Сулима Ирина Александровна

Теор. вер. и мат. стат.

Зубков Севастьянов Чистяков
Сборник задач по ТВ

Тем тест	15б	7 бонус + 8 т.р.
Домашн. к.р	12б	2 бонус + 10 к.р.
рубежка	10б	3 бонус + 7 тест
пис. кол.	5б	3 бонус + 2 к

(Ω, Σ, P) $\Omega = \{\omega\}$ – пространство вер. исходов

Σ – выдел. σ-алгебра подмн-в Ω

$P: \Sigma \to [0,1]$ $P(\Omega) = 1$

$\to \mathbb{R}$

Геометрическая вероятность (! не путать с геом. схемой)

$\exists\ \Omega,\ \lambda_n(\Omega) < +\infty;\ \forall A \subset \Omega,\ \exists \lambda_n(A)$.

$$P(A) = \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(\Omega)}$$

~

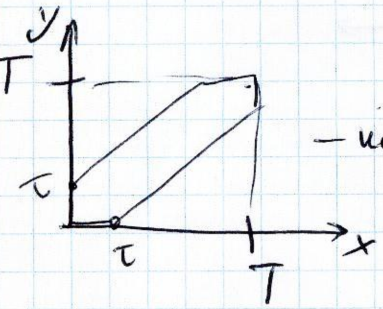
1.] $\exists$ 2 чел, кот. и между встречи могут прийти равновозможно в любой момент $[0,T]$
Время ожидания $\tau < T$ P(встречи) = ?

$\exists x$ – момент. появ. A
y – // – B
$\Rightarrow x, y \in [0,T]$ C – событие встреча "состоялась"

$C \Leftrightarrow |x-y| < \tau$

Модель: $\Omega = [0,T]\times[0,T]$

$-\tau < y - x < \tau$ $x - \tau < y < x + \tau$

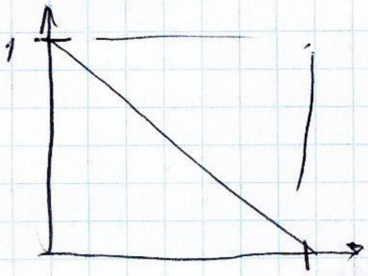


– находим отнош. лебеговых мер.

$$1 \Big/ \frac{T^2}{T^2 - 2\frac{(T-\tau)^2}{2}} = 1 \Big/ \frac{T^2}{T^2 - (T-\tau)^2} = 1 \Big/ \frac{T^2}{2T\tau - \tau^2}$$

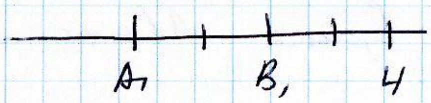
~

2. Найти вер-ть того, что $a + b \le 1$ & $ab \le 2/9$ если $\forall a, b \in [0,1]$



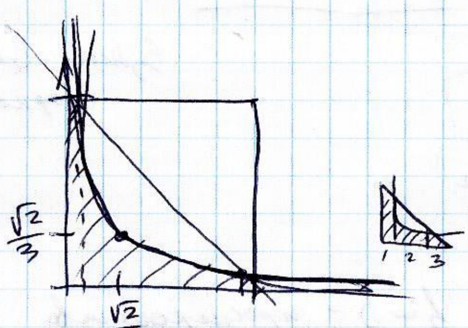
3.] $x^2 + ax + b = 0$
$0 \le a, b \le 1$
Найти вер. что кор. вещ.

4. К авт. ост. каждые 4 мин. подходит автобус линии A и через каждые 6 минут – линии B. Интервал времени между приходом A и ближ. след. B равновозможен от 0 до 4х минут.
1) Определить вер-ть того что первый – A.



г. Автобус подходит в теч. 2-х мин.

2.



$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab \le 2/9 \end{cases}$$

$a = 1-b$

$(1-b)b = 2/9$

$a = 1/3 \quad a = 2/3$

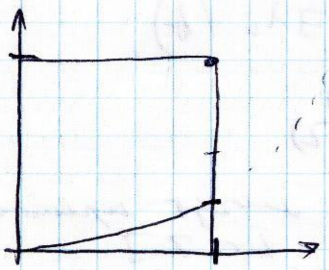
$$S = \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9a}\,da = \frac{2}{9}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}(\ln - \ln) =$$

$$= \frac{2}{9}(\ln 2)$$

Тупая задача

3. $x^2 + a\cancel{x} + b = 0$



Корни вещ. $\Leftrightarrow$

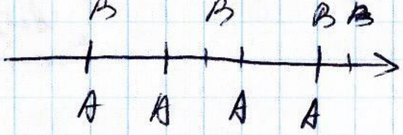
$a^2 - 4b \ge 0$

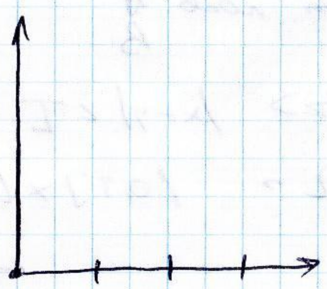
$b = \frac{a^2}{4}$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 a^2\,da = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

3.15 Свешников.

4.





2

Лекция 4.09.2015

1. Боровков А.А. т.в. 1986
2. Ротарь В.И. т.в.
3. Ширяев А.Н.
4. Севастьянов Б.В.

Опыт, эксперимент:

1) Одинаковые условия
2) Независ.
3) В результате опыта один эл. исход

ω - эл. исход $\in \Omega = \{\omega_i\}$ - мн-во эл. исходов.

Опр $\forall A \subset \Omega$ def сл. событием
Σ – выдел. σ-алгебра событий
(Ω, Σ) $\stackrel{\text{def}}{=}$ измеримым пр-вом.
$P: \Sigma \to \mathbb{R}$ $(P = P(A))$

(Ω, Σ, P) $\stackrel{\text{def}}{=}$ вер. пр-во

Примеры

1. Из колоды карт 36шт извлек. 2.
$|\Omega| = \binom{36}{2}$ $\quad \underset{\text{кардинал}}{card}(\Omega) = |\Omega| = 35 \cdot 18 < +\infty$
$\Rightarrow \Sigma$ – порожд. всеми исходами рассм. мн-во всех подмн.
$|\Sigma| = 2^{|\Omega|}$

2. Двухкратное бросание монеты
$\Omega = \{PP, P\Gamma, \Gamma P, \Gamma\Gamma\}$ $\quad |\Omega| = 4 \quad |\Sigma| = 2^4$

3. Бросание монеты до появл. герба
$\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$ $\quad \omega_n = \underbrace{P \dots P}_{n-1}\Gamma$

4. Разрыв нити
$\Omega = [0, 1]$

Опр
$\varnothing \stackrel{\text{def}}{—}$ невозм. событие
Ω – дост. событие

Действия над событиями и св-ва:

1. Сложение $\quad \forall A, B \subset \Omega \quad A + B = A \cup B$
2. Произв. соб $\quad A \cdot B = A \cap B$
3. $A \setminus B$ $(B \setminus A)$

Опр A и B несовместны, если $A \cdot B = \varnothing$
$\overline{A} = \Omega \setminus A$ – противоположное

Св-ва:
1. $A + B = B + A$
2. $A \cdot B = B \cdot A$
3. $A \cdot \Omega = A$
4. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$
5. $A + \overline{A} = \Omega$
6. $AB \subset A$, $AB \subset B$
7. $\overline{\overline{A}} = A$
8. $A \setminus B = A\overline{B}$
9. $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ $\quad$ 9'. $\overline{\sum A_i} = \prod \overline{A_i}$
10. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\quad$ 10'. $\overline{\prod A_i} = \sum \overline{A_i}$
11. $(A + B)C = AC + BC$ $\quad$ 11'. $(\sum A_i)C = \sum (A_i C)$
12. $(A \setminus B)C = AC \setminus BC$

Алгебра и σ-алгебра событий

$\mathcal{A}$ – мн-во подмн. в Ω $\stackrel{\text{def}}{=}$ алгеброй.
1) $\Omega \in \mathcal{A}$ $\quad$ 3. A и $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A + B \in \mathcal{A}$
2) $\overline{A} \in \mathcal{A}$

σ алгебра + 3 – св-во для счетного кол-ва мн-в.

3' $\sum A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} = \Sigma$

Утв Алгебра замкнута отн. действ. в конечном числе.

1) ~~Оч~~ По 3 опред. очев.

2) $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ очев.

Замеч. Если Ω не более чем счетно, то в к-ве σ-ал. ∀ мн-во подмножеств.

Если Ω конечна, то σ ал. совп. с алгеброй.

σ алгебра Бореля $\Sigma_Б$ порождается всеми видами п-инт. $[a,b)$, $(-\infty, a)$

Отличается от Лебеговой тем, что не замкнута.

$\exists\ \Omega$ и в рез. эксперимента реал. (пр-е) соб B

$A \subset \Omega \Rightarrow \Omega \cdot B \qquad \Sigma_B = \{A \cdot B \ \forall A \in \Sigma\}$

(Ω, Σ) - изм. пространство

Введ. $P = P(A)$ вероятн. мера на (Ω, Σ)

I $\exists\ \Omega$ не более, чем счетн.

$P : \Omega \to R([0,1])$ $\quad \boxed{\begin{array}{l} 1.\ p(\omega) \geq 0 \\ 2.\ \sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \end{array}} \Rightarrow P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$

Согл. меры

В общем случае

P опред. акс. Колмогорова

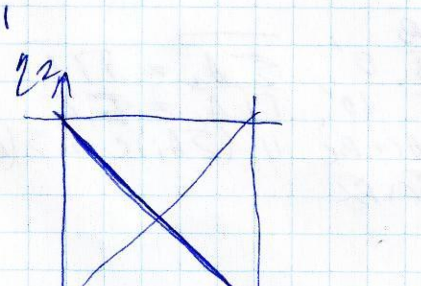
(Ω, Σ)

1. $\forall A \in \Sigma : p(A) \geq 0$

2. $p(\Omega) = 1$

3. Счетн. аддитивность. $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $P(\Sigma) = \Sigma P$

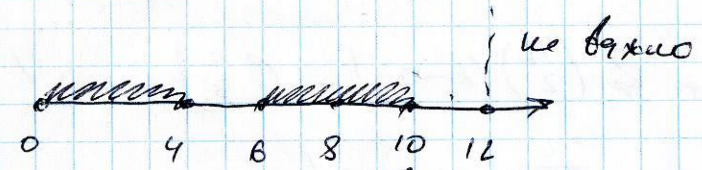
1.61



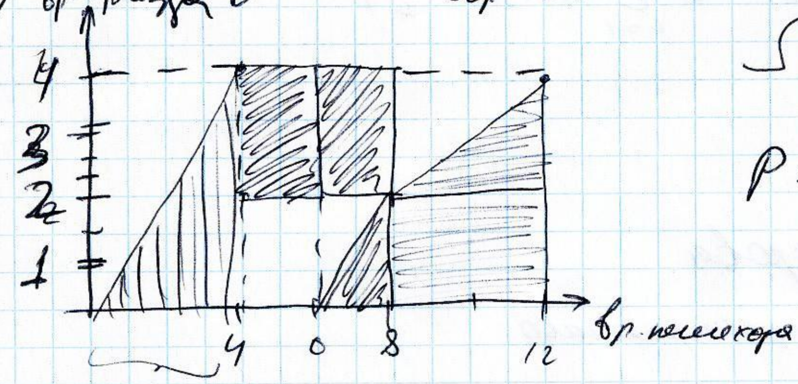
~~Т.к.~~ $P(\eta_1 \leq x) = P(\eta_2 \leq x) = 1/2$

Тут было еще ФЗ, но я его все отдал

11.09.2015



а) вр. приезда B   вер-ть того что первый - A.

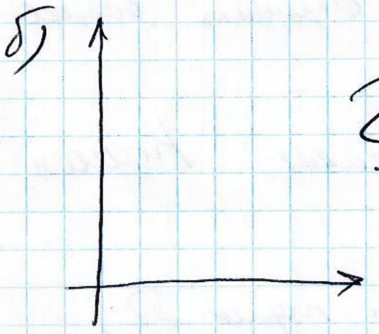


$\Omega = [0,12] \times [0,4]$

$P = 8/12$

В приехал раньше пешехода

б)



1.11
1.14
1.19 *
1.26
1.15 ?

1. В урне n - белых m - черных l - кр. шаров. Поочереди по одному извлек. шары,

а) без возврата.
б) с возвратом.   P(белый раньше черного)

2. В зале $n+k$ мест. Случайно рассажено n - человек.

P(будут заняты фикс. m мест.) = ?

$$P = \frac{\binom{n+k-m}{n-m}}{\binom{n+k}{n}} = \frac{\frac{(n+k-m)!}{(n-m)!\,(k!)}}{\frac{(n+k)!}{n!\,(k!)}} = \frac{\cancel{(n+k-m)!}}{\cancel{(n+k-m)}(n-m+1)\cdots(n+k)}$$

3. Перед в кассу $n+m$ человек. n человек - 500р

$\forall$ покупает один билет $n = 500р$

В кассе 0 руб. $m = 1000$

P(никто не будет ждать сдачи)

4. Есть n шаров, занумеров от 1 до n шары извл. без возвр.

P(хотя бы при одном извлеч. номер шара совпадет с ном. извлеч)

(4) $n! = |\Omega|$

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)!$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

Лекция

Аксиомы Колмогорова.

(Ω, Σ) – изм. пространство

Дискрет. ст. сеть вариант. одного

Док-во

Пр-кая выполнение аксиом. Колм.

1) $p(\omega) \geq 0$

2) $\sum p(\omega) = 1$

$\sum_{\omega \in A} p(\omega) = p(A)$

3. σ. аддитивность

$\exists \{A_i\}_i$ – счетн. набор подмн. Ω,

$$A_i \cdot A_j = 0 \quad \forall (i, j)$$

$$p(\sum A_i) \overset{def}{=} \sum_{\omega \in \cup A_i \subseteq \Omega} p(\omega) = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \overset{def}{=} \sum_i p(A_i)$$

перегрупп. по св-ву

Св-ва $P = P(A) : \Sigma \to [0,1]$

1. $P(\varnothing) = 0$

2. $\Omega + \varnothing_1 + \dots + \varnothing_n = \Omega$

По аксиоме нормир. + сч. адд. $1 = 1 + \sum^{\infty} P(\varnothing_i)$

$\Rightarrow P(\varnothing_i) = 0$.

2 Кон. адд-ть

$\exists \{A_i\}_{i=1}^{n}$, попарно несовм. $A_i A_j \overset{i \neq j}{=} 0$

нужно дополн. до счетн. числа пустыми, по которым о ч. адд. работает.

3. $p(\bar{A}) = p(\Omega \setminus A) = 1 - p(A)$

Δ $\bar{A} + A = \Omega$, $\bar{A} \cdot A = \varnothing$

тогда по 2 св-ву $1 = p(A)+p(\bar{A})$

4. $\exists\ A \subseteq B$, тогда $P(A) \le p(B)$

Δ

$B = A + (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

$\overset{2\text{ св.}}{\Rightarrow} p(B) = p(A) + \underset{\ge 0}{p(B - A)} \ge p(A)$

∇

Следствие $p(B \setminus A) \overset{A \subseteq B}{=} p(B) - p(A)$.

5. $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$

Δ $A + B = A + (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

$\overset{\text{св.2}}{\Rightarrow} p(A+B) = p(A) + p(\underbrace{B \setminus A}_{=B - A\cdot B = B\bar{A}}) =$

$\overset{AB \subseteq B}{=} p(A) + p(B) - p(AB)$

∇

Следствие $p(A+B) \le p(A) + p(B)$

6. $p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i<j} p(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} p(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n+1} p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$

Δ по индукции ∇

Сл-е $p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$

Упр: $p\left(\sum^{\infty} A_i\right) \le \sum^{\infty} p(A_i)$

Аксиомы непр. и их связь со сч. аддит.

Опр. 1) я акс. непр.

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots \supseteq B_n \supseteq$ $B = \lim B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_i$

1. $p(B) = P(\lim B_n) = \lim P(B_n)$

2. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$; $A = \lim A_n = \bigcup^{\infty} A_n$

$p(A) = p(\lim A_n) = \lim P(A_n)$

Д-во

$B = \bigcap^{\infty} B_n = \bigcap^{\infty} (\Omega \setminus A_n) = \Omega - \bigcup^{\infty} A_n = \Omega \setminus A$

B_n - убыв. послед. $\Rightarrow A_n = \Omega - B_n$ ($A_n = \Omega \setminus A_n$) возр.

$P(B) \overset{\text{акс}}{=} \lim P(B_n) = 1 - P(A) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

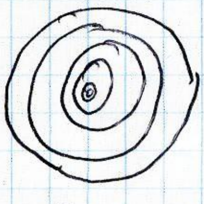
Утв 2

Акс. счетн. адд. $\Leftrightarrow$ акс. кон. адд + 1 акс. непр.

Δ

1. $\Rightarrow$

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \dots \supset \dots$



$\exists A_1 = B_1 \setminus B_2 = B_1\overline{B_2}$

$A_n = B_n \overline{B_{n+1}}$

тогда $\{A_n\}_n$ — попарно несовм.

$B_1 = B + \sum\limits_i A_i$

$P(B_1) = P(B) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $\quad B_n = B + \sum\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$P(B_n) = P(B) + \underbrace{\sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k)}_{\text{остаток сх. ряда}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$ — 1 акс. непр (сверху)

2. $\Leftarrow$

$A_1 \dots A_n \dots \quad A_i \in \Sigma \quad A_iA_j \overset{i\neq j}{=} \varnothing$

$P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i + \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) \overset{\text{кон. адд}}{=} P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i\right).$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \overset{\text{кон. адд}}{=} \lim P\left(\sum^{n} A_i\right) =$

$= P\left(\sum^{\infty} A_i\right) - \underbrace{\lim P\left(\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)}_{=0}.$

$B_{n+1} = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i \;;\quad B_{n+1} \supseteq B_{n+2} \supseteq \dots \;;\quad B = \lim\limits_{k\to\infty} B_{n+k} = \varnothing$

∇

Дискр. схемы

1. Классическая
2. Геометр.
3. Бернулли
4. Сх. Пуассона
5. Гипергеом. схема
6. Полиномиальная

Биномиальная

д. вариант совм. независ. незав. испытаний с 2 исходами

1. $\exists\ |\Omega| = n \quad \Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$, ω_i - равновер.

$\Rightarrow p(\omega_i) = p(\omega_j) \quad \forall i, j$

$\sum p(\omega_i) = 1, \quad p(\omega_i) = 1/n$

2. $\exists$ посл. одинаковых незав. опытов с 2мя исходами A и $\bar{A}$, $p \neq 0$ и 1, без выр. случаев одинаковых $= p(A_i) = p$, A_i - исход i опыта

тогда геом. схема проведения с возвращ.

$\Omega = \{A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3, \ldots\}$

$p(\omega_k) = (q)^{k-1} p \quad q = 1-p \quad p(\omega_k) \geq 0$

$\sum\limits^{\infty} p(\omega_k) = \sum\limits^{\infty} p q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1$

3. В схеме Б ~~...~~ испыт. независимых "n" успех с вер. p, нужно найти вер-ть появление m успехов

$P(\prod\limits_{i=1}^{n} C_i) = p^{k(\omega)} q^{n-k(\omega)}$

$\{\omega_i\}, \quad k(\omega_i) = k$

$\Rightarrow P(B_{n,k}) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0$

$\Omega = \sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k} \Rightarrow p(\Omega) = \sum p(\omega_i) =$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} p(\omega_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$

$\{B_{n,k,p}\}$

$(B_{n,k}, p(B_{n,k}))$

18.05.2015

4. Схема Пуассона $\quad \Pi_\lambda, \ \lambda > 0$

$\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\} \ (\mathbb{Z}_+)$

$p(m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} \qquad \{\Omega, \Sigma, p\}$

$p(m) \geq 0$

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} p(m) = e^{-\lambda} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1$

5. Гипергеометрическая схема

n - одинаковых предметов в урне без возвращ.

n_1 (белые) n_2 (черные) $n_1 + n_2 = n$

Извлек. k предметов $k \in [1, N]$

$P_{n,n_1}(k,k_1)$ - среди k элементов ровно k_1 имеют признак n_1

$|\Omega| = n$

n разл. объектов

$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$

A - извл. „k" шаров, $|A| = \binom{n}{k}$

$$P_{n,n_1}(k,k_1) = \frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2=k-k_1}}{\binom{n}{k}}$$

Замечание: $\binom{n}{k} = 0$ $k > n$

1. $P_{nn_1}(k,k_1) \geq 0$

2. $$\frac{\sum_{(k_1,k_2)} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

6. Полиномиальная схема

$\exists$ посл. независ. однотипных опытов и в результате любого опыта может произойти одно из событий.

$A_1 \dots A_k$ с вер-ми $p_1 \dots p_k$ $\sum p_i = 1$

При числе опытов в „n"

$B_{n,m_1,\dots m_k}$ $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$

Σ опытов, m_i — кол-во произош. A_i

$$p(B_{n,m_1,\dots m_k}) = \frac{n!}{m_1!\dots m_k!} p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$$

Независимость. Формула полной в-ти, ф-ла Байеса. Условная в-ть.

$\exists$ (Ω, Σ, p) - вер. пр-во и в рез. экспер. пр-во B -

$\Rightarrow \Omega_B$ $p(B) \neq 0$ $\overset{\wedge}{\Sigma}$,

$\forall A \in \Sigma \Rightarrow A \cdot B$ т.е. $\Sigma_B = \{A \cdot B, \forall A \in \Sigma\}$

$$p_B(A_B) = \frac{p(AB)}{p(B)} \Rightarrow (\Omega_B, \Sigma_B, \overset{\wedge}{p_B})$$

def: $$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$$

Независ. события, св-ва

Незав., если $p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B)$

Утв. Пусть $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$, то

незав. $\Leftrightarrow$ $p(B/A) = p(B)$, $p(A/B) = p(A)$

Св-ва незав. событий:

1. Пусть A и B — незав., тогда A и $\overline{B}$ тоже

2. Пусть A и B незав., A и C — незав.

$\Rightarrow A$ и $B+C$ незав.

$$p(A\cdot(B+C)) = p(AB+AC) = p(AB)+p(AC) =$$

$$= p(A)(p(B)+p(C)) = p(A)\,p(B+C)$$

3. Незав. и несовместность — взаимоисключ. св-ва для нетрив. событий

а) A и B незав. $\Rightarrow$ A и B совм.

$p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B) \neq 0 = p(\varnothing) \Rightarrow A\cdot B \neq \varnothing$
т.е. они совм.

б) A и B несовм.

$A\cdot B = \varnothing \Rightarrow p(A\cdot B) = 0 \neq p(A)\cdot p(B)$,
т.е. A и B зависимы

<u>Опред</u> (незав-сть по совокупности)

Пусть $A_1 \dots A_n \in \Sigma$

и $(k_1 \dots k_l)$ $l = 2 \dots n$, $(k_1 \dots k_l) \subset (1 \dots n)$

тогда $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ незав. по сов-ти, если

$$p\left(\prod_{i=1}^{l} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{l} p(A_{k_i})$$

Набор независим в сов-ти, если $\forall$ поднабор $1 \dots n$ незав по сов.

Связь между нез-ью в сов-ти и попарной.

Из 1 следует 2

П $\triangle$ тетраэдр, его грани красили:

черн, крас, бел, (черн., красн., белый)

A - появл. черного цвета

B - имеется красный

C - имеется белый

$$|\Omega| = 4$$

$p(A \cdot B) = AC = BC$, $p(AB) = p(BC) = p(AC) = 1/4$

$ABC = (ч, кр, б)$, $p(ABC) = 1/4 \neq 1/8$

не явл. нез. в сов-ти, но попарно - да

П $\Omega = \{0, 1\}$ -

A - перв. цифра четное

B - втор. нечетное

C - сумма нечетное

$p(AB) = 1/4$ $p(AC) = 1/4$ $p(BC) = 1/4$

$p(A) =$

Независимость экспериментов.

3) $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ - 2 эксперимента

$(\Omega_1, \Sigma_1, P_1)$ $(\Omega_2, \Sigma_2, P_2)$ $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$\forall A = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \Sigma_1$ $A_2 \in \Sigma_2$

$$p(A) = p_1(A_1) \cdot p_2(A_2)$$

$$= p(A_1 \times \Omega_2) \cdot p(\Omega_1 \times A_2)$$

Ф. п. в

$H_1 \ldots H_n$ $\sum H_i = \Omega$ $H_i H_j \overset{i \neq j}{=} \emptyset$

$$\Rightarrow p(A) = \sum_{p(H_i) \neq 0} p(A|H_i)\, p(H_i)$$

25.04.2015

Д-во ф-лы полной вер-ти

Δ $A = A\cdot\Omega = A\cdot\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} AH_i$ и $AH_i\cdot AH_j \overset{i\neq j}{=} \varnothing$

$$P(A) = \sum^{n} p(A\cdot H_i) = \sum_{i:\,p(H_i)\neq 0} p(A\cdot H_i) \overset{\text{из опр. } p(B|H_i)}{=} \sum_{p(H_i)\neq 0} p(H_i)p(A|H_i)$$

$\exists$ $p(H_i) = 0$, $AH_i \subseteq A \Rightarrow 0\le p(A\cdot H_i) \le p(H_i)$

∇

Ф-ла Байеса

$$p(A)\neq 0 \Rightarrow p(H_i|A) = \frac{p(A|H_i)\,p(H_i)}{\sum_{i:\,p(H_i)\neq 0} p(H_i)\,p(A|H_i)}$$

Замечание: $p(A|B) = \sum_i p(H_i|B)\,p(A|BH_i)$

Ф-ла Байеса возникает только если известен результат опыта.

$\exists$ Q_i $i=1\ldots n$ — посл. исп. с 2 мя исходами

$A_i = A$ — успех $\overline{A_i} = \overline{A}$ — неудача

Рассм.

1. Исп. незав. по сов-ти
2. $p(A_i) = p(A) = p\ (p\in(0,1))$

$\Omega_1 \ldots \Omega_n$ $\Omega_i = \{A_i, \overline{A_i}\}$

$\Omega = \Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$

$p(B_i) = p(\Omega_1)\ldots p(\Omega_{i-1})\,p(A_i)\,p(\Omega_{i+1})\ldots = p$

$p(\omega) = p(\omega_1\cdot\omega_2\cdot\ldots\cdot\omega_n) = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$

$p(B_n, p(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

В дискретной схеме $p(\omega) = p(\omega_1\ldots\omega_n) = p^{k(\omega)}\cdot(1-p)^{n-k(\omega)}$

$\Rightarrow p(B_n, p(m)) = C_n^m p^{m}(1-p)^{n-m}$

$\forall\, l < m$ $\omega \Rightarrow \tilde{\omega}$ — длины $n-l$ $\omega = \omega_1\ldots\omega_n \Rightarrow$
$\tilde{\omega} = (\omega_{l+1}\ldots\omega_n)$

$A(l) = \{\omega : \omega_i = \omega_{i,1}\}$ — A_l — первые l исп. успешных

$\omega \in A_{(k)} \Rightarrow p(\omega) = p^{l} p^{k(\tilde\omega)} (1-p)^{n-l-k(\tilde\omega)} = p^{l} p(\tilde\omega)$

$$p(A_{(k)}) = p^{l} \sum_{\tilde\omega \in (\Omega_{l+1} \times \ldots \times \Omega_n)} p(\tilde\omega) = p^{l}$$

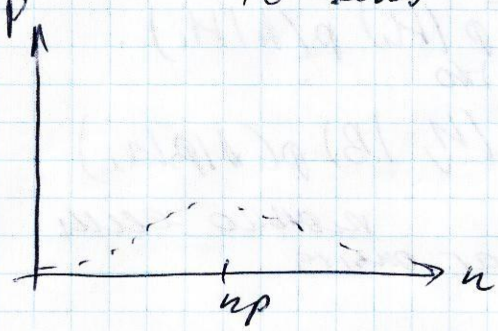
$\omega \Rightarrow \tilde\omega$ – длины "$n-l$"

Нез. по сов-ти следует из:

1. Можно уменьш. из первых l любое число успехов ($\forall l$)

2. Можно их переставить

То есть $\forall$ соб. из $\forall$ наборов окажутся незав.



Опр. m_0 – наив. кол-во успехов в $(B_{n,p}(m), P_n(m))$ если $\forall m = 0 \ldots n$

$p(B_{n,p}(m)) \geq p(B_{n,p}(k))$ $k = 0 \ldots n$

Ув. о числе m_0 в сх. Б

$np - q \leq m_0 < np + p$

$np + p \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\ m_{01} = np + p$ и $m_{02} = np - q$

$np + p \notin \mathbb{N} \Rightarrow m_0 - !$

Δ

$$A = \frac{p(B_{n,p}(m))}{p(B_{n,p}(m-1))} = \frac{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m+1}} = \frac{p}{q} \frac{n-m+1}{m}$$

$$A - 1 = \frac{np - mp + p - qm}{qm} = \frac{np + p - m}{qm} = \frac{P_n(m)}{P_n(m-1)} - 1$$

$A > 0$: $m < np + p$ $\nearrow$

$A < 0$: $m > np + p$ $\searrow$

$A = 0$: $m = np + p$ $(P_n(m) = P_n(m-1))$

$$p(B_{n,p}(m)) \geq \begin{cases} p(B_{n,p}(m-1)) & m < np + p \\ p(B_{n,p}(m+1)) & m > np - q \end{cases}$$

Пред. теор. для сх. Б

Теор 1 о связи гипергеом. и биномиального.

$n = n_1 + n_2$ $\quad n_1$ - б $\quad n_2$ - 2 извл "k" шаров

$B_{n,n_1}(k, k_1)$ - извл ровно k_1 белых

$n \to \infty \quad \frac{n_1}{n} \to p$ и k - $\forall$ фикс.

$$\Rightarrow P(B_{n,n_1}(k, k_1)) \xrightarrow[\frac{n_1}{n} \to p]{n \to \infty} P(B_{k,p}(k_1)) = \frac{k!}{k_1!\, k_2!}$$

Δ

$$P_{n,n_1}(k, k_1) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2}}{C_n^k} = \frac{n_1!\, n_2!}{k_1!(n_1-k_1)!\, k_2!(n_2-k_2)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{n_1 \cdots (n_1-k_1+1) n_2 \cdots (n_2-k_2+1)}{n \cdots (n-k+1)} \quad C_k^{k_1} \quad n_1+n_2-k_1-k_2+n = 2n-k$$

тут все $\to 1-p$ $\quad \frac{n_2}{n} = \frac{n-n_1}{n} \to 1-p$

$$\xRightarrow[\frac{n_1}{n} \to p]{n \to \infty} C_k^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k-k_1}$$

∇

2.10.2016

Теорема Пуассона (о связи биномиального и Пуассона)

$\exists$ имеется последов.-ть схем Бернулли и

$$\{B_{n,p}(m), P(B_{n,p}(m))\} \quad p = p(n) \to 0, \quad p(n) \to \lambda\ (>0)$$

Тогда $\forall n$ фикс. есть сходимость $P(B_{n,p}(m)) \xrightarrow[\substack{p(n) \to 0 \\ np \to \lambda}]{n \to \infty} P(\Pi_\lambda(m)) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$

~~Напоминание~~

Δ

$$P(B_{n,p}(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-m}$$

$$\sim \frac{1}{m!} \underbrace{\frac{n \cdots (n-m+1)}{}}_{m} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \sim \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m$$

$$\sim \frac{1}{m!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \lambda^m \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{\lambda(n + o(\frac{1}{n}))}}\right]^{-n\left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\sim \frac{1}{m!} 1 \cdot \lambda^m e^{-\lambda + o(1)} \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

∇

Итого имеем $P(B_{n,n_1}(k, k_1)) \to P(B_{k,p}(k_1)) \to P(\Pi_\lambda(k_1))$

Т.3.4 о связи биномиального и нормального р-я (Локальная и интегр. теор. Муавра-Лапласа)

(3) $\{B_{n,p}(m), p(B_{n,p}(m))\}$ — посл. схем Бернулли $n\to\infty$, $p=const$

Тогда для любого $\Delta = \langle a, b\rangle$ при $n\to\infty$ равномерно по всем m, таким что

$$x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \in \Delta \qquad \varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$p(B_{n,p}(m)) \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$$

Δ

1. $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\theta_n}, \quad |\theta_n| \le \frac{1}{12n}$

2. $x_{m+1} - x_m = \frac{1}{\sqrt{npq}} \to 0; \quad m = x_m\sqrt{npq} + np = np\left(1 + x_m\cdot\sqrt{\frac{q}{np}}\right) =$

$= np(1+o(1))$

$n - m = n - np - x_m\sqrt{npq} = nq\left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$

3. $p_m = p(B_{n,p}(m)) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} =$

$= \frac{n^n e^m e^{n-m}}{e^n m^m (n-m)^{n-m}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\, e^{\theta_n} e^{-\theta_m} e^{-\theta_{n-m}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{m}\sqrt{2\pi}\sqrt{n-m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\right)}_{I} \underbrace{e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}}}_{II} \cdot \underbrace{\left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}}_{III} =$

$= p_m = \frac{1}{2\pi} \cdot I \cdot II \cdot III$

4. (I) $A \triangleq \sqrt{\frac{n}{m\cdot(n-m)}}; \quad \frac{1}{A} \overset{\text{равном. по } m: x_m \in \Delta}{=} \sqrt{\frac{np(1+o(1))\, nq\,(1+o(1))}{n}} =$

$= \sqrt{npq}\,(1+o(1))$

(II) $A_1 \triangleq e^{\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}}$

$|\ln A_1| = |\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}| \le \frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)} =$

$= \frac{1}{12n} + \frac{1}{12np(1+o(1))} + \frac{1}{12nq(1+o(1))} =$

$= \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p(1+o(1))} + \frac{1}{q(1+o(1))}\right) \Rightarrow A_1 \to 1$ равном.

$B = \left(\frac{m}{np}\right)^{-m} \cdot \left(\frac{n-m}{nq}\right)^{-(n-m)} \Rightarrow \ln B = -m \ln\left(1 + x_m\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$
$- (n-m)\ln\left(1 - x_m\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \overset{\text{Тейлор}}{=} -(np + x_m\sqrt{npq})\cdot$

$$\cdot\left(x_m\sqrt{\frac{q}{np}}-x_m^2\cdot\frac{q}{np\cdot 2}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)-\ldots \overset{*}{=} -\left(x_m\sqrt{npq}+x_m q - x_m^2\frac{q}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=$$

$$=-\left(-x_m\sqrt{npq}+x_m^2\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=-\frac{x_m^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=-\frac{x_m^2}{2}+O(1)$$ – равномерно по $m: x_m\in\Delta$

$$p_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot I\cdot II\cdot III\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}e^{-x_m^2/2}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$$

$\triangledown$

9.10.2015

Интегр. теорема М-Л.

Предварительно подготовка

$$x_{n,m}=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};\quad x_{n,m+1}=\frac{m+1-np}{\sqrt{npq}}$$

$$\delta_n=x_{n,m+1}-x_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$x_{n,0}=-\frac{np}{\sqrt{npq}}\qquad x_{n,m}=\frac{nq}{\sqrt{npq}}$$

Δ посл. ф-й $\{y_n(x)\}$: $\quad y_n(x)=0,\ x\notin\left[x_{n,0}-\frac{\delta_n}{2},\ x_{n,n}+\frac{\delta_n}{2}\right]$

$$\Delta_m=\left[x_{n,m}-\frac{\delta_n}{2},\ x_{n,m}+\frac{\delta_n}{2}\right]\qquad p(B_{n,p}(m))=p_{n,m}$$

$$y_n(x)\overset{x\in\Delta}{=}\frac{p_{n,m}}{\delta_n}=\sqrt{npq}\,p_{n,m}$$

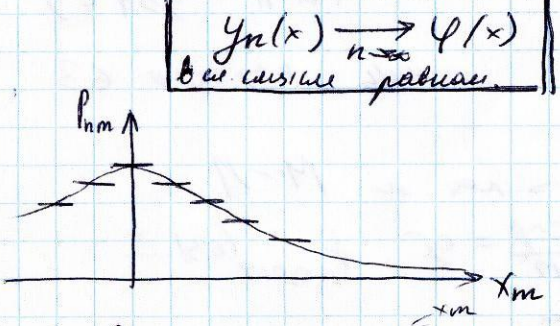
Заметим, что $y_n(x)$ нормир. (1), т.е. $\int_{\mathbb{R}}y_n(x)=$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{p_{n,m}}{\delta_n}\int_{\Delta_m}dx=\sum p_{n,m}=1.$$

Интегр. теорема:

$$\boxed{y_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\varphi(x)}$$ в см. сходим. равном.

$$\left(\forall\Delta=[a,b].\ p(a\le x_m\le b)=p(x_m\in\Delta)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b\varphi(x)dx\right)$$



Δ

$$p\Big(a\le\underbrace{\frac{m-np}{\sqrt{npq}}}_{=x_m}\le b\Big)=\sum_{\substack{m:\\ x_m\in\Delta=[a,b]}}p_{nm}=\sum_{n:x_m\in\Delta}\Big[\underbrace{\delta_n\big(y_n(x_m)-\varphi(x_m)\big)}_{=O(1)}+\underbrace{\delta_n\varphi(x_m)}_{\nearrow\int_\Delta\varphi\,dx}\Big]$$

$$\sum_{m:x_m\in\Delta}\varphi(x_m)\delta_n\longrightarrow\int_\Delta\varphi(x)dx\qquad y_n(x_m)=\frac{p_{nm}}{\delta_n}\to\varphi(x_m)$$

интегр. сумма $\quad\delta_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

итого

$$p(x_m\in[a,b])\to\int_a^b\varphi(x)\,dx$$

Перегр раз:

$$p\left(np + a\sqrt{npq} \le m \le np + b\sqrt{npq}\right) \approx \int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{b} - \int_{-\infty}^{a}\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

Решающ. м. по прим. приб. рав-в с использ. пред. т-м для сход. Б.

$np \le 9$ n - велико (≥ 100, > 50) - возможно приме- т. П для $m \ll n$

$np \gg 9$ $m \sim n$ - лок/интегр теор М-Л

$n \gg 10$ гипергеометрия

1. Радиоап. содержит 2000, со средн. стат. вер-ю отказа $p = 0{,}001$. P(отказа за год)

P(отказа 2х за год)

P(отказа хотя бы одного)

$q = 0{,}999$ $np = 2 < 9 \Rightarrow$ т. П $\lambda = np = 2$

$P_{2000};\ p(2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = 2e^{-2} = 0{,}2707 = P_П$

$P_Б = 0{,}2708$ $P_{М-Л\ локал} = 0{,}823$

$p(\text{выхода из строя}) = 1 - P_{2000},p(0) = 1 - e^{-2} = 0{,}8647 = P_П$

$P_{М-Л} = 0{,}8963$

2. Вер-ть того, что при 150 испыт. менее порядка 63, $p = 0{,}4$

$np = 60 \to 9$ $n = 63 \sim \frac{n}{2} \Rightarrow$ лок. т. М-Л

$\sqrt{npq} = \sqrt{60 \cdot 0{,}6} = 6$ $x_m = \frac{63 - np}{\sqrt{npq}} = 0{,}5$ $P_{150,\,0{,}4}(63) =$

$= \ldots$

3. $n = 1000$ туристов $p \ge 0{,}99$

A - турист идёт в ресторан, равновероятно идут в 1 из 2х рест. Залкерос. вместимость

A - успех $p(A) = 0{,}5$ $n = 1000 \Rightarrow$ сх. Б

Ищем m_{min}: $p(m \ge m_{min}) \approx 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

По инт. теор М-Л: $0{,}01 = P_{1000,\frac{1}{2}}(m_{min}, 1000) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$

$b = \frac{1000 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500}{5\sqrt{10}} = 10\sqrt{10}$

$a = \frac{m_{min} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{m_{min}}{5\sqrt{10}} - 10\sqrt{10} \Rightarrow 0{,}01 \simeq \underbrace{\Phi(10\sqrt{10})}_{\simeq 1} - \Phi\left(\frac{m_{min}}{5\sqrt{10}} - 10\sqrt{10}\right)$

$= 1 - \Phi(\dots)$

$m_{min} = (2.33 + \sqrt{10}\cdot 10)\, 5\sqrt{10} \simeq 500 + 36.84 = \underline{537}$

Случайные величины

О1 (Ω, Σ, P) — вер. пр-во

$X(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ — изм по Борелю, если

$\forall A \in \Sigma_Б \Rightarrow \underbrace{X^{-1}(A)}_{\text{полный прообраз}} = B \in \Sigma$

О2 Любая изм по Борелю ф-я — случ. величина и при этом порождает меру

$P_x(d_x)$ на $\mathbb{R}$: $\forall A \in \Sigma_Б (A \subset \mathbb{R}) : P_x(A) = P(X^{-1}(A))$

и $(\mathbb{R}, \Sigma_Б, P_x)$ — мера по правой

Δ

1. $P_x(A) = P(X^{-1}(A)) \geq 0$ т.к. P — вер. мера
2. $P_x(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$
3. $\exists A_1 \dots A_n$ — посл. попарно несовм мн-в из $\Sigma_Б$ $A_i A_j \neq \emptyset$

$P_x\left(\sum^{\infty} A_i\right) = P\left(X^{-1}\left(\sum A_i\right)\right) \overset{*}{=} P\left(\sum^{\infty} X^{-1}(A_i)\right)$

(*) доказать самим

$= \sum^{\infty} P(X^{-1}(A_i)) = \sum^{\infty} P_x(A_i)$

∇

2015 w42

$X^{-1}\left(\sum A_i\right) = \sum X^{-1}(A_i)$

$P_x = P_x(d_x)$ — распределение вер-ти соотв X

Ф-я распределения и ее свойства

О $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω, Σ, P) — вер пространство.

X — случайная величина $(X^{-1}(A) \in \Sigma, \ \forall A \in \Sigma_Б)$

тогда $P_x : P_x(A) = P(X^{-1}(A)) \ \forall A \in \Sigma_Б$

и $(\mathbb{R}, \Sigma_5, P_x)$ — новое вер. пр-во

$\exists\ (\Omega, \Sigma, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \Sigma_5, P_x)$

О (Определение) $F_x(t)$ — ф-я распределения вероятностей случайной величины X, если по опр. $F_x(t) = P(x < t) \ominus$

т.е. P — вероятность полного прообраза $(-\infty, t)$

$\ominus\ F_x(t) = P(x^{-1}(-\infty, t)) = P_x(-\infty, t)$

Δ Характеристические свойства $F_x(t)$

F_1) $F_x(t)$ не убывает: $\forall t_1 > t_2 \quad F_x(t_1) > F_x(t_2)$

F_2) $\exists \lim\limits_{t \to \infty} F_x(t) = 1 \qquad \exists \lim\limits_{t \to -\infty} F_x(t) = 0$

F_3) $F_x(t)$ непрерывна слева

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{t \to x,\ t < x} F_x(t) = F_x(x)$

Δ

$\underline{F_1}$ $\exists\ t_1 > t_2 \qquad \Delta\ A = (-\infty, t_1) \quad B = (-\infty, t_2) \qquad B \subset A \quad A = B + (A \setminus B) \quad B\ A\overline{B} = \varnothing$

$\Rightarrow F_x(t_1) = P_x(A) \overset{\text{АБВ}}{=} P_x(B) + P_x(A \setminus B) \geq P_x(B) = F_x(t_2)$

Следствие

$P_x(A \setminus B) \overset{B \subseteq A}{=} F_x(t_1) - F_x(t_2) = P_x([t_2, t_1])$

$\underline{F_2}$. а) $\lim\limits_{t \to \infty} F_x(t) = 1$

$\exists\ t_n \uparrow +\infty, \qquad t_1 < t_2 < \ldots$

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} t_n = +\infty$

Тогда $\forall$ последов. множеств

$B_1 = (-\infty, t_1) \quad B_2 = (-\infty, t_2) \ldots$

$B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots$

$B \equiv \lim\limits_{n \to \infty} B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}$

Покажем, что $B = \mathbb{R} \quad \forall x\ \exists n_x : x < t_{n_x}$

$\Rightarrow x \in B_{n_x}$, т.е. $x \in B$

$\underline{\text{т.е.} \sum\limits^{\infty} B_n = B = \mathbb{R}}$

по 2^4 аксиоме непрерывности

$\lim\limits_{n \to \infty} P_x(B_n) = \underbrace{\lim F_x(t_n)}_{2} = P_x(\lim\limits_{n \to \infty} B_x) = P_x(\mathbb{R}) = 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} F_x(t_n) = 1 \qquad$ (t_n строго монот. возраст.)

б) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_x(t) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ t_{n_\varepsilon}$ при $n > n_\varepsilon$

$1 \geq F_x(t_n) > 1 - \varepsilon$

$\supset t \geq t_{n_\varepsilon}$ по св-ву F_1: $1 \geq F_x(t) \geq F_x(t_{n_\varepsilon}) > 1-\varepsilon$

т.е. $\Rightarrow |F_x(t) - 1| < \varepsilon$
$\forall t \geq t_{n_\varepsilon}$

Аналогично пункту а.

<u>F_3</u> $\lim\limits_{t \to x-0} F_x(t) = F_x(x)$

t_n монотонно возрастает, $\exists \lim t_n = x$
$B_1 = (-\infty, t_1), \dots B_n = (-\infty, t_n)$

$B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = (-\infty, x)$

∇

<u>Замеч.</u> Ни для открытого, ни для замкнутого промежутка ~~вероятность~~ нельзя попасть $\nexists$ разницы на концах
Вероятность попасть в точку — 0.
(для непрерывной ф-ии)

$$x = \begin{cases} 0 & p: 1/2 \\ 1 & p: 1/2 \end{cases}$$

$$F_x(t) = p(x < t)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1/2 & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$ Слева непр. есть, справа нету.

<u>Теорема</u> Пусть F обладает св-ми $F_1\, F_2\, F_3$
Тогда $\exists$ вер. пр-во $\langle \Omega, \Sigma, P \rangle$,
$\exists$ величина $X(\omega)$
что $F_x(t) \equiv F(t)$
($\Rightarrow F$ - ф-я распределения)

Δ

Построение выборочного пространства

$\Omega = \mathbb{R}$ $\quad \Sigma = \Sigma_Б$ - Борелевская

$\Rightarrow$ используем
Каратеодори: достаточно построить счетно-аддитивную ~~функцию~~ меру на алгебре. Она естественным образом продолжается на $6 = \Sigma_Б$

$[a_i; b_i)$ $\quad \forall_i\ a_i < b_i$

$A_Б$ содержит только $A \subset \mathbb{R}$

$A = \sum\limits_{i=1}^{n_A} [a_i; b_i) =: \Delta_i$

$P(A) = \sum\limits^{n_A} (F(b_i) - F(a_i))$ - функция мн-в

Проверим аксиомы Колмогорова $P = P(A)$

из $F_1 \Rightarrow F(b_i) - F(a_i) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0\ \forall A \in A_Б$
из $F_2 \Rightarrow P(\mathbb{R}) = \lim\limits_{\substack{b_i \to \infty \\ a_i \to -\infty}} (F(b_i) - F(a_i)) = 1$
] 1 и 2 акс. Колм.

Счетная аддитивность эквивалентна 1 акс. непрерывности + конечная аддитивность. ?

$\exists A, B \in A_B \quad A = \sum_{i=1}^{n_A} \Delta A_i \quad B = \sum_{i=1}^{n_B} \Delta B_i$

$\Rightarrow A+B = \sum_{i=1}^{n_A+n_B} \Delta n \overset{def}{\Rightarrow} P(A+B) = \sum_{i=1}^{n_A+n_B} (F(b_i) - F(a_i)) =$

$= P(A) + P(B)$

Теперь докажем акс. непрерывности:

B_n - убывает $(B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots)$ $\quad B_n \in A_Б$

$B = \lim B_n \in A_Б$

$P(\lim B_n) = P(B) = \lim P(B_n)$

$\lim (P(B_n) - P(B)) = \lim P(B_n \setminus B) = 0$

$(B_n \cdot \bar{B})$

$\lim P(\bar{B} \cdot B_n) = P(\lim B_n \bar{B}) = P(\varnothing)$

Тогда можем считать что $B = \varnothing$

иначе $\Delta \; B_n \setminus B$

$B = \bigcap B_n = \varnothing$

Найдем $B_\varepsilon = [-M_\varepsilon, M_\varepsilon), \; P(B_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon/2$

т.к. $P(B_\varepsilon) = F(M_\varepsilon) - F(M_\varepsilon)$ и

$F(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \Rightarrow M_\varepsilon \cdot F(M_\varepsilon) > 1 - \varepsilon/4$

$0 \leq \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} P((B_n \cap B_\varepsilon) \cup (B_n \cap \bar{B}_\varepsilon)) \leq$

$\leq \lim_{n\to\infty} P(B_n \cap B_\varepsilon) + \varepsilon/2$

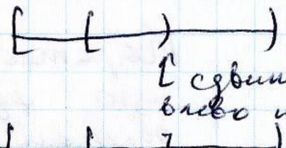
Достаточно показать:

$\exists \lim_{n\to\infty} P(B_n \; B_\varepsilon) = 0$

$=: C_n$

$C_n = B_n \cdot B_\varepsilon \in A_Б$

Дальше



Δ все возможные разности - полуинт. и пересеч. замкн. м-в

Получим покрытие откр. мн-вами

Оно конечно

23.10.2015

Тогда $C_n = \sum_{i=1}^{k_n} [a_i, b_i)$

Из F_3 непр. слева $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_{in} > 0$

$0 \leq P([a_{in}, b_{in})) - P([a_{in}, b_{in} - \delta_{in}]) \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{k_n 2^n}$

$\tilde{C}_n = \sum [a_{in}, b_{in} - \delta_{in}) \leq C_n$

$0 \leq P(C_n) - P(\tilde{C}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$

Теперь можно замкнуть

$A_n = \sum_{i=1}^{k_n} [a_{in}, b_{in} - \delta_{in}]$ — замыкание

отсюда $\tilde{C}_n \subseteq A_n \subseteq C_n$,

Так как $C_n - \tilde{C}_n \to 0$, то $A_n \to C_n$

$A = \bigcap^{\infty} A_n \subseteq \bigcap^{\infty} C_n = \bigcap^{\infty} B_n \cdot B_\varepsilon = B_\varepsilon (\bigcap^{\infty} B_n) = B_\varepsilon \cdot \varnothing = \varnothing$

$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \varnothing$; $P(C_n \setminus A_n) \overset{A_n \subset C_n}{=} p(C_n) - p(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

При этом $A_n \subset [-M_\varepsilon, M_\varepsilon] =: [B_\varepsilon]$ — компакт

$(A_n \subset B_\varepsilon) \Rightarrow \Delta_n = [B_\varepsilon] \setminus A_n$ ← во $\mathbb{R}$

$\bigcup^{\infty} \Delta_n = \bigcup^{\infty} [B_\varepsilon] \overline{A_n} = [B_\varepsilon] \bigcup^{\infty} \overline{A_n} = [B_\varepsilon] \overline{\bigcap^{\infty} A_n} = [B_\varepsilon]$

т.е. $\{\Delta_n\}^{\infty}$ — открытое покрытие компакта $[B_\varepsilon]$

По лемме Бореля из $\{\Delta_n\}^\infty$ можно выделить конечное подпокр.

$[B_\varepsilon] = \sum_{n=1}^{N_0} \Delta_n = \sum_{n=1}^{N_0} \overline{A_n} [B_\varepsilon] = [B_\varepsilon] \overline{\bigcap^{N_0} A_n}$

Тогда $[B_\varepsilon] \subseteq \overline{\bigcap_{n=1}^{N_0} A_n}$

Из этого следует, что $[B_\varepsilon] \cap (\bigcap^{N_0} A_n) = \varnothing$

Но $\bigcap_{n=1}^{N_0} A_n \subseteq [B_\varepsilon] \Rightarrow \bigcap^{N_0} A_n = \varnothing$

$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$

$P(C_{N_0}) = P(C_{N_0} \overline{\bigcap^{N_0} A_n}) = P(C_{N_0} \bigcup^{N_0} \overline{A_n}) \overset{\text{по влож.}}{\leq} P(\bigcup_{n=1}^{N_0} C_n \overline{A_n}) \leq$

$\leq \varepsilon \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}$

$P(B_{N_0}) \leq P(C_{N_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ ЧТД.

▽ Построим случ. X

$X(x) = x$ $\quad F_X(t) = P(X < t) = P_F(-\infty, t)$.

▽

Доп. св-ва $F_X(t)$

Лемма

1. $F_X(t+0) = P(X \leq t)$
2. $P_X([a, b)) = F(b) - F(a)$
3. $P(X = a) = F_X(a+0) - F_X(a)$ — скачок F_X
4. $F_X(t) = const$ $\quad t \in \Delta = [a, b) \Rightarrow P(X \in \Delta) = 0$
5. $P(dx)$ восст. по $F_X(t)$
6. Множество точек разрыва $F_X(t)$ н. б. чем счетно

Δ

6. $\mathcal{D}_n = \{t : F_X(t+0) - F_X(t) \geq \frac{1}{n}\}$
$|\mathcal{D}_n| = \#\mathcal{D}_n \leq n$
$\mathcal{D} = \bigcup_n \mathcal{D}_n$

▽

7. $F'(x)$ сущ. почти везде $\quad$ Δ без д-ва ▽

Распределение:

1. Дискретное — X имеет дискр. распр.
2. Абсолютно непр. — X - непр. случ. величина
3. Сингулярное — X - сингул.

→ Дискретное распределение:

Сосредоточено в мн-ве не более сч. точек $\mathbb{R}$,

$X = X(\omega)$ имеет не б. сч. число значений

$X = x_1, x_2, \dots \qquad p(X = x_i) = p_i \quad p_i \geq 0 \quad \sum p_i = 1$

$P_X(dx)$ сосредоточ. в точках $x_1, x_2, \dots$

$$F_X(t) = \sum_{i: x_i < t} p(X = x_i)$$

1) Не убывает

2) $t < x_i \Rightarrow F_X(t) = 0 \qquad \lim F_X(t) = \lim \sum p_k = 1.$

Примеры 1. Распред. Бернулли

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

— Имеет право на сущ.

2. $X = \delta_m \qquad P(X = m) = 1$

3. Биномиальн. распред. $B_{n,p}$

$X = 0, 1 \dots n \qquad p \in (0, 1)$

$p(X = m) = C_n^m p^n (1-p)^{n-m}$

4. Геометрическое

$N = 1, 2, 3 \qquad p(N = k) = q^{k-1} p \quad p \in (0,1)$

$X \sim \Pi_\lambda \quad \lambda > 0 \qquad X = 0, 1 \dots n \qquad p(X = m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$

→ Абсолютно непрерывное распределение

X - ~~нп~~ сл. в. на (Ω, Σ, P) и $\exists\, f_X(t) \geq 0$

$$p(X \in A,\ A \in \Sigma_Б) = \int_A f_X(t)\, dt$$

$P_X(dx)$ def абс. непр. $\quad f_X(t)$ - ф-я плотности распределения

Св-ва

1. $f_X(t) \geq 0$
2. $f_X(t)$ интегр. относ. $\Sigma_Б$
3. $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, dt = P(X \in \mathbb{R}) = 1.$

$$F_X(t) = p(X \in (-\infty, t)) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\, dt, \quad f_X(t) \overset{п.в.}{=} F_X'(t)$$

6.11.2015

Условия существования плотности вер-ти

$f1.\ f_x(t) \geq 0$

$f2.\ \dots$ на Σ_6

$f3.$ нормировка $\int\limits_{\Omega} f = 1$

(1) $F_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$

(2) $f(x) \overset{\text{п.в}}{=} F_x'(x)$ – выбираем такую (т.к. $f_x(x)$ – класс ф-й)

Из (1) следует:

F1. F – не убывает: $\int\limits_{-\infty}^{x_1} f \geq \int\limits_{-\infty}^{x_2} f$, если $x_1 \geq x_2$

F2. $\lim\limits_{t\to-\infty} F_x(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F_x(t) = 1$ (из нормировки f)

F3. F – непрерывна слева:

$$\lim_{x\to x_0-0} F_x(x) = \lim_{x\to x_0-0} \int\limits_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f_x(t)dt = F_x(x_0)$$

__Примеры распределений__

① $x \sim U(a,b)$

$$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a<t<b \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}$$

$$F_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_x(x)dx = \begin{cases} 0, & t\leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a<t\leq b \\ 1 & t>b \end{cases}$$

Все выполняется:

$f_1: f_x(t) \geq 0$

f_2: кусочно-непр => интегр => $\exists$

$f_3: \int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \int\limits_{a}^{b} \frac{dt}{b-a} = 1$

Это равномерное распределение

② $x \sim Exp_\lambda$, $\lambda > 0$ ($u = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow Exp^u$)

$$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$f_1: f_x(t) \geq 0$

f_2: кус-непр => интегр.

f_3. нормировка есть

} это плотность

$$F_x(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f_x(x)dt = \begin{cases} 0, & t\leq 0 \\ \lambda\int\limits_{0}^{t} e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda x}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Очев. все работает

Это показательное распределение

③ Нормальное распределение

$X - N(a, \sigma^2)$ $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$a = 0$, $\sigma = 1$ — стандартное нормальное (гауссовское)

$x \sim N(0,1)$

$$f_x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$f1$: $f_x(t) \geq 0$

$f2$: непр $\Rightarrow$ интегр.

$$f3: \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left\{x = \frac{t-a}{\sigma}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sigma\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I$$

$$I \cdot I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\,dy = \int_0^{2\alpha} d\alpha \int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{r^2}{2}\right)} r\,dr =$$

$$= 2\pi\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I = 1.$$

Отсюда f_x — плотность

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

④ Сингулярное распределение.

<u>Опр</u> $P(dx)$ — сингулярный, если

$\exists B_0$: 1) $\mu(B_0) = 0$

2) $P(B_0) = 1$

3) $P(\{x\}) = 0$, где $\{x\}$ — одноточечное мн-во

<u>Утв</u> Пусть x — сингулярная случ. величина $\Rightarrow$

$F_x(t) \in C(\mathbb{R})$

$F_x(t)$ непр. слева по определению.

Справа: $F_x(t+0) = P(x \leq t)$

<u>Пример такой</u> ф-ии — лестница Кантора

Строим $F(t)$ на $[0,1]$: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$$F(t) = \frac{F(1) + F(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

И так далее.

$$\mu = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} A_{ki}\right) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 4\frac{1}{3^3} + \ldots$$

$$\ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

$F(x)$ - const $\Rightarrow P(x \in A) = 0 \Rightarrow P(B) = 0$

$B_0 = [0,1] \setminus B \quad (B \subset [0,1]) : \mu(B_0) = 0, \; p(B_0) = 1$

То есть непр. ф-ю можно довести до непр.

$0 < \delta < \frac{1}{3^k} \Rightarrow |F(x+\delta) - F(x)| \le \frac{1}{2^k} = \Delta_k$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k: \; \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \quad 0 < \delta < \frac{1}{3^k}, \; |F(x+\delta) - F(x)| < \varepsilon.$

$\Rightarrow F(x)$ непрерывна

$\Rightarrow P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0) = 0$

$\Rightarrow F$ - сингул. синглар. распред.

Теорема Лебега

$\forall$ вероятн. распред. на $\mathbb{R}$, F:

F единств. образом представима в виде:

$P(d_x) = p_1 P(d_x) + p_2 P(d_x) + p_3 P(d_x)$

$p_i \ge 0 \quad i = 1,2,3 \quad \sum p_i = 1$

06.11.15

Пример смеси:

Э либо Вы дома — ω_0 $\quad p(\omega_0) = q$

либо приходите в метро в $\forall$ момент времени

Интервал между поездами 1 мин. Мн-во эл. исходов $\omega_0 \cup [0,1]$, если пошли на поезд, то распр. времени ожидания $P_a(dx) \sim U(0,1)$ - равновер. на $[0,1]$

если дома $P_d(dx) = \delta_0$ — сосредоточ. в нуле

X - сл. время ожидания

$P(X \in B | \omega_0) = \delta_0(B) = \begin{cases} 1 & 0 \in B \\ 0 & 0 \notin B \end{cases}$

$P(X \in B | \overline{\omega_0}) = \int_B \Delta_{[0,1]}(x)\, dx = \mu(B \cap [0,1])$

$\Rightarrow$ по ф. п. в. $\quad P(X \in B) = q \underbrace{\delta_0(B)}_{\text{дискр. мера}} + (1-q) \underbrace{P_a(B)}_{\text{непр. мера}}$

Опред $\exists\, x = x(\omega) : (\Omega, \mathcal{Z}, P) \to (\mathbb{R}, \Sigma_Б, P_x)$ – сл. вер-ть

$\sigma(x)$ – сигма-алгебра, порожденная сл. в. X
класс мн-в $A = X^{-1}(B), \forall B \in \Sigma_Б$

Упр. Показать, что $\sigma(x)$ – сигма алгебра

Пример $\exists\, \Omega = \mathbb{R}$, $\Sigma = \Sigma_Б$, $X = X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 1, & \omega \geq 0 \end{cases}$

$$\sigma(X): \quad X^{-1}(B) = \begin{cases} \mathbb{R}, & 0 \in B,\ 1 \in B \\ \{\omega < 0\}, & 0 \in B,\ 1 \notin B \\ \{\omega \geq 0\}, & 0 \notin B,\ 1 \in B \\ \varnothing, & \text{ни } 0 \text{ ни } 1 \text{ не лежат в } B \end{cases}$$

Пример Пусть X – непр и строго мон.
$X(+\infty) = +\infty$
$X(-\infty) = -\infty$

Опред Сл. величина $X = X(\omega)$ измерима относительно $\mathcal{C}$ – σ-алгебры, если $\forall B \in \Sigma_Б$ имеем $X^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

Опр $\exists\, \{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ – разбиение Ω, т.е. $C_j C_i \overset{i \neq j}{=} \varnothing$, $\sum_j C_j = \Omega$
и $\mathcal{C}(\{C_j\}) \equiv \sigma$-алгебра порожд. $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$
(содержит все $\bigcup^{n} C_j$, $n \in \mathbb{N} \cup \infty$)
(по опр σ-ал.)

Теорема 1 $\exists\, \{C_j\}_j$ – разбиение Ω, $\mathcal{C}(\{C_j\})$ – σ алг.,
$X = X(\omega)$ – сл. величина, измер. относ. $\mathcal{C}(\{C_j\})$
Тогда $X(\omega) = \sum_j x_j I_{C_j}(\omega)$, то есть
$\hookrightarrow \chi_{C_j}$ – хар-я ф-я
то есть $X(\omega)$ постоянна на мн-х разбиения

Δ

1. $\mathcal{C}(\{C_j\}) = \{\varnothing, C_1, \dots$, всевозможные объединения $\cup C_i\}$.
2. $\forall C_i$ из $\{C_j\}$, что $C_i \neq \varnothing$
$\exists\, \omega \in C_i$ и $X(\omega) = x_i$

По опред. изм. относ. $\mathcal{C}(\{C_j\})$: $X^{-1}([x_i]) \in \mathcal{C}$
(одноточ. мн-во)

$C_i \in \mathcal{C} \Rightarrow A = C_i \cap X^{-1}([x_i]) \in \mathcal{C}$

Св-ва A:

1. $\omega \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$
2. $A \in \mathcal{C}$
2. $A \subseteq C_i$

$\Rightarrow A = C_i$, потому что много больше в $\mathcal{C}$ нет.

Отсюда $C_i \subseteq X^{-1}([x_i])$, то есть $X(\omega) \overset{\omega \in C_i}{=} x_i$

∇

Теорема 2:

Пусть (Ω, Σ, P) - вер. пр-во; $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ - 2 сл. в заданном.

$(Y(\Omega) \in \Sigma_Б)$

Пусть $\sigma(Y)$ и X - измерима относ. $\sigma(Y)$

$\Rightarrow \exists\ g = g(x)\ (g^{-1}(B) \in \Sigma_Б,\ \forall B \in \Sigma_Б) : X = g(Y)$

Δ Боровков АА стр 64 лемма 1 ∇

Начальные и центральные моменты

Опред. $EX \overset{def}{=} \int\limits_{\Omega} X(x)\, P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, dF_x(x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} x f_x(x) dx \\ \sum\limits_i x_i \cdot p_i \end{cases}$

или интеграл Лебег

сходится абсолютно, то

EX - мат. ожидание

Опред. Начальный момент - def - $E(X^k)$ - k-й нач. момент

$E(X^k) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k f_x(x)\, dx \quad \Big| \quad \sum\limits_i x_i^k p_i$

(очев. матожид - 1 нач. момент)

Опред. $E(X - EX)^k$, $k \in \mathbb{N}$ - k-й центральный момент (необходима абс. сходимость)

$E(X - EX) = 0$, $\mathcal{D} \equiv E(X - EX)^2$ - дисперсия

$\sigma(x) = \sqrt{\mathcal{D}(x)} \leftarrow$ среднеквадр. отклон.

Если X не вырождена, то $\mathcal{D} > 0$

Сл. вел-в на дискр. пр-ве

Пусть (Ω, Σ, P) - вер. пр-во, $|\Omega|$ - не более чем счетно

Тогда:

1) $\forall X(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ - сл. в. (измеримо отн $\Sigma_Б, \Sigma$)

2) Множество значений $X = x, \ldots$ н.б. счетно

$p_i = p\{\omega : X(\omega) = x_i\} = P(X = x_i) = P_X(x_i)$;

$A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, тогда $\{A_i\}_i$ - разбиение Ω

$X(\omega) = \sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$

хар. ф-я

<u>Опр</u> Случайный вектор

(Ω, Σ, P) - вер. пр-во, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$, тогда упор. набор $(X(\omega), Y(\omega)) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ называется (двумерным) случ. вектором.

13.11.2015 Сл. величины на дискр. Ω

(Ω, Σ, p)

$X(\omega) = x_1, x_2 \ldots$ - не более чем счетно

$p_i = p(\omega : X(\omega) = x_i)$, $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$,

$\Omega = \bigcup_i A_i$, $A_i A_j \overset{i \neq j}{=} 0 \Rightarrow \{A_i\}$ разбиение Ω

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $P_X \neq p(A^{-1}) = p(\omega : X(\omega) \in A)$,

$\sum p_i = 1$ $p_i \geq 0\ \forall i$ $P_X(\mathcal{D}) \overset{\forall \mathcal{D} \in \Sigma_5}{=} p(X \in \mathcal{D}) = \sum_{i : x_i \in \mathcal{D}} p_i$

Случайный вектор задает меру $P_{X,Y}(\mathcal{D}) = P(\omega : (X, Y)(\omega) \in \mathcal{D})$

$A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$ $\{A_i\}_i$

$B_j = \{\omega \mid Y(\omega) = y_i\}$ $\{B_j\}_i$ разбиение Ω

$p_{ij} = P(\omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j)$, $\{p_{ij}\}_{ij}$ - распред. (X, Y)

<u>Св-ва p_{ij}</u> :

1. $\sum_j p_{ij} = P_{x_i} = P(X = x_i)$

Δ

$\sum_j p_{ij} = \sum_j p\{\omega : X(\omega) = x_i ; Y(\omega) = y_j\} =$

$= \sum_j p\{\underbrace{(\omega : (X(\omega) = x_i))}_{= A_{x_i}} \cap \underbrace{(\omega : Y(\omega) = y_j)}_{= B_{y_j}}\}$

$= \{$счетная аддит., $A_{x_i} B_{y_j} \cap A_{x_k} B_{y_l} = \varnothing\} =$

$= p[(\sum_i A_{x_i}) B_{y_j}]$

∇.

2. $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, т.к. $\sum_{i,j} p_{ij} = \sum_i \sum_j p_{ij} = \sum_i p_{x_i} = 1$

3. $P((X,Y) \in D) = \{\forall D \in \Sigma_{Б\Pi}\} = P\{\omega: (X(\omega), Y(\omega)) \in D\} = \sum_{\substack{i,j \in \\ (x_i, y_j) \in D}} p_{ij}$

Пример Среди пар близнецов, вероятность однополой пары 0.64

Вер-ть рождения мальчика 0.51. Найти распределение вероятностей всевозможных пар

Исходы (ММ) (МД) (ДД) (ДМ)

$$
\left.\begin{aligned}
p[(MM) + (MД)] &= 0{,}51 \\
p[(M,M) + (ДM)] &= 0{,}51 \\
p[(MД) + (ДД)] &= 0{,}49 \\
p[(ДM) + (ДД)] &= 0{,}49
\end{aligned}\right|
\quad
\begin{aligned}
&X(MM) = 0 \ (= x_1) \quad Y = 0 \\
&X(MД) = 0 \ (= x_1) \quad Y = 1 \\
&X(ДM) = 1 \ (= x_2) \quad Y = 0 \\
&X(ДД) = 1 \ (= x_2) \quad Y = 1
\end{aligned}
$$

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

$$
\left.\begin{cases}
p_{11} + p_{22} = 0{,}64 \\
p_{12} + p_{11} = p_{11} + p_{21} = 0{,}51 \\
\sum p_{ij} = 1
\end{cases}\right| \Rightarrow
\begin{cases}
p_{12} + p_{21} = 1 - 0{,}64 \\
p_{12} = p_{21} = 0{,}51 - p_{11}
\end{cases}
$$

Откуда $p_{11} = 0{,}33$, $p_{12} = p_{21} = 0{,}18$, $p_{22} = 0{,}31$

$Y \backslash X$	0	1
0	0,33	0,18
1	0,18	0,31

X_i	0	1
p_{x_i}	0,51	0,49

Опр X, Y заданные на одном (Ω, Σ, p) наз. независ., если $\forall A, B \in \Sigma_Б$ $P(X \in A, Y \in B) = p(X \in A) \cdot p(Y \in B)$

Утв Пусть X, Y — случ. в. заданы на дискр. Ω тогда X, Y незав. $\Longleftrightarrow p_{ij} = p_{x_i} p_{y_j} \ \forall i j$

Δ

$\Rightarrow$ X, Y независимы $\begin{matrix} A = [x_i] \\ B = [y_j] \end{matrix} \Rightarrow p_{ij} = p\{\omega: X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} =$

$= p\{(X(\omega) \in A) \cdot (Y(\omega) \in B)\} \overset{\text{незав}}{=} P(X = x_i) P(Y = y_j) = p_{x_i} p_{y_j}$

$\Leftarrow$ $\forall C_1 C_2 \in \Sigma_Б$ $p(X \in C_1, Y \in C_2) = P(\{\omega: X(\omega) \in C_1\} \cdot \{\omega: Y(\omega) \in C_2\}) =$

$$= \sum_{i,j:\ (x_i \in G_1)(y_j \in G_2)} P\{\omega : X(\omega) = x_i,\ Y(\omega) = y_j\} = \{\text{расщепление}\} =$$

счет. аддит.

$$= \sum_{i,j} p_{ij} = \sum p_{x_i} \sum p_{y_j}$$

∇

<u>Пример</u> Моменты 1 и 2 успехов в сх. Б

проводятся и независ. испытания с 2мя исходами.

A – успех $\quad p(A) = p \quad p \in (0,1)$

$\bar{A}$ – неудача $\quad p(\bar{A}) = 1-p$

$$\omega = C_1 \dots C_n;\quad C_i = \left\{ \begin{matrix} A_i \\ \bar{A}_i \end{matrix} \right.$$

$N(\omega) = N_i(\omega)$ – номер i-того успеха.

$$N(\omega) = \min_i \{C_i = A_i\} \qquad N(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n) = n+1$$

$$p(N = m) = p(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{m-1} A_m) = q^{m-1} p$$

$N_2 - N_1 = T_1 =: T$ – момент 1 успеха в укороченной последовательности.

$$p_{ij} = P(N_1 = i;\ T_1 = j) = p(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-1} A_i \bar{A}_{i+1} \dots A_{i+j}) =$$
$$= q^{i-1} p\, q^{j-1} p = p_{N_i} q^{j-1} p$$

$$p_{T_j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = q^{j-1} p^2 \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = q^{j-1} p^2 \frac{1}{1-q} = q^{j-1} p = p_{N_j} = q^{j-1} p$$

$p(N_1 = i,\ T_1 = j) = p_{N_1 i}\, p_{T_1 j}$ – N_1 и T_1 незав.

<u>Опр</u> $X = x_1, x_2 \dots$ – не более чем счетное число значений

X – целочисл. случ. в. если $\{x_i\} \subset \{0\} \cup \{\mathbb{N}\}$

<u>Опр</u> X и Y – целочисл. случ. велич.

Сл. велич. $z = z_1, z_2, \dots$ – целочисленная свёртка X и Y

$$p_Z = p_X * p_Y \quad \text{если} \quad p_{Z_n} = \sum_{i=0}^{n} p_{X_i} p_{Y(n-i)}$$

<u>Теорема</u> о свёртке

$X\ Y$ – незав. целочисл. случ. величины,

тогда $Z = X + Y$ распределена как свёртка

Δ

$$p(Z = n) = ? \quad (Z = X + Y)$$

$$H_i = \{X = i\} \quad i = 0, 1, \dots$$

$$p(Z = n) = \sum_{i=0}^{\infty} p(\underset{n}{Z} \mid X = i) \cdot p(X = i).$$

$$p(Z = n \mid X = i) = p(X + Y = n \mid X = i) \overset{i \geq n+1}{=} 0$$

$$p(Z=n \mid X=i) \overset{i\le n}{=} p(Y=n-i \mid X=i) = p_{Y;\,n-i}$$

$$\Rightarrow p(Z=n) = \sum^{n} p_{X i}\, p_{Y,\,n-i}.$$

▷

Пример р-е $N_2(\omega)$ – второго успеха в сх. Б

$N = N_1 + T_1 \Rightarrow N_2$ – свертка N_1 и T_1

$$p(N_2=n) = \sum^{n} p_{N_1 i}\, p_{T_1\, n-i} = \sum^{n-1} q^{i-1} p\, q^{n-i-1} p =$$

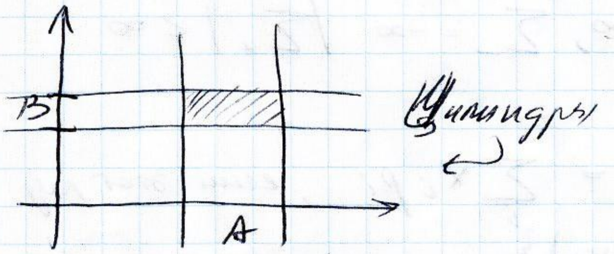
$p_{N_1 0} = P(N_1=0)=0$

$$= p^2 \sum_{i=1}^{n-1} q^{n-2} = (n-1)\, p^2 q^{n-2}$$

$p(T_1\, n-n) = p_{T_1 0} = 0$

Замечание X и Y незав. $p((X,Y)\in A\times B) = p(X\in A, Y\in B) =$

$= p(X\in A)\, p(Y\in B)$



20.11.2015 Условные распределения

Опр Пусть X и Y – две дискр. случ. величины, заданные на одном (Ω, Σ, P)

$Y = y_1 \dots$ $\quad P(Y=y_j) = p_{Yj} \neq 0$

$X = x_1 \dots$ $\quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, $\{A_i\}$ – разб. Ω

Условное вер. пространство $(B_j, \Sigma_{B_j}, P_{B_j})$

$\Sigma_{B_j} = \{A\cdot B_j,\ A\in\Sigma\}$ $\quad P_{B_j}(B_j) = 1$, $\quad P_{B_j}(AB_j) = \dfrac{P(AB_j)}{P(B_j)}$

$$P_{B_j}(A) = \frac{P(A\cdot B_j)}{P(B_j)} \quad \text{и} \quad P_{B_j}(A_i) = \frac{P(A_i B_j)}{P(B_j)} =$$

$$= \frac{P\{\omega : X(\omega)=x_i,\ Y(\omega)=y_j\}}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}$$

$$p_{i|j} = P(X=x_i \mid Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}, \quad p_{i|j} \ge 0, \quad \sum p_{i|j} = 1$$

$\forall j \quad p(Y=y_j) = p_{Yj} \neq 0$

$\{p_{i|j}\}$, заданное на $\{x_1, x_2, \dots\}$ – условное распр. X отн. Y

Пример $\exists N_1, N_2$ – номера 1го и 2го успеха в берн. испыт.

Найдем $P_{i|j} = P(N_1 = i \mid N_2 = j)$ $\quad j \leq i \quad p_{i|j} = 0$

$j > i \quad p_{i|j} =$

$$= \frac{p(N_1 = i, N_2 = j)}{p(N_2 = j)} = \frac{p^2 q^{i-1} q^{j-i-1}}{p^2 q^{j-2}(j-1)} = \frac{1}{j-1}$$

Матем. ожидание

$\exists (\Omega, \mathfrak{A}, P)$ $\quad \Omega$ – дискр. $\quad X = X(\omega)$

Опр Мат ож. сл. в. X def $EX = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$, если ряд сход.

Обобщение $\exists \Sigma_+ = \sum\limits_{\omega : X(\omega) > 0} X(\omega) p(\omega)$; $\Sigma_- = \sum\limits_{\omega : X(\omega) < 0} X(\omega) p(\omega)$

Положим $EX = \begin{cases} +\infty, \Sigma_+ = \infty & |\Sigma_-| < \infty \\ -\infty, \Sigma_- = -\infty & |\Sigma_+| < \infty \end{cases}$

Утв $\exists X = X(\omega)$ сл. в.

$X = x_1; x_2; \ldots$, тогда $EX = \sum\limits_i x_i p_i$, если этот ряд абс. сх.

$\exists T = \{A_i = (\omega : X(\omega) = x_i)\}_i$

$$EX = \sum_\omega X(\omega) p(\omega) = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \underbrace{X(\omega)}_{= x_i} = \sum_i x_i p(A_i) =$$

$= \sum\limits_i x_i p_i$

Следствие утв. о вложенности м.о. дискр. случай)

$\exists T = \{B_j\}_j$ – разбиение Ω

и $X(\omega) = x_j$, $\omega \in B_j$, $x_i = x_j$ могут быть равны при $i \neq j$

$T = \{B_j\}_j$ – подразбиение $\{A_i\}_i$

Тогда $EX = \sum\limits_i x_i p(B_i)$

Примеры вычисл. EX

1. X – вырожден. сл. в. $\quad P(X = m) = 1 \quad EX = m \cdot 1 = m$

2. $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \quad p(A) = p.$

$E(I_A(\omega)) = \sum I_A(\omega) p(\omega) = 1 \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega) + 0 = p(A)$

берн. сл. в.

ξ_i	0	1
	$1-p$	p

$E\xi = p$

3. Пуассона $X \sim \Pi_\lambda$ $\quad \lambda > 0$

т.е. $X = 0, 1, 2, \dots$

$$p(X=m) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \qquad EX = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\lambda\sum\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda$$

4. N_1 - номер 1-го успеха в послед. исп. Бернулли

$$EN_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} p = p\left(\sum^{\infty} q^{n}\right)'_q = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

5. $X = 1, 2, 3, \dots$

$$p_x = p(X=n) = \frac{6}{\pi^2 n^2} \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$EX = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ - расх}, \quad EX = +\infty$$

6. $\exists EX < +\infty$

тогда $EX = \sum_{n=0}^{\infty} p(X > n)$

Δ

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} n\, p(X=n) = \lim_{N\to\infty}\sum^{N} n\, p(\underset{\substack{= \\ p(X>n-1)-p(X>n)}}{X=n}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(n p(X>n-1) - n p(X>n)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n-1=0}^{N-1}(n-1)p(X>n-1) + \sum_{n-1=0}^{N-1} p(X>n-1) - \sum_{n=1}^{N} n p(X>n)\right) =$$

$$= \sum^{\infty} p(X>n) - \lim_{N\to\infty} N p(X>N) = \sum p(X>n) + 0.$$

$$\left(Np(X>N) = N\sum_{k=1}^{\infty} p(X=N+k) \le \sum_{k=1}^{\infty}(N+k)\,p(X=N+k) \to\right)$$

остаток сх. ряда EX

∇

<u>Задача</u> о рекордном значении

$\exists X_0, X_1, X_2, \dots \qquad (X_i \sim X,\ i = 0, 1, 2 \dots)$

$\forall M: \ p(X > M) > 0 \qquad N = 0$, если $X_0(\omega) \ge X_k(\omega)\ \forall k$

$\measuredangle\ N = N(\omega) = \min\limits_{k:\ X_k(\omega) > X_0(\omega)}\{k\}$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ для $i = 0, 1, \dots n$

$A_{ni} = \{\omega : X_i(\omega) \ge X_0(\omega), X_i(\omega) \ge X_1(\omega) \dots X_i(\omega) \ge X_n(\omega)\}$

Макс. выигрыш в i за n игр.

$\{N > n\} = \{\omega : X_0(\omega) \ge X_1(\omega), \dots X_0(\omega) \ge X_n(\omega)\} = A_{n0}$

A_{ni} равновероятны по i в силу незав. и один. распред.

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_{ni} = \Omega, \quad 1 = p(\Omega) = p\left(\sum_{i=0}^{n} A_{ni}\right) \le \sum^{n} p(A_{ni})$$

$$\Rightarrow p(N > n) \ge \frac{1}{n+1}$$

~~∃∃EX~~ $\exists\ EN = EN = \sum_{n=0}^{\infty} p(N > n)$ - расх.

Таким образом матожидание не сущ., то есть ожидаемые не получились.

<u>Свойства</u> EX

1. $\exists\ p(X \geq 0) = 1 \Rightarrow EX > 0$, если $X \neq \delta_0$, $E\delta_0 = 0$

$EX = \sum x_i p_i \geq 0$ $\qquad EX = 0 \Rightarrow x_i = 0$ либо $p_i = 0$
$\Rightarrow p(X = 0) = 1$

2. $EI_A = p(A)$ $\qquad E(I_{const}) = E(const) = 0$

3. X и Y – сл. в. и $\exists\ EX, EY$, тогда
$E(X+Y) = EX + EY$

Δ
$$EX + EY = \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega)) p(\omega) = \sum_{\omega} (X+Y)(\omega) p(\omega) = $$
$$= E(X+Y)$$
∇

4. $\exists\ EX \Rightarrow E(c \cdot X) = c \cdot EX$

5. $\exists\ P(X \geq Y) = 1 \overset{\text{по св. 1}}{\Rightarrow} EX \geq EY$

(Следствие $\quad p(X \geq 0) = 1 \Rightarrow EX \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(X \geq n)$
$\qquad EX \geq \sum_{n=1}^{\infty} p(X \geq n)$
Δ очев. ∇)

6. $\exists\ EX = m$ $\quad Y = X - m$ $\quad EY = 0$, Y наз. центр. сл. в. X

7. X и Y незав. $\exists\ EX, EY$, тогда $E(XY) = EX \cdot EY$

Δ
$$E(X \cdot Y) = \sum_{\omega} X(\omega) Y(\omega) p(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} x_i y_j p(\omega) =$$
$$= \sum_i x_i \sum_j y_j p_{ij} = EX\, EY$$
↑ по незав.

∇

27.11.2015

Примеры выч. EX (продолж.)

(7) $X \sim B_{n,p}$ т.е. $X = 0, 1, \ldots n$ $\quad p(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

$X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ $\qquad X$ – кол. усп. в n исп.

$\{\xi_i\}$ – незав., один распр. $\Rightarrow EX = np$

(8) $\exists\ N_k$ – номер „k"-го успеха в посл. Берн. исп.

$N_k = T_1 + \ldots + T_k$ $\quad$ где $T_i = N_i - N_{i-1}$ $\quad i = 1..n$, $N_0 = 0$

$E(T_i) = \frac{1}{p}$ $\qquad E(N_k) = \frac{k}{p}$

ПР. 9 $E(X\cdot Y) = EX\cdot EY$ для завис. X и Y

$X = Y$ – биноm. сл. в., $Z = XY$, $Z(\omega) = X(\omega)\,Y(\omega)$

Замечание: $E(g(X)) = \int\limits_{\Omega} g(X(\omega))\,P(d\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dF_X(x)$

В дискр. случае:

$$\sum_{\omega} g(X(\omega))\,p(\omega) = \sum_i \sum_{\omega:\,X(\omega)=x_i} g(x_i)\,p(\omega) = \dots$$

Усл. мат. ожидание

Пусть (Ω, Σ, P) – вер. пр-во, $X = X(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\forall \omega \in$)

Рассм. $\forall B \in \Sigma$

Опр 1 Мат ожидание сл. величины X по мн-ву B (среднее по B) def число ~~$E(X, B)$~~

$$E(X,B) = \sum X(\omega)\,p(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\,I_B(\omega)\,p(\omega) = E(X\cdot I_B)$$

Если сходится.

$$E(X|B) = \frac{1}{p(B)}E(X,B)$$

Если $p(B) = 0$, то $E(X,B) = 0$.

Утв 1 $p(A|B) = E(I_A|B)$. Пусть $p(B) \neq 0$ $A, B \in \Sigma$

Δ

$$E(I_A|B) = \frac{1}{p(B)}\sum_{\omega\in B} I_A(\omega)\,p(\omega) = \frac{1}{p(B)}\sum_{\omega\in A\cap B} p(\omega) = \frac{p(A\cdot B)}{p(B)} \overset{def}{=} p(A|B)$$

∇

Напомним, что $p(A) = E(I_A)$

Утв 2. Пусть сл. в. X и I_B – незав, тогда

$$E(X|B) = EX$$

Δ

$$E(X|B) = \frac{1}{p(B)}E(X,B) = \frac{1}{p(B)}E(X\cdot I_B) \overset{\text{незав.}}{=} \frac{EX\cdot EI_B}{p(B)} = EX$$

∇

Теорема Формула полного матожидания.

Пусть $T = \{A_k\}_k$ – разбиение Ω:

Тогда $$EX = \sum_{k:\,p(A_k)>0} E(X|A_k)\,p(A_k)$$

$\triangleleft$ $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, p(\omega) = \sum_{k} \sum_{\omega \in A_k} X(\omega)\, p(\omega) =$

$= \sum_{k} E(X, A_k) = \sum_{k: p(A_k) > 0} E(X | A_k)\, p(A_k)$

$\triangleright$

Замечание: $\exists\, X = I_A$, тогда $P(A) = E(I_A) = \sum_{k: P(A_k) > 0} \underbrace{E(I_A | A_k)}_{= P(A|A_k)} p(A_k)$

Функция регрессии

$\exists\, (\Omega, \Sigma, P)$ — дискр. пр-во (Ω — не более чем счётно)

$X = X(\omega)$ $Y = Y(\omega)$: $\Omega \to \mathbb{R}$ и $\exists\, E|Y| < \infty$

$\exists\, X = x_1 x_2 x_3 \dots$, $B_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\}$ $\exists\, P(B_j) > 0$

— разбиение Ω $p_{x_j} = p(B_j)$

Опр

$$m(x) = m_{Y|X}(x) = \begin{cases} E(Y \mid \{\omega : X(\omega) = x\}) & p(X = x) \neq 0 \\ 0 & p(X = x) = 0 \end{cases}$$

т.е.

$m(x_j) = E(Y, B_j) = \frac{1}{p(B_j)} \sum_{\omega \in B_j} Y(\omega)\, p(\omega)$ $B_j = X^{-1}(x_j)$

$m(x) = 0$ при $x \in \{x_1, \dots\}$

Тогда m — регрессия Y на X

Утв 1. Рассмотрим ф-ю от сл. вел. X:

$m(X)$: $m(x_1), m(x_2) \dots$

с распред. $p(m(X) = m(x_i)) = P(X = x_i)$ $i = 1, 2, \dots$

тогда $m(X) = \sum m(x_i)\, I_{X = x_i}$, $E(m(X)) = EY$

$E(m(X)) = \sum_i m(x_i)\, P(X = x_i) = \sum_i E(Y | X = x_i)\, P(X = x_i) \underset{\text{ф.п.м.о}}{=} EY$

Утв 2 $\exists\, X$ и Y — незав., $|EX| < \infty$, тогда $m(x_i) = EY$ $\forall x_i : P(X = x_i) \neq 0$

$\triangleleft$

$A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega : Y(\omega) = y_j\}$

$P(A_i) \neq 0$ $\{A_i\}, \{B_j\}$ — разб. Ω

$\Rightarrow A_i = A_i \Omega = \sum_j A_i B_j \Rightarrow m(x_i) = \frac{1}{p(X = x_i)} \sum_{\omega \in A_i} Y(\omega)\, p(\omega) =$

$$= \frac{1}{p_{x_i}} \sum_j \sum_{w \in A_j B_j} Y(w)\, p(w) = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_j y_j\, \overset{= p_{ij}}{p(A_j B_j)} \overset{\text{нез}}{=} \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} \sum y_j p_{y_j} = $$
$$= EY$$

$\triangledown$

Пример /г сл. тождество Вальда/

$\exists\ Y = \sum_{k=1}^{X} \xi_k$, X не зав. от (независ.) $\xi_1\ \xi_2 \dots \exists\ E\xi_i = m$, $\exists\ EX$

Тогда $\quad EX = m\,EX$

$\triangle \quad EY \overset{\text{ФПМО}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E(Y,\ X=n) \qquad E(Y/X=n) = \sum_{w:\, X(w)=n} Y(w) p(w)$

$$= \sum_{w:\, X(w)=n} \left(\sum \xi_k(w) p(w)\right) p(w) = \sum \sum \xi_k p(w) =$$

$$= \sum^{n} E(\xi_k,\ X=n) = E(\xi_k / X=n) \cdot p(X=n)$$

$$= m \sum p(X=n) = nm\, p(X=n)$$

$$\Rightarrow EY = m \sum n\, p(X=n) = m\,EX$$

4.12.2015

Обобщение формулы $\quad EY = E(m_{Y|X}(X)) = E(m(X))$

Напоминание $\quad EY \overset{\text{ФПМО}}{=} \sum_k E(Y/A_k)\, p(A_k), \quad A_k = \{w : X(w) = x_k\}$

$$\Rightarrow EY = \sum_k \underbrace{E(Y/X=x_k)}_{= m_{Y|X}(x_k)} p_{x_k} = E(m(X))$$

$T = \{A_k\}_k$ - разб Ω

$$\boxed{E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(w))\, P(dw) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dF_X(x)}$$

$g = g(x)$ - изм по Борелю.

Утв $\quad E(g(X) \cdot Y) = E(g(X)\, m(X))$

$$\triangle \quad E(g(X) \cdot Y / X = x_k) \equiv \frac{1}{p(X=x_k)} \sum_{\substack{w \in A_k \\ = \{w :\, X(w) = x_k\}}} g(X(w))\, Y(w)\, p(w) =$$

$$= \frac{g(x_k)}{p(X=x_k)} E(Y, A_k) = g(x_k)\, E(Y / X = x_k)$$

$$E(g(X) \cdot Y) = \sum_k E(g(X) \cdot Y / X = x_k)\, p(X = x_k) =$$

$$= \sum_k g(x_k)\, m_{Y|X}(x_k)\, p(X = x_k) = E(g(X)\, m(X))$$

$\triangledown$

Следствие. Сл. вел. $m(X)$ имеет на σ-х $\sigma(X)$ тоже среднее, что и сл. в. Y

$\triangle$

$\exists\ g(x) = I_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}; \quad I_D(X) = \begin{cases} 1 & X(\omega) \in D \\ 0 & X(\omega) \notin D \end{cases}$

$$E(g(X)\cdot Y) = E(I_D(X)\, Y) = \sum_\omega I_D(X(\omega))\, Y(\omega)\, p(\omega) =$$
$$= \sum_{\omega: X(\omega)\in D} Y(\omega)\, p(\omega) \overset{def}{=} E(Y, X\in D) \in \sigma(X)$$

С другой стороны, $E(g(X)\cdot Y) = E(I_D(X)\, m(X)) = E(m(X), X \in D)$

Показали, что $m(x) = E(Y/X)$ обл. св-м, что:

1. изм. отн. $\sigma(X)$
2. На всех мн-в из $\sigma(X)$ есть среднее

∇

Условное матожид. относ. разбиения.

$\exists\ T - \{C_j\}_j$, $X = X(\omega)$, т.е. $X(\omega) = x_j$,

$\forall \omega \in C_j$ (x_i мб $= x_j$) $\Rightarrow X = \sum x_j I_{C_j}$

<u>Опр</u> Условным м.ож. сл.в. Y относ. разбиения T наз. <u>случ.</u> <u>величина</u>

$$E(Y|T) = \sum_j E(Y|C_j)\, I_{C_j} \qquad (*)$$

В правой части $(*)$ случайным явл. I_{C_j}, а остальное — числа, константы.

т.е. $E(Y|T)$: $E(Y|C_1), E(Y|C_2), \dots$

с вер-ю $P(E(Y|T) = E(Y|C_j)) = P(C_j)$

То есть сл. вел. заним. норм. средним.

~~Опр~~ Замечание

$T = \{C_j\}_j$ — разбиение Ω, $C_j = \{\omega : X(\omega) = x_j\} = X^{-1}(x_j)$ $i \neq j$

$$\Rightarrow E(Y|T) = \sum_j \underbrace{E(Y|C_j)}_{E(Y|X=x_j)} I_{C_j} = \sum_j m_{Y|X}(x_j)\, I_{C_j} = m(X)$$

$E(Y|T)(\omega) = \frac{1}{P(C_j)} \cdot \sum_{\omega \in C_j} Y(\omega) p(\omega)$, $\omega \in C_j$

<u>Опред:</u> Усл. МО сл.в. Y отн. сл.в. X — <u>сл.в</u>

$$E(Y|T) = \{X^{-1}(x_j)\} = m(X) \equiv E(Y|X)$$

<u>Пример</u> В урне лежат 3 монеты, 1 из них фальшивая. На фальш. — вер-ть герба $1/3$.

Сл. выбираем монету и бросаем n раз.

Y - сл. вел. — число выпавших гербов.

$\Omega = \Omega_1 \times (\Omega_2 / \Omega_1)$: Ω_1 - выбор монеты

$T = (C_1, C_2)$. C_1 - правильная, C_2 - фальш.

Построить $E(Y|T)$:

$p(C_1) = \frac{2}{3}$ $\quad p(C_2) = \frac{1}{3}$ $\quad Y|C_1 = B_{n, p=\frac{1}{2}}$

$Y|C_2 = B_{n, p=\frac{1}{3}}$

$E(Y|C_1) = np = \frac{n}{2}$

$E(Y|C_2) = np = \frac{n}{3}$ $\Rightarrow E(Y|T) = \frac{n}{2} I_{C_1} + \frac{n}{3} I_{C_2}$

$E(Y\|X)_i$	$E(Y\|C_1) = \frac{n}{2}$	$E(Y\|C_2) = \frac{n}{3}$
p_i	$2/3$	$1/3$

Пример 2 Бросается правильн. кость.

X - оста. от. дел. на 4

Y — — // — на 3

n	1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	0	1	2

$A_1 = X^{-1}(0) = \{\omega = 4\}$ $\quad p(A_1) = \frac{1}{6} = p(A_4)$

$A_2 = X^{-1}(1) = \{\omega = 1, \omega = 5\}$ $\quad p(A_2) = p(A_3) = \frac{2}{6}$

$A_3 = X^{-1}(2) = \{\omega = 2, \omega = 6\}$

KEK 1AH $\rightarrow$ $A_4 = X^{-1}(3) = \{\omega = 3\}$

$E(Y|A_1) = \frac{1}{p(A_1)} \sum_{\omega \in A_1} Y(\omega) p(\omega) = 6(1 \cdot \frac{1}{6}) = 1$

$E(Y|A_2) = 3(1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{3}{2}$

$E(Y|A_3) = \frac{1}{1/3}(2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6}) = 1$

$E(Y|A_4) = 0$

$E(Y\|X)_i$	0	1	$\frac{3}{2}$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Св-ва $E(Y|T)$

1. Линейность. $E(X+Y|T) = E(X|T) + E(Y|T)$
2. $E(kX|T) = kE(X|T)$

Δ

1. $E(X+Y|T) \overset{def}{=} \sum_i E(X+Y|C_i) I_{C_i} = \sum_i \frac{I_{C_i}}{p(C_i)} \sum_{\omega \in C_i} (X(\omega) + Y(\omega))$ $\underset{}{=} (X+Y)(\omega)$

$= E(X|T) + E(Y|T)$

2. Аналогично

∇

2. $\exists\ X = \sum_i x_i I_{C_i}$, где $T = \{C_i\}_i$ — разб. Ω (т.е. T либо $\sigma(x)$ либо меньше)

$$E(X \cdot Y | T) = X \cdot E(Y|T)$$

Δ В силу линейности

$$E(XY|T) = E((\sum_i x_i I_{C_i}) Y|T) = \sum x_i E(I_{C_i} Y|T) =$$

Пусть $E(I_{C_i} Y|T) = I_{C_i}(E(Y|T))$ ← это очевидно.

$$= \sum_i (x_i I_{C_i}) E(Y|T) = X E(Y|T)$$

11.12.2015

$\exists\ X = I_{C_i}$

$$E(XY|T) = E(I_{C_i} Y|T) \overset{def}{=} \sum_j E(I_{C_i} Y | C_j) I_{C_j} =$$

$$= \sum_j \frac{I_{C_j}}{P(C_j)} \sum_{\omega \in C_j} I_{C_i}(\omega) Y(\omega) = \frac{I_{C_i}}{P(C_i)} \cdot \sum_{\omega \in C_i} Y(\omega) \ldots = \ldots$$

$$= E(I_{C_i} Y|T) = I_{C_i} E(Y|C_i) = I_{C_i} \sum_j I_{C_j} E(Y|C_j) = I_{C_i} E(Y|T)$$

∇

Упр: $E(X|X) = E(X | \{X^{-1}(x_i)\}_i) = \sum_i E(X|X = x_i) I_{X=x_i} =$

$$= \sum_i \frac{I_{X=x_i}}{P(X=x_i)} \sum_{\omega: X(\omega)=x_i} X(\omega) p(\omega) = \sum_i x_i I_{X=x_i} = X$$

3. Свойство: X и Y независимы

$$E(Y|X) = EY$$

$P(Y|X = EY) = 1$, $Y|X$ — вырожд. случ. величина

Δ $E(Y|X = x_i) = m(x_i) \overset{незав}{=} EY \Rightarrow E(Y|X) = \sum_i m(x_i) I_{X=x_i} =$

$$= EY \sum_i I_{X=x_i} = EY$$

4. Заметим, что среднее Y и $E(Y|T)$ совпадают на алгебре $A(T)$

Дисперсия.

Опред $DX = E(X - EX)^2$, если EX — сущ. и DX конечно

это второй центральный момент.

$\sigma(X) = \sqrt{DX}$ — характеризует разброс

80% значений попадают в $[EX - 3\sigma, EX + 3\sigma]$

Свойства дисперсии:

1. $\mathcal{D}X = E(X^2) - (EX)^2$
2. $\mathcal{D}(aX) = E(aX - E(aX))^2 = E(a^2(X-EX)^2) = a^2\mathcal{D}X$
3. Инвариантность относительно сдвига
$\mathcal{D}(X-a) = \mathcal{D}X$ $\quad \triangle\ \mathcal{D}(X-a) = E(X-a-E(X-a))^2 = E(X-EX)^2\ \triangleright$
4. Равенство Бьенэйме.
$X_1 \dots X_n$ – независ. случ. вел. $S_n = \sum\limits_{i=1}^n X_n \Rightarrow \mathcal{D}S_n = \sum\limits_{i=1}^n \mathcal{D}X_i$

$\triangle$ Лемма
$X_1 \dots X_n$ – незав. $g_1 \dots g_n$ – борел. ф-ции (т.е. $Y_1 = g_1(X_1)$,

Тогда $Y_1 \dots Y_n$ – незав. (по совок.) $Y_n = g_n(X_n)$ – сл. в.).

$\triangle$ Пусть $\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_n \in \Sigma_Б$ – любые борел. мн-ва.

$P(Y_1 \in \mathcal{D}_1 \dots Y_n \in \mathcal{D}_n) = P(g_1(X_1) \in \mathcal{D}, \dots g_n(X_n) \in \mathcal{D}_n) =$
$= P(X_1 \in g_1^{-1}(\mathcal{D}_1) \dots X_n \in g_n^{-1}(\mathcal{D}_n)) =$
$= \prod\limits_{i=1}^n P(X_i \in g^{-1}(\mathcal{D}_i)) = \prod\limits_{i=1}^n P(Y_i \in \mathcal{D}_n)$

$\triangleright$

$\mathcal{D}(S_n) \overset{инв.}{=} \mathcal{D}(S_n - ES_n) = \mathcal{D}\left(\sum\limits_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right) =$
по лемме $\{Y_i\}$ – незав. $= \mathcal{D}\left(\sum\limits^n Y_i\right)$

$E(Y_i \cdot Y_j) \overset{i\neq j}{=} EY_i \cdot EY_j$, $EY_i = 0$, $E\sum\limits_{i=1}^n Y_i = 0$

$= E\left(\sum\limits_{i=1}^n Y_i\right)^2 = \sum E(Y_i^2) + \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n E(Y_iY_j) = \sum\limits_{i=1}^n \mathcal{D}X_i$

$E(Y_i^2) = \mathcal{D}Y_i = \mathcal{D}X_i$; незав: $E(Y_iY_j) = 0$

$\triangleright$

5. $\mathcal{D}(X+Y) = E(X+Y-EX-EY)^2 = \mathcal{D}X + \mathcal{D}Y + 2E[(X-EX)(Y-EY)]$

Опред. $E[(X-EX)(Y-EY)]$ def ковариация X и Y (ков-й момент)
2й центральный ковариационный момент.

Св-ва $K(X,Y)$
1. $K(X,Y) = K(Y,X) = E(XY) - EX \cdot EY$
2. $K(X,X) = \mathcal{D}X$
3. $K(X,Y) = 0$ если X и Y незав.

6. $\mathcal{D}X \geq 0$ и $\mathcal{D}X = 0 \Leftrightarrow P(X = EX) = 1$
в дискретном случае очев. В непр. сложно.

Примеры $\mathcal{D}$:

1. $X = \delta_a \Leftrightarrow \mathcal{D}(X) = 0$
2. $X \sim B_{1,p}$: $X = 0, 1$, $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p \in (0,1)$

X_i	0	1
p_i	$1-p$	p

$EX = p \quad EX^2 = p \Rightarrow \mathcal{D}X = p - p^2 = pq$

3. $X \sim B_{np}$ $X = 0, \dots, n$ $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \Rightarrow$
$\mathcal{D}X = npq$ по Бьенэйме.

Опр Усл. дисперсия сл. в. Y при $X = x_i$ def число

$$D(Y|X=x_i) = E[(Y-E(Y|X=x_i))^2 | X=x_i] \overset{def}{=}$$

$$= \frac{1}{P(X=x_i)} \sum_{\omega : X(\omega)=x_i} (Y(\omega) - m(X(\omega)))^2 p(\omega) - m(x_i)$$

$$= E[(Y-m(x))^2 | X=x]$$

Опр Усл. дисперсия Y относ. X def сл. величина

$$D(Y|X) = \sum D(Y|X=x_i) I_{X=x_i} =$$

$$= \sum_i E[(Y-m(x)) | X=x_i] I_{X=x_i}$$

$$= E[(Y-m(x))^2 | X]$$

18.12.2015

Условная дисперсия.

1) Усл. д. Y при усл. $X=x$ def число

$$D(Y|X=x_i) = E((Y-E(Y|X=x_i))^2|X=x_i) =$$

$$= E((Y-m(x))^2|X=x_i)$$

$$= E(Y|X)$$

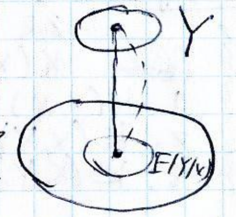
2) Усл. д. Y относ. X def сл. величина

$$D(Y|X) = E((Y-\underbrace{E(Y|X)}_{=m(x)})^2|X) = \sum_i D(Y|X=x_i) I_{X=x_i}$$

Лемма Теорема о разложении дисперсии кратко

$$D(Y) = D(E(Y|X)) + E(D(Y|X))$$

△



$$E(m(X)) = E(E(Y|X)) = EY$$

$$DY = E(Y-EY)^2 = E(Y-m(X)+m(X)-EY)^2 =$$

$$= \underbrace{D(m(X))}_{= D(E(Y|X))} + E(Y-mX)^2 - 2E(Y-m(x))(\mathring{m}(x)) \qquad L = \{g(x)\}$$

$$\mathring{m}(x) = m(x) - E(m(x))$$

Рассмотрим слагаемые.

1) $E(Y-m(x))^2 = E(\underbrace{E[(Y-m(X))^2|X]}_{D(Y|X)}) = E(D(Y|X))$

2) $E(Y-m(x))(\mathring{m}(x)) = E(Y \cdot \mathring{m}(x)) - E(m(X)\mathring{m}(X)) = 0$

Обобщение формулы

$$E(Y) = E(E(Y|X)) \Rightarrow E(\mathring{m}(X) \cdot Y) = E(\mathring{m}(X) m(X))$$

▽

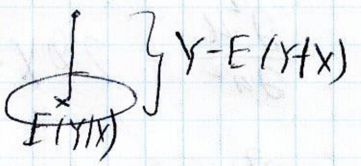
Условное мат. ожид. как решение экстрем. задачи

∃ X и Y — сл.в., $g=g(X)$ — ∀ борел. ф-я (т.е. $g(X)$ — сл.в.)

тогда $\inf\limits_{g\in G_Б} E(Y-g(X))^2 = E(Y-E(Y|X))^2 = E(D(Y|X))$

с помощью g-ва т.о. $\leq DY$

т.е. $\text{пр}_{\{g(X),\, g\in G_Б\}} Y = E(Y|X)$



▷ $E(Y-g(X))^2 = E(Y-m(X)+m(X)-g(X))^2 =$

$= E(Y-m(X))^2 + \underset{\geq 0}{E(m(X)-g(X))^2} + 2\underset{=0}{E[(Y-m(X))(m(X)-g(X))]}$

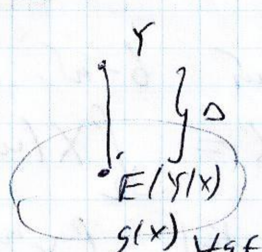
$\geq E(Y-E(Y|X))^2$ (см. g-во проекц. теоремы)

при $E(m(X)-g(X))=0$ достигается равенство

$0 \leq D(m(X)-g(X)) \leq E(m(X)-g(X))^2 = 0$

$\Rightarrow P(g(X)=m(X))=1.$

$\inf\limits_{g\in G_Б} E(Y-g(X))^2 = E(D(Y|X))$
Δ^2



◁ Для экстрем. задачи

$\inf\limits_{g\in G_Б} E(Y-g(X))^2$ функция $g=g(x)$ по котор. дост. экстрем. если $m_{Y|X}(x)$ — регрессия Y на X

Опр Линейная регрессия

Определение $g^*=g^*(x)$ def линейной регрессией Y на X def ф-я на кот. достигается экстр. в след. задачи

$$\inf_{\substack{g(x)=ax+b\\ \forall a,b\in\mathbb{R}}} E(Y-g(X))^2 = E(Y-g^*(X))^2$$

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} E(Y-(aX+b))^2 = E(Y-g^*(X))^2$$

Утв $a^* = r(X,Y)\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \dfrac{K(X,Y)}{DX}$

$b^* = EY - a^*EX.$

▷ $H(a,b) = E(Y-(aX+b))^2 = E(Y-EY-a(X-EX)+\underbrace{EY-aEX-b}_{c(a,b)})^2 =$

$= DY + a^2DX - 2aK(X,Y) + \underset{E(Y-EY)c(a,b)}{0} + c^2(a,b)$

Перепишем: $K(a,b) = \mathcal{D}(Y) + a^2 \mathcal{D}X - 2aK(X,Y) + (EY - aEX - b)^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial a} = 2a\mathcal{D}X - 2K(X,Y) + 2c(a,b)\cdot(-a) = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial b} = 2c(a,b)(-1) = 0 \end{cases}$$

Стацион. точка $\left[\begin{array}{l} \hat{a} = \frac{K(X,Y)}{\mathcal{D}X} \\ \hat{b} = EY - \hat{a}EX \end{array}\right.$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a^2} = 2\mathcal{D}X - 2EX(-EX) = 2\mathcal{D}X + 2(EX)^2$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a \partial b} = -2(-EX) = 2EX$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial b^2} = (-2)(-1) = 2$$

Критерий Сильвестра

$A > 0 \quad \Delta = \left|\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}\right| > 0$

$\Delta = 4\mathcal{D}X + 4(EX)^2 - 4(EX)^2 = 4\mathcal{D}X > 0$

$$g(x) = EY + \frac{K(X,Y)}{\mathcal{D}X}(X - EX)$$

$$h(y) = EX + \frac{K(X,Y)}{\mathcal{D}Y}(Y - EY)$$

$\triangledown$

Общие в-пр. Моменты и их св-ва

$EX = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_X(x)$, $\exists$ сх. абс.

$E(X^k) = \int_\Omega X^k(\omega)\, p(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x) \quad E|X|^k = \int |X(\omega)|\, p\, d\omega$

Смешанные моменты

$K(X,Y) = E(Y - EY)(X - EX)$ $\quad K = \begin{pmatrix} \mathcal{D}X & K(X,Y) \\ K(X,Y) & \mathcal{D}Y \end{pmatrix}$

$r(X,Y) = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Матрица ковар.

$R = \begin{pmatrix} 1 & r(X,Y) \\ r(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$

Матрица коррел.

25.12.2015

Ковариация и её свойства

$K(X,Y) \equiv E[(X - EX)(Y - EY)]$

Количеств. хар-ка взаимозав. сл. вел. / если $K \neq 0 \Rightarrow X$ и Y зави

1. $K(X,Y) = E(X\cdot Y) - EX \cdot EY$
2. Если X и Y незав., то $E(X\cdot Y) = EX\cdot EY \Rightarrow K(X,Y) = 0$
3. По опр. $K(X,Y) = K(Y,X)$ билинейность
4. $K(aX + b, Y) = aK(X,Y)$. (инвар. отн. сдвига)

   $\Delta = E[(ax + b - E(ax+b))(Y - EY)] = aK(X,Y)$ $\triangledown$
5. $\mathcal{D}(X+Y) = \mathcal{D}X + \mathcal{D}Y + 2K(X,Y)$

Коэф. корреляции и его свойства

$$r(X, Y) \equiv \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$ — Количественная хар-ка зависим.

$\exists X, EX, DX, \sigma^2(X) = DX \qquad \exists Y, EY, DY, \sigma^2(Y) = DY$

$\exists \ \overset{\circ}{X} = \dfrac{X-EX}{\sigma(X)}, \quad \overset{\circ}{Y} = \dfrac{Y-EY}{\sigma(Y)}$ — центр. величина

Заметим, что $E\overset{\circ}{X} = E\overset{\circ}{Y} = 0 \quad D\overset{\circ}{X} = D\overset{\circ}{Y} = 1$

$$K(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}) = E\frac{(X-EX)(Y-EY)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = r(X,Y)$$

1. $|r(X,Y)| \le 1.$

$\triangle \quad 0 \le D(\overset{\circ}{X} \pm \overset{\circ}{Y}) = 1 + 1 \pm 2K(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}) = 2 \pm 2r(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}) \Rightarrow -1 \le r(X,Y) \le 1$

$\triangledown$

2. X и Y незав $\Rightarrow r(X,Y) = 0$
3. $|r(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow aX + b = Y, \ ar > 0$ ← и эта завис. это лин регрессия.

$\triangle$

а. $\exists \ r(X,Y) = 1 \Rightarrow$ из д-ва св. 1 $D(\overset{\circ}{X} - \overset{\circ}{Y}) = 0$
т.е. $P(\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{Y}) = 1$

$$\overset{\circ}{Y} = \frac{Y-EY}{\sigma(Y)} = \frac{X-EX}{\sigma(X)} \quad \text{или} \quad Y = EY + \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - EX)$$

$$a = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} > 0$$

$$\Rightarrow ar > 0, \quad a = r(X,Y)\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} = \frac{K(X,Y)}{D(X)}$$

б. $\exists \ r(X,Y) = -1$, тогда $\dfrac{Y-EY}{\sigma(Y)} = -\dfrac{X-EX}{\sigma(X)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y = EY - \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(X - EX)$$

$$a = -\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} < 0, \quad ar > 0$$

в. Обратно $\exists \ Y = aX + b, \ EY = aEX + b,$
$DY = a^2 DX$

$$r(X, \overset{=Y}{aX+b}) = \frac{E(X-EX)\cdot(aX + b - aEX - b)}{\sigma(X)|a|\sigma(X)} =$$

$$= \frac{a\,DX}{DX\,|a|} = \operatorname{sign}(a)$$

$\triangledown$

Если $r < 0$, то X, Y — отриц. коррел.
$r > 0$ — полож. коррелированы
$|r| < 0{,}5$ — слабо коррел.

Иногда можно считать, что X, Y незав, если $r \approx 0$

Некоторые абсолютно непрерывные распр.

1. $X \sim U(a, b)$

$Y, E_Y, \; F_{F^{-1}(X)}(y) = F_Y(y), \; \tilde{X} \sim U(0,1)$

2. $X \sim Exp_\lambda, \; \lambda > 0$

3. Нормальный (моменты не изучены)

Основные моменты

1. Непр. равном.

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & t \notin (a,b) \end{cases}$$ — не опр при $\forall^{t=b}_{t=a}$

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{dx}{b-a}; & x \in (a,b) \\ 0 & x \leq a \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$EX = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2 \big|_a^b}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$DX = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. $X \sim Exp_\lambda \quad \lambda > 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$EX = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda};$$

с замена $\lambda x = y$

$$E(X^2) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} = \lambda \int_0^\infty \frac{y^2}{\lambda^2} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. $X \sim N(a, \sigma^2) \qquad Y = \frac{X-a}{\sigma}$ — упр $Y \sim N(0,1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$