# Теория игр

Башнях Антон

**Учебники:** Петросян, Зенкевич Теория Игр (главы 1, 3)

Зачет, на 5 нужно знать все определения и теоремы (с доказ. + учебник)
Домашек нет, лекции есть в интернете.

## Классификация игр

1. Кооперация — бескоалиционные / кооперативные / коалиционные
2. Выигрыш — обычно одно число $\in \mathbb{R}$.
   — антагонистическая (суммарно 0)
   — ненулевая сумма (больше 0)
3. По характеру — динамические / закрытое поле или нормальная форма
4. По числу стратегий — конечные / бесконечные

с неполн. информ. — игроки знают характер, но не ходы / матрицы (маджонг)

шахматы

## Антагон. игры в норм. форме

Ходы — одновременно хода

У игрока A ходы $X$, у другого $Y$. По окончанию ходов (х) получаем $K(X, Y) = p$ — выигрыш. КЧ5 — $\{-1, 1\}$.
$K: X \times Y \to \mathbb{R}$ функция выигрыша 1 игрока

$\Gamma(X, Y, K)$ — антагонистическая игра в нормальной форме
Если $|X|, |Y| < +\infty$, то игра представл. в матричн. ф-ме

$A = \| K(x_i, y_j) \|_{ij}$. Матриц $A$ много (с точн. до перест. $X$), но это ни на что не влияет

$\Gamma'(X', Y', K')$ — подыгра ($X' \subset X$, $Y' \subset Y$, $K'$ — сужение $K$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{I}: \begin{matrix} 1 \to 0 \\ 2 \to 3 \\ 3 \to 0 \end{matrix} \qquad \text{II}: \begin{matrix} 1 \to -6 \\ 2 \to -3 \\ 3 \to -8 \end{matrix}$$

$\underline{v} = \sup\limits_x \inf\limits_y K(x, y)$ — нижнее значение игры (3)
стратегия максиминная — выбор

$\overline{v} = \inf\limits_y \sup\limits_x K(x, y)$ — верхнее ... — тоже (3)

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \qquad \overline{v} = 1, \quad \underline{v} = 0, \quad \underline{v} \le \overline{v}$$

Всегда верно

Ситуация равновесия — кортеж стратегий, когда отклонение игрока $i$ — ему хуже.

**Th** $\underline{v} \le \overline{v}$.

$\Delta$ $K(x, y) \le \sup\limits_x K(x, y) \quad \forall x, y; \quad \forall x \quad \inf\limits_y K(x, y) \le \inf\limits_y \sup\limits_x K(x, y) = \overline{v}$

$\sup\limits_x \inf\limits_y K(x, y) \le \inf\limits_y \sup\limits_x K(x, y)$ $\nabla$

**Def:** $(X^*, Y^*)$ — ситуация равновесия (equilibrium) — седлов. точка

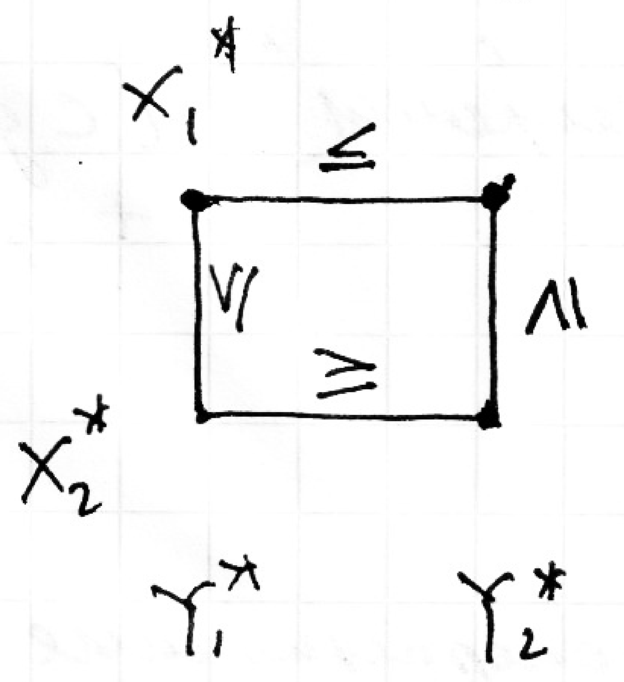
$K(X, Y^*) \le K(X^*, Y^*) \le K(X^*, Y)$ параболоида гиперболоида

**Th** $\exists\ (X_1^*, Y_1^*),\ (X_2^*, Y_2^*) \in Z(\Gamma)$ ← множество ситуаций равновесия

Тогда $(X_1^*, Y_2^*),\ (X_2^*, Y_1^*) \in Z(\Gamma)$

и $\forall i,j$ $K(X_i^*, Y_j^*)$ все равны.

$\Delta$




Доказано))) Очев)))

Из max $K(X_1^*, Y_1^*) \le K(X_1^*, Y_2^*)$

но $K(X_1^*, Y_2) \le K(X_1, Y_2^*)$

$K(X_1^*, Y_1^*) \le K(X_1^*, Y_2^*) \le K(X_2^*, Y_2^*) - \angle$

$\nabla$

**Th** $\underline{v} = \max\limits_x \inf\limits_y (K(x,y)) = \min\limits_x \sup\limits_y (K(x,y)) = \overline{v} \iff (\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\Gamma)$

С max из достиг. $\overline{v}$, $\underline{v}$

$\Delta$ $\Leftarrow$

$(x^*, y^*) \in Z(\Gamma)$, $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*)$,

$\overline{v} = \inf\limits_y \sup\limits_x K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le \dots \underline{v}$

очевидно в 1 ход.

но $\overline{v} \ge \underline{v}$. $\Rightarrow$ $\overline{v} = \underline{v}$

из теоремы 1

$\nabla$

$\Delta$ $\Rightarrow$

$K(\bar{x}, \bar{y}) = \cancel{\max}\ \overline{v} = \inf\limits_y \cancel{\sup} K(\bar{x}, y) \le K(\bar{x}, y)$

$K(\bar{x}, \bar{y}) = \underline{v} = \sup K(x, \bar{y}) \ge K(x, \bar{y})$

$K(\bar{x}, \bar{y}) \ge \inf K(\bar{x}, y) = \max\limits_x \inf\limits_y K(x,y) = \overline{v}$

$K(\bar{x}, \bar{y}) \le \sup \dots$ —//— $= \underline{v}$

$\nabla$ $K(\bar{x}, \bar{y}) \cancel{\Rightarrow} \sup\limits_x K(x, \bar{y}) \ge \inf\limits_y \sup\limits_x K(x,y)$

__Смешанное расширение__

$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = 3$, $\overline{v} = 5$

— играем много раз, оптимиз. среднее
— бросаем несимметричную монетку 1 раз
— много игроков/партий за раз

**Def** $X, Y$ — содержат распред. вероятностей

$\xi \in X$ (на $\{1..n\}$), $\eta \in Y$ (на $\{1..m\}$) — распределение / стратегии

$\xi_i$ — вер-ть — распределение $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = 1$

$K(\xi, \eta) = \sum\sum \xi_i \eta_j a_{ij} = \xi^T A \eta$, где $A$ — матрица из $K$

Чистая стратегия: $[\ \xi_i = 1,\ \xi_j \underset{j \ne i}{=} 0\ ]$

Ситуация равновесия: $(x^*, y^*)$ : $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$

(пример)

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\underline{v} = 0$, $\overline{v} = 1$

$K(x^*, y^*) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$K(\dots\text{произв. } x, \eta) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta_1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot + \dots = \frac{1}{2}(\eta_1 + \dots) = \frac{1}{2}$

**Th** $(X^*, Y^*) \in Z(\Gamma_A)$ с смешан. расш. $A$ $\iff \overset{\forall i,j}{} K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j)$

$K(x^* y^*) = \sum_i \xi_i \sum_j \eta_j a_{ij}$
$K(i, y^*) = \sum_j \eta_j a_{ij}$

Д. Мол.

Дост

$(\Rightarrow)$ $K(i, y^*) > K(x^*, y^*) \Rightarrow$ противоречие

$(\Leftarrow)$ $\forall x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ $K(x, y^*) = \sum \xi_i K(i, y^*)$

$= \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \sum_i \xi_i \underbrace{K(i, y^*)}_{\sum \eta_j a_{ij}} \le \sum \xi_i K(x^*, y^*) = \underbrace{\left(\sum \xi_i\right)}_{1} K(x^*, y^*)$

~~Ш~~ ~~$K(i, y^*)$~~

$\triangledown$

Проверка опт. стратегии за $O(mn)$

$\boxed{16.02.2017}$ Лекция про линейное прог. (г. 1, продолжение)

Задача:

$$\begin{cases} c^T x \longrightarrow \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \longrightarrow \max \\ \forall i \in \{1..n\}: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le b_i \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

"Канонич. вид", если $(Ax = b)$

$$\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

Похожие случаи:

$$\begin{cases} c^T x \to \min \quad (c \text{ replaced by } -c) \\ \forall x \quad x = x_1 - x_2, \ x_1, x_2 \ge 0 \\ a_i^T x = b_i \text{ или } a_i^T x \ge b_i, \ -a_i^T x \le -b_i \text{ или } a_i^T x \le b_i \end{cases}$$

Поиск кратч. пути в графе:

$d_s$ — $d_i$ — … — $d_t$

$$\begin{cases} \forall uv \in E \quad d_v \le d_u + w_{uv} \\ d_s = 0 \end{cases}$$

Поток: $\overset{s}{\bullet} \le SS \ge t$ $\quad |f| = \sum_{v \in V} f_{sv}$

$$\begin{cases} \sum f_{sv} \to \max \\ f_{uv} = -f_{vu} \\ f_{uv} \le c_{uv} \\ \forall u \in V \setminus \{s, t\}: \sum_{v \in V} f_{uv} = 0 \end{cases}$$

равенство входящего/выходящ.

Min cost поток:

$$\begin{cases} \sum_{uv \in E} ~~w_{uv}~~ d_{uv} f_{uv} \to \min \\ f_{uv} = -f_{vu} \\ f_{uv} \le c_{uv} \\ \sum_v f_{sv} = d \end{cases}$$

(либо решаем о макс. потоке $\Rightarrow$ $m$ – макс. и добавл. $|f(x)| = m$

Многопродуктовый поток

$s_i \longrightarrow t_i$ перевезти $d_i$

$$\begin{cases} f_i^{uv} = -f_i^{vu} \\ \sum_i f_i^{uv} \le c_{uv} \end{cases}$$

Метод внутр. точки

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ f_i(x) \ge 0 \end{cases}$$

Метод внешн. точки

$$\psi(x) = f(x) + A \sum_i \theta(g_i(x))$$

16.02.2017

# Лин. программирование (Симплекс-метод)

**Ст. форма**

$c^T x \to \max$ при $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$

$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to \max$, $\forall j = 1..m$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

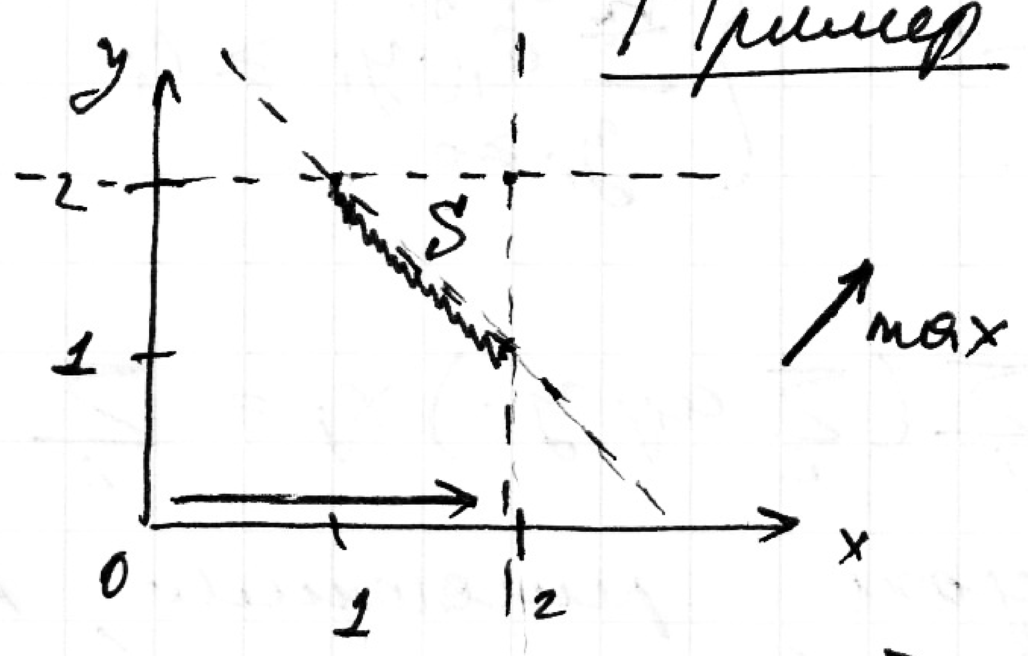
**Каноническая форма**

Basis

$$\begin{cases} z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ x_{n+j} = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \end{cases}$$

$x_i \ge 0 \quad \forall i = 1..n+m$

**Пример**




$x + y \to \max$

$\left.\begin{array}{l} y \le 2 \\ x \le 2 \\ x + y \le 2 \end{array}\right\}$ Ст. форма

Каноническая

$z = x + y$

$\alpha = 2 - x$

$\beta = 2 - y$

$\gamma = 3 - x - y$

$x \in [0..2]$

Получим:

$$\begin{cases} z = 2 - \alpha + y \\ x = 2 - \alpha \\ \beta = 2 - y \\ \gamma = 1 + \alpha - y \end{cases}$$

$y \in [..]$

$y \in [0..2]$

$y \in [0..1]$ $(\alpha = 0)$

$\alpha = 0, y = 0$

$y = 1 + \alpha - \gamma$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} z = 3 - \gamma \\ x = 2 - \alpha + \gamma \\ \beta = 1 - \alpha + \gamma \\ y = 1 + \alpha - \gamma \end{cases}$$

— двигаемся по ребру $S$

Останов., потому что у $z$ все коэф отриц.

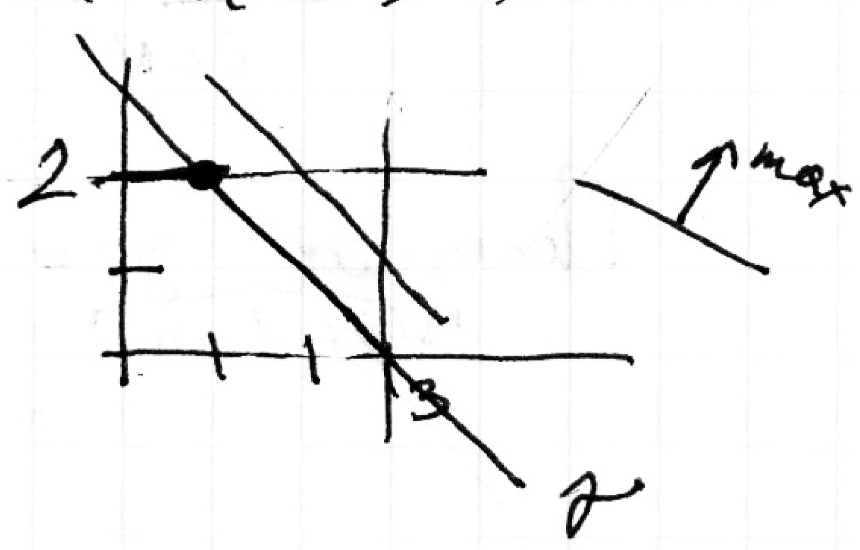
Если в этом примере задать $x \le 3$, $z = x + 2y$. Подставим $\alpha = 3 - x$

$$\begin{cases} z = 3 - \alpha + 2y \\ x = 3 - \alpha \\ \beta = 2 - y \\ \gamma = 0 + \alpha - y \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \alpha - \gamma \Rightarrow$

изменили $y$ на '0'

$$\begin{cases} z = 3 + \alpha - 2\gamma \\ x = 3 - \alpha \\ \beta = 2 - \alpha + \gamma \\ y = \alpha - \gamma \end{cases}$$




$\alpha = 2 - \beta + \gamma$

$$\begin{cases} z = 5 - \beta - \gamma \\ x = 1 + \beta - \gamma \\ \alpha = 2 - \beta + \gamma \\ y = 2 - \beta \end{cases}$$

все, $\beta/\gamma$ увел. не могут $\Rightarrow \beta = \gamma = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2$

Замена переменных — pivoting

Выбирать от балды — можно зациклиться

Bland's rule для выбора (мин. по строкам)

Работает за экспоненту на специф. примерах

**Simplex-метод:**

```
while ∃j: c_j > 0  выбираем j:   (последний, по-разному)
    for i ∈ B:
        if a_ij > 0
            Δ_i ← b_i / a_ij
        else
            Δ_i ← ∞
    if min Δ_i = ∞ → неограничена
    else ∀l: Δ_l = min Δ_i
        выражаем x_i через x_l
        по-разному
```

?

**Лемма**: Выбор минимума $\Rightarrow$ $B_{\text{базисн.}}$ переменные всегда $\ge 0$

**Лемма**: $\forall \alpha_i\ \beta_i$ $i = 1..n$, $\gamma$

$\forall x_1..x_n$

$$\sum \alpha_i x_i = \gamma + \sum \beta_i x_i$$

**Тогда** $\gamma = 0$, $\alpha_i = \beta_i$

$z = v + \sum c_j x_j$ $\qquad$ $z = v' + \sum c_j' x_j$

$x_i = b_i - \sum_j a_{ij} x_j$ $\qquad$ $x_i = b_i' - \sum a_{ij}' x_j$

$\forall x_j$ $\sum c_j x_j = (v' - v) + \sum c_j' x_j$

— // — с $a_{ij}$ — // —

Перебор всех базисн. перем. $C_{n+m}^{n}$

но в общем случае все лучше

$-x_0 \to \max$ Если $x_0 = [\max(-b_i)] = -\min(b_i)$
$x_i = 0 \quad \forall i = 1..n$ (?)

$$\begin{cases} \sum a_{ij} x_j - x_0 \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

Если ориг. задача $\underset{(\text{без } x_0)}{}$ решаема, то $x_0 = 0$

**Двойственность:**

$$\begin{cases} \sum_{m}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum a_{ij} x_j \le b_i \\ x_j \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{n}^{m} b_i y_i \to \min \\ \sum a_{ij} y_i \ge c_j \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

1. Слабая двойственность $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — решения тогда $\sum c_j x_j \le \sum b_i y_i$

$\Delta$

$$\sum_j c_j x_j \le \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) y_i \le \sum_i b_i y_i$$

$\nabla$

$\Rightarrow$ обе задачи решаемые, либо строго одна неограничена
$\Rightarrow$ если целевые значения совпали, то они оптимальны
$\Rightarrow$ если $\exists j$, что $c_j < \sum_i a_{ij} y_i$ (то) $\sum (c_j - \sum_i a_{ij} y_i) x_j = 0$
и совпадают знач, то $x_j = 0$.

2.03.2017

Симплекс - мет. рет. за $C_{n+m}^{n}$ шагов. $z = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i$ из симпл. метода
$\forall j \in B \quad x_j = b_j' - \sum_{i \in N} a_{ij}' x_i$. После остановки $c_i' \le 0$. $\forall i \in B$

$$z = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i = v + \sum_{i \in N} c_i' x_i + \underbrace{\sum_{i \in B} c_i' x_i}_{0} = v + \sum_{i \in B \cup N} c_i' x_i$$

Положим $\underset{\forall i \in 1..m}{y_i} = -c_{n+i}'$. $\forall x \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = v + \sum_{i=1}^{n+m} c_i' x_i = v + \sum_{1}^{n} + \sum_{1+n}^{n+m} =$

$$= v + \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i + \sum_{j=1}^{m} (-y_j)\left(b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i\right) =$$

$$= \left(v - \sum_{j=1}^{m} y_j b_j\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(c_i' + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right) x_i$$

Поскольку это раб. для всех $x_i$ то и для $\vec{x} = 0$.
Отсюда

$$v = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j. \qquad c_i = c_i' + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

$y_i = -c_{i+m}' \Rightarrow y_i \ge 0.$

+ слабая двойственность

$\sim$ Вот получили решение двойственной.

Утв. о дополн. нежесткости: если в слаб. двойств. $'='$, то $\forall i$ $\left[\begin{array}{l} c_i = \sum^{m} a_{ij} y_j \\ x_i = 0 \end{array}\right.$

Если $n$ мало (3d), но $m$ велико, то есть алгор решения за $O(n!\,m)$

Обратимся к теории игр:

$v \to \max$ — выигрыш. Пусть все коэф. матр. $\ge 0$, тогда

$\forall i \begin{cases} \sum a_{ij} x_i \ge v \\ \sum x_i = 1 \end{cases}, x_i \ge 0$ переменная (плохо) $\quad \theta = \frac{1}{v}, \ x_i' = x_i / v.$

Тогда:

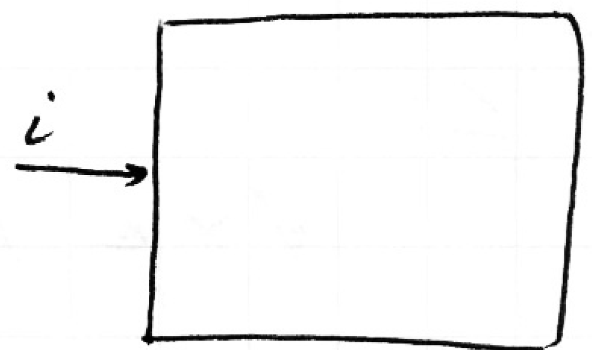
$$\begin{cases}\sum a_{ij} x_i' \ge 1\\ \sum x_i' = \theta \\ x_i' \ge 0, \quad \theta \to \min\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum x_i' \to \min \\ \sum a_{ij} x_i' \ge 1 \\ x_i' \ge 0\end{cases} \quad (\Delta)$$ — это уже задача лин. программы

Двойственная: $$\begin{cases}\sum y_j' \to \max \\ \sum a_{ij} y_j' \le 1 \\ y_j' \ge 0\end{cases} \quad (\square)$$

Есть решение $\Rightarrow$ всегда есть оптимальное

Преобр. двойственную:

$\exists\, y_j = \frac{y_j'}{\theta} \Rightarrow \sum y_j = 1. \quad \sum a_{ij} y_j \le \frac{1}{\theta} = v$




Получим: $K(i, \bar{y}) \le v \le K(\bar{x}, j)$ ← По теореме о доп. нежесткости: $\begin{cases} x_i = 0 \\ \sum\limits_j a_{ij} y_j = v \end{cases}$

И дальше ↗

Имеем именно оптимальную.

$$K(x^*, y) = \sum_i^n \sum_j^m a_{ij} x_i^* y_j = \frac{1}{\theta} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i'\Big) y_j \overset{(\Delta)}{\ge} \frac{1}{\theta} \underbrace{\sum_{j=1}^m y_j}_{} = \underbrace{\frac{1}{\theta}}_{v}$$

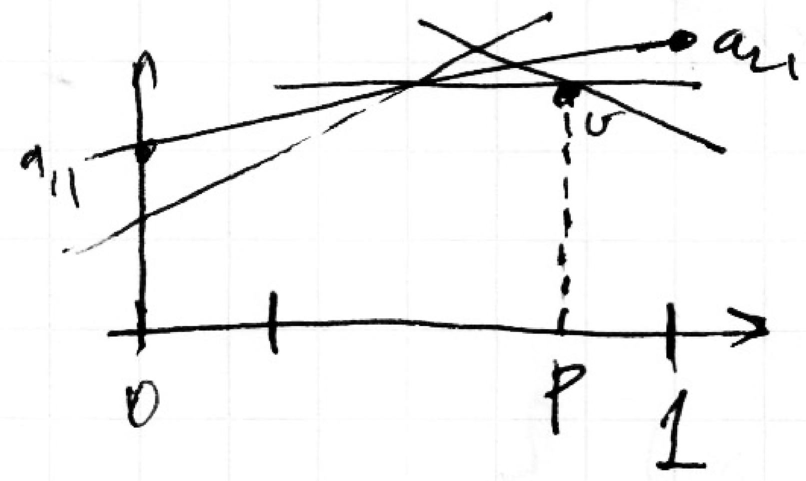
Лемма о масштабе: можно:

- умнож. $A$ на $\alpha > 0$
- добавить $\beta I$ к $A$

Частные случаи:

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & \dots & m \\ p \to & a_{11} & & a_{1m} \\ 1-p \to & a_{21} & & a_{2m} \end{array}$$

У одного игрока 2 вар. хода




— ищем max по $x$ нижнего convex hull'а

$$\begin{cases} v = q a_{1k} + (1-q) a_{1l} \\ v = q a_{2k} + (1-q) a_{2l} \end{cases}$$ — для второго игрока

## 9.03.2017 Неантагонистические игры

**Опр** $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i=1}^N, \{H_i\})$, где $H_i : \prod X_i \to \mathbb{R}$ ← функция выигрыша; мн-во страт.

В антагон. $H_1 = -H_2 \Rightarrow$ ант $\subset$ неант.

$\forall i \ \|X_i\| < \infty \Rightarrow$ конечная неантаг. игра | $\Rightarrow$ биматричная игра

$\|N\| = 2 \Rightarrow$ удобно

**Пример** Семейный спор $\begin{bmatrix} \boxed{(4,1)} & (0,0) \\ (0,0) & \boxed{(1,4)} \end{bmatrix}$ Дилемма заключенного $\begin{bmatrix} \{(5,5)\} & \{(0,10)\} \\ \{(10,0)\} & \boxed{(1,1)} \end{bmatrix}$ $\square$ — опт, $\{\}$ — по Парето

**Опр** Сит. равновесия по Нэшу

$x^* = (\underset{\in X_1}{x_1^*}, \underset{\in X_2}{x_2^*} \dots x_n^*) \quad \forall i, \bar{x}_i \quad H_i(x^*) \ge H_i(x^* \| \bar{x}_i)$

**Опр** $X^*$ – сильно равновесная, если (никакой группе не вып. откл)

$$\forall S \subset N,\ X_S \in \prod_{i\in S} X_i \quad \sum_{i\in S} H_i(X^*) \ge \sum H_i(X^* \| H_S)$$

Равновесие по Нэшу необх. для сильного равновесия.

**Опр** $\bar X$ – оптимально по Парето, ($\bar x \in X_P$), если

$$\nexists x \in \prod X_i : \quad \forall i \in N \ \ H_i(x) \ge H_i(\bar x) \ \& \quad \exists j \in N \ \ H_j(x) > H_j(\bar x)$$

$\simeq$

$$\forall x \in \prod X_i : \quad \exists i \in N \ \ H_i(x) < H_i(\bar x) \ \vee \quad \forall j \in N \ \ H_j(x) \le H_j(\bar x)$$

нет стратегий, которые строго нас доминируют

**Лемма:** Сильная равновесность $\Rightarrow$ опт. по Парето

**Опр** Равновесие по Штакельбергу

$$Z^1 = \{(x_1, x_2) \mid H_1(x_1, x_2) = \sup_{y_1} H_1(y_1, x_2)\}$$
$$Z^2 = \{(x_1, x_2) \mid H_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2} H_2(x_1, y_2)\}$$

самые выгодные для (1)

$$(Z^1(x_2) = \{x_1 \mid H_1(x_1, x_2) \to \max\})$$

$(x_1, x_2)$ – i-равновесное по Штакельбергу, если $j \ne i$ и $(x_1, x_2) \in Z^j$, $\bar H_i = H_i(x_1, x_2) = \sup\limits_{(y_1, y_2) \in Z^j} H_i(y_1, y_2)$

В семейном споре: $Z^1 = \{(0,0), (1,1)\}$ 1-равн. – $(0,0)$
$Z^2 = \{(1,1), (0,0)\}$ 2-равн – $(1,1)$

В дилемме закл: $(1,1)$ – оба равн. по Шт.

**Лемма:** $Z(\Gamma) = Z^1 \cap Z^2$

$\triangle$

$$(x_1, x_2) \in Z(\Gamma) \overset{def}{\Longrightarrow} \left.\begin{matrix} \forall x_1' & H_1(x_1', x_2) \le H_1(x_1, x_2) \\ \forall x_2' & H_2(x_1, x_2') \le H_2(x_1, x_2) \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} H(x_1, x_2) = \sup(x_1', x_2) \\ H(x_1, x_2) = \sup(x_1, x_2') \end{matrix} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in Z^1 \cap Z^2$$

$\triangledown$

**Опр** Борьба за лидерство

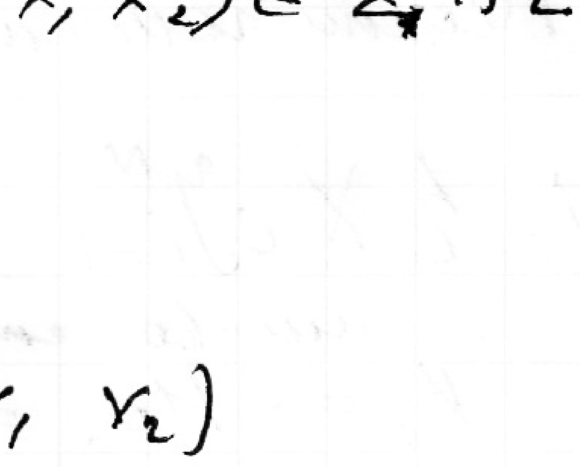
$$\nexists (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \quad \forall i \ \ \bar H_i \le H_i(x_1, x_2)$$

**Теорема** $\exists (x_1, x_2) \in X_P \cap Z(\Gamma)$ (опт. по Нэшу / Парето)
$(y_1, y_2) \in X_P \cap Z(\Gamma)$ $\quad (H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2)) \ne (H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2))$

$\Rightarrow$ имеет место борьба за лидерство

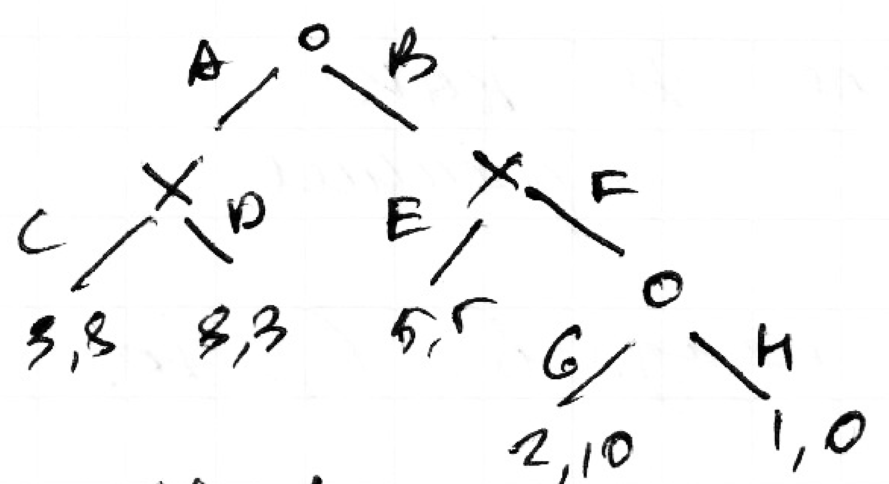
$\triangle$

$$\underbrace{\begin{matrix} H_i(x_1, x_2) \le \bar H_i \le H_i(z_1, z_2) \\ H_i(y_1, y_2) \le \bar H_i \le H_i(z_1, z_2) \end{matrix}}_{\in Z(\Gamma) \Rightarrow \in Z^1 \cap Z^2}$$




$\triangledown$

Чистые страт. — $\forall$ узла выбор 'куда идти'. Чистые стратегии можно преобразовать в матрицу.




Несколько сист. равновесия

C B E H
A G C F
A H C F

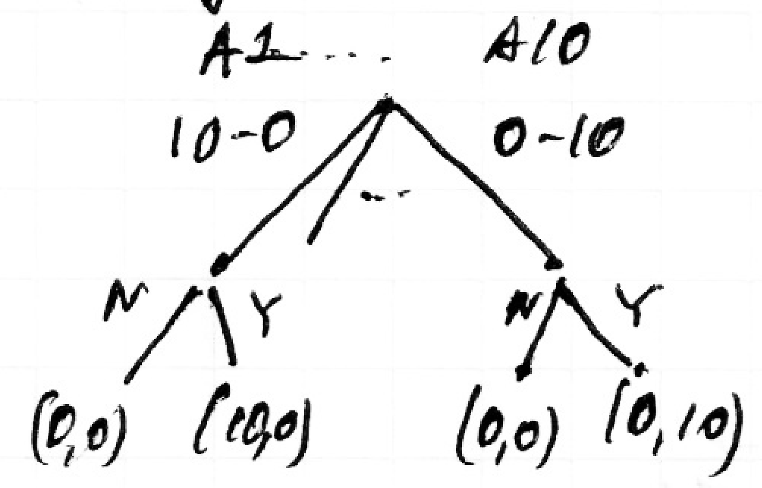
Nash equilibrium — играем по Нэшу раньше (по Нэшу)

Subgame perfect equilibrium — такое равновесие, что оно верно в каждом поддереве.

SPE в этом случае — AG CF

SPE строится вглубь индукцией с конца. (backward induction)

Пусть мы теперь делим 10 яблок:




Равновесие: A2, B10, B21 … B101

Slavin Roth 1998

Эксперимент про деление денег в Словении

. . . . .

Многоходовые: $r_j^{(i)}$ — выигрыш $i$-го игрока в $j$-й игре.

$\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{e\in k} \frac{r_e^{(i)}}{k}$ — average reward

$\exists\beta\in[0,1)$ $\sum\limits_j \beta^j r_j^{(i)}$ — discounted reward

$(1-\beta)\cdot 100\%$ — сколько % ресурсов потеряется за 1 итерацию

$\beta$ — вер-ть продолжить игру

Эвристики:

$w(a)$ = # раз оппонент выбрал $a$

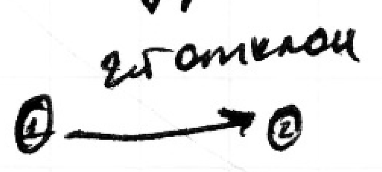
$S(a) = \frac{w(a)}{\sum_{a\in A} w(a)}$ Теорема: если это сх., то $\exists$ Nash equilib.

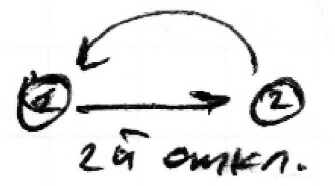
Берём макс. по матожид. выигрыша.

Всегда сходится в антагонистических играх.

В дилемме заключ. старт в (0,0). Другой ход наз. trigger'ом, потому что он изменяет игру.

Trigger Tit-for-tat — наказываем несколько раз




$n$ игроков. $r\in\mathbb{R}^n$

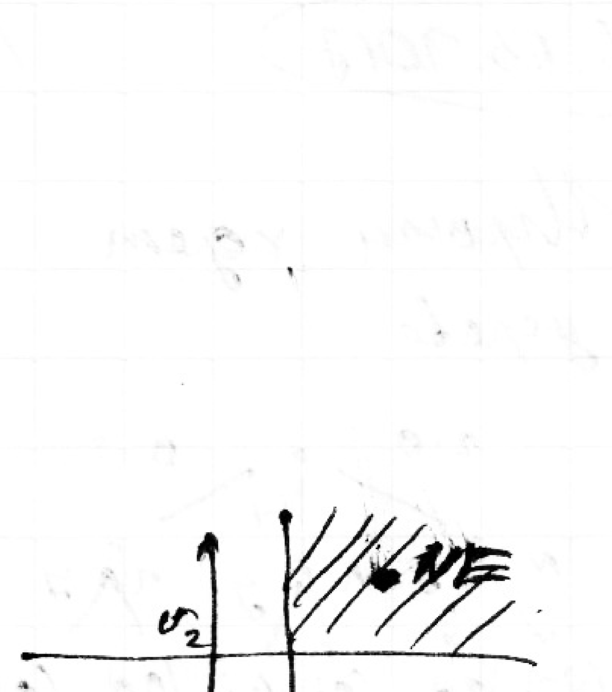
$v\in\mathbb{R}^n$ $v_i = \min\limits_{s\in\prod_{j\neq i} X_j} \max\limits_{x\in X_i} K_i(s\cup x)$

$r$ Enforceable $\Longleftrightarrow r_i \geq v_i$

$r$ feasible $\Longleftrightarrow r_i = \sum\limits_{a\in\prod X_i} \alpha_a K_i(a)$, $\alpha_a\in\mathbb{Q}^+$, $\sum \alpha_a = 1$

Theorem Folk (фольклор)

1) $\exists$ $r$ — выигрыш в NE (average reward) $\Rightarrow$ $r$ — enforceable
2) $r$ — feasible + enf $\Rightarrow$ $\exists$ NE$^{(ar)}$



$\triangle$

1. $\exists$ $r$-выигрыш в $NE^{cn}$, тогда покажем enforceable очевидно, если его получаем $r < \sigma$, то можно отклониться сразу и будет как мин. $\sigma$ $\Rightarrow$ это не было $NE$

2. Если можем набить дробями, то приведем к общему знамен. $d_a = \frac{d'_a}{d_q}$, будем ходить с такими вер-ми. enforceable нужно для наказания. — если кто-то отклоняется, все должны его наказать (до $\sigma$) (как в дилем. равнов.)

$\nabla$

В семейном споре догов. ходить через раз
$\begin{pmatrix} 1,3 & 0,0 \\ 0,0 & 3,1 \end{pmatrix}$
Наказание для отклонения — ходить куда нравится

Рассмотрим discounted reward и дил. закл с такой же страт:

$\forall\beta$

$NE^{pR} = 5 + \beta 5 + \beta^2 5 + \dots = \Sigma = \frac{5}{1-\beta}$

1 шаг 2й отклонился.

$I: 5 + 0\cdot\beta + 1\cdot\beta^2 + \dots = 5 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$

$II: 5 + 10\cdot\beta + \dots \quad = 5 + 10\beta + \frac{\beta^2}{1-\beta}$

Хотим $\frac{5}{1-\beta} < 5 + 10\beta + \frac{\beta^2}{1-\beta}$
$\Rightarrow \beta < \frac{5}{9}$

## Распределение награды

$N$ - множество игроков

$\sigma: 2^N \to \mathbb{R}$ - описыв. выигрыш

Как делить?

$\underline{Ex1}$ $\sigma(S) = |S|$

$\underline{Ex2}$ $\sigma(N) = 1$, $\sigma(S \subset N) = 0$

Вектор Шепли $\Phi: \sigma \to \mathbb{R}^{|N|}$

Свойства:
1. Линейность $\quad \Phi(\sigma + u) = \Phi(\sigma) + \Phi(u)$
$\quad \Phi(\alpha\sigma) = \alpha\Phi(\sigma)$
2. Симметричность — не зависит от номера
3. Болвану — 0
$\quad$ Ј $\exists i: \forall i \in S \subset N \setminus \{i\} \quad \sigma(S \cup \{i\}) = \sigma(S)$
$\quad \Rightarrow \Phi_i(\sigma) = 0.$
4. $\sum_i \Phi_i(\sigma) = \sigma(N)$ (эффективность)

Тогда: $\Phi_i(\sigma) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(\sigma(S \cup \{i\}) - \sigma(S))$

$|S| \leftarrow \quad \rightarrow |N|-|S|-1$

$S$ $\quad$ o

## Голосование

$O$ - мн-во альтернатив

$N$ - мн-во игроков

$i: \quad o_{i_1} \succ o_{i_2} \succ \dots \succ o_{i_n}$

Хотим построить
- $\succ_w: o_1 \succ_w \dots \succ_w o_n$
- побуждение

Пример:

499: $A \succ B \succ C$

3: $B \succ C \succ A$

498: $C \succ B \succ A$

Большинство: $A$

Condorcet rule: $B$ ($501$ ч. считают что $B \succ A$)

Устранение посл. выигрыш: $B \Rightarrow C$

**Th** Arrow (Эрроу)

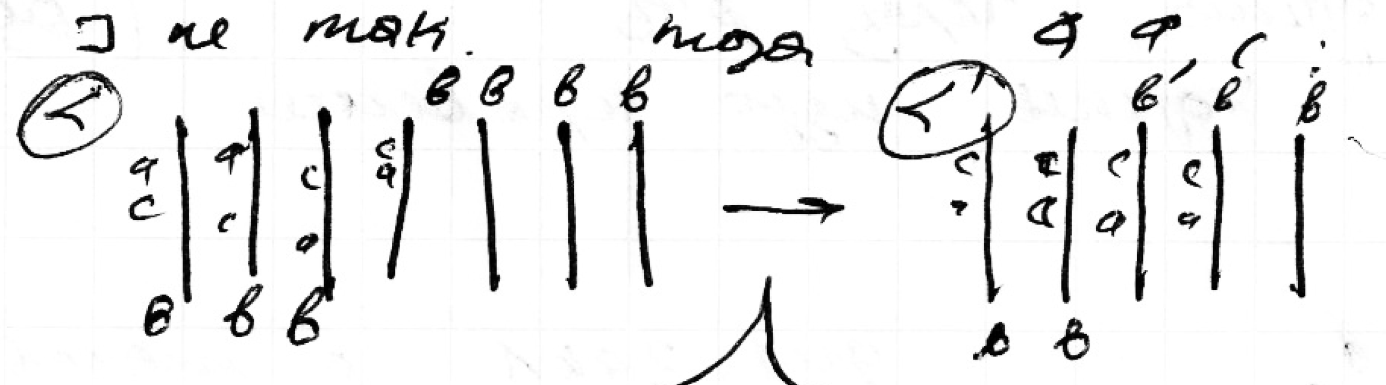
0. $|O| > 2$ (больше 2 альт.)
1. Эффективность по Парето: $\forall i \; o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_\omega o_2$
2. Независимость от посторонних альтернатив:
   $\forall \succ, \succ' : \forall i \; a \succ_i b \Longleftrightarrow a \succ'_i b$
   тогда $a \succ_\omega b \Longleftrightarrow a \succ'_\omega b$

$(1, 2) \Rightarrow \exists i : \succ_i = \succ_\omega$ (диктатор)
$\forall a\, b \in O,\; a \succ_i b \Longleftrightarrow a \succ_\omega b$.

△

1. $\forall\, b \in O$. $b$ — либо первый, либо последний. тогда $b \succ_\omega$ $b$ тоже либо 1 либо посл.

△ $\exists$ не так. тогда $\exists\, a, c$: $a \succ_\omega b \succ_\omega c$

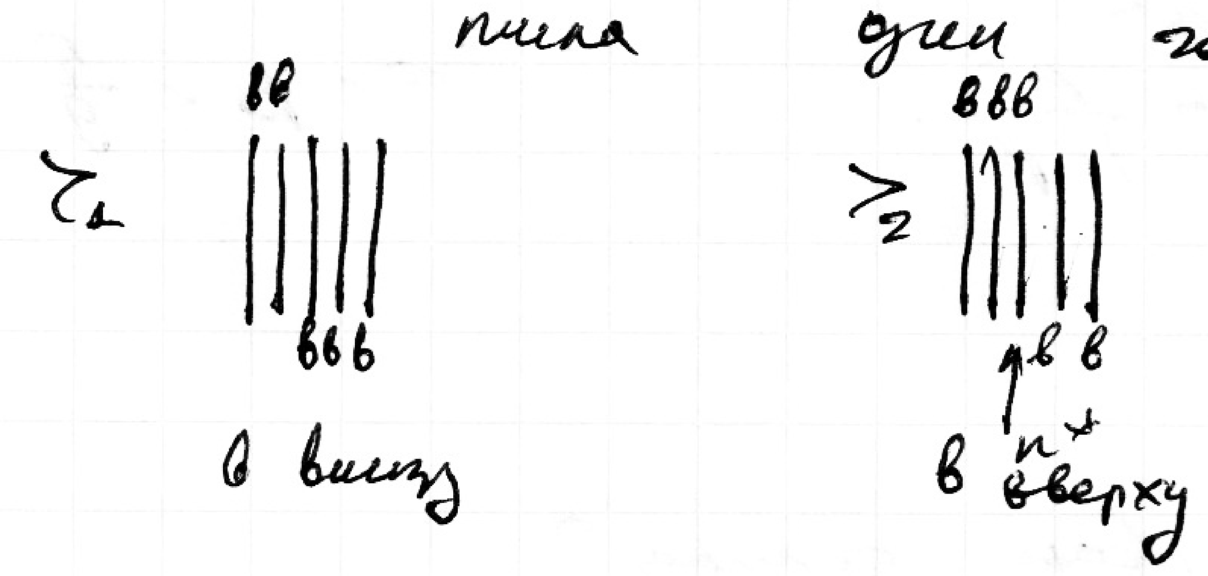


переставим $c \succ'_i a$

По парето (1) $c \succ_\omega a$.
Но $a \succ'_\omega b \succ'_\omega c$ по (2)
но $a \prec'_\omega c$...

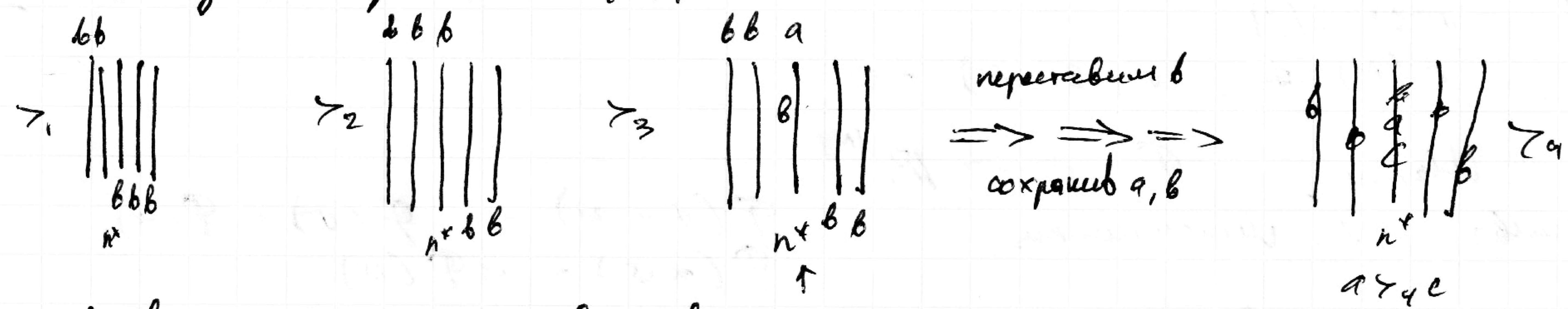
▽

2. $\exists\, n^*$ — центральный элемент для $b$.
пока один голос меняет $b$ наверх.




Просто перемещ. по очереди 'b' вверх, в какой-то моме...

3. $n^*$ — диктатор $\forall\, a\, c \neq b$.




$a \succ_1 b$

переставим $b$ $n^*$ $a, b$
но ~~все~~ ~~выше~~ $b$ ~~вверху~~.
внизу как в $\succ_1$
$a \succ_1 b$

Отн. $b$ и $c$ в $\succ_2$ и $\succ_3$ один. $b \succ^2_\omega c$, тогда $b \succ^3_\omega c$ по (2)
Отсюда $a \succ^3_\omega c$. Но по посл. $\succ_4$ $a \succ^4_\omega c$

4. $n^*$ — диктатор для $b$. Просто, но я не понял.

▽

Волков М. M3438 # 4, # 6

(4) Раньше $\Gamma = (X, Y, K \sim A)$ $X \cong \{0 .. n\}$ $Y \cong \{0 .. m\}$

Теперь $\Gamma_A = (X, Y :: (\xi_1 \dots \xi_{len(x)}), A)$

where $\sum \xi_i = 1$. Ну распределение, словом.

Переопределим $K(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \xi^T A \eta$

Чистая стратегия: $[\xi_i = 1, \ \xi_{j \neq i} = 0]$

Равнов. в смеш: $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$

Теорема о чистых стратегиях:

$(X^* Y^*) \in Z(\Gamma_A) \iff \forall i j \ \ K(i, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, j)$

$\Delta$

($\Rightarrow$) $\uparrow$: $\exists K(i, y^*) > K(x^*, y^*) \Rightarrow$ ну это не равнов.

($\Leftarrow$) $\forall x$ $K(x, y^*) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j a_{ij} = \sum_i \xi_i \underbrace{\sum_j \eta_j a_{ij}}_{\text{это } K(i, y^*)} \le$

$\le \underbrace{\sum_i \xi_i}_{1} \underbrace{K(x^*, y^*)}_{\sum_j \sum_k} = K(x^* y^*) \cdot 1$

Аналог. в др. сторону.

$\nabla$

за $O(mn)$ можно проверить. ~~Ч~~ Для чистых стр. K счит. за n или m, для полных за $O(nm)$

Пример $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $[\frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4}]$

(6) Теперь у каждого своя ф-я выигрыша.

$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i=1}^{N}, \{H_i\})$, $H_i : \prod X_i \to \mathbb{R}$

$\forall i \|X_i\| < \infty \Rightarrow$ конечная некоопер. игра

$\|N\| = 2 \Rightarrow$ биматричная $(A = H_1, B = H_2)$

Классические биматр. игры: $\begin{pmatrix} 4,1 & 0 \\ 6 & 1,4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5,5 & 0,10 \\ 10,0 & (1,1) \end{pmatrix}$

- Оптим. по Нэшу: $x^*$ опт., если $\forall i, \overline{x_i}$ $H_i(x^*) \ge H_i(x^* \| \overline{Y_i})$
- Строгое равновесие: $\forall S \subset N, X_s \in \prod_{i \in S} Y_i, \sum_{i \in S} H_i(x^*) \ge \sum H_i(x^* \| H_s)$

Очевидно неопт по Нэшу $\Rightarrow$ неопт. во см. стр. равновесия.

- $X_p$ - мн-во стр. опт. по Парето. $\overline{x} \in X_p$ если $\nexists x \in \prod X_i$ $\forall i \in N$ $H_i(x) \ge H_i(\overline{x})$ & $\exists j \in N$ $H_j(x) > H_j(\overline{x})$

Лемма: стр. равнов $\Rightarrow$ опт. по Парето

$\Delta$ $\tilde{x}$ - не опт. по Парето, $x'$ его доминирует

Ну тогда отклонимся все сразу туда.

$\nabla$

(Лемма о счастье) $\theta = \frac{1}{v}$, $x_i' = \frac{x_i}{v}$

$$\forall i \begin{cases} \sum a_{ij} \cdot x_i \geq v \\ x_i \geq 0 \\ \sum x_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_{ij} \cdot x_i' \geq 1 \\ \sum x_i' = \theta \to \min \\ x_i' \geq 0 \quad \theta \to \min \end{cases} \quad (\Delta)$$

Интуитивно ↗

Вот задача ЛП, решили, свели к двойств.

$$\begin{cases} y_j' \to \max \\ \sum a_{ij} y_j' \leq 1 \\ y_j \geq 0 \end{cases} \qquad y_j = \frac{y_j'}{\theta} \Rightarrow \sum y_j = 1$$

$$\sum a_{ij} y_j \leq \frac{1}{\theta} = v$$

Решение есть $\Rightarrow$ оно одинаковое и оптим.

По доп. нежесткости

$$v = \sum a_{ij} \cdot y_j \quad K(x^*, y) = \sum a_{ij} \cdot x_i^* y_j =$$

$$= \frac{1}{\theta} \sum_j^m \left( \sum_i^n a_{ij} \cdot x_i^* \right) y_j \overset{(\Delta)}{\geq} \frac{1}{\theta} \underbrace{\sum y_j}_{1} = v$$

Аналогично для двойств.

$$K(x, y^*) \leq v$$

**Теорема** $(x_1, x_2)$ – ~~неоран~~ равновесие (по Нэшу)

$\forall i \quad H_1(x_1, x_2) \geq H_1(i, x_2)$ $\quad \Delta$ Такое же как
$\forall j \quad H_2(x_1, x_2) \geq H_2(x_1, j)$ $\quad$ раньше $\nabla$

Спектр смеш. страт. – то, что входит с ненулев. вер-ю.

**Теорема** $\Gamma(A,B)$ – биматричная, $A, B$ – невырожд.

$\exists$ вполне смеш. (спектр полон) ситуация равновесия $\Rightarrow$ она единственна,

$x = v_2 u^T B^{-1}$ } распр. вер-тей; и $\quad$ опр. $x, y \geq 0 \Rightarrow$ сит. равн. вполне смеш.
$y = v_1 A^{-1} u$
$v_1 = 1/(u A^{-1} u) \in \mathbb{R}$ $\quad$ $u$ – един. вектор
$v_2 = 1/(u B^{-1} u) \in \mathbb{R}$

$\Delta$

$\Rightarrow$ $\exists (x, y)$ – вп. смеш. сит. равн.

$\forall i \quad a_i y = v_1 = x^T A y$
$\forall j \quad x^T b_j = v_2 = x^T B y$

$\Rightarrow \quad Ay = v_1 u \quad \Rightarrow \quad y = A^{-1} v_1 u = v_1 A^{-1} u$
$\quad\; x^T B = v_2 u^T \qquad x^T = v_2 u^T B^{-1}$

$u^T y = 1 = v_1 u^T A^{-1} u \Rightarrow v_1 = 1/u^T A^{-1} u$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad v_2 = 1/u^T B^{-1} u$

$\Leftarrow$

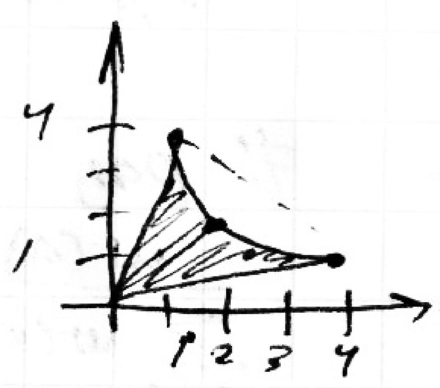
получили

$x = \dfrac{(B^T)^{-1} u}{u^T B^{-1} u}$ $\quad$ 1. Сумма $x = 1$.

$y = \dfrac{A^{-1} u}{u^T A^{-1} u}$ $\quad$ 2. аналогично развернули $\Rightarrow$ назад,

$\nabla$

**Совместные смешанные стратегии**



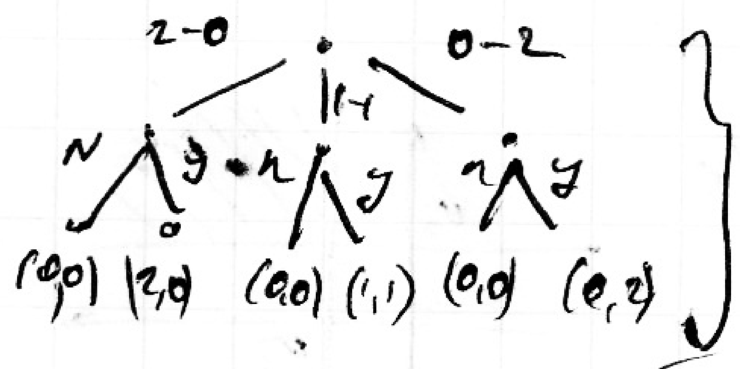
$H_i f(\mu) = \sum_{j,k} \mu_{jk} H_i(j,k)$ $\quad$ Например для семейного спора $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**Опр** $\mu^*$ – сит. равновесие, если

$\forall i, i' \quad \sum_j a_{ij} \mu^*(j|i) \geq \sum_j a_{i'j} \mu^*(j|i')$ $\quad \Delta$ Жонглирование и рукомахание
$\forall j, j' \quad \sum_i a_{ij} \mu^*(i|j) \geq \sum_i a_{ij'} \mu^*(i|j')$ $\quad \nabla$

(16.03.2017) Последняя лекция. Extensive form.

Игроки ходят по очереди. Ход игры представляется случаем в дереве



} игра в деление яблок

Расшир. форма игры – $\langle N, A, H, Z, \mathcal{X}, \rho, \delta, u \rangle$ + дерево

игроки, действ., верш., листья

$\mathcal{X}: H \to 2^A$ $\quad$ $\rho: H \to N$ кто ходит $\quad$ $\delta: H \times A \to H \cup Z$
$u: Z \to \mathbb{R}^{|N|}$