# Матфизика

Попов Игорь Юрьевич

2 половина в сл. семе контр.

Тихонов, Самарский — УМФ
Будак, Самарский, Тихонов — Сб. задач по УМФ
Владимиров — УМФ
Попов ИЮ — Мат. физ.

## Ур. струны (волновое ур-е)

$\longrightarrow x$

ур-е колебаний выводятся из з. Ньютона.

$U(x,t)$ – откл. (верт.) струны от $OX$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Струна беск. длинная, не колеблется никак кроме как вертикально. Относится к ч. т. S.

$a$ связан с пл-ю и упр.

## 1. Метод Даламбера (характеристик, бегущих волн)

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\right) = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \xi}\right) =$$

$$= \ldots = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Подставим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = F(\eta) + C(\xi)$$

$$u = f(\eta) + g(\xi)$$

$$u = f(\eta) + g(\xi) = f(x+at) + g(x-at)$$

волна, бегущая направо со скоростью $a$, равномерно

налево

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$u'_t(x,0) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi \\ a f'_t(x) - a g'(x) = \psi \end{cases}$$

$f(x) + g(x) = \varphi$

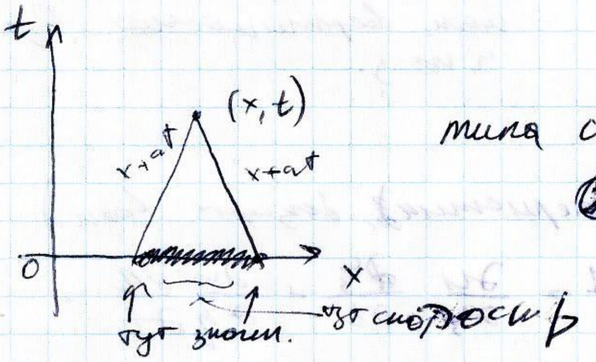
$a(f(x) - g(x)) = \int_0^x \psi\, dt;$

$2ag(x) + a(f(0) - g(0)) = \int_0^x \dots + a\varphi(x)$

$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{f(0)-g(0)}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \int_0^{x} \psi(y)dy$

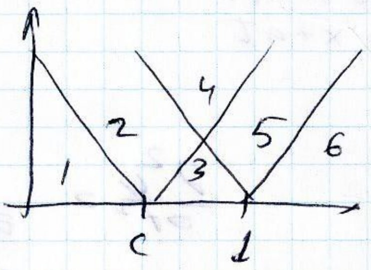
$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{f(0)-g(0)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(y)dy + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(y)dy + \frac{f(0)-g(0)}{2} + \frac{\varphi(x+ta)}{2} =$$

$$= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy\right)$$




типа световой конус)

① 1) $\varphi(x) = 0$ вне $[a, b]$
2) $\psi = 0$.




в 1 и 6 струна не откл. $U=0$
в 2 $U=1$, волна налево
в 5 направо
в 3 ⇄
в 4 $U=0$

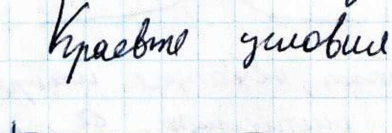
Интересно, что зависит форма у волны если в нетрадиционных пр-вах

② только так же, но $\varphi = 0$, $\operatorname{supp}\psi = [c, d]$

1, 6 $U \equiv 0$
2. ←
5. →
3. ⇄
4. $U \neq 0$ ! ← не ноль, констант какая-то

Рассмотрим полубесконечную струну:

Краевые условия $U(0,t) = 0$




Решение Коши будет удовл. св-у единственности.

Воспользуемся записями и продолжим $\varphi, \psi$ нечетным образом.

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy$$

$$U(0,t) = \frac{C-C}{2} + 0 = 0.$$

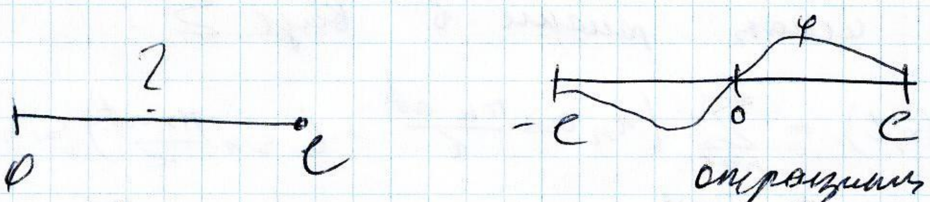
По единственности будет работать.

③ Закрепим левый конец струны на стержне


$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

Условие свободного конца

Тут нужно четное продолжение.




Отразим нечетно отн. 0 и продолжим с периодом $2l$.

Этот метод (Даламбера) ничего не говорит о звуке. И вообще с заморочками

2. Метод Фурье (метод разделения переменных / стоячих волн)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_t'(x,0) = \psi(x)$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(X(x)T(t)\right)\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(X(x)\,T(t)\right)\right)$$

$$X(x)\,\frac{\partial}{\partial t}\left(T_t'(t)\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(X_x'(x)\right)\cdot T(t)$$

$$\frac{X(x)}{X_x''(x)} = a^2 \frac{T(t)}{T_t''(t)}, \qquad \frac{T_t''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X_x''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - \lambda a^2 T = 0 \end{cases}$$

⊗ $\lambda = 0$ не подходит

⊗ $\lambda = p^2$ $\quad X'' - p^2 X = 0 \quad \omega^2 - p^2 = 0 \quad \omega = \pm p$

$C_1 e^{+px} + C_2 e^{-px}$ $\quad C_1 = 0 \quad C_2 = 0$ не здорово.

$\lambda = -p^2$ $\quad X'' + p^2 X = 0$

$X = C_1 \cos px + C_2 \sin px$

$U(0,t) = U(l,t) = 0.$

1. $C_1 = 0$

2. $C_2 \sin pl = 0$ $\quad X = C_2 \sin \frac{\pi n x}{l}$

$C_2 \sin pl = 0 \Rightarrow p = \frac{\pi n}{l}$ $\quad T'' + a^2 p^2 T = 0 \Rightarrow$

$T = C_1 \cos \frac{a\pi n t}{l} + C_2 \sin \frac{a\pi n t}{l}$

11.09.2015

$\left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l}\right) \sin \frac{\pi n x}{l}$

это получили

Добавить искомое решение в виде $\sum$:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin \frac{\pi n a t}{l}\right) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$U(x,0) = \sum a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin \frac{\pi n y}{l}\, dy$$

$$U'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \frac{\pi n a}{l} = \psi(x)$$

$$b_n = \frac{2l}{\pi n a} \cdot \frac{1}{l}\int_0^l \psi(y) \sin \frac{\pi n y}{l}\, dy$$

$$(*) \quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(y) \sin \frac{\pi n y}{l}\, dy \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(y) \frac{\sin \frac{\pi n y}{l}}{\cancel{l}}\, dy \sin \frac{\pi n a t}{l}\right) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$(**) \quad \text{Ф-ла Даламбера: } u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy$$

Докажем, что $(*) \equiv (**)$

Разложим $(**)$: $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \frac{1}{l} \varphi(y) \sin \frac{\pi n y}{l}\, dy\right] \left(\sin \frac{\pi n (x-at)}{l} + \sin \frac{\pi n (x+at)}{l}\right) + \int_{x-at}^{x+at} dy \left[\int_0^l d\xi \frac{1}{la} \psi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l}\right] \cdot \sin \frac{\pi n y}{l}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$A = \sin\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi n a t}{l}$

$[*]\cdot\int_{x-at}^{x+at}\sin\frac{\pi n y}{l}\,dy = [*]\frac{l}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n(x-at)}{l} - \cos\frac{\pi n(x+at)}{l}\right)$

$= [*]\frac{2l}{\pi n}\sin\frac{\pi n a t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}$ совпало.

$u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ — условие Неймана

$\lambda = 0$ $\quad a_0 t + b_0$

$\lambda < 0$ $\quad \cos\frac{\pi n x}{l}$ $\quad u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2} + \sum^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n\sin\frac{\pi n a t}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(y)\cos\frac{\pi n y}{l}\,dy$ $\quad b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(y)\cos\frac{\pi n y}{l}\,dy$

$\exists\ u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x,0) = \varphi(x) \qquad v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v'_t(x,0) = \psi(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x,t) \\ w(x,0) = 0 = w'_t(x,0) \\ w(0,t) = w(l,t) = 0\end{cases}$$

$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$

$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$

$f(x,t) = \sum^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$,

$\sum^{\infty} w''_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l} = a^2\left(\sum^{\infty} w_n(t)\cdot(-1)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n x}{l}.$

$w''_n(t) = -a^2 w_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + f_n(t)$

$\sum^{\infty} w_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l} = 0 \Rightarrow w_n(0) = 0.$ $\quad w'_n(0) = 0$

$$\tilde{W}_n'' = -a^2 \tilde{W}_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$W_n = c_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n \sin\frac{\pi n a t}{l}$$

$$c_n' \cos\frac{\pi n a t}{l} + b_n' \sin\frac{\pi n a t}{l} = 0$$

$$-c_n' \sin\frac{\pi n a t}{l} + b_n' \cos\frac{\pi n a t}{l} = f_n \cdot \frac{l}{\pi n a}$$

$$\Rightarrow c_n = -\int f_n \frac{l}{n \pi a} \cdot \sin\frac{\pi n a t}{l}\, dt$$

$$b_n = \int_0^t f_n \frac{l}{\pi n a} \cdot \cos\frac{\pi n a t_1}{l}\, dt_1 + \tilde{b}_n$$

$$W_n = -\left(\int_0^t f_n \frac{l}{\pi n a} \sin\frac{\pi n a t_1}{l}\, dt_1\right) \cos\frac{\pi n a t}{l} +$$

$$+ \left(\int_0^t f_n \frac{l}{\pi n a} \cos\frac{\pi n a t_1}{l}\, dt_1\right) \sin\frac{\pi a n t}{l} +$$

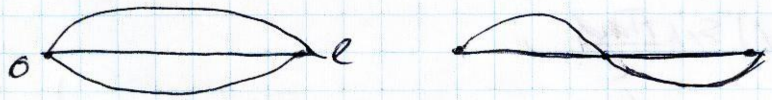
$$+ \tilde{c}_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + \tilde{b}_n \sin\frac{\pi n a t}{l}$$

$$= \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n\left(\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t - t_1)\right)\right) + \tilde{c}_n \cos\frac{\pi n a t}{l} + \tilde{b}_n \sin\frac{\pi n a t}{l}$$

$$W_n' = \left[\overset{=0}{f_n\left(\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t - t)\right)\right)} + \int_0^t f_n\left(\overset{=0}{\cancel{\sin}}\,\frac{\pi n a}{l} \cos\frac{\pi n a}{l}(t - t_1)\right) dt_1\right]_0 \cdot \frac{l}{\pi n a} + \left(\tilde{b}_n \underbrace{\cos\frac{\pi n a t}{l}}_{=1}\right)\frac{\pi n a}{l} \Rightarrow \tilde{b}_n = 0$$

$$W_n(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t f_n(t_1) \sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t - t_1)\right) dt_1$$

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$



18.09.2015 Ур-е диффузии

$u(x,t)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$u(x,0) = \varphi(x)$

Преобразование Фурье

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx$$

$$u'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( u(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ki \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-ikx} dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + ki\, U(k) =$$

$$= ki\, U(k)$$

$$u''(x) \to -k^2 \cdot U(k)$$

$$\frac{\partial U(k,t)}{\partial t} = a^2(-k^2)\, U(k,t), \quad U(k,0) = \varphi(k)$$

$$\frac{dU(k,t)}{U(k,t)} = a^2(-k^2)\, dt \quad \text{Разделим переменные}$$

$$\ln(U(k(t))) = -a^2 k^2 t + C$$

$$u(k,t) = C e^{-a^2k^2t}$$

$$U(k,0) = C = \varphi(k)$$

$$U(k,t) = \varphi(k) e^{-a^2k^2t}, \quad u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{-a^2k^2t+ikx} dk}_{\text{обр. преобр. Фурье}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iky} dy\, e^{-a^2k^2t+ikx} dk =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2t + ik(x-y)} dk \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) \left[ e^{\cancel{-a^2k^2t+ik(x-y)} - \left(a\sqrt{t}k - \frac{i(x-y)}{2}\right)^2 + \frac{(x-y)^2}{4a^2t}} \right.$$

$$-(a\sqrt{t}k + \xi)^2 = -a^2tk^2 + 2\xi k + \xi^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) \left[ e^{\underbrace{-\left(a\sqrt{t}k - \frac{i(x-y)}{2}\right)^2}_{B} + \underbrace{\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}_{A}} dk \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) e^{A} \int e^{-(\dots)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-B^2} dk \cdot \frac{e^{A}}{a\sqrt{t}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{e^{A}\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\, dy = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}\, dy$$

Выводы 1) Скорость распостр. $\infty$

2) Бесконечн. дифф. решение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = X(x)T(t)$

$X(x)T'(t) = a^2 X''(x) T(t)$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

$X'' - \lambda X = 0$

1) $\lambda > 0$

$X = C_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$

Из краевых условий $C_1 = 0$ $C_2 = 0$

2) $\lambda = 0$ — не интересно

3) $\lambda < 0$

$X = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, l) = 0$

$\sqrt{-\lambda}\, l = \pi n$

$\lambda = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$

$T' - \lambda T a^2 = 0$

$T = C e^{\lambda a^2 t}$

Нач. условие

$C \sin(\sqrt{-\lambda}\, x) = \varphi(x)$

$$u(x,t) = \sum^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx$$

Выходит, что $E$ уходит с $t \to \infty$

Чтобы Е-ия концах не уходило,

$$u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

Излучение со стенок:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cu$$

$$u(x,t) = \sum^{\infty} a_n e^{\left(-c-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\right)t} \sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$u = e^{-ct}$$

$$-ce^{-ct}\mathcal{U} + e^{-ct}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = a^2 e^{-ct}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} - ce^{-ct}\mathcal{U}$$

В ядерных реакциях $c$ определяет к-т диффузии нейтронов, $c<0$, тогда

если $-c > \frac{\pi^2 a^2}{l^2}$, решение $\to \infty$, у ряда есть полож. экспоненты

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$\exists\, u = V + ax + b$

$$\begin{cases} V + a\cdot 0 + b = \mu_1 \\ V + al + b = \mu_2 \end{cases}$$

$\exists\, b = \mu_1$

$\exists\, a = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l}$

$$u = V + \frac{\mu_2-\mu_1}{l}x + \mu_1$$

$$V(x,0) + \frac{\mu_2(0)-\mu_1(0)}{l}x + \mu_1(0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\mu_2' - \mu_1'}{l}x + \mu_1' = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$$

4.10.2015

~~Локальная теорема Муавра-Лапласа~~

Задача Дирихле для ур. Лапласа в круге

$\Delta u = 0 \leftarrow$ ур-е Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi = r\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi = r\sin\varphi \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \operatorname{arctg} y/x$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\right]\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\sin\varphi\right]\cos\varphi -$$

$$- \left[\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]\frac{\sin\varphi}{r} -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right]\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right]\frac{\cos\varphi}{r} =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right]\frac{\cos\varphi}{r} \ldots$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\sin\varphi\cos\varphi +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r\partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2\partial\varphi^2}$$

$\Delta u = 0$

Всё, теперь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r\,dr} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial\varphi^2} = 0 \qquad u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$R''\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0$$

$$\Phi\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = \frac{-1}{r^2}\Phi'' R$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda \qquad \Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$$

$\lambda = -p^2$: $C_1 e^{-p\varphi} + C_2 e^{p\varphi}$

$\lambda = 0$ $\Phi = const$

$\lambda = p^2$

$C_1 \cos p\varphi + C_2 \sin p\varphi$

Хотим период $2\pi$, так как в круге.

$p \in \mathbb{Z}$

$\lambda = 0 \quad R'' + \frac{1}{r}R' = 0$

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r}$$

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r}$$

$$\ln\left(\frac{R'}{R'(r_0)}\right) = -\ln\frac{r}{r_0} \qquad R' = C\frac{r_0}{r}$$

$$\lambda = p^2 \quad p \in \mathbb{Z} \qquad R = C_1 \ln r + C_2 = C_2$$

$$r^2R'' + rR' - p^2R = 0$$

Подберём 2 ЛНЗ частных реш.

$$\exists\, R = r^p \Rightarrow (-p^2r^p + pr^p + p(p-1)r^p = 0) \qquad R = Cr^p$$

Нужно удовл. краев. условиям в виде ряда, потому что решение имеет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n\right]$$

$$u(r_0,\varphi) = f(\varphi)$$

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum^{\infty}\left[(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) r_0^n\right]$$

Это Фурье, поэтому $a_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$

$$b_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$$

Подставим $a_n, b_n$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\left(\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n\psi\, d\psi\right)\cos n\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sin n\psi\, d\psi\right)\sin n\varphi = \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(\psi)\cos n\psi\cos n\varphi + f(\psi)\sin n\psi\sin n\varphi)d\psi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi-\varphi)d\psi =$$

поменяем

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos[n(\psi-\varphi)]}_{\text{найдем}}d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\sum\ldots d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\left[\frac{1}{2} + \sum\ \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int f\left[\frac{1}{2} + \frac{2rr_0\cos\theta + \ldots}{r_0^2 + \ldots}\right]d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int f(\psi)\frac{r_0^2 - r^2}{2(r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2)}d\psi =$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos[n(\underbrace{\psi-\varphi}_{\theta})] =$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{i\theta n} =$$

$$\overset{\text{геом. прогр.}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{re^{i\theta}}{r_0}}{1-\frac{re^{i\theta}}{r_0}}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{re^{i\theta}}{r_0 - re^{i\theta}}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{(r_0 - r\cos\theta) - ir\sin\theta}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)((r_0 - r\cos\theta) + ir\sin\theta)}{(r_0 - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$\frac{rr_0\cos\theta - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2} =$$

$$= \frac{2rr_0\cos\theta - 2r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2}{r_0^2 - 2r_0 r\cos\theta + r^2}$$

---

$$u(r,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\psi)} =$$

---

Причем

$$\frac{1}{2\pi}\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\psi) + r^2}$$

ядро Дирихле.

---

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0,y) = \varphi_1(y) \\ u(a,y) = \varphi_2(y) \\ u(x,0) = \psi_1(x) \\ u(x,b) = \psi_2(x) \\ 0 \le x \le a \quad 0 \le y \le b \end{cases}$$

* * *

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{\partial^2(X(x)Y(y))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(X(x)Y(y))}{\partial y^2}$$

$$Y(y)X'' = -X(x)Y''(y)$$

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$ или $\lambda < 0$ — без разницы.

Пусть просто $\lambda = p^2 \quad (\lambda > 0)$

$$X(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}$$

$$Y(x) = C_3 \sin(py) + C_4 \cos(py)$$

Применим краевые условия

$U(0,y) = (C_1 + C_2)(C_3 \sin py + C_4 \cos py) = \varphi_1$ и ничего не выйдет

16.10.2016

Чтобы решить задачу, давайте временно:

$\varphi_1(y) = 0, \quad \varphi_2(y) = 0$

Возьмем решение с $\sin/\cos$.

переобозначим $\varphi \Leftrightarrow \psi$

$\exists\, \lambda = -p^2$, тогда

$$X(x) = C_1 \cos(px) + C_2 (\sin px)$$

$$Y(y) = C_3 \operatorname{ch}(py) + C_4 \cdot \operatorname{sh}(py) \longleftarrow \text{раскрывается в exp}$$

Применим краев. условие:

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 \sin pa = 0 \end{cases} \Rightarrow p_n = \frac{\pi n}{a}$$

Тогда $U(x,y) = \sum_1^\infty \sin \frac{\pi n}{a} x \left( a_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{a} y + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y \right)$

Если удовл. краевому решению условию, то:

$$U(x,0) = \sum_1^\infty \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot a_n = \varphi_1(x)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n}{a} x$$

$$U(x, b) = \sum_{n=1}^\infty \sin \frac{\pi n}{a} x \left( a_n \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{a} + b_n \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a} \right) = \varphi_2(x)$$

$$\rightarrow b_n = \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi n b}{a} \left( \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_2(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx - \frac{2}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{a} \int_0^a \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n}{a} x \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{a} \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi n b}{a} \int_0^a \left( \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{a} \right) \sin \frac{\pi n x}{a} dx$$

Ну и вот, есть решение.

Общее решение из суммы реш. для $\varphi_1, \varphi_2 = 0$ и $\psi_1, \psi_2 = 0$

Для нулей на горизонт. стенках:

$$U(x,y) = \sum_1^\infty \sin \frac{\pi n y}{b} \left( c_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} x + d_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} x \right)$$

Аналогично

$$c_n = \frac{2}{b}\int_0^b \psi_1(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy$$

$$d_n = \frac{2}{b}\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi n a}{b}\right)\int_0^b \sin\frac{\pi n}{b}y\left(\psi_2(y)-\psi_1(y)\,\mathrm{ch}\frac{\pi n a}{b}\right)dy$$

Сложим два решения, получим общее.

---

* * *

Классификация УЧП 2го порядка.

$U(x_1 \ldots x_n)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial U}{\partial x_i} + cU = f$$

Also $a_{ij}=a_{ji}$

$a_{ij}, b_i, c, f$ — функции от $x_1 \ldots x_n$

Хотим исключить смешанные производные.
Сделаем замену:

$$\begin{cases}\xi_i = \xi_i(x_1 \ldots x_n)\\ i=1\ldots n\end{cases}$$

замена первой производной $\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}$

Вторые:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{(\partial x_i)^2}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial U}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\left(b_i\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}\right) + cU = f$$

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$$

($\tilde{a}_{ii}$ – собств. числа)

И вот мы хотим, чтобы $\tilde{a}_{kl} = 0$ if $k \neq l$

Коэфф. преобр. по тому же закону, что и коэфф. квадрат. форм.

$\vec{e}_i$ — $i$-й собств. вектор $\|a_{ij}\|$; $\vec{e}_i = \begin{pmatrix}e_{i1}\\ \vdots \\ e_{in}\end{pmatrix}$

Тогда хотим $\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = e_{ki}$

Пусть мы это сделали.

В итоге ур-е:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 U}{(\partial \xi_i)^2} + \ldots = f.$$

Если все $\lambda_i$ одного знака, ур-е $\boxed{\text{Эллиптическое}}$

Ур-е Лапласа эллиптическое.

Если хотя бы один отлич. по знаку, то такое уравнение $\rightarrow$ $\boxed{\text{Гиперболическое}}$ (ур-е струны или волновое)

К переменных одного, $n$ другого, тогда $\rightarrow$ $\boxed{\text{Ультрагиперболические}}$

Одно $\lambda_i = 0$, все ост. одного знака и $b_1$ (перем. $\xi_1$, $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$) $\neq 0$, то $\boxed{\text{Параболическое}}$

23.10.2015

Теорема единственности для волнов. ур-е

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \\ U(0,t) = U(l,t) = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U'_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Пусть есть два решения

$v \equiv U_1 - U_2$

подставим

$$* \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial v^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = v'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Покажем, что у * есть только трив. решение.

$\Delta$ $\Phi$ $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left( (v'_t)^2 + a^2 (v'_x)^2 \right) dx$ $\leftarrow$ рассмотрим такой функционал

$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ $\leftarrow$ покажем. $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^l [2 v'_t v''_{tt} + a^2 \cdot 2 v'_x v''_{xt}] dx =$

$= \{ v''_{tt} = a^2 v''_{xx} \} = a^2 \int_0^l [v'_t v''_{xx} + v'_x v''_{xt}] dx =$

$= a^2 \int_0^l [(v'_t v'_x)'_x] dx = a^2 v'_t v'_x \Big|_{x=0}^{x=l} =$

$= a^2 [\underbrace{v'_t(l) v'_x(l) - v'_t(0) v'_x(0)}_{0}] = 0$ исходя из краевых значений ($a^? = 0 \Rightarrow v' = 0$)

(E - const)

Тогда при $E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [0^2 + a^2 \cdot 0^2] dx = 0 \Rightarrow E(t) = 0$.

$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [(v'_t)^2 + a^2 (v'_x)^2] dx \geq 0$

$$\begin{cases} v'_t(x,t) = 0 \\ v'_x(x,t) = 0 \end{cases}$$ $\Downarrow$ Тогда $V$ - const. (обе производ. $= 0$) отсюда ~~почему-то~~ решение единственно (есть краев. условие)

$\nabla$

Алсо: $a^2$ может зависеть от $x$, это не испортит д-во

Вопрос: дадут ли след. условия сохр. энергии?

$v(0,t)=0$ в месте д-ва

$\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)\Big|_{x=l} = 0$ $v'_t(l,t)$ б $v(l,t)$

Единственности нет.

В 3-хмерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v \\ \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ t \in [0,\infty) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \\ v|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left((v'_t)^2 + a^2(\nabla v)^2\right) d^3x$$

$$\left[\iiint_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} d^3x = \iint_{\partial\Omega} u\, v \cos(\vec{n}, e_k)\, dS - \iiint_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} d^3x\right.$$

Интегр. по частям в $\mathbb{R}^3$

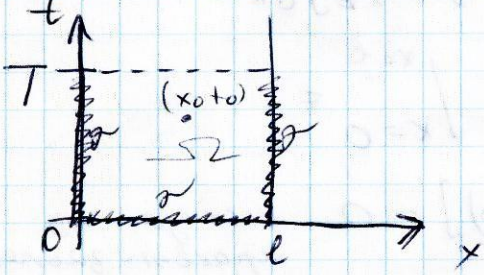
Уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$v = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

Воспользуемся принципом max (II закон термодин.)




Решение ур-я не может иметь max в $\square$

max только на $\gamma$

$\Delta$ $\leftarrow$ $V$: $(x_0, t_0)$ – max у $V(x,t)$

$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0,t_0) = 0$

$\frac{\partial V}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0$ } услов. экстр.

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$ условие max

$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Тут могло быть разных знаков, если бы нер-ва были строгими.

$\max_\gamma v(x,t) = m$

$\max_\Omega v(x,t) = M$ $M > m$ $M - m = \varepsilon > 0$

Возьмем $V = v + \underbrace{\alpha(t_0 - t)}_{\text{добавка не больше } \frac{\varepsilon}{3}}$, $\alpha = \frac{\varepsilon}{3T}$

$v$ сохранит св-во иметь max в $\Omega$

$(x, t_1)$ max $v(x,t)$ $(x, t_1) \notin \Gamma$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \alpha \geq 0 \text{ в точке } (x, t_1)$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} > 0 \text{ в } (x, t_1) \quad \text{точнее} \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \geq \frac{\varepsilon}{3T}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} \leq 0$$

Отсюда $\underbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial t}}_{>0} = a^2 \underbrace{\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}}_{\leq 0}$

$\triangleright$

Отсюда и max и min – на границе.
В условиях (краевых) ур-е теплопров-ти на границе все 0.
Тогда и внутри 0, $\upsilon = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ u_1(0,t) = u_1(l,t) = 0 \\ u_1(x,0) = \varphi_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ u_2(0,t) = u_2(l,t) = 0 \\ u_2(x,0) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

$\forall x \in [0, l] \quad \varphi_2(x) \geq \varphi_1(x) \Rightarrow u_2(x,t) \geq u_1(x,t)$

из принципа min

6.11.15

## Функция Грина ОД оператора

(обыкновенного дифференциального)

$$\begin{cases} ly = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n(y) & p_0(x) > 0 \ \forall x \in [a,b] \\ U_j(y) = \alpha_{0j} y(a) + \alpha_{1j} y'(a) + \dots + \alpha_{n-1j} y^{(n-1)}(a) + \beta_{0j} y(b) + \dots + \beta_{n-1j} y^{(n-1)}(b) = 0 \end{cases}$$

$j = 1 \dots n$

Краевое условие

Notation: $Ly = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ly = 0 \\ U_j(y) = 0 \end{cases}$

<u>Опр</u> Ф-я Грина – это $G(x, \xi)$, что: $x, \xi \in [a, b]$

1. $G(x,\xi)$ непр. и имеет непр. произв. до $n-2$ поряд. (включ.) в $[a,b] \times [a,b]$
2. $lG = 0$ на $[a,\xi) \cup (\xi, b]$, $G$ имеет непр. произв. $n$-го порядка на $[a,b] \setminus \{\xi\}$
   ($l$ маленькая $l$)
3. $U_j(G) = 0$, $j = 1, 2 \dots n$
4. $\left.\frac{\partial^{n-1}}{(\partial x)^{n-1}} G(x,\xi)\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x,\xi)\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}$

Теорема о сущ. ф-ии Грина.

Если $Ly=0$ имеет только трив. решение $(y\equiv 0)$, то $\exists!\ G(x,\xi)$

$\triangle$

$$lG=0 \quad \text{на } [a,\xi)\cup(\xi,b]$$

Пусть $y_1 \dots y_n$ — ФСР этого ур-я

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1y_1+\dots+a_ny_n & a\le x<\xi \\ b_1y_1+\dots+b_ny_n & \xi<x\le b\end{cases}$$

Покажем непр.

$$G(\xi-0,\xi)=G(\xi+0,\xi)$$

$$\begin{cases} \sum^n a_iy_i(\xi)=\sum b_iy_i(\xi) \\ \sum^n a_iy_i^{(k)}(\xi)=\sum^n b_iy_i^{(k)}(\xi) & k\le n-2 \\ \sum^n (b_i-a_i)\,y_i^{(n-1)}(\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)}\end{cases} \qquad c_i=b_i-a_i$$

Если $\Delta$ не $0$ (опред.) то имеем ед. решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & \dots & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi)\end{vmatrix}$$

Это вронскиан, он не равен 0 в силу ЛНЗ и того, что они $(y_i)$ удовл. начальн-го реш.

Ну вот типа мы нашли $\{c_i\}$

Подставим в $U$:

$$\forall j\quad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{kj}\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^{(k)}(a)+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{kj}\sum_{i=1}^{n}b_iy_i^{(k)}(b)=0$$

$$c_i=b_i-a_i \Rightarrow b_i=c_i+a_i$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}\left[\alpha_{kj}a_iy_i^{(k)}(a)+\beta_{kj}(c_i+a_i)y_i^{(k)}(b)\right]=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha_{kj}y_i^{(k)}(a)+\beta_{kj}y_i^{(k)}(b)\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}c_i\sum_{k=0}^{n-1}\beta_{kj}y_i^{(k)}(b)=0$$

$\hookrightarrow$ неоднор. имеет ! реш $\Leftrightarrow$ одор. имее только трив.

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(\alpha_{kj}y_i^{(k)}(a)+\beta_{kj}y_i^{(k)}(b))=0$$

, тогда $\{a_i\}$ единств.

$$\downarrow$$

$\hookrightarrow$ имеет трив.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{kj}\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^{(k)}(a)+\beta_{kj}\sum_{i=1}^{n}a_iy_i^{(k)}(b)\right]=0$$

$\hookrightarrow$ краевое усл. $U_j$ для $y=\sum^n a_iy_i(x)$

Тогда из условия теоремы сущ. нетрив. реш $\Rightarrow y$ - только трив.

$y$ тоже удовл., потому что $y$ — линейная комбинация $y_i$, но если $a_i\neq 0$, то $Ly$ имеет не только одно решение $\Rightarrow a_i=0$

$\nabla$

Замечание: $G$ — решение не при всех производных, это не противоречит условию теоремы. (только при $x$, но $lG=0$, $U_j G=0$)

Теорема: $\exists G(x,\xi)$ для $L$, тогда $y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$ удовлетворяет $Ly=f$

$Ly=f\in C[a,b]$

$\triangle$

$$ly=p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\dots+p_n(y)\overset{?}{=}f(x)$$

$$y'(x)=\left(\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\right)'=\int_a^b\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}f(\xi)d\xi$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-2)}(x)=\int_a^b\frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)d\xi$$

$$y^{(n-1)}(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^{x}\frac{\partial^{n-2} G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)d\xi+\int_x^b\dots\right)=$$

$$=\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\Big|_{x-0}+\int_a^x\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi+$$

сопр. $$-\frac{\partial^{n-2}G(x,x-0)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\Big|_{x+0}+\int_x^b\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi=$$

$$=\int_a^b\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)d\xi$$

$$y^{(n)}(x)=\frac{\partial^{n-1}G(x,x-0)}{\partial x^{n-1}}f(x-0)-\frac{\partial^{n-1}G(x,x+0)}{\partial x^{n-1}}f(x+0)+$$

$$+\int_a^b\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)d\xi=\frac{1}{p_0(x)}f(x)+\int_a^b\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)d\xi$$

$$p_0y^{(n)}+\dots p_ny=p_0\left(\frac{1}{p_0(x)}f(x)+\int_a^b\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)d..\right)$$

$$+\dots+p_n\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi=$$

$$=f(x)+\int_a^b f(\xi)\underbrace{\left(p_0\frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}+\dots+p_nG(x,\xi)\right)}_{=0}d\xi=f(x)$$

$$U_j(y)=U_j\left(\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\right)=\int_a^b U_j(G(x,\xi))f(\xi)d\xi=0.$$

$\triangledown$

$y''''=0$; $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=y'(1)=0$

ФСР: $\{1,x,x^2,x^3\}$

$$G(x,\xi)=\begin{cases}a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3\\ b_1+b_2x+b_3x^2+b_4x^3\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + a_4\xi^3 = b_1 + b_2\xi + b_3\xi^2 + b_4\xi^3 \\ a_2 + 2a_3\xi + 3a_4\xi^2 = b_2 + 2b_3\xi + 3b_4\xi^2 \\ 2a_3 + 6a_4\xi = 2b_3 + 6b_4\xi \\ 6b_4 - 6a_4 = \frac{1}{1} \end{cases}$$

$b_4 = a_4 + \frac{1}{6}$

$2a_3 + 6a_4\xi = 2b_3 + 6b_4\xi + \xi \Rightarrow b_3 = a_3 - \frac{1}{2}\xi$

Из 2: $b_2 = a_2 - \frac{1}{2}\xi^2 + \xi$

Из 1: $b_1 = a_1 - \xi^2 + \frac{5}{6}\xi^3$

Удовлетворим условиям:

$y(0)=0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad \Rightarrow b_1 = \frac{5}{6}\xi^3 - \xi^2$

$y'(0)=0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad b_2 = \xi - \frac{1}{2}\xi$

$y(1)=0 \Rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$

$y'(1)=0 \Rightarrow b_2 + 2b_3 + 3b_4 = 0$

$2b_3 + 2b_4 = 3\xi^2 - \frac{5}{3}\xi^3 - 2\xi$

$2b_3 + 3b_4 = -\xi + \frac{1}{2}\xi^2$

$b_4 = -\xi + \frac{1}{2}\xi^2 - 3\xi^2 + \frac{5}{3}\xi^3 + 2\xi = \xi - \frac{5}{2}\xi^2 + \frac{5}{3}\xi^3$

$a_4 = \dots$

$a_3 = \dots$ Таким образом, $G$ найдена

13.11.2015 Така вот задача:

$$\begin{cases} l_y = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0 \\ y(a) = 0; \quad y(b) = 0 \end{cases}$$

$a \qquad \xi \qquad b$

$L_y = 0 \Rightarrow y = 0$

$y_1, y_2$ – ЛНЗ? ФСР?

$$\left.\begin{array}{l} y_1: l_{y_1} = 0, \quad y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = 1 \\ y_2: l_{y_2} = 0, \quad y_2(b) = 0 \quad y_2'(b) = 1 \end{array}\right\}$$

Если ЛЗ, то $y_1 = c y_2$

$y_1(a) = y_1(b) = 0$

Они ЛНЗ, это очев))))))0)0

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 y_1(x) & a \le x \le \xi \\ b_2 y_2(x) & \xi < x \le b \end{cases}$$

$$\begin{cases} G'_x(\xi+0) - G'_x(\xi-0) = \frac{1}{p(\xi)} \\ G(\xi+0,\xi) = G(\xi-0,\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 y_1(\xi) - b_2 y_2(\xi) = 0 \\ b_2 y_2'(\xi) - a_1 y_1'(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases} \qquad a = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{p(\xi)} & y_2'(\xi) \\ 0 & -y_2(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \\ y_1(\xi) & -y_2(\xi) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{-y_2(\xi)/p(\xi)}{y_2(\xi)y_1'(\xi) - y_2'(\xi)y_1(\xi)} \qquad b = \frac{y_1(\xi)/p(\xi)}{W_{12}(\xi)}$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W_{12}(\xi)} & x < \xi \\[2ex] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W_{12}(\xi)} & x > \xi \end{cases}$$

Задача ещё!

$$\begin{cases} x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0 \\ y(0) \text{ конечно} \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad G = ? \text{ Найти}$$

$y' = \ln x$

проверим то, что эта задача и предыдущая.

$$\begin{cases} p_x'(x)y' + p(x)y'' + 1 \cdot y = 0. \\ p(x) = x^2(\ln x - 1) \qquad p'(x) = 2x(\ln x - 1) + x = \\ \qquad\qquad\qquad = 2x\ln x - x. \end{cases}$$

Сделаем замену $t = \ln x$ $\quad x = e^t \quad \frac{dy}{dx} = y\frac{1}{x}$

$\frac{d^2y}{(dx)^2} = \dots$

$(t-1)(y'' - y') - y' + y = 0$

$(t-1)y'' + (-t-1)y' + y = 0$

$(t-1)(y'' - y') - (y' - y) = 0 \qquad z = y' - y$

$(t-1)z' - z = 0 \qquad z = C_1(t-1)$

$y = C_2 e^t + C_3 t + C_4$

$y = C_2 e^t - C_1 t = C_2 x - C_1 \ln x$

$y_1: \begin{cases} y_1(1) = 1 \\ y_1(0) \text{ конечно} \end{cases} \qquad y_1 = x \qquad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{matrix} \qquad W = 1 - \ln x$

$y_2: \begin{cases} y_2'(1) = 1 \\ y_2(1) = 0 \end{cases} \qquad y_2 = \ln x \qquad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x \ln\xi}{\xi^2(\ln\xi - 1)(1 - \ln\xi)} \\[2ex] \dfrac{-\ln x\,\xi}{\xi^2(\ln\xi - 1)^2} \end{cases}$

Из пред. ф-лы:

$Ly=0$ Найдем $G$ — ядро обратного оператора

$(L-\lambda I)y=0$ $(L^{-1})$

Применим $G$ к $(L-\lambda I)y=0$:

$GLy - \lambda Gy = 0$

$y = \lambda \int_a^b G(x,\xi) y(\xi) d\xi$

Что известно:
- счетное множество
- если $G(x,\xi) = G(\xi, x)$, то с.з. $\lambda$ — веществ.
- с.ф. образуют полную систему в $L_2(a,b)$

Интегрирование по частям.

$$\int_\Omega \cdots \int u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \iint_{\partial\Omega} uv \cos(\bar{n}, \bar{e}_k) dS - \int_\Omega \cdots \int v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

внеш. нормаль.

$u(x_1 \dots x_n)$

В одномерном случае: $\Omega = [a,b]$ и все работает

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

в $L_2$ $(f,g) = \int_\Omega \cdots \int f(x) \overline{g(x)} dx$

$$(Lu, v) = \int_\Omega \cdots = \sqcup + (u, Mv)$$

$$(Lu, v) = \int_\Omega \cdots \int \Big( \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \bar{v}}_{1} + \underbrace{\sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v}}_{2} + cu\bar{v} \Big) dx$$

(1) $$\int_\Omega \cdots \int \Big(\sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\Big) \bar{v} = \iint_{\partial\Omega} \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \bar{v} dx - \int_\Omega \cdots \int \sum \frac{\partial a_{ij} \bar{v}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx =$$

$$= \iint_{\partial\Omega} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \bar{v} \cos(\bar{n}, \bar{e}_i) dx - \iint_{\partial\Omega} \sum \frac{\partial (a_{ij} \bar{v})}{\partial x_i} u dx +$$

$$+ \iint_\Omega \sum_{ij} \frac{\partial^2 (a_{ij} \bar{v})}{\partial x_i \partial x_j} u.$$

(2) $$\iint_{\partial\Omega} \sum b_i u \bar{v} \cos(\bar{n}, e_i) dS - \int_\Omega \cdots \int \sum_i \frac{\partial (b_i \bar{v})}{\partial x_i} u dx$$

$$Mv = \sum_{ij} \frac{\partial^2 (\overline{a_{ij}} v)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i \frac{\partial (\overline{b_i} v)}{\partial x_i} + \bar{c} v$$

10.11.2015

Формула Грина

$$\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$ ($n$ – внешняя нормаль)

$\mathbb{R}^3$: $\frac{1}{r_{MP}}$ – гармоническая $M(x,y,z)$, $P(\xi,\eta,\zeta)$. Проверим, что $\Delta\frac{1}{r_{MP}}=0$, $M\neq P$

$$\Delta\frac{1}{r_{MP}} = \frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} =$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = t^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)2(x-\xi)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(2t^{\frac{3}{2}} - 2(x-\xi)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot 2(x-\xi)\right)}{t^3} = \frac{3(x-\xi)^2}{t^{5/2}} - \frac{1}{t^{3/2}} = \frac{-3t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{3}{2}}}{t^3} \overset{?}{=} 0$$

Давайте для ф. Грина возьмем $v(M)=\frac{1}{r_{MP}}$

Рассмотрим $\Omega\setminus B_{\varepsilon,P}$ – в такой области $v$ опред., дифф.

Посмотрим на формулу при $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\Omega\setminus B}\left(u\left(\frac{3\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)}{\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)^{5/2}} - \dots\right) + v\Delta u\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + I$$

$$I = \int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}}\left(u\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)dS \xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

Eминус исчез за счет $\vec{n}$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}? = \int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}} u\frac{1}{r^2}\,dS - \int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \le |\nabla u| \le C$

первый интеграл $\to 4\pi u(P)$, второй $\to 0$ $\left(\int \le \int\frac{1}{r}C\,dS = \frac{1}{\varepsilon}\cdot ? \to 0\right)$

по т. Лагранжа

$$\int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}} u\frac{1}{r^2}\,dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\partial B_{\varepsilon,P}} u\,dS = \frac{1}{\varepsilon^2}u(\xi(\varepsilon))\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(P)$$

Итого формула:

$$-\int\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{r}\,dM - \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = 4\pi u(P)$$

Если точка на границе: $2\pi u(P) = -\int\limits_{\Omega} - \int\limits_{\partial\Omega}$

Та же задача, но в $\mathbb{R}^2$

$\frac{1}{r}$ на плоскости не является решением $\Delta f = 0$.

Попробуем $\ln r$

$$f = \ln\sqrt{x^2+y^2} \qquad f'_x = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad f''_{xx} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad f''_{xx} + f''_{yy} = 0. \qquad \nabla f = 0.$$

Из возьмем $f = \ln\frac{1}{r}$

Аналогично получим для точек внутри $2\pi u = \dots$

на границе $\pi u = \dots$

Св-ва

1) $u$ - гармон. в $\Omega$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$$

$\Delta$ По ф. Грина возьмем $v=1$ $\int\limits_{\Omega} 1\cdot \Delta u = \int\limits_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial n}\, dS$ $\nabla$

2) $u$ - гарм в шаре $\varphi$-л

$P$ - центр шара. $u(P)$

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{\Sigma_R} u\, dS$$

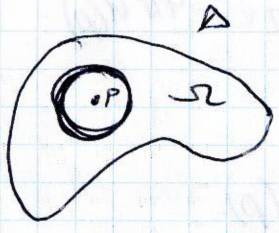
$\Delta$ следует из $4\pi u(p) = -\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\Delta u\, dM - \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)$

$$= 0 + \frac{1}{R^2}\int u\, dS \Rightarrow u(P) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{\partial\Omega} u\, dS$$

$\nabla$

Принцип максимума. Нет максимума внутри

$\Delta$



г.д. $P \in \operatorname{Int}\Omega$, в сфере-окрестности $P$ пусть $P$ - максимум.

Для любой сферы на ней по 2-му св-ву будет значение как в $P$.

Тогда замкнутый $\Omega$ изменим, откуда $f$ const на всем $\Omega$

$\rightarrow\leftarrow$

$\nabla$

Единственность Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ u|_{\partial\Omega} = \varphi\end{cases} \qquad u_1\ u_2 \quad v = u_2 - u_1$$

$$\begin{cases}\Delta v = 0\\ v|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \Rightarrow v \equiv 0 \text{ из принц. max.}$$

Задача Неймана:

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \varphi\end{cases}$$ тогда из 1 св-ва $\varphi$ должна: $\int\limits_{\partial\Omega}\varphi\, ds = 0$.

Будет ли единственность? Нет, ввиду того, что $\exists$

$$\begin{cases}\Delta v = 0\\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$ => не только трив. решение, константа тоже решение.

27.11.2015 Ф-я Грина задачи Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u = 0\\ u\big|_{\partial\Omega} = f\end{cases}$$ $\Omega$ — огр в $\mathbb{R}^3$

(Ф-ла Грина: $\underbrace{\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx}_{} = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$)

$$\begin{cases}\Delta v = 0\\ v\big|_{\partial\Omega} = g\end{cases}$$

$$4\pi u(P) = -\int\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) - \frac{1}{r_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS_M$$

$$4\pi u(P) = -\int\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}} + v\right) - \underbrace{\left(v + \frac{1}{r_{MP}}\right)}_{}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS_M$$

Пусть $g = -\frac{1}{4\pi r_{MP}}$

$$u(P) = -\int\limits_{\partial\Omega} f(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(v(M) + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right)dS_M$$ $=0$ при такой $g$

Тогда $G(M,P) = v(M) + \frac{1}{4\pi r_{MP}}$

Ф-я Грина з. Д для ур. Л в $\Omega$ — такая $G$ — дифф. 2 раза везде кроме P. Удовл. ур-ю Лапласа в $\Omega\setminus\{P\}$

1. $\Delta G = 0$ в $\Omega\setminus\{P\}$
2. $G\big|_{\partial\Omega} = 0$
3. $G$ представима в виде $v(M) + \frac{1}{4\pi r_{MP}}$

Тогда $$u(P) = \int\limits_{\partial\Omega} f(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(v(M) + \frac{1}{4\pi r_{MP}}\right)dS_M$$

Свойства:

1. $G(M,P) = G(P,M)$ (Δ: ?? с помощью ф-лы Грина и вырезания точек.)

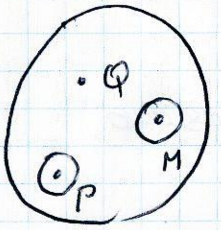
Δ Напишем ф-лу Грина для $\Omega\setminus\{B_\varepsilon(M), B_\varepsilon(P)\}$

$$\underbrace{\int\limits_{\Omega\setminus\ldots}(u\Delta v - v\Delta u)\,dQ}_{0 \text{ по } \Delta v = \Delta u = 0} = \overbrace{\int\limits_{\partial\Omega_{\text{внеш}}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS_Q}^{0 \text{ по } G|_{\partial\Omega}=0} +$$ $\exists\, u(Q) = G(Q,M)$, $v(Q) = G(Q,P)$

$$+ \int\limits_{\partial B_\varepsilon(P)} G(Q,M)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n} - G(Q,P)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial n} +$$

$$+\left(\int\limits_{\partial B_\varepsilon(M)} G(Q,M)\ \ldots\ -\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial B_\varepsilon(P)} G(Q,M)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n} - G(Q,P)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial n} = -\int\limits_{\partial B_\varepsilon(M)}(\text{— ″ —})$$



$$G(Q,P) = W_1(Q) + \frac{1}{4\pi r_{QP}}$$
$$G(Q,M) = W_2(Q) + \frac{1}{4\pi r_{QM}}$$
$$\int_{\partial B_\varepsilon(P)} \left( G(Q,P)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial n} - G(Q,M)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n}\right) dS_Q$$

$$\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(W_1(Q) + \frac{1}{4\pi r_{QP}}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(W_1(Q) + \frac{1}{4\pi r}\right) =$$
$$= \underbrace{W_1(Q)}_{\text{огр.}} - \frac{1}{4\pi r^2} \le C \qquad \left|\frac{\partial G(Q,M)}{\partial n}\right| \le C_1$$
$$|G(Q,M)| \le C_2$$

$$\int_{\partial B_{\varepsilon,P}} \left|\left(W_1(Q) + \frac{1}{4\pi r_{QP}}\right)\frac{\partial G(Q,M)}{\partial n} - G(Q,M)\left(W_1'(Q) - \frac{1}{4\pi r^2_{QP}}\right)\right| dS_Q \le$$

$$dS_Q = \sin\theta\, r_{QP}^2\, d\varphi\, d\theta$$

$$\le \int_{\partial B_{\varepsilon,P}} G(Q,M)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta \overset{\text{по т. о среднем}}{=} G(\xi,M)\,4\pi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} G(P,M)\cdot 4\pi$$

Другой интеграл будет с минусом. Итого все ОК

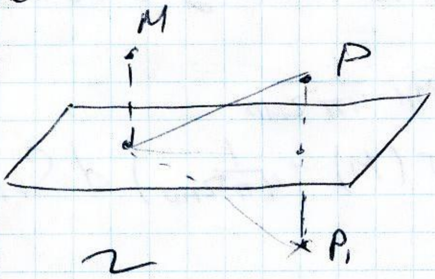
▷

$G(M,P)$ $\mathbb{R}^3_+$ $(z\ge 0)$

$z=0$

$\Delta v = 0$ в $\mathbb{R}^3_+$

$v|_{z=0} = \frac{-1}{4\pi r_{MP}}$



Методом изобр. зарядов $G$

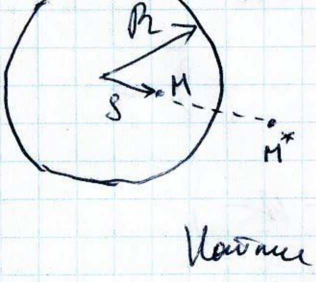
$$G = \frac{1}{4\pi r_{MP}} - \frac{1}{4\pi r_{MP_1}}$$

В $\mathbb{R}^2$ ф-я Грина.

$$\begin{cases}\Delta G = 0\\ G|_{\partial\Omega}=0\end{cases} \qquad G(M,P) = \underset{\text{гарм. в } \Omega}{v(M)} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}}$$

Свойства те же. Метод изображений тоже работает.

$\mathbb{R}^3$ 4.12.2015.



$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + v(P)$$
$$\begin{cases}\Delta v = 0 \text{ в } \Omega\\ v|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r_{PM}}\end{cases} \qquad v(P) = \frac{-q}{4\pi r_{M^*P}}$$

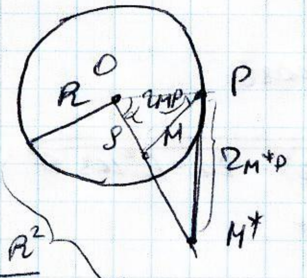
Найти величину заряда в $M^*$, чтобы на границе ф-я Грина была ОК

$|OM| = \rho, \quad |OM^*| = \rho^* = ? \quad \sigma(P) = \dots, \quad q = ?$

$\exists\ |OM^*| = \dfrac{R^2}{\rho}$ (просто)

$$\frac{1}{4\pi(R-\rho)} = \frac{q}{4\pi(\rho^*-R)} \Rightarrow q = \frac{\rho^*-R}{R-\rho} = \frac{R^2/\rho - R}{R-\rho} = \dots = \frac{R}{\rho}$$

Выбрали $q$. Проверим, что работает на сфере. Достаточно проверить любое сечение.



$\dfrac{R^2}{\rho}$

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} - \frac{R/\rho}{4\pi r_{PM^*}}$$

$$\frac{1}{r_{MP}} = \frac{R}{\rho\, r_{M^*P}} \qquad \frac{r_{MP}}{r_{M^*P}} = \frac{\rho}{R} \leftarrow \text{это верно по теореме cos}$$

По т. cos: $|MP|^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos\alpha$

$|M^*P| = \left(\dfrac{R^2}{\rho^*}\right)^2 + R^2 - 2\dfrac{R^2}{\rho}R\cos\alpha$ Всё задаёт.

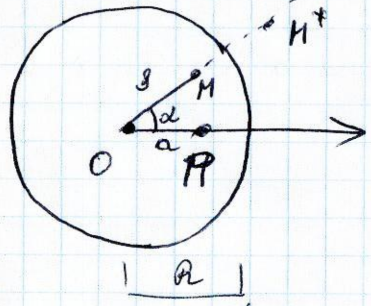
$\cancel{|MP|^2}$

$\mathbb{R}^2$: $G(P,M) = \cancel{\dfrac{1}{4\pi r_{MP}}}\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{MP}} - \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{R/\rho}{r_{M^*P}}$

По аналогии с $\mathbb{R}^3$

Решим 3. Дирихле в шаре $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\rho=a} = f(\varphi) \end{cases} \qquad u(P) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(P,M)}{\partial n} u(M)\,dM$$



$$r_{MP} = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha}$$

$$r_{M^*P} = \sqrt{\frac{R^4}{\rho^2} + a^2 - 2\frac{R^2}{\rho}a\cos\alpha}$$

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi}\left(\ln\frac{\dots}{r_{M^*P}^2} - \ln\frac{\dots}{r_{MP}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\ln\left[\frac{R^4}{\rho^2} + a^2 - 2\frac{R^2}{\rho}a\cos\alpha\right]\frac{\rho^2}{R^2} - \ln\left[\rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha\right]\right)$$

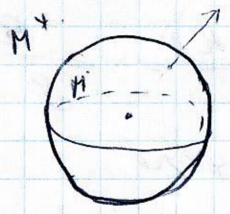
$$G'_\rho = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\frac{2a^2\rho}{R} - 2a\cos\alpha}{R^2 + \frac{a^2\rho^2}{R^2} - 2\rho a\cos\alpha} - \frac{2\rho - 2a\cos\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha}\right)$$

$$G'_\rho = \frac{2}{4\pi}\left(\frac{\frac{a^2}{R} - R}{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\alpha}\right)$$

$$u(P) = -\frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{a^2}{R} - R\right)f(\alpha)R\,d\alpha}{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - a^2)f(\alpha)\,d\alpha}{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\alpha}$$

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - a^2)f(\alpha)\,d\alpha}{R^2 + a^2 - 2Ra\cos(\alpha - \varphi)}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f(\theta, \varphi) \end{cases}$$



$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi r_{PM}} - \frac{R/r}{4\pi r_{PM^*}}$$

$M: (x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$,

$M^* = \left(\frac{R^2}{r}\cos\varphi\sin\theta, \frac{R^2}{r}\dots \quad \frac{R^2}{r}\dots\right)$

$P = (0,0,a)$ тоже

$$R^2_{MP} = a^2 + r^2 - 2ra\cos\theta$$

$\overset{\parallel}{r_{MP},\ cxap}$ $\quad R^2_{M^*P} = a^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2\frac{aR^2}{r}\cos\theta$

$$G(P,M) = \frac{1}{4\pi\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}} - \frac{R}{4\pi\sqrt{a^2r^2+R^4-2arR^2\cos\theta}}$$

$$G'_r(P,M) = -\frac{1}{8\pi(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}(2r-2a\cos\theta) +$$

$$+ \left.\frac{R(2a^2r-2aR\cos\theta)}{8\pi(a^2r^2+R^4-2arR^2\cos\theta)^{3/2}}\right|_{r=R} =$$

$$= \cancel{8\pi(a^2+R^2} \frac{(2a\cos\theta-2R)R^3 + R(2a^2R-2aR^2\cos\theta)}{8\pi R^3(a^2+R^2-2aR\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{a^2-R^2}{4\pi R(a^2+R^2-2aR\cos\theta)^{3/2}}$$

18.12.2015 ОРТОП Инт. ур-е Вольтерра

$$f(s) = y(s) + \int_a^s K(s,t) f(t)\,dt$$