5.09.2014 # Дифференциальные уравнения

Опр Дифурами наз. ур-е, связывающее независимую переменную, зависимую переменную и ее произв.

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Опр Порядок дифура - наивысш. порядок производной

Опр $y = \varphi(x)$ определенная и непр. дифференцируемая на $\langle a, b\rangle$ и обращающая (1) в тождество, справедливое для $\forall x \in \langle a, b\rangle$ наз. решением (1) в $\langle a, b\rangle$

Опр Кривая, явл. графиком некоторого решения дифура, наз. интегр. кривой

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

Инт. кривые обл. св-вом: направ. кас. в любой ее точке совп. с направ. поля, опр. ур-ем в этой точке

Опр Кривая, в кажд. точке которой, определяемое дифуром, одно и то же, наз. изоклиной

$$\boxed{f(x, y) = k} = \operatorname{tg}\alpha = const$$

Задача Коши (начальная задача)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f(x, y) \in C(D), \text{ где } D = \begin{cases} |x - x_0| \le a \\ |y - y_0| \le b \end{cases}$$

По теореме Вейерштрасса $f(x, y)$ - ограничена

Условие Липшица: $|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})| \le \alpha |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \in C(D)$$

Теорема $\exists f(x, y)$ непрерывна в $D$ и удовлетв. Липшицу. Тогда задача Коши имеет единств. решение, которое непрерывно для значений $|x - x_0| \le h$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$. $|f(x, y)| \le M$
Решение не выходит из области
$D'$: $\begin{cases} |x - x_0| \le h \\ |y - y_0| \le b \end{cases}$

Задача Коши эк. решению дифура.

$\Delta$ 1) $\exists$? $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$ ?

т.к. $y = y(x)$ - реш. з.К $\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$,

$y(x)\Big|_{x_0}^{x} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx \Rightarrow y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$

Будем строить решение методом последоват. приближений (Пикар)

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx \qquad (5)$$

Пусть $y_0 = y_0 = const$, тогда Пусть $f(x, y_0) \equiv 0 \Rightarrow y(x) = y_0$ - решение Зад. Коши. $\Rightarrow \exists$ док-но, но Пусть $f(x, y_0) \neq 0$

Покажем, что $y_n(x) \in C(|x - x_0| \leq h)$, не выходят за пределы области ($|y_n(x) - y_0| \leq b$), значит $y_n \rightrightarrows y(x)$, $y(x) \in C(|x - x_0| \leq h)$, $|y(x) - y_0| \leq b$.

Пусть $n = 1 \Rightarrow y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$ $\leq M$

$|y_1 - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\,dx\right| \leq$

$\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq M\frac{b}{M} = b$

$\{y_n\}$, $y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1})$ $\quad S_n = y_n$

$|y_1 - y_0| \leq M|x - x_0|$ $\qquad |y_2 - y_1| \leq \left|\int\limits_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)|\,dx\right| \leq$

$\leq \alpha|y_1 - y_0| \leq h\left|\int\limits_{x_0}^{x} |y_1 - y_0|\,dx\right| \leq$

$\leq \alpha M\frac{|x - x_0|^2}{2}$, $\quad |y_3 - y_2| \leq Mh^2\frac{|x - x_0|^3}{3!}$ ...

$\dots |y_n - y_{n-1}| \leq Mh^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq \frac{M}{\alpha} \cdot \frac{(\alpha|x - x_0|)^n}{n!}$

$y_0 + Mh + \frac{M}{\alpha}\frac{(\alpha h)^2}{2!} + \frac{M}{\alpha}\frac{(\alpha h)^3}{3!} + \dots + \frac{M}{\alpha}\frac{(\alpha h)^n}{n!} + \dots =$

$= y_0 + \frac{M}{\alpha}\left(\alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2} + \frac{(\alpha h)^3}{3!} \dots\right) = y_0 + \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha h} - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y_n\} \to y(x)$

$|y(x) - y_0| \leq b$? $\quad |y_n(x) - y_0| \leq b$

$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$

$y(x) = y_0 + \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$

т.к. $\{y_n\}$ - равн. сход. $\overset{def}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ |\ \forall n > N \quad \forall x$

$|x - x_0| \leq h \Rightarrow |y_n(x) - y(x)| < \varepsilon$

$\left|\int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))\,dx\right| \leq \alpha \left|\int\limits_{x_0}^{x} |y_n(x) - y(x)|\right| \leq$

$\leq h\varepsilon h \to 0 \overset{def}{\Rightarrow} \lim \int = \dots$

2) $!$-ть $\exists\, y^*(x)$ - другое решение задачи Коши

$y^*(x) \neq y(x)$

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n(x)) - f(x, y^*(x))|\, dx\right| \leq$$

$$\leq \alpha \left|\int_{x_0}^{x} |y_n(x) - y^*(x)|\, dx\right|$$

$$|y_0 - y^*(x)| \leq M |x - x_0|$$

$$|y_1 - y^*(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_0) - f(x, y^*)|\, dx\right| \leq$$

$$\leq \alpha M \frac{|x - x_0|^2}{2} \leq \alpha \frac{Mh^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$|y_n(x) - y^*(x)| \leq \alpha^n M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{\alpha} \frac{(\alpha h)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$y_n(x) \rightrightarrows y^*(x) \Rightarrow y^*(x) = y(x)$$

$\nabla$

12.09.2014

Т. Пикара не только обеспечивает $\exists$ и $!$ непр. диф. решение задачи Коши, но и дает гар. оценку интервала сущ. решения

Общим реш. дифур I $\mathcal{P}$ фоо $y = \varphi(x, C)$ у удовл. урави. при любом $C$ & $\forall$ нач. условия $\exists\, C_0$: $y = \varphi(x, C_0)$ есть решение задачи нач.

Частным реш. дифур $\mathcal{P}$ решение, получ. из общего при какой-либо опр. знач. произв. пост. $C$.

Соотношение $\Phi(x, y; C) = 0$ неявно определяющ. общее решение наз. общим интегралом

Соотнош. получаемое из $\Phi$ при конкр. $C$ $\mathcal{P}$ частным интегралом дифура

III Однородные ур-е I пор.

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$$ , где $M$ и $N$ - одн. ф-ии порядка $k$ ($\exists k \geq 0\ \forall \lambda > 0 \Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y)$)

$$\boxed{\frac{y}{x} = t}\ ! \qquad y = xt \qquad dy = x\,dt + t\,dx$$

$$M(x, xt)\,dx + N(x, xt)\,[x\,dt + t\,dx] = 0$$

Пример: $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$ $\qquad x(1+t)\,dx + x(1-t)[\ldots] = 0$

$(x + tx)\,dx + (x - tx)[x\,dt + t\,dx] = 0$ $\qquad (1 + t + t - t^2)\,dx + x(1-t)\,dt = 0$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{1-t}{1+2t-t^2}\,dt = C$$

IV Ур-е привод. к одн.

$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ 1) $\exists \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ !

$(\alpha, \beta): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

$y' = \frac{dy}{dx}$

Пр. $y' = f\left(\frac{x+y+1}{x-y+2}\right)$. $\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ x-y+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $x = u - \frac{3}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{u - \frac{3}{2} + v + \frac{1}{2} + 1}{u - \frac{3}{2} - v - \frac{1}{2} + 2}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{u+v}{u-v}$

2) $\exists \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $a_1x + b_1y = t \Rightarrow$ II

V Линейн. ур I пор. $\boxed{y' = p(x)y + q(x)}$

1) Бернулли

$\exists y(x) = u(x)v(x)$

$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - p(x)u(x)v(x) - q(x) = 0$

$u(x)\underbrace{[v'(x) - p(x)v(x)]}_{=0} + u'(x)v(x) - q(x) = 0$

$\exists v'(x) - p(x)v(x) = 0 \Rightarrow$ $\frac{dv(x)}{v(x)} - p(x)dx = 0$

$\ln|v(x)| - \int p(x)dx = 0$ $v(x) = e^{\int p(x)dx}$

$\cancel{u(x)[v'(x) - p(x)v(x)]}$ $u'(x)e^{\int p(x)dx} = q(x)$

$u'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}$

$u(x) = \int [q(x)e^{-\int p(x)dx} + C]$

$y = e^{\int p(x)dx}[\ldots]$

2) Метод Лагранжа

$y' = p(x)y \Rightarrow y_{o.o}(x) = Ce^{\int p(x)dx}$

Если $q(x) \neq 0$, то лин. ур-е неодн., иначе одн.

соотв. неодн.

$y_{o.н.}(x) = C(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{\int p(x)dx} =$

$= p(x)C(x)e^{\int \ldots} + q(x)$

$C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}$ $C(x) = \int q(x)e \Rightarrow y(x) = e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx} + C\right]$

VI ур. Бернулли

$y' = p(x)y + q(x)y^{m}$ $m \neq 0$, $m \neq 1$ лин. дифф.

$y^{-m} y' = p(x) y^{1-m} + q(x)$

$\frac{1}{1-m}(y^{1-m})' = p(x)y^{1-m} + q(x)$ $y^{1-m} = z$

VII ур. Риккати.

$y' = p(x)y + q(x) + r(x)y^2$

$\exists \tilde{y}(x)$ - частн. реш. $\Rightarrow y(x) = z(x) + \tilde{y}(x)$

$z'(x) + \tilde{y}'(x) = p(x)z(x) + p(x)\tilde{y}(x) + q(x) + r(x)z^2(x) +$
$+ r(x)\tilde{y}^2(x) + 2r(x)z\tilde{y}$

$z'(x) = p(x)z(x) + r(x)z^2(x) + 2r(x)\tilde{y}(x)z(x)$ - Бернулли

VIII Ур-е в полных дифферен.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (*)

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)$

$du = 0 \Rightarrow z = C$

T $\exists M(x,y), N(x,y) \in C(D)$, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \in C(D)$ $\Rightarrow$ $Mdx + Ndy$ для того чтобы выраж. уравнен.

$Mdx + Ndy = du \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$

19.09.2014

(T) $\exists M(x,y), N(x,y) \in C(D)$ $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$

$\Rightarrow$ для того, чтобы (*) было ур-ем в полных дифф, необходимо $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

D $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$\Rightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Необход.

∇

Δ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow Mdx + Ndy = du$? или $M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ (1) $N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ (2)?

из (1) $\Rightarrow u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$?

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx\right) + \varphi'(y) = N(x,y)$

$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$

$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1$

$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1$

$u(x,y) = C \Rightarrow \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy = C$

$\nabla$

$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \ldots N \ldots)$

$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$

$\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

(T) predicate $\left\{ \begin{array}{l} \exists\, \omega(x,y) \in C^1(D) \\ \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}N - \frac{\partial \omega}{\partial y}M} = \psi(\omega) \in C(D) \end{array} \right. \Rightarrow \mu(x,y) = e^{\int \psi(\omega)\,d\omega}$

$\Delta$

$\mu(x,y) = h(\omega)$

$\frac{\partial h}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial h}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}N = h(\omega)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

$\frac{dh}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}M - \frac{\partial \omega}{\partial x}N\right) = h(\omega)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

$\frac{dh}{d\omega} = h(\omega)\,\psi(\omega)$

$\Rightarrow \mu(x,y) = \mu(x)$

$\frac{\partial \ln|\mu(x)|}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

Тогда $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$

$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$

Особые точки и решения обыкновенного диф. ур-я I пор.

Если об. диф. ур (ОДУ) I пор. удовл. усл. теоремы Пикара, тогда через каждую точку проходит единств. инт. кривая. Такую точку зовут обыкновенной. Точка $(x_0, y_0)$, не явл. обыкновенной, называется особой точкой.

З. Через особую точку не проходит ни одна кривая или по крайней мере две.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ $\quad y = Cx$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\quad x^2+y^2 = C > 0$

Особым решением ОДУ I пор. наз. реш., кот. во всех своих точках не удовл. св-ву единств. То есть в окрестности любой точки реш. $\exists$ по крайней мере 2 интегр. кривые

IX Ур-е не разрешенное отн. пр-ной

$x = \varphi(y')$ $\quad \boxed{\exists y' = t}$

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = t \end{cases}$ $\quad dy = t\varphi'(t)\,dt$ $\quad y = \int t\,\varphi'(t)\,dt$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\varphi'(t)\,dt \end{cases}$

X $y = \varphi(y')$ $\quad \exists y' = t$

$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = t \end{cases}$ $\quad y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{t}$

$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

XI Лагранж $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ : $\quad y' = t$ $\quad \begin{cases} y = \varphi(t)x + \psi(t) \\ y' = t \end{cases}$

$dy = x\varphi'(t)dt + \varphi(t)dx + \psi'(t)dt$

$dx\,(\varphi(t) - t) + [\varphi'(t)x + \psi'(t)]$

линейно отн. $x$

## XII Клеро

$y = y'x + \psi(y')$

$y' = t$

$\begin{cases} y = tx + \psi(t) \\ y' = t \end{cases} \Rightarrow [x + \psi'(t)]\,dt = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt = 0 \\ x = -\psi'(t) \end{array}\right.$

$y = -t\psi'(t) + \psi(t)$ — особое

$x = -\psi'(t)$

$y = cx + \psi(c)$ — общее

26.09.2014

$F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$

$y = \varphi(x) \qquad y = y_0 \quad y' = y_0' \quad y'' = y_0'' \dots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$

$y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$

Теорема Пикара

$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n)}) \qquad (*)$

Если правая часть непрерывна в окр. $\underbrace{(x_0, y_0, y_0', y_0'' \dots)}_{D}$ и $\frac{df}{dy'}$ тоже непрерывны в окр этой же точки, тогда решение задачи Коши сущ. и единственно

Пример $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

$y'' = -\frac{(y')^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ Какие $x_0, y_0, y_0'$ брать? Да все равно, любые

$\forall\, U_{(x_0, y_0 \dots y_0^{(n-1)})}$ $\quad y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$ (5)

общим решением ур-я $(*)$ опр в некоторой области, непр. дифф в этой области, такая что:

(1) $(**)\begin{cases} y = \varphi(x, C_1 \dots C_n) \\ y' = \varphi'(x, \dots C_n) \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, \dots C_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) \\ \vdots \\ C_n = \psi_n(\dots) \end{cases}$

(2) решение (3) ~~$\frac{}{}$~~ обр решения (*) из " (**)

Решение ~~$\Phi(x, C_1 \dots C_n) = 0$~~ $\sim$ общим интегралом
$$\Phi(x, y, C_1 \dots C_n) = 0$$

I Уравнения, допускающие понижение порядка

(1) $y^{(n)} = f(x)$ – имеем

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$
$$y^{(n-2)} = \iint f(x)\,dx\,dx + C_1 x + C_2$$
$$\vdots$$
$$y = \underbrace{\iint \cdots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \dots dx}_{n} + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n$$

(2) Ур-е, не содержащее искомой ф-ии и посл. I производных

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \dots y^{(n)}) = 0 \qquad k \geq 1 \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{y^{(k)}(x) = z(x)} \quad y^{(k+1)} = z'(x), \dots$$

(3) Ур-е не содерж. независ. переменной

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$\boxed{y'(x) = z(y)} \quad y'' = \frac{d^2 y}{(dx)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,z(y)}{dx} =$$
$$= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \boxed{z \frac{dz}{dy} = y''}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z \frac{dz}{dy}\right) = z''_y z^2 + z'_y z$$

Получим $\quad F(y, z, z'z, \dots \omega(z, z', \dots z^{n-1})) = 0$

II Линейные уравнения $n$-ого порядка

Это ур-е вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = q(x)$$

Если $q = 0$, ур-е однородно, иначе неоднородно

$L(y)$ – линейная – лин. опер $\left( \begin{array}{l} L(\alpha u) = \alpha L(u) \\ L(a+b) = L(a) + L(b) \end{array} \right)$

$q(x) \equiv 0 \Rightarrow L(y) = 0 \ (2)$

① если $y_1$ – реш (2) $\Rightarrow C y_1$ – реш (2)

② если $y_1, y_2$ – реш. ур-я 2, их сумма тоже реш.

А как строить общее решение?

Теорема $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$

Опр ЛНЗ ф-ций: $y_1, y_2 \dots y_n$ – ЛНЗ, если их ЛК равна нулю, только если она тривиальна

$\sum C_i y_i = 0$, если $C_i = 0$

Иначе они ЛЗ

Опр Совокупность $n$ решений ⓔ лин. незав. в $[a,b]$

Теор если $y_1 \dots y_n$ – ЛЗ на $(a,b) \Rightarrow$ одно из них ЛК ост.

Опр

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ : Вронский Исаи

Теорема (признак ЛНЗ ф-й)

Для того, чтобы решения $\{y_1 \dots y_n\}$ были ЛНЗ в $(a,b)$ НиД чтобы ~~det~~ $W \neq 0$ во всех точках $(a, b)$

$\Delta$ Необ (ЛНЗ $\rightarrow$ $W \neq 0$)

$\exists y_1 \dots y_n$ – ЛНЗ и $W = 0$ в $x_0 \in (a,b)$

Составим систему ур-й

$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0$

$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0$

$\vdots$

$C_1 y_1^{(n)}(x_0) + C_2 y_2^{(n)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0$

Решения $W = 0 \Rightarrow \exists (C_1^0, C_2^0, \dots C_n^0)$, что хотя бы одно $C_i \neq 0$

и $C_1^{(0)} y_1(x_0) + C_2^{(0)} y_2(x_0) + \ldots + \ldots = 0$

нетр. вект => нетр. несб. $\forall x \in (a, b)$
В силу единственности реш. задачи Коши
тогда $y_1 \ldots y_n$ ЛЗ на $(a, b)$ $\rightarrow \leftarrow$

$\nabla$

$\Delta$ дост. $W \neq 0 \Rightarrow \forall x \in (a, b)$ $\sum C_k y_k(x)$ – ЛНЗ

$W = 0$ хотя если $\sum C_k y_k$ – ЛЗ $\quad y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}(x)$

$W(x) = \begin{vmatrix} \ldots & (x) \\ \ldots & (x)' \\ & \vdots \\ & (x)^{n-1} \end{vmatrix}$ – конс.

$\nabla$

Формула Остроградского – Лиувилля

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p_1(x) dx}$$

Построение общего решения лин. однор. ур-е по ФСР

(Т) $\exists (y_1 \ldots y_n)$ – ФСР $\Rightarrow y_{oo} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ отн. одн

$a < x < b$ $\quad |y| < \infty$, $|y'| < \infty$ $\ldots$ $|y^{n-1}| < \infty$

3.10.14

$\Delta$
$$\left.\begin{aligned} y &= \sum C_k y_k \\ y' &= \sum C_k y_k' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \sum C_k y_k^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \text{разреш. } C_k$$

$\Delta = \det W(x) \neq 0$

$y = \sum C_k y_k$ – реш. $\forall C_k$ $\mathcal{L}(y)$

$\nabla$

Т. $y_{он} = y_{оо} + y_{ч.н.}$

$\Delta$ $\exists y_{ч.н} = \tilde{y}$: $\mathcal{L}(\tilde{y}) = f(x)$

$\forall y = \tilde{y} + z \mid \Rightarrow \mathcal{L}(y) = f(x) \Rightarrow \mathcal{L}(\tilde{y} + z) = f(x) \Rightarrow$

...

▷

(Т) Принцип наложения

$\exists\ \mathcal{L}(y) = f_1(x) + f_2(x)$

$\mathcal{L}(y_1) = f_1(x),\ \mathcal{L}(y_2) = f_2'(x) \Rightarrow$

$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2'(x)$

(Т) $\nexists\ y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$y_{о.н} = y_{о.о} + y$

$y_{о.о} = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_{ч.н} = C_1(x)\, y_1 + C_2(x) y_2$

$y'_{ч.н} = \underbrace{C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2}_{=0} + C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2'$

$y''_{ч.н} = [C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x) y_2' + C_1(x) y_1'' + C_2(x) y_2''] +$
$+ p(x)[C_1(x)\, y_1' + C_2(x) y_2'] + q(x)[C_1(x)\, y_1 + C_2(x) y_2] = f(x)$

Итого все сокр. и $\Rightarrow C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x)$

$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow y_{о.н} = C_1 y_1 + C_2 y_2 +$

$+ \left[\int U_1(x) dx\right] y_1 + \left[\int U_2(x)\ dx\right] y_2;$

▷

$y_{ч.н} = \sum C_k(x)\, y_k$

$\sum_{k=1}^{n} [C_k'(x)\, y_k] = 0$

$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k' = 0 \\ \sum C_k'(x)\, y_k'' = 0 \\ \sum C_k'(x)\, y_k^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$

Линейные однородные ур-я с пост. к-ми второго порядка

$y'' + py' + qy = 0$ (1)

$p, q$ — константы

$\exists$ (Эйлер.) $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$y'' \to \lambda^2$

$y' \to \lambda$

$y \to 1$

Случай 1. Пусть корни $\in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}$ — Ф.С.Р.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} \neq 0$$

$y_{oo} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Случай 2. Пусть $\mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$

$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = x e^{\lambda_1 x}$

Случай 3. Пусть $\mathbb{C}$

$\exists \lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

$\left.\begin{array}{l} \triangle\ \mathrm{Re}\, y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \mathrm{Im}\, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}\right| \Rightarrow$ ЛНЗ

$\mathrm{Re}\, y_2$ и $\mathrm{Im}\, y_2$ — ЛНЗ.

Отсюда в $\mathrm{Re}$ $\boxed{y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x}$ — ФСР

Итоги:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

1. Случай. $\exists\lambda_1\dots\lambda_n$ $\mathbb{R}$, простые

тогда $y_1=e^{\lambda_1x}$ $y_2=e^{\lambda_2x}\dots$ $y_n=e^{\lambda_nx}$

$$y_{oo}=\sum_{k=1}^{n}C_ke^{\lambda_kx}$$

2. Случай $\exists\lambda_k\mid\lambda_k\in\mathbb{R}$, но кратное $m<n$

$$y_1=e^{\lambda_kx}\quad y_2=xe^{\lambda_kx}\quad\dots\quad y_m=x^{m-1}e^{\lambda_kx}$$

$$y_{oo}=e^{\lambda_kx}[C_1+\dots+C_mx^{n-1}]+\sum_{i=n-m}^{n}C_iy_i$$

3. Случай $\exists\lambda_k=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ – простое

$$y_{1,2}=e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x]$$

4. Случай $\exists\lambda_k\in\mathbb{C}$ – кратные

$$y_k=e^{\alpha x}[P_{n-1}(x)\cos\beta x+Q_{n-1}(x)\sin\beta x]$$

Метод Эйлера построения лин. неоднор диф. ур-е с н-ми к оч. в.

$$y''+py'=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$$

$$y_{rn}=x^{r}e^{\alpha,}[Me^{x}\cos\beta x+Ne^{x}\sin\beta]$$

Пример

1) $y''-y=0$ $\qquad\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda_1=1,\ \lambda_2=1$

$$y_1=e^{x},\ y_2=e^{-x}.$$

2) $y''+y'+y=0$ $\qquad\lambda^2+\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt3}{2}.$

$$y_1=e^{-\frac12x}\cos\frac{\sqrt3}{2}x\qquad y_2=e^{-\frac12x}\sin\frac{\sqrt3}{2}x.$$

3) $y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda_{1,2} = -1$

$y_1 = e^{-x}$ $\quad y_2 = xe^{-x}$

4) $y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$

$y_1 = e^{-2x}$

$y_2 = e^{-x}\cos x$

$y_3 = e^{-x}\sin x$

$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}\cos x + C_3 e^{x}\sin x$

По городу шел многоч
Шагал и думал он
О попадание по ...
Ц
И всех о ёбл* конов.

5) $y'' - y' - 2y = e^x(\cos x - 1)$

$y_{ч.н} = x_0 e^x [$

10.10.14. Система дифф. ур.

$F_k(x, y_1, y_2, \dots y_n, y_1', y_2' \dots y_n') = 0 \qquad (1)$

$k = \overline{1..n}$

Его решение – $y_1(x) \dots y_n(x) \in C(a, b)$

Права нахожд. решение и ∀ интегр.
Графики решения ∀ интегр. кривой

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \dots y_n) \quad k = \overline{1, n} \qquad (2)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_k}{\partial x} \end{pmatrix} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (3)$$

Мех. истолкование норм. системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (4)$$

Фазов. пр-во.

$t$ – время, $x$ – коорд.

Может быть $\frac{dx}{dt} = f(x)$ – автоном.

$x = f(t+T)$

Если $f(t, x^0) = 0$, тогда $x^0$ – точка покоя

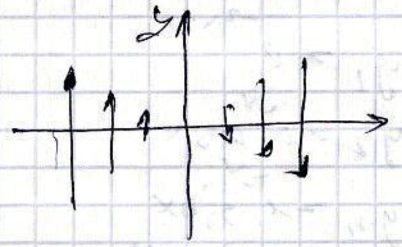
$x = x^0$ – точка покоя / сост. покоя

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

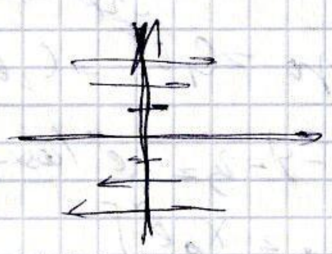
$(0,0)$ – точка покоя

$x = 0, y = 0$ – сост. покоя

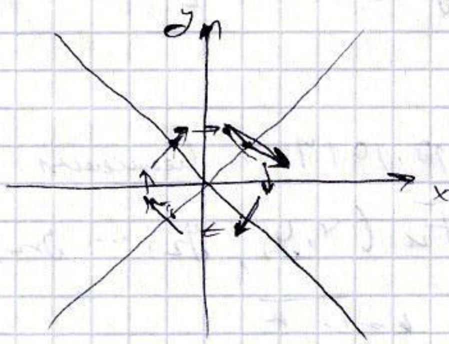
1) $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$



2) $y = 0$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$



3) $y = x$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$



4) Дифф/интегр.

$\frac{dx}{dt} = y$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 - x$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ $\quad x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Аналогично $y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$

Возведем в квадрат, получим $y^2 + x^2 = C_1^2 + C_2^2$

Систему в норм. виде

$\frac{d\bar{y}}{dx} = f(x, \bar{y})$ $\quad y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2 \dots C_n)(x)$ :

общее решение, если $C_i = \psi_i(x, y_1 \dots y_n)$

Частное решение – это и ~~это~~ когда набор конст. конкрет.

Опр ур-е $n$-ного пор-ка и системы

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$\underbrace{\exists\, y = y_1 \dots y^{n-1} = y_n}$$

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = y^{(n)} = f(x, \dots) \end{cases}$$

Всегда можем свести к системе

Пример $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0 \Rightarrow \exists \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -k^2 x \end{cases}$

Линейные системы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = P(x) y + f(x) \\ \frac{dy}{dx} = P(x) y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ p_{21}(x) & \dots & & \\ \vdots & & \ddots & p_{nn}(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ЛНЗ: $y_1 \dots y_n$ - ЛНЗ $\overset{\text{def}}{\iff} \sum \alpha_k y_k = 0 \iff \sum \alpha_k^2 = 0$

$$y^1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Как находить Фрс?

$\Phi(x) = \| y_j^{(k)} \|$ - матрица фунд. реш

$\det \Phi(x) = W(x) \neq 0$

Сл. усл эквивалентны:

1) $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

2) $y_1 \dots y_n$ - ЛНЗ

Формула Остроградского — Лиувилля

$$W(x) = \sum W_{ik}(x) P_{ik}(x)$$

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \cdot \frac{d\varphi_{ij}}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij}\left[\sum_k p_{ik} \varphi_{kj}\right] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik} \sum_{j=1}^{n} W_{ij}\varphi_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(W(x))$$

т.к. $\sum_{j=1}^{n} W_{ij}\varphi_{kj} = \delta_k^i \cdot W(x)$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(W(x))$$

$$W(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \sum p_{ii}\, dx} W(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(p(t))\, dt} W(x_0)$$

$$\Phi(x_0) = E$$

24.10.2014

Построение общего решения из ФСР

$\exists\ y_{13}^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)$ – ф.с.р.

$\frac{dy}{dx} = P(x)y$ $\qquad y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y^{(k)}(x)$

$y_n(x) = \sum_{n=1}^{n} C_n y_n \dots \quad y_1(x) = \sum \dots$

---

$\frac{d\bar{y}}{dx} = A\bar{y}$ $\qquad y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}$

$y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}$

$y_n = \gamma_n e^{\lambda x}$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots a_{1n}\gamma_n = 0 \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ \\ a_{n1}\gamma_1 + \dots\dots\dots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0 \end{cases}$$

$|A - \lambda E| = 0$ $\quad$ 1) $\exists \forall \lambda_k$ $\quad \gamma_1^{(k)} e^{\lambda_k x}, \dots, \gamma_n^{(k)} e^{\lambda_k x}$

$\exists$ все $\lambda_k \in \mathbb{R}$, простые $\Rightarrow$ $\left\{ \gamma_1 e^{\lambda_1 x}, \gamma_2^{(1)} e^{\lambda x} \dots \right.$

$\gamma_n^{(n)} e^{\lambda_n x}$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \gamma_1^{(n)} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \\ \gamma_n^{(1)} e^{\lambda_1 x} & \dots & \gamma_n^{(n)} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

$$\overline{y}(x) = \Phi(x)\,\overline{C}, \quad \text{где} \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \mid \lambda - 1$

④ Пример: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = \{-1, 3\}$

$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \gamma_2^{(2)}$, $\exists\, \gamma_1^{(2)} = 1$

$\gamma^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

⑤ $A$ если $\lambda \in \mathbb{C}$?!, простые

$\lambda_1 = a + ib \quad \lambda_2 = a - ib$

$\Rightarrow y_1 = (\gamma_1^{(1)} + i\gamma_1^{(2)})\, e^{(a+ib)x} \dots y_n = (\gamma_n^{(1)} + i\gamma_n^{(2)})\, e^{\dots}$

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases}$ $\quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -y \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$

$\lambda_{1,2} = (3 \pm 2i) \in \mathbb{C}$

$(1 - 2i)\gamma_1 - \gamma_2 = 0$

$\dots \gamma_1 \quad \gamma_2 = 0 \Rightarrow$

⑥ $A$ если $\lambda \in \mathbb{C}$, кратные:

$\lambda_1$ кр. $\Rightarrow y_1 = P_1(x)\, e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = P_2(x)\, e^{\lambda_2 x}$

$$\begin{cases} y_{oo} = \Phi(x)\, C \\ y_{on} = \Phi(x) \cdot C(x) \end{cases} \qquad \frac{d\Phi}{dx} \cdot C(x) + \Phi \frac{dC(x)}{dx} = P(x)\Phi(x)C(x) + \ldots$$

$$\Phi^{-1}\Phi \frac{dC}{dx} = \Phi^{-1} f(x)$$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t) f(t) + C_0$$

7.11.2011 Опоздал на 15 минут.

$$\dot{x} = Ax$$

$$x = e^{Ax}$$

★ Много линала, Жордан ★

14.11.2011 Краевые задачи

I $\left.\begin{matrix} y(a) = A \\ y(b) = B \end{matrix}\right\}$ З. Дирихле

II $\left.\begin{matrix} y'(a) = A \\ y'(b) = B \end{matrix}\right\}$ З. Неймана

III $\left.\begin{matrix} \alpha y(a) + \beta y'(a) = A \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = B \end{matrix}\right\}$

Пример.

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = C_1 x_1 + C_2 \\ y_2 = C_1 x_2 + C_2 \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = C_1 (x_2 - x_1)$$

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad C_2 = \ldots$$

---

Общий вид: $\begin{cases} y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f_1(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$ (1)

$(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$ (2)

$\mu = e^{\int p_1(x)\,dx}$

$e^{\int p_1(x)dx} y'' + e^{\dots} p_1(x) y' + e^{\dots} p_2(x) y = e^{\dots} f_1(x)$

$(e^{\dots} y')' + e^{\dots} p_2(y) = e^{\dots} f_1 \quad J\, e^{\int \dots} = p(x)$

$J\ z = y + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x - y_0$

$$\begin{cases} z(x_0) = 0 \\ z(x_1) = 0 \end{cases}$$

---

$G(x, S)$

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y(x_1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1. $G$ непр по $x$ $\forall$ фикс $S$
   $x \in [x_0, x_1]$ $\quad S \in (x_0, x_1)$
2. $G : (p(x) G')' + q(x) G = 0 \quad \forall x,\ x \neq S$
3. $G(x_0, S) = 0 \quad G(x, S) = 0$
4. $G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, S) = \frac{1}{p(s)}$

Ф-я $G(x, S)$ — ф-я Грина краевой задачи
Дирихле для (3)

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,S) f(x)\,ds$$

$(p(x) G'_x)' + q(x) G = 0$

$$\frac{d}{ds}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(s)} f(x,y)\,dx\right) = \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} f'_y(x,s)\,dx + \beta'(s) f(\beta(s), s) - \alpha'(s) \cdot f(\alpha(s), s)$$

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,S) f(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} G'_x(x,S) f(s)\,ds + \int_{x}^{x_1} G'_x(x,S) f(s)\,ds$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_x''(x,s) f(s)\,ds + G_x'(x+0,x) f(x) - G_x'(x-0,x) f(x)$$

$$p(x)\int_{x_0}^{x} G_x''(x,s) f(s)\,ds + f(x) + p'(x)\int_{x_0}^{x} G_x'(x,s) f(s)\,ds + q(x)\int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s)\,ds \overset{?}{=} f(x)$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} (pG'' + p'G' + qG) f(s)\,ds}_{=0} + f(x) \overset{?}{=} f(x)$$

Как искать $G$?

$\exists\, z_1(x)$:

$$\begin{cases} (p(x)z')' + q(x)z = 0 \\ z(x_0) = 0 \\ z'(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

Коши

$Cz_1$ - реш.

$z_1(x), z_2(x)$ - ЛНЗ

иначе

$z \in (z_1 \Rightarrow z_2(x_1) \neq 0$

$\Rightarrow z$

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 z_1(x), & x_0 \le x \le s \\ C_2 z_2(x), & s \le x \le x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 z_1(s) - C_2 z_2(s) = 0 \\ C_1 z_1'(s) - C_2 z_2'(s) = \frac{1}{p(s)} \end{cases}$$

$$\cancel{G(x,s) = \begin{cases} \frac{z_2(s) z_1(x)}{p(s) w(s)} \end{cases}} \quad x_0 \le x \le s$$

$$C_1 = \frac{z_2(s)}{p(s)w(s)} \qquad C_2 = \frac{z_1(s)}{p(s)w(s)}$$

Пример:

$$\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \qquad z_1: \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) \neq 0 \end{cases} \qquad z_2: \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$z_1 = \sin x$
$z_2 = \cos x$

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x & 0 \le x \le s \\ -\sin s \cos x, & s \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - y = f(x) \\ y(x) \text{ огр } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y'' - y = 0$
$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$G(x,s) = ?$

$z_1(x) = e^{x}$
$z_2(x) = e^{-x}$

$$G = \begin{cases} \frac{e^{-s} e^{x}}{-2}, & -\infty < x \le s \\ \frac{e^{s} e^{-x}}{-2}, & s \le x < +\infty \end{cases}$$

Д/З

$$\begin{cases} y'' + y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = m(m+1)x^m, & m > 0 \\ y(1) = y'(1) \\ y(x) - \text{огр при } x \to 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = y(l) = 0 \\ l > 0 \end{cases}$$

21.11.2014 Элементы теории устойчивости

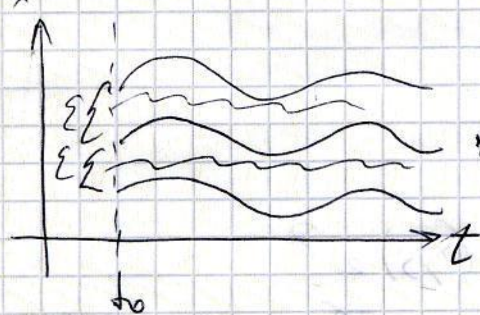
$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (1) — система

$\left(f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_c}\right) \in C(t \geq t_0)$

Опр. решение (1) $x_*(t) = \varphi(t)$ наз. устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x(t)$ — реш (1)

$|x_d(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta\ \forall t > t_0 \Rightarrow$

$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$




Опр решение $x_*(t)=\varphi(t)$ наз. асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво по Ляпунову и при

$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty}|x(t)-\varphi(t)| = 0$

Опр неуст. по Ляпунову $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x(t)$ — реш.

$|x_0(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta\ \exists t\geq t_0 \Rightarrow$

$|x(t)-\varphi(t)| < \varepsilon$

Пример:

$x'_t = kx$ $\qquad x = Ce^{kt}$

$x(t_0)=\varphi(t_0)=0$ $\qquad C_0 = x_0 e^{-kt_0}$

$x(t)=\varphi(t)=0$

$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}$

1) $\exists k < 0$ $\qquad \triangleleft\ |x(t)| = |x_0| e^{k(t-t_0)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

ас. уст. по Ляп.

2) $\exists k \leq 0$ $\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x(t)\ |x_0|<\delta \Rightarrow$

$\forall t\geq t_0\ |x_0 e^{k(t-t_0)}| < \varepsilon$

$|x(t)| \geq \varepsilon \qquad |x_0 e^{k(t-t_0)}| \geq \varepsilon \qquad |x_0| < \delta$

$|x_0| e^{k(t-t_0)} \geq \frac{\varepsilon}{|x_0|} \qquad k(t-t_0) \geq \ln\left(\frac{\varepsilon}{|x_0|}\right)$

$t \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon}{|x_0|}}{k} + t_0 \geq$

$\exists x(t): |x(t_0)| < \delta \Rightarrow |x(t)| > \varepsilon$

$\geq t_0$

Вопрос об устойчивости реш. $x_* = \varphi(t)$ сводится к вопросу об устойчивости нул. решения некоторой друг. системы

$x_*(t) = \varphi(t)$

$\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = f(t, y(t) + \varphi(t))$

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{f(t, y(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))}_{F(t, y)}$$

Система возмущ. ур-ий, $y$ - возмущение

$\frac{dy}{dt} = F(t, y)$ (2)

28.10.2011.

Какое-то кр...:

$\triangleright$ необходимое

$\exists$ сист. ур. $\frac{dx}{dt} = Ax$; но $\exists\ \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$

1) $Re\,\lambda_s = \alpha_s > 0 \Rightarrow x(t) = e^{\alpha_s t}(\alpha \cos\beta_s t + \beta \sin\beta_s t)$

$|x(t)| \underset{t \to \infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$ противоречие с устойчив. системы

2) $Re\,\lambda_s = \alpha_s = 0 \Rightarrow x(t) = \bar{\alpha}\cos\mu t + \bar{\beta}\sin\mu t$

$\lambda_s = i\mu \quad \Rightarrow |x(t)| \not\to 0$

$|\bar{\alpha}| + |\bar{\beta}| \neq 0$

$\Rightarrow$ противор. с усл.

$\triangleleft$

Теорема Ляпунова по устойчивости в первом приближ.

$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad F(0) = 0$

$F(x) \in C^2(\mathfrak{M}_0) \Rightarrow F(x) = Ax + F^*(x)$

$\lim\limits_{|x| \to 0} \frac{|F^*(x)|}{|x|} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = Ax + F^*(x)$

$\frac{dx}{dt} = Ax$ — с. ур $I^{го}$ пр-ия.

Если все корни хар ур-я $|A - \lambda E| = 0$ системы первого приб. имеют отриц. действительные части, то невозмущенное движение асимптот. устойчиво $\forall F^*(x)$
Если среди корней есть хотя бы один с полож. частью, то движение неустойчиво.
Если 0, то недостаточно I приближ.

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

Теорема Рауса - Гурвица

$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \iff$ главные диагон. миноры матрицы Р-Г полож.

$$\text{RSG} \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \cdots 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \; a_{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строки}]{} 0 \cdots a_n \cdots a_1 \; 1 \; 0 \cdots 0$$

Следствие

$a_1 > 0 \quad \Delta_{n-1} > 0 \quad \Delta_{n-3} > 0 \; \Delta_{n-5} > 0$

Функции Ляпунова. Теорема об устойч. и асимпт. уст.

$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad \exists\, V(x)$ скаляр, $x = (x_1, \dots x_n)$

$V(0) = 0 \quad \left(V(x)\ \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \in C^0(\mathcal{V}_{(0)})$

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le H = const > 0 \quad U = B(0, \sqrt{H})$

$$\frac{dV(x)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{d x_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) =$$

полная пр-я в силу системы

$$= \nabla V(x)\, \bar{F}(x)$$

знакоопред. { ф-ция $V(x)$ в $U$ наз знакоопр (опр-пол/отр), если $V(x) \gtrless 0$ в $B_r \setminus \{0\}$ — сохр. знак $\wedge 0$

$V(x)$ наз знакопост (пост пол/отр) если она сохр. знак в $U \setminus \{0\}$ и $\exists \bar{x}: V(\bar{x}) = 0$

1) $V(x) = x_1^2 + 2x_2^2$ пол. опр.

2) $V = (x_1 - x_2)^2$ знакопост.

$V(x)$ наз знакопер в $U$ если она прин. значения разных знаков

T1. об устойчивости (Ляпунова)

$\exists V(x) \wedge 0$ в $U$, $\left[\begin{array}{l} \frac{dV(x)}{dt}\ V/O \\ \frac{dV(x)}{dt} \leq 0 \end{array}\right.$ ← знакопост. $\leq 0$

$\Rightarrow x_*(t) \equiv 0$

устойчив

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2 \end{cases}$$

Пусть $V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0$ $\quad \frac{dV}{dt} = x_1(x_2 - 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5) + x_2(-x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2) =$

радиальн

$= 3x_1^3 x_2^2 - 4x_1^6 - x_2^4 + x_1^3 x_2^2 = -(4x_1^6 - 4x_1^3 x_2^2 + x_2^4) =$

$= (-2x_1^3 - x_2^2)^2 \leq 0$

значит $x^*$ устойчиво

Теорема 2

$\exists\, V(x) > 0$, $\frac{dV}{dt} < 0 \Rightarrow x_*(t) = 0$ асимпт. устойч.

Такие ф-ии наз ф-ии Ляпунова

Теор. 3

$\exists\, V(x) \mid \frac{dV}{dt} > 0$ (знакоопр.) & $\exists\, \bar{x} \in U$

$V(\bar{x}) > 0$, тогда $x_*(t)$ – неуст.

**Пр**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2^3 - x_1^3 \end{cases}$$

$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

$\frac{dV}{dt} = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 + x_1^4 + x_2^4 - x_2 x_1^3 > 0$

неустойчиво по Т. 3

**Теор 4** Четаева

$\exists\, V(x_1, x_2) \mid$

① $\forall$ окр $\Omega(0)\ \exists\ \Omega_1$ – обл. замкн.

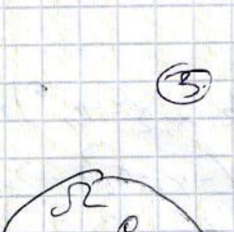
$V(x) > 0$ в $\Omega_1$

② $V(x) = 0$ на $\delta\Omega_1$ ($\delta\Omega_1 \subset \Omega$)

граница $\Omega_1$

③ $\frac{dV}{dt} > 0$ в $\Omega_1$

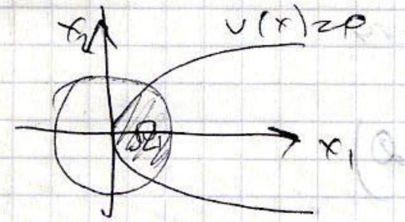
неустойчиво




Пример:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1^3 + 2x_1 x_2^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_2 \end{cases}$$

$V(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$




от $\delta\Omega_1$
$x_1 - x_2^2 > 0$

Шуштотива

$$\frac{dv}{dt} = x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 2x_2^2x_1 = x_1^3 \ , \text{ в } \Omega_1 > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad V(x) = x^TBx$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(x^T)}{dt} Bx + x^T B \frac{dx}{dt} =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)^T Bx + x^T B \frac{dx}{dt} = (Ax)^T Bx + x^T BAx =$$

$$x^T A^T Bx + x^T BAx = x^T(A^T Bx + BA)x$$

$$\exists \ \frac{dv}{dt} = W, \quad W = x^T C x, \quad A^T B + BA = C$$

Ув $\forall \lambda_i + \lambda_k \neq 0 \quad \lambda_i, i = \overline{1, n}$

$$\Rightarrow \forall W \ \exists! \ V(x) : \frac{dv}{dt} = W$$

Как искать $v$?

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$$

$$= ax_1^2 + bx_2^4$$

$$ax_1^4 + bx_2^2$$

$$ax_1^4 + bx_2^4$$

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -x - y^3 \end{cases}$

Особые точки на фаз. пл-ти

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = Q(x_1, x_2) \end{cases} \qquad (P, Q) \in C^1(D)$$

Фазовая пл-ть — пл-ть пер. $(x_1, x_2)$

Бывают

1) точка

2) з. кривая — период. решение

3) н. зам. — непериод. реш.

Осн. задача — провести фаз качеств. анализ и построить фаз. портрет

— уст. структ. разбиение фаз. структуры

— уст. структ. разбиение топ. структ.

Топ. преобр. - (гомеоморфизм)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Downarrow$

Сущ. ед. пол. равн. $(0, 0)$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

3) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

I $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

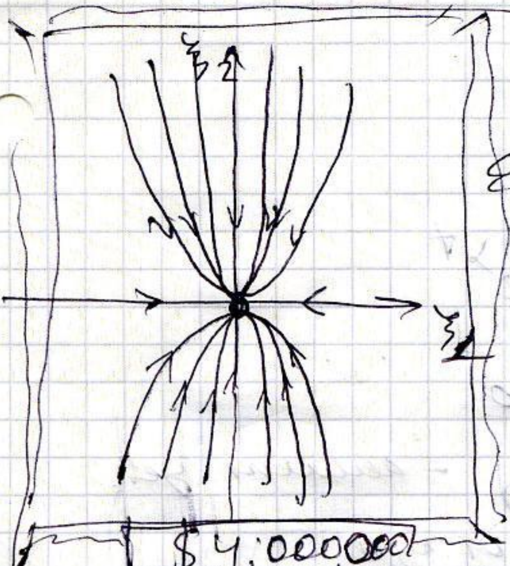
$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \bar{a}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \bar{a}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow x(t) = \xi_1(t)\bar{a}_1 + \xi_2(t)\bar{a}_2$$

a) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0 \qquad \xi_1 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \quad \xi_2 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Если $C_1 = C_2 = 0$, то это фаз. равн.

Если $C_1 \neq 0 \; C_2 = 0 \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$




$\$ 4,000000$

Фазовый портрет.
Раннее утро

Если $C_1 = 0$ $C_2 \neq 0 \Rightarrow \xi_1 = 0$

$\xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$

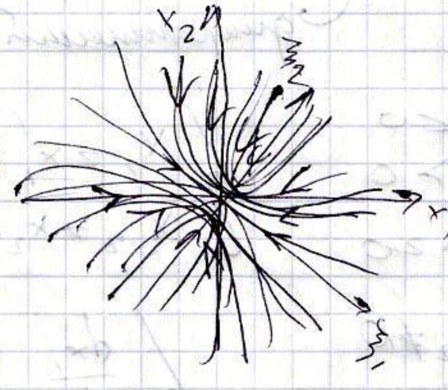
$\operatorname{sign}\xi_2 = \operatorname{sign} C_1$

Если $C_1 \neq 0$ $C_2 \neq 0$

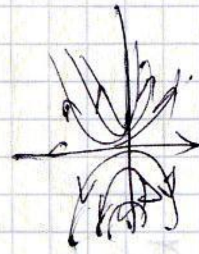
$\frac{\xi_1}{C_1} = e^{\lambda_1 t}$ $\quad \frac{1}{\lambda_1}\ln\left|\frac{\xi_1}{C_1}\right| = t$ $\quad \xi_2 = C_2 e^{\frac{1}{\lambda_1}\ln\left|\frac{\xi_1}{C_1}\right|} = C\xi_1^{\alpha}, \; \xi_2 = C\xi_1^{\alpha}$

$\lambda_2 > \lambda_1$

$C = \frac{C_2}{|C_1|}$ $\quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$




$C_1 C_2 < 0$ (α)
разн. знаков

б)  — $C_1 > 0$, $C_2 > 0$

в) $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 > 0$

① $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2 = 0$

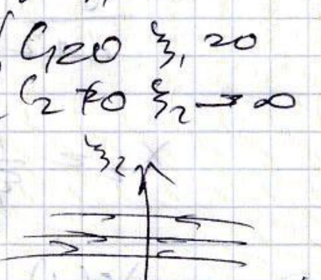
② $\begin{cases} C_1 \neq 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \xi_2 = 0 \\ \xi_1 \to 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 0 & \xi_1 = 0 \\ C_2 \neq 0 & \xi_2 \to \infty \end{cases}$

④ $\begin{cases} C_1 \neq 0 \\ C_2 \neq 0 \end{cases}$ $\xi_2 = C\xi_1^{\alpha}$


седло
пол. равн.

г) $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$

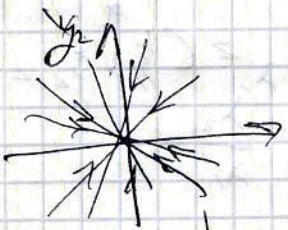



II $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

а) $a_{12} = a_{21}$ $\quad \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1$ $\quad \frac{dx_2}{dt} = a_{22}x_2$

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{a_{11} t} \\ x_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases} \qquad a_{11} = a_{22} = \lambda$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow x_2 C_1 - C_2 x_1 = 0 \qquad x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$




$\lambda < 0$ (и центр) – асимпт. уст.

$\lambda > 0$ – расход. от центра

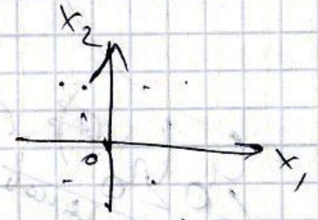
дикритический узел

$\lambda < 0$

$\lambda > 0$

$\lambda = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(0) \\ x_2 = x_2(0) \end{cases}$$




б) $a_{12} \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 - a_{22} x_2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{12} \left( a_{21} x_1 + a_{22} \left[ \frac{1}{a_{12}} \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 \right] \right)$$

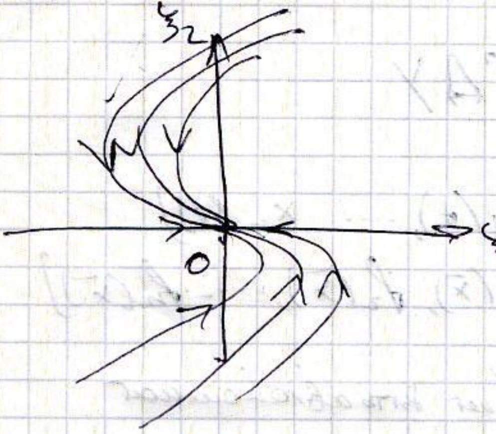
$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{dx_1}{dt}(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11}) x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}} \left( C_2 e^{\lambda t} + (C_1 + C_2 t) \lambda e^{\lambda t} \right) - \frac{a_{11}}{a_{12}} (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

$$X(t) = \xi_1(t) \overline{a_1} + \xi_2(t) \overline{a_2}$$

$$\begin{cases} \xi_1(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \\ \xi_2(t) = C_2 e^{\lambda t} \end{cases} \qquad \overline{a_1} = \left(1, \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}\right) \quad \overline{a_2} = \left(0, \frac{1}{a_{12}}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\xi_2}{C_2} \right| = t \qquad \xi_1 = \left( C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \ln \left| \frac{\xi_2}{C_2} \right| \right) \frac{\xi_2}{C_2} = \left( C + \frac{1}{\lambda} \ln \xi_2 \right) \xi_2$$




III $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\cancel{(a_{11}a_{22})}\ (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0$$

$$(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0 \Rightarrow \boxed{a_{12}a_{21} < 0}$$

$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\beta$ $\quad x_1(t) = e^{\mu t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$

$$x_2(t) = \frac{\mu e^{\mu t}}{a_{12}}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) + \frac{e^{\mu t}}{a_{12}}(-C_1\beta\sin\beta t + \beta C_2\cos\beta t) - \frac{a_{11}}{a_{12}}e^{\mu t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$$

$$\xi_1(t) = e^{\mu t}(C_2\cos\beta t - C_1\sin\beta t)$$

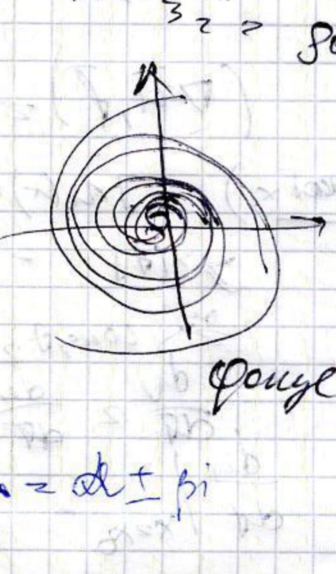
$$\xi_2(t) = e^{\mu t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$$

$\overline{a_1} = \left(0; \frac{\beta}{a_{12}}\right)$ $\quad \overline{a_2} = \left(1; \frac{\mu - a_{11}}{a_{12}}\right)$

a) $\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\beta$ $\quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = \rho_0^2$

центр

$\lambda = \pm\beta i$

фокус

$\lambda = \alpha \pm \beta i$

# Первые интегралы СДУ

$$\frac{d\bar x}{dt} = f(\bar x) \qquad \bar x(t) = (x_1(t), \dots x_n(t))$$
$$f(\bar x) = (f_1(\bar x), f_2(\bar x), \dots f_n(\bar x))$$

Зам. $t = x_{n+1}$ система перестанет быть автономной

$\exists x(t) = g(t)$ — реш. (1)

$\forall u(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, $u(t, g(t)) \equiv v(t)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} f(x) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots x_n)$$

$$\frac{du}{dt} = (\nabla u, f)$$

Опр. Ф-я $u(x)$ определенная и непр. вместе со своими 1 произв. в некот. обл-ти $D$ изменения 2-ных переменных наз. первым интегралом, если при подст. в нее любого $g(t)$ системы 1, траектория которого лежит $\in D$, значение ф-и $u$ постоянно, не зависит от $t$.

Значение ф-и $u$ зависит от $g(t)$, но не от $t$.

Критерий: Для того, чтобы $u$ - I интеграл $\Leftrightarrow$ $(\nabla u, f) = 0$ в $D$

$\Delta$ (необх.) Пусть $u(x)$ — I инт. сис. (1) $\exists x_0 \in D$

$\exists x(t) = g(t)$ — реш.: $g(t_0) = x_0$

по опр. $const = u(g(t)) = v(t) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$, но $\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$

$$\frac{du}{dt}\Big|_{x=x_0} = \frac{dv}{dt}\Big|_{t=t_0} \equiv 0$$