное на компакте множество равномерно непрерывно.

Δ Опр: $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \rho(x_n, x_e) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_n), f(x_e)) < \varepsilon$

Все просто: $f: X \to Y$, X компактно, $\to$ Y комп.
Тогда подберем какое-нибудь x_n в X, выделим по секв. компактности $x_{n_k} \to c$; (критерий Коши).
Выделим еще $\overline{x}_{n_k}$. $\overline{x}_{n_k} \to c$, так как

$$\rho(\overline{x}_{n_k}; c) \le \rho(\overline{x}_{n_k}; x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}; c) < \delta + \varepsilon \to 0.$$

Тогда по непрерывности в c: $y_{n_k} \to f(c)$ $\overline{y}_{n_k} \to f(c)$
Значит $\rho(y_{n_k}; \overline{y}_{n_k}) \to 0$;

∇

48. Лемма о связности отрезка.

Отрезок нельзя представить в виде $D_1 \cup D_2$, где $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, D_1, D_2 открытые.

Δ Ну, пусть можно. $] \exists [a; b]$, определим D_1

D_1 содержит a, значит, еще и $[a-\varepsilon; a+\varepsilon)$
(это бред, но пусть докажем еще и для (a, b))
Сверху D_1 ограничен $c = \sup\{x$ (каких-то элементов $[a, b)$) $| \, x \in [a; b)\}$.

Тогда $c \notin D_1$, т.к. $\forall x \in D_1$, $x < c$, то есть в $(c; c+\varepsilon)$ нет членов x, c — не внутр. точка D_1.

Но c — не вн. точка и $D_2 = \{$остальные $x\}$, так как по опр. c $\exists x > c - \varepsilon$. $C \notin D_2$

∇

49. Теорема Больцано-Коши о промеж. значении непрер. ф-ии

Если имеется функция f, непрерывная на $[a; b]$, то для $\forall C \in f([a; b])$ $\exists c \in [a; b]$

Причем $C = f(c)$

Δ Предположим, что все совсем не так.
Пусть у нас есть такая C, что для $\forall x \in [a;b]$ $C \neq c$, но $C \in [f(a); f(b)]$ или c не сущ.

Ну тогда множество $f^{-1}([f(a); f(b)])$ может быть разбито как объединение двух множеств — $f^{-1}([f(a); C) \cup (C; f(b)]) \sim [a; ?) \cup (?; b]$, чего мы сделать не можем согласно лемме о связности отрезка. Тогда c существует и $f(c)=C$

∇

(Есть другое док-во — Виноградов с 130-131)

50. Теорема о сохранении промежутка

Непрерывный образ промежутка — промежуток.

Δ $\exists f \in C\langle a;b\rangle \leftarrow f$ непрерывна на $\langle a;b\rangle$, впредь.

$m = \inf\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$. $m, M \in \overline{R}$

Значит $E = f(\langle a;b\rangle)$ связно (49), причем $\forall x \in \langle a;b\rangle \leq M, \geq m$, тогда E — промежуток.

∇

51. Описание мн. связных множеств в R

$\underset{\text{мн. связно}}{E \subset R} \Longleftrightarrow E$ — промежуток.

Δ Влево очевидно, если у нас есть пром., то он в R.

Рассмотрим переход вправо:

$m = \inf E$, $M < \sup E$; докажем, что $(m;M) \subset E$

$\leftarrow \urcorner$ $\exists t > m,\ t < M,\ t \notin E$

$\exists x_1; x_2 \in E \mid m \le x_1 < t < x_2 \le M$

Но $\exists \gamma: (a;b) \to E \subset \mathbb{R}$, $\gamma(a) = x_1$, $\gamma(b) = x_2$

Тогда, поскольку по опр γ непрерывен на $(a;b)$ по теореме о промеж. значении ф-ции:

$\exists c \in (a;b)$ $\gamma(c) = t$; противоречие

∇

(52). Теорема о непрерывном образе связного множ.

$f: X \to Y$, X лин. связно. тогда $f(X)$ лин. св.

Δ

Поскольку X л.с, то $\exists \gamma \in C([a;b] \to X)$, такой, что

$\gamma(a) = \alpha \in X$, $\gamma(b) = \beta \in X$

тогда по непрерывности X полагаем, что $f(\alpha) = A$, $f(\beta) = B$ и по непрерывности композиции:

$f \circ \gamma$ — Путь в Y. Значит Y лин. св.
$(f \circ \gamma(a) = A,\ f \circ \gamma(b) = B)$

∇

(53). Теорема о непрерывности монотонной функции. Следствие о множестве точек разрыва

$f: \langle a;b \rangle \to \mathbb{R}$, f монотонна, тогда:

(1) Множество точек разрыва 2 рода f пусто.
(2) Непрерывность равносильна тому, что множество значений f — промежуток.

△ Докажем 2 на основании 1.

① Пусть f возрастает.

Пусть $x_0 \in (a;b\rangle$, пусть $x_1 \in \langle a;b)$;

Тогда на $\langle a;b)$ верно: $f(x_1) \le f(x) \le f(x_0)$
Следовательно $f(x)$ ограничена св. и по 34 сущ. $f(x_0-)$, и по теор. о пред. переходе
$f(x_1) \le f(x_0-) \le f(x_0)$;

Пусть $x_0 \in \langle a;b)$, пусть $x_1 \in (a;b\rangle$, тогда на $(a;b\rangle$ аналогично $\exists f(x_0+)$, такой, что
$f(x_0) \le f(x_0+) \le f(x_1)$

~ Аналогично и для убыв. f.

② Пусть f возрастает

Если $f: \langle a;b\rangle \to \dots$, то по лемме о сохр. промежутка равенство вправо доказано

Влево:
Пусть $f(\langle a;b\rangle)$ - промежуток, докажем непрерывность f слева в x_0 (произв.)

Пусть $f(x_0-) < f(x_0)$ (сущ. по пункту ①)

Возьмем $y \in [f(x_0-); f(x_0))$. Если $a < x_1 < x_0$, то $y \in [f(x_1); f(x_0)] \to y \in f(\langle a;b\rangle)$ прин. значение f.

С другой стороны для $\forall x \in \langle a; x_0)$ $f(x) \le f(x_0-) < y$, а для $\forall x \in [x_0; b\rangle$ ~~$f(x) < a$~~; $y < f(x_0) \le f(x)$,

$$f(x) < f(x_0-) < y < f(x_0) \le f(x)$$ y не прин. значение ф-ции.

Тогда $f(x_0-) = f(x_0)$. $f(x_0+) = f(x_0)$ док. так же

▽

54. Теорема о существовании и непрерывности обратной ф-ции.

$f \in (C\langle a;b\rangle \to \mathbb{R})$, f <u>строго</u> монотонна.

$m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, $x \in \langle a;b\rangle$

1. f обратима, $f^{-1}: \langle m;M\rangle \to \langle a;b\rangle$ биекция
2. f^{-1} строго монотонна одинаково с f
3. f^{-1} непрерывна

Δ

1. Пусть f возр. (строго);

Если $x_1; x_2 \in \langle a;b\rangle$, то при $x_1<x_2$, $f(x_1)<f(x_2)$, значит f обратима.
Обратное обратимое отображение
$f^{-1}: (\langle m;M\rangle \to \langle a;b\rangle)$ биекция по св-вам отобр.
(и еще сохр. промежутки)

2. $y_1, y_2 \in \langle m;M\rangle$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,

$y_1 < y_2$, тогда $x_1 < x_2$ ($x_1 \not> x_2$, т.к. $x_1 \neq x_2$)

3. f^{-1} задана на $\langle m;M\rangle$, $f^{-1}: \langle m;M\rangle \to \langle a;b\rangle$.
по теореме 53 она непрерывна

∇

55. (offtop!) Тождество Лагранжа, неравенство К-Б

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(a_jb_i - a_ib_j)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2}_{\text{неравенство К-Б}}$$

Δ

$$\frac{1}{2}\sum_{(i,j)}(a_ib_j - a_jb_i)^2 = \frac{1}{2}\sum\left(a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 + 2a_ib_ia_jb_j\right) =$$

$= \frac{1}{2}$

$=$

56.

$= \frac{1}{2}\left(\sum a_i^2 b_j^2 + \sum a_j^2 b_i^2\right) - \sum a_i a_j b_i b_j =$

$= \ ?$

56. Показательная: монотонность, эксп. суммы, непрер.

① exp_a строго возраст. при $a>1$ и строго убывает при $0<a<1$

② $a^{x+y} = a^x a^y \quad a^{-x} = 1/a^x$

③ exp_a непрерывна на $\mathbb{R}$

Δ

① Пусть $a>1$, при $x<y$ $a^x < a^y$ ← докажем.

Пусть $\exists \bar{r}, \bar{\bar{r}} \mid x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y$

Пусть $\exists x_n, y_n \mid x_n \to x,\ y_n \to y,\ x_n \nearrow,\ y_n \searrow$ – рац. числа

Тогда $x_n < x < \bar{r} < \bar{\bar{r}} < y < y_n$

exp_a строго монотонна по опр., тогда

$a^{x_n} < a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} < a^{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^x \le a^{\bar{r}} < a^{\bar{\bar{r}}} \le a^y$

② $a^{x_n+y_n} = a^{x_n}a^{y_n} \xrightarrow{n\to\infty} a^x a^y. \quad a^{0-x} = \frac{1}{a^x}$

③ Пусть $a>1$, докажем непр. в 0: $\exists N: x_n \in \mathcal{E}(x_n \to 0)$, тогда

$-\frac{1}{N} < x_n < \frac{1}{N}$ для $n>N \Rightarrow 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$

$a^{x_n} \to 1$; $\quad a^{x_0+\Delta} - a^{x_0} = \overset{\text{о.м}}{a^{x_0}}\overset{\text{огр}}{(a^{\Delta}-1)} \to 0.$

57. Свойство exp: композиция, обратимость. log + св-ва

1. $(a^x)^y = a^{xy}$;

Δ $(a^{x_n})^{y_m} = a^{x_n y_m}$. $x_n \to x$,

$\downarrow n \to \infty$

$a^{x y_m} = (a^x)^{y_m}$ по непрерывн. ($(a^{x_n})^{y_m} \to (a^x)^{y_m}$)

$\downarrow m \to \infty$

$(a^x)^{y_m} \to (a^x)^y$, $a^{x y_m} \to a^{xy}$. ∇

2. $exp_a: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{на}} (0; +\infty)$

Δ Пусть $a > 1$: $a = 1 + \alpha$, $a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \to +\infty$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \to 0$;

Значит по св-ву сохр пр-ка $exp_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$

0 не принимает ($\exists a^{x_0} = 0$ $\forall x < x_0$ $a^x < a^{x_0} = 0 < 1$)

$exp_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$

3. $\log_a = (exp_a)^{-1}$:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Δ $a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a y} a^{\log_a x} = a^{\log_a x + \log_a y}$ ∇

2) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

Δ $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha = (x)^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$ ∇

3) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Δ $(a^{\log_a b})^{\log_c a} = a^{\log_c a}$ ∇

58. Непрерывность тригонометр. ф-й и обр. к ним

(1) sin x непрерывен $\boxed{|\sin x| \le |x|}$

Δ $|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le$

$\le 2\cdot\frac{x-x_0}{2}\cdot 1 \to 0$ ∇

(2) cos x непрерывен

Δ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, sin непрерывен ∇

(3) tg x непрерывен Δ $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непр. как частное ∇

(4) arcsin, arccos, arctg, arcctg непрерывны

Δ $\arcsin x = \left(\sin x\big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$. $\arccos x = \left(\cos x\big|_{[0;\pi]}\right)^{-1}$

$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} x\big|_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$ arcctg = –//– ...

Все непрерывны согласно 54. ∇

59. Замечательные пределы ($\sin / \log / x^\alpha / a^x$)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Δ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ $x \to 0$ для $\cos x$ ($\cos x$ непрер.) ∇

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Δ $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$. докажем для ln.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ ∇

(3). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ Д-во ↓

Δ При $\alpha = 0$ всё верно; $\exists\, \alpha \neq 0.\ \exists \{x_n\}: x_n \to 0,\ |x_n| < 1$

Тогда $\exists\, y_n = (1+x_n)^\alpha - 1 \to 0,\ y_n \neq 0$

При этом:

$\alpha \ln(1+x_n) = \ln(1+y_n)$ $\quad x_n =$ не нужно

Тогда:

$$\frac{(1+x_n)^\alpha - 1}{x_n} = \frac{y_n}{x_n} = \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \cdot \alpha \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \to \alpha \ \nabla$$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \overset{\text{частн}}{\Longleftarrow} \lim \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$\Delta\ \exists\, y_n = a^{x_n} - 1 \to 0$

$x_n = \frac{\ln(1+y_n)}{\ln a}$, тогда $\lim \frac{a^{x_n}-1}{x^n} = \lim \frac{y_n}{x^n} =$

$= \lim \frac{y_n}{\ln(1+y_n)} \ln a \to \ln a$

∇

60. Замена на эквив. при вычисл. пределов, таблицы

$\exists\, X$ - м.п., $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ при $X \to x_0$ x_0 - пред. т. X

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$

2. Если x_0 - пред. точка $E\left(\frac{f}{g}\right)$, то

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$

Δ 1. $(f = \varphi \tilde{f}\ \ \varphi \to 1) \wedge (g = \psi \tilde{g}\ \ \psi \to 1)$ (на $\dot{V}_{x_0} \cap D$, $\dot{U}_{x_0} \cap D$)

Тогда на $\dot{W}_{x_0} = \dot{U}_{x_0} \cap \dot{V}_{x_0}$ верно:

$fg = \psi\varphi(\tilde f\tilde g) \longrightarrow \lim(fg) = \lim(\tilde f\tilde g)$

(2) Аналогично, сужаем V_{x_0} и U_{x_0} так, чтобы $x \in V$, и не обр. в ноль.

∇ + $\sin x \sim x$, $\cos x \sim 1 + \frac{x^2}{2}$, $\operatorname{tg} x \sim x \sim \operatorname{sh} x$, $\ln(1+x) \sim x$ ...

(61.) Теорема о единственности асимпт. разложения

x_0 — пред. точка $D \subset X$, $f, g_k : D \to \mathbb{R}$, при $k \in [0 : n \in \mathbb{Z}_+]$

$g_{k+1}(x) = o(g_k(x))$, $x \to x_0$

и для $\forall V_{x_0}\ \exists\, t \in \dot V_{x_0} \cap D \mid g_n(t) \neq 0$,

тогда при

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) + o(g_n(x)) \quad (*) \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{n} d_k g_k(x) + o(g_n(x)) \quad (**) \end{aligned}\right| \Rightarrow c_k = d_k \text{ при } k \in \ldots$$

Δ По индукции $g_k(x) = o(g_l(x))$ $x \to x_0$, $l < k$

$\exists E_k = \{x \in D : g_k(x) \neq 0\}$ $k \in [0 : n]$

x_0 — пред. точка каждого E_k

$\neg$ $c_k = d_k$ не при всех $k \in [0 : n]$

$\exists m = \min\{k \in [0 : n] : c_k \neq d_k\}$

Вычтем из $(*)$ $(**)$ при $n = m$

$0 = (c_m - d_m) g_m(x) + o(g_m(x))$ $x \to x_0$

Поделим на $g_m(x)$ для $x \in E_m$ + переход

$c_m = d_m$, что противоречит опред. m ∇

62. Равносильность опред. производной, правила дифф.

1) $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ $x \to x_0$, $A \in \mathbb{R}$

$$\Updownarrow$$

$A = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Эквивалентность опред.

Δ Пусть верно 1 опр:

$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \varphi(x)(x-x_0)$ $\varphi_x \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

Перенесем в л.ч. и поделим на $(x-x_0)$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

Пусть верно 2 опр; обозначим $\varphi(x)$:

$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - A$, тогда 1 опр верно.

∇

2) Правила дифференцирования

1) $f'(x) \pm g'(x) = (f \pm g)'(x)$

Δ По опр произв. $\frac{(f+g)(x+\Delta)-(f+g)(x)}{\Delta} =$

$= \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} + \frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta} = f'(x)+g'(x)$ ∇

2) $\cancel{g}f'(x)\cancel{g} = \cancel{fg}\ f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Δ $\cancel{(fg)(x) = f(x)}$:

$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{(fg)(x+h) + g(x+h)f(x) - \dots + \dots}{h}$

$$\Rightarrow \; = \frac{g(x+h)\big(f(x+h)+f(x)\big)}{h} + \frac{f(x)\big(g(x+a)-g(x)\big)}{h} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{h\to 0} g(x)f'(x) + g'(x)f(x);$$

∇

3. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)};$$

Δ $$\frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{g(x)\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h} - \frac{f(x)\big(g(x+h)-g(x)\big)}{h}\right)$$

$$\xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{g^2(x)}\big(g(x)f'(x) - f(x)g'(x)\big);$$

∇

63. Дифференцирование композиции и обр. ф-ции

1. $f: \langle a;b\rangle \to \langle c;d\rangle$ дифф. в $x \in \langle a;b\rangle$, а $g: \langle c;d\rangle \to \mathbb{R}$ дифф в $f(x)$, то $g\circ f$ дифф в x и

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Δ $\exists\, y = f(x)$: $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \alpha(h)h$

$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \beta(k)k$

α, β в 0 непрерывны и равны 0

Подставим во второе равенство

$k = f'(x)h + \alpha(h)h$

$$g(f(x)+f(x+h)-f(x)) = g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h+\alpha(h)h) +$$
$$+\beta(f'(x)h+\alpha(h)h)\cdot(f'(x)h+\alpha(h)h);$$
$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))\cdot f'(x)h + \xi(h)h,$$

запихали остальн.

Тогда ясно, что $\xi(h)h \to 0$

что и есть определение $(g\circ f)'$

∇

2. $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Δ f^{-1} сущ. по 54 и все ок.

$\exists\, h = f^{-1}(f(x)+k) - f^{-1}(f(x)) = \tau(k)$

$h + x = f^{-1}(f(x)+k);\ f(x)+k = f(h+x)$

Составим разностное отношение:

$$\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(h+x)-f(x)} = \frac{\tau(k)}{f(x+\tau(k))-f(x)}$$

$k \to 0$

$$\frac{h}{f(h+x)-f(x)} \to \frac{1}{f'(x)}$$

но $\tau(k) \to 0$ по непр. f^{-1} в $f(x)$

∇ $\dfrac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k} \xrightarrow{k\to 0} \dfrac{1}{f'(x)}$

64.

65.

(64) Теорема Ферма

] $f: \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a;b)$,

$f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$ или $f(x_0) = \min\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$

то $f'(x_0)=0$.

Δ пусть $f(x_0) = \max\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$;

тогда $f(x) \le f(x_0)$ для $\forall x \in \langle a;b\rangle$, из чего следует:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \text{ для } x\in (x_0;b\rangle$$

Перейдём к пределу

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$$

Аналогично $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ при $x\in\langle a;x_0)$

$f'(x_0)\le 0$, $f'(x_0)\ge 0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

∇

(65) Теорема Ролля

Условие как в 64; $f(a)=f(b)$;

тогда $\exists$ $c\in(a;b)$ $f'(c)=0$.

Δ

Если юзаем теорему Вейерштрасса о компактности, то $\langle a;b\rangle$ компактно, а значит $f(\langle a;b\rangle)$ ограничено, то есть сущ $x_1 = \min\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$, $x_2 = \max\limits_{x\in\langle a;b\rangle} f(x)$

Если $x_1 = f(a)$, $x_2 = f(b)$, то f постоянна на $[a;b]$ и можем взять любую точку.

Иначе по Ферма $f(x_1)=0$ или $f(x_2)=0$.

∇

(66) Теорема Лагранжа и Коши. Следствие

(1) Лагранж.

] $f \in C[a;b]$, с дифф на $(a;b)$, тогда $\exists$ $c \in (a;b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

(2). Коши

] $f \in C[a;b]$, с дифф на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a;b)$, тогда $\exists c \in (a;b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Δ Лагранж - это Коши при $g(x)=x$;
Докажем Коши

$g(a) \neq g(b)$ (по Роллю).] $\varphi = f - Kg$, где $K: \varphi(a)=\varphi(b)$
$$K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Тогда φ удовл. условию Ролля $\to$ найдется $c \in (a;b)$, что $\varphi'(c)=0$, то есть $f'(c) = Kg'(c)$

∇

67. 3. Следствие об оценке прираш. ф-ии

$f(x+\Delta) - f(x) = f'(c)(\Delta)$ (Лагранж)

Подберем $M: |f'(c)| \leq M$ для $\forall c \in (a;b)$.
тогда

$f(x+\Delta) - f(x) \leq M\Delta$. - ограниченость прираш.

67

попалось на экзамене, все сдали!

68

69

67. Теорема Дарбу, следствие.

1) Если ~~$f\in C[a;b]$~~, f дифф на $[a;c]$, то для $\forall C$, что $f'(a)\leqslant C\leqslant f'(b)$, $\exists c\in(a;b): f'(c)=C$.

Δ 1) Пусть сначала $\operatorname{sign} f'(a)\neq\operatorname{sign} f'(b)$.
Для определенности $f'(a)<0<f'(b)$
Тогда f непрерывна (поскольку дифф.) на $[a;b]$,
Значит по теореме Вейерштрасса $\exists c\in[a;b]$
$f(c)=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, тогда по Ферма $f'(c)=0$.

$c\neq a$ (если $c=a$, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$ для $\forall x\in(a;b]$)
$c\neq b$ (если $c=b$, то $\frac{f(x)-f(b)}{x-a}\leqslant 0$ для $\forall x\in[b;a)$)

2) Докажем теорему:

$\rceil\ f'(a)<C<f'(b)$

$\rceil\ \varphi(x):=f(x)-Cx$, тогда

$\varphi'(a)=f'(a)-C<0<f'(b)-C=\varphi'(b)$
Значит найдется такое c, что $f(c)=C$,
то есть $\varphi'(c)\underset{(67.1)}{=}0$
∇

2) Следствие:

1. Если f дифф на $\langle a;b\rangle$, то $f'(\langle a;b\rangle)$ - промежуток.

2. Производная f дифф на $\langle a;b\rangle$ не может иметь разрывов I рода (Google it!)

попалось на экзамене, не сдала!

68. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано
69. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

доказывайте по теории ТМФ!)

70. Замечание о представимости функции рядом Тейлора и о дифф. разложений.

1. Если верно

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \dots}_{R_n}$$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Δ

докажем, что $R_n \to 0$

$|f^n(x)| \le m \cdot C^n$, тогда $R_n \le \frac{m C^{n+1} \ell^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ ∇

2. Если сущ. $f'(x)$, то

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \dots$$

71. Теорема о НиД условиях экстремума

f - дифф. на $\langle a, b \rangle$, $x_0 \in (a;b)$, то

1) x_0 - точка лок. экстремума $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

2) $\exists f$ - n раз дифф. $(a;b)$, такая, что:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \ne 0 \end{cases}$$

То если n чётно, $\to \left[\begin{array}{l} f^{(n)}(x_0) > 0 \text{ - лок. min} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \text{ - лок. max} \end{array} \right.$

n нечётно - экстр. нет.

Δ

!

72.

Δ.

① Т. Ферма

!★! ② $f(x) = f(x_0) + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$;

при четном n ... ?!

Есть более легкий способ!

типа если $f'(x_0) = 0$, а $\underset{x\in(x_0-\delta;\,x_0)}{f'(x)} < \underset{y\in(x_0;\,x_0+\delta)}{f'(y)}$,
то это $\cup$

Иначе $\wedge$. Смотрим порядок окрестности.

J2. Теорема об арифм. св-вах пределов в $\overline{\mathbb{R}}$;
Неопределенности.

① $x_n \to +\infty$, y_n огр. снизу

$x_n + y_n \to +\infty$

Δ ∃ $y_n \geq \frac{R}{2}$, $x_n > \frac{R}{2}$ для всех $n > N$,

тогда $y_n + x_n > R$ для всех $n > N$. ∇

∇

② $x_n \to +\infty$, $y_n \geq \alpha > 0$

$x_n y_n \to \infty$

Δ $x_n \geq \frac{R}{\alpha}$ для $n > N$,
$x_n y_n \geq \frac{R}{\alpha}\cdot\alpha = R$. ∇

③ $x_n \to x_0 \neq 0$ $y_n \to y_0 \neq 0$ $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$
$x_n \to \infty$ $y_n \to y_0 \neq 0$ $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$ $\frac{y_n}{x_n} \to 0$
Δ очевидно ∇