$$\bar a \bar b = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = |a||b|\cos(\hat{ab}) = (a_1 \cdots a_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_3\end{pmatrix}$$

$$\bar a \bar b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}(b_1 \cdots b_3) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_3 \\ \dots & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(\bar a, \bar b, \bar c) = \bar a(\bar b \times \bar c) = (\bar b, \bar c, \bar a) = (\bar c, \bar a, \bar b)$$

$= - \cdots$ (обр / не цикл сдвиг)

$|(\bar a, \bar b, \bar c)| = W_{\bar a \bar b \bar c} \leftarrow$ объем

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$I = \mathrm{Real}$

$Vec = (I, I, I)$

$Scal = (I)$

$Field\ a = Vec \to a$

$\nabla \cdot FieldScal \to FieldVec$

$grad = \nabla$

$((\cdot)\nabla) \cdot FieldVec \to FieldScal$

$div\,\vec a = \nabla \cdot \vec a$

$((\times)\nabla) \cdot FieldVec \to FieldVec$

$rot\,\vec a = \nabla \times \vec a$

Поле вект. $\to \vec a(\vec r) = a_1(r_x, r_y, r_z)\bar e_1 + a_2 \bar e_2 + a_3 \bar e_3$

скал $\to \varphi(\vec r) = \varphi(r_x, r_y, r_z)$

$$\nabla \varphi = grad\,\varphi = e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec a = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = div\,\vec a$$

$$\nabla \times \vec a = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = rot\,\vec a$$

$$\nabla \vec a = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}(a_1\ a_2\ a_3) = J^T$$

Транспон Якоби

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{13} \\ & T_{33} \end{pmatrix}; \quad \nabla \overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = Div\,\overleftrightarrow{T}$$

Преобр. и равенства:

$$\nabla \cdot (\varphi \vec a) = \nabla \varphi\, a + \varphi(\nabla \cdot \vec a)$$

$$\nabla \times (\varphi \vec a) = \nabla \varphi \times \vec a + \varphi(\nabla \times \vec a)$$

$$\nabla(\bar a \cdot \bar b) = (\bar a\ \nabla)\bar b + (\bar b\ \nabla)\bar a + \bar a \times (\nabla \times \bar b) + \bar b \times (\nabla \times \bar a)$$

$$\nabla(\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec a) = \nabla^2 \vec a + \nabla \times (\nabla \times \vec a)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla (\nabla \times \vec a) = 0$$

1. Описание движ. сплошн. среды по Лагр. и Эйлеру. Линии тока и траектории.

• $\boxed{\nearrow}$ Лагранж: параметризация

выделенный объем $\qquad \vec r_{\vec c}(t) = \vec r(\vec c, t) = \vec r(\vec\xi, t)$

$\vec c$ — непрерывна $\qquad \vec\xi = \vec r\,|_{t=0}$

ξ — характеризация маленького объема

Материальн. точка

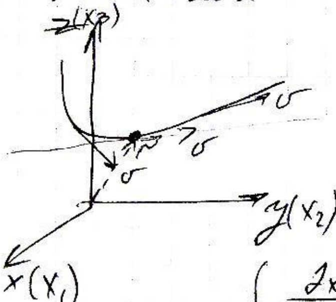
Примеры: $\rho(\vec\xi,t)$, $T(\vec\xi,t)$, $v(\vec\xi,t)$, $q(\vec\xi,t)$

• Эйлерова параметризация

Просто вектор.

геом. точка $\qquad \vec v(\vec r,t)$, $\rho(\vec r,t)$, $T(\vec r,t)$

• Пусть $\vec v(\vec r,t)$ — векторное поле, тогда линия тока — такая линия, что касательная в каждой ее точке совп. с локальным вектором скорости.



$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial s} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \vec r}{\partial s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec r(s+\Delta s)-\vec r(s)}{\Delta s} = \vec\tau$$

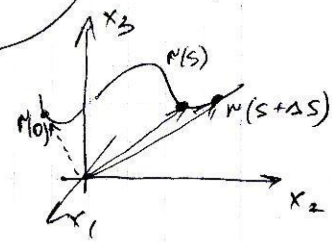
$$\vec\tau \parallel \vec v,\quad \vec\tau\times\vec v = 0,\quad \frac{\partial \vec r}{\partial s}\times\vec v = 0$$

отсюда

Преобразуем в систему:

$$ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}$$
$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial s}v_3 - \frac{\partial x_3}{\partial s}v_2 = 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial s}v_3 - \frac{\partial x_3}{\partial s}v_1 = 0 \\ \text{— // —} \end{cases} \Rightarrow$$



* пусть мы тока решили систему *

$$\Rightarrow \frac{\partial x_1}{v_1} = \frac{\partial x_2}{v_2} = \frac{\partial x_3}{v_3} = \{\text{обозначим}\} = d\tau \quad \left(\text{типа } \frac{\text{расст.}}{\text{скорость}}\right)$$

Отсюда

Ур-е линий тока

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial x_3}{\partial \tau} = v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad t \text{ заморожено}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = v_1(\cdot\cdot;t) \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2(\cdot\cdot,t) \\ \frac{dx_3}{dt} = v_3(\cdot\cdot,t) \end{cases}$$

Ур-е траектории (точка проходит сквозь простр-во, ее путь)

2. Субстанцион. производная, представление в форме Лэмба.

Если хотим выразить представление Лагр. через Эйлера и наоборот.

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \rightarrow$ пр-я по x, где y const. $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}}$ - Лагранжева пр-я

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$ - Эйлерова.

Имеем $\varphi(\vec{\xi}, t)$ в форме Лагр. и $\varphi(\vec{r}, t)$ в форме Эйлера.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi[\vec{r}(\vec{\xi}, t), t] = \varphi[x_1(\xi_1 \xi_2 \xi_3 t), x_2(\cdot), x_3(\cdot)]$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_{x_2 x_3 t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} +$$

$$+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)_{x_1 x_3 t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)_{\xi_1 \xi_2 \xi_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla \varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\varphi$$

Итого имеем.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \nabla)\varphi$$

Конвективная произв-я; Нестацион. произв-я; Субстанциональная произв-я

Для векторного поля $\vec{v}$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}, \text{ но } \nabla(\vec{v}^2) = 2[(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

Отсюда

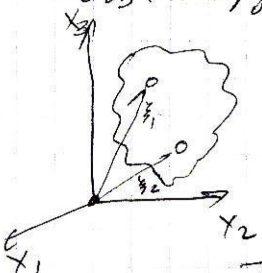
$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

(по опр. $\nabla(a \cdot b)$)
($a \times b = -b \times a$)

И итого в форме Лэмба:

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{\xi}} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

3. Разложение движения сплошной среды на квазитвёрдое и деформационное. Т. Гельмгольца.



$r_1 = \vec{r}(\xi_1, t)$

$r_2 = \vec{r}(\xi_2, t)$

Твердое тело, значит $|r_2 - r_1| = const(t)$

$|r(\xi_2,t) - r(\xi_1,t)| = const$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r}_0, t) + \vec{\omega}(t) \times (r - r_0)$$

r_0 – полюс

$\vec{v}(\vec{r}_0, t)$ – поступательное движ. вместе с полюсом.

$\vec{\omega}(t)$ – мгновенная угловая скорость

$\vec{\omega}(t) \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$ – вращение относ. полюса

Последняя ф-ла экв. системе:

$$\begin{cases} v_1 = v_1^0 + \omega_2(x_3 - x_3^0) - \omega_3(x_2 - x_2^0) \\ v_2 = v_2^0 + \omega_3(x_1 - x_1^0) - \omega_1(x_3 - x_3^0) \\ v_3 = v_3^0 + \omega_1(x_2 - x_2^0) - \omega_2(x_1 - x_1^0) \end{cases}$$
в покоординатной форме

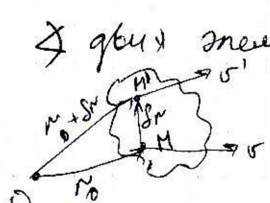
Эти ур-е выражают $v(x_1, x_2, x_3)$; Найдем ω, зная v. Для этого вычислим $(\nabla \times \vec{v})$, воспольз. системой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} = \omega_1 - (-\omega_1) = 2\omega_1 \\ -\,//\,- \end{cases} \Rightarrow (\nabla \times \vec{v})_i = 2\omega_i$$

Откуда $\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$

Если рассм. деформ. среду (не тв. тело), то формулы выше верны лишь локально бесконечно близко к любой точке.

∡ движ. элемент. объема жидкости, M, M' произв.



$\delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

$\delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v} = \left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} \partial \vec{r}\right)$

произв. по вектору

$$v(\bar{r} + d\bar{r})_i = v_i(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$$

$$v_i(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2,\ x_3+dx_3) = v_i(x_1 x_2 x_3) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\right)_{x_1x_2x_3} dx_1 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_2}\right)_{x_1x_2x_3} dx_2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_3}\right)_{x_1x_2x_3} dx_3.$$

Откуда $v(\vec r+d\vec r) = v(r) + (\nabla v)^T d\vec r$

Напомним, что

$$(\nabla \vec v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} (v_1\ v_2\ v_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Тогда $\vec v(\vec r + d\vec r) = \vec v(\vec r) + (\nabla \vec v)^T d\vec r =$

$$= \vec v(\vec r) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\nabla \vec v)^T + (\nabla \vec v)\right]}_{\overleftrightarrow{S}} d\vec r + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\nabla \vec v)^T - (\nabla \vec v)\right]}_{\overleftrightarrow{R}} d\vec r$$

завихренности деформации

$$\overleftrightarrow{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dots S \dots \\ \cdot & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

S и R - тензоры (если $\vec a = A\vec b$, то A - тензор)

$\operatorname{rot} \vec V = 2\vec\omega$, а $\overleftrightarrow{R} d\vec r = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -\omega_3 dx_2 + \omega_2 dx_3 \\ \omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3 \\ -\omega_2 dx_1 + \omega_1 dx_2 \end{pmatrix} = \vec\omega \times d\vec r = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec v) d\vec r$$

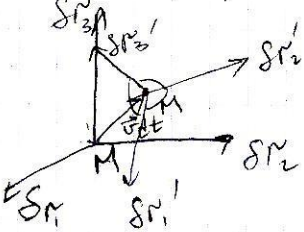
И итого имеем

$$v(\vec r + d\vec r) = \underbrace{v(\vec r) + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec v) dr}_{\text{Квазитвердое}} + \underbrace{\overleftrightarrow{S} d\vec r}_{\text{Деформац.}}$$

Такое разложение и есть т. Гельмгольца

4. Дифференц. движение сплошной среды. Тензор скоростей деформации, физ. смысл его компонент

Введем в точке M систему прямоуг. дек. коорд. Рассмотрим отрезки



$\delta r_1\,(\delta x_1, 0, 0)$
$\delta r_2\,(0, \delta x_2, 0)$
$\delta r_3\,(0, 0, \delta x_3)$

Новые координаты.

$$\delta r_i' = \delta r_i + S\delta r_i\, dt$$

$$\delta x_i' = \delta x_i + (S\delta r_i)_i\, dt =$$

$$= \delta x_i + S_{ij}(\delta r_i)_j\, dt = \delta x_i + S_{ii}\,\delta x_i\, dt$$

(т.к. при $i \neq j$ $(\delta r_i)_j = 0$)

Относит. удлинения этих отрезков есть

$$\varepsilon_i = \frac{\delta x_i' - \delta x_i}{\delta x_i} = S_{ii}\,dt, \text{ таким образом } S_{ii} = \frac{\varepsilon_i}{dt} = \dot\varepsilon_i$$

диаг. элементы — скорости отн. удлинений коорд. отрезков.

Обозначим новые углы:

$$\widehat{\delta r_1' \delta r_2'} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12};\quad \widehat{\delta r_2', \delta r_3'} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{23};\quad -//- \ \gamma_{13}$$

$$\begin{cases} \cos(\delta r_1', \delta r_2') = \dfrac{\delta r_1'}{\delta x_1'} \cdot \dfrac{\delta r_2'}{\delta x_2'} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma_{12}\right) = \sin\gamma_{12} \approx \gamma_{12} \\ -//- \\ -//- \end{cases}$$

по опр. скал. произв.

Подставим $\delta x_i' = \delta x_i + S_{ii}\,\delta x_i\, dt$, отметив что $\delta r_1 \delta r_2 = 0$

$$\gamma_{12} = \frac{\delta r_1'}{\delta x_1'} \cdot \frac{\delta r_2'}{\delta x_2'} = \frac{\delta r_1 + (S\delta r_1)dt}{\delta x_1 + S_{11}\delta x_1 dt} \cdot \frac{\delta r_2 + (S\delta r_2)dt}{\delta x_2 + S_{22}\delta x_2 dt} =$$

$$= \frac{(S\delta r_1)\cdot\delta r_2\, dt + (S\delta r_2)\,\delta r_1\, dt + \dots}{\delta x_1 \delta x_2 + \dots} \approx 2S_{12}\frac{\delta x_1 \delta x_2\, dt}{\delta x_1 \delta x_2} =$$

$$= 2S_{12}\, dt$$

тут надо перемножить $S\delta r_1 \delta r_2$

Аналогично находим

$$\gamma_{23} = 2S_{23}\,dt, \quad \gamma_{13} = 2S_{13}\,dt$$

То есть недиагональные эл-ты – скорости скашивания углов.

Рассмотрим еще скорость относительного объемного расширения среды.

$$\theta = \frac{\delta\tau' - \delta\tau}{\delta\tau\, dt} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{d}{dt}(\delta\tau)$$

Это относит. приращение элементарного жидкого объема к первонач. объему х времени деформации dt.

$\exists\ \delta\tau = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$, тогда $\delta\tau' = \delta x_1' \delta x_2' \delta x_3' =$

$$= (1+\dot{\varepsilon}_1 dt)\delta x_1 \cdot (1+\dot{\varepsilon}_2 dt)\delta x_2 \cdot (1+\dot{\varepsilon}_3 dt)\delta x_3$$

Откуда $\theta = \dfrac{(\cancel{1}+\dot{\varepsilon}_1 dt)(\cancel{1}+\dot{\varepsilon}_2 dt)(\cancel{1}+\dot{\varepsilon}_3 dt)}{dt}$

$$\theta = \frac{1}{\delta\tau}\left(\lim_{dt\to 0} \frac{\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 - \dots}{dt}\right) = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 =$$

$$= S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div}\vec{v}$$

Диверг. $\vec{v}$ имеет смысл скорости отн. изменения элемент. объема жидкости

Ур-е несжимаемости: $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

5. Приведение тензора скоростей деформации к главным осям

Хотим получить такой S', что $S' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Стандартно, ищем $\vec{x}$, что $\overset{\leftrightarrow}{A}\vec{x} = \lambda \vec{x}$

$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3}$ получаем характер. многочлен $= б$;

Ну и все более-менее.

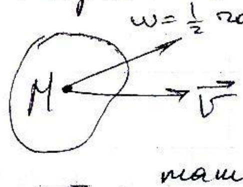
Это поможет избавиться от деформационного сдвига.

тут можно пример <u>Жордан</u>

6. Вихревое движение сплошной среды. Сохранение вихревых линий

Вихревое движ. — движение, сопровождаемое вращением отдельных ее (жидкости) эл-тов
Вихрь — вращ. объем.

Каждая точка среды — $(\vec v, \vec\omega)$. Им соотв. разные векторные линии:



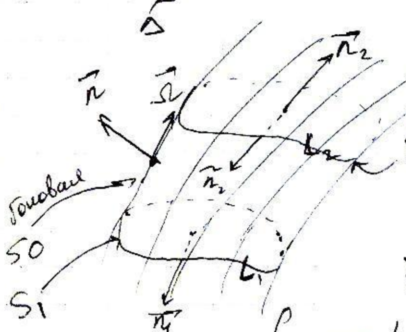
$\vec v \leftarrow$ линия тока

$\vec\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec v \leftarrow$ вихревые линии, такие, что кас. в кажд. точке совпадает с $\vec\omega$ (или с $\mathrm{rot}\,\vec v$)

Вихр. пов-ть — через замкнутый контур C вихр. линии.
Ограниченное вихревой пов-ю объем — вихревая трубка.

Вторая т. Гельмгольца. поток вихря скорости $\mathrm{rot}\,\vec v$ сквозь любое поперечное сечение трубки одинаков вдоль всей трубки

$$\int_S (\vec\Omega\cdot\vec n)\,dS = const$$



Заметим, что $\int_S (\vec n\,\vec\Omega)\,ds \overset{\text{по т. Гаусса}}{=} \int_W (\nabla\cdot\vec\Omega)\,dW = \int_W \nabla\cdot(\nabla\times\vec v) = 0$ $\{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec v \equiv 0\}$

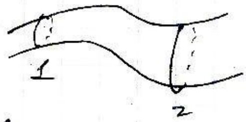
$$\int_{S_1} \vec n\,\vec\Omega\,dS_1 + \int_{S_2} + \int_{S_0} = 0$$

$S_0 \leftarrow$ этот $= 0$ $\vec n \perp \vec\Omega$ на боковой ~~части~~ части

$$\int_{S_1} \vec n_1\,\vec\Omega\,dS_1 = \int_{S_2} \vec n_2'\,\vec\Omega\,dS_2$$ взяли $\vec n_2' = -\vec n_2$

Откуда по т. Стокса: $\int_{S_1} = \int_{S_2} = \oint_{L_1} \vec v\,\vec\tau_1\,dl_1 = \oint_{L_2} \vec v\,\vec\tau_2\,dl_2 = \Gamma$

Из этого делаем вывод:



$$\cancel{\Omega_1}^{2\omega_1} S_1 \sim \cancel{\Omega_2}^{2\omega_2} S_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \sim \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

Это когда вода закручивается в воронке.

7. Скалярный и вект. потенциал

Напомним, что несжим. среда — $\nabla\cdot\vec v = 0$

$\nabla\cdot\vec v = 0 \iff \vec v = \nabla\times\vec A$, где A - векторный потенциал

известная теорема из матанализа

Тогда $\vec A'$ представимо: $\vec A' = \vec A + \underbrace{\nabla\psi}_{\text{скалярное}}$, $\vec A'$ - тоже векторный потенциал

△ $\nabla\times\vec A' = \nabla\times\vec A + \underbrace{\nabla\times(\nabla\psi)}_{0} = \nabla\times\vec A$ ▽

То есть $\vec A$ определено с точностью до градиента скал. величины.

Откалибруем $\vec A$. $\nabla\cdot\vec A' = \nabla\cdot(\vec A + \nabla\psi) = 0$

Это решение: $\nabla^2\psi = -\nabla\cdot\vec A$ (ур-е Пуассона)

Подбор ψ — 'калибровка'. Будем считать, что она совершена.

В плоском течении $\vec v(\vec r) \iff \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(\dots) \\ v_3(\dots) \end{pmatrix}$ общ. вид

Плоское если:

$$\begin{cases} v_3 = 0 \\ v_1 = const(v_3) = v_1(x, x_2) \\ v_2 = const(v_3) = v_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Для плоского $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \nabla\times\vec A = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← плоское течение.

Переобозначим

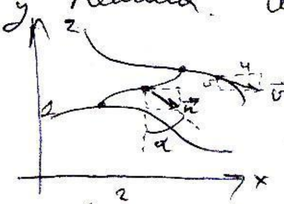
$x_1 x_2 x_3 \to x y$

$v_1 v_2 v_3 \to u(x,y),\ v(x,y)$

$A_3(x_1, x_2) \to \psi(x,y)$

— функция тока!

△ Лемма: линии тока - изолинии функции тока



$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \int_1^2 (-v\,dx + u\,dy) = \begin{Bmatrix} dx = dl\cos\alpha \\ dy = dl\sin\alpha \end{Bmatrix} =$$

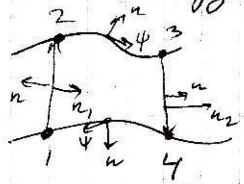
$$\cancel{= \int_1^2 (v n_y + u n_x)} = \int_1^2 (-v\cos\alpha + u\sin\alpha)\,dl = \int_1^2 (v n_y + u n_x)\,dl =$$

$$= \int_1^2 (\vec v\cdot\vec n)\,dl = 0$$, то есть

▽

Лемма: между линиями тока поток const

△



$$\oint\limits_{12341} (\vec v\cdot\vec n)\, dl = \{\text{Гаусс}\} = \int\limits_S (\nabla\cdot\vec v)\, dS = 0$$

$\nabla\cdot\vec v \to 0$ для несжим. жидкости

Итого $0 = \int_1^2 + \underbrace{\int_2^3}_{0} + \int_3^4 + \int_4^1$

Откуда $\int_1^2 \vec v \vec n_1\, ds_1 = \int_3^4 \vec v \vec n_2\, ds_2$

▽

Безвихревое течение — $\nabla\times\vec v = 0 \Leftrightarrow \exists\varphi$, что $\vec v = \nabla\varphi$ (еще одна изв. теор. из анализа)

φ определен с точностью до константы
$(\nabla(\varphi + C) = \nabla\varphi)$

$V_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, плоское течение $\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$ (φ не зав. от $x_3, \dots$)

Одновременно несжим. и безвихренность:

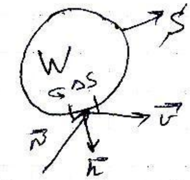
$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

Это условия К-Р

$\exists\, \zeta = \varphi + i\psi$, такая $(\zeta = \zeta(z))$ есть комплексный потенциал.

8. Закон сохр. массы. Ур-е неразрывности в формах. Ур-е несжимаемости.

• Представление Эйлера. фикс. объем W с площ. пов-ти S



$$\rho = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta W}$$ – плотность

d_E ← Euler

За время dt из участка ΔS вытечет среда, заключенная объемом $|\vec{v}|dt\, dS \cos(\vec{v},\vec{n})$

$m = \int_\tau \rho\, d\tau$

Тогда $\underbrace{d_E \int_W \rho\, dW}_{\text{полн масса}} = -\oint_S \rho |v| dt\, dS \cos(\vec{v},\vec{n})$ ← объем вытекает; Поделим на dt:

Как меняется масса среды за dt? $\left(\frac{d}{dt}\right)_E \int_W \rho\, dW = -\oint_S \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})dS$, преобр. по Гауссу

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dW = -\int_W \nabla\cdot(\rho\cdot\vec{v})\, dW \Rightarrow \int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v})\right] dW = 0$$

Тогда $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ – уравнение неразрывности в консерв. форме. При $\underset{const(t)}{\rho =}$, $\nabla\vec{v} = 0$ – ур-е несжим.

• Представление Лагранжа

Масса движется, деформ., но значение const

~~$d_L \int_W \rho\, dW = 0$, $\int_W \frac{d}{dt} \rho\, dW = 0$, {будет произв.}~~ $\frac{d\rho}{dt} dW + \rho \frac{d}{dt}(dW) = 0$

Сложно.

Возьмем $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$, распишем $\nabla(\rho\vec{v}) = \vec{v}\cdot\nabla\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{v})$

Получим $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$. $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \vec{v}\cdot\nabla\rho = 0$

Увидим: неет.↑ субстанц.↑

Ур-е неразр. в нелок. ф-ме

• Предст. Лагр 2

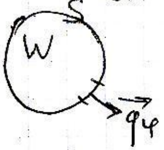
$d_L \int_W \rho\, dW = 0$; $\int_W \frac{d}{dt}\rho\, dW = 0$; $\int_W \underbrace{\frac{d\rho}{dt}dW + \rho\frac{d}{dt}(dW)}_{=0} = 0$ ($\frac{1}{dW}\frac{d}{dt}(dW)$ – скорость измен. напр. объема)

Отсюда поделим на dW: $\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{1}{dW}\frac{d}{dt}(dW) = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v})$

9. Обобщ. закон сохр в сплошной среде. Уравнение переноса адд. по массе величины в 2х формах.

Φ - адд. по массе величина, если $\forall m = m_1 + m_2$ $\Phi(m) = \Phi(m_1) + \Phi(m_2)$

$\varphi = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta m}$ — удельная величина



q_φ - вектор плотности потока Φ. Показ. какое кол-во φ проходит за dt через dS

• Примем как должное

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_E \int\limits_W \rho\varphi \, dW = \underbrace{\underbrace{-\oint\limits_S \rho\varphi(\vec{v}\cdot\vec{n})dS}_{\text{конвективный перенос/поток}} \underbrace{-\oint\limits_S \vec{q_\varphi}\cdot\vec{n}\, dS}_{\text{релаксационный перенос/поток}}}_{\text{Полный поток}} + \int\limits_W \rho Q_\varphi \, dW \quad \leftarrow \text{источник}$$

Преобразуем: (Гаусс)

$$\int\limits_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)\, dW = -\int\limits_W \nabla(\rho\varphi\vec{v})\, dW - \int\limits_W \nabla q_\varphi \, dW + \int\limits_W \rho Q_\varphi \, dW$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \nabla(\rho\varphi\vec{v}) + \nabla \vec{q_\varphi} - \rho Q_\varphi = 0$$

Это уравнение переноса величины φ/Φ в консерв. форме.

• $$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \int\limits_W \rho\varphi\, dW = -\oint\limits_S (\vec{q_\varphi}, \vec{n})\, dS + \int\limits_W \rho Q_\varphi \, dW$$

$$\int\limits_W \rho \frac{d\varphi}{dt}\, dW = -\int\limits_W \nabla\cdot\vec{q_\varphi}\, dW + \int\limits_W \rho Q_\varphi\, dW$$

$$\rho\frac{d\varphi}{dt} + \nabla\vec{q_\varphi} - \rho Q_\varphi = 0$$ — уравнение переноса в неконсерв. форме

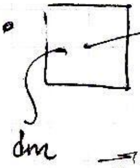
• Экв.:

$$\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi(\nabla\cdot\vec{v})\right) + \nabla\vec{q_\varphi} - \rho Q_\varphi = 0$$

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \varphi\rho(\nabla\cdot\vec{v}) + \nabla\vec{q_\varphi} - \rho Q_\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\rho)$$

10. Распред. сил в сплошной среде. Объем/поверх. силы. Вектор и тензор напряжений. Формула Коши для вектора напряжений

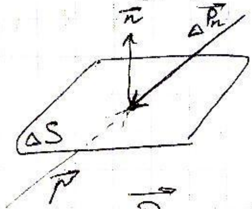
- 

$\vec{dF}$ Лагранжев объем, на него действует сила внешн. поля.

dF аддитивна по массе.

$\vec{g} = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta \vec{F}}{\delta \tau}\right)$; $[g] = \frac{м}{c^2}$ — ускорение (или $\frac{Н}{кг}$) $\vec{dF}$ — объемная сила

ρ — плотность

- 

ΔS делит среду надвое

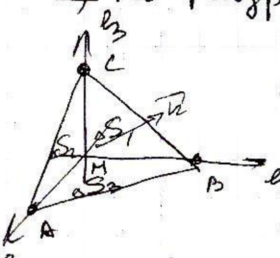
$\Delta \vec{P}_n$ — поверхностная, контактная сила аддитивна по площади.

$\vec{p}_n = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}_n}{\Delta S}$ — напряжение $[\vec{p}_n] = Па = \frac{кг \cdot м}{c^2}$ (вектор напряжения)

$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$ — это поле

$\vec{p}_n = \vec{p}_n(\vec{r}, t, \vec{n})$ — не поле, (определено не везде?) (+ в зависимости от $\vec{n}$)

- Δ тетраэдр MABC



$\Delta S_i \perp e_i$, $\Delta S_n \perp \vec{n}$

2 закон Ньютона для "жидкого" тетраэдра

$$\underbrace{\Delta m}_{масса\ тет.} \cdot \underbrace{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}}_{ускор.} = \underbrace{\vec{p}_n \Delta S_n + \vec{p}_1 \Delta S_1 - \vec{p}_2 \Delta S_2 - \vec{p}_3 \Delta S_3}_{сумма\ всех\ поверх.\ сил} \to + m\vec{f}$$ объемную

Знаки '−' стоят т.к. $|\vec{p}_i| < 0$

$\Delta m = \rho \Delta W = \frac{1}{3} \rho \Delta S_n h$ ← для тетраэдра

ρ — плотность

потому что S_1 — проекция S_n:

$$\rho \frac{1}{3} h \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{p}_n - \vec{p}_1 \frac{\Delta S_1}{\Delta S_n} - \vec{p}_2 \frac{\Delta S_2}{\Delta S_n} - \vec{p}_3 \frac{\Delta S_3}{\Delta S_n} + \frac{1}{3} h \rho \vec{f}$$

$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_n} = \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = n_1$ Устремим $h \to 0$

$\vec{p}_n = \vec{p}_1 n_1 + \vec{p}_2 n_2 + \vec{p}_3 n_3$ Напрях. на $\vec{p}_n$ однозначно задается напрях. на $\vec{p}_i$

Спроектируем на оси:

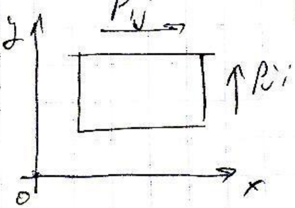
$$\begin{cases} p_{n_1} = p_{11} n_1 + p_{21} n_2 + p_{31} n_3 \\ \vdots \\ p_{n_3} = p_{13} n_1 + p_{23} n_2 + p_{33} n_3 \end{cases}$$

$\exists\ \overleftrightarrow{P} = \| p_{ij} \| = (p_1, p_2, p_3)$ Первый индекс — номер площадки, второй — куда проецируем напряж.

Итого: $\vec{p}_n = \overleftrightarrow{P} \cdot \vec{n}$ — ф-ла Коши

$\overleftrightarrow{P}$ — тензор напряжений, образующий тензорное поле. Так мы вынесли $\vec{n}$ и теперь можем описывать напряжение полем.

11. Симметрия тензора напряжений



Эта сила создает момент и вращает тело.

Покажем, что $\overleftrightarrow{P}$ - симм.

Закон сохр. момента импульса:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega}\right)}_{\text{момент импульса}} = \left\{\begin{matrix}\text{сумма}\\ \text{моментов}\\ \text{всех сил}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\vec r_n \times \underbrace{(\vec p_n \Delta S_n)}_{\text{сила}}}_{\text{момент силы}} - \vec r_1 \times (\vec p_1 \Delta S_1) - \vec r_2 \times (\vec p_2 \Delta S_2) - \vec r_3 \times (\vec p_3 \Delta S_3) + \vec r_0 \times (\vec F \Delta m)$$

$\overleftrightarrow{I}$ — тензор инерции, $\vec\omega$ — вектор угл. скорости

r_i - радиус-вектор центра масс ΔS_i

r_0 — центр масс тетраэдра

Несложно показать, что

$$\frac{d}{dt}\left(\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{\omega}\right) \sim h^5$$
$$\vec r_i \times (\vec p_i \Delta S_i) \sim h^2$$
$$\vec r_0 \times (\vec F \Delta m) \sim h^3$$

любую также

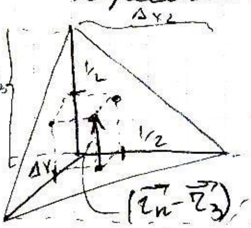
Устремим $h \to 0$, получим.

$$r_n \times (p_n \Delta S_n) = \sum_{i=1}^{3} \vec r_i \times (\vec p_i \Delta S_i)$$

Подставим формулу Коши: $\vec p_n = \sum_{i=1}^{3} \vec p_i n_i$

Получим: $\sum_{i=1}^{3} (\vec r_n - \vec r_i) \times (\vec p_i n_i) = 0$

Поймем, что $\vec r_n$ (центр масс) есть точка пересечения медиан. Тогда $(\vec r_n - \vec r_i) = \frac{1}{3} \Delta x_i \vec e_i$



2:1 у медиан.

$$(\vec r_n - \vec r_i) \times \vec n_i = \frac{1}{3}\Delta x_i \vec e_i \vec n_i = h \vec e_3$$

$\left(\frac{1}{3}\Delta x_i \vec n_i = h,\ \text{высота тетр.}\right)$

Отсюда и по линейности вект. произведения:

$$\sum_{i=1}^{3} \vec e_i \times \vec p_i = 0$$

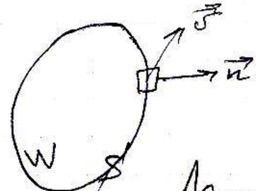
$$\vec e_1 \times (\vec p_{11} \vec e_1 + p_{21} \vec e_2 + p_{31} \vec e_3) + \vec e_2 \times (p_{12} \vec e_1 + p_{22} \vec e_2 + p_{32} \vec e_3) + \vec e_3 \times (p_{13} \vec e_3 + p_{23} \vec e_3 + p_{33} \vec e_3) = 0$$

поскольку $\vec e_i \cdot \vec e_j = \delta_{ij}$, имеем:

$$(p_{23} - p_{32}) \vec e_1 + (p_{31} - p_{13}) \vec e_2 + (p_{12} - p_{21}) \vec e_3 = 0$$

Отсюда следует $p_{ij} = p_{ji}$

12. Закон сохр. импульса. Ур-е переноса импульса в сплошной среде.



2-й закон Ньютона в интегр. форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_W \rho\vec{v}\,dW\right) = \oint_S \vec{p_n}\,dP + \int_W \rho\vec{f}\,dW$$

Лагранжев объем может деформироваться, поэтому ρ и dW не постоянны. Но масса ρdW постоянна.

$$\int_W \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,dW = \int_S \vec{n}\overleftrightarrow{P}\,dP + \int_W \rho\vec{f}\,dW$$

По Гауссу $\int_W \nabla\cdot\overleftrightarrow{P}\,dW = \int_S \vec{n}\overleftrightarrow{P}\,dP$

Имеем $\int_W \left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} - \nabla\overleftrightarrow{P} - \rho\vec{f}\right)dW = 0.$

Получаем ур-е переноса импульса:

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) - \nabla\overleftrightarrow{P} - \rho\vec{f} = 0.$$

Можем раскрыть субстанцион. пр-ю:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) - \nabla\cdot\overleftrightarrow{P} - \rho\vec{f} = 0$$

проекция на ось 1: $\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) - \rho\vec{f} - \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}\right) = 0$

$$k\in\{1..3\}: \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \vec{f} + \sum_{i=1}^{3}\frac{P_{ik}}{\partial x_i}\rho$$

Если поделить на ρ, получим:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} - \rho\vec{f} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} - \vec{f} = 0$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} + \vec{f}$$

13. Закон сохр энергии. Уравнение переноса кинет., потенциальной и внутренней энергии в сплошной среде.

Закон сохр. энергии:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_i \int\limits_W \rho\left(\underset{\uparrow\text{внутр}}{E}+\underset{\uparrow\text{кинемат.}}{\frac{v^2}{2}}\right)dW = \oint\limits_S (\vec{p}_n\cdot\vec{v})\,dS + (A) \quad \text{Мощность контактных сил (работа в } dt)$$

$$\int\limits_W \rho\frac{d}{dt}\left(E+\frac{v^2}{2}\right)dW \qquad + \int\limits_W \rho\vec{f}\,\vec{v}\,dW - \quad \text{Мощность объемных сил}$$

$$- \int\limits_S (\vec{q}\cdot\vec{n})\,dS + (B)$$

$$+ \int\limits_W \rho Q\,dW \quad \text{Выделенная энергия}$$

$$(A) = \oint\limits_S \underset{\text{по опр}}{(\vec{n}\cdot\vec{p})}\vec{v} = \oint\limits_S \underset{\text{по ассоц}}{\vec{n}\cdot(\vec{p}\cdot\vec{v})} \underset{\text{Гаусс}}{=} \oint\limits_W \nabla\cdot(\overleftrightarrow{p}\cdot\vec{v})\,dW$$

$$(B) = \{\text{по Гауссу}\} = \int\limits_W \nabla\vec{q}\,dW$$

Итого.

$$\rho\frac{d}{dt}\left(E+\frac{v^2}{2}\right) = \nabla\cdot(\overleftrightarrow{p}\cdot\vec{v}) + \rho\vec{f}\vec{v} - \nabla\vec{q} + \rho Q$$

Это уравнение баланса полной энергии (1)

$$> \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f} \longleftarrow \text{Ур-е переноса импульса}$$

Домножим на $\vec{v}$ скалярно:

$$\rho\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = (\nabla\cdot\overleftrightarrow{P})\cdot\vec{v} + \rho\vec{f}\cdot\vec{v}$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}(v^2) = 2\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}$ (умнож.)

Отсюда

$$> \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = (\nabla\overleftrightarrow{P})\vec{v} + \rho\vec{f}\vec{v} \text{ - Ур-е баланса кинет. энергии (2)}$$

Вычтем (1) - (2).

$$\rho\frac{d}{dt}(E)\cancel{+\frac{v^2}{2}} = \nabla\cdot(\overleftrightarrow{P}\cdot\vec{v}) - (\nabla\overleftrightarrow{P})\vec{v} - \nabla\vec{q} + \rho Q.$$

$$\nabla(\overleftrightarrow{P}\cdot\vec{v}) - (\nabla\overleftrightarrow{P})\vec{v} =$$

$$= \sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(P_{ij}v_j) - \sum_{ij}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j =$$

$$= \sum_{ij}\left(\cancel{\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}P_{ij} - \cancel{\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j}\right) =$$

$$= \sum_{ij}P_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \left\{\begin{array}{l}\text{представим как}\\ \text{сумму симм + антисимм части}\end{array}\right\} =$$

$$= \sum_{ij}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{тензор деформации } \overleftrightarrow{S}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{Тензор завихренности } \overleftrightarrow{R}_{ij}}\Big]P_{ij} =$$

$$= \sum_{ij}P_{ij}S_{ij} =: \overleftrightarrow{P} : \overleftrightarrow{S}$$

Отсюда
$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P} : \overleftrightarrow{S} - \nabla\vec{q} + \rho Q$$

Уравнение переноса энергии.

14. Проблема замыкания системы ур-й переноса в сплошной среде. Понятие о реологических соотношениях

Законы сохранения
— массы (ур-е неразр.) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0$
— импульса $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \vec{f}$
— энергии $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \overleftrightarrow{P} : \overleftrightarrow{S} - \nabla \cdot \vec{q} + Q$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)$$

Основные неизвестные: $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $E(\vec{r}, t)$
Дополнительные: $\overleftrightarrow{P}(\vec{r}, t)$, $\vec{q}(\vec{r}, t)$, $\vec{f}(\vec{r}, t)$, $Q(\vec{r}, t)$

Нужны замыкающие соотношения
- для $\overleftrightarrow{P}$, $\vec{q}$ (потоки)
- для $\vec{f}$, Q (источники)

Если среда заряжена, то $\vec{f} = \sigma(\vec{E} + \vec{H}_1 \times \vec{v})$

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}) & \left(S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right) \\ \vec{q} = \vec{q}(T) & (E \approx C_p T) \text{ (температура?)} \end{cases}$$

↑ — Задаются конкретными моделями сплошной среды.

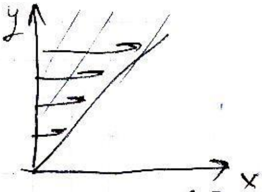
1. $\overleftrightarrow{P} = 0$, $\vec{q} = 0$ „Вакуум"
вакуум — среда $\begin{cases} \lambda \ll L \Rightarrow \text{континуум} \\ \lambda \gg L \Rightarrow \text{вакуум} \end{cases}$
λ — средняя длина своб. пробега частицы

2. $\overleftrightarrow{P} = -p \overleftrightarrow{\xi}$, $\vec{q} = 0$ $\quad \xi$ — един. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(p — давление)
Идеальная среда
Нет касательного напряжения = нет внутр. трения

3. $\overleftrightarrow{P} = -p\overleftrightarrow{E} + 2\mu\overleftrightarrow{S}, \quad q = -\lambda\nabla T$

Обобщенный закон Ньютона

$\tau = \mu \frac{du}{dy}$



Закон Фурье

Ур Навье-Стокса динамики вязкой среды

4. $\overleftrightarrow{P} = -\left[p - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{v})\right]\overleftrightarrow{E} + 2\mu\overleftrightarrow{S}, \quad q = -\lambda\nabla T$

Навье-Стокс для нескж.

5. $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\xi) \qquad \vec{q} = \vec{q}(E)$

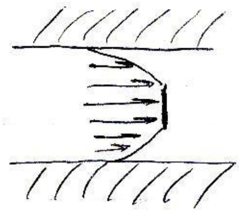
Нелинейные ф-ии

6. $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{Q}) \qquad \vec{q} = \vec{q}(E)$

тензор деформации

7. $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}, \overleftrightarrow{Q}) \qquad \vec{q} = \vec{q}(E)$

вязкотвердая среда



Если крит. значение

< его — тв. тело

> его — вязкое, течет

Профиль скорости

$\rightarrow \tau = P_{xy}$

8. $\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S}), \quad \vec{q} = \vec{q}(E)$

$$\overleftrightarrow{P}(\vec{r}) = \int_{(\vec{r}')} \overleftrightarrow{K_4}(\vec{r}' - \vec{r}) : \overleftrightarrow{S}(\vec{r}')\, d\vec{r}'$$

$\vec{q}(\vec{r})$ — простр. нелокальность

$$\overleftrightarrow{P}(t) = \int_{t'<t} F(t-t')\overleftrightarrow{S}(t')\, dt'$$

$\vec{q}(t) = \ldots$ временная нелокальн.

среда с памятью

15. Понятие погрешности. Абсол. / Относ. погрешность. Погрешности арифм. операций и вычисл. ф-й

a - точное значение, a^* - неточное.
$\Delta(a^*) := |a^* - a|$, $\overline{\Delta}$ - верхняя оценка.
$\delta(a^*) := \frac{\Delta(a^*)}{|a|} = \frac{|a-a^*|}{|a|}$. $\delta(a^*) \le \overline{\delta}(a^*)$ (возм. опред. $\delta = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$)

Лемма: опр. относ. погрешности примерно равны

Δ

$$|a^*| = |a + (a^* - a)| \le |a| + |a^* - a| = |a| + \Delta(a^*)$$
$$|a^*| = |a - (a - a^*)| \ge |a| - |a - a^*| = |a| - \Delta(a^*)$$

То есть

$$|a| - \Delta(a^*) \le |a^*| \le |a| + \Delta(a^*)$$
$$\frac{1}{|a| + \Delta(a^*)} \le \frac{1}{|a^*|} \le \frac{1}{|a| - \Delta(a^*)} \quad \Big| \times \Delta(a^*)$$
$$\frac{\Delta(a^*)}{|a| + \Delta(a^*)} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a| - \Delta(a^*)}$$
$$\frac{\Delta(a^*)}{|a|(1+\delta(a^*))} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \le \frac{\Delta(a^*)}{|a|(1-\delta(a^*))} \quad \text{Тейлор}$$
$$\delta(a^*)(1 - \delta(a^*) + \dots) \le \frac{\Delta(a^*)}{|a|} \le \delta(a^*)(1 + \delta(a^*) + \dots)$$

То есть $\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} \approx \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|}$ (с точностью до членов II пор.

∇

α_k верное, если $\Delta(a^*) \le p^k$ (верная знач. цифра)

Лемма $\delta(a^*) \sim 1/p^N$

Δ $a^* = \underbrace{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_{n-N+1}}_{\text{верные}} \underbrace{\alpha_{n-N}}_{\text{неверные}}$

① $\begin{cases} \Delta(a^*) \le p^{n-N+1} \text{ (разность)}, & |a^*| \ge p^n \\ \text{Тогда } \delta(a^*) \approx \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \lesssim \frac{1}{p^{N+1}} \end{cases}$

② $\begin{cases} \Delta(a^*) \ge p^{n-N} \\ |a^*| \le p^{n+1} \end{cases} \Big| \; \delta(a^*) \gtrsim \frac{p^{n-N}}{p^{n+1}} = \frac{1}{p^{N+1}}$

③ $\frac{1}{p^{N-1}} \lesssim \delta(a^*) \lesssim \frac{1}{p^{N+1}} \Rightarrow \delta(a^*) \sim \frac{1}{p^N}$

∇

Это удобно для оценки погрешности когда известна длина мантиссы

• Источники погрешности

Ошибки измерений — Ошибки метода

Ошибки модели — Ошибки комп. представления

Неустранимые — Устранимые

• $(a \pm b)$ $c^* = a^* \pm b^*$

$> \Delta(c^*) = \Delta(a^* \pm b^*) = |(a^* \pm b^*) - (a \pm b)| \leq$
$\leq |a^* - a| + |b^* - b| = \Delta(a^*) + \Delta(b^*)$

$> \delta(c^*) \leq \dfrac{\Delta(a^*) + \Delta(b^*)}{|a \pm b|} = \dfrac{|a|\,\delta(a^*) + |b|\,\delta(b^*)}{|a \pm b|} \leq \dfrac{|a| + |b|}{|a \pm b|}\delta_{max}$

• $(a \cdot b)$ $c^* = a^* b^*$

$> \Delta(c^*) = |a^* b^* - ab| = |(a - a^*)b + (b - b^*)a + (a - a^*)(b - b^*)| \leq$
$\leq |a^* - a||b| + |b^* - b||a| + |a^* - a||b^* - b^*| =$
$= |b|\Delta(a^*) + |a|\Delta(b^*) + \Delta(a^*)\Delta(b^*)$

$> \delta(c^*) \leq \dfrac{\Delta(c^*)}{|a||b|} = \dfrac{\Delta(a^*)}{|a|} + \dfrac{\Delta(b^*)}{|b|} + \dfrac{\Delta(a^*)\Delta(b^*)}{|a||b|} =$
$= \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*)\delta(b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$

• (a/b) $c^* = a^*/b^*$

$> \Delta(c^*) = \left|\dfrac{a^*}{b^*} - \dfrac{a}{b}\right| = \left|\dfrac{a^*(b - b^*) + b^*(a^* - a)}{b^* b}\right| \leq$
$\leq \dfrac{|a^*|\Delta(b^*) + |b^*|\Delta(a^*)}{|b^*||b|}$

$> \delta(c^*) \leq \dfrac{(|a^*|\Delta(b^*) + |b^*|\Delta(a^*))\cancel{|b|}}{|b^*|\cancel{|b|}|a|} \approx \underbrace{\dfrac{|a^*|}{|a|}}_{\approx 1}\delta(b^*) + \delta(a^*)$
$\approx \delta(b^*) + \delta(a^*)$

• $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$

$> \Delta(y^*) = |y^* - y| = |f(x^*) - f(x)| = |f(x) + f'(x)(x - x^*) + \ldots - f(x)| \approx$
$\approx |f'(x)||x - x^*|$

$> \delta(y^*) \approx \dfrac{|f'(x)|\Delta(x^*)}{|f(x^*)|} = \dfrac{|f'(x)||x|\delta(x^*)}{|f(x)|}$

• $y^* = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ // foo N

$$\delta(y^*) = \frac{1}{|f(\vec{x})|} \sum_1^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}} |x_i| \, \delta(x_i)$$

2. Про даблы

См 1 билет про значащие цифры
+ IEEE

Применить лемму при $p = 2$. $\left(\delta(a^*) \sim \frac{1}{2^m}\right)$

3. Корректность и обусловленность, устойчивость выч. задач. Примеры.

X - мн-во входных данных (вектор)
Тогда $\Delta(x^*) = |x^* - x|$, $\delta(x^*) = \Delta(x^*)/\|x\|$.
Алгоритм преобразует их в Y или Y^*,
$\Delta(Y^*)$, $\delta(Y^*)$ аналогично.

- Задача решена устойчиво, если
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \Delta(x^*) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Delta(y^*) \leq \varepsilon$
  $(\delta(x^*) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \delta(y^*) \leq \varepsilon)$

- Корректность выч. задачи по Адамару
  устойчивость, существование, единственность.

$$\nu_\Delta = \frac{\Delta(y^*)}{\Delta(x^*)} \quad \overline{\nu}_\Delta = \frac{\overline{\Delta}(y^*)}{\Delta(x^*)} \quad \nu_\delta = \frac{\delta(y^*)}{\delta(x^*)} \quad \overline{\nu}_\delta = \frac{\overline{\delta}(y^*)}{\delta(x^*)}$$

Примеры

1. Слож / вычитание

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{X}^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}. \quad \Delta(\vec{X}^*) = \|\vec{X}^* - \vec{X}\| = \sqrt{(\Delta(a^*))^2 + (\Delta(b^*))^2} \leq \max(\Delta(a^*), \Delta(b^*)) = \Delta_m$$

Известно, что $\delta(c^*) \leq (|a| + |b|)/|a \pm b| \cdot \Delta_m = (\ldots)\,\delta(\vec{X})$

$$\overline{\delta}(c^*)$$

Отсюда $\overline{\nu}_\delta = \dfrac{\overline{\delta}(c^*)}{\delta(a^*)} = \dfrac{|a| + |b|}{|a \pm b|}$.

Единств. ✓ Существ. ✓ Устойчивость $\Leftrightarrow$ сущ. $\overline{\nu}_\delta$ ✓.

2. Поиск корней кв. ур-я
- ✓ Если расширить до $\mathbb{C}$ то будет сущ.
- ✓ Единств. есть
- ✓ Устойчивость - корни - ~~незав.~~ непр ф-ии от (b, c)
  $x^2 + bx + c = 0$ (~~если~~ поделим на 1 коэф если он не $= 1$)

3. Корни $(x-1)^4 = 0$

$P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А если, скажем, $\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1-10^{-8} \end{pmatrix}$, то $(x-1)^4 = 10^{-8}$
$(x-1)^2 = \pm 10^{-4}$

и $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1+10^{-2} \\ 1-10^{-2} \\ 1+i10^{-2} \\ 1-i10^{-2} \end{pmatrix}$ $\Delta(\vec{a}^*) = \max|a_i^* - a_i| = 10^{-8}$; $\underline{\nu_\Delta = 10^{6}}$
$\Delta(\vec{x}^*) = \max|x_i^* - x_i| = 10^{-2}$;

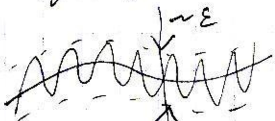
Но задача корректна (некорр / все дела) плохо обусл.

4. Производная на $[a,b]$

$$\Delta(f^*(x)) = \|f^*(x) - f(x)\| = \max_{[a,b]} |f^*(x) - f(x)|$$

$$\Delta(f^{*\prime}(x)) = \max_{[a,b]} |f^{*\prime}(x) - f'(x)|$$

Пусть, скажем, $f^*(x) = f(x) + \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$ $\quad 0 < \varepsilon \ll 1$



Тогда $\Delta(f^*(x)) = \varepsilon$

Но $f^{*\prime}(x) = f'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\cos\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right)$, $\Delta(f^{*\prime}(x)) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Отсюда $\nu_\Delta = \dfrac{\Delta(f^{*\prime}(x))}{\Delta(f^*(x))} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ $\leftarrow$ некорр по Адамару

5. Вычисление опред. интеграла

$f(x)$ на $[a,b] \mapsto I = \int_a^b f(x)\,dx$

$f^*(x)$ на $[a,b] \mapsto I^* = \int_a^b f^*(x)\,dx$

$$\Delta(f^*) = \max_{[a,b]} |f^* - f|; \quad \Delta(I^*) = |I^* - I| \le$$

$$\le \int_a^b |f^*(x) - f(x)|\,dx \le \int_a^b \Delta(f^*)\,dx = \underline{\Delta(f^*)(b-a)} =: \bar{\Delta}(I^*)$$

Тогда $\bar{\nu}_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(I^*)}{\Delta(f^*)} = (b-a)$

$\exists\ \delta(f^*) = \dfrac{\Delta(f^*)}{\langle|f|\rangle}$ $\leftarrow$ mean, тогда $\bar{\Delta}(I^*) = \delta(f^*)\langle|f|\rangle(b-a)$

$$\Delta(I^*) = |I|\,\delta(I^*) \le \langle|f|\rangle\,\delta(f^*)(b-a)$$

отсюда $\delta(I^*) \le \dfrac{\langle|f|\rangle\,\delta(f^*)(b-a)}{|I|} =: \bar{\delta}(I^*)$

И итого имеем $J_\delta = \dfrac{\delta(I^*)}{\delta(f^*)} = \dfrac{\langle|f|\rangle(b-a)}{|I|} =$

$$= \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx\,(b-a)}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|} = \frac{\int_a^b |f(x)|dx}{\left|\int_a^b f(x)dx\right|}$$

Много осциллирует вокруг нуля → плохая обусловленность

6. Вычисление сумм

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$; $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^*$; Корни в Euler $\sqrt{()^2}$

$\vec{a} \mapsto S_n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$ $\vec{a}^* \mapsto S_n^*$. $\sum \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_n^* \end{pmatrix}$ грубо $\le \sum^n \Delta(\vec{a}^*)$,

$\Delta(S_n^*) = \left|\sum (a_k^* - a_k)\right| \le \sum^n \Delta(a_k^*) \le \Delta(\vec{a}^*)\cdot n$

$\overline{\Delta}(S_n^*) \le$

$J_\Delta(S_n^*) = n = \left(\dfrac{\Delta(S_n^*)}{\Delta(\vec{a}^*)}\right)$

$\exists\ \delta(\vec{a}^*) = \dfrac{\Delta(\vec{a}^*)}{\langle|a_k|\rangle}$

$\Delta(S_n^*) \le \Delta(\vec{a}^*)\,n \Rightarrow |S_n|\,\delta(S_n^*) \le \delta(\vec{a}^*)\langle|a_k|\rangle n$

Откуда $\delta(S_n^*) \le \dfrac{\langle|a_k|\rangle\delta(\vec{a}^*)n}{|S_n|}$

И итого $J_\delta = \dfrac{\delta(S_n^*)}{\delta(\vec{a}^*)} = \dfrac{\langle|a_k|\rangle n}{|S_n|} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum|a_k|n}{|\sum a_k|} =$

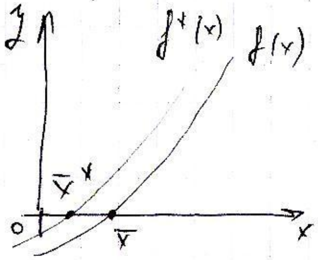
$$= \frac{\sum |a_k|}{|\sum a_k|}$$

Обусловленность

4. Численное решение нелинейных алгебр. ур-ий
Обусловленность задачи нахожд. корня.

Трансцендентные ур-е – не линейно. Будем итерационно уточнять корни: $\lim_{k\to\infty} x_i^k = \bar{x}_i$

Обусловленность



$f(x) \to \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$
$f^*(x) \to \bar{x}^* : f^*(\bar{x}^*) = 0.$

$\Delta(f^*) = \max_{[a,b]} |f^* - f|$, $\Delta(\bar{x}^*) = \|x^* - x\|$

$|f^* - f| \le \Delta(f^*)$ ← нут от x

$|\underbrace{f^*(\bar{x}^*)}_{0 \text{ по опр. метода}} - f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*) \Rightarrow |f(\bar{x}^*)| \le \Delta(f^*)$

Разложим в ряд:

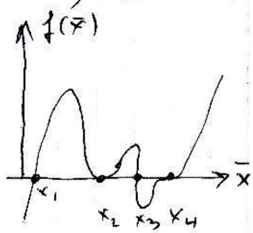
$$|f(\bar{x} + (\bar{x}^* - \bar{x}))| \le \Delta(f^*)$$
$$|f(\bar{x}) + f'(x)(\bar{x}^* - \bar{x}) + \dots| \le \Delta(f^*)$$
$$|f'(x)|\,|\bar{x}^* - \bar{x}| \le \Delta(f^*)$$
$$\Delta(\bar{x}^*) = |\bar{x}^* - \bar{x}| \le \Delta(f^*) / |f'(x)| =: \bar{\Delta}(\bar{x}^*)$$

Отсюда $\bar{\nu}_\Delta = \dfrac{\bar{\Delta}(\bar{x}^*)}{\Delta(f^*)} = \dfrac{1}{|f'(x)|}$

> Кратные корни?

$f(\bar{x}) = 0, \; f'(\bar{x}) = 0, \; \dots, \; f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0, \; f^{(m)}(\bar{x}) \ne 0$

Тогда $\bar{x}$ – корень кратности m



$|f^*(x) - f(x)| \le \Delta(f^*)$ на $[a, b]$

$|\underbrace{f^*(x^*)}_{0} - f^*(x^*)| \le \Delta(f^*) \Rightarrow |f(x^*)| \le \Delta(f^*)$

$|f(\bar{x} + (\bar{x}^* - \bar{x}))| \le \Delta(f^*)$

Разложим в ряд до m-го члена $|\overset{0}{f(\bar{x})} + \overset{0}{f'(\bar{x})}(\dots) + \dots + \dfrac{f^{(m)}(\bar{x})}{m!}(\bar{x}^* - \bar{x})^m + \dots| \le \Delta(f^*)$

тогда $\dfrac{|f^{(m)}(\bar{x})|}{m!}|x^* - \bar{x}|^m \le \Delta(f^*)$

$$\Delta(\bar{x}^*) \le \left[\frac{m!\,\Delta(f^*)}{f^{(m)}(\bar{x})}\right]^{1/m} = \left[\frac{m!}{f^{(m)}(\bar{x})}\right]^{1/m} \Delta(f^*)^{1/m} = \bar{\Delta}(\bar{x}^*)$$

Тогда имеем: $J_\Delta = \dfrac{\Delta(\bar{x}^*)}{\Delta(f^*)} = \left[\dfrac{m!}{f^{(m)}(\bar{x})}\right]^{1/m} \Delta(f^*)^{\frac{1-m}{m}}$

$m \to \infty \Rightarrow \dfrac{1-m}{m} \to -1$

$m! = (2\pi m)^{1/2} \left(\dfrac{m}{e}\right)^m [1 + \dots]$

$(m!)^{1/m} = (2\pi m)^{1/2m} \left(\dfrac{m}{e}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(2\pi m)}{2m}\right)\dfrac{m}{e} \sim \dfrac{m}{e}$

То есть $J_\Delta \to -\dfrac{m}{e}\left[f^{(m)}(\bar{x})\right]^{-1/m} \Delta(f^*)^{\frac{1-m}{m}}$

9 1/2 (Билет для 5 и 6 белого)
Скорости сходимости итерац. метода

1. Линейная скорость
$\{x^i\}$ сходится линейно, если

$$|\bar{x}^{m+1} - \bar{x}| \le q\,|x^m - \bar{x}|, \quad q<1$$
$$\le q^{m+1}\,|x^0 - \bar{x}|$$

2. Сверхлинейная скорость сходимости

$$|\bar{x}^{m+1} - \bar{x}| \le q\,|x^m - \bar{x}|^p, \quad p>1$$ (p^2 - квадратичн. p^3 - кубичн.)

$$|\bar{x}^{m+1} - \bar{x}| \le q\,|x^m - \bar{x}|^p$$
$$\le q^{1+p}\,|x^{m-1} - \bar{x}|^{p^2}$$
$$\le q^{1+p+p^2}\,|x^{m-2} - \bar{x}|^{p^3}$$
$$\le \dots$$
$$\le q^{\sum_{i=0}^{m} p^i}\,|x^0 - \bar{x}|^{p^{m+1}} = q^{\frac{p^{m+1}-1}{p-1}}\,|x^0 - \bar{x}|^{p^{m+1}} =$$
$$= q^{\frac{1}{1-p}}\left(q^{\frac{1}{p-1}}\,|x^0 - \bar{x}|\right)^{p^{m+1}}$$

$$q^{\frac{1}{p-1}}\,|x^0 - \bar{x}| < 1$$
условие сходимости

Априорная оценка — сравниваем X_n с $\bar{X}$
Апостериорная оценка — X_n с X_{n+1}

5. Метод простых итераций

$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\varphi(x)$ выразим один x

$\{x^i\}=\varphi(x^{i-1})$

Сходится ли $\{x^i\}$?

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1}=\lim \varphi(x^n)$. Если пред. сущ., то $\bar{x}=\varphi(\bar{x})$

• Условие сходимости:

1) $|\varphi'(x)|\le q<1$ в ε-окрестности $\bar{x}$

2) $x^0\in\varepsilon$-окрестности $\bar{x}$

Δ

$$x^1-\bar{x}=\varphi(x^0)-\varphi(\bar{x})\overset{\text{Лагранж}}{=}\varphi'(\xi)(x^0-x) \quad \xi\in[x^0,x]$$

$$|x^1-\bar{x}|=|\varphi'(\xi)||x^0-\bar{x}|\le q|x^0-\bar{x}|$$

$$|x^2-\bar{x}|=|\varphi'(\xi)||x^1-\bar{x}|\le q^2|x^0-\bar{x}|$$

$$\vdots$$

$$|x^m-\bar{x}|\le q^m|x^0-\bar{x}|$$

$$x^{n+1}-\bar{x}=\varphi(x^n)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_n)(x^n-\bar{x})=$$

$$=\varphi'(\xi_n)(x^n-x^{n+1}+x^{n+1}-\bar{x})=\varphi'(\xi_n)(x^n-x^{n+1})+\varphi'(\xi_n)(x^{n+1}-\bar{x})$$

$$|x^{n+1}-\bar{x}|\le|\varphi'(\xi_n)||x^n-x^{n+1}|+|\varphi'(\xi_n)||x^{n+1}-\bar{x}|$$

Отсюда $(1-|\varphi'(\xi_n)|)|x^{n+1}-\bar{x}|\le|\varphi'(\xi_n)||x^{n+1}-x^n|$

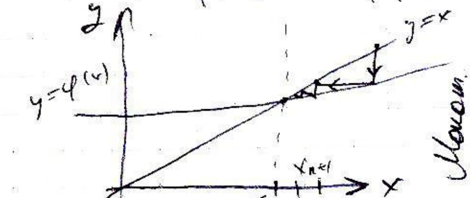
$$|x^{n+1}-\bar{x}|\le\frac{|\varphi'(\xi_n)||x^{n+1}-x^n|}{(1-|\varphi'(\xi_n)|)}\le\frac{q}{1-q}|x^{n+1}-x^n|\le\varepsilon$$

(Если $|x^{n+1}-x^n|\le\varepsilon\frac{1-q}{q}$)

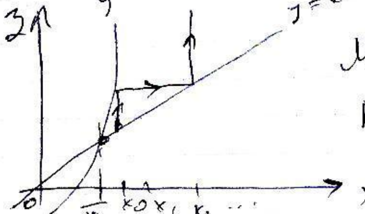
∇

• Геом. интерпрет.

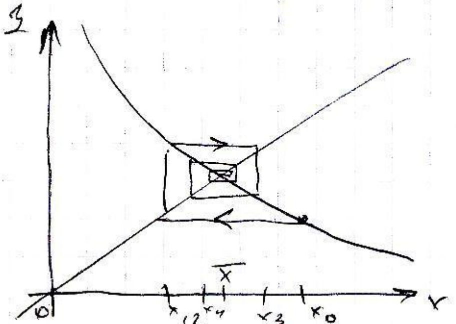
$x=\varphi(x)$ $\quad |\varphi'(x)|\le q<1$ $\qquad\qquad$ $1<\varphi'(x)$



Монот. сходимость

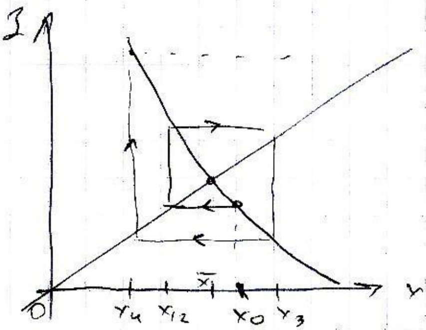


Монот. расходимость



Колеб. сходимость

$-1 < \varphi'(x) < 0$



Колеб. расход.

$\varphi'(x) < -1$

6. Метод Ньютона и модификации

$f(\bar{x})=0$ ~~x^{n+1}~~ $x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$

$f(x^0)\neq 0$

$$x^{n+1}-\bar{x} = x^n-\bar{x} - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} = -\frac{f(x^n)-f'(x^n)(x^n-\bar{x})}{f'(x^n)}$$

Почему это работает:

$f(\bar{x})=0$

$f(x^n + (\bar{x}-x^n))=0$

поделим на $f'(x^n)$ → $f(x^n) + f'(x^n)(\bar{x}-x^n) + \frac{1}{2} f''(\xi^n)(\bar{x}-x^n)^2=0$

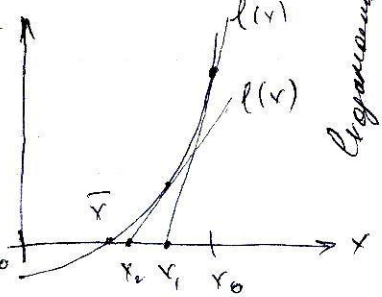
Тогда $(x^{n+1}-\bar{x}) = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi^n)}{f'(x^n)}(x^n-\bar{x})^2$

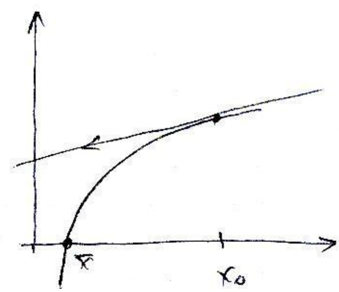
$\left\{-\frac{f(x^n)}{f'(x^n)} + (x^n-\bar{x})\right\}$

Усл. сходимости: $\frac{1}{2}\frac{f''(\xi^n)}{f'(x^n)} \le q$ в окрест. $\bar{x}$

Заметим, что сходимость квадратичная.

1. $\frac{1}{2}\frac{|f''(x)|}{|f'(x)|} \le q$ в ε-окр
2. $q(|x^0-\bar{x}|) < 1$
3. $x^0 \in \varepsilon$-окр корня





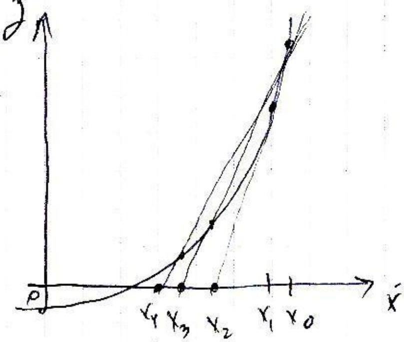
Очень жаль

• Модификации:

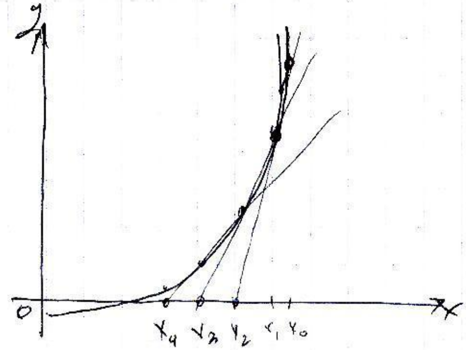
$x^{n+1} = x_0 + \frac{x^n - x^0}{f(x^n)-f(x^0)} f(x_0)$ Метод ложного положения

$x^{n+1} = x_0 + \frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n)-f(x^{n-1})} f(x^{n-1})$ Метод секущих

Итерации



Ложн полож



Секущие