Околотеория_типов

Опр Пред-терм: x - перем - пред λ-терм λ-абстракция

если Λ - пред-λ-терм, то $\lambda x.\Lambda$ - λ-терм

если Λ_1, Λ_2, то $\Lambda_1 \Lambda_2$ - λ-терм

(Λ) - тоже

применение

$\lambda x.\ a\ b$ — применение левоассоциативное

$\lambda x.(a\ b)$ $\quad$ $\cancel{(\lambda x.a)\ b}$ $\qquad$ $\lambda x(\lambda a((a\ x)(\lambda b.(a\ b))))$

Опр α - эквивалентность

$\Lambda_1 =_\alpha \Lambda_2$, если

(1) $\Lambda_1 = x$ & $\Lambda_2 = x$

(2) $\Lambda_1 = \lambda x.P$ & $\Lambda_2 = \lambda y.Q$ & ..

.. & $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$

t - свежая переменная

Свобода для подстановки такое же как в МЛ

(3) $P =_\alpha Q$ $R =_\alpha T$, то $PR =_\alpha QT$

Опр λ-терм (выражение) — это представитель класса эквивал. пред-λ-термов по $=_\alpha$.

Лемма транзитивность $=_\alpha$

$\Lambda_1 =_\alpha \Lambda_2 =_\alpha \Lambda_3$

1. Если Λ_1 - перем, то изи
2. Если $\Lambda_1 = \lambda a.P$, значит $\Lambda_2 = \lambda b.Q$, $\Lambda_3 = \lambda c.R$

и $\exists t:\ P[a := t] =_\alpha Q[b := t]$

$\exists s:\ Q[b := s] =_\alpha R[c := s]$

$Q =_\alpha Q[x := w]$ — более-менее очевидно.

Опр $A \to_\beta B$, если

(1) $\lambda x.P \to_\beta \lambda x.Q$ если $P \to_\beta Q$

(2) $PQ \to_\beta RW$, если $P \to_\beta R$ и $Q =_\alpha W$

или $P =_\alpha R$ и $Q \to_\beta W$

(3) $(\lambda x.P)\ Q \to_\beta P[x := Q]$, если Q св. для п-ки

Опр $E \twoheadrightarrow_\beta Z$, если $\beta_0 \dots \beta_n$ $\beta_0 \to \beta_1 \to \dots \to \beta_n$
$n \geq 0$ $\beta_0 = E$ $\beta_n = Z$

Вот это означает

Булева логика:

$T = \lambda x. \lambda y. x$ $NOT = \cancel{\lambda a. \lambda b. x}$
$\lambda a. (a F T$
$F = \lambda x \lambda y. y$ $Xor = \lambda a. \lambda b. a (Not\ b)\ b$

Теорема Чёрча - Россера

Later...

Чёрчевские нумералы

$n = f^n(x)$, $n = \lambda f. \lambda x. f^n(x))$

$IsZero = \lambda f. x. f(f(f(x))))$ $IsZero\ n =$

$\lambda n. n\ (\lambda x. F)\ T$

$IsZero\ \lambda f. \lambda x. x$

$(\lambda n. n\ (\lambda x. F))\ T)(\lambda f. \lambda x. x) =$

$= (\lambda f. \lambda x. x)(\lambda x. F)\ T =$

$= (\lambda x. x)\ T = T$

$Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. \underbrace{f(n\ f\ x)}_{f(f^n(x))}$

$n\ (f\ x) \to f^n(x)$

$(n\ f)\ x$

$2 = \lambda f. \lambda x. f(f(x))$

$2\ 2 = \cancel{\lambda f}\ \lambda x. [\lambda f. \lambda x. f(f(x))][\lambda$ ...

что-то типа 4

$2\ 2\ 2 = 2^4$

$0 = \lambda f x. x$

$Plus = \lambda ab. \lambda f x.\ a\ (b f x) x$

$Mul = \lambda ab.\ a\ (Plus\ b)\ 0$

$Pow = \lambda ab.\ ba = \lambda baf. (a\ b) f = \lambda a b.\ a (Mul\ b)\ 1$

$\langle a\ b\rangle = \lambda s.\ sab$
$fst\langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle T$
$snd\langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle F$

$Dec\ a = snd(a(\lambda p.\ \langle fst\ p+1, fst\ p\rangle)\langle 0, 0\rangle$

Y-комбинатор — $Y = \lambda f.$

$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ $\qquad \Omega\Omega = \Omega$

$\Omega \to_\beta \Omega$

<u>Опр</u> A и B β-экв.

$A =_\beta B$, если $\exists C$, что $A \twoheadrightarrow_\beta C$ & $B \twoheadrightarrow_\beta C$

$f:\ Yf =_\beta f(Yf)$

$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(x,x))$

$f = \lambda x.\ Not\ x$

(1) $((\alpha \supset (\alpha\supset\beta))\supset\alpha\supset\beta$
(2) $\alpha\supset\alpha$

$\alpha:\ \Phi(\alpha)$
$\Phi(\alpha) \to_\beta \Phi(\alpha)\supset\alpha$

10.02.2018

<u>Теорема</u> <u>Чёрч-Россера</u>

R обладает ромбовидным св-м

$\forall a, b, c\quad R(a, b) \& R(a, c) \& b \neq c, \Rightarrow \exists d.\ R(b, d)$ и $R(c, d)$

например $\geq$ на нат. числах ромбовидно, а $<$ на них же нет $(\exists b, c = 0, 1)$

β-~~ред~~ экв. не ромбовидно

$(\lambda x.A)((\lambda x.B)C)$

$\downarrow \qquad \searrow$

$A \qquad (\lambda x.A)B$

$\not\searrow$

Теор β-редуцируемость обл. ромбовидным св-м

Лемма R^* - рефл. транз. зам. R

$R^*(a,b)$ если $a = t_0 = \ldots = t_n = b$

$R(t_0,t_1), R(t_1,t_2), \ldots R(t_{n-1},t_n)$

Если R обл. р.с. то и R^* обл. р.с.

Δ очевидно)) ∇

$(\rightrightarrows)_\beta$ - паралл. β-редукция

$A \rightrightarrows_\beta B$

(1) $a \rightrightarrows_\beta a$

(2) $PQ \rightrightarrows_\beta RS$ если $P \rightrightarrows_\beta R$ и $Q \rightrightarrows_\beta S$

(3) $\lambda x.P \rightrightarrows_\beta \lambda x.R$ если $P \rightrightarrows_\beta R$

(4) $(\lambda x.P)Q \rightrightarrows_\beta P[x:=Q]$

$\rightrightarrows$ - обл. ромбов. св-м

Лемма

$M \rightrightarrows_\beta N$ и $P \rightrightarrows_\beta Q$, тогда

$M[x:=P] \rightrightarrows_\beta N[x:=Q]$

Следует индукция.

(1a) $M \equiv x$ Значит $N \equiv x$

$M[x:=P] \equiv P \quad N[x:=Q] \equiv Q$

(1б) $M \equiv a \not\equiv x$ (ок)

(2) $M = L_m R_M \quad N = L_N R_N$ (по инд.)

$L_m \rightrightarrows_\beta L_N$ и по инд. $L_m[x:=P] \rightrightarrows_\beta L_N[x:=Q]$

(3) аналогично

(4) $(\lambda x.M)N \rightrightarrows M[x:=N]$

$(\lambda x.M)N\,[x:=P] \rightrightarrows_\beta M[x:=N][x:=Q]$

(а) x не вх. св. в N $(\lambda x.M)_L N_L[x:=P] \equiv (\lambda x.M)_R N_R$

(б) x вх. св. в N

уже (4): $(\lambda x. M)_L N_L [x := P] \equiv (\lambda x. M_R)(N_R [x := P])$

(3) $\lambda x. P \twoheadrightarrow_\beta \lambda x. R$ если $P \twoheadrightarrow_\beta R$

(4) $(\lambda x. P) Q \twoheadrightarrow_\beta R[x := S]$

если $P \twoheadrightarrow_\beta R$ и $Q \twoheadrightarrow_\beta S$

Много Черч-Россера

или ∇.

— Нормальная форма единственна

Импликативная модель

(1). $\vdash \alpha \supset \beta$, если $\alpha \twoheadrightarrow_\beta \beta$ (1б) $\vdash b \supset a$, если ~~вместо~~ $a \twoheadrightarrow_\beta b$

(2) $\vdash (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \beta)$

Рассмотрим

$\varphi_\alpha = \lambda x. xx \supset \alpha$

$F_\alpha = \varphi_\alpha \varphi_\alpha = (\lambda x. (xx \supset \alpha))(\lambda x. (xx \supset \alpha)) \rightarrow_\beta (\lambda x. xx \supset \alpha)(\lambda x. xx \supset \alpha) \supset \alpha$

$\equiv \varphi_\alpha \varphi_\alpha \supset \alpha$

$F_\alpha \supset F_\alpha$

$F_\alpha \supset (F_\alpha \supset \alpha)$ — (1) акс +

$((F_\alpha \supset F_\alpha \supset \alpha) \supset (F_\alpha \supset \alpha)$ (2) акс

$F_\alpha \supset \alpha$ MP

$(F_\alpha \supset \alpha) \supset F_\alpha$

F_α $Z \longleftrightarrow (Z \supset \alpha)$

α Парадокс Карри

Исчисление производных simply typed λ-calc.

Аксиомы:

(1) $$\frac{}{\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau}$$

(2) $$\frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x:\sigma . M : \sigma \to \tau}$$

(3) $$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

Лемма о подстановке: $\Gamma \vdash M : \sigma$

(1) $\Gamma \subseteq \Gamma'$, то $\Gamma' \vdash M : \sigma$

(2) $FV(M) \subseteq dom(\Gamma)$

(3) $\Gamma' = \{x : \sigma \mid (x,\sigma) \in \Gamma \;\&\; x \in FV(M)\}$ $\Gamma' \vdash M : \sigma$

0: $dom(\Gamma) = \{x \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}$

0: FV — free variable

Лемма о порождении

(1) $\Gamma \vdash x : \sigma$, то $x : \sigma \in \Gamma$

(2) $\Gamma \vdash MN : \sigma$, то найдётся τ

$\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma$

и $\Gamma \vdash N : \tau$

(3) $\Gamma \vdash \lambda(x:\tau).\, M : \sigma$, то найдётся ρ

$\Gamma, x:\tau \vdash M : \rho$ и $\sigma = \tau \to \rho$

$\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ должна не иметь тип

σ $\lambda x.xx : \sigma$

(1) $x : \tau$, $xx : \rho$ $\sigma = \tau \to \rho$

(2) $xx : \rho$ $x : \varphi$. $x : \varphi \to \rho$

$\{x, \varphi\} \in \Gamma$, $\{x, \tau\} \in \Gamma$. это невозможно, $\tau \neq \varphi$

Exerpoз

Д $\lambda x.xx : \sigma$ Найдётся τ, ρ, такой что
$$\sigma = \tau \to \rho$$

$\tau = \eta \to \rho$ $\quad x : \tau \vdash x : \eta \to \rho$ $\quad \mathrm{I}$

$\tau = \eta$ $\quad x : \tau \vdash x : \eta$ $\quad \mathrm{II}$

Д-во леммы о порождении

1. $\dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma}{x : \sigma \in \Gamma}$ — просто из аксиом

2.

1. $\alpha[\alpha := \tau] = \tau$
2. $\beta[\alpha := \tau] = \beta$
3. $\sigma \to \rho[\alpha := \tau] = \sigma[\alpha := \tau] \to \rho[\alpha := \tau]$

$\Gamma[\alpha := \tau] = \{x : \sigma[\alpha := \tau] \mid x : \sigma \in \Gamma\}$

Лемма о подстановке

(1) $\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$

(2) $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : \tau$, то $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$

Л. о редукции

$\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \to_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$

Т. Чёрча-Россера

$\Gamma \vdash M : \sigma$

$M \twoheadrightarrow_\beta P$ и $M \twoheadrightarrow Q$

То найдётся R: $P \twoheadrightarrow R$ $\quad Q \twoheadrightarrow R$ $\quad \Gamma \vdash R : \sigma$

Зб 1: $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $N \twoheadrightarrow_\beta M$,

то не факт, что $\Gamma \vdash N, \sigma$

Т. О стирании типов

и ?

Теорема Чёрча-Россера

λс Карри также, по Чёрчу следует из

$\lambda x : \alpha . x$

$\lambda x : \beta . x$

Лемма

$\Gamma \vdash_Ч M : \sigma$ и $\Gamma \vdash_Ч M : \tau$, то $\sigma = \tau$

$\Gamma \vdash_Ч M : \sigma$ и $\Gamma \vdash_Ч N : \tau$, $M =_\beta N \to \sigma = \tau$

Лемма

$$Er(A) = \begin{cases} x, & A \equiv x \\ Er(M)\, Er(N) & A = MN \\ \lambda x . Er(M) & A = \lambda x : \sigma . M \end{cases}$$

① Если $M \to_\beta N$, то $Er(M) \to_\beta Er(N)$

② Если $\Gamma \vdash_Ч M : \sigma$, то $\Gamma \vdash Er(M) : \sigma$

Лемма M, N (Lifting)

$M \twoheadrightarrow_\beta N$ и $M' : Er(M') = M$, то найдётся

$N' : Er(N') = N, M' \to_\beta N$

Лемма

$\Gamma \vdash_К M : \sigma$, тогда $\Gamma \vdash_Ч M' : \sigma$

$Er(M') = M$

Посмотрим на нашу систему:

вывод типа? отношение типа?

Сильная нормализация (св-во системы, норма)

$\Gamma \vdash_К M : \sigma$

① Слабая норм: найдётся послед. β-ред. что $M \twoheadrightarrow M_k$, M_k - н.ф.

Пример

$\lambda x. xx : \sigma$ Найдётся τ, ρ, такой что
$$\sigma = \tau \to \rho$$

$\tau = \eta \to \rho$ $\quad x : \tau \vdash x : \eta \to \rho$ I

$\tau = \eta$ $\quad x : \tau \vdash x : \eta$ II

Д-во леммы о порождении

1. $\dfrac{\Gamma \vdash x : \sigma}{x : \sigma \in \Gamma}$ — просто через аксиому

1. $\alpha[\alpha := \tau] = \tau$
2. $\beta[\alpha := \tau] = \beta$
3. $\sigma \to \rho[\alpha := \tau] = \sigma[\alpha := \tau] \to \rho[\alpha := \tau]$

$\Gamma[\alpha := \tau] = \{x : \sigma[\alpha := \tau] \mid x : \sigma \in \Gamma\}$

Лемма о подстановке

(1) $\Gamma \vdash M : \sigma$ $\quad \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$

(2) $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$
$\Gamma \vdash N : \tau$, то $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$

Л. о редукции

$\Gamma \vdash M : \sigma$ и $M \to_\beta N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$

Т. Чёрча-Россера

$\Gamma \vdash M : \sigma$

$M \twoheadrightarrow_\beta P$ и $M \twoheadrightarrow Q$

То найдётся R: $P \twoheadrightarrow R$ $\quad Q \twoheadrightarrow R$ $\quad \Gamma \vdash R : \sigma$

Зб.1: $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $N \twoheadrightarrow_\beta M$,

то не факт, что $\Gamma \vdash N, \sigma$

Т. О стирании типов

??

Теорема Чёрча-Россера

Лс Карри ~~так~~ же, по Чёрчу следует

$\lambda x : \alpha . x$

$\lambda x : \beta . x$

<u>Лемма</u>

$\Gamma \vdash_ч M : \sigma$ и $\Gamma \vdash_ч M : \tau$, то $\sigma = \tau$

$\Gamma \vdash_ч M : \sigma$ и $\Gamma \vdash_ч N : \tau$, $M =_\beta N \Rightarrow \sigma = \tau$

<u>Лемма</u>

$$Er(A) = \begin{cases} x, & A = x \\ Er(M)\,Er(N) & A = MN \\ \lambda x . Er(M) & A = \lambda x : \sigma . M \end{cases}$$

① Если $M \to_\beta N$, то $Er(M) \to_\beta Er(N)$

② Если $\Gamma \vdash_ч M : \sigma$, то $\Gamma \vdash Er(M) : \sigma$

<u>Лемма</u> M, N (Lifting)

$M \twoheadrightarrow_\beta N$ и $M' : Er(M') = M$, то найдётся

$N' : Er(N') = N$, $M' \to_\beta N$

<u>Лемма</u>

$\Gamma \vdash_к M : \sigma$, тогда $\Gamma \vdash_ч M' : \sigma$

$Er(M') = M$

Посмотрим на нашу систему:

вывод типа? существование типа?

Сильная <u>нормализация</u> (св-во системы, норма)

$\Gamma \vdash_к M : \sigma$

① Слабая норм: найдется пос. β-ред. что $M \twoheadrightarrow M_n$, M_n - н.ф.

② Сильная норм. может пос. $\twoheadrightarrow_\beta$ н.ф.

SN — множество сильно нормализ. термов

(а) Если M_σ — н.ф. то $M \in SN$

(б) Если ~~любой~~ у M любой M': $M \to_\beta M'$ из SN, то $M \in SN$

Тогда $x \in SN$,
S сильно нормализуем.

$[\![\alpha]\!]$ — мн. в $\{x \mid x : \alpha\}$ $A, B \subseteq \Lambda$

Опр. $A \to B = \{C \in \Lambda \mid \forall P \in A \quad CP \in B\}$

Опр. $[\![\sigma]\!] = \begin{cases} SN, & \sigma = \alpha \text{ (Атомарный)} \\ [\![\rho]\!] \to [\![\tau]\!], & \sigma = \rho \to \tau \end{cases}$

Опр. X насыщенное, если

① $X \subseteq SN$

② $M_1, \dots, M_n \in SN$, то $\overbrace{x}^{\text{перем.}} M_1 \dots M_n \in X$

③ $P[x := M_1] M_2 \dots M_n \in X$, то $(\lambda x. P) M_1 \dots M_n \in X$
$P \in \Lambda$ $M_1 \dots M_n \in SN$

Лемма

① SN насыщенное (1 и 3 св-ва очевидны, 2 ⇐ ?
∃ $xM_1 \dots M_n$ содержит бескон. посл. редукций,
тогда $M_1, M_2, \dots M_n$ — тоже по сод.)

② A, B — нас., то $A \to B$ нас.

1. $A \to B \subseteq SN$ по опр $\to$

или ⇐?: $A \to B \notin SN$ $P \to P_1 \to P_2 \dots$
~~AE~~ $a \in A$, $Pa \in B$, но $Pa \to P_1 a \to \dots$

2. $xM_1 \dots M_n \in X$, $aM_1 \dots M_n \in A$, $\in B$
$\forall P$ из $\to$: $P \in A \subseteq SN$, $(aM_1 \dots M_n P) \in B$

3. $C = P[x := M_1] M_2 \dots M_n \in A \to B$
$CQ = P[x := M_1] M_2 \dots M_n Q$ (B этом B)
$(\lambda x. P) M_1 \dots M_n Q \in B$

② σ - тип $\Rightarrow$ $[\![\sigma]\!]$ насыщена

Опр

Оценка перем. $\rho: V \to \Lambda$ — ф-я

Оценка перем. $\rho: V \to \Lambda$ — нужно дальше

тогда $\rho[X := N](y) = \begin{cases} \rho(y), & y \neq x \\ N, & y = x \end{cases}$ — типа замена в оценке

① $\rho[x := N]: V \to \Lambda$

② $[\![M]\!]_\rho \equiv M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)]$ $\{x_1 \dots x_n\} = FV(M)$

③ $\rho \models M : \sigma$ $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$

④ $\rho \models \Gamma$ $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1 \dots x_n : \sigma_n\}$

$\rho(x_i) \in [\![\sigma_i]\!]$

⑤ $\Gamma \models M : \sigma$, если $\rho \models \Gamma$ влечет $\rho \models M : \sigma$

Лемма:

$\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \models M : \sigma$

Д-во ниже

Теор $A \in \Lambda$, значит $A \in SN$ — по опр $\rho \models \Gamma \to \rho \models A : \sigma$

$\Gamma \vdash A : \sigma$, то $\Gamma \models A : \sigma$, $\exists\, \rho(x) = x$

Δ

④ $\rho \models \Gamma$? Возьмем $x : \sigma \in \Gamma$ и убедимся, что $\rho(x) \in [\![\sigma]\!]$

$\rho(x) = x$ $x \in [\![\sigma]\!]$

У нас есть: $x : \sigma \in \Gamma$, хотим $x \in [\![\sigma]\!]$

Δ σ тип $\Rightarrow$ $[\![\sigma]\!]$ насыщена, тогда $x \in [\![\sigma]\!]$ по 2й п. опр. $\triangleright$

⑤ $\rho \models A : \sigma$ $A = [\![A]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \subseteq SN$

└ 1 п. опр. нас. мн-ва

значит A

$\triangleright$

↳ ⊳ Д-во: (индукция)

(1) $\overline{\Gamma', x:\sigma \vdash x:\sigma}$ $\quad$ $\rho \models \Gamma$, то $[\![x]\!]_\rho = \rho(x) \in [\![\sigma]\!]$
(опр. $\rho \models \Gamma$)

(2)
$$\frac{\Gamma \vdash M:\sigma\to\tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash MN:\tau}$$

$\rho \models \Gamma$ по пр. инд. $\Gamma \models M:\sigma\to\tau,\ \Gamma \models N:\sigma$

$\rho \models M:\sigma\to\tau$ и $\rho \models N:\sigma$

$[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$ и $[\![N]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$ $\quad$ $\in[\![\sigma]\!]\to[\![\tau]\!]$ $\quad$ $\in[\![\sigma]\!]$

$[\![MN]\!]_\rho = [\![M]\!]_\rho [\![N]\!]_\rho \in [\![\tau]\!]$

Т.е. $\rho \models MN:\tau$

(3)
$$\frac{\Gamma', x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M:\sigma\to\tau}$$

$\rho \models \Gamma$ $\quad N \in [\![\sigma]\!]$ $\quad \rho[x:=N] \models \Gamma, x:\sigma$

$\rho[x:=N] \models M:\tau$ (по инд. инд.)

$[\![M]\!]_{\rho[x:=N]} \in [\![\tau]\!]$

Покажем $[\![\lambda x.M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$,

то есть $[\![\lambda x.M]\!]_\rho N \in [\![\tau]\!]$

$[\![\lambda x.M]\!]_\rho N = (\lambda x.M)[x_1:=\rho(x_1) \ldots x_n:=\rho(x_n)]\, N \to_\beta$

$\to_\beta M[x_1:=\rho(x_1) \ldots x_n:=\rho(x_n), x:=N] = [\![M]\!]_{\rho[x:=N]}$
$\in [\![\tau]\!]$

⊲

Опр. $\bar{n} = \lambda f.\lambda x.\, f^n x$

Теорема

Пусть $\eta = (\alpha\to\alpha)\to(\alpha\to\alpha)$ — Int $\quad \lambda f.x.\, f(f(x))$

$F: \eta \to \eta \to \eta$

$P(x,y): N_0 \to N_0 \to N_0$

Тогда F может выражать только расш. полином.

Это значит, что $\vdash \bar{a}\ \bar{b} = \overline{p(a,b)}$

это полином с if

$\hookrightarrow \Sigma(\Pi \ldots$

$h(x)$ - сложность x

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x = \alpha \\ h(\sigma) + h(\tau) + 1 & x = \sigma \to \tau \end{cases}$$

<u>Лемма</u> N^{τ} - выр. в норм. форме

S - подвыр. N, $S \not\equiv N$ & $S \not\equiv x$ своб. перем.

Тогда $\vdash \sigma\ \exists R^{\rho}$ - подвыр. N, что $h(\sigma) < h(\rho)$

Δ

а) $\exists S \equiv y$ - перем. в λ-абстр.

$$[\lambda y^{\sigma}.(\ldots y^{\sigma} \ldots)]^{\sigma \to \tau} = R^{\sigma \to \tau}$$

б) $\exists S \equiv RP$, $S : \sigma$, $R : \tau \to \sigma$, $P : \tau$

в) $\exists S \equiv \lambda y . T \neq N$, тогда S - часть выр.

1) $R = \cancel{\lambda a \lambda b}\ (\lambda a . S)^{\alpha \to \sigma}$

2) SQ - это не норм. форма, невозможно

3) RS $R^{\sigma \to \alpha}$

∇

<u>Опр</u>

$$E(x,y) = \begin{cases} P_1(x,y) & x, y > 0 \\ P_2(x) & x > 0, y = 0 \\ P_3(y) & y > 0, x = 0 \\ k & y = 0\ x = 0 \end{cases}$$

Если $k \in \mathbb{N}$, то E - обр. измерим

<u>Теорема</u> $\mathcal{V} = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ → тип $\lambda f . \lambda x . f(f(\ldots(x))\ldots)$

заключено R. $\mathcal{V} \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ Например $E(x,y)$: $R\ \bar{x}\ \bar{y} =_{\beta} \overline{E(x,y)}$

$\triangleright$

$R\, a^{\alpha} b^{\alpha} f^{\alpha\to\alpha} \to_\beta N$ (н. ф).

T - подтерм N

$\vdash T^{\tau}$: $\alpha, \alpha\to\alpha, \alpha$

а) $h(\tau) \geq 3$, T - подтерм N (a) $T = a$ $T = b$

Применяем рекурсивно лемму, удаляя либо во $FV \to \alpha$ либо $bN \to \alpha.\alpha\alpha$

б) $h(\tau) = 2$ $\tau = \alpha \to (\alpha\to\alpha)$ или $(\alpha\to\alpha)\to\alpha$

Пусть $T \cdot \alpha\to\alpha$

(1) $T \equiv f$

(2) $T = \alpha, S^{\alpha\to\alpha}, b, S^{\alpha\to\alpha}$

(3) $T = \lambda y.\, S_1 (S_2 \dots S_n(\theta)) \dots))$ θ-перем.

Покажем, что $T[^{a=x}_{b=y}] =_\beta \lambda y. f^{P(x,y)} y$ или $T =_\beta \lambda y. f^{P(x,y)} z$

1. $F =_{\beta\eta} \lambda y. f\, y$ $P(x,y) = 1$ (частное применение или константа)

2. $S' = \lambda g. f^{P(x,y)} g$

aS $(\lambda f p. f^m p)(\lambda g f^{P(x,y)} g) \to_\beta$

$\to_\beta \lambda p. (\lambda g f^{P(x,y)} g)^m p \to_\beta$

$\to_\beta \lambda p. (f^{P(x,y)})^* p$

3 $\lambda q. S_1 (\dots S_n(\theta) \dots)$

$S_i^{\alpha\to\alpha} = \alpha_p. f^{P_i(x,y)} p$ если $\lambda p. f^{P_i(x,y)} z$

если $z = q$, то если все S_i имеют вид $\lambda y. f^{P(x,y)} y$, тогда их произведение этот вид

если $\theta \neq q$ или B_i имеет вид $\lambda y. f^{\dots} z$, тогда константа

$\triangledown$

Есть три задачи:

1. Реконструкция / вывод типа $\Gamma \vdash T$?

2. Обитаемость типа $\vdash T$? $\Gamma \vdash T$?

Унификация

(a) Ат. терм:

a. $x_1 \dots x_n$ — переменные

b. $f_1 \dots f_e$ — ф-ции

$f(x, g(x))$ — терм

A — мн-во ат. термов.

$f(x, g(x)) = f(y, z)$

$\left.\begin{matrix} y = x \\ z = g(x) \end{matrix}\right\}$ решение тела

$S(x)$ — подстановка — даст не id на конечном кол-ве эл-в.

$S(x)$ меняет x

$S(f(x, y, z)) = f(S(\cdot) \dots)$

$S \circ T(x) = S(T(x))$

(б) S разрешает сист. ур-й, если

$\theta_1 = \eta_1$ $S(\theta_1) = S(\eta_1)$

$\vdots$

$\theta_k = \eta_k$ $S(\theta_k) = S(\eta_k)$

Система в разр. форме

(1) $x_i = \theta_i$

(2) Если если $x_i = \theta_i$, то нет j | x_j вх. в θ_j

(3) Нет $j \neq i$, x_θ $x_i = x_j$

Система несовместна, если

(1) $f(x_1 \dots x_n) = g(\eta_1 \dots \eta_n)$

(2) $x = f(\dots x \dots)$

Подстановка — решение.

Опр $S \le T$ (подстановки), если $\exists R: S = R \circ T$

T — наиб общая подстановка реш сист, если любое Q-реш $Q \le T$

Пример: $x = f(y)$ $T(x) = f(y)$ $\longrightarrow R(y) = g(y)$

$S(x) = f(g(y))$

$S(y) = g(y)$

Унификация.

Утв (1) $\begin{matrix} x = \theta \\ x = \sigma \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \theta \\ \theta = \sigma \end{matrix}$ Сист $\to$ разр / несовм.

(2) $x = \theta \Rightarrow \theta = x$

(3) $f(\theta_1 \dots \theta_k) = f(\eta_1 \dots \eta_k) \Rightarrow \begin{matrix} \theta_1 = \eta_1 \\ \vdots \\ \theta_k = \eta_k \end{matrix}$

(4) $\begin{matrix} x = \theta \\ \tau = \eta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \theta \\ \tau[x := \theta] = \eta[x := \theta] \end{matrix}$

(5) $\theta = \theta$

Этих правил хватит чтоб сделать из исходной системы хорошую

Пример

$$A \to ((A \to A) \to A) = Q \to (R \to Q)$$

$A = Q$ $A = Q$ $A = Q$

$A \to A = R$ $R = A \to A$ $R = A \to A$

$A = Q$ $Q = Q$

решение

$\Rightarrow S(R) = A \to A$

$S(Q) = A$

Опр M — λ-выр. переименование — разные

$M \to \{E_M, \tau_M\}$ α_x — тип где x из M

$M \equiv x$ $E_M = \emptyset$ $\tau_M = \alpha_x$

$M \equiv PQ$ α — свежая пер

$E_M = E_P \cup E_Q \cup \{\tau_P = \tau_Q \to \alpha\}$

$\tau_M = \alpha$

$P^{\tau_Q \to \alpha}\ Q^{\tau_Q} : \alpha$

$M = \lambda x. P$ $E_M = E_P$ $\tau_M = \alpha_x \to \tau_P$

Теор.

(1): M - терм, S - решение E_m

$$\Gamma = \{x : S'(\alpha_x),\ x \in FV(M)\}$$

Тогда $\Gamma \vdash M : S(\tau_m)$

(2) $\Gamma \vdash M : \rho$, то найдётся S-решение E_m

что $\rho = S(\tau_m)$ и $x : S'(\alpha_x) \in \Gamma$ если $x \in FV(M)$

Опр: (Γ, τ) - наиб. общ. пара типа для M

① $\Gamma \vdash M : \tau$

② $\Gamma' \vdash M : \tau'$, то найдётся $S : \Gamma' = S(\Gamma), \tau' = S(\tau)$

Теор $(\{x : S(\alpha_x), x \in FV(M)\}, \tau_m) = $ н.о.т.

Пример

$\lambda x. xx$

$x : (\varnothing, \alpha_x)$

$xx : (\alpha_x = \alpha_x \to \alpha_x,\ \alpha)$

$\lambda x.xx : (\alpha_x = \alpha_x \to \alpha,\ \alpha_x \to \alpha)$

$\lambda f x. f(fx)$

$\cancel{fx \quad \alpha_f}$

$fx : \alpha, \quad \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha\}$

$f(fx) : \beta, \quad \{\alpha_f = \alpha_x \to \alpha,\ \alpha_f = \alpha \to \beta\}$

$\lambda x. f(fx)$:

$\alpha_x \to \beta$

$\alpha_f \to \alpha_x \to \beta$

$\alpha_f = \beta \to \beta$

$\alpha_x = \beta$

$\alpha = \beta$

$(\beta \to \beta) \to \beta \to \beta)$

Изоморфизм Карри-Ховарда

Утв (ИКХ)

1. Если $\Gamma \vdash M : \varphi$, то $types(\Gamma) \vdash_{и.в.} \varphi$ $\quad \Gamma.map((x,\tau) \to \tau)$

2. $\Gamma \vdash_{и.в.} \varphi$ то найдется $M \in \Lambda$, что
$\Delta = \{x_\tau : \tau \mid \tau \in \Gamma\}$ $\quad \Delta \vdash M : \varphi$

Δ $\dfrac{}{\Gamma, x:\varphi \vdash x:\varphi}$ (акс) $x \notin dom(\Gamma)$; $\dfrac{\Gamma \vdash M : \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash N : \varphi}{\Gamma \vdash MN : \psi}$

$\cancel{\dfrac{\Gamma \vdash M : \tau, \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) N}}$ $\qquad \dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma . M : \sigma \to \tau}$ $x \notin dom(\Gamma)$

(1) очевидно

(2) Возьмем $\Gamma \vdash \varphi$ / ИИВ генценовского типа: $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$, $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$, $\dfrac{\Gamma, \sigma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma \to \tau}$

Д-м по инд. утв. д-ва в

1 правило

Δ из усл.
а) $\varphi \in \Gamma$
б) $\varphi \notin \Gamma$

б) $\dfrac{}{\Delta, x_\varphi : \varphi \vdash x_\varphi : \varphi}$

а) $\dfrac{}{\Delta \setminus \{x_\varphi : \varphi\}, x_\varphi : \varphi \vdash x_\varphi : \varphi}$

2 правило

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \Rightarrow \dfrac{\Delta \vdash M : \varphi \to \psi \quad \Delta \vdash N : \varphi}{\Delta \vdash MN : \psi}$$

3 правило

$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$ $\quad$ а) $\varphi \in \Gamma$ $\quad$ По предп. индукции $\Delta \vdash M : \psi$

б) $\varphi \notin \Gamma$, применим 3 правило

Можно показать

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash M : \psi}{\Delta, x_\varphi : \varphi \vdash M : \psi}}{\Delta \vdash \lambda x^\varphi . M : \varphi \to \psi}$$

∇

Добавим в ИИВ связки:

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi \quad \Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\&\psi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\varphi\&\psi}{\Gamma\vdash\varphi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\varphi\&\psi}{\Gamma\vdash\psi}$$

$$\frac{\Gamma\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\varphi\vee\psi} \qquad \frac{\Gamma\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\vee\psi} \qquad \frac{\Gamma,\varphi\vdash\xi, \quad \Gamma,\psi\vdash\xi, \quad \Gamma\vdash\varphi\vee\psi}{\Gamma\vdash\xi}$$

Алг. типы — тип data в Haskell

Boolean = true | false

$$\frac{\text{case } A^{\varphi\to\xi}\ B^{\psi\to\xi}\ V^{\varphi\vee\psi}}{x:\xi} \quad \text{это} \quad \left(\begin{array}{l}\text{case } x \text{ of}_\xi \\ A\ a \to (\ldots)^\xi \\ B\ b \to (\ldots)^\xi\end{array}\right)^\xi$$

$$\frac{\Gamma\vdash\bot}{\Gamma\vdash\varphi}$$ — в ML это raise (exception)

Докажем:

$a\to((a\to\bot)\to\bot)$ $\qquad\qquad$ $a\to(b\to a)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\lambda x.(\lambda b.a)$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{a,\to\bot,a\vdash a \qquad a\to\bot,a\vdash a\to\bot}{a,a\to\bot\vdash\bot}}{a\vdash(a\to\bot)\to\bot}}{\vdash a\to((a\to\bot)\to\bot)}$$

$\Downarrow$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{y:a\to\bot,x:a\vdash x:a \qquad y:a\to\bot,x:a\vdash y:a\to\bot}{x:a,y:a\to\bot\vdash yx:\bot}}{x:a\vdash\lambda y^{a\to\bot}.yx:(a\to\bot)\to\bot}}{\vdash\lambda x^a.\lambda y^{a\to\bot}.yx\ a\to((a\to\bot)\to\bot)}$$

ИИП 2 порядка (Кванторы по предикатам)

$\Phi ::= \bot \mid p \mid \varphi \to \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \& \varphi \mid \forall_p \varphi \mid \exists p\, \varphi$

Правила для кванторов:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p \varphi}\ p \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall p \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[p := \sigma]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \sigma]}{\Gamma \vdash \exists p \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists p \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ p \notin FV\{\Gamma, \psi\}$$

Крипке:

$W, \leq, \{D_w, w \in W\}$, ~~где $D_w =$~~

Пусть $a \in D_w$ ~~$\Rightarrow a \subseteq W$~~ $\qquad w \leq w' \Rightarrow D_w \subseteq D_{w'}$

(1) $a \subseteq W$

(2) $t \in a$ и $v \geq t$, то $v \in a$, мн-во замкнуто вверх

---

v – оценка, v: Перем $\to \mathcal{P}(W)$; $v(x)$ замкнуто вверх

$$v[x := p](t) = \begin{cases} p & t = x \\ v(t) & t \neq x \end{cases}$$ типа перекрытия.

$w, v \Vdash p$, если $w \in v(p)$

$w, v \Vdash \varphi \& \psi$, если $w, v \Vdash \varphi$ и $w, v \Vdash \psi$

⋮

$w, v \not\Vdash \bot$

$w, v \Vdash \forall_p \psi$, если $w_1 \geq w$ и $q \in D_{w_1}$, $w_1, v[p := q] \Vdash \psi$

$w, v \Vdash \exists p \psi$, если найдется $q \in D_w$ $\quad w, v[p := q] \Vdash \psi$

~~Опр Модель Крипке полна, если~~

Оценка

26.03.16

System F

Def $\tau = \alpha \mid \sigma \to \theta \mid \forall\alpha.\theta$
где σ, θ — мн. типы

$x \,\&\, y \equiv \forall p((x \to y \to p) \to p)$ (если p — τ можно всё T при x и p)

$x \vee y \equiv \forall p.\ (x \to p) \to (y \to p) \to p$

Аксиомы

1) $\dfrac{}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma}$ $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N:\tau}{\Gamma \vdash MN:\sigma}$

3) $\dfrac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.M:\sigma \to \tau}$ $x \notin \mathrm{dom}\,\Gamma$

4) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.M:\forall\alpha.\sigma}$ $\alpha \notin FV(\Gamma)$

5) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M\tau:\sigma[\alpha:=\tau]}$

$L = x \mid LL \mid \lambda x.L \mid \Lambda\alpha\, L \mid L\tau$ — лямбда-термы

Λ Связывание по типу

Пример:

$Bool = \forall\alpha(\alpha \to \alpha \to \alpha)$ $\begin{cases} T = \lambda xy.x \\ F = \lambda xy.y \end{cases}$

$T = \Lambda\alpha.\lambda x^{\alpha}.\lambda y^{\alpha}.x$

$Not: \forall\alpha((\alpha \to \alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha))$

Not $[Not = \lambda x^{Bool}.(x\ Bool)\ F\ T$

Т.е. $(Not\ F) \twoheadrightarrow_{\beta} (F\ Bool)\ F\ T \twoheadrightarrow_{\beta} (\lambda x^{Bool}.\lambda y^{Bool}.y)\ F\ T \twoheadrightarrow_{\beta} F$.

$Int = \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$

$\bar{n} = \Lambda\alpha.\lambda f^{\alpha \to \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f^{n}(x)$

$(+1): Int \to Int$ $\quad (+1) = \lambda n^{Int}.\Lambda\alpha.\lambda f^{\alpha \to \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f(n\alpha f x)$

$(isZero): Int \to Bool$ $\quad isZero = \lambda n^{Int}.n\ Bool\ (\lambda x^{Bool}.F)\ T$

$x \vee y = \forall p.(x \to p) \to (y \to p) \to p$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash in_l(M) : \psi \vee \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \varphi}{\Gamma \vdash in_r(M) : \psi \vee \varphi}$$

представление в чистом Λ.λ.

$$\frac{\Gamma \vdash L : \psi \vee \varphi \quad \Gamma, x : \psi \vdash M : \rho \quad \Gamma, y : \varphi \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash case\ (L, x.M, y.N) : \rho}$$

type $\psi \vee \varphi = Inl\ \psi \mid Inr\ \varphi$ $\qquad$ $Inl : \psi \to \psi \vee \varphi$

(switch data
case $x : \psi$ — ρ
case $x : \varphi$ — ρ)

~~$inl = \Lambda\psi.\lambda m^{\psi}.\Lambda\varphi.\Lambda\alpha$~~

$in_l = \underbrace{\Lambda\psi.\Lambda\varphi}_{\text{сложно описать}}\ \lambda m^{\psi}.\underbrace{\Lambda\alpha.\lambda f^{\psi\to\alpha}.\lambda g^{\varphi\to\alpha}.fm}_{\psi\vee\varphi}$

неопределенность

$List = \cancel{\Lambda\alpha}.\ \cancel{\Lambda\alpha}.\ \lambda\alpha.(\alpha \,\&\, List\ \alpha)$
не влезает в грамматику, не умеем применять к типам типы

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B\rangle : \varphi \,\&\, \psi}$$

$Z = \overset{\geq 0}{Int} \vee \overset{\leq 0}{Int}$ - сложно

$Z = Int \,\&\, Int$

$+a-b$
$\underline{c-b}$
$(a+c)-(b+d)$

$Plus\ Z = \lambda x^{\cancel{Int \& Int}}\ \cancel{\lambda y}$
$\lambda x^{I\&I}\ \lambda y^{I\&I}.\langle \pi_1(x) + \pi_1(y),$
$\pi_2(x) + \pi_2(y)\rangle$
$I \to I \to I$

абстр типа данных - интерфейс

$stack = \alpha \,\&\, (\alpha \,\&\, \vartheta \to \alpha) \,\&\, (\alpha \to \vartheta \,\&\, \alpha)$ - и что за α, ϑ?

ну надо $\cancel{\forall}\ \forall\vartheta \ldots$, но не для всех α
stack от α зависим.

$stack = \exists\alpha.\alpha \,\&\, ((\alpha \,\&\, \vartheta) \to \alpha) \,\&\, (\alpha \to (\alpha \,\&\, \vartheta))$

Введем правила для $\exists$:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}{\Gamma \vdash \underbrace{pack\ M, \tau\ to\ \exists\alpha.\sigma}\ : \exists\alpha.\sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M\ \exists\alpha.\sigma \quad \Gamma, x \overset{:\sigma}{\vdash} N : \rho}{\Gamma \vdash \underbrace{abstype\ \alpha\ with\ x : \sigma\ is\ M\ in\ N}\ : \rho}$$

$\alpha \notin FV(\Gamma, \rho)$

Как это понимать:

1) Пусть есть стек M, у которого все ок, если

$\alpha = \tau$, ~~$\tau = IntList$~~

$\tau = List\langle\vartheta\rangle$

~~$M : \sigma = \langle [\,], \lambda$~~

$M : \sigma[\alpha := \tau] = \langle [\,], \lambda\langle a^{\tau}, v\rangle . v : a, \lambda(v^{\vartheta} :: a^{\tau}).(a, v)\rangle$

~~$\Gamma \vdash pack\ M\ \sigma[\alpha := \tau]$~~

$\Gamma \vdash pack\ M, \tau\ to\ \exists\alpha.\sigma : \exists\alpha.\sigma$

$\Lambda\beta.\lambda x^{\forall\alpha.(\sigma\to\beta)}.x\,\tau\,M$!!!

$\forall\beta((\forall\alpha\to\beta)\to\beta)$

реализация

Обычное $\exists$:

$\exists x.\varphi = \neg\forall x.\neg\varphi$

$\exists x.\varphi \equiv \neg\forall x.\neg\varphi \equiv$

$\equiv (\forall x.\varphi\to\bot)\to\bot \equiv$

$\equiv \forall\beta((\forall x.\varphi\to\beta)\to\beta)$

2) Пусть есть программа

$N : \rho$ с типом $x : \sigma$ работающая,

если ~~реализация~~ $M : \exists\alpha.\sigma$
неизвестна

N — функция, использующая функции $x : \sigma$

M — абстрактная конкретная реализация стека

тогда существует терм типа ρ, такой, что

мы $N, x : \sigma$, со свободой ρ, подставим туда

как α, которое мы назовём (и мы)

построим новое выражение типа ρ,

наша программа, не приняв и $x : \sigma$

реализация: $M_{\rho}(\Lambda\alpha.\lambda x^{\sigma}.N)$

подставим $(\Lambda\beta.\lambda t^{\forall\alpha.(\alpha\to\beta)}.t\,\tau\,M)\,\rho\,(\Lambda\alpha.\lambda x^{\sigma}.N^{\rho}) \to_{\beta}$

$\to_{\beta} \Lambda\rho\,\lambda x^{\sigma}N^{\rho}$

Стрелки

$M : \sigma[\alpha := \tau]$

1) $\Lambda\beta.\lambda x^{\forall\alpha(\sigma\to\beta)}.\underbrace{x\tau}_{\sigma[\alpha:=\tau]\to\beta} M : \underbrace{\forall\beta.(\forall\alpha(\sigma\to\beta)\to\beta)}_{\text{то что нужно}}$

$\cancel{\Gamma \vdash \forall\alpha.\alpha}$

$\Gamma \vdash \beta\ \ell$

пока. 2) должно разрешаться в J

8.04 так

$x : \forall\beta\exists\alpha.\underbrace{\varphi(\alpha)}$ – аналогично T'_a (а- функция создающая структуру

$\varphi(\alpha) = (int\to\alpha)\,\&\,(\alpha\to\beta\to\alpha)\,\&\,(\alpha\to\beta\,\&\,\alpha)$

$x : \neg\neg(a\vee a\to\bot)$

$x : (((a\vee(a\to\bot))\to\bot)\to\bot$ – это доказывается в ИИВ, но какой λ-терм вписывать?

Вот это и выводите

Но и это тоже не К-Х.

Почему вообще $(a\to\forall x\, b \leftrightarrow \forall x(a\to b))$

$((\forall x a)\to b) \not\leftrightarrow \forall x(a\to b)$

$a\leftrightarrow b \simeq (a\to b)\&(b\to a)$

x. ранг 1 – нет кванторов слева

x. ранг 2 – кол-во вложений $\forall$ слева в $\to$

Утв Система F сильно нормализуема

Δ по мсоф ∇

(любое типизуемое утв. нормализуется)

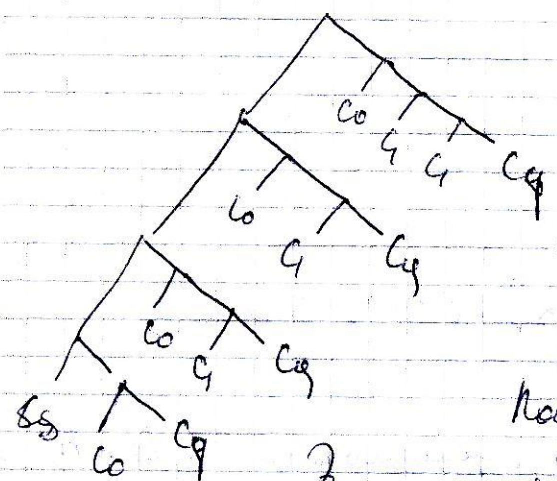
Утв $\Gamma\vdash M:\sigma$ неразрешимо. Вариации тоже, короче.

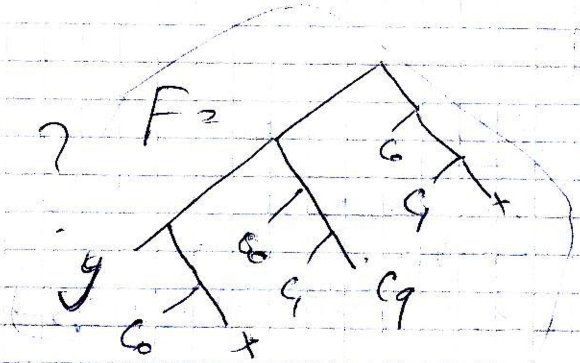
△ Громоздкое д-во, не нужно.

Нам хочется решить з-дачу унификации 2 пор-ка

$f(g(x)) = y$ | Н о задача унификации 2 порядка
$g = \lambda x.x$ | эквивал. зад. останова
$f = \lambda x.y$ |

$F(C_1 \to C_{q}, C_s \to C_0 \to C_q) =$
$= F(C_q, C_s) \to (C_0 \to (C_1 \to (C_1 \to C_q)))$





Построение дерева живых маш. Вершины.
Это жив. маш. Вершина с 2 сыновьями.

И в итоге все сводится к проблеме останова.

~▽

4

Типовая система Хиндли-Милнера

① $\Lambda_{let} \equiv x \mid \Lambda_{let}\Lambda_{let} \mid \lambda x.\Lambda_{let} \mid let\ x = \Lambda_{let}\ in\ \Lambda_{let}$

② $\tau \equiv \alpha \mid \tau \to \tau$ (тип) — монотип

$\sigma = \forall \alpha.\ \sigma \mid \tau$ (политип — типовая схема)

(Не бывает вложенных в → кванторов.)

③ $\sigma \geq \sigma'$, если (специализация)

$\sigma = \forall \vec{\alpha}.\ \tau$, $\sigma' = \forall \vec{\beta_j}.\ \tau[\alpha_i := \theta_i]$

($\sigma \geq \sigma'$

$\sigma = \forall \alpha.\alpha$ $\quad \sigma' = \forall \beta \forall \gamma.\ \beta \to \gamma$ $\ (\alpha[\alpha := \beta \to \gamma])$)

или $\sigma' = \forall \sigma.\ \beta \to \sigma$

Типа мы иногда можем сузить $\sigma \geq \sigma'$ и потом $\sigma' \geq \sigma$, что если мы уже ввели константы, от них не избавимся

(σ — политип, τ — тип!!)

Аксиомы и правила

① $\dfrac{}{A \vdash x : \sigma}\ (x : \sigma \in A)$

② Обобщение $\dfrac{A \vdash e : \sigma}{A \vdash e : \forall \alpha.\sigma}\ \alpha \notin FV(A)$

③ Инстанциация (сужение)

$\dfrac{A \vdash e : \sigma}{A \vdash e : \sigma'}\ (\sigma \geq \sigma')$ $\quad \left(\dfrac{p : \forall \alpha.\alpha}{p : int}\right)$

Если $X :> X'$ $(X \geq X')$
и $f : X \to Y$, то
$X' \to Y \supseteq X \to Y$
$Y :> Y' \mid X \to Y \supseteq X \to Y'$

④ $\dfrac{A \vdash e : \tau' \to \tau \quad A \vdash e' : \tau'}{A \vdash ee' : \tau}$

⑤ $\dfrac{\{(s : \theta) \mid (s, \theta) \in A,\ s \neq x'\} \cup \{x : \tau'\} \vdash e : \tau}{A \vdash (\lambda x.\ e) : \tau' \to \tau}$

⑥ $\dfrac{A \vdash e : \sigma \qquad \{(s : \theta) \mid (s, \theta) \in A,\ x \neq s\} \cup \{x : \sigma\} \vdash e' : \tau}{A \vdash (let\ x = e\ in\ e') : \tau}$

Пример 6: $\dfrac{\vdash id : \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \qquad x : \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \vdash x\ 1 : int}{let\ x = id\ in\ x\ 1 : int}$

Вот например $\lambda x.(x\,x)1$ не типизируется, поскольку без 6 правила ничего содержательного для полиморфизмов нет.

7^* $\overline{\vdash fix : \forall\alpha((\alpha\to\alpha)\to\alpha)}$ $\quad fix\ f = f(fix\ f)$

Демонстрация ограничений Х-М

```
type T a = Nil
         | One (a, T(a,a))
         | Zero (T(a,a))

1     One(1, Nil)
10    Zero(One((1,2), Nil))
11    One(3, One((1,2), Nil))
100   Zero(Zero(One(((1,2),(3,4)), Nil)))

append a Nil = One(a, Nil)
       a Zero(x) = One(a, x)
       a One(t, l) = Zero(append (a,t) l)
```

Не выводится в Х-М

append: $\forall a.\ a \to T\,a \to T\,a$

15.04.2015

$A_x = \{t:\tau \mid (t,\tau)\in A,\ t\neq x\}$

В Хиндли-Милнере вывод простой, поскольку это возможно в СТ.

Задача полной типизации

$A \vdash e : ??$

Найдём S, τ

$S(A) \vdash e : \tau$

самый общий

$S(\alpha): \alpha \to \tau$

$S(\tau\to\tau') = S(\tau)\to S(\tau')$

$S(\beta) = \beta$, для β не опр.

Пример: $snd\ (a,b) = b : \forall\alpha\forall\beta\ \alpha\times\beta\to\beta$

$\lambda a.\ snd\ \langle a, 17\rangle \to 17$ Плохой пример

$max: \alpha \to \alpha \to \alpha \vdash max\ 5 : ?$

① $S(\alpha) = int$

② $\tau = int \to int$ применение

$max: int \to int \to int \vdash max\ 5 : int \to int$

$max: \alpha \to \alpha \to \alpha \vdash max\ [\,]\ ?$

наиб. общее — не list Int ① $S(\alpha) = list(\beta)$ ② $\tau = list(\beta) \to list(\beta)$

$list(\beta) \to list(\beta) \to list(\beta) \vdash max\ [\,] : list(\beta) \to list(\beta)$

Вот короче поиск типизации реализован

U — алгоритм унификации

$U(\tau, \tau') = V$ — подст. $V\tau = V\tau'$

$U((\alpha \to \beta \to \gamma), (\delta \to \varepsilon) \to \eta) = V$:

$V(\eta) = \beta \to \gamma \quad V(\alpha) = (\delta \to \varepsilon)$

$V(\tau) = (\delta \to \varepsilon) \to (\beta \to \gamma) = V(\tau')$

$x: list\ \alpha$, $max: \beta \to \beta \to \beta \vdash max\ x :$ $(\beta \to \beta)$ (V1)

$(list\ \alpha \to \gamma)$ (V2)

Пусть S: $S\tau = S\tau'$ $V = ???$

Тогда найдется R: $S = RV$

Если A — контекст, то $\overline{A}(\tau) = \forall \alpha_1 \ldots \alpha_n . \tau$

α_i — св. в τ, но не в A

$W(A, e) = (S, \tau)$

1) $e = x$, $(x, \forall \alpha_1 \ldots \forall \alpha_n . \tau') \in A$

Тогда $S = id$, $\tau = \tau'[\alpha_i = \beta_i]$, β_i — нов.

2) $e = e_1 e_2$ $W(A, e_1) = (S_1, \tau_1)$

$W(S_1 A, e_2) = (S_2, \tau_2)$

$U(S_2 \tau_1, \tau_2 \to \beta) = V$ β — нов

$S = V S_2 S_1$ $\tau = V\beta$

3) $\lambda x. e_1$ β — нов. типов. переменная

$$W(A_x \cup \{x:\beta\}, e_1) = (S_1, \tau_1)$$
$$S = S_1 \quad \tau = S_1\beta \to \tau_1$$

4) let $x = e_1$ in e_2

$$W(A, e_1) = (S_1, \tau_1)$$
$$W(S_1 A_x \cup \{x : \overline{S_1 A}(\tau_1)\}, e_2) = (S_2, \tau_2)$$
$$S = S_2 S_1 \quad \tau = \tau_2$$

$W(\emptyset$, let $x = \lambda a.a$ in $x\ x)$

$W(\emptyset, \lambda a.a)$ $(id, \beta \to \beta)$

$W(\{a, \beta\}, a) \to (id, \beta)$

$W(x : \forall\beta.\beta \to \beta, x\ x) = (\{S(\gamma) = \delta \to \delta, S(\varepsilon) = \delta \to \delta\}, \delta \to \delta)$

$W(x : \forall\beta.\beta \to \beta, x) = (id, \gamma \to \gamma)$

$W(x : \forall\beta.\beta \to \beta, x) = (id, \delta \to \delta)$

$U(\gamma \to \gamma, (\delta \to \delta) \to \varepsilon)$

Хотим $fix : \forall\alpha(\alpha \to \alpha) \to \alpha$

$fix\ (\lambda f.\lambda a.$ if $a > 0$ then $a f(a-1)$ else $1)$

$list(\alpha) = (\alpha \,\&\, list(\alpha)) \vee NiL$

length : $list(\alpha) \to int$

case l of

$\lambda t.\ 1 + \cancel{\pi_1(t)}\ length(\pi_2(t)))$

$\lambda a.\ 0$

В реальной жизни W — стар и примитивен.
он не разделяет генерирование и вычисл.
Ограничение: + он запутанный

$C ::= \tau_1 = \tau_2 \mid C \wedge C \mid \exists\alpha.C$

$[\![\Gamma \vdash x : \tau]\!] \to \Gamma(x) = \tau$

$[\![\Gamma \vdash \lambda x.e : \tau]\!] \to \exists\alpha_1\alpha_2([\![\Gamma; x:\alpha_1 \vdash e : \alpha_2]\!] \wedge \alpha_1 \to \alpha_2 = \tau)$

$$[\![\Gamma \vdash e_1 e_2\ \tau]\!] = \exists\alpha. ([\![\Gamma \vdash e_1 : \alpha \to \tau]\!] \wedge [\![\Gamma \vdash e_2\ \alpha]\!])$$

def $x : \tau$ in C если C удовл. φ $\psi[x := \varphi\tau]$

выполнено, iff если при φ, ψ

$\varphi : \tau \to T_t$

$\psi : x \to T_\tau$

29 окт 2015 Constraints

не понимаю

правила

$[\![x : \tau]\!] = x = \tau$

$[\![\lambda x. e : \tau]\!] = \exists\alpha_1 \exists\alpha_2 (\text{def } x : \alpha_1 \text{ in } [\![e : \alpha_2]\!] \wedge \alpha_1 \to \alpha_2 = \tau)$

$[\![e_1 e_2 : \tau]\!] = \exists\alpha_1 ([\![e_1 : \alpha_1 \to \tau]\!] \wedge [\![e_2 : \alpha_1]\!])$

$C := \tau_1 = \tau_2 \mid C \wedge C \mid \exists\alpha. C \mid \text{def } x : \alpha \text{ in } C \mid x = \tau \mid x \preceq \tau$ $\mid \text{let } x : \alpha \text{ in } C$

(типы) атом

Думаем, что есть "маленький" универсум типов, так что 'уровень int' не добавляет типов.

① T – мн. во типов

$\varphi : A \to T$, $\psi : V \to T$, A – мн. во типовых пер. V – мн. обычных (переменные)

Удовлетворимость

- def $x : \alpha$ in C удовл. ψ и φ C удовл. φ и $\psi[x \to\ = \varphi\alpha]$
- $x = \tau$ удовл. φ и ψ, если $\varphi(x) = \psi(\tau)$
- $\tau_1 = \tau_2$ удовл. если $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$
- $\exists\alpha\, C$ удовл. φ и ψ если $\exists\theta \in T$, что $\varphi[\alpha := \theta]$ удовл. C
- $C_1 \wedge C_2$ удовл., если C_1 и C_2 удовл.

② $\varphi : A \to 2^T$ $\psi : V \to 2^T$ – мы думаем, что $\psi(\lambda x. x) = \{int \to int, bool \to bool, \dots\}$

- $x \leq \tau$, если $\varphi\tau \in \psi x$ (let $x : \zeta$ in C = def $x : \zeta$ in ($\exists\alpha. x \preceq \alpha \wedge C$))

$[\![x : \tau]\!] = x \leq \tau$

$[\![\text{let } x = e_1 \text{ in } e_2\ \tau]\!] = \text{let } x : \forall\alpha_1 ([\![e_1 : \alpha]\!]). \alpha \text{ in } [\![e_2 : \tau]\!]$

$\zeta \equiv \forall\bar\alpha (C). \tau$

ξ – это · типа

let $a = \lambda a \to \text{if } a > 0 \text{ then } a \text{ else } a$

$\cancel{\forall\alpha.(\llbracket(>0)\rrbracket\ \alpha \to \alpha)}$ $\quad \forall\alpha\,(\exists\beta\ \llbracket(>0):\beta\to\tau\rrbracket \wedge \llbracket a(\alpha)\ \beta\rrbracket).\ \alpha\to\alpha$

• def $x : \xi$ in C удовл. φ и ψ, если

C удовл. φ и $\psi[x := {}^{\psi}_{\varphi}[\xi]]$

$(\xi > \forall\alpha\,(D).\ \tau$, тогда

${}^{\psi}_{\varphi}[\xi]$ – мн-во φ', что φ', ψ удовл. D

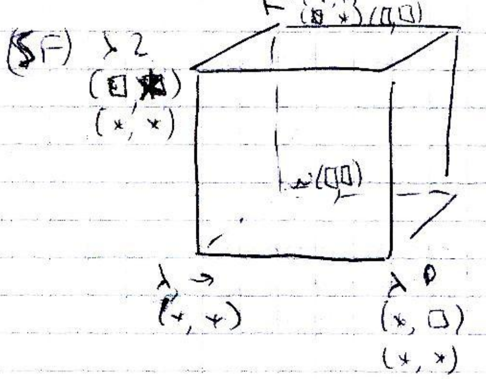
$\varphi = \varphi'$ вне α

data Maybe a = Nothing | Just a

как это в Х-М написать?

Maybe : $(* \to *) := \square$ $\qquad \varphi : \alpha \supseteq \beta$

$= \Pi x.\ *.\ X$



6.05.2015

Мы забыли как в SystemF получить (вычислить) $\langle a, b\rangle$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \psi}{\Gamma \vdash \langle A, B\rangle : \varphi \,\&\, \psi}$$

$\forall\alpha\,(\varphi \to \psi \to \alpha) \to \alpha$

$\Lambda\alpha.\ \lambda p.\ p\ a\ b$

Хотим: $\lambda s : Bool.\ \langle a, b\rangle\ s$

типа по Bool выдаем выр. типа α или типа β

Не вписывается

$(\lambda s : Bool.\ \langle a, b\rangle s) : \Pi(s : Bool) \langle \alpha, \beta\rangle s$

$(\lambda s : int.\ \text{new char}[s]) : \Pi(s : Int).\ \text{char}[s]$

$(\lambda s : int.\ 2f) : \Pi(s : int).\ \text{float} = \text{int} \to \text{float}$ (float^{int})

Обобщенные типовые системы λ-исчисл.
(параметризуемые)

$$T = x \mid \overbrace{c}^{\square,\ *,\ \dots} \mid TT \mid \lambda x:T.T \mid \Pi x:T.T$$

($\alpha \to \beta$ — это $\Pi x:\alpha.\beta$, если $x \notin \beta$)

$\Gamma \vdash A : B$

$(x_1:T_1, \dots, x_n:T_n)$

что удобно, потом правила это отражают

S S_1 S_2 — сорта $\{*, \square\}$

($*$ — тип, $\square$ — kind)

$\Gamma \vdash A : B : C$ если $\Gamma \vdash A : B$, $\Gamma \vdash B : C$

1) $$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x:A \vdash x : A}$$

0) $$\frac{}{\vdash * : \square}$$

2) Ослабление

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s}{\Gamma, x:C \vdash A : B} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

3) Применение

$$\frac{\Gamma \vdash F : (\Pi x:A.B) \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (Fa) : B[x:=a]}$$

4) Conversion

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \quad \Gamma \vdash B' : s \quad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$$ — запрещает $A:\alpha$ $(\lambda \alpha b.s)\,\alpha\,\Omega$ не тип. совп.

(Π не редуцируется)

Типизация для $(s_1, s_2) \in \Sigma$

5) Π-правило

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x:A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x:A.B) : s_2}$$

λ-правило

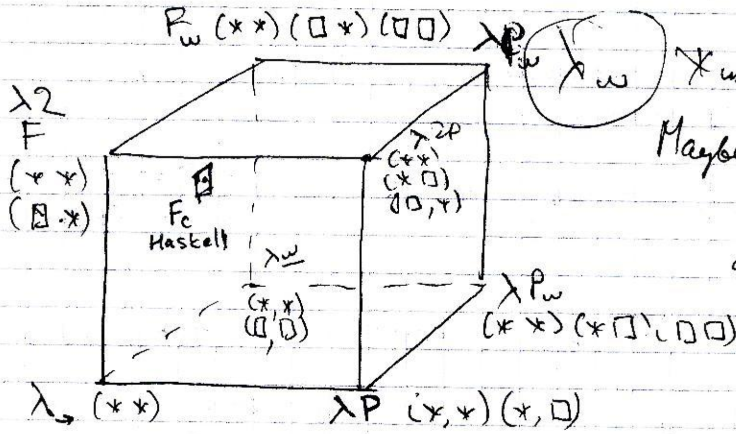
$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \overbrace{\Gamma, x:A \vdash b : B \qquad \Gamma, x:A \vdash B : s_2}^{\Gamma, x:A \vdash b : B : s_2}}{\Gamma \vdash (\lambda x:A.b) : (\Pi x:A.B)}$$

$\lambda_\to$: $\Sigma = \{(*,*)\}$, тогда 5.1. выводит $(\Pi x:\sigma.\tau) : *$

5.2. выводит $(\lambda x:A.b) : (\Pi x:A.B)$

λ_F: $\Sigma = \{(*,*), (\square,*)\}$ $(\lambda\alpha:*.\lambda x:\alpha.x) : \Pi\alpha:*.\Pi x:\alpha.\alpha$

5.2 $$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x:A \vdash b : B : s_2}{\Gamma \vdash (\lambda x:A.b) : (\Pi x:A.B)}$$



$\lambda\omega$ Жизненно:

$Maybe = \lambda\alpha:*.\ ()\vee\alpha$

$a :: Maybe\ Int$

$a :: ()\vee Int$

(new String) "abc"

$new : \Pi t:*.\ ptr(t) : *$

Выведем Maybe

$$\frac{\vdash *:\square \qquad \alpha:*\vdash ()\vee\alpha : * : \square}{\vdash (\lambda\alpha:*.\ ()\vee\alpha) : \Pi\alpha:*.*}$$

$A \times O$

Выводимые в этой системе

$Maybe = (\lambda\alpha:*.\ ()\vee\alpha) : *\to * : \square$

Хотели бы уметь выписывать $foo : Show\ x \Rightarrow x\to x$

? → Наверное, выписать в F

$\bot = \Pi x:*.\ x$ $\qquad [\exists\alpha.\ \varphi(\alpha)]_F = \forall\beta\ (\forall x\,\varphi\to\beta)\to\beta$

$\bot\!\!\bot = \Pi x:\square.\ x$ $\qquad \exists\alpha.\ \varphi(\alpha) = \Pi\beta:*.\ (\Pi x:*.\ \varphi(x)\to\beta)\to\beta$

Тогда если $\varphi(x) = x$ ∄ pop x & push x,

то $f :: \varphi(t) \Rightarrow t\to t$ $\qquad \forall t.\ t\to t$

$\exists t.\ \varphi(t)\to(t\to t)$

имеет тип в обобщ. смысле

$\lambda\underline{\omega}$

1. Теорема Чёрча – Россера

• A, B, B' – термы $A \twoheadrightarrow_\beta B$ $A \twoheadrightarrow_\beta B'$, то $\exists C$ $B \twoheadrightarrow_\beta C$ $B' \twoheadrightarrow_\beta C$

$\Pi x:A.\ B$ не затрагивается $\twoheadrightarrow_\beta$

2). • $A =_\beta B$, то $\exists C$ $A \twoheadrightarrow_\beta C$ и $B \twoheadrightarrow_\beta C$

2. $\Gamma\vdash A:B$, $A \twoheadrightarrow_\beta A'$ | $\Gamma\vdash A':B$

3. $\Gamma\vdash A:B$, тогда A и $B \in SN$

4. Уникальность типов

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma \vdash B : C \\ \Gamma \vdash B : C'\end{array}\right| \quad C =_\beta C'$$

$\lambda 2p \sim \lambda P_\omega$?

пусть у нас есть $f = \lambda x.*.\langle x,x\rangle : \Pi x:*.x\& x$

f в λP_ω

в $\lambda 2p$: $\quad \Gamma \vdash (\lambda x.\overset{(\square,*)}{*}.f(x)) : \Pi x : *.\varphi$

$(*,\square)$: $\quad \Gamma \vdash (\lambda x:\tau.\sigma) : \Pi_x:\tau.\Sigma$

$(\square,*)$: $\quad \Gamma \vdash (\lambda x:\Sigma.x) : \Pi_x:\Sigma.\sigma$

Хотелось

в $\lambda 2p$ $\quad f : \Pi\tau:\Sigma.\theta : \square$

$f = \lambda x:*.\ \cancel{(\lambda\tau:*.x)}$

$\lambda\theta:*.(\lambda x:\tau.\sigma)((\lambda\tau\ *.x)\ \theta)$

Линейная логика

$A, A\to B \vdash A\& B$ по Карри - Ховарду из a и $a\to b$ получили $\langle a,b\rangle$

(рубль) $\ $ (аппарат продажи товаров) $\ \langle \text{рубль}, \theta\rangle$

Структ.

$$\frac{}{A\to A}(\text{акс})\quad \frac{\Gamma,\Delta\vdash A}{\Delta,\Gamma\vdash A}(\text{обмен})\quad \frac{\Gamma,A,A\vdash B}{\Gamma,A\vdash B}(\text{сжатие})\quad \frac{\Gamma,\vdash B}{\Gamma,A\vdash B}(\text{ослаб})$$

Логические:

$$\frac{\Gamma,A\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}\qquad \frac{\Gamma\vdash A\to B\quad \Delta\vdash A}{\Gamma,\Delta\vdash B}\qquad \frac{\Gamma\vdash A\quad \Delta\vdash B}{\Gamma,\Delta\vdash A\times B}$$

$$\frac{\Gamma\vdash A\times B\quad \Delta,A,B\vdash C}{\Gamma,\Delta\vdash C}$$ + для дизъюнкции

1) $\Gamma \equiv \langle A \rangle, [B]$

интуиционистское

линейное

$[\Gamma] =$ все в Γ $[\ ]$

2) $\multimap$ — это импликация

$\otimes, \&$ — это конъюнкция

$\oplus, ⅋$ — дизъюнкция

$!$

Если уберем сжатие и ослабление, можем гарантировать, что логические аргументы не удаляются и не возникают. А мы оставим сжатие ослаб.

акс. интуиц. $\dfrac{}{[A] \vdash A}$ акс. лин. $\dfrac{}{\langle A \rangle \vdash A}$ сжатие $\dfrac{\Gamma, [A], [A] \vdash B}{\Gamma, [A] \vdash B}$ ослаб. $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, [A] \vdash B}$

$$\frac{[\Gamma]; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \multimap B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \otimes B \quad \Delta, \langle A \rangle, \langle B \rangle \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \& B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{[\Gamma] \vdash A}{[\Gamma] \vdash !A}$$ $!A$ — A много раз

$$\frac{\Gamma \vdash !A \quad \Delta, [A] \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$!(A \& B)$ эквивалентно $!A \otimes !B$

сколько угодно раз A или B

одновременно неограниченно

$!(A \& B) \vdash !A \otimes !B$

$!A \otimes !B \vdash !(A \& B)$

* Попытаемся доказать дома *

Philip Wadler A taste of linear logic Is there a use for linear logic

$$\frac{\Gamma, [y:A][z:A] \vdash u:B}{\Gamma, [x:A] \vdash u[y:=x, z:=x] : B}$$ сжатие

$$\frac{\Gamma \vdash u:B}{\Gamma, [x:A] \vdash u:B}$$ ослабление

$$\frac{[\Gamma] \vdash t:A}{[\Gamma] \vdash\, !t : !A} \qquad \frac{\Gamma \vdash s : !A \qquad \Delta, [x:A] \vdash u:B}{\Gamma, \Delta \vdash \text{case } s \text{ of } !x \to u : B}$$

без этих переходов функциональные типы!

$A \to B \Rightarrow\ !A \multimap B$

$A \times B \Rightarrow A \& B$

$A + B \Rightarrow\ !A \oplus !B$

new: Val → Arr

update: Ix → Val → Arr → Arr   Копирование IO?

Можем заранее разделить типы на ! и без, и переходы запретить.

<u>Опр</u> Комбинатор — λ-терм без св. переменных

Y-комбинатор $= \lambda f.(\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$

$I = \lambda x.x$

$K = \lambda x.\lambda y.x$ Konstanz

$S = \lambda x.\lambda y.\lambda z.\ xz(yz)$ VerSchmelzung

$B = \lambda g.\lambda f.\lambda x.\ g(fx)$

$C = \lambda f.\lambda x.\lambda y.\ f y x$ Смена перестановка

$W = \lambda x.\lambda y.\ x y y$

$\{BCKW\}$ — базис

B, C не меняют кол-во аргументов

K, S — неправильные!

$I : X \multimap X$

$K : X \multimap\ !Y \multimap X$

Как вывести $X \multimap !Y \multimap X$

$$\frac{\Gamma, x : U \vdash v : V}{\Gamma \vdash (\lambda x. v) : U \multimap V} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : (U \multimap V) \quad \Delta \vdash u : V}{\Gamma, \Delta \vdash tu : V}$$

$t ::= x \,/\, \lambda x.t \,/\, tt \,/\, !t \,/\, \text{case } t \text{ of } !x \to t$

$$\frac{}{[x : A] \vdash x : A} \qquad \frac{\overline{x : X \vdash x : X}}{x : X, [y : Y] \vdash x : X}$$

$$\frac{}{\langle x : A \rangle \vdash x : A}$$

Система $F<:$ (F_{sub})

System F + <:

пишем <:

```
struct X {          struct Y : X {
  int x;              int y;
}                   }
```

$Y <: X$

$\underset{\text{в System F}}{\forall X. Y} \Rightarrow \underset{\text{в } F<}{\forall X <: S. Y}$

Top $\quad \forall X \quad X <: Top$

Γ

$S <: T$

$$\frac{}{\Gamma \vdash S <: S} \quad (1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash S <: T \quad \Gamma \vdash T <: U}{\Gamma \vdash S <: U} \quad (2)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash S <: Top} \quad (3)$$

$$\frac{}{\Gamma, X <: T \vdash X <: T} \quad (4)$$

$$\frac{\Gamma \vdash T_1 <: S_1 \quad \Gamma \vdash S_2 <: T_2}{\Gamma \vdash S_1 \to S_2 <: T_1 \to T_2} \quad (5)$$

$$\frac{\Gamma, X <: U_1 \vdash S_2 <: T_2}{\Gamma \vdash \forall X <: U_1 . S_2 <: \forall X <: U_1 . T_2} \quad (6)$$

$$\frac{\Gamma \vdash Int <: Top}{\Gamma \vdash (\forall X<:Top.\,Int) <: (\forall X<:Top.\,Top)}$$ Пример 6.

(6') Вместо 6

$$\frac{\Gamma \vdash T_1 <: S_1 \qquad \Gamma, X<:T_1 \vdash S_2 <: T_2}{\Gamma \vdash (\forall X<:S_1.\,S_2) <: (\forall X<:T_1.\,T_2)}$$

$(\forall X<:Top.\,List\langle X\rangle) <: (\forall X<:Int.\,Collection\langle X\rangle)$

Типа если хотим коллекцию интов, (писать Int)
то List<T> подойдет.

6' – полное
6 – ядерное (более частное, простое)

$\lambda x:T.\,y \Rightarrow \lambda x<:T.\,y$

$$\frac{\Gamma, X<:T_1 \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash (\Lambda X<:T_1.\,t_2) : \forall X<:T_1.\,T_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \forall X<:T_{11}.\,T_{12} \qquad \Gamma \vdash T_2 <: T_{11}}{\Gamma \vdash t_1\,T_2 : T_{12}[X:=T_2]}$$

аналогично $(\Lambda X.\lambda x:X.\,x) : \forall A.\,A \to A$ в F

Пара: $\Lambda X.\Lambda Y.\lambda x:X.\lambda y:Y.(\Lambda R.\lambda p:X\to Y\to R.\;p\,x\,y)$

$: \forall X\,\forall Y\;X \to Y \to \underbrace{\forall R(X\to Y\to R)\to R}_{=\,Pair\,X\,Y}$

Сравнение: 1) По Лейбницу – сравниваем по всем предикатам
2) Принцип Объемности – сравниваем их в-н-ти.

Пример: Конъюнкция
1) A верно, если $\forall R(A\to R)\to R$
2) A верно, если $\pi_1(A\&B) \Rightarrow A$, $\pi_2(A\&B) \Rightarrow B$.

Пирс "Типы в языках прогр."

В $F_<$: $\Lambda X<:Top.\,\Lambda Y<:Top.\,\lambda x<:X.\,\lambda y<:Y.\,(\Lambda R<:Top.\,\lambda p<:(\cdot)..)$
в осно

fst = $\Lambda X\,\Lambda Y.\,\lambda p:(\forall R((X\to Y\to R)\to R)).\;p\;X\;(\lambda x<:X.\,\lambda y<:Y.\,x)$

$$\frac{\Gamma \vdash S_1 <: T_1 \qquad \Gamma \vdash S_2 <: T_2}{\Gamma \vdash Pair\,S_1\,S_2 <: Pair\,T_1\,T_2}$$ выводимое

Стрелки правоассоциативны. дополнительно

$$\frac{\Gamma, R \vdash T_2 <: S_1 \qquad \Gamma, R \vdash S_2 <: T_1}{\Gamma, R <: Top \vdash S_1 \to S_2 <: T_2 \to T_1 \qquad \ldots \vdash R <: R}$$

$$\Gamma, R <: Top \vdash (T_2 \to T_1 \to R) <: (S_1 \to S_2 \to R) \qquad \ldots \vdash R <: R$$

(5)

$$\Gamma, R <: Top \vdash (S_1 \to S_2 \to R) \to R <: (T_2 \to T_1 \to R) \to R$$

(6)

$$\forall R <: Top.\ (S_1 \to S_2 \to R) \to R <: \forall R <: Top\ (T_2 \to T_1 \to R) \to R$$

struct X {A, B, C}   Объектно-ориент.

Pair A (Pair B (Pair C Top)))

struct Y : X {D}

Pair D (Pair A (Pair B (Pair C Top)))

об/ие, Pair A (Pair B (Pair C (Pair D Top))))

Top = struct { } занимает 0 байт

Bottom нельзя формально вычислить, но можно создать объект который кидает исключение при обращении

Ещё пример

$$\forall X.\ (X \to X) \to (X \to X)$$

$$\lambda f.\ \lambda x.\ f\,(f\,x))$$

$$\forall X <: Top.\ \forall S <: X.\ \forall Z <: X.\ (X \to S) \to (Z \to Z)$$

1) $\Lambda X\, \Lambda S\, \Lambda Z.\ \lambda f^{X \to S}.\ \lambda x^{Z \to Z}.\ f\,x$

$\Lambda X\, \Lambda S\, \Lambda Z.\ \lambda f^{X \to S}.\ \lambda x^{Z \to S}.$

Удовл. только Ø из сверху

(1) $\forall X <: Top.\ \forall S <: X.\ \forall Z <: X.\ (X \to S) \to (Z \to X)$

(0) —//— $\to Z)$

(10) —//— $\to S)$

(0) <: (1)   (10) <: (1)

$(\lambda f.\lambda x.\ \cancel{f(f}\ f\ x) :\ \cancel{0}$

$f: X \to S$ $\quad\quad$ ≈ 0

$$X = \boxed{Z}\ \boxed{S}$$

$(\lambda f.\lambda x.\ \cancel{f}\ x) :\ \cancel{\lambda 0}$

0

То есть можно выражать только ненулевые Чёрчевские нумералы

3.06.2015

Дана Скотт

$\lambda x.x = I : \underbrace{D \to D}$

$|D| < |D^D|$ в том числе ф-ии из $D \to D$

Денотационная семантика λ-исчисления

Что делать? Установить соотв. между $f: D \to D$ и D. Заметим, что нам интересны вполне непрерывные ф-ии $D \to D$.

Решетка: $\langle D, \sqsubseteq \rangle$, $\underset{+}{\sqcup}\ (\vee)$ $\underset{\cdot}{\sqcap}\ (\wedge)$ $\bot$ $\top$

Полная решетка — решетка, в которой $\forall X$

$$\exists\ \underset{\inf}{\sqcap X} \text{ и } \underset{\sup}{\sqcup X}$$

У полной решетки есть неподв. точка для монот. ф-ии $f: D \to D$

$f(fix\ f) = fix\ f$

Идея: вычисл. разбиваем на шаги

$f \mid f_1 \mid f_2 \mid f_3 \mid \ \mid \ \mid \ \mid$ $\quad$ $f_n \sqsubseteq f_{n+1}$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$

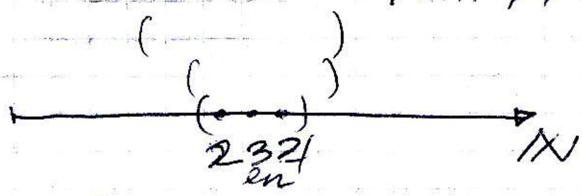
не н.ф. $\quad$ у Ω нету fix.

Направл. мн-во $X \subseteq D$, если $X \neq \emptyset$ и $\forall a, b \in X\ \exists c \in X: a \sqsubseteq c$ и $b \sqsubseteq c$

Откр. по Скотту мн-во.

X - открыто, если 1) Оно замкнуто вверх
$\forall a \in X$ Если $b \in D$ $a \sqsubseteq b$, $b \in X$

2) T-напр. Если $\sqcup T \in X$
то $T \cap X \neq \emptyset$



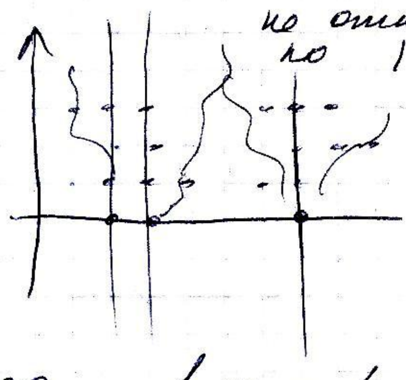
$\mathbb{N}$, $\langle P(\mathbb{N}), \sqsubseteq \rangle$

Возьмем пол. мн-во и отрезки

$\hookrightarrow O(e_n) = \{X \mid X \in P(\mathbb{N}), X \supseteq e_n\}$

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$

не открыто
по 1 части откр.



Топология
T-топол. - мн-во откр. мн.
1) $\emptyset T$
2) ~~X~~ - сем. откр. $\cup X$-откр в T
3) A, B откр $\Rightarrow A \cap B$ откр

Базис B, если
$\forall A$ откр $\exists S \subseteq B$, что
$\bigcup S = A$.

В топологии
непр.
прообраз любого
мн-ва открыт.

Теор f непр $f: D \to D'$ т.и.т.т. X-напр.
$f(\sqcup X) = \sqcup\{f(x) \mid x \in X\}$

Лемма f непр, тогда f монот. $(a \sqsubseteq b \Rightarrow f(a) \sqsubseteq f(b))$

$\triangle$

$\Leftarrow$ f: $f(a) \in \{x \mid x \in D' \;\&\; x \not\sqsubseteq f(b)\} =: V$

V-открыто

1) замкн. вверх $\exists x \in V$, $x \sqsubseteq t$ $\Rightarrow t \not\sqsubseteq f(b)$
по
пр-му

2) тож -//-

Прообраз V открыт
$f^{-1}(V)$ открыто
$a \in f^{-1}(V)$, тогда и
$b \in f^{-1}(V)$ $(a \sqsubseteq b$ + замкн. вверх$)$

Тогда $f(b)$ принадлежит V $\quad f(b) \not\sqsubseteq f(b)$

$\triangleright$

Опр Декартово произведение

$$D_0 \times D_1 \times \dots \times D_{k-1} \qquad \langle d_0, \dots, d_{k-1} \rangle$$

$$\bigsqcup X = \langle \sqcup d_0, \sqcup d_1, \dots \sqcup d_{k-1} \rangle$$

Опр $[D_0 \to D_1]$ – мн-во всех непр отобр из D_0 в D_1

$$f \sqsubseteq g \overset{def}{=} \forall x\, f(x) \sqsubseteq g(x)$$

получили полные решетки на ф-ях

Лемма $\quad$ и $X \subseteq [D_0 \to D_1]$ – непр.

то $\left(\bigsqcup X\right)(a) = \bigsqcup_{f \in X} f(a)$

(1) сущ. и (2)

Утв ~~$f \in [D_0 \times D_1$~~ $f : D_0 \times D_1 \to D$

f непр т.и т.т. когда

$\forall x_0 \in D_0 \quad f(x_0, y)$ непр $\quad$ и

$\forall y_0 \in D_1 \quad f(x, y_0)$ непр.

Тр. D, D' – полные решетки, тогда

$$Ap : [D \to D'] \times D \to D' \qquad Ap(f, x) = f(x)$$

непрерывна

Т λ-абстр. $\quad f \in [D \times D' \to D'']$

$$(f^\lambda(x))(y) = f(x, y)$$

1) f^λ непр

2) $f \to f^\lambda \in [[D \times D' \to D''] \to [D \to [D' \to D'']]]$

$$\lambda x.\, \underbrace{x\ x}_{[D \to D'] \times D \to D'} \Big\} \text{ хотели иметь } D \cong [D \to D]$$

$$[[D \to D'] \to [D \to D']]$$

Опр Проекция D' на D

Пусть D, D' — полные решётки. Пара непр. отобр. $\varphi \in [D \to D']$, $\psi \in [D' \to D]$ — проекция, если

$$\psi\varphi = id_D \qquad \varphi\psi \sqsubseteq id_{D'}$$
$$\psi\varphi(x) = \psi(\varphi(x))$$

Утв $\bot_D$ — наим. в D, $\bot_{D'}$ — наим. в D'

$$\varphi(\bot_D) = \bot_{D'} \qquad \psi(\bot_{D'}) = \bot_D$$

Δ

1) $\Leftarrow$ ↯: $\varphi(\bot_D) = A \neq \bot_{D'}$

~~$\psi(A)$~~ $\psi(\bot_{D'}) = \bot_D$ по монот.
противор. с опред. проекции

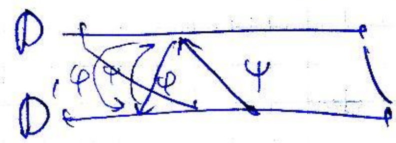
∇

Опр Ретракция $\rho = \rho^2$ (идемпотентность)

Лемма о ретракции $\varphi\psi$ — ретракция

можно както сопоставить элементы, что

$D \subseteq D'$



Опр $\underbrace{\varphi^* \quad \psi^*}$

$$\varphi^*: [D \to D] \to [D' \to D']$$
$$\psi^*: [D' \to D'] \to [D \to D]$$

$$\varphi^*(f) = \varphi f \psi$$
$$\psi^*(f) = \psi f \varphi$$

Тогда φ^*, ψ^* — проекция $[D' \to D']$ на $[D \to D]$

Δ D

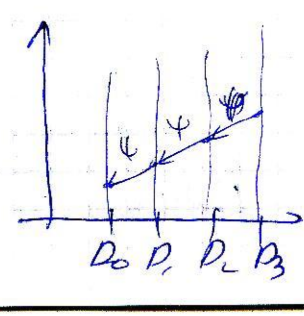
$$\varphi_0: D \to [D \to D] \qquad \psi_0: [D \to D] \to D$$
$$\varphi_0(x) = \lambda y\, x \qquad \psi_0(x) = f(\bot)$$

это проекция $[D \to D]$ на D

$$D_0 \underset{\psi_1}{\overset{\varphi_0}{\rightleftarrows}} D_1 \qquad D_{i+1} = [D_i \to D_i]$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi^*_i$$
$$\psi_{i+1} = \psi^*_i$$

$$D_\infty = \langle x_0, \dots \rangle \qquad x_k = \psi_k(x_{k+1})$$



[на этом покоординатное (сравнима, если $\forall k\ x_k \sqsupseteq (\sqsubseteq) x'_k$)

$$\Phi_{nm}(x) = \begin{cases} \varphi_{m-1} \cdots \varphi_{n+1}\varphi_n(x) & n \le m \\ \psi_m \cdots \psi_{n-1}(x) & n > m \end{cases}$$

$$\Phi_{\infty n}(x) = x_n \qquad \Phi_{n\infty}(x) = \langle \Phi_{n0}(x), \Phi_{n1}(x), \dots \rangle$$

$$\Phi_{\infty\infty}(x) = x$$

типа изоморф.

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots \subseteq D_\infty$$

Опр $x \cdot y = \bigsqcup_n x_{n+1}(y_n) = \bigsqcup\{x_{n+1}(y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\lambda x. x_k \cdot x_k \qquad \langle \dots x_k, x_{k+1},$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rho \quad [\rho \to \rho]$

$\psi_2(\lambda x.\lambda y. x+y) = \lambda y. \bot + y = \lambda y. \bot$

$\psi_1(\lambda y. \bot) = \bot$

$a = \langle \bot, \lambda y.\bot, \lambda x.\lambda y. x+y,$

$b = \langle 3, \lambda y. 3, \lambda x.\lambda y. 3, \dots \rangle$

$a \cdot b = (\lambda y. \bot)3 = \bot =$

$= \lambda xy. x+y)3 = \lambda y. y+3$

$=$ дальше не помещается

$$D_\infty \cong [D_\infty \to D_\infty]$$

$F : D_\infty \to [D_\infty \to D_\infty]$ TODO

$F = \lambda x. \lambda y. x \cdot y$

Опр $\forall y \in D_\infty \ (f(y) = \Box f \cdot y)$ – обратное к F

$[\![x_i]\!]_\rho = \rho(x_i)$

[какие св. переменные куда

$[\![A\ B]\!]_\rho = [\![A]\!]_\rho \cdot [\![B]\!]_\rho$

$[\![\lambda x. A]\!]_\rho = \Box f \qquad f(a) = [\![A]\!]_{\rho[x := a]}$

$[\![(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)]\!] = ?$

Почти
примерно нормальная форма $\underset{N2}{-} (\Omega, \Omega, \dots)$

Примерно —— // —— где терма — это
мы заменяем то, что не знаем
пока резу. Ω.

$A(N)$ — мн-во всех п.н.ф. для N.

добавим правило

! $[\![\Omega]\!]_{g} = \bot$ $\quad [\![\Omega A]\!] = \bot$ $\quad [\![\lambda x. \Omega]\!] = \bot$

$a = \lambda ab.\, a K b\, \Omega$
Не имеет NF
но $(\lambda ab. a K b \Omega)\, T\, K$

<u>Опр</u>. терм неразрешимый, если нет такого набора арг., которые можно ему дать, чтобы он пришел в NF.

если $(\lambda a. a\, \Omega) \to (\lambda x. k) = k$
$\to (\lambda x. y) = y$

<u>Лемма</u> любой неразр. терм вычисляется в $\bot$

<u>Лемма</u> любой неразр. терм не имеет заголовочной NF

$(\lambda x_1 \dots x_n . a\, (M))$