3.09.2014 (Штукенберг Дмитрий Григорьевич)

Опять, почему нельзя сделать множество, содержащее само себя?
Вот такой парадокс: $S = \{x \mid x \notin x\}$; Верно ли, что $S \in S$?
Это такой Парадокс Рассела. (про брадобрея)

] понятие $\mathcal{F}$ самоприменимым, если оно упоминает само себя.

Мы можем вычислить или доказать утверждение

1) Исчисление высказываний;

У нас есть Мета-язык (исследований, изучаем...)
И есть предметный язык

а) Пропозициональные переменные

A ... K - большие буквы начала лат. алфавита.

б) α, β - высказывания, то:

$\alpha \& \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$, - тоже высказывания
$(\alpha \wedge \beta)$

(1) Оценка — результат процесса (даем т. истин пер., сит...)

$[\![A \vee \neg A]\!] = И$ } Классическая логика
$[\![A \& \neg A]\!] = Л$
$[\![A \vee B]\!]^{A=И, B=Л} = И$

] α - общезначима, (тогда $\models \alpha$ - пишется.) если α истинна (не зависит от оценки). "Тавтология"
] α - невыполнима или ложна

(2) Доказательство - это конч. посл. высказываний, в котором выск - это либо аксиома, либо выведено по правилу выв.
◁ Схемы аксиом:

импликация
(1) $\alpha \to \beta \to \alpha$
(2) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

конъюнкция
(3) $\alpha \to \beta \to \alpha \& \beta$
(4) $\alpha \& \beta \to \alpha$
(5) $\alpha \& \beta \to \beta$

дизъюнкция
(6) $\alpha \to \alpha \vee \beta$
(7) $\beta \to \alpha \vee \beta$
(8) $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

отрицание
(9) $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$
(10) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

д-во от противного

Правило вывода:

$$\frac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$$

Modus Ponens

Высказывание α доказуемо ($\vdash \alpha$), если есть д-во, что α - посл. элемент.

Примеры: $A \to A$

(1) $A \to A \to A$

(2) $(A \to (A \to A)) \to (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ 1 пр 2 пр

(3) $A \to (A \to A) \to A$ 1 пр

(4) $(A \to (A \to A) \to A) \to (A \to A)$ Modus Ponens

(5) $A \to A$

$A \to \neg\neg A$

(7) $(A \to A) \to (A \to \neg A) \to \neg A$

$(A \to A)$, ~~$(A \to A) \to (A \to \neg A) \to \neg A$~~

$(A \to \neg A) \to \neg A$

Д/З: Есть грамматика, нужно вершины и аннотир

Форма: 1) ф-ла (коммент.)

коммент – сх. акс №

М.Р. №№

или выск. <...> не доказано

10.09.2014

Теорема о дедукции:

Опр: Вывод – конечн. послед. высказываний $\alpha_1 \dots \alpha_n$, где α_i – аксиома или $\in \Gamma$ или Modus Ponens

$\exists$ Γ – список формул (контекст), α – высказ. (ф-ла)

$\Gamma \vdash \alpha$, если α „выводимо" из Γ, если $\exists$ вывод α из Γ

$\Gamma \models \alpha$ $[\![\alpha]\!] = И$, если $[\![\gamma_i]\!] = И$, $\gamma_i \in \Gamma$ – следование

Теорема: $\exists$ Γ – контекст, $\exists$ α – высказ., γ – тоже

$\Longleftrightarrow$ $\Gamma \vdash \gamma \to \alpha$ титт $\Gamma, \gamma \vdash \alpha$

① Пусть $\Gamma \vdash \gamma \to \alpha$

$\delta_1 \dots \delta_{n-1}, \gamma \to \alpha$

(n+1) γ (предп)

(n+2) α (М.Р)

② $\delta_1 \dots \delta_{n-1}, \alpha$; $\Gamma, \gamma \vdash \alpha$

$\gamma \to \delta_1$

$\vdots$

$\gamma \to \delta_{n-1}$

$\gamma \to \alpha$

База $n = 1$

α

$\gamma \to \alpha$

а) α – аксиома, $\alpha \in \Gamma$ (*)

$\alpha \to \gamma \to \alpha$ (акс)

α (*)

$\gamma \to \alpha$ (мр)

б) $\alpha = \gamma$ и $\alpha \notin \Gamma$

$\alpha \to \alpha \to \alpha$ (A1)

$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ (A2)

$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ (MP)

$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (A1)

$(\alpha \to \alpha)$ (MP)

Предпослед / переход

$\delta_1 \dots \delta_n$ $\quad$ δ_n посл. мр. $\quad$ $\delta_j = (\delta_i \to \delta_n)$ (предпослед.) $\quad$ $i, j < n$

$\gamma \to \delta_1$ $\quad$ $\delta_i \Rightarrow \theta_i'$

$\vdots$ $\quad$ $\delta_j \Rightarrow \theta_j'$

$(k+1)$ $(\gamma \to \delta_i) \to (\gamma \to (\delta_i \to \delta_n)) \to (\gamma \to \delta_n)$

$\gamma \to \delta_{n-1}$ $\quad$ $(k+2)$ $(\gamma \to (\delta_i \to \delta_n)) \to \gamma \to \delta_n$ (MP $k+1, i'$)

$\gamma \to \delta_n$ $\quad$ $(k+3)$ $\gamma \to \delta_n$ (MP $k+2, j'$)

■

Какое отношение $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \models \alpha$?

Теорема о полноте исчисл. высказ.

Опр 1 Исчисление корректно, если из $\Gamma \vdash \alpha$ след. $\Gamma \models \alpha$

Опр 2 Исчисление полно, если из $\Gamma \models \alpha$ след. $\Gamma \vdash \alpha$

Т1. Исчисление высск. корректно

△ Индукция по структуре ф-л и длине д-ва ▽

Лемма 1 Если $A_1 \dots A_n$ – прап. перем., α – ф-ла из $A_1 \dots A_n$, $\varphi_1 \dots \varphi_n$ – ф-лы

то $\Gamma \models \alpha$ влечет $(\Gamma \models \alpha)[A_i := \varphi_i]$

Лемма 2. Контрпозиция α, β $\quad$ $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Лемма 3 Правило исл. III α $\quad$ $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

Лемма 4 $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi \vdash \alpha$, тогда

а) ~~$\Gamma, \Sigma, \Delta,$~~

Лемма 4 $\Gamma \vdash \alpha$

б) $\pi(\Gamma) \not\vdash \alpha$ – перестановка

$\delta, \gamma \in \Gamma$, $\gamma, \Gamma \vdash \alpha$

Лемма 5

$\Gamma \vdash \alpha$ $\quad$ $\Delta \vdash \beta$ $\quad$ $\alpha, \beta \vdash \gamma$

то $\Gamma, \Delta \vdash \gamma$

3. $[\alpha]^{\alpha}, [\beta]\beta \vdash_{[\alpha\&\beta]} \alpha \& \beta$ — α может быть сложным, важним не и под

$A, B \vdash A \& B$

$\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$

$A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

+ Лемма 1 для доказательства

$\Gamma, \models \alpha$

$\Gamma, \models \beta$ Δ

$\alpha, \beta \models \gamma$ Γ_1

$\Gamma_1 \models \gamma$ $x_1 \ldots x_n \mid \alpha$

$x_1 \ldots x_n$	$\gamma_1 \ldots \gamma_n$	α	β	γ
и и и и		и	и	и
		и	и	и
и и и и		и	и	и

Возьмем все наборы

Читать:

> Клини: „математика"

> Шень, Верещагин

> Коммит на github.

24.09.2014

Замечание с чисел. выск.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рациональное? $\left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$

или наоборот

ЭТО ВЫЗЫВАЕТ БАТТХЕРТ (с)

Нам нужно не механизм рассуждений, а построение объектов.

$\exists A$ — д-во сущ. объекта A

$A \& B$ — можем строить A и B

$A \vee B$ — умеем строить одно из двух

$A \to B$ — если умеем строить A, то и B

$\neg A$ — любое построение может привести к противоречию

$A \vee \neg A$ — неизвестно

Чтобы из класс. логики сделать интуиционистскую

~~Ax~~ Axiom

10_i: $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$

Аксиома выбора:

Можно из любого набора мн-в выбрать по 1 эл-ту из каждого

Структура для класс. высказываний с 1

$\vee, \&, \vee, \to, \neg$ 3 Иначе: $V = \{и, л\}$

Операции – таблицы

истинностные значения

Структура $\mathfrak{A}$ моделирует если структура корректна ($\vdash_S \alpha \not\Rightarrow \models_S \alpha$)

истина по аксиомам

Другие структуры для класс. логики: и МР

V: частич. порядок – антирефл, антисим, транз.

$\leq$ определено $a, x, y \in V$

$\exists$ a – верхняя грань для x, y $a = x \sqcup y$ если $x \leq a$ и $y \leq a$

$\exists$ a – нижняя, если ...

$\exists$ a – максимум ~~$\{T\}$ если~~, $T \subseteq V$, если $\forall b \in T$, $a \geq b$

$\exists$ a – мин...

$\exists$ a – точная ~~нижняя~~ верх. грань $x \sqcup y = \sup(x, y)$ $= x + y$

$= \min(b, c)$

$\exists$ a – $\inf = x \sqcap y = \max(\text{верх. границ}) = x \cdot y$

Если для $\forall x, y$ определено $x \sqcap y$, $x \sqcup y$, то V – решетка

Дистрибутивная:

$a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$

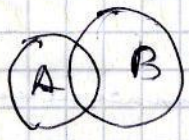
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Импликативная решетка

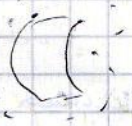
– псевдодополнение $(a \to b)$ – $\max C : c \cdot a \leq b$

$\to$ нед. a до b

$(f \to g) = \min(f, g)$?? DAFUQ



$A \to B = (A - B)^c$



Лемма: Импликативная решетка выше дистрибутивна

Опр: 0, 1: 0: $\forall x \in V$: $0 \leq x$

1: $\forall y \in V$: $y \leq 1$

Утв: в импликативной решетке сущ. 1

$1 = a \to a$

$a \to a \geq x$, докажем

$a \geq b$, если $a + b = a$ max t $t \cdot a \leq a$

$a + a = x + (a \to a)$ p $p \cdot 1 = p$

1) $a \to b \to a = 1$

$a \to (b \to a) = 1$

$a \leq (b \to a)$

$a \leq$ max $c : bc \leq a$.

$\begin{cases} a \leq c \\ bc \leq a \end{cases}$ $a \leq c \vee b$

1.10.2014

Алгебра Линденбаума-Тарского 2

F - мн-во всех формул исч. нв

$a \sim b$ $a \vdash b$ $b \vdash a$ $F/\sim$

$\top$ $A \to A$ 1 $\alpha \leq b$, если $\alpha \vdash b$

$\bot$ $A \to \neg A$ 0

α $\alpha \& \beta$ $\alpha \cdot \beta$

$\alpha \vee \beta$ $\alpha + \beta$

$\alpha \to \beta$ $a \to \beta$

$\dfrac{\neg\alpha}{\text{ИМВ}}$ $\dfrac{-\alpha}{\text{И.Р.}}$

импл. решетка

$\top$ ИМВ полно отн. алгебры Линденбаума

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Если $\vdash \alpha$, то α очевидно

$\models \alpha \Rightarrow \models_{\mathcal{L}} \alpha$, значит $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = 1$

то есть $1 \le [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}}$ в частности

$A \to A \vdash \alpha$ — это д-во

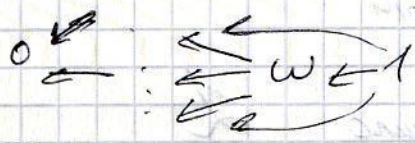
из того $\vdash \alpha$

▽ Исчисление дизъюнктивно

$\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ либо $\vdash \beta$

A, Гёделева алгебра $\Gamma(A)$

$$\begin{cases} \gamma(x) = x & x \ne 1 \\ \gamma(1) = \omega & x = 1 \end{cases}$$



$x \to_{\Gamma(A)} y$	$y = 1$	$y = \gamma(v)$
$x = 1$	1	$\gamma(u \to_A v)$
$x = \gamma(u)$	1	$u \to v$
~~$x \to y$~~	~~$y = 1$~~	~~$y = \gamma(u)$~~

Если A — алгебра Гейтинга, то $\Gamma(A)$ — тоже.

Но она дизъюнктивна!

если $x \underset{\Gamma(A)}{+} y = 1$

то $x = 1$ или $y = 1$

$x \underset{\Gamma(A)}{+} y$	$y = 1$	$y = \gamma(v)$
$x = 1$	1	1
$x = \gamma(u)$	1	$\gamma(u \underset{A}{+} v)$

Возьмем $\Gamma(\mathcal{L})$

$[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} + [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$

если $\vdash \alpha \vee \beta$, то $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\mathcal{L}} = 1$ тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma} = 1$

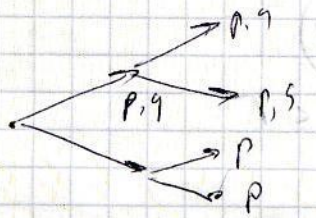
$[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$

Поэтому ~~ИИВ~~

$\mathcal{L}$ дизъюнктивно, а значит

ИИВ дизъюнктивно

Модели Крипке



W W_i – мн-во вып. ур. нарал.

$W_i \Vdash p$

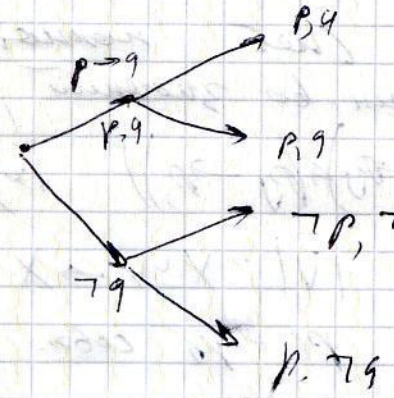
$W_i \le W_j$, если $W_i \Vdash p$, то и в $W_j \Vdash p$

① $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$ если $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$

② $W_i \Vdash \alpha \wedge \beta$, если ~~$W_i \Vdash \alpha$~~ $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$

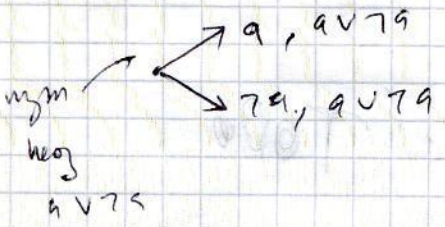
③ ~~$W_i \Vdash$~~ $P \Vdash \alpha \to \beta$, если в подм. $Q \ge P$: $Q \Vdash \alpha$ вып. $Q \Vdash \beta$

④ $P \Vdash \neg\alpha$, если в подм. $Q \ge P$, не $Q \Vdash \alpha$



Утв модели Крипке корректны $\boxed{\text{Упр}}$

Утв $\alpha \vee \neg\alpha$ опровержимо



Теорема Модели Крипке полны

Если $\not\vdash \alpha$, то $\not\models \alpha$

а) Выполнимо мн-во

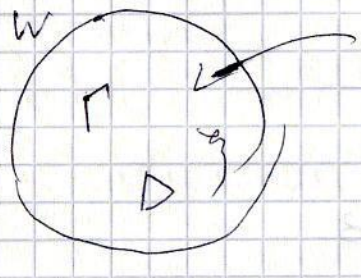
– Γ не противоречив $(\Gamma \nvdash \alpha \& \neg\alpha)$

– $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \in \Gamma$ или $\beta \in \Gamma$

б) $\Vdash \alpha$, то $\alpha \in \Gamma$

$\Gamma \nvdash \alpha \vee \neg\alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$ $\left(\Gamma \nvdash \neg\alpha, \text{ тогда по } \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \neg\alpha}{\Gamma \vdash \alpha \& \neg\alpha}\right)$

в)



W_i – зд мн-во

$W_i \Vdash p$ если $p \in W_i$

г) $\Vdash \alpha$, тогда $W_i \Vdash \alpha$, $\underbrace{W_0 \text{ – все тавт. ИИВ}}_{\text{выполнимое мн-во}}$

$W_0 \Vdash \alpha$

т.е. $\vdash \alpha$

<u>Теор</u> ~~Ин~~ ИИВ не тайтино (нет конечной модели), мн-во значений $\{V\}$, $|V| \le n$ задействуется конечное

Δ Возьм. ф-лу $\bigvee_{1 \le i, j \le n, i \ne j} ((p_i \to p_j) \& (p_j \to p_i))$ (*)

$(x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow x_3) \vee \dots (\leftrightarrow)$ $|V| : X \times X \to X$

Построим модель Крипке по принципу Дирихле p_i и p_j совп.

тогда (*) истинна, но (*) не доказуема.

▽

<u>Теорема</u> Гливенко

$\vdash_K \alpha$, то $\vdash_H \neg\neg\alpha$ ТОО

Исчисление предикатов 15/10/2014

(1) a ... z – предметные переменные / ф-ии

$A(x, y)$ – предикат / пропозиц. перем.

(3) Атом. ф-ла

$A \quad A(\theta) \quad B(\theta_1, \dots \theta_n)$

θ_i – термы

(2) Термы

– предм. переменная

– $f(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n)$ – применение ф. символов к аргументам

(4) Кванторы α – формула, x – предм. перем. $\forall x\, \alpha$ и $\exists x$ формулы

Если α, β – формулы, то $\neg\alpha, \alpha \vee \beta, \alpha \& \beta, \alpha \to \beta$, (ф-лы)

(1) D – предметное мн-во

(2) Задать ф-ии для ф. символов и предикатов

$\forall p \; p \geq 0$

(3) Задать своб. переменные f: $[\![f]\!]: D^n \to D$

Модель:

Правило для выясн. ф-б P $[\![P]\!]: D^n \to V$

$[\![f(\theta_1 \dots \theta_n)]\!] = [\![f]\!]([\![\theta_1]\!], \dots [\![\theta_n]\!])$ x $[\![x]\!] \in D$

$[\![P(\theta_1 \dots \theta_n)]\!] = [\![P]\!]([\![\theta_1]\!], \dots [\![\theta_n]\!])$

$\exists V = И, Л$

$[\![\forall x\, \alpha]\!] = \begin{cases} И, \text{ если } [\![\alpha]\!] = И \text{ при любом } x \in D \\ Л, \text{ иначе} \end{cases}$

$[\![\exists x\, \alpha]\!] = \begin{cases} И, \text{ если найдется } a \in D, \text{ что } [\![\alpha]\!]_{x=a} = И \\ Л, \text{ иначе} \end{cases}$

Д-ва: 1) Понятия, что такое подформула

2) Св. переменная:

$\forall x\, \alpha$ $\quad$ x связана в α

↑

область действия $(\forall x)$

Вх Перем. связана, если она входит в поле действия квантора, который ее связ.

Перем. свободна, если сущ. ф-ла, в которой эта перем. св-на

3) $\alpha[x := \theta]$

θ свободно для подст. вместо x в α, если никакое св. вхожд. перем x в θ не станет связ. в α

$(\forall y\, x)[x := y]$ – не своб. для подст.

Анл. x св. вместо x в α

11. $\forall x\, \alpha \to \alpha[x := \theta]$

12. $\alpha[x := \theta] \to \exists x\, \alpha$

Правила вывода

$$\frac{\beta \to \alpha}{\beta \to \forall x\, \alpha}\ (x \text{ не вх. св. в } \alpha) \qquad \frac{\alpha \to \beta}{\exists x\, \alpha \to \beta}$$

Т.о. дедукции

1. $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ + в д-ве отсутствуют правила с нв. по св. пер из α

то

$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

2. $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \Rightarrow \Gamma, \alpha \vdash \beta$ всегда

Δ Введем вспомог.

а) i) $\beta \to \gamma$ | $\alpha \to \beta \to \gamma$

j) $\beta \to \forall x\, \gamma$ | $\alpha \& \beta \to \gamma$

$\alpha \& \beta \to \forall x\, \gamma$

$\alpha \to \beta \to \forall x\, \alpha$

Корректность и полнота

Утверждение о корректности $(\vdash \alpha \to \models \alpha)$

упр

Теорема о полноте

Нужно привести все модели в круг.

$D = \{a, b, \dots\}$ $P(a) = и$ $P(b) = л$

Рассматриваем мн-ва бз св. пер.

(1) Γ - непротиворич., если ~~$(\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \not\vdash \neg\alpha)$~~

$\neg \exists \beta \mid \Gamma \vdash \beta \& \neg\beta$

(2) Γ - полное непротиворич. мн-во, если $\forall \alpha$ $\alpha \in \Gamma$ или $\neg\alpha \in \Gamma$

Характеризуем модель вектором булевых значений

(2a) Γ - полное непротиворич. бесконв. ч-л, если

<u>Лемма 3</u> $\neg$ Γ - непрот. мн. (бесконв) мн-во, тогда $\exists \Delta \supseteq \Gamma$, Δ - полн. непротиворич (бесконв) мн-во

Δ

Возьмем все формулы, их не более чем счетное мн-во

$\delta_1 \ \delta_2 \dots \delta_n \dots$

$\Gamma_1 \ \Gamma_2 \dots \Gamma_n$ $\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$

Γ_i - непротив. мн. в.

$\forall \delta_i$ $\to$ одно из двух: $\Gamma_i \cup \{\delta_i\}$ - непрот.
$\Gamma_i \cup \{\delta_i\}$ - непротив.

$\Gamma_i \cup \{\delta_i\} \vdash \beta \& \neg\beta$
$\Gamma_i \cup \{\neg\delta_i\} \vdash \beta \& \neg\beta$

[Лемма: $\Gamma \vdash \beta \& \neg\beta$, тогда $\Gamma \vdash \alpha \& \neg\alpha$]

$\Gamma_i \vdash (\delta_i \vdash \beta \& \neg\beta)$
$\Gamma_i \vdash (\neg\delta_i \vdash \beta \& \neg\beta)$

$\Gamma_i \vdash (\delta_i \vee \neg\delta_i \vdash \beta \& \neg\beta)$

$\Gamma \vdash \beta \& \neg\beta$.

по Γ непрот.)

$\to \neg \Delta$ противор., тогда $\delta_{прот} \in \Gamma_i$, но Γ_i незаб

Δ полно (по опр.)

$\exists$ Оценка обр. модель для Γ, если $\forall \alpha \in \Gamma$ ~~$\models$~~ $[\![\alpha]\!]_A = И$

$\Gamma \models \alpha$ в любой оценке, явл. моделью для Γ, чел

<u>Лемма</u>, если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$

<u>Теор.</u> Если у Γ есть модель, то Γ непрот.

$\rightsquigarrow$. Есть α | $\Gamma \vdash \alpha$ $\quad \Gamma \models \alpha$ $\quad [\![\alpha]\!] = И$

$\Gamma \vdash \neg\alpha$ $\quad \Gamma \models \neg\alpha$ $\quad [\![\neg\alpha]\!] = И$

<u>Теор</u> $\exists$ Γ — непротиворечивое, конч. непр. бесконч. мн-во

Тогда у Γ есть модель

Δ Строим:

1. $[\![C_i]\!] \to \langle\langle C_i \rangle\rangle$

$f(\theta_i)[\![\theta_i]\!] \to \langle\langle f(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n) \rangle\rangle$

2. $[\![P(\theta_1 \dots \theta_n)]\!] = \alpha$ $\quad [\![\alpha]\!] = И$, если $\alpha \in \Gamma$

3. Возьмем опр. ест. образом

Докажем, что это модель

База. Если $P \in \Gamma$, то $[\![P]\!] = И$ — изопр

$P \notin \Gamma$, то $[\![P]\!] = Л$

Пер-од α, β.

Если $\alpha \& \beta \in \Gamma$, то $[\![\alpha \& \beta]\!] = И$

Если $\alpha \& \beta \notin \Gamma$, то $[\![\alpha \& \beta]\!] = И$

$\to$ ~~α, β~~ $\Gamma \vdash \alpha, \beta$, $\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \beta$, значит $[\![\alpha]\!] = И$, $[\![\beta]\!] = И$, тогда $[\![\alpha \& \beta]\!] = И$

$\to$ $\Gamma \vdash \neg\alpha \vee \Gamma \vdash \neg\beta$, $\vee$ ~~$\Gamma \vdash$~~ $\neg\alpha$, тогда $[\![\dots]\!] = Л$

$\triangleright$

<u>Теорема</u> Гёделя о полноте исч. пред.

Γ — непр. мн-во ф-л $\Leftrightarrow$ Γ имеет модель

Следствие: Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

$\rightsquigarrow$ $\not\vdash \alpha$, $\not\vdash \neg\alpha$, $\not\vdash \Gamma$ г $\{\neg\alpha\}$, но есть модель, в кот. $[\![\neg\alpha]\!] = И$, $[\![\alpha]\!] = Л$ $\not\models$

Δ

Γ - полное из Γ'

$\downarrow$

Δ - полн. непр. мн-во бинарности. ℓ-п

1. Делаем все св. повер-нату. для $\alpha - \beta$

$\alpha \vdash \beta$

$\beta \vdash \alpha$

2. Γ - нач $\subseteq \Gamma_1 \leq \Gamma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma^* = \bigcup_i \Gamma_i$

d_i $\quad d_i$

C_i - конст. $\quad d_i^k$

$\alpha \in \Gamma_i \qquad \alpha = \forall x \beta \quad \Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta[x := C_i]\} \cup \{\beta[x := \theta]\}$ $\quad \Gamma_{i+1} \quad U = \bigcup_i \{\beta[x := \theta]\}$

θ - терм из C_i и d_i^k на

$\cancel{\alpha = \exists x \beta} \quad \cancel{\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\beta[x := d_i^{k+1}]\}}$

$\alpha = \exists x$

$\Gamma_{i+1} = U = \{\beta[x := d_i^{k+1}]\}$ d_i^{k+1} - нов пер

$\Delta = \Gamma^* \setminus$ форм. с св.

Δ непротиворч. потому что:

$\nu \to \gamma_1 \ldots \gamma_k \vdash \delta \& \neg \delta$

Возьмем γ, γ доказуемо на конкретном i, мне

$\exists j = \max[i]$ это и есть на Γ_j в котором лежат все γ

Есть переход: Γ_0 непротивореч.

$\Gamma_i \to \Gamma_{i+1}$ непротивореч.

$\exists \Gamma_i$ непротиворр., а Γ_{i+1} противор.

$\Gamma_{i+1} \vdash \delta \& \neg \delta$

$\Gamma_i, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \vdash \delta \& \neg \delta \qquad \varepsilon_i \in \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_i$

$\Gamma_i \vdash \varepsilon_1 \to \varepsilon_2 \to \ldots \varepsilon_k \to \delta \& \neg \delta \qquad (*)$

Хотим доказать, что если $(*)$, то $\Gamma_i \vdash \delta \& \neg \delta$

$\Gamma_i \vdash \varepsilon_1 \to (\varepsilon_2 \to \ldots \to \delta \& \neg \delta)$

по

$\Gamma_i \vdash (\varepsilon_2 \to \ldots \to \delta \& \neg \delta)$

(1) $\alpha \equiv \forall x\, \xi$

$\xi_1 \equiv \xi[x := \theta]$

(2) $\alpha \equiv \exists x\, \xi$

$\xi_1 \equiv \xi[x := d_k^{i+1}]$

$\Gamma_i \vdash \forall x\, \psi$

$\Gamma_i \vdash \forall x\, \psi \to \psi[x := \theta]$

θ св. для идент., потому что в нём нет перем., только c_i, d_j^k

$\Gamma_i \vdash \psi[x := \theta]$

~~[illegible]~~ Γ_i

атомы нигде не был.

$\Gamma_i \vdash \xi[x := y] \to (\xi_2 \to \ldots \to \delta \to \delta)$

d_k^{i+1} y

y нет. только σ

$\Gamma_i \vdash \exists y\, \xi[x := y] \to (\ldots)$

$\Gamma_i \vdash \exists x\, \xi$

$\Gamma_i \vdash \xi[x := y][y := x] \to \exists y\, \xi[x := y]$

$\Gamma_i \vdash \exists x\, \xi \to \exists y\, \xi[x := y]$

$\Gamma_i \vdash \exists y\, \xi[x := y]$

$\Gamma_i \vdash \xi_1 \to \ldots \to \ldots$

$\triangledown$

$\mathfrak{A}$ - модель M в Γ^* есть с иванг. и без.

M - мод для Γ^*

для бесконечн. это модел, потому что в $\mathfrak{A}$

α - ф иванторов - индукция по числу иванг.

$\alpha \equiv \forall x\, \beta$ $\alpha \equiv \exists x\, \beta$ в β $n-1$ кв.

$\beta[x := \theta] \in \Gamma^*$, но $[\![\beta[x := \theta]]\!]_\mu = u$

горизонта в появилась для моде t,

$\forall$. $\beta[x := 2[_i] \in \Gamma_L \in \Gamma^*$

$\beta[x := \delta^{l}_{k}] \in \Gamma_{max(k,l)} \in \Gamma^*$

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Контрапоз: $\not\vdash \alpha$

$\Gamma = \{\neg\alpha\}$. — пусть противоречиво:

значит непротиворечив

то найдем модель | $[\![\alpha]\!] = 1$

$\not\models \alpha$.

$\neg\alpha \vdash \alpha \to \neg\alpha$

$\neg\alpha \vdash \alpha$

$\vdash \neg\alpha \to \alpha$

$\vdash \neg\alpha \to \neg\alpha$

$(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$

$\to \alpha$.

29.10.2014

] N — мн-во, удовл. аксиомам Пеано

(1) $(\,'\,): N \to N$

(2) $0 \in N$: Нет $x \in N$, что $x' = 0$

(3) если $x, y \in N$ и $x' = y'$, то $x = y$

(4) Если φ — св-во на N

и известно, что

(a) $\varphi(0)$

(б) $\varphi(n)$ следует $\varphi(n')$, то $\varphi(n)$ вып. для любого n

Зададим $a + b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ (a+c)', & b = c' \end{cases}$

$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & b = c' \end{cases}$

докажем $1 + 1 = 2$ $\quad 0' + 0' = 0'' = (0' + 0)' = 0''$

$2 + 2 = 4$ аналогично

$a + b = b + a$

a: нет c: $c' = a$ } вниз не сооб. $\mathbb{N}$
$a \neq 0$

$\varphi =$ наборы $n \in \mathbb{N}_0$, что $x = 0^{(n)}$
$x = 0^{(n)}$, то $x' = 0^{(n+1)}$

$\exists a$: нет $c \mid c' = a$

$a + 0 = 0 + a$

$a + 0 = a$

$0 + a = 0' + a$

$x = 0$ или наборы c: $c' = x$

а) $x = 0$

б) x' — т.к. x' следует за x

$0 + 0 = 0 + 0$ — очев.

$\exists a + 0 = 0 + a$

$a' + 0 = 0 + a'$ $\quad (a' + 0) = a' = (0 + a') = (a' + 0') = a'$

вар предп окр

$a + 0 = 0 + a$ — база $\quad a' + b' = (a' + b)' = (a + b')' = a + b'$

$\exists a + x = x + a$

$a + x' = (a + x)' = (x + a)' = x + a'$

Теория I порядка

Расширим предикаты мн-ва математики, последовательность есть понятное.

Формал. арифметика

0

$(')$ — 1 местная постфиксная ф-я

$(+), (\cdot)$ — 2-местные ф. символы

$(=)$ — двуместный предикатный символ

(A1) $a=b \to a'=b'$

(A2) $(a=b) \to a=c \to b=c$

(A3) $a'=b' \to a=b$

(A4) $\neg(a'=0)$

(A5) $a+b'=(a+b)'$

(A6) $a+0=a$

(A7) $a\cdot 0=0$

(A8) $a\cdot b'=ab+a$

это ф. схемы

Схема аксиом индукции

~~(A9) $\varphi[x:=0] \& (\varphi \to \varphi[x:=x']) \to \forall x\, \varphi$~~

(A9) $(\varphi[x:=0]) \& \forall x(\varphi \to \varphi[x:=x']) \to \varphi$

x вх. своб. в φ – без этого $\varphi \& \psi \to \varphi$

Рекурсивные ф-ии

$f: \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$

(1) $Z(x)=0$

(2) $N(x)=x+1$

(3) $U_i^n(x_1 \dots x_n)=x_i$

(4) $S\langle f, g_1, \dots g_m\rangle = f(g_1(x_1 \dots x_n) \dots g_m(x_1 \dots x_n))$

(5) $R\langle f, g\rangle(x_1 \dots x_n, y) = \begin{cases} f(x_1 \dots x_n) & y=0 \\ g(x_1 \dots x_n, y-1, R\langle f,g\rangle(x_1 \dots x_n, y-1)) \end{cases}$

прим. рекурсии

$R^{n+1}: \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$

$f: \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$

$g: \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}_0$

(6) $\mu\langle f\rangle(x_1 \dots x_n, y)$ – min k: $f(x_1 \dots x_n, k)=0$

неопр, если $\nexists$ k

Определим +:

$plus = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(a, b)$

Арифметические отношения и функции

Опр. φ-я арифметическая, если $f: \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$

P – арифметическое отношение, если $P \subseteq \mathbb{N}_0^n$

R – арифм. выразимо в Ф.А., если $\exists \alpha$ с n своб. аргум. –
$R \subseteq \mathbb{N}_0^n$

– $\alpha(x_1 \dots x_n)$, которая: $k_1 \dots k_n \in \mathbb{N}_0$
$(\overline{k_1} = 0''''\dots)$ без терм. – сим. следт.-интерпрет.

Если $R(k_1 \dots k_n)$, то $\vdash \alpha(\overline{k_1} \dots \overline{k_n})$

Если $\neg R(k_1 \dots k_n)$, то $\vdash \neg\alpha(\overline{k_1} \dots \overline{k_n})$

$a < b$ – выразимо φ-лой

$\exists b (\neg(b = 0) \& x_1 + b = x_2)$

Опр $C_R(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1, & R(x_1 \dots x_n) \\ 0, & \neg R(x_1 \dots x_n) \end{cases}$ – сим. арифм.

Опр $\exists! y \varphi(y)$ $\quad \exists y \varphi(y) \& \forall a \forall b (\varphi(a) \& \varphi(b) \to a = b)$

Опр $f: \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ представима в ф.а., если
$\exists \alpha(x_1 \dots x_{n+1})$, что $\forall k_1 \dots k_{n+1} \in \mathbb{N}_0$

(1) $f(k_1 \dots k_n) = k_{n+1}$ т.и.т.т. $\vdash \alpha(\overline{k_1} \dots \overline{k_{n+1}})$

(2) $\exists! b(\alpha(\overline{k_1} \dots \overline{k_n}, b))$

~~Теор~~ ~~φ-я f предст. в Ф.А т.и.т.т.~~

Теор. R выразимо в Ф.А. $\Longleftrightarrow$ C_R предст. в Ф.А.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\overset{\Delta}{\Rightarrow}$ $\alpha(x_1 \dots x_n)$ выражает R

$(\alpha(x_1 \dots x_n) \to (x_{n+1} = 0'')) \& (\neg\alpha(x_1 \dots x_n) \to (x_{n+1} = 0))$
представит C_R

$\overset{\Delta}{\Leftarrow}$ $\beta(x_1 \dots x_{n+1})$ предст. C_R

Представимость рекурс. ф-й

Теор. Z представ. в ф.а. $Z(x_1, x_2) = \bar{\ }(x_1 = x_2 \ \& \ 2x_2 = 0)$

$\boxed{3}$ N ... $N(x_1, x_2) = x_1' = x_2$

U_i^n $U_i(x_1 \dots x_{n+1}) =$

$= (x_1 = x_1) \& \dots (x_n = x_n) \&$

$\& (x_{n+1}) = x_i)$

Теор. $f, g_1 \dots g_m$ тогда $S\langle f, g_1 \dots g_m \rangle$ представ. в ф.а.

$\boxed{3}$ $\varphi, \psi_1 \dots \psi_m$

$\exists b_1 \dots \exists b_m (\psi_1(x_1 \dots x_n, b_1) \& \dots \psi_m(x_1 \dots x_n, b_m) \& \varphi(b_1 \dots b_m, x_{n+1}))$

Опр. β-ф-я Гёделя ← деление с ост.

$\beta(b, c, i) = b \% (1 + c(i+1))$

$a \% b = d$:
$\forall m$
$d + m \cdot b = a$
$m \geq 0; 0 \leq d < b$

Лемма. β-ф. Г. представима в Ф.А.

$\boxed{3}$ $B(b, c, i, d) = \exists q ((b = q * (1 + c * (i+1)) + d) \& (d < 1 + c * (i+1)))$

Теорема Китайская теор. об. остатках

$u_1 \dots u_m$ – попарно простые числа

k_i, что $0 \leq k_i \leq u_i$, то найдется b:

$k_i = b \% u_i$

Δ

Статкевич доказат

∇

Теор $\forall k_0 \dots k_n \ \exists \ b, c \mid \beta(b, c, i) = k_i$

$c = (\max(k_0 \dots k_n, n))!$ $\beta(b, c, i) = b \% u_i$

$u_i = 1 + c \cdot (i+1)$

u_i вз. пр. с u_j $j < i$

$\leftarrow \downarrow$ $u_i \vdots p$ $u_j \vdots p$ $(u_i - u_j) = c(i-j) \vdots p$

$u_i > u_j$ (?)

Теор. Р. ф-ии предп. в Ф.А.

$f: N_0^n \to N_0$

φ

$R\langle f, g\rangle$ $\qquad$ $g: N_0^{n+2} \to N_0$

$\rho = \exists b \exists c (\exists k (\hat{\beta}(b,c,0,k) \& \varphi(x_1 \dots x_n, k))$

$R\langle \dots \rangle (0) = f(x_1 \dots x_n) \& \forall k (k < x_{n+1} \to \exists d \exists e (\hat{\beta}(b,c,k,d) \& \varphi(x_1 \dots x_n, k, d, e)) \& \hat{\beta}(b,c,k,e))$

$(1) = g(\dots R(0))\}$ $\qquad$ $\leftarrow \hat{\beta}(b,c,x_{n+1}, x_{n+2}))$

$(2) = g(\dots R(1))$

$\vdots$

$R \qquad (x_{n+1}) = g(\dots R(x_n))$

Теор Любая рекур. ф-я предп. в Ф.А.

$\mu\langle f\rangle \qquad \varphi \qquad f: N_0^{n+1} \to N$

$\hat{\mu}(x_1 \dots x_{n+1}) = \varphi(x_1 \dots x_n, x_{n+1}, 0) \&$

$\forall y ((y < x_{n+1}) \to \neg\varphi(x_1 \dots x_n, y, 0))$

Гёделева нумерация

(← 3

) ← 5

, ← 7

¬ ← 9

|| →

13 ∨

15 &

17 ∀

19 ∃

21+6·k X_k

$23+6\cdot 2^k\cdot 3^m$ f^m_k

$25+6\cdot 2^k\cdot 3^m$ P^m_k ← пр. нат.

$f^1_0 = (')$

$f^2_0 = (+)$

$f^2_1 = (\cdot)$

$P^2_0 = (=)$

$S_1 \dots S_4$

$P_1 \dots P_k$ ← прост. числа

$\forall x_1\ P_0^2(x_1, x_1) = 9$

$17, 27, 79, 3, 27, 7, 27, 5 = 47$

$q = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{79} \cdot 7^{3} \cdot 11^{27} \cdot 13^{7} \cdot 17^{27} \cdot 19^{5}$

Д-во: S_1, S_2, …, S_k

$[S_1]\ [S_2]\ [S_3]\ [S_4]\ [S_5]$

$2\ 3\ 5\ 7\ 11 \dots$

(,) $\to 2^{2^3} \cdot 3^{2^5}$

число в виде $(P_8)^n$

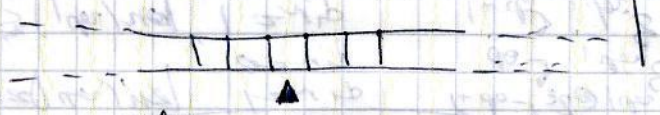
$plg(a, b)$ – max n : $a \vdots b^n$

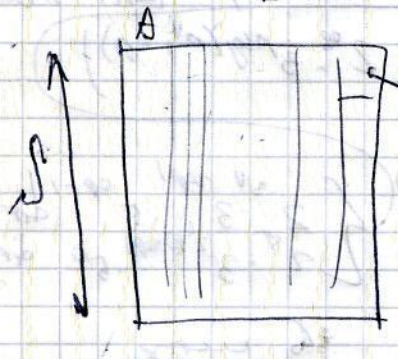
len : – max n : $a \vdots p_n$

$S_1 @ S_2 =$

$P_1^{plg(S_1,1)} \cdot \dots \cdot P_{len S_1}^{plg(S_1, len S_1)} \cdot P_{len(S_1)+1}^{plg(S_2,1)} \cdot \dots \cdot P_{len S_1 + len S_2}^{plg(S_2, len S_2)}$

Машина Тьюринга





$A + S_1 \rightleftarrows 1 \dots A\ 1 \dots S\ 0 \dots 2$

$Proof(e, p)$ = (p ≡ proof of e)

1 пр. proof

+1 в унари двоичной $A = \{0, 1, \square\}$ $S = \{пр, *, ок\}$

	0	1	□
пр	пр, 0 →	пр, 1 →	*, □ ←
*	ок, 1 ↓	*, 0 ←	ок, 1 ↓
ок	ок, 0 ↓	ок, 1 ↓	ок, □ ↓

$P(x$ Программа останова

$P(x, a)$ вход. данные $\quad x(a)$ ост или нет

чуднев. изм. для нера программы

$S(x) = P(x, x) \qquad S(\text{while}(\text{true})\{\}, _) = 1$

МетаПрограмма = if $S(x)$ then while(true){} else 1

МП ($\ulcorner$МП$\urcorner$) $\qquad S(\ulcorner$МП$\urcorner)$?

$\langle st, tape, pos\rangle = 2^{st} \cdot 3^{tape} \cdot 5^{pos}$ изг. символ

стандартное начало

$\Rightarrow R\langle f, g\rangle(s \to st, s \to tape, s \to pos, \varepsilon, pb, pc, tb, tc, y)$

ф-я перехода по матр. $\quad f: \langle st, a\rangle \to \langle st, a, dir\rangle$ $\qquad$ задает p $\qquad$ задает t

термин. сост. алгоритм. $\quad t: \langle st\rangle \to \frac{0}{1}$

$\beta(b, c, i) = b / (1 + (1+i)c)$ $\qquad R = \begin{cases} f(\ldots) \\ g(\ldots) \end{cases}$

$dir: 0, 1, 2$

$\times \leftarrow \rightarrow$

опр. f, g:

init $\quad f(-\,\|\,-) = 2^{s\text{-}st} \cdot 3^{s\text{-}tape} \cdot 5^{s\text{-}pos}$

один шаг $\quad g(-\,\|\,-) = \begin{cases} 2^{st} \cdot 3^{repl} \cdot 5^{op+1} & dir = 1,\ len(repl) \le op \\ 2^{st} \cdot 3^{repl} \cdot 5^{op} & dir = 0 \\ 2^{st} \cdot 3^{repl} \cdot 2^{\varepsilon} \cdot 5^{-op+1} & dir = 1,\ len(repl) = 0 \end{cases}$

$s, prev$

$at = plog(prev, 2)$ $\qquad res = \beta(pb, pc, 2^{as} \cdot 3^{plog(at, op)})$

$as = plog(prev, 1)$ $\qquad st = plog(as, 1)$

$op = plog(prev, 3)$ $\qquad sym = plog(as, 2)$

$dir = plog(res, 3)$

$repl = (at / p_{op}^{plog(at, op)}) \cdot p_{op}^{sym}$ $\qquad \begin{cases} 2^{st} \cdot 3^{repl} \cdot 5^{op-1} & dir = 2,\ op > 0 \\ 2^{st} \cdot 3^{2^{\varepsilon} \cdot repl} \cdot 5^{0} & dir = 2,\ op = 0 \end{cases}$

пр. числа

5 позиц в слагаемом

$steps = \mu\langle S\langle \beta(U_7^7, U_8^9, U_9^9), R\langle f, g\rangle\rangle\rangle$

$steps(-\,\|\,-, tb, tc) = \mu\langle \beta(tb, tc, st)\rangle$

где $st = plog(R\langle f, g\rangle(-\,\|\,-, tb, tc, y))$

кол-во шагов для достижения term.

$Emulate(p) = plg(R\langle f, g\rangle(s0, p, \text{—}\text{"}\text{—}, steps(s0, p, \text{—}\text{"}\text{—}), 1) == sfinish$

$Proof(e, p) = Emulate(p) \;\&\; (plg(p, len(p)) = e)$

<u>Теор</u> $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $\quad \varphi$ — представляет f в φ арифм.

$k_1 \ldots k_n \quad f(k_1 \ldots k_n) = u$, то

$\vdash \varphi(\bar{k}_1, \ldots \bar{k}_n, \bar{u})$

~~Proof~~ $C_\varphi(k_1 \ldots k_n, u, p) = 0$, если

p — геделев номер

g — вх $\varphi(\bar{k}_1 \ldots \bar{k}_n, \bar{u})$

$f(x_1 \ldots x_n) = plg(\mu < S < C_\varphi, U_1^{n+1} \ldots U_n^{n+1}, plg(U_{n+1}^{n+1}, 1),$

$plg(U_{n+1}^{n+1}, 2) >> (x_1 \ldots x_n), 1)$

19.11.2014

Гедель — запах весенья

Первая теорема о непонноте

φ "е неразрешимо"

$\not\vdash \varphi \quad \not\vdash \neg\varphi$

О. Теория ω-непротиворечива, если $\forall \varphi(x)$

для любого $\vdash \varphi(\bar{x})$, то $\exists p \neg\varphi(p)$

неразрешимо

Л. Если теория ω-непротиворечива, то она непротиворечива.

$\varphi = x = x \to x = x$ $\quad$ Очевидно, доказуемо $(A \to A)$

$\underbrace{\exists x \neg(x = x \to x = x)}$ $\quad \vdash \varphi[x = \bar{k}]$ $k \in \mathbb{N}_0$

она неразрешима по условию, а в противореч. теории доказуемо все

Тогда теория непротиворечива.

$W_1(x,p)$ — истина, если p — д-во $\ulcorner x \urcorner$ $\underline{\varphi(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})}$

$x = \ulcorner\varphi\urcorner$ ~~Пусть~~, φ — ф-ла с единств. св. перем. x_1

$W_1(x,p)$ рекурсивная (доказать)

$W_1(x,p)$ — ф-ла выражающая $W_1(x,p)$ в Ф.А.

$\nexists\ \sigma(x) = \forall p \neg W_1(x,p)$

$\nexists\ \underline{\sigma(\ulcorner\sigma\urcorner)}$ $\quad \tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma(x)\urcorner})$

Т. Гёделя о неполноте ФА v 1

1. Если ФА непротиворечива, то $\nvdash \tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$
2. Если ФА ω-непротив., то $\nvdash \neg\tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

Δ

(1) $\leftarrow$ v. $\exists \vdash \tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, тогда $\exists p$, доказыв. $\tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, $\Rightarrow$ $W_1(\ulcorner\sigma\urcorner, p) =$ ист.

тогда (по вкр) $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$

с другой стороны, $\vdash \forall p \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$

Сх. акс. $\forall p \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p) \to \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{q})$

$\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{q})$

$\rightarrow\leftarrow$, значит $\nvdash \tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

(2) $\leftarrow$ v. $\vdash \neg\tilde{\sigma}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

$\vdash \neg \forall p \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$

$\vdash \exists p\, \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$ — лемма о нов. квант.

значит найдется q

$\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{q})$

Пусть для каждого $q \in \mathbb{N}_0$

$\vdash \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{q})$

ω-непр., значит

$\vdash \exists p \neg \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$

$\rightarrow\leftarrow$

$w_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, q)$, т.е. $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

$\sigma \equiv 0 \to \sigma(x_1$

$\sigma \equiv 0 \to \sigma(x_1)$

$\forall x_1 \sigma(x_1)$

$\forall x_1 \sigma(x_1) \to \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

$\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

∇

$\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ – нет, не переноздция, но отрицания

$W_1(x,p)$ гл, если p док. $\varphi(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$

$W_2(x,p)$ гл, если x – гёделев номер $\varphi(x)$ и $\varphi(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ ложно

p – номер д-ва отриц. самоприм. x или p доказывает, что

$W_2(x,p)$ $\qquad$ $W_1(x,p)$. p док. $\varphi(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$

$\rho(x) = \forall p(W_1(x,p) \to \exists q(q<p \,\&\, (W_2(x,q))))$

Теорема Гёделя в форме Россера

1. $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ $\Rightarrow$ 2. $\vdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$

Δ

① $\leftarrow$ 1. $\vdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$.

$\forall p(W_1(\overline{\ulcorner\rho\urcorner}, p) \to \exists q(q<p \,\&\, (W_2(\overline{\ulcorner\rho\urcorner}, q))))$

t – номер д-ва этого в ого

$W_1(\overline{\ulcorner\rho\urcorner}, t) \to \exists q(q<\overline{t} \,\&\, (W_2(\overline{\ulcorner\rho\urcorner}, q)))$

нет

$\exists q(q<\overline{t} \,\&\, (W_2(\overline{\ulcorner\rho\urcorner}, q)))$

Практика 1 будет

$\delta(x) = \forall p \neg \omega_1(x, p)$ проблема в том, что

Не сущ. ф-ла $\chi(x)$

$\tilde{\delta}(\tilde{\delta}(x))$ - плохо

но-хорошему, это / $\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}(\ldots)})})$ /

```
#include <stdio.h>
char q = 42;
char body[] = {"#include <stdio.h>" + "char q = 42;" + "char body[] = {" + "main ..." +
int main() {
    return 0
}
```

Чем фиксить?

① $\text{body} \models \tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}})$ на $\mathbb{N}_0$

② ЛБ - противоречив, но не противоречив теор.

1

$[\![\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}})]\!] = [\![\forall p \neg \omega_1(\overline{\tilde{\delta}}, p)]\!] = \begin{cases} И & [\![\neg \omega_1 \ldots]\!] = И \text{ для всего} \\ Л & \text{иначе} \end{cases}$

$= \begin{cases} И & [\![\omega_1(\overline{\tilde{\delta}}, p)]\!] = Л \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ / $Л \to \neg [\![\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}})]\!] = \neg Л$

тогда $\nexists W_1(\overline{\tilde{\delta}}, d)$

$\delta = Л$

$W_1 = Л$

$\neg \omega_1(\ldots)$

$[\![\neg \omega_1(\ldots)]\!] = И$

$[\![\neg \omega_1(\ldots)]\!] = Л$

$d = И$

d - д-во $\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}})$

тогда на подпрыгнем $\tilde{\delta}(\overline{\tilde{\delta}})$

$[\![\varphi(p)]\!]^{p:=t} = [\![\varphi(t)]\!]$

$[\![p]\!]^{p:=t} = [\![t]\!]$

$[\![f(\theta_1 \dots \theta_n)]\!]^{p:=t} = [\![f(\theta_1 \dots \theta_n) = t]\!]$

---

2 $\vdash$ (Ал. Г) $\neg\vartheta(\ulcorner\vartheta\urcorner)$

теория w — противоречива по конструкциям 2 п. 1 теор Гёделя

обычное противоречивая

Если $\alpha \vdash \alpha \& \neg\alpha$

$\alpha \to \alpha \& \neg\alpha$

$(\alpha \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \alpha) \to \neg\alpha$

$\vdash \neg\vartheta(\ulcorner\vartheta\urcorner)$

Автор: Крашвале машина Тьюринга

$\langle st, tape, pos\rangle = 2^{st}\cdot 3^{tape}\cdot 5^{pos}$ в рекурс. ф-ях

$p: \langle st, q\rangle \to \langle st, q, dir\rangle$

берет четвёрку $[st, q]$, возвращает ее компонент

$t: \langle st\rangle \to 0 \mid 1$

проверяет, что $st = Y$

$$R\langle f,g\rangle(\underbrace{\langle s_st, s_tape, s_pos\rangle}_{\text{начальное состояние } S\text{, вся лента и нач. положение}}, \varepsilon, \underbrace{pb, pc}_{\beta\to p}, \underbrace{tb, tc}_{\beta\to t}, y)$$

двух сосед. х-ик (грич)

$$\begin{cases} cs(prev) = plg(prev, 1) \\ ct(prev) = plg(prev, 2) \\ cp(prev) = plg(prev, 3) \end{cases} \Rightarrow res(pb, pc, prev) = p(pb, pc, 2^{cs(prev)}\cdot 3^{plg(ct(prev), cp(prev))})$$

достаю цифру по номеру в ленте

$\Leftarrow$

из текущего состояния достаю данн

~~st t pos~~

Достаем нужные данн

$$\begin{cases} st(-||-) = plg(res(-||-), 1) \\ sym(-||-) = plg(res(-||-), 2) \\ dir(-||-) = plg(res(-||-), 3) \end{cases} \Rightarrow repl = \underbrace{(ct / p_{cp}^{plg(ct, cp)})}_{\text{в текущей ячейке удалить символ, на котором стоим}} \cdot \underbrace{p_{cp}^{sym}}_{\text{добавим новый}}$$

возвращает новый tape

same

$f(\langle\ \rangle, \varepsilon, pb, pc, tb, tc) = 2^{s_st}\cdot 3^{s_tape}\cdot 5$

$g(\langle\ \rangle, \varepsilon, pb, pc, tb, tc, y, prev) =$

нужно это не нужно?

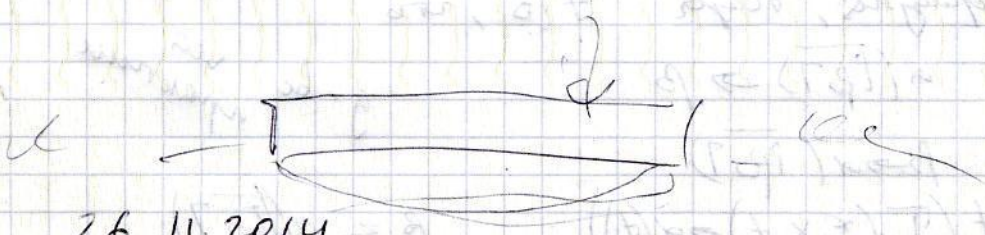
$2^{st(-)}\cdot 3^{repl}\cdot 5^{cp+1}$ $\quad dir = 1,\ len(repl) > cp$

$2^{st}\cdot 3^{repl}\cdot 5^{cp}$ $\quad dir = 0$

$2^{st}\cdot 3^{repl@2^{\varepsilon}}\cdot 5^{cp+1}$ $\quad dir = 1,\ len(repl) = 0$

$2^{st}\cdot 3^{repl}\cdot 5^{cp-1}$ $\quad dir = 2,\ cp > 0$

$2^{st}\cdot 3^{2^{\varepsilon}@repl}\cdot 5^{0}$ $\quad dir = 2,$ bug



26.11.2014

2 Теорема Гёделя о неполноте ФА

$Consis \equiv \neg \exists t(\pi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, t))$

$Proof(x,p) = \pi$

p.g.box

Т. Гёделя №2

Consis недоказуема, если Ф.А. непротиворечива

Δ

$\vdash Consis \to G(\overline{\ulcorner G \urcorner})$

$\exists \vdash Consis$, тогда $\vdash G(\overline{\ulcorner G \urcorner})$

∇

Плохое высказывание: $\pi(x,p)$

$\pi_1(x,p) = \pi(x,p) \& \neg(\pi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, p))$

π_1 - это то же самое, что и π, тоже выражает Proof(x,p)

$Consis' = \neg \exists t(\pi_1(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, t))$

Мы можем доказать Consis', тогда все плохо.

Нормальное 5-бо 1

Δ

$Sub(a, b, c)$ — истинно, если

a, b — $\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner$, $c = \ulcorner\alpha[x := \beta]\urcorner$

α или β не
где-нибудь повтор $c = 0$

Пусть Sub выражает $\tau(a, b, c)$

<u>Лемма</u> о самоприменении (об автоссылке)

$\alpha(x)$ — формула, тогда $\exists \beta$, что

$\vdash \alpha(\overline{\ulcorner\beta\urcorner}) \to \beta$ д-во на практике

$\vdash \beta \to \alpha(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})$

$\beta_0(x) = \forall t(\tau(x, x, t) \to \alpha(t))$ $\beta = \beta_0(\overline{\ulcorner\beta_0\urcorner})$

$\Pi_g(x, p)$ выражает Proof

$\Pi_p(x) = \exists p\, \Pi_g(x, p)$ ← усл. Гильберта–Бернайса

1) Если $\vdash \alpha$, то $\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$

2) $\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to \Pi_2(\overline{\ulcorner\neg\Pi_2(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})$

3) $\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to \Pi_2(\overline{\ulcorner\alpha \to \beta\urcorner}) \to \Pi_2(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})$

Теорема Тідемана Арифметика непротиворечива

$\Pi_g(x, p)$ $\Pi_p(x)$ $Consis = \neg\Pi_p(\overline{\ulcorner 1 = 0\urcorner})$

Consis недоказуемо или ф.а непротиворечива

Δ

$\tilde{\sigma}_g(a) = \forall t(\tau(a, a, t) \to \Pi_p(t))$ ← у самоприм. а нет д-ва

$\tilde{\sigma}_g = \tilde{\sigma}_g(\overline{\ulcorner\tilde{\sigma}_g\urcorner})$ ← у самоприм. тоже нет д-ва

$\vdash \tilde{\sigma}_g \to \neg\Pi_p(\overline{\ulcorner\tilde{\sigma}_g\urcorner})$

$\vdash \neg\Pi_p(\overline{\ulcorner\tilde{\sigma}_g\urcorner}) \to \tilde{\sigma}_g$

} лемма о самоприм.

$\vdash \mathrm{Consis} \to \gamma_g$

$\Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner}) \vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner})$ (контрапозиция) дедукция $\to \neg\Pi_2(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}) \to \neg\Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner})$

Лемма

α, β $\quad \vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$ $\quad \vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \to \beta$

тогда $\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

$\wedge$ правило Гильберта – Бернайса

we don't need that

доказем это:

$\Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner}) \vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \neg\gamma_g \urcorner})$ $\quad \cancel{\Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner})} \vdash$

$\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner}) \to \gamma_g$

Лемма:

$\exists\, \alpha, \beta$ $\quad \vdash \Pi_N(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$ $\quad \vdash \Pi_N(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \to \beta$

$\vdash \Pi_N(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

$\triangle$

по лемме

$\vdash \Pi_2(\overline{\ulcorner \Pi_N(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner}) \to \Pi_2(\overline{\ulcorner \Pi_2(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \to \beta \urcorner}) \to$

$\to \Pi_2(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

$\triangleright$

$\Pi_2(\overline{\ulcorner \gamma_g \urcorner}) \to \gamma_g$

$\vdash \gamma_g \to \neg\gamma_g \to 1=0$

Гр лемма $\Rightarrow \Pi_N(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner})$

Практика:

$\pi_1(x, p) \equiv \pi(x,p) \& \neg\pi(\overline{1=0}, p)$

① $\vdash \alpha$, то $\vdash \pi_1(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$ сущ. прув

у.у. д-во α, t ~~ну~~ номер д-ва α $\vdash \exists p(\pi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}, p))$

по выраз. $\rightarrow \pi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}, \overline{t})$ $\quad \pi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}, \overline{t}) \rightarrow \exists p(\pi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}, p))$

② $\vdash \pi_2(\overline{\ulcorner x\urcorner}) \rightarrow \pi_2(\overline{\ulcorner \pi_2(\overline{\ulcorner x\urcorner})\urcorner})$

$\exists p_0(\pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0)) \rightarrow \exists p_1 \pi_g(\overline{\ulcorner \exists p_0 \pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0)\urcorner}, p_1))$

$\exists p_0 \pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0) \vdash \exists p_1 \pi_g(\overline{\ulcorner \exists p_0 \pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0)\urcorner}, p_1)$

$\exists p_0 \pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0)$

p_0 ...

x ...

$\pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, \overline{p_2})$

← эквивалентно

$\forall p_2 \pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_2) \rightarrow \exists p_1(\overline{\pi_g(\overline{\ulcorner x\urcorner}, p_0)}, p_1)$

Тут все сложно и мы ну

Не сложилось

③ $\vdash \pi_r(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \rightarrow \pi_r(\overline{\ulcorner\alpha \rightarrow \beta\urcorner}) \rightarrow \pi_r(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})$

доказываемая $\quad$ выполняемая $\quad \alpha, \alpha \rightarrow \beta$

$\pi_1(x, p) \equiv \pi(x,p) \& \neg\pi(\overline{1=0}, p)$

Доб(x, t) ~~пре~~ $\rightarrow \pi(x, t)$

~~π_1~~

$\exists$ Proof (x,p) ~~нет~~ ложно.

$\vdash \neg \pi(\bar{x},\bar{p})$

не важно

доказывает $\neg(\pi(\bar{x},\bar{p}) \& \ldots)$

Proof (x,p) истинно.

Если ФА противор., то докажем что среди ФА не противор., тогда $\vdash \pi(\bar{x},\bar{p})$ по Proof

$\vdash \neg\pi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, p)$

по непрот.

$\Leftarrow$

Опровергнем

$$\vdash \underbrace{\Pi_1(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})}_{\text{ложь}} \to \underbrace{\Pi_1(\overline{\ulcorner \underset{1=0}{\alpha} \to \underset{1=0}{\beta} \urcorner})}_{\text{ложь}} \to \underbrace{\Pi_1(\overline{\ulcorner \underset{1=0}{\beta} \urcorner})}_{\text{ложь}}$$

$2=0$ истина

Не знаем что делать.

Можем доказать $\neg(\Pi_{N_1}(\overline{\ulcorner 0=2 \to 0=1 \urcorner}) \to$

$\to \Pi_{N_1}(\overline{\ulcorner 0=1 \urcorner}))$

Контрапозиция $\to \neg(\ldots) \to \neg \Pi_{N_1}(\underbrace{\overline{\ulcorner 0=2 \urcorner}}_{\text{Cons}_1})$

Лемма о самопругнимении.

$\beta_0(x) = \forall t(\tau(x,x,t), \alpha(t))$

Утверж: $\vdash \beta \to \alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

$\vdash \alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \to \beta$

1) $\beta \vdash \forall t(\tau(\overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, \overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, t) \to \alpha(t))$

$\beta \vdash \tau(\overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, \overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, \overline{\ulcorner \beta \urcorner})$ (по вопрос.)

$\beta \vdash \tau(\overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, \overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}, \overline{\ulcorner \beta_0 \urcorner}) \to \alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

$\beta \vdash \alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

2) $\alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \vdash \forall t(\tau \ldots)$

10.12.14

Теория мн-в неог:

$$P = \{x \mid x \notin x\}$$
$$P \in P \quad ?$$

Теор. мн-в — теория первого порядка

1) Один пред. символ — $\in$

2) $a \Leftrightarrow b \equiv (a \to b) \& (b \to a)$

3) $\sigma \subseteq \theta \equiv \forall x (x \in \sigma \to x \in \theta)$ Аксиоматика

4) $\sigma = \theta \equiv \sigma \subseteq \theta \& \theta \subseteq \sigma$ Цермело-Френкеле

Аксиома равенства

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y \& x \in z) \to y \in z)$$

Аксиома пары

$x \neq y$ $\{x, y\}$

$$\forall x \forall y (\neg(x = y) \to \exists p (x \in p \& y \in p \& \forall z (z \in p \to (x = z \vee y = z))))$$

Аксиома объединения

$\times$ $\bigcup x = \{z \mid \exists x \in x \& z \in y\}$

$$\forall x (\exists y (y \in x) \to \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow \exists s (y \in s \& s \in x)))$$

Аксиома степени

$\mathcal{P}(x)$ — мн-во степени x $\cancel{2^x}$

$$\forall x \exists p \forall y (y \in p \leftrightarrow y \subseteq x)$$

Схема аксиом выделения

$\varphi(y)$ x b не вх св. в $\varphi(y)$

$$\forall x \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow (y \in x \& \varphi(y)))$$

Опр $\emptyset$: $\forall x \neg x \in \emptyset$

Теор (1) если сущ. мн-во, то сущ. такое
(2) x найдется $\{x\}$

$$\forall x \exists \{x\} \forall y (y \in \{x\} \to y = x)$$

① ~~Сопро~~ начал-то выведем

① а) пусть $x \neq \emptyset$

$$\{x\} = \{y \mid y \in \{x, \emptyset\} \ \& \ y \neq \emptyset\}$$

б) $x = \emptyset$ ... $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

~~в)~~

(3) $\exists! x (\forall y \ y \notin x)$

$\emptyset_1 \quad \emptyset_2 \qquad \emptyset_1 \subset \emptyset_2$

$\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$

Опр $x \cap y = \{z \mid z \in x \ \& \ z \in y\}$

$x \cap y = z \quad \forall t (t \in z \leftrightarrow t \in x \ \& \ t \in y)$

Теор $x \cap y$ по т. выделения

Опр разделенное мн-во — эл. B_i не пересекаются

$D_j(x) \quad \forall a \forall b \mid a \in x \ \& \ b \in x \ \& \ a \neq b \to a \cap b = \emptyset$

Опр

X_a ~~B~~ мн-во всех x /

— x пересекается ровно в 1 эл-те с a (каждым из)

— x содержит элементы 1 из U_a

$$x \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{\{2, 3\}, \{1, 2\}\}$$

Аксиома выбора

Если a — дизъюнктно и $a \neq 0$

то $X_a \neq \emptyset$

Акс. бесконечн. $N: \emptyset \in N \ \& \ \forall x (x \in N \to x \cup \{x\} \in N)$

Акс. фундирования $\forall x (x = \emptyset \vee \exists y (y \in x \ \& \ y \cap x = \emptyset))$

Сх. акс. подст-ки $f_{\varphi\text{-е}}$ X — мн-во $f(X)$ — мн-во $\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (x \in X \ \& \ \varphi(x_1, y_1) \ \& \ \varphi(x_2, y_2)) \to (y_1 = y_2))$

(6) $f(x) = y \Leftrightarrow \varphi(x,y)$ | $\forall y_1 \forall y_2 \quad \varphi(x,y_1) \& \varphi(x,y_2) \to y_1 = y_2$

$\varphi(x,y)$

$\forall s(\forall x \forall y_1 \forall y_2 (x \in s \& \varphi(x,y_1) \& \varphi(x,y_2) \to y_1 = y_2) \to$

$\exists t \forall y (y \in t \leftrightarrow \exists x (x \in s \& \varphi(x,y)))$

Практика Д. Кож Континуум-Гипотеза

<u>Опр 1</u> Мн-во x вполне упорядочено если в любом подмножестве есть минимум

$\mathbb{R}$ не вполне упор $(0,1)$

$\mathbb{N}$ вполне упор.

<u>Опр 2</u> Мн-во x транзитивно, если

$\forall a \forall b ((a \in b \& b \in x) \to a \in x)$

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ - транз. вполне упор

<u>Опр 3</u> Ординал - транзитивное вполне упорядоченное отношением ($\in$) мн-во

$a \notin a$

<u>Опр 4</u> Верхняя грань множества ординалов S

C - ординал, - минимальный, больше любого из S

$Upb(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$ $Upb(\{\{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$Upb(\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$p' = p \cup \{p\}$

<u>Опр 5</u> Предельный ординал $p: \neg\exists x. (x' = p) \& \neg p = 0$

$\{0, 1, 2 \ldots\} \cup \{\{\{0\}\}, \ldots, \ldots\}$

Кардинал аналогия бесконечность

Кардинал ординал: $F(x) = \forall y (y \in x \to \exists z (z' = y)) \vee$

$x = \emptyset$

По т. Вагнер: $\omega = \{x \mid x \in N \in x\text{-орд} \& F(x)\}$

Перебрать пред. ординал $= \{0, 1, 2, \dots\}$

$$x + y = \begin{cases} x, & y = 0 \\ (x+c)', & y = c' \\ \text{Upb}\{x + c \mid c < y\} & y\text{-предельный} \end{cases}$$

$(1+2) = (1+1)' = ((1+0)')' = 1'' = 3$

$\omega + 1 = (\omega + 0)' = \omega'$

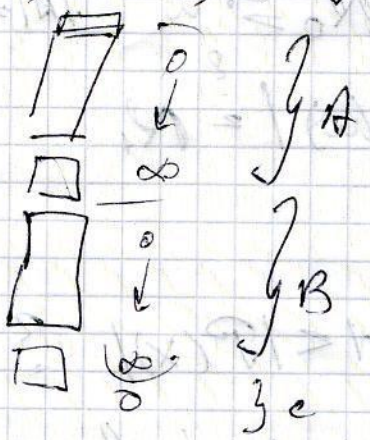
$1 + \omega = \text{Upb}(\{1, 2, \dots\}) = \omega$

$1 + \omega + 1 = \omega + 1$

$(\omega+1) + (\omega+1) = \cancel{\text{Upb}}\ \omega' + \omega' =$

$= \text{Upb}\{\omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\}$

$= 1 + (\omega+1) + \omega =$



$\omega + \omega$ - это отдельный тип

data $W \in W = A\,a \mid B\,b \mid C$

$$x * y = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ (x * c) + x & y = c' \\ \text{Upb}\{x * c \mid c < y\} \end{cases}$$

~~2 * ω~~ $\omega * 2 = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega$

$2 \cdot \omega = \text{Upb}\{2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2\} = \text{Upb}\{0, 2, 4, 6, \dots\} =$

$= \text{Upb}\{0, 1, 2, 3, 4 \dots\} = \omega$

$\omega \cdot \omega = \cancel{\text{Upb}\{\omega \cdot 0, \omega, \omega \cdot \omega}\ (\omega + \omega) + \omega =$

$=$

$$\omega^{*} = \begin{cases} 1 & y = 0 \\ (x^{c}) \cdot x & y = c' \\ \text{Upb}\{x^{c} \mid c < y\} \end{cases}$$

$$\omega^{\omega} = \text{Upb}\{\omega^{0}, \omega^{1}, \omega^{2}, \dots\} =$$
$$= \text{Upb}\{1, 1 \cdot \omega, \omega \cdot \omega, \dots \omega \cdot \omega \cdot \omega$$

$(1)\ (n)\quad (n, \omega \cdot n)\ (n, m, \dots) \dots$

<u>Опр.</u> Кардинальное A, если

1) A – отрезок
2) любой $B < A$

$|B| < |A|$

$\aleph_1 =$ след. за $\aleph_0$

$\aleph_0 \overset{def}{=} \omega \quad |A| = \aleph_0$, если $|A| = |\mathbb{N}|$

$|\mathcal{P}(\omega)| \overset{?}{=} \aleph_1$

$|X| < |\mathcal{P}(X)|$?

Пусть $|X| = |\mathcal{P}(X)|$

X

X	a	b	c	d	e	f	...
a		✓	✓				
b	✓						
c	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
d							
e							
f							
⋮							

$f(a) = \{b, c\}$
$f(b) = \{a\}$
$f(c) = X$

$\{a, b, -, \dots\} = t = \{a \mid a \in X \ \& \ a \notin f(a)\}$

Пусть u: $f(u) = t$ $\quad f(u) = t$? $\quad t \notin f(u)$

парадокс

Опр Элем. подмодель

T – теор., M – модель.

$M' \subseteq M$ – подмодель, если

1) $D' \subseteq D$ – обл. задания M'

2) ~~Когда f_n~~ $f \longleftrightarrow f_n$ в M f, f_n, f_n'

$f_{M'} = f_M|_{D'}$, замкнутость обл D'

3) P P_n P_n' – отнош.

P_n' ист. везде где ист. P_n

Опр Счетно-аксиоматизируемая по теории.

Если счетное кол-во аксиом и выводов

Утв ПА и ТМ счетно-аксиомат.

выч., подсч.

Опр Эр $|M| = |D|$

Теорема Лёвенгейма – Сколема

M – модель, T – мн-во ф-л теории

Сущ. $M' \subseteq M$ $|M'| = \max(|T|, \aleph_0)$

Δ

M D' – предм. мн-во $D'' := D'$ match z

$y, x_1 \dots x_n$ $\exists z x_1 \dots x_n$

α: (а) $[\![\alpha]\!] = и$ $[\![\exists z \alpha]\!] = л$

1) $[\![\alpha]\!]_{D'} = и$ $[\![\exists z \alpha]\!]_{D'} = л$

2) $[\![\alpha]\!]_D = и$ только найдем такой $y_1 \dots y_n$, что $[\![\alpha]\!]_{D'} = л$ и добавим y_2 в модель y_2

3) Аналогично + $f(x_n) = y_2'$ max рассм. Λ и D' y

Посмотрим, на сколько значимость (поэтому)

$\exists z\, \alpha(y, z, x_1 \dots x_n)$ & $\exists z \neg \alpha(y, z, x_1 \dots x_n)$

Р-во мощн. языка, применим прежде:

$|D| \leq \max(|\aleph_0|, |T|)$ $|D^*| \leq \max(|\aleph_0|, |T|)$

$D_1 = D_6'$ $D_2 = D_1'$ $D^* = \bigcup D_i$

Докажем, что P^* опред.

$\forall \alpha(x_1 \dots x_n)$ $x_i \in D^*$

Все замкнуты: был добавлен в D_i, в $i+1$ и мы его подставили и не сломалось.

БАЗА $[\![\alpha(x_1 \dots x_n)]\!]$

$\alpha \equiv P(f_1(x_1 \dots x_n), \dots f_{n_1}(x_1 \dots x_n))$

будет истинно и на сужении

Переход 1) $\alpha = \beta \vee \gamma, \beta \to \gamma, \neg\beta, \beta \& \gamma$

имеем от базы истины.

2) $\alpha = \exists y. \alpha(y, x_1 \dots x_n)$

а) если она была ложна, то все они

б) — // — истинна, то и $\exists$ истин.

в) На некоторых y они ист/ложны

$x_1 \dots x_n \in D_i$

$\exists y_1$ $[\![\alpha]\!](y, x_1 \dots x_n) = и$ } уже посч.

$[\![\alpha]\!](y, x_1 \dots x_n) = л$

3) $\alpha = \forall y. \alpha(\dots)$ — аналог.

Таким образом P — элем. модел.

Вл. Счетно аксиомат. теории имеют сч. модели

Все формулы, что не упорядоч., пожмы

Сл. Счет-ные теории с конеч-ным числом имеют сч. модели.

Парадокс Скулема

Теория Мн-в имеет счетную модель

~~Но теория мн-в имеет~~

можем сопоставить $n \in \mathbb{N}$ мн-во в ч.числе во теории мн-в эл-ты $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

но $|\mathbb{N}| \neq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

$2(\omega+2)\omega =$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ (a \cdot c) + a & c' = b \\ \text{Upb}(a \cdot c) & c < b,\ b - \text{пред} \end{cases}$$

$= \text{Upb}((\omega+2)\cdot c)\ c < \omega = \cancel{\text{Upb}(\omega + c}$

$= \text{Upb}(\omega \cdot c + 2 \cdot c)$

$(\omega+2)c = (\omega+2)d + (\omega+2)\quad d' = c$

$\omega \cdot d + \omega = \text{Upb}(\omega + d + a) = \omega \cdot c$

$(\omega+c)d = \omega \cdot d + c$ — можно доказать как-то

a, b - орд. $\exists c$ — пред, $a < c < b$

$a + b < a' + c = \ldots = a^{\overset{\leftarrow}{\text{III}}} + c$

$\overset{\Delta}{\Rightarrow} a < c \leq b = \text{Upb}(a + a)^{\overset{\leftarrow}{\text{III}}} = \text{Upb}(a) = c$

$$a^b = \begin{cases} 1 & b = \varnothing \\ a^c \cdot a & b = c' \\ \text{Upb}(a^c), & c < b \end{cases} \quad 2^{\overset{\leftarrow}{\omega}} = \text{Upb}(2^c) = \omega$$

$\omega^\omega + \omega^{\omega^2} = ?$

$\omega^{\omega^2} = \text{Upb}(\omega^c)\ c < \omega^2$

$\omega^{\omega+1} = \omega^\omega \cdot \omega^2 = \text{Upb}(\omega^\omega \cdot c)$

„Базисы"

$\omega^k + N$

$\omega^k l + N$

$\omega^\omega(\omega^k \cdot l) + N$

$\omega^\omega + \omega^\omega, \omega^\omega \cdot 2, \omega^\omega \cdot c, \ldots \omega^{\omega^2}$

$\omega^\omega + \omega^{\omega+1} = \omega^{\omega+1}$

$(\omega \cdot 2)^\omega = (\omega + \omega)^\omega = ?$

$(\omega+1)^\omega = \text{Upb}((\omega+1)^c) = \text{Upb}((\omega+1)(\omega+1), \ldots, \omega^2+1) =$

$= \omega^\omega + 1$

24.12.14

Трансфинитная индукция

$\alpha(x)$

(1) $\alpha(0)$

(2) Если ~~$\alpha(k)$~~ для нек. ρ-ординал верно, что ~~$\alpha(q)$ нет $q<\rho$~~ для любого $q<\rho$ $\alpha(q)$ влечет $\alpha(\rho)$ то $\alpha(\rho)$ нет. (можем доказать)

Тогда $\alpha(x)$ нет никуда

Δ Тарік

∇

Раньше мы работали с Гильбертовским исчисл. - полное мн-во аксиом и правил вывода

Возьмем ФА, вложим ее в S_∞.

1. Любое д-во Ф.А раз. в S_∞
2. Мы можем д-ть противн-ть любого сформированного д-ва.

Д-во - это дерево исчисл.

(1) Аксиомы:

1. Возьмем все термы из Ф.А, со зн. Θ. без св. перем.

$\Theta_1 = \Theta_2$ (типа $\Theta=0$, $\Theta'=0+0'$, $\Theta\cdot 0=0$)

2. $\neg(\Theta_1 = \Theta_2)$, если $[\![\Theta_1]\!] \neq [\![\Theta_2]\!]$ на нат. числах

(2) Формулы

$\forall x \vee \neg$ - оставим

(3) Д-во – дерево. В узлах – правила, в узле во что выше $\overline{\phi}$ ниже.

Правила:

I) Структурные: ① перест. $\dfrac{\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta}{\alpha \vee \gamma \vee \beta \vee \delta}$ (основные; мозг. опс.)

~~II~~ ②. Сокращение $\dfrac{\alpha \vee \beta \vee \beta \vee \gamma}{\alpha \vee \beta \vee \gamma}$ (бок)

II) Сильные правила

①. Ослабление $\dfrac{\gamma}{\alpha \vee \gamma}$

② Де-Морган $\dfrac{(\neg\alpha) \vee \gamma \quad (\neg\beta) \vee \gamma}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}$

③ Отрицание $\dfrac{\alpha \vee \gamma}{(\neg\neg\alpha) \vee \gamma}$

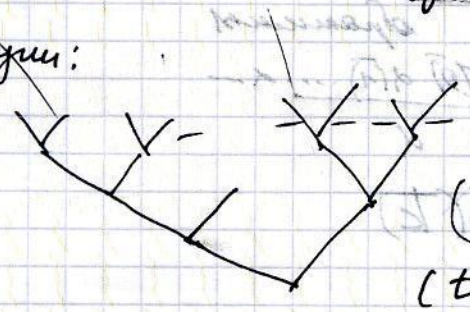
④ Квантификация $\dfrac{\neg\alpha(t) \vee \gamma}{\neg\forall x \alpha(x) \vee \gamma}$ t – const

⑤ Инд. индукция

$$\dfrac{\alpha(\bar{0}) \vee \gamma \quad \alpha(\bar{1}) \vee \gamma \quad \alpha(\bar{2}) \vee \gamma \quad \ldots}{\forall x \alpha(x) \vee \gamma}$$

III) Сечение $\dfrac{\gamma \vee \alpha \quad \neg\alpha \vee \delta}{\gamma \vee \delta}$

(4) Порядки:



(α_2, p_2) ; аномал 0

(α_1, p_1) $p_1 > p_2$

(t, r) порядок

(5) Степени

Степень сечения – кол-во связок в $\neg\alpha$

Степень д-ва – наиб. степень сечения в дереве

Умв 1 <u>Теорема 1</u>

α из Ф.А; α' – из S_∞

Если $\vdash_{ФА} \alpha$, то $\vdash_{S_\infty} \alpha'$

Схема д-ва:

$\forall \alpha$ в Ф.А; оно сост. из $\beta_1, \dots \beta_n$.
каждое отранслируем в $\beta' \in S_\infty$

Например

α
$\alpha \to \beta$
β

$$\frac{\overset{\vee}{\alpha'} \qquad \overset{\vee}{\neg\alpha' \vee \beta'}}{\beta'}$$

<u>Теорема 2</u> (Следствие)

Если ФА прот., то S_∞ прот.

Δ $\vdash 0 \neq 0$. $\vdash_{S_\infty} 0 \neq 0$

$\vdash_{S_\infty} 0 = 0$ ∇

Покажем, что никакая противор. из Ф.А подоч. в S_∞

<u>Теорема</u>

Правило 2, 3, 5 обратимы

(1) $\vdash_{S_\infty} \alpha$ (2) $\dfrac{\alpha(0)\ \alpha(1) \dots \alpha \dots}{\alpha}$

Тогда $\vdash_{S_\infty}$ (k)

Δ Инд: $\dfrac{\quad}{\forall x\, \alpha(x) \vee \gamma}$ заменим $\forall x\, \alpha(x)$ на $\alpha(k)$

Если это инд., то возьмем вниз выше

Если ослаб, то возьмем одну.

<u>Теорема</u> (Устранение сечений)

$\vdash_{S_\infty} \alpha$, д-во ст. m
пор. q

Тогда $\exists$ док-во

$\vdash_{S_\infty} \alpha$ от $m_1 < m$

пор 2^a

<u>Сл</u> Из любого д-ва можно устранить во сечение.

<u>Сл.</u> $0=0$, $\vdash_{PA} \neg(0=0) \to \vdash_{S_\infty} \neg(0=0)$

это не ослабление, не 2, 3, 4, 6.

А сечение устранимо.

Это не работает, теория мн-в

хз противоречивы или нет.

если да, то $0 \neq 0$ можно д-ть.

Δ БАЗА: $\exists$ порядок $=0$ сечений нет и $m=0$

$\exists$ Переход: $\exists$ мы умеем уменьшать сечения для пор. $< a$

Теорема верна для пор. $< a$, тогда верна для a.

$\exists$ сложность - m.

последнее правило — $\dfrac{\ldots\ldots\ldots(\ldots a-1)}{(\alpha, a)}$

пусть оно ~~на~~ сечение (иначе скучно)

Разберем все возм. очки α.

Самое интересн. - это $\forall$

$\forall x \beta \vee \gamma$ - осл. или индукция

$$\frac{\delta \vee \forall x \gamma \qquad \neg \forall x \gamma \vee \beta}{\delta \vee \beta}$$

Практика

$A \& B \to A$

ФА.

$\neg(\neg(\neg A \vee \neg B)) \vee A$

$\neg A \vee \neg B \vee A$

Инд. по стр.
A - атом
A - сост.

S_∞

Переход
$\forall x \alpha(x)$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A \qquad \neg A}{\neg A \vee A}}{\neg B \vee \neg A \vee A}}{\neg A \vee \neg B \vee A}$$

A - атом.

Докажем, что $\vdash_{PA} \alpha \vee \beta$, то $\vdash_{S\infty} \alpha \vee \beta$

α

$\alpha \to \alpha \vee \beta$

$\alpha \vee \beta$ $\qquad\qquad$ $\alpha \vee \beta$

1. $\vdash_{S\infty} \alpha_1 \vee \alpha_2$ ⑤ α — атом.

не умеем отделять не атом.

$\vdash_{S\infty} \alpha_1 \vee \neg\alpha_1$

$\vdash_{S\infty} \alpha_2 \vee \neg\alpha_2$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \vee \neg\alpha_1}{\neg\alpha_1 \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2)} \qquad \dfrac{\alpha_2 \vee \neg\alpha_2}{\neg\alpha_2 \vee (\alpha_1 \vee \alpha_2)}}{(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2)}$$

$A \vee \neg A$ из акс.
A — произвольная

$A \& B \to A$

2. $\vdash_{S\infty}$ ...

Если раз:

Пусть $\vdash_{S\infty} \alpha$ имеет порядок a и степень m, тогда мы можем построить д-во $\vdash_{S\infty} \alpha$ на 2^a, степень $< m$

Если посл. — не сечение, то переходим к предыд.

Если сечение:

$$\dfrac{\beta \vee \varepsilon \qquad \neg\varepsilon \vee \delta}{\beta \vee \delta} \text{ сечение}$$

База $a=0$ $\to m=0$

Переход $b<a$ тогда a

$\varepsilon = \{\forall x \Gamma(x), \neg\Gamma, \Gamma \vee \delta\}$.

1. Посмотрим на $\forall x\, \tau(x)$

Какой ε? Ослабление или бесп. инд.

$$\frac{\delta}{\forall x\, \tau(x) \vee \delta}$$

$$\frac{\theta}{\neg\varepsilon \vee \theta}$$

из изсл. будет отдел. β.

$$\frac{\vdots}{\neg\varepsilon}$$

получим $\neg\beta$.

$$\frac{\boxed{\beta \vee \varepsilon} \quad \neg\beta \vee \gamma}{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta}$$

$<m$ $\div 2$ $<a$

мы можем заменить $\neg\varepsilon$ на β. и получить $\beta \vee \gamma$ из $\neg\varepsilon \vee \gamma$ без сечения.

(а)

(б) получаем из квантификации

$\rightarrow$ з-ть $\beta \vee \forall x\, \tau(p)$

похоже на бесп. индукцию по первому элементу

$$\frac{\beta \vee \forall x\, \tau(x) \quad \neg\varepsilon \vee \gamma}{\beta \vee \gamma \Rightarrow \beta.}$$

a_1 a_2

a тогда $m-1$ степень можно сделать.

$a > \max(a_1, a_2)$

$$\frac{\neg\tau(p) \vee \theta}{\underbrace{\neg\forall x\, \tau(x)}_{\varepsilon.} \vee \theta} \Rightarrow \frac{\beta \vee \tau(p) \quad \neg\tau(p) \vee \theta}{\beta \vee \theta}$$

заменим

тут разр. тут нет квантора, не увел. степень

степень $m-1$.

2. Посмотрим на $\neg\tau(x)$ перед

3. $\tau \vee \delta = \varepsilon$

$$\frac{\beta \vee \varepsilon \quad \neg\varepsilon \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$$

$$\frac{\beta \vee \tau \quad (\neg\tau \vee \delta) \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$$

$\beta \vee \tau$

а) ослаб. $\frac{\gamma}{\tau}$

б) Де морган $\neg\tau \vee \gamma \rightarrow \beta \vee \gamma$

Мендельсон. Математика