10.02.2014 Лекция

(1)

Правило Лопиталя (© Бернулли)

Лемма $f, g: D \to \mathbb{R}$, a – пр. точка D ($D \subset X$ – м.п.)

$f(x), g(x) \to 0$ при $x \to a$

$\exists U(a)\ \forall x \in U(a) \cap D \quad f(x) \neq 0\ (g(x) \neq 0)$

$x_k \to a \quad (x_k \in D,\ x_k \neq a)$

Тогда $\exists y_k \to a \quad (y_k \in D, y_k \neq a)$:

$$\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \to 0 \quad \frac{g(y_k)}{f(x_k)} \to 0;$$

Д-во. НУО: $f, g \geq 0$

$\exists z_k \in D,\ z_k \to a:\ f(z_k) \to 0,\ g(z_k) \to 0$ монотонно

(берем любое z_1, смотрим на $f(z_1), g(z_1)$, берем опр. меньшие, конструктивно по опр. предела)

Подберем $p_k, q_k \in \mathbb{N}$ так, что

$$\sqrt{f(z_{p_k+1})} \leq f(x_k) \leq \sqrt{f(z_{p_k})}$$

$$\sqrt{g(z_{q_k+1})} \leq g(x_k) \leq \sqrt{g(z_{q_k})}$$

$y_k = \max(z_{p_k+1}; z_{q_k+1})$.

1. Тогда очевидно, что $f(y_k) \leq f(z_{p_k+1})$ (по св-ву монот.)

$$0 \leq \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \leq \frac{f(z_{p_k+1})}{\sqrt{f(z_{p_k+1})}} = \sqrt{f(z_{p_k+1})} \xrightarrow[\text{по опр.}]{} 0$$

2. Также очевидно, что $g(y_k) = g(z_m) \leq g(z_{q_k+1})$

$$0 \leq \frac{g(y_k)}{f(x_k)} \leq \frac{g(z_{q_k+1})}{\sqrt{g(z_{q_k+1})}} \to 0 \text{ по опр.}$$

Замечание: Аналогичное утв. верно для $f(x), g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$

Теорема ②: $f, g: (a, b) \to \mathbb{R}$, $\ldots \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = ☹ \text{ - неопр. } \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right]$$

Пусть f, g дифф. на $(a; b)$, $g \neq 0$ на $(a; b)$

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда: $\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Д-во: $x_k \to b-0$, $y_k \to b-0$

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \quad (\text{по Коши}, \ \xi_k \in (x_k; y_k))$$

Выразим: $\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$

$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to L$? Берем y_k из леммы.

Но $x_k \to b-0$, $y_k \to b-0$, значит $\xi_k \to b-0$,

откуда

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \underbrace{\frac{f(y_k)}{g(x_k)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}}_{\to L}\Bigg(1 - \underbrace{\frac{g(y_k)}{g(x_k)}}_{\to 0}\Bigg)$$

А если раз $g' \neq 0$ нигде то g монотонна по Дарбу

Но $g \to 0$, значит $g \neq 0$. (для $\frac{0}{0}$)

∇

Пример: $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim \ldots = 1$. ☺

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim \frac{2x\sin\frac{1}{x} + 2\cos\frac{1}{x}}{\cos x} = ☹$$

Короче, работает.

Теорема Штольца (3): x_n, y_n — вещ. последовательности

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = [\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}]$, y_n монотонна

$\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда: $\lim \frac{x_n}{y_n} = L$

Д-во: 1) L – кон, $L>0$; $\forall \varepsilon>0$, $\varepsilon<L$, $\underbrace{L-\varepsilon < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < L+\varepsilon}$. $[\frac{0}{0}]$

Правило: $a, b, c, d>0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$;

$\underbrace{L-\varepsilon < \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}} < L+\varepsilon}$, напишем k дробей

$\vdots$

$\underbrace{L-\varepsilon < \frac{x_{n+k+1}-x_{n+k}}{y_{n+k+1}-y_{n+k}} < L+\varepsilon}$.

Сложим их хитрым способом из правила

$L-\varepsilon < \frac{x_{n+k+1}-x_n}{y_{n+k+1}-y_n} < L+\varepsilon$, $k\to\infty$, отсюда

$L-\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < L+\varepsilon$.

∇

Теорема Гаусса: $1+2+3+\dots+n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$; $\lim\frac{x_n}{y_n}=1$?

Посчитаем по Штольцу:

$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 1$.

Теорема Гаусса 2: $\underbrace{(1+2+3+\dots+n)-\frac{n^2}{2}}_{x_n} \sim \underbrace{\frac{n}{2}}_{y_n}$

По Штольцу:

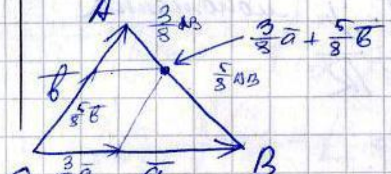
$\lim = \lim \frac{n - \frac{n^2}{2} - \frac{n^2-2n+1}{2}}{1/2} = 1$ (Ручка кончилась (N) пол)

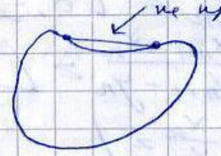
То есть: $1+\dots+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+o(n)$

Это вроде верно.

Выпуклость

Опред. ① $D \subset \mathbb{R}^m$ – выпукл., — $\forall x, y \in D$ отрезок $[x;y] \in D$





то есть $z = \alpha x + (1-\alpha) y$, $\alpha \in (0;1)$, $z \in (x;y)$ в 1мер.

Опред. ② $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ – выпукла, если

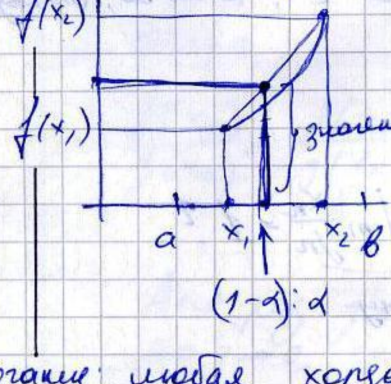
$\forall x_1, x_2 \in [a;b]$ $(\exists x_1 < x_2)$ $\forall \alpha \in [0;1]$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

(выпукла – выпуклая вниз)

Строго выпукла – $x_1 \ne x_2$, знак $<$;

Анал. вогнутость – знак $\ge$ ($>$ ~ вогнута строго)



значение тут – визуализация.

Замечание: любая хорда расположена не ниже граф.

$\Updownarrow$

множество $\{(x;y) \mid x \in [a;b],\ y \ge f(x)\}$
называется надграфиком – выпуклое мн-во.

Д-во не требуется, но очевидно

④

Лемма О трёх хордах.
(давайте переопределим выпуклость, а опред. через отнош. $\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}$)

Собсно, сама лемма

Док-во.

Замеч.

Замеч.

Лемма (Д-во дальше)

Тогда ⑤ ③

Опр. выпуклости: $\forall x_1, x_2, x_3 \ (x_1 < x_3 < x_2)$

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

Док-во: левое неравенство

$$f(x_3) \le \underbrace{\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}}_{\alpha} f(x_1) + \underbrace{\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}}_{1-\alpha} f(x_2)$$

А это чистое опр. выпуклости.
Правое доказывается так же.

Замеч. Строгая лемма о трех хордах такая же вплоть до знаков (< <)

Замеч. f – вып, g – вогн, z выпукл., тогда
$f+z$ выпукл
$-f$ вогнут
$f+g$ хз какая.

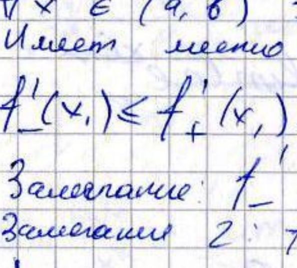
Лемма (Д-во дальше) об одностороннем дифференц. выпукл. ф.

Теор 5 3

f выпукла на $\langle a, b \rangle$
$\forall x \in (a,b) \ \exists f'_-(x), \ f'_+(x)$ и $\forall x_1, x_2 \ (x_1 < x_2)$
Имеет место неравенство

$$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2)$$

Замечание: f'_- и f'_+ возрастают
Замечание 2: f непр на (a,b) ($\forall x \ f(x)$ непр слева и справа)



– непрерывна на (a,b), но выпукла на $\langle a, b \rangle$

Замечание 3: у $f'_{+,-}$ есть не более чем счетное мн-во разрывов, но есть за исключением счетного мн-ва f'_+ f'_- непрерывны,

$$\left.\begin{array}{l} f'_+ \text{ непрер. в } x \\ f'_- \text{ непрер. в } x \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ дифф. в } x$$

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1+} f'_+(x) = \lim_{x \to x_1-} f'_-(x) = f'_-(x_1)$$

Итого: вып. ф-я дифф. везде кроме сч. мн-ва

Д-во | (Ви ещё лемма об односторон. дифф.)

$\forall\ g(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$, $\xi \in (a;b) \neq x$

Тогда | $a < \xi < x_1 < \eta < b$ $\quad g(\xi) \le g(\eta)$

1. $x = x_1$ $\quad \xi \to x_1 - 0$ $\quad \eta \to x_1 + 0$

$f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$

2. $\eta = x_2$; $\xi = x_1$

Тут что-то ещё.

3. и ещё.

14.02.2014 Практика

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}}{e^{\frac{x}{100}}} = \lim \dfrac{\cancel{100}\,100x^{99}}{e^{\frac{x}{100}}} = \lim \dfrac{10^2\, 99x^{98}}{\frac{1}{10^4} e^{\frac{x}{10^2}}} = \sim \dfrac{100!}{\cancel{10}\, e^{\frac{x}{10^2}}} 10^{200} = 0$

$= \lim \dfrac{\frac{1}{e^{\frac{x}{100}}}}{\frac{1}{x^{100}}} = \lim \dfrac{}{\cancel{-100}}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}^{100} \dfrac{x}{e^{10^{-4}x}} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to+0} x^\alpha \ln x = \lim \alpha \ln x^x = \alpha \lim \ln e^{x\ln x}$

$= \alpha \lim \ln x^{x} =$;

$\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim \dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha \cdot \frac{1}{x^2}} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to0} x^{100} e^{\frac{1}{x}} = \cancel{\lim \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-100}} = \lim 100!}$

$= \lim e^{100\ln x} \cdot e^{\frac{1}{x}} \ldots$

$\lim \dfrac{\cancel{e}\, x^{100}}{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\frac{100}{100}}}$ $\quad \cancel{\lim 100x^{99}}$ $\quad \left(\lim \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{100x}}}\right)^{100} =$

$= \left(\lim \dfrac{100}{-1\, e^{-\frac{1}{100x}}}\right)^{100} \neq \cancel{(100)^{100}}$

17.02.2014 Лекция

Лемма

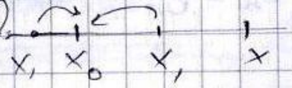
Теорема 6

Выпуклость в терминах касательных

f — дифф на $\langle a;b\rangle$; f выпукла $\Longleftrightarrow$ тогда:
$\forall x_0, x \in \langle a;b\rangle \quad f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Д-во

Δ

① 

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad x_1 \to x_0$$

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

А если $x<x_0$ знак другой

② x_1, x_2, $x_1<x_2$; возьмем x: $x_1<x_0<x_2$

$$x_2: \ f(x_2) \geq f'(x_0)(x_2-x_0)+f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

$$x_1: \ f'(x_0) \geq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$ — это опр. вып.

∇

Теорема 7

Д-во

Определ. 4

$l(x)=\alpha x+\beta$, тогда $y=l(x)$ называется опорной прямой к Γ_f в x_0, если
$f(x) \geq l(x) \ \forall x$, а в x_0 $f(x_0)=l(x_0)$

— такие пример l

Теорема 8

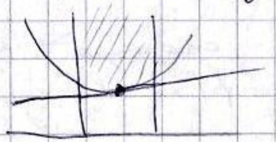
Касательная — частный случай опорной прямой.

Если $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$:
при $x>x_0$ $f(x) \geq f'_+(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
при $x<x_0$ $f(x) \leq f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Замечан.:

Лемма $F \subset \mathbb{R}^2$ - выпукл. замкн. фигура, a - гр. точка

1. Повернем фигуру
2.



$\Downarrow$

через a можно провести опорную прямую

(7) Теорема Дифференциальный критерий выпуклости

f

1. f непр. на $\langle a; b \rangle$, дифф на $(a; b)$
Тогда f - строго выпукла $\Leftrightarrow$ f' строго возраст.

2. Если f - дважды дифф на (a, b), то f - выпукла $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

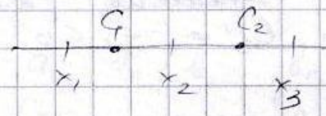
Д-во 1. Слева направо

$\exists x_1 < x_2 \quad f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$

Справа налево

$x_1, x_2, x_3 \quad f'(c_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ (Лагранж) (1)

$f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$ (2)



Тогда (1) $\leq$ (2) - это опр. выпуклости

2. $f' \uparrow \Leftrightarrow f'' \geq 0$

(8) Теорема Неравенство Йенсена

f - выпукла на $\langle a, b \rangle$, тогда
$\forall x_1 \dots x_n \in \langle a; b \rangle \quad \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in [0, 1], \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$
$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

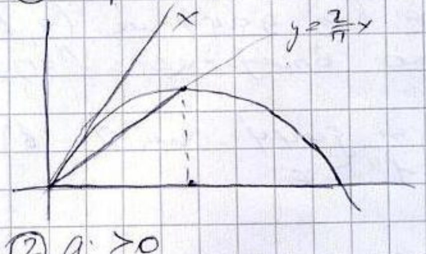
Замечан.: - для $n = 2$ это в точном виде опред. выпуклости
- для $a_1, \dots, a_n$ (люб. полож.):
$f\left(\frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{\sum a_i}\right) \leq \frac{a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)}{\sum a_i}$

Док-во 1. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \le (\alpha_1 + \dots + \alpha_n)\max(x_i) \Rightarrow$
$(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \in \langle a; b \rangle$

$\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$;
$\exists\, y = \ell(\bar{x})$; Возьмем опорную прямую в $\bar{x}$, в частности $\ell(x) \le f(x)$, $\ell(\bar{x}) = f(\bar{x})$
$(\forall x \in \langle a; b \rangle)$

$$f(\bar{x}) = \ell(\bar{x}) \overset{\ell \text{ линейна}}{=} \alpha_1 \ell(x_1) + \dots + \alpha_n \ell(x_n) \le$$
$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \text{ (по опр. } \ell\text{)}.$$

Примеры ① При $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2}{\pi} x \le \sin x \le x$



sin – вогн.

11 → ② $a_i > 0$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

$$\ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \overset{?}{\ge} \frac{1}{n} \ln a_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln a_n$$

Если заменим „ln" на „f", то можем применить Йенсена ($\alpha = \frac{1}{n}$, $x = a$)
если ln выпуклый вверх, но $\ln'' = -\frac{1}{x^2} \le 0$.

12 ③ Неравенство Гёльдера

$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n \ge 0$; $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Тогда:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Замеч: 1. $p = q = 2$ – Коши-Буняковский
2. Если $a_1 \dots a_n$ $b_1 \dots b_n$ не полож., то возьмем модули лев. части и каждого a_i, b_i

Д-во: $p > 1$. $f(x) = x^p$ – строго выпуклая на $[0; \infty)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p$$ – [illegible] в нер. Йенсена

Во
Замеч:
13
Д-во.

Д-во: Возьмем $\alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}$ $\boxed{q = \frac{p}{p-1}}$

$$x_i := a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)$$

$$\alpha_i x_i = a_i b_i^{q-\frac{1}{p-1}} \cdot = a_i b_i$$

$$\alpha_i x_i^p = \frac{b_i^q}{\sum b^q} a_i^p b_i^{-q} \left(\sum b_i^q\right)^p$$

$$\sum a_i x_i^p = \sum \left(a_i^p \left(\sum b^q\right)^{p-1}\right) = \left(\sum a_i^p\right)\left(\sum b_i^q\right)^{p-1}$$

$$\sum a_i x_i \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ну и все, короч.

Замеч: равенство в неравв. Йенсена достигается, если
$$a_i^p = \lambda^p b_i^p \left((a_1^q \ldots a_n^q) \text{ колл. } (b_1^q \ldots b_n^q)\right)$$

А если в Гёльдера суммы поменять на $\sum^{\infty}$, хотим $\ell: \mathbb{R}^{\infty} \to \mathbb{R}$ $\ell(\bar{x}) = \underbrace{\alpha_1 x_1 + \ldots}_{\text{сходится}}$

13 ④ Неравенство Минковского

$a_1 \ldots a_n;\ b_1 \ldots b_n,\ p > 1$, тогда
$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_i|^p\right)^{1/p}$$

Д-во: Заметим, что $\sum ||a_i| + |b_i||^p \geq \sum |a_i + b_i|^p$ №1 докажем для левой части. (для $a_i \geq 0$ $b_i \geq 0$)

Гёльдер
$$\sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (b_i + a_i)^{\overbrace{(p-1)q}^{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\sum b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (b_i + a_i)^p\right)^{1/q}$$

Сложим:
$$\left(\sum |a_i + b_i|^p\right)^1 \leq \left(\left(\sum a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum b_i^p\right)^{1/p}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1/q},$$ потом поделим на $\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1/q}$

$$\left(\sum (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\left(\sum a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum b_i^p\right)^{1/p}\right);$$

Интеграл

Неопределенный интеграл

Опр. (5) $f: \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$
$F: \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ назыв. первообразной, если $\forall x \in \langle a;b\rangle\ F'(x) = f(x)$
F - неопр. интеграл

$F := \int f(x)dx$

(6) Теорема $f \in C\langle a;b\rangle$, тогда $\exists \int f(x)dx$

Теорема F - первообр f на $\langle a;b\rangle$, тогда
1) $\forall C \in \mathbb{R}$ $F + C$ тоже первообр.
2) Если G - тоже первообр, то $F - G = const$ $(\forall x \in \langle a;b\rangle)$

1. Очевидно
2. $(F-G)' = f(x) - f(x) = 0$.

(7) Наблюд. Оф. таблица первообразных (можно без sh/...) содержится в Б/Демидовиче

А еще $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ (можно не писать)

И $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

(похоже на arctg...)

Теорема (14) Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Δ f, g имеют F, G, f+g имеет (F+G)

2. $\int f(x)\cdot\alpha\, dx = \alpha \int f(x)dx$

3. f имеет первообр. на $\langle a;b\rangle$, F
$\varphi: \langle c,d\rangle \to \langle a;b\rangle$ - дифф. тогда:

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))$

2.1 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\to \int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$

3. f, g дифф. на $\langle a;b\rangle$, $f'g$ имеет первообр тогда fg' тоже имеет и выполнено

Пример.

Лир. отступ

(8)

Д/З
lim
133
lim
13
lim

интегр. по частям:

$$\boxed{\int f g' = fg - \int f' g} \quad \left((fg)' = f'g + fg'\right)$$

Пример: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{x=\sin t}{=} \int \cos t \cdot \underbrace{\cos t\,dt}_{F(\sin t)} = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t \cdot \frac{1}{2} + C =$

$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C =$

$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C;$

Лир. отступ

Суммирование по частям (преобр. Абеля)

$\int f g' = fg - \int f' g$, по аналогии:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_k + a_{k+1}) B_k, \text{ где}$$

$$B_k = b_1 + \ldots + b_k$$

8

Д/З

1337

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ n>0,\ a>0}} \frac{x^n}{e^{ax}} = \left(\lim \frac{x}{e^{\frac{ax}{n}}}\right)^n = \left(\lim \frac{1}{e^{\frac{ax}{n}}}\right)^n = 0$$

1338

$t = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $-\frac{1}{x^2} = \ln t$, $x^2 = -\frac{1}{\ln t}$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \left(\lim \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)^{100} = \lim \frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{t}{\left(\frac{1}{\ln t}\right)^{50}} =$$

$$\cancel{= \lim t(\ln t)^{50}} = \cancel{\lim \ln t} \left(\lim \frac{t^{\frac{1}{50}}}{\frac{1}{\ln t}}\right)^{50} =$$

$$= \left(\lim \frac{\ln t}{t^{-\frac{1}{50}}}\right)^{50} = \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{50}t^{-\frac{51}{50}}} = -\frac{1}{50}t^{\frac{1}{50}} = 0$$

1339

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{100x}} = \lim \frac{x^2}{e^{\frac{x}{100x}}} = \lim \frac{2x}{e^{\frac{1}{100x}}\left(-\frac{1}{100}\right)\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\ }{e^{\frac{1}{100x}}}$$

$$= \lim \frac{2x\cdot 100}{e^{\frac{x}{100}}\cdot 1} = \lim \frac{200\cdot 100}{e^{\frac{x}{100}}\cdot 1} \to 0.$$

Лекция (24.02.2014)

Определенный интеграл

Опр. 9 $\mathcal{E}$ — мн-во всех подмножеств в $\mathbb{R}^2$ (фигур)

$\sigma: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ со св-вами:

1. Аддитивность: $A \cap B = \varnothing$, $\sigma(A \cup B) = \sigma A + \sigma B$
2. Нормировка: $\sigma([a;b] \times [c;d]) = (b-a)(d-c)$

... Называется площадью фигуры в $\mathbb{R}^2$ (σ)

Замеч: [Существует ли хоть одна площадь? — Да, и не одна]

1. σ — монотонна ($A \subset B$, $\sigma(A) \le \sigma(B)$)

$(\sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A))$

2. MN — вертикальный отрезок в $\mathbb{R}^2$, $\sigma(MN) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad \varepsilon / 2MN$, $|MN| \times 1.01$ ... Ну понятно короче

9 Опр. (св-во) Ослабленная аддитивность:

$\forall A, B$ если $\exists$ верт. отрезок l, $A \cap B \subset l$, то $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B)$

Площадь: $\sigma: \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$, монот., ослабленная аддитивн.

Опр. $f: \langle a; b \rangle \to \mathbb{R}$: полож. срезка $f_+: \langle a; b \rangle \to \mathbb{R}$,

$f_+(x) = \max(f(x); 0)$

$f - f \langle a; b \rangle \to \mathbb{R}$, $f_-(x) = \max(-f(x); 0)$ — отр. срезка

Очевидно: $f = f_+ - f_-$; $f_+ + f_- = |f|$

И короче...

Опр. $f: \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ $\langle c;d\rangle \subset \langle a;b\rangle$; $f \geq 0$

Подграфик f на $\langle c, d\rangle$

$$\Pi\Gamma(f, \langle c;d\rangle) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle c;d\rangle, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(10)

Опр. Интеграл f по промежутку $[a;b]$ д/г

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma(\Pi\Gamma(f_+ [a;b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f_- [a;b]))$$

Зам. 1. Если f неотриц. на $[a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

2. $f = c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

3. $-\int_a^b f(x)dx = \int_a^b -f(x)dx$

$(-f_+) = f_-$; $(-f_-) = f_+$; (по опр. выводится)

(18)

Св-ва. Св-ва интеграла

1. f — задана на $C[a;b]$
Аддитивность по промежутку
$a < c < b$
Тогда $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Список опечаток
1. σ и δ равно $+\infty$
2. Опр. интеграла — для огр. ф-й.
3. Думается, что f всегда непрерывна

$\Pi\Gamma(f_+, [a;b]) = \Pi\Gamma(f_+, [a;c]) \cup$
$\cup \Pi\Gamma(f_+, [c;b])$

2. $f, g \in C[a;b]$ $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

$\Pi\Gamma(f_+, [a;b]) \subset \Pi\Gamma(g_+, [a;b])$
$\sigma(\ldots) \leq \sigma(\ldots)$
$\Pi\Gamma(f_-, [a;b]) \supset \Pi\Gamma(g_-, [a;b]) \ldots$

Зам 1 Св-во 1 иногда так:
Проинтегрируем $f \leq g$ по $[a;b]$ (19)

Зам. 2 $f \in C[a;b]$ $(b-a)\min_{[a;b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\max_{[a;b]} f$ ✓

Зам. 3 $f \in C[a;b]$ $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ ✓

Зам. 4 Следствие (т. о среднем) ✓

$f \in C[a;b]$ Тогда $\forall c \in [a;b]: \int_a^b f = f(c)(b-a)$

Д-во: ↓

Зам. 5
Опр.
(11)
Теорема:
(17)
Д-во:
Следств.
(17)
+ кус-непр.
Д-во
Опр
Теор

$\min\limits_{[a;b]} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le \max\limits_{[a;b]} f$

по теореме о сохр. нр-ва $\exists c \ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

Зам. 5 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (по опр)

Опр. $f \in C[a;b]$ Ф-я $\Phi : [a;b] \to \mathbb{R}$

11 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ — интегралом с переменным верхним пределом

Теорема: 17 (Барроу) $f \in C[a;b]$, тогда $\forall x \in [a;b]$

$\Phi'(x) = f(x)$

Д-во: $\Phi'(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\Phi(x+t) - \Phi(x)}{t}$;

1. $\exists t \to 0+$, тогда $\Phi' = \lim\limits_{t\to +0} \frac{1}{t}\left(\int_a^{x+t} f - \int_a^x f\right) =$
$= \lim \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f = \lim f(c_t) =$; $c_t \to x \ (t\to 0)$; $= f(x)$
$x < c_t < x+t$

2. $\exists t \to -0$, $\lim\limits_{t\to -0} \frac{1}{t}\left(\int_a^{x+t} f - \int_a^x f\right) = \lim\limits_{t\to -0} \frac{-1}{t}\int_{x+t}^x f = \lim f(c_t) = f(x)$

Следств. 17 + кус-непр. ф-ла Ньютона-Лейбница

$f \in C[a;b]$, F — первообразная $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Д-во: Φ — первообразная, $\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a)$

F — другая первообр., $F = \Phi + C$, ▽

Опр $\int_a^b f_{\text{непр.}} = \begin{cases} \text{то, что уже знаем} & b > a \\ 0 & b = a \\ -\int_b^a f \text{ в старом смысле} & b < a \end{cases}$

Теор о линейности интеграла

$f, g \in C[a;b]$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$

Д-во: F — перв. f, G — перв. g; тогда

$\alpha F + \beta G$ — первообр $(\alpha f + \beta g)$

$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(a) - \beta G(a) = \ldots$

Теор. (19) **Неравенство Чебышева**

$f, g \in C[a;b]$, возрастающие

Тогда $\int_a^b f \cdot \int_a^b g \le \frac{1}{(b-a)} \int_a^b fg$

Замет: $\exists\, I_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$, тогда $I_f I_g \le I_{fg}$

Д-во: $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \ge 0$

$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \ge 0$

интегрируем по y на $[a;b]$

x – фиксирована

$(b-a) \cdot f(x)g(x) - g(x)\int_a^b f - f(x)\int_a^b g + \int_a^b fg \ge 0$

$f(x)g(x) - g(x) I_f - f(x) I_g + I_{fg} \ge 0$

$\int_a^b fg - I_f \int_a^b g - I_g \int_a^b f + (b-a) I_{fg} \ge 0$

$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \ge 0$

$I_{fg} \ge I_g I_f \quad \nabla$

Теорема $f, g \in C^1[a;b]$, тогда

$$\int_a^b f g' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

Д-во $fg' = (fg)' - f'g$, отсюда применяю ф-лу Ньютона – Лейбница

Пример (20) ($\pi \notin \mathbb{Q}$)

$$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^n}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^n \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int \cancel{x}\left(\frac{\pi^2}{4} - 2x^{\cancel{}}\right)^{n-1} \sin x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\underbrace{\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^n \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{0}\right) + \frac{2}{(n-1)!} \int \underbrace{x\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^{n-1}}_{f} \underbrace{\sin x\, dx}_{g}$$

$$= \frac{-2}{(n-1)!}\, x\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^{n-1} \cos x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^{n-1} - \frac{\pi^2}{2}(n-1) \cdot\right.$$

Теорема (21)

$$\cdot \left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^{n-2}\Big)\cos x\,dx = (4n-2)H_{n-1} - \pi^2 H_{n-2} =$$

$$= \ldots H_1 + \ldots H_0 = P_{2n}(\pi^2)\quad P_n(\pi^2)(AH_0 + BH_1)$$

$\hookrightarrow$ многочлен с целыми коэф.

Пусть π^2 рационально

$\pi^2 = \frac{p}{q}$ (несократимая запись),

тогда

$$H_n = P_{2n}\left(\frac{p}{q}\right), \text{ а } \quad q^{2n} H_n = \underbrace{P_{2n}\left(\frac{p}{q}\right) q^{2n}}_{\text{целое число}}$$

Но это невозможно, ведь

$H_n > 0$, значит $q^{2n} H_n \in \mathbb{N}$,

но

$\lim\limits_{n\to+\infty} q^{2n} H_n = 0$, докажем это:

$$\left| \frac{q^{2n}}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)^n \cos x\,dx \right| \le \frac{q^{2n}}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \cdot \pi \to 0$$

Во! π иррационально. З.б.с (понятно короч)

Теорема Валлиса (1616-1703) $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2k}$

(21)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'}\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \ldots = \frac{(n-1)!!}{n!!}(I_0 \text{ или } I_1)$$

(при $n=2$ все ок)

$I_0 = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = 1$

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}, \text{ если } n \text{ - чет.}\right)$$

$\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$ на $[0; \pi/2]$

Проинтегр. на $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\underbrace{\frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)((2k-1)!!)^2}}_{B} \le \frac{\pi}{2} \le \underbrace{\frac{2k\,((2k-2)!!)^2}{((2k-1)!!)^2}}_{A}$$

$$0 \le A - B = \frac{B}{2k} \le \frac{\pi}{4k} \to 0$$

3.03.2011 Лекция

Теорема: Замена переменных в опр. интеграле

$f \in C(\langle\alpha, \beta\rangle)$, $\varphi \in C^1[p, q]$, $\varphi([p,q]) \subset \langle\alpha,\beta\rangle$

Тогда $\int_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx$

Д-во: F - первообр. для $f(x)$ на $\langle\alpha,\beta\rangle$,
обе части равны $F(\varphi(q)) - F(\varphi(p))$ $\left(F(\varphi(t)) \text{ - первообр. для } f(\varphi(t))\varphi'(t)\right)$

∇

Комм: $\int_0^{\pi} \varphi\text{-}e\,dt = \int_0^{\pi} \langle\text{подставим}\rangle \cos t\,dt = \int_0^0 \tilde{f}(x)\,dx = 0$

Теорема 15: Интегрирование рациональных дробей

$P(x), Q(x)$ - вещ. многочлены, $\deg P < \deg Q$

$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}(\ldots)$ ← аналогич.

аналогично

$\beta_1^2 - 4\gamma_1 < 0$

Тогда $\exists \underbrace{A_{11} \ldots A_{1k_1}}_{\text{1 лин. скобка}}; \underbrace{A_{21} \ldots A_{2k_2}}_{\text{2 лин. ск.}}; \ldots; \underbrace{B_{11} \ldots B_{1m_1}; C_{11} \ldots C_{1m_1}}_{\text{1 квадр. скобка}}; \ldots \in \mathbb{R}$, такие, что:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k}}{(x-\alpha_1)^k}\right) + \overset{\text{анал.}}{\ldots} +$$
$$+ \left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} \ldots + \frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1}}\right) + \overset{\text{аналог.}}{\ldots};$$

Д-во: Рассматриваем случай без квадрат. множит.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1} Q_1(x)} = \frac{1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} \cdot \left[A_1 k_1 + A_{1k_1-1}(x-\alpha_1) + \ldots\right.$$
$(Q_1(\alpha_1) \neq 0)$
$$\left. + A_{11}(x-\alpha_1)^{k_1-1} + o((x-\alpha_1)^{k_1-1})\right] = \frac{1}{\ldots}\left[\ldots + O((x-\alpha_1)^{k_1})\right] =$$
$$= \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)^1} + O(1)$$ — асимпт. разл. $P(x)/Q(x)$ при $x \to \alpha_1$ по шкале $(x-\alpha)^n$

То же самое для $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha$. (в квадрат скобке)

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1} Q_1(x)} - \left(\frac{A_1 k_1}{(x-\alpha_1)^k} + \dots + \frac{A_1 1}{(x-\alpha_1)^1}\right) = O(1)$$

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ − (все слаг. из доп-мат ф-ии) − огр. ф-я в окрестности $\alpha_1, \alpha_2 \dots$

0 (индивидуально) при $x \to +\infty$

∇

13 Замеч.

Остроградский:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots}{(x-\alpha_1)^{k_1 - 1} \dots (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1 - 1}}\right)' + \frac{B_0 + B_1 x + \dots}{(x-\alpha_1) \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)}$$

Теорема 22

Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

$f \in C^{n+1}(\langle a; b \rangle)$ $\quad x, x_0 \in \langle a; b \rangle$,

Тогда: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt}_{\text{собств. сам остаток}}$$

Д-во:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int \dots \overset{\text{инт. по частям}}{=}$$

$$= \langle \text{интегр. по частям} \rangle = f(x_0) - (x-t) f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} +$$

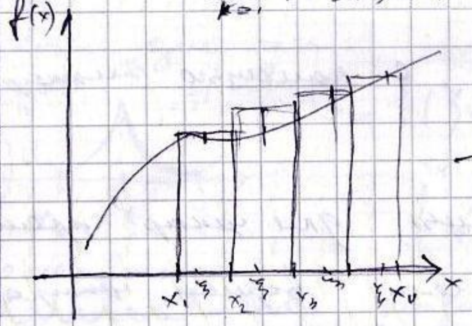
$$+ \frac{1}{1!} \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt = \dots \text{и т.д.} \dots$$

§3. Интегральные суммы

12 **Опр** $[a; b]$ $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — дробление промежутка ($\{x_i\}_{i=1}^n$) (τ)

Опр $\xi_1 \dots \xi_n$ — набор точек: $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]_{k=1}^n$ — оснащение

Опр $f: [a; b] \to \mathbb{R}$; выбрано дробление τ, оснащение тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — интегральная сумма



— графическая иллюстрация короч)))

Теорема (23) о пределе интегральной суммы:

$f \in C[a;b]$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid$ если T — дробл. $[a;b]$ и $d(x_{n-1}; x_n) < \delta$ и $\xi_1, \dots \xi_n$ — произв. оснащение $(x_{n-1}; x_n)$, то

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Д-во: посмотрим на теорему Кантора, берем оттуда δ;

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dt \ ;\ (d_k)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\xi_k)\,dt \quad f(x)\,dx \quad \text{Magic}$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k))\,dx \right| \le$$

$$\le \sum \left| \dots \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(\xi_k)|\,dx < [\text{Кантор}] <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} 1 = \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\sum (x_k - x_{k-1}) \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \varepsilon;$$

Замечан. „Интегральная сумма" = „Римановы суммы"

Определить можно интеграл через них, тогда это назыв. „интеграл по Коши".

Упр. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = ?$ $(\ln 2?)$

Если шанс 100 голов подряд с вероятностью $\frac{1}{2}$ выбрать конверт, получить с $\frac{1}{2^{100}} \to \infty^{-1}$

СР. 1, ab, Волхов

$$\int\limits_{\min(a;b)}^{\max(a;b)} \big((a+1)x-(b+1)\big)\,dx$$ с помощью интегр. сумм

(14)

Теор. Интегральные суммы для центр. промежутков.

Мысли Кохася:

(24)

типа если возьмем центральное ξ, приближение к площади еще лучше

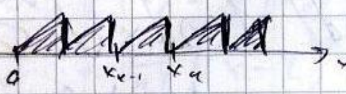
$f(u)-f(v)=f'(c)(u-v)$

Пусть $f\in C^1[a;b]$ $|f'(c)|\le M$

$\forall u,v$ $|f(u)-f(v)|\le M|u-v|$

$$\sum\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(\xi_k)|\,dx \le \sum\int_{x_{k-1}}^{x_k} M|x-\xi_k|\,dx \le$$

$$\le M\sum\int_{x_{k-1}}^{x_k}|x-\xi_k|\,dx = \frac{(b-a)^2}{2n}M$$



Вот тогда видно, что там ближе к $\int$

Д-во и формулировка:

А теперь теорема:

$f\in C^2[a;b]$, $a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_n=b$

$\delta=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-x_{k-1}|$, $\xi_k=\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}$

Тогда $$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| < \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,dx$$

Д-во:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \int_{\xi_k}^{x_k} f(x)\,d(x-x_k)+\int_{x_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\,d(x-x_{k-1}) =$$

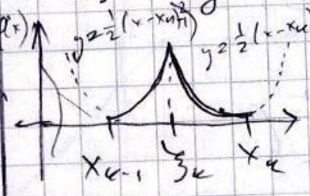
$$= f(x)(x-x_k)\Big|_{x=\xi_k}^{x=x_k} + \int_{\xi_k}^{\xi_k} f'(x)(x-x_k)\,dx +$$

$$+ f(x)(x-x_{k-1})\Big|_{x=x_{k-1}}^{x=\xi_k} - \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} f'(x)(x-x_{k-1})\,dx =$$

$$= f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) - \int_{\xi_k}^{x_k} f'(x)(x-x_k)\,dx - \int_{x_{k-1}}^{\xi_k} f'(x)(x-x_{k-1})\,dx =$$

$= f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \left(f'(x)\frac{(x-x_k)^2}{2} \right)\Big|_{x=\xi_k}^{x=x_k} - \int_{\xi_k}^{x_k} \left(f''(x)\frac{(x-x_k)^2}{2}\right) -$

— еще одно =



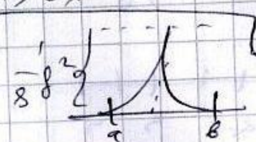
$= f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\varphi(x)\,dx =$ похоже

$= \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$

зададим такое φ тогда верните и неравенству

$\int_a^b f(x) - \sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$ — на $(a;b)$ неогр. $0 \le \varphi(x) \le \frac{1}{8}\delta^2$

$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \le$



$b-a \le \delta$ по усл.

$\le \left| \int_a^b f''\varphi(x)dx \right| \le \int_a^b |f''\varphi(x)dx| \le$

$\le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b f''(x)\,dx$

Открываю танат и Демидовича и зарешиваю:

1792

$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^n}{x} - \int n x^{n-1}\cdot\frac{1}{x} = x^{n-1} - n\int 1 x^{n-2} =$

$\varphi(x)\ f'(x)$

$\varphi(x) = nx^{n-1}\ f(x) = \frac{1}{x}$

$= x^{n-1} - n(n-1)x^{n-1} = x^{n-1}(1-n^2+n)$

1795

$\int x e^{-x} dx = -\int -x e^{-x} dx = -\int \frac{de^{-x}}{dx}dx = -\int de^{-x} = -e^{-x}$

1806

$\int x^3 \arccos x\,dx = \frac{x^2}{2}\arccos x + \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2}\arccos x -$?

$f'\ \ g$

$f = \frac{x^2}{2}\ \ g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{10}{3} = 4$

$\int_0^4 (x-5)dx = \sum_{k=1}^{10} \left(f\left((k+1)\frac{4}{10}\right) - f\left(k\frac{4}{10}\right) \right)\cdot x$

$f(k$

0 1 2 3 4

$= \alpha \ln(x-1) + \beta \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \int \frac{-\frac{1}{2\gamma}x - \frac{\delta}{2\gamma}}{(x+1)^2+1} =$

$= -\frac{1}{50}\int \frac{2x+16}{(x+1)^2+1} = -\frac{1}{50}\left(\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+1} - \frac{\delta}{2\gamma}(\dots)\right)$

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+2x+2)^{2-1}} + \int \frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+2}\,dx$

$\frac{x}{(x^2+2x+2)^3} = \left(\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+2x+2)}\right)' + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+2x+2}$

1921. $I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \dots \int (\quad) \dots$

Д/З: 1879, 1921, СР, Гюнтер §§1, 2, 6

Лекция 10.03.2014 Я перестрою пол)))00)0)000)

Если некоторый иной вариант оценить 'суммы'

типа трапеции:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})$$

15

Теорема о формуле трапеций: $f \in C^2[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\left(\delta = \max_{k\in[1,n]}(x_k-x_{k-1})\right)$

25 Тогда $\left|\int_a^b f\,dx - \sum \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1})\right| \le$

$\le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,dx$ (как в предыдущей теореме)

Д-во: $\exists\, t_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = f(x)(x-t_k)\Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} - \int f'(x)(x-t_k)\,dx$

$\begin{bmatrix} u=f, & u'=f' \\ v'=1, & v=x-t_k \end{bmatrix}$ $\quad x_{k-1}<x<x_k \quad v'=(x-t_k)$, $v = -\frac{1}{2}(x_k-x)(x_{k-1}-x)$

$= \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k-x_{k-1}) - \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}(x_k-x)(x_{k-1}-x)f'\Big|_{x=x_{k-1}}^{x_k}}_{=0} +$

$+ \frac{1}{2}\int f''(x)(x_k-x)(x_{k-1}-x)\,dx\Big)$

И такое супер-неравенство.

$$\left|\int_0^6 f - \sum\right| \le \left|\sum \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\,dx - \sum \frac{f(x_{k-1})-f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right|$$ Пример 3

подставим сюда...

$$= \left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x_k-x)(x-x_{k-1})\,dx\right| \le \frac{1}{2}\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(x)| \underbrace{|(x_k-x)(x_{k-1}|}_{\le \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{4} \le \frac{\delta^2}{4}}$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{4}\int_a^b |f''(x)|\,dx = \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,dx \text{; solved}$$

∇

Замеч: Если функция выпукла ($f'' \ge 0$) $\int - \sum \le 0$

Еще без д-ва для средних прямоуг. $\int - \sum \ge 0$

Следств.[+25]: Формула Эйлера - Маклорена

$m, n \in \mathbb{Z}$, $f \in C^2[m,n]$, тогда дробная

штрих $\sum_{k=m}^{n}{}' f(x) = \int_m^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})\,dx$

$$\left[\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(m) + \frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})\right]$$ (28) Теорема

Д-во: какое-то очевидное из пред. теорем

Следств. (26) Теорема Гаусса через Эйлера - Маклорена

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p = \int_1^n x^p\,dx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\int_1^n p(p-1)x^{p-2}\{x\}\cdot$$

$$\cdot(1-\{x\})\,dx = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2} + O(\max(1, n^{p+1}))$$

$$\left(\left|\int p(p+1)x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\,dx\right| < C\cdot\int x^{p-2} \sim Cn^{p-1}\right) \le C\left(\frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}\right) \le C\max(n^{p-1}, 1)$$ (29) Теорема

Пример 1 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + O(1)$

$$1^\pi + 2^\pi + \dots + n^\pi = \frac{n^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{n^\pi}{2} + O(n^{\pi-1})$$

Пример 2 $p = -1$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx + \frac{\frac{1}{n}-1}{2} +$

$$+ \underbrace{\int_1^n \left(\{x\}(1-\{x\})/x^3\right)\cdot dx}_{\le\frac{1}{3}\text{(посчит.)}} = \ln n + \gamma + o(1)\quad \ln n \le \gamma \le \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

монотонно растет как $b(n)$

Пример 3

27

формула Стирлинга

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x\,dx + \frac{\ln(n)+\ln 1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{x\}\cdot(1-\{x\})}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^n \ln x = x\ln x - x\Big|_1^n = n\ln n - n$$

$$\sum_{k=1}^n \ln k = n\ln n - n + \frac{\ln n}{2} + C + O(1)$$, посчитаем exp

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^C \underbrace{e^{O(1)}}_{\to 1} \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\, e^C$$

Заюзаем формулу Валлиса:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)} = \lim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{(2\cdot 4\cdots(2k))^2}{2k!} =$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2^{2k}\cdot(k!)^2}{(2k)!} \sim \lim \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{2^{2k}\cdot k^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot k\cdot e^{2C}}{(2k)^{2k}\cdot e^{-2k}\cdot\sqrt{2k}\cdot e^{C}} = \frac{e^C}{\sqrt{2}}$$

$$e^C = \sqrt{2\pi}$$

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

28 Теорема

н-во Гёльдера

$f, g \in C[a,b]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$

Тогда $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

$a \longrightarrow b$ $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\sum a_k b_k \le \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}$$

$$\sum f(x_k)g(x_k)\Delta x_k = \sum f(x_k)(\Delta x_k)^{1/p}\cdot g(x_k)\cdot(\Delta x_k)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum |f(x_k)|^p \Delta x_k\right)^{1/p}\left(\sum |g(x_k)|^q \Delta x_k\right)^{1/q}$$, + переход пок

29 Теорема

н-во Йенсена

f - выпукл. на $\langle A, B\rangle$, $\varphi: [a,b] \to \langle A, B\rangle$

$\lambda: [a,b] \to [0, +\infty)$ - непр., $\int_a^b \lambda(x)\,dx = 1$

Тогда $f\left(\int_a^b \lambda(x)\varphi(x)\,dx\right) \le \int_a^b \lambda(x) f(\varphi(x))\,dx$

Д-во: $f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

$c = \int_a^b \lambda(x)\varphi(x) \le \max\varphi \int_a^b \lambda(x)dx \le \max\varphi$ $(C \ge \min\varphi)$

$y = \alpha x + \beta$ – опорная прямая в точке C

$f(C) = \alpha C + \beta$, $\forall x$ $(f(x) \ge \alpha x + \beta)$

$f(c) = \alpha c + \beta = \alpha \int_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx + \beta \int_a^b \lambda(x)dx =$

$= \int_a^b \lambda(x)(\alpha\varphi(x) + \beta)dx \le \int_a^b \lambda(x) f(\varphi(x))dx$ ∇

C не лежит на концах $\langle a;b\rangle$:

$f(\varphi \int_a^b \lambda(x)) \le \int_a^b \lambda(x) f(\varphi)dx$;

$E := \{x \;\; \lambda(x) \ne 0\}$; $\max\varphi \Leftrightarrow \sup_E \varphi$

$c = \int_a^b \lambda(x)\varphi(x) \le \sup_E \varphi \int_a^b \lambda(x)dx < \sup_E \varphi \le B$

$C > \min\varphi$

Опр $f \in C[a;b]$, тогда величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ∇ средним (арифм.) f на $[a;b]$

Тогда если $f > 0$, то величина $\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right)$ ∇ средним геометрическим f на $[a;b]$

(29)

Теорема: $f \in C[a;b]$, $f \ge 0$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ge e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$

$\left(\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2}, \; \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} \le \ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$

Д-во: $\lambda(x) = \frac{1}{b-a}$, $\varphi(x) = \ln f(x)$ – сдвоение

$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$

Заметим, что f из теоремы $= \ln$ – сдвоение

$f\left(\int_a^b \lambda(x)\varphi(x)dx\right) \ge \int_a^b \lambda(x) f(\varphi(x))dx$ – нер-во Йенсена

норм.

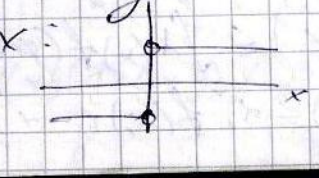
∇

Опр $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ ∇ кусочно-непрерывной, если

1) она непрерывна везде кроме кон. числа точек.

2) f – ограничена – условие)

Пример: $\operatorname{sign} x$:



≥ min φ)

$dx =$

∇
на
$<a, b>$:

B

min φ

$\int_b (\ln f(x) dx)$

$\int \ln f(x) dx$

ник

н-во Гёльдера
норм

нок, если
точек.

Опред: $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ кусочно непрерывна
$F\ [a,b] \to \mathbb{R}$ — почти первообразная f, если
1) $F'(x) = f(x)$ всюду кроме конеч. числа точек
2) $F(x)$ — непрерывна

Утвер.: f — кусочно непрер., F — почти перв. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum F_k(x_k) - F_k(x_{k-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots = F(b) - F(a)$$

Пример: Неравенство Чебышева

$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$, тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ge \left(\frac{1}{n}\sum a_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum b_k\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & x \in [0;1] \\ \vdots \\ a_n & x \in (n-1; n] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{cases}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x) \ge \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\right)$$

$a = 0,\ b = n$

Из пилы д/з.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} - \int \underbrace{x}_{u' = x} \cdot \underbrace{\ln(\sin x) \cos x}_{v =}\, dx = \qquad u = \frac{x^2}{2} \quad v' =$$

$$= \frac{x}{\sin x} - \left(\quad \right)$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \frac{x^2+1+2x^2-2x^2}{(x^2+1)^2-2x^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)} =$$

17.03.2014

Приложение опр. интегр.

> 1. Общ. схема

Опр. а) $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ $\quad \mathrm{Segm}[a,b] = \{[p,q] \mid [p,q] \subset [a,b]\}$

б) Ф-я отрезка – ф-я вида: $\Phi: \mathrm{Segm}[a,b] \to \mathbb{R}$, $\Phi[c,c] = 0$;

в) Аддитивная ф-я промежутка $\Phi: \mathrm{Segm}[a,b] \to \mathbb{R}$

$\forall [p,q] \subset [a,b] \quad \forall c \in (p,q) \quad \Phi[p,q] = \Phi[p,c] + \Phi[c,q]$

г) Плотность аддитивной ф-ии промежутка

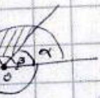
$\Phi: \mathrm{Segm}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R} \quad f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

f – плотность Φ если $\forall [p,q] \subset \langle a,b\rangle$:

$(\inf_{[p,q]} f)(q-p) \le \Phi[p,q] \le \sup_{[p,q]} f \cdot (q-p)$

Пример: 1) $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}_+$ (f – плотность)

$\varphi[p,q] := \sigma(\Pi\Gamma^-(f,[p,q])) = \int_p^q f(x)\,dx$ $\quad$ непр. ≥ 0

2) $\Phi: \mathrm{Segm}[0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, Доме привел, что 

$\Phi[\alpha,\beta]$ = площадь кривол. сектора

Теорема (30) О вычислении о вычисл. адд. ф-ии по плотности (непр.)

$\Phi: \mathrm{Segm}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $\quad f$ – пл-ть Φ

Тогда $\forall [p,q] \subset \langle a,b\rangle \quad \Phi[p,q] = \int_p^q f$

Д-во: $F(x) = \begin{cases} 0, & x = p \\ \Phi[p,x], & p < x \le q \end{cases} \quad F(x): [p,q] \to \mathbb{R}$

$x_0 \in [p,q]$; $h > 0$ $\quad F(x_0+h) - F(x_0)$

$F(x_0+h) = \Phi[p, x_0+h] = \Phi[p, x_0] + \Phi[x_0, x_0+h]$

$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{\Phi[x_0, x_0+h]}{h} \in [\inf f, \sup f] \xrightarrow[h \to 0]{} f(x)$

T2 (31) Обобщ. теорема о площади:

$\Phi: \text{Segm}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $\quad f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

Доп: $\exists$ ф-ия пр-ка $\Delta \subset \langle a,b\rangle \longmapsto m_\Delta, M_\Delta$ (32)

① $\forall \Delta \subset \langle a,b\rangle \quad m_\Delta \cdot l(\Delta) \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot l(\Delta)$

② $\forall \Delta \; \forall x \in \Delta \quad m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

③ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta \subset \langle a,b\rangle : l(\Delta) < \delta, x \in \Delta:$

$|M_\Delta - m_\Delta| < \varepsilon.$

Тогда $\Phi[p,q] = \int_p^q f$ (для всех $[p,q] \in \langle a,b\rangle$)

Д-во:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = p \\ \Phi[p,x] & p < x \le q \end{cases}$$

тогда $m_\Delta \le \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \le M_\Delta \qquad \Delta = [x, x+h]$

$m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow F'_+(x) = f(x)$$

аналог. $F'_-(x) = f(x)$

Прилож. 2. Площади

$f \Longrightarrow \sigma\,\Pi\Gamma(f, [p,q]) = \int_p^q f \quad (f \ge 0)$

Кстати: Пусть f - задано параметр. $(x(t), y(t))$ плоское

$(x,y): [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$

$x(\alpha) = p \qquad x(\beta) = q$

$y(\alpha) = f(p) \qquad y(\beta) = f(q)$

(32) $\sigma\,\Pi\Gamma(f, [p,q]) = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\,dt$

Пример $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$y = b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}, \quad y = -b\sqrt{1 - \dots}$ для нижн. части.

$x(t) = a\cos t, \; y(t) = b\sin t \qquad \sigma_{\text{элл}} = -\int_0^{2\pi} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt = \pi ab$

$= ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t =$

32

2. $[\alpha,\beta] \subset [0, 2\pi)$, $\rho: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_+$, непр.

$A = \{(r,\varphi) : \varphi \in [\alpha,\beta],\ 0 \le r \le \rho(\varphi)\}$

Тогда $\sigma(A) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi$.

Δ Это вычисл. φ-ии пр-на $\Phi[\alpha_1, \alpha_2]$ = пл. кр. сектора

$[\alpha_1, \alpha_2]$: $\left(\min\limits_{\varphi\in[\alpha_1,\alpha_2]} \frac{1}{2}\rho^2(\varphi)\right)(\alpha_2-\alpha_1) \le \Phi[\alpha_1,\alpha_2] \le \left(\max \frac{1}{2}\rho^2(x)\right)(\alpha_2-\alpha_1)$

площадь кругл. сектора

Ну тогда рассмотрим 2 кругл. сектора
$R_1 = \min \rho(\varphi)$
$R_2 = \max \rho(\varphi)$

$\text{Кр.сект}_{R_1} < A < \text{Кр.сект}_{R_2}$,

$\min \frac{1}{2}\rho^2(\varphi) = \frac{1}{2}(\min \rho)^2 (\alpha_2 - \alpha_1)$, ... $\alpha_2 - \alpha_1 \to 0$ ... ?!?;

∇

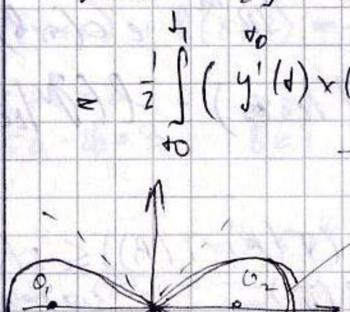
Наблюдение: Пусть кривая задана $x(t), y(t)$

$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{y(t)}{x(t)}$ $\quad \rho^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2$

$\sigma(A) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + y(t)^2)\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - x'y}{x^2}\, dt =$

$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(y'(t)x(t) - x'(t)y(t)\right) dt$ – площ. криволин. сектора при угле

— / —, —



$l = \{L \in \mathbb{R}^2 \mid |LO_1||LO_2| = a^2\}$

$((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) = a^4$

$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$

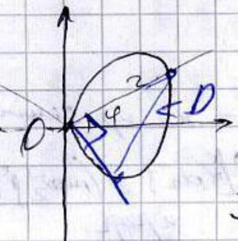
Тогда $\sigma = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2$

А теперь кардиоид.

Пример: (33) Изопериметрическое н-во

A - выпуклая, замкнута, D - диаметр - макс. расст. $D = \sup\{\rho(A,B) \mid A, B \in A\}$

Тогда $\sigma(A) \le \frac{\pi D^2}{4}$ и достигается для круга



Д-во:

1 Проведем верт. опорную прямую, ⊃ O - начало коорд. Теорема

$\rho(\varphi)$ - непрерывная на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\sigma A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2(\varphi - \tfrac{\pi}{2})\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\rho^2(\varphi) + \rho^2(\varphi - \tfrac{\pi}{2})\right) d\varphi \overset{\text{Пифагор}}{=} AB^2 \le D^2 \le \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} D^2\, d\varphi = \frac{\pi}{4} D^2$$

§ 3. Длина Пути

$\gamma: [a, \beta] \to \mathbb{R}^m$, непрерывн.

$\gamma([a, \beta])$ - носитель пути

Опр: φ-е, заданное на мн-ве гладких путей в $\mathbb{R}^m$, $\ell(\gamma)$

1) $\ell \ge 0$

2) аддитивность: $\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^m$, $c \in (a,b)$

$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{[a,c]}) + \ell(\gamma|_{[c,b]})$$

3) $\gamma, \tilde{\gamma}$, C_γ, $C_{\tilde{\gamma}}$ - носители:

$T: C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$ - сжатие: $\rho(T(A), T(B)) \le \rho(A,B)$ для люб. A, B

Биекция. Тогда $\ell(\tilde{\gamma}) \le \ell(\gamma)$

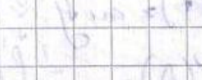
4) Нормировка

γ - лин. путь (т.е. $\gamma(t) = u + vt$, $t \in [a,b]$, $u, v \in \mathbb{R}^m$)

$\ell(\gamma) = (b-a)\cdot\|v\|$

Так вооот... такое $\ell(\gamma)$ - длина пути.

Замечание ① Длина дуги $\ge$ дл. хорды.



- сжатие

... расст.
$B \in A\}$

...ую, то

$\rho^2(\varphi - \frac{\pi}{2})\,d\varphi =$

$)^2 d\varphi = \frac{\pi}{4} D^2$

$\mathbb{R}^m$

$\in (a, b)$

$(\gamma|_{[c,b]})$

$) \le \rho(AB)$ для любых A, B

$\in [a,b], u, v \in \mathbb{R}^m)$

... пути.

— станет

② Длина при растяжении увеличивается

③ При „движении" дл. пути не меняется.

Из всего выходит $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_m'(t))$

Тоже покоординатные производные

А ещё $\gamma'(t)$ — вектор скорости.

Теорема: $\exists \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1([a,b])$

Тогда $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_m'(t)^2}\,dt$

А если $y = f(x)$ — кривая, $x = t$, $y = f(t)$, то

$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}\,dt$, а для polar: $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$

Подготовка к Ср про $\frac{P}{Q}$

$\int \frac{Px}{Qx} = \cancel{\frac{P(x)}{Q}}$

$\frac{P}{Q}$

рац. → понижаем → расп. на

непр. → эйлорова → $\frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = A + Bx + C$

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5}$$

$$a(x+5) + b(x-2) = 2x+3$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 1 \end{matrix}$$

$$x^4 + 5x^3 + 42 = \left(x^2 + \frac{5}{2}x\right)^2 - \frac{10}{4}x^2 + 42$$

$x^4 : (x^4 + 5x^3 + 4) = 1 - \frac{5}{x}$

$-\,x^4 + 5x^3 + 4$

$-5x^3 - 4$

$-5x^3 - 25x^2 - \frac{20}{x}$

$0 \quad 25x^2 + \frac{20}{x} - 4$

$\cancel{5x^3 + 3} \quad \cancel{x+1}$

$(x^4 + 5x^3 + 4) : (x+1) = 4$

$x^4 + 4$

$5x^3$

$4(x+1) \cdot (x^4 + 4)$

24.03.2014 Лекция

Теорема (34) о длине гл. пути $\gamma: [a;b] \to \mathbb{R}^m$ - гл. (C^1)

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Док-во: $\Phi([\alpha,\beta]) = \ell(\gamma|_{[\alpha,\beta]})$; (?) $\|\gamma'(t)\|$ - плотн. Φ

Юзаем обобщ. теорему плотности

$\Delta \subset [a,b]$, $m_{i\Delta} = \min_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|$, $M_{i,\Delta} = \max_{t\in\Delta} |\gamma_i'(t)|$

$M_\Delta = \sqrt{M_{1\Delta}^2 + \dots + M_{m\Delta}^2}$ | $m_\Delta = \sqrt{m_{1\Delta}^2 + \dots + m_{m\Delta}^2}$

1) $m_\Delta \le f(t) \le M_\Delta$, $t \in \Delta$, ② $m_\Delta \ell(\Delta) \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \ell(\Delta)$

③ & $M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[\substack{\ell(\Delta)\to 0 \\ x\in\Delta}]{} 0$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + \dots + (\gamma_m')^2}$ - ① очевидно

③ очевидно ($m_\Delta \to \gamma'$, $M_\Delta \to \gamma'$, ...) ? not sure

② $\tilde{\gamma}(t) = (M_1 t; M_2 t, \dots, M_m t)$, $t \in [a, b]$

Рассмотрим отобр: $C_\gamma \to C_{\tilde{\gamma}}$
$\gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$ расстояние

$$\rho(\gamma(t), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(t) - \gamma_i(t_1))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i'(\tilde{t}_i)^2 (t-t_1)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum M_i^2 (t-t_1)^2} = (t-t_1)\cdot M_\Delta = \rho(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\gamma}(t_1))$$

$$\ell(\gamma|_\Delta) = \Phi(\Delta) \le \ell(\tilde{\gamma}|_\Delta) = M_\Delta \ell_\Delta$$

∇

Пример: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow a\cos t = x$, $b\sin t = y$ $t \in [0, 2\pi]$

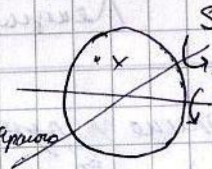
$\gamma = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\gamma' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$ - (:() не берется эллипт интеграл 2 рода

4. Объемы

А что такое объем?

Парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского



S 180°

T 120°

$S^2 = id$

$T^3 = id$

Сфера, 2 rand оси

Взять (·)x на сфере, будем ее вращать

$STTS\ldots \neq TS\ldots STTTSS$ (rand, rand)

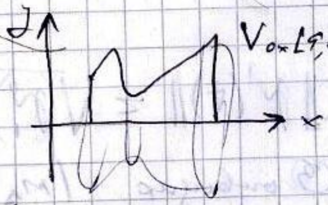
STTSTTTTSSSTS ×	Red	{A}
TS…… ✓	Blue	{B}
TT…… ✓	Green	{C}

И покрасим сферу в 3 цвета (аксиома выбора)

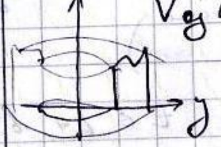
$T(K) = $ Син $T(C) = $ Зел $S(K) = C \cup З$

И это очень странно — объема нет. (либо аддитивен не на всех множествах, либо неадд на всех)

Теорема: (35) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, непр.



$V_{ox}[a,b]$



$V_{oy}[a,b]$

Вот так назвали

Тогда объем $V_{ox}[a;b] = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

объем $V_{oy}[a;b] = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$

Д-во:

$m_\Delta = 2\pi \min\limits_{x\in\Delta} 2x \min\limits_{x\in\Delta} f(x)$; $M_\Delta = \pi \max\limits_{x\in\Delta} 2x \max\limits_{x\in\Delta} f(x)$

$m_\Delta l(\Delta) \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta l(\Delta)$ - доказать, а ①, ② очевидны.

$\Phi(\Delta) \le$ цилиндр. кольца ($\min = \alpha$, $\max = \beta$, $h = \max f(x)$)

$= \pi\beta^2 \operatorname{Max} f(x) - \pi\alpha^2 \operatorname{Max} f(x) = \pi \operatorname{Max}(f(x)) \cdot \underbrace{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}_{\le \max_\Delta 2x}$

Ещё также же для $\Phi(\Delta) \ge$ мин. колец.

▷

5) Несобственный интеграл:

f - измер. непр.,   F - почти первообр.

$F'(x) = f(x)$

Опр: 1. 2.

Замеч.

(36) ↓ Св-ва:

Опр: 1. $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ — допустимая, если
$\forall c \in (a,b)$ f — кусочно-непр. на $[a,c]$

2. f допустима на $[a,b)$; если

$\exists \lim\limits_{c \to b-0} \int_a^c f(x)\,dx$ — то он ∂н несобств. интегралом f по $[a,b]$ $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$

А если этого предела не существует, то несобств. интеграл не существует.
А если предел конечен, то несобств. интегр. сходится, расходится — $\nexists \vee \infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} = \lim \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right)\Bigg|_1^c = \quad (\alpha \neq 1)$$

$$= \begin{cases} \alpha > 1 & \text{Сходится} \\ +\infty & \text{если } \alpha < 0 \text{ — расходится} \end{cases}$$

Пример)))))00))0

А если $\alpha = 1$, то $\lim \int_1^c \frac{1}{x} = \lim \ln x \Big|_1^c = +\infty$

Замеч. 1. Аналогично $\exists \int_{\to a}^{b} \Rightarrow \int_{-\infty}^{b}$ 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{+\infty}$ и проверим по отдельности

36

3. Если „проблем" у ф-ции несколько, то разбиваем на отрезки, где лишь одна проблема

Св-ва: 0. Критерий Больцано-Коши сходимости интеграла

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $a < b \le +\infty$, f — допустима

$\int_a^{\to b} f$ — сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a,b)\ \forall b_1, b_2:$
$B < b_1 < b_2 < b$
$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

Д-во очевидно по опр.

А если расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall B \in [a,b)\ \exists b_1, b_2$
$B < b_1 < b_2 < b$
$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \ge \varepsilon$

② $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, доп., $c \in [a,b)$

Тогда $\int_a^{\to b} f \overset{*}{=} \int_a^c f + \int_c^{\to b}$ [*: одновр. сх/расх для неравенство-в см. сходимость

Д-во

$A: c < A < b$ $\int_a^A = \int_a^c + \int_c^A$ Перейти к пределу $A \to b-0$

③ Линейность

f, g – допустимы: $[a,b) \to \mathbb{R}$ $\int_a^{\to b} f$ $\int_a^{\to b} g$ – сход.

Тогда 1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ λf – доп и $\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b} f$

2) $f+g$ – доп $\int_a^{\to b} (f+g) = \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$

Д-ва нет (упр.)

④ $f, g: [a,b) \to \mathbb{R}$, доп $\int^{\to b} f$ $\int^{\to b} g$ – сх

$\forall x\ f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^{\to b} f \le \int_a^{\to b} g$

⑤ f, g – диф. $[a,b)$ f', g' – доп $[a,b)$, f, g – доп

Тогда* $\int_a^{\to b} f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f(x) g'(x)\,dx$

[* если хотя бы 2 предела из 3 существуют]

⑥ $\varphi: [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle$

φ – гладкая $\exists \varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$

$f \in C(\langle A, B\rangle)$, тогда* [* если хотя бы один $\exists$, то $\exists$ и другой и они равны]

$\int_\alpha^{\to\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\to\varphi(\beta-0)} f(x)\,dx$

37

Признаки сходимости

① f – доп $[a,b)$, $f \ge 0$ $\Phi(A) = \int_a^A f$, $A \in [a,b)$

$\int_a^{\to b} f$ – сх $\Leftrightarrow$ Φ – огр.

$\int_a^{\to b} f = \lim_{A \to b-0} \Phi(A)$

/расх дифф. сходимость

$A \to b - 0$

— сход.

f, g — доп

$\int g'(x)dx$

они бы $\exists$ и предел

$\in [a, b)$

② Признак сходимости (сравнение)

$f, g \geq 0$ доп $[a, b)$:

1. а) $f(x) \leq g(x)$ при $x \in [a, b)$ $\int\limits_a^{\to b} g$ — сх $\Rightarrow \int\limits_a^{\to b} f$ — сх
б) — // — расх $\to$ расх

2. Пусть $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$, тогда $\int\limits^{\to b} f$, $\int\limits_a^{\to b} g$ сход/расх. одновр.

Δ $F(A) = \int\limits_a^A f$ $G(A) = \int\limits_a^A g$

$\forall A$ $F(A) \leq G(A) \leftarrow$ ограничена ($\int g$ — сход)

$\Rightarrow F(A)$ огр $\Rightarrow \int f$ сход

∇

Δ

$\exists B \in (a, b)$ $\forall x$ $\frac{l}{2} g(x) f(x) \leq 2l \cdot g(x)$

$\int\limits_a^{\to b}$ и $\int\limits_B^{\to b}$ $\int\limits_B^{\to b} f$ — сх $\Rightarrow \int\limits_B^{\to b} \frac{l}{2} g(x)dx$ — сх $\Leftrightarrow \int\limits_B^{\to b} g(x)dx$ сх.

Конспект

Практика

2012

$$I_n = \int \frac{\sin x}{(\sin x)^{n+1}} dx = -\cos x \cdot \frac{1}{\sin^{n+1} x} - (n+1) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^{n+2} x} dx$$

$v' = \sin x$

$u = \frac{1}{(\sin x)^{n+1}}$

$$= -\cos x \frac{1}{\sin^{n+1} x} - (n+1) I_{n+2} + (n+1) I_n$$

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{x^4 + 2x^2 - 2x^2 + 1}$$

2014

$$I_n = \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} = \frac{1}{\sin a} \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} (\sin x \cos(x+a) - \dots)$$

Лекция 31.03.2014

Пример $\int_0^{+\infty} [\cos^2 x / (1+x^2)]\, dx$ — сходится ($\sqrt{1-x^2}$ - расх. ?)

$\int_0^1 + \int_1^{10} + \int_{10}^{+\infty}$ $\int_0^{\to 1} \frac{\cos^2 x}{1-x^2} \underset{x\to 1}{\text{“}\sim\text{”}} \int_0^{\to 1} \frac{\cos^2 1}{2(1-x)} =$

$= \cos^2 1/2 \cdot \ln|1-x| \Big|_0^{\to 1} = \infty$

$0 \le \frac{\cos^2 x}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $\int_0^{+\infty} - cx \Leftarrow \int_{100}^{+\infty} - cx \int_{100}^{+\infty} \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{100}^{+\infty}$ $^1/_{cx}$

Еще один признак сравнения (usage):

$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ — при каких α, β сход/расх?

$\alpha > 0 \quad \beta > 0 \quad \int \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} < \int \frac{1}{x^\alpha} \leftarrow$ сход.

Но мы назовём „удавливание логарифма"

> $\alpha > 1 \quad \alpha = 1 + 2a$

$\int \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \int \frac{dx}{x^{1+a} \underbrace{x^a (\ln x)^\beta}_{\to +\infty}} \le \frac{1}{x^{1+a}}$ $o^{(<1)}$ при больш. x.

Если при каком $\int_{(10)} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} > 1$, то $\exists\, x_0$, что

$\frac{1}{x_0^\alpha (\ln x_0)^\beta} < 1$, посчитаем $\int_{10}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty} \leftarrow$ сход.

$\longleftarrow$ посчитаем.

> $\alpha < 1 \quad \alpha = 1 - 2a$

$\frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{dx}{x^{1-a} \cdot x^{-a} (\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$ - расход.

В итоге при $\alpha > 1$ сходится при всех β
$\alpha < 1$ расход. при всех β

$\int \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx \underset{y = \ln x}{=} \int \frac{dy}{y^\beta}$ $\beta > 1$ сх $\beta \le 1$ расх.

Опр f - допуст. $[a, b) \Rightarrow \int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^{\to b}$ сходится по модулю.

$f_+(x) = \max(0, f) \qquad f_-(x) = \max(-f, 0)$

Если $f = f_+ - f_-$ $\quad f_+ + f_- = |f|$

38 **Теорема** об абсолютно сход. интегралах

f - доп. $[a, b)$ Экв: 1. $\int_a^{\to b} f$ - сх. абсол.

3. $\int_a^{\to b} f_+ , \int_a^{\to b} f_-$ - сход. $\quad$ 2. $\int_a^{\to b} |f|$ - сх

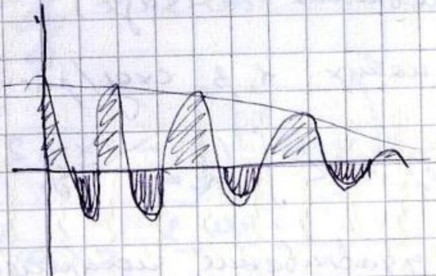
Δ

1 $\to$ 2 тривиально

2 $\to$ 3 $\quad 0 \le f_+ \le |f|$, $\quad 0 \le f_- \le |f|$ призн. сравн.

3 $\to$ 1 $\quad f_+ + f_-$ - сх. $\Rightarrow \int |f|$ - сх.

$\exists$ у нас есть счетная аддитивность



- сходится, если и сх.

7.04.2014 Лекция

39 **Теорема** Признак Абеля - Дирихле

I. f - доп. $[a, b)$ $\quad \int_a^A f(x)dx$ - ограничен, т.е.

$\exists C > 0 \ \forall A \in (a, b) \ \left|\int_a^A f(x)dx\right| \le C$

$g \in C^1[a, b)$, монотонна, $g(x) \to 0$ при $x \to b-0$

Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится (Дирихле)

II. f - доп $[a, b)$, $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится

$g \in C^1[a, b)$, монотонна, $g(x)$ - огр ($\exists C > 0 \ \forall x \in [a, b) \ |g(x)| \le C$)

Тогда $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится (Абель - Дирихле)

$\Delta \int_a^A f(x)g(x)dx = \underbrace{F(x)g(x)\Big|_a^A}_{\text{огр} \cdot \to 0} - \int_a^A F(x)g'(x)dx$

$\downarrow b \to 0$: 0; $\quad$ абс. сх.?

$\underbrace{F(A)g(A)}_{\to 0} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\to const?}$

$$\int_a^{\to b} |F(x)|\,|g'(x)|\,dx \le \pm C_1 \int_a^{\to b} g'(x)\,dx$$ ← конечный предел

Ну и перейдем к пределу $A \to b-0$

∇

Δ $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f(x)g(x) = \underbrace{f(x)\alpha}_{\text{сходит. по усл.}} + \underbrace{f(x)(g(x)-\alpha)}_{\text{сходимо призн. Дирихле}}$

∇

Пример 40: $\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}$ $\quad$ 1) $p>0$ Сх по Дирихле $f=\sin x$, $g=\frac{1}{x^p}$ монот. $\to 0$, $p>0$

1б) $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \le \frac{1}{x^p}$ $\quad p>1$ Сх $\Rightarrow$ абс Сх

2) $\left|\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x^p}\right| \ge \left|\int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \sin x\,dx\right| = 2$ нет сх-ти по крит. Больц.-Коши

3) $p \in [0,1]$? Абс. сход.

a) $\int_{\pi k}^{2\pi k} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx \ge \frac{1}{(2\pi k)^p}\int_{\pi k}^{2\pi k} |\sin x| = \frac{2k}{(2\pi k)^p} \not\to 0$

б) $\int_{10}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx \ge \int_{10}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_{10}^{+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{2x^p}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{сх. по Дирихле}}\right)dx = +\infty$

Пример $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{3x^2+1}}_{\to 0} \underbrace{(3x^2+1)\sin(x^3+x)}_{f.\ \text{огр}}$ — Сх. по А-Д;

$\sqrt{x}\sin(x^3+x)$ — сходится, а выш. Вот так:

Несколько неберущихся интегралов

41

1. Эйлера-Пуассона - полезные из $\pi = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$$

Δ $\quad 1-x^2 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

$$e^{-x^2} = 1-x^2+\underbrace{\frac{e^{-\theta}}{2!}(-x^2)^2}_{>0}, \quad e^{x^2} = 1+x^2+\dots, \quad \frac{1}{e^{-x^2}} = \dots$$

$$(1-x^2)^n \le e^{-nx^2} \le \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \le \int_0^1 e^{-nx^2}dx \le \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Слева: $x=\cos t$

$$\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)^n \sin t\, dt = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\, dt = W_{2n+1}$$

Справа:

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\varphi\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = W_{2n-2}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}x$$

Серединка:

$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$t=\sqrt{n}x$

$$W_{2n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}J \le W_{2n-2} \quad \Big| \cdot\sqrt{n}$$

$\downarrow \sqrt{n}\to+\infty$

$\frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot C$$

$C=\frac{\pi}{2}$ при четном n

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!}\sqrt{n}\,\frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\sqrt{n} =$$

$$= \frac{2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\,(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(42) 2. Γ-ф-я Эйлера.

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx \quad \text{— сх-я при } t>0$$

$0:\ \underset{t\to 0}{\sim}\frac{1}{x^{t-1}}$

$\infty:$ при больш. x $\quad x^{t-1}e^{-x}\le\frac{1}{x^2}$

$x^{t-1}e^{-x}\to 0$

① Сх-я при $t>0$

② $\Gamma(t)$ — выпуклая на $t\in(0;+\infty)$
(удовл. нер-ву Иенсена)

$$\int_0^{+\infty} f_x(\alpha t_1+(1-\alpha)t_2)\,dx \le \alpha\int_0^{+\infty} f_x(t_1)\,dx+(1-\alpha)\int_0^{+\infty} f_x(t_2)\,dx$$

$$=\alpha(\Gamma(t_1))+(1-\alpha)\Gamma(t_2)$$

③. Выпуклая $\to$ непрерывна

④ Формула понижения $\quad \Gamma(t+1)=t\,\Gamma(t)$

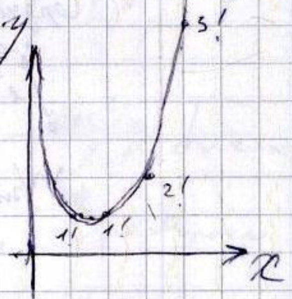
$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx=\underbrace{-x^t e^{-x}\Big|_0^{+\infty}}_{0}+t\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

⑤ Факт: $\quad \Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt{\pi}$

$$\int_0^{+\infty}x^{-\frac12}e^{-x}\,dx \underset{y=\sqrt{x}}{=} 2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy$$

⑥. $\Gamma(t)=\dfrac{\Gamma(t+1)}{t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t}$



(43) 3. Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$$

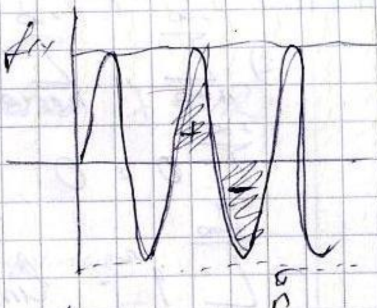
$$\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\frac{\sin[(n+\frac12)x]}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac12$$

Интегрируем от 0 до π $\quad \left(\int_0^{\pi}\cos x+\int_0^{\pi}\cos 2x+\dots=0\dots\right)$

$$0=\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac12)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx-\frac{\pi}{2}$$

Замеч.

Наблюдение:



$$\int_0^\pi \sin(n+\tfrac{1}{2})x \cdot f(x) \longrightarrow 0$$

Δ По частям

$$\int_0^\pi \sin(n+\tfrac{1}{2})x\ f(x) = -\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cos(n+\tfrac{1}{2})x\, f(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \cos(n+\tfrac{1}{2})x\, f(x)\,dx$$

При $f \in C^1$, $\to 0$

∇

Рассмотрим нечто похожее:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x/2} - \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin x/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \frac{x^3}{12}$$

Δ
$$\int_0^{\pi/2} \sin(n+\tfrac{1}{2})x\left(\frac{1}{\sin x/2} - \frac{1}{x/2}\right) = \int \dots \left(\frac{x/2 - \sin x/2}{x/2 \cdot \sin x/2}\right)$$
$\sim \frac{2}{3}x + o(x)$

∇

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\,x/2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{\sin t}{2\frac{t}{2}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}\,\frac{dt}{n+\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

f' непр. $\in C^1$

доказано, что $\lim\left(\frac{1}{x/2} - \frac{1}{2\sin x/2}\right) =$

РЯДЫ

(51) Определение

$A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ряд ($a_1 + a_2 + \dots$) ? $S \in \overline{\mathbb{R}}$ — сумма ряда A, если

$$S = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

S — кон. A сходится

S — $\pm\infty \lor \nexists \lim$ — A расходится

Замеч. 1) $a_{N+1} = S_{N+1} - S_N \Rightarrow \forall\, S_{N+1} - S_N$

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$, $\sum\limits_{n=-100}^{+\infty}$ $\sum\limits_{n=2014}^{+\infty}$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$; $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n =$ не имеет смысла расход. ряд.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{N\to+\infty} (1+q+q^2+\dots+q^N) = \lim_{N\to+\infty} \frac{q^{N+1}-1}{q-1} = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q|<1 \\ +\infty & q>1 \\ \nexists & q<-1 \end{cases}$$

3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$

$+ \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $\quad 0<\theta<x$

$|e^\theta| < \max(e^x; 1)$

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ $\quad \lim\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right) = \lim\left(e^x - \frac{e^\theta x^{N+1}}{(N+1)!}\right) = e^x$

Следствие → $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots = e$

Следствие → e иррационально

44

(а вообще на вики)

Δ Д-во: $e = \frac{p}{q}$ $\quad \exists q>3$, $\quad 0<\theta<1$

$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{e^\theta}{(q+1)!} \cdot 1^{n+1}$ $\quad e^\theta < e^1 < 3$

$\underbrace{(q-1)!\,p}_{\text{целое}} = \underbrace{q!\left(1+1+\dots+\frac{1}{q!}\right)}_{\text{целое}} + \frac{e^\theta}{q+1}$

$e^\theta<3,\ q>3$, нецелое

∇

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{N^{1-x}}{1-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty & 0<x<1 \\ x>1 \text{ чуть позже} \\ \ln N \quad (x=1) \end{cases}$ $\quad x\le 0\ \Sigma = +\infty$

Опр. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ $\quad$ выражение $(k=n)$ $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k = (a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots)$

Остаток ряда.

Лекция 14.04.2011

45

Св-ва сумм (рядов)

1. Если (A) – сх, (B) – сх, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ – сход., при-

Лемма:

46

Теорема

чем $\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

2. Если (A) сх., то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ — сходится

3. A — сх, $\Rightarrow \forall N \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ сходится

Если $\exists n_0 : \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k$ сх $\Rightarrow \sum a_k$ сход.

A-сх; $\exists m \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} a_k$;

4. A — сх $\Rightarrow a_n \to 0$

Δ $a_N = S_N - S_{N-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ ∇

А вот обратное неверно

5. Критерий Больцано–Коши сходимости ряда

$\lim S_n = S$ $\forall \varepsilon>0 \exists K \forall n,m>K \; |S_n - S_m|<\varepsilon$

$\|S_n - S_m\|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0 \exists K \forall n>K \forall m\in\mathbb{N} \; |S_n - S_{m+n}|<\varepsilon$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ - сх $\forall \varepsilon>0 \exists K \forall n>K \forall m\in\mathbb{N} \; |a_{n+1}+\dots+a_{n+m}|<\varepsilon$

Сходимость положительных рядов

Лемма: $a_n \geq 0$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ - сх $\iff S_n$ - огран.

$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$ — монотонно возрастает

$\lim S_n = \sup S_n$

46

Теорема признак сравнения

$b_n, a_n \geq 0$

1) $0 \le a_n \le b_n$ при $n \geq n_0$ Тогда: B-сх $\Rightarrow$ A-сх

A-расх $\Rightarrow$ B-расх

2) $a_n \sim b_n$ ($n\to+\infty$) Тогда A и B сход. одновременно

Δ 1. $S_n^a \le S_n^b$ — отсылка к лемме вверху

2. $a_n = C_n b_n$ $C_n \to 1$ при больших n $\frac{1}{2} b_n < a_n < 2b_n$ — см. 1 п.

Тогда 1 пункт теоремы $\sum a_n$ - сх $\frac{1}{2}\sum b_n$ - сх, ... ∇

Зам. $\frac{a_n}{b_n} \to L$: $L \in (0; +\infty) \Rightarrow$ (A сх $\Leftrightarrow$ B сх)
$L \in \{+\infty\} \Rightarrow$ 1 пункт теоремы
$L \in \{0\} \Rightarrow$ аналогично

Пример: $\sum k^{2014} e^{-k}$ - сх

$$k^{2014} e^{-k} = \left(k^{2014} e^{-\frac{k}{2}}\right) e^{-\frac{k}{2}} \le e^{-\frac{k}{2}}, \text{ а } \sum e^{-\frac{k}{2}} \text{ сх.}$$
$\downarrow_{k \to +\infty}$ 0; при достат. k

Теорема Признак Коши.

$\sum a_n,\ a_n \ge 0 \quad K_n := \sqrt[n]{a_n}$: — помилкa с понят. места

(47) light: 1) $\exists q: 0 < q < 1 \quad K_n \le q$ - ИСНМ Тогда (A) сх
2) $K_n \ge 1$ - для беск. кол. номеров Тогда (A) расх

(48) pro: 1) $\overline{\lim} K_n < 1 \Rightarrow$ (A) сх
2) $\overline{\lim} K_n > 1 \Rightarrow$ (A) расх

(Зам. $K_n = 1$ - признак не работает)

Д 1) $\sqrt[n]{a_n} \le q \Rightarrow a_n \le q^n \quad \sum q^n$ сх $\Rightarrow$ (A) сх по Т-К

2) $a_n \ge 1$ для беск. мн. и $a_n \not\to 0 \Rightarrow$ A расх.

1) $\overline{\lim} K_n = \alpha < q < 1$

$\exists N\ \forall n > N\ K_n < q$, т.е. $a_n < q^n$...

2) $\overline{\lim} K_n$ - предел вдоль последоват. $= \lim_{i \to +\infty} K_{n_i} > 1$

$\exists I\ \forall i > I\ K_{n_i} > 1$, см. light.

Пример $\sum k^{2014} e^{-k}$.

$\lim \sqrt[n]{k^{2014} e^{-n}} = \lim e^{-1} \ldots$

Теорема Признак Даламбера: $a_n > 0 \quad \sum a_n \quad \mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(49) light: 1) $\exists q \in (0,1) \quad \mathcal{D}_n < q$ ИСНМ $\to$ (A) сх
2) $\mathcal{D}_n \ge 1$ ИСНМ (A) расх

Если $\exists \lim \mathcal{D}_n$:

(50) pro: 1) $\lim \mathcal{D}_n < 1$ - A сх
2) $\lim \mathcal{D}_n > 1$ - A расх

Пример
(51)
Теорема
Лемма

Δ light – запущен

pro: $\lim D_n < 1 \Rightarrow \exists q : \lim D_n < q < 1$, оценка в light

$\lim D_n > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N \; D_n > 1 \; \exists q < D_n$ – light 2

∇

Пример $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(k+1)^{2014}}{(k)^{2014}} \frac{e^{-k-1}}{e^{-k}} = \frac{1}{e}$

(51)

Теорема **Признак Раабе**

Лемма ~Лемма! $a_n, b_n > 0$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ИСНМ

Тогда если B – сх, то A сх, если A расх, то B расх.

ИСНМ $n \geq 1$

$\frac{a_2}{a_1} < \frac{b_2}{b_1}$ $\frac{a_3}{a_2} < \frac{b_3}{b_2}$ ... $\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{b_{n-1}}$, ...?

~ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1$

$\exists r$, что ИСНМ (A) – сх

Если $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \xRightarrow{\text{ИСНМ}} (A)$ – расх

} light

pro: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1\right)$ > 1 – сх; < 1 – расх; $= 1$ – ☹

Δ pro тривиально из light следует

$\lim > 1 \Rightarrow \lim > r > 1$

$\lim < 1 \Rightarrow \lim < q < 1$

light:

1) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > p > 1$

При больших n $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right)$, где $b_n = \frac{1}{n^p}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$

сх по лемме; сх

2) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, аналогично.

Пример $\sum e^{-\sqrt{n}}$ – сх: $e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$ НСНМ $n^2 e^{-\sqrt{n}} \to 0$

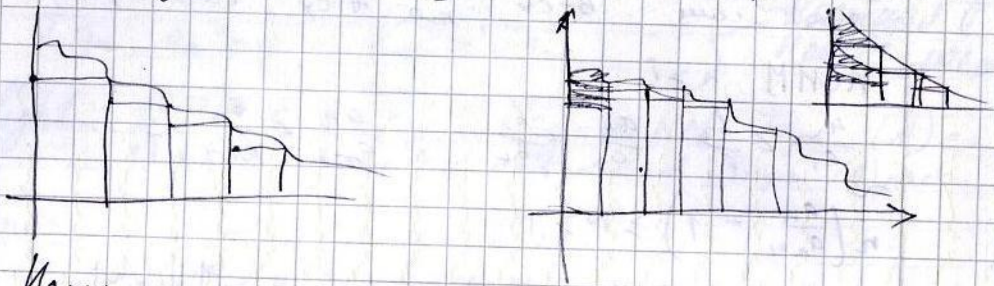
По Раабе: $n\left(\frac{e^{-\sqrt{n}}}{e^{-\sqrt{n+1}}} - 1\right) = n\left(e^{\underbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}_{\to 0}} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim}$

52 $\sim n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = n\sqrt{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1\right) \sim n\sqrt{n}\,\frac{1}{2n} \to +\infty > 1$:)

Теорема (Интегральный признак Коши)

f – доп на $[0, +\infty)$ f монот. $f \geq 0$

Тогда $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ – сх/расх одновременно



Наша разность графически – площадь треугольников, они все сидят в 1 столбике, $= S_n$

Теорема

$O\ \frac{1}{n^p}$

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \begin{matrix} p>1 \text{ сх} \\ p\leq 1 \text{ расх}\end{matrix}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} - ? \quad \int \frac{dx}{x(\ln x)^q} \underset{t=\ln x}{=} \int \frac{1}{t^q}\,dt \quad \begin{matrix} q>1 \text{ сх} \\ q\leq 1 \text{ расх}\end{matrix}$$

Опр Ряд (А) $\sum a_n$ – абс сх, если он сходится и $\sum |a_n|$ тоже сх $\quad \sum |a_n| = A^*$

Пример $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx =$$

$$\left(\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{1}{2n+3}\right)$$

$= \frac{\pi}{4}$

Лекция 21.04.2014

$(A)\sum a_k \qquad (A^*)\sum |a_k| \qquad (A^{\pm}) = \sum a_k^{\pm} \quad a_k^{\pm} = \max(\pm a_k, 0)$

Теорема $\forall A$ эквивалентно:
1. (A) — абс. сход.
2. (A^*) — сход.
3. (A^+) и (A^-) сход.

Δ $1 \to 2$ опр, $2 \to 3$ по признаку сравн.
$3 \to 1$ аддитивность $A = A^{\pm}$ $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ ∇

В компл. плане:

$\sum z_k$, абс. сход: $\sum |z_k|$, $\sum z_k$ сх

z — абс. сх $\Leftrightarrow$ (x) абс. сход, (y) абс. сход $\quad x+iy$

$|x_k| \le |z_k| \le |x_k| + |y_k|$

$|y_k| \le \dots$

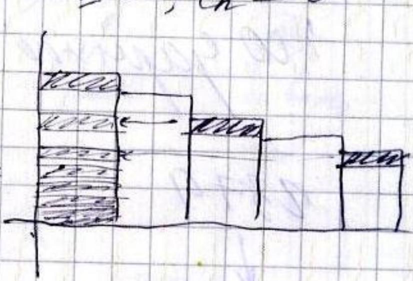
(53) Ряды со слагаемыми произв. знака

Теорема признак Лейбница

$\sum (-1)^n c_n$; $c_1 \ge c_2 \ge c_3 \dots \ge 0$; $c_n \to 0$

Тогда (C) — сх.

Δ



$S_{2N} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots - c_{2n} =$

$= S_{2N-2} + (c_{2n-1} - c_{2n}) \ge$

$\ge S_{2N-2}$, т.е. $S_{2N} \uparrow$

$S_{2N} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - c_{2N} \le c_1$ $\Big\}\ \exists \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N}$

$S_{2N+1} = \underset{S}{\underset{\downarrow}{S_{2N}}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{c_{2N+1}}}$

∇

Секретное приложение: $\left|\sum\limits_{n=k}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n\right| \le c_k$

Пример $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ $\qquad C_{10^6} = \frac{1}{1001}$

$C_{10^6+2} \approx \frac{1}{1001}$ чуть меньше

ЗЗ? — No! $\qquad C_{10^6+1} \approx \frac{1}{999}$

$\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

$$\text{ЛЧ} - \text{ПЧ} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}-(-1)^k} - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+(-1)^k)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}}_{\substack{\downarrow\\ \text{расх}\\ a_k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}}_{\substack{\downarrow\\ \text{сх.}\\ b_k}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+(-1)^k)}}_{\substack{\downarrow\\ \text{расх}\\ o(b_k)}}$$

Опр. преобразов. Абеля (суммирование по частям)

$a_n, b_n \qquad A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N - \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) A_n$$

(54)

Теорема признак Дирихле / Абеля

$\sum a_n b_n$ ① Если A_n — огр. $(\exists C\ \forall n\ |A_n| \le C)$

b_n — монотон., $b_n \to 0$

Тогда $\sum a_n b_n$ — сх (Дирихле)

② Если $\sum a_n$ — сх, b_n — монот., огр., тогда $\sum a_n b_n$ — сх.

Δ 1. $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge 0$, $b_n \to 0$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \underbrace{A_N b_N}_{\substack{\downarrow N\to\infty\\ \text{огр.}\cdot\text{б.м}\\ \downarrow\\ 0}} + \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) A_n$$

→ имеет кон. пред. при $N \to +\infty$, $\sum |(b_n - b_{n+1}) A_n|$ сх.

$\sum |(b_n - b_{n+1}) A_n| \le \sum C (b_n - b_{n+1})$ const, сх.

2. $\exists b_n \to B \qquad \sum a_n b_n = \sum (\underset{\text{сх}}{a_n B} + \underset{\text{сх}}{a_n}\underset{0}{(b_n - B)})$

∇

Пример $\sum \frac{\sin n}{n^\alpha}$ ① $a>1$ абс. сх $\left|\frac{\sin n}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^a}$ Замеч.

② $a \le 0$ расх $\frac{\sin n}{n^a} \not\to 0$

$\sqrt{n}\sin n \not\to 0$ $|\sin n|$ или $|\sin(n+1)|$

③ $a \in (0, 1]$ ряд сход. по призн. Дирихле

$|\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n| = |\operatorname{Im}(e^i + e^{2i} + \ldots)| \le$

$\le \left|e^i \frac{e^{in}-1}{e^i-1}\right| = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{|e^i|} \frac{|e^{in}-1|}{|e^i-1|} \le \frac{2}{|e^i-1|}$

④. $a \in [0, 1]$ нет абс. сход. Отрицание т-к

$\frac{|\sin n|}{n^a} + \left(\frac{|\sin(n+1)|}{(n+1)^a}\right) + \ldots + \frac{\sin 3n}{(3n^a)}\Big) \ge n \frac{1/1000}{(3n)^a}$

$= \frac{1}{1000 \cdot 3^a} \cdot n^{1-a}$ Опр

§ Св-ва сход. рядов.

(A) $\sum a_n = \underbrace{(a_1+\ldots+a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2})}_{b_2} + \ldots$

Выбрали строго возр. n_k (56)

$b_k = \sum_{n_{k-1} < n \le n_k} a_n$ Теорема

(B) $\sum b_k$ Зам.

(55)

Теорема о группировке слагаемых

① (A) - сх $\Rightarrow$ (B) - сх и имеет ту же сумму

② $a_n \ge 0$ Тогда (A) и (B) имеют одинак. сумму

Δ $S_N^{(B)} = (a_1+\ldots+a_{n_1}) + (a_{n_1+1}+\ldots+a_{n_2}) + (\ldots+a_{n_3}) + \ldots + (\ldots a_{n_N})$

$= S_{n_N}^{(A)} \xrightarrow[N\to\infty]{} S^{(A)}$

Утв. 2 так же доказывается

∇

Зам. $(B)_{cx} \not\Rightarrow (A)_{cx}$; (1) $(B)_{cx}$ & и сходим ар. размером:

$\exists m\ \forall k\ |n_{k+1} - n_k| \le M$

(2) $a_n \to 0$

Δ $S_N^{(A)}$ = несколько полн. скобок + ещё не более M слаг. $= S_k^{(B)} + \underbrace{a_{n_k+1} + \dots + a_N}$

$S_k^{(B)} \to S^{(B)}$, $\ a_{n_k+1} + \dots + a_N \to 0$, $N \to +\infty$

∇

Пример: $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right)$

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \dots = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \dots \overset{?}{=} 0$

Так делать нельзя

Опр. $(A)\ \sum a_k$

ряд $(B)\ \sum b$ — перестановка (A), если

$\exists$ биекция $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}.\ \forall k\ b_k = a_{\varphi(k)}$

(56) Теорема о перестановке суммы

(A) - абс. сх. Тогда (B) тоже абс. сх $S^{(B)} = S^{(A)}$

Зам. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \overset{?}{=} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \dots$

$+ \dots \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2(k+1)}\right)$ - такое ощущение, что сумма выросла - ~~вберем~~ больше $+$ эл-в. А сходимость не изменилась.

Переставлять просто так нельзя, сумма мен.

Д-во теоремы:

$a_k \ge 0$ $\quad S_N^{(B)} = b_1 + \dots + b_N = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \dots \le S_{M_N}^{(A)}$

$M_N := \max(\varphi(1), \varphi(2), \dots \varphi(N)) \ge N$

Значит $\quad$ Если $N \to +\infty$, $M_N \to +\infty$

$S^{(B)} \le S^{(A)}$, Аналог. A - перест. B $\ S^{(A)} \le S^{(B)}$

Теор. (следств.) a_n — любого знака

$a_n^+ \; a_n^- \quad b_n^+ \; b_n^-$ Ряд $\sum b_n^{\pm}$ — перест. $\sum a_n^{\pm}$

$S^{(A^+)} = S^{(B^+)} \qquad S^{(A^-)} = S^{(B^-)}$

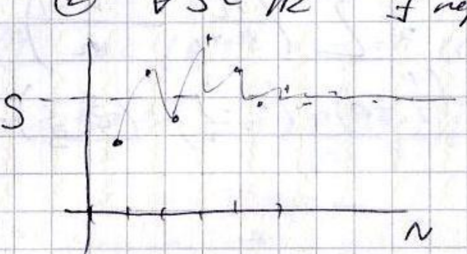
$b_n = a_{\varphi(n)} \qquad b_n^+ =$

Теорема Римана, о перест. не ак. сх. ряда

$\sum a_n$ — сх, $\sum |a_n|$ — не сх, тогда:

(1) ∃ перестановка b_n $\sum b_n$ — не им. смысла

(2) $\forall S \in \overline{\mathbb{R}}$ ∃ перестановка b_n $\sum b_n = S$



sorted by size

Опр Числовое семейство $(a_f)_{f\in F}$ н. сумм. семейством, если ∃ биекция $\varphi: \mathbb{N} \to F$, что которой ряд $\sum a_n$ — сходится абсолютно

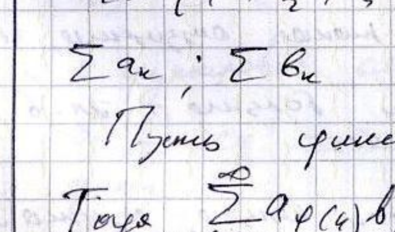
Зам Для другой биекции можно абс. сх. ряд с той же суммой. Она н. суммой этого сем-ва.

Прим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = \sum\left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\dots\right) = \ln 2 < \ln e = 1$

Опр $\sum a_n$, $\sum b_n$

Пусть фиксирована биекция $\gamma_{\varphi,\psi}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $k \mapsto (\varphi(k), \psi(k))$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} b_{\psi(k)}$ — пр-е (A) и (B)



Теорема Коши о произв. рядов.

(A), (B) — абс. сх S^A, S^B — их суммы, тогда $\forall$ биекции (нумерации $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) это пр-е рядов $\sum a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}$ — абс. сх. и его сумма равна $S^A\cdot S^B$

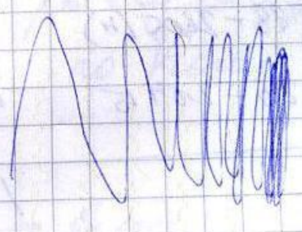
Д/З

2379

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx$$

1) $\int^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right| \le \cancel{\int^{\infty}\left|\frac{\sqrt{x}}{x+100}\right| \le \int\left|\frac{1}{x^{\frac12}}\right| \text{расх.?}}$

2380

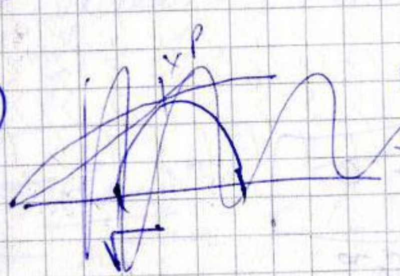


$$\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)$$

1) $\int^{+\infty}|x^p\sin(x^q)| \le \int|x^p\cdot 1|$ — сх при $p>1$, $p<-1$

2)

3)



$\int|\sin(x^q)|$ .. ср при $q>1$.

сх при $q\geq 1$, $p<0$

$x^q = t$ $\quad t = \sqrt[q]{x}$

$x^p = t^{p/q}$

$t^{\frac{p}{q}}\sin t$ — сх при $\frac{p}{q}<0$

28.04.2014

Теорема (A), (B) — абс. сх;
Тогда для любой нумерации произв. (A)(B) абс сходится и его сумма равно $S^A S^B$.

Δ $\gamma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad (A^*): \sum |a_n|$

$n \longmapsto (\varphi(n), \psi(n)) \quad (B^*): \sum |b_n|$

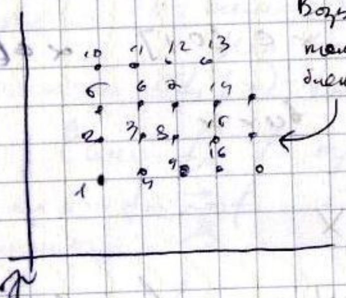
$(C) - \sum a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)} \quad (C^*) - \sum |a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}|$

$\overset{?}{\text{сх}}\ (C^*)$

$\sum |a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)}| \le S^{(A^*)}_{\Phi(N)} \cdot S^{(B^*)}_{\Psi(N)}$, где $\Phi(N) = \max\limits_{n\le N}(\varphi(n))$, Ψ — аналогично

$\le S^{(A^*)} \cdot S^{(B^*)}$ (част. суммы (C^*) огр $\Rightarrow$ C^* сх $\Rightarrow$ C абс. сх)

Посчитаем:



Возьмем такую нумерацию

$\sum\limits_{n=1}^{N^2} a_{\varphi(n)} b_{\psi(n)} = \left(\sum^N a_n\right)\left(\sum^N b_n\right) \to S^A S^B$

∇

Замечан. $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$ — Произведение этих рядов это ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, где $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$;

В случае A, B — сх. абсолютно это опр. абсол. опр.

Функциональные последовательности рядов

§1. Равномерная сх-ть посл. ф-й

Опр Посл. ф-й: отобр $\mathbb{N} \to \{\text{мн-во ф-й}\}$

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$

Опр Поточечная сходимость

f_n – посл. ф-й $f_n : X \to \mathbb{R}$
поточечно сходится к $g : X \to \mathbb{R}$, если
$\forall x \in X \quad f_n(x) \to g(x)$

То есть $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

Пример

1. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$
$\forall x \in [0,1]$ ∃ предел $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

2. $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$
$f_n(x)$ – сходится поточечно на мн. E, (если $E \subset [-1;1]$) к $O(x) = 0$

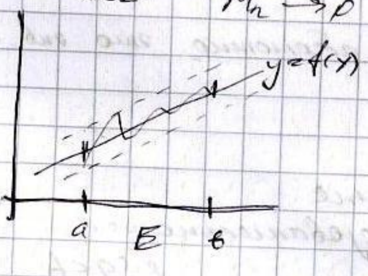
3. $f_n(x) = \frac{n^\alpha \cdot x}{1 + n^2 x^2}$, $x \in [0,1]$ $\alpha \in [0,2)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ при всех x

Опр $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ $E \subset X$

Последовательность $f_n(x)$ сх. к f равномерно на множестве E, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \underbrace{\forall x \in E \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$

$f_n \underset{x \in E}{\overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} f$ – обозначение $\quad M_n = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$M_n \to 0$



Графики всех f_n с большими n внутри коридора

Пример

1. x^n не заходит
2. $f_n(x) = x^n/n$ $E = [-1,1]$

$N = \frac{1}{\varepsilon}$ $M_n = \sup \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

5. $f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{1+n^2x^2}$, $f \equiv 0$, $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E = [0,1]$

$M_n = \frac{n^{\alpha-1}}{2}$ $\alpha \in (1,2)$ нет р. сх-ти
$\alpha \in [0,1]$ если р. сх-ть

Замеч.: ① $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$; $E_0 \subset E \Rightarrow f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows} f$

② $f_n \underset{E_1}{\rightrightarrows} f$, $f_n \underset{E_2}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \underset{E_1 \cup E_2}{\rightrightarrows} f$

③. $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \to f$ поточечно на E

④ $\mathcal{F} = \{f \mid f: X \to \mathbb{R},\ f$ огр.$\}$

$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ - метрика в $\mathcal{F}$

1. Неотр.
2. Функции совп.
3. Симметр. корм.
4. Нер-во ∇ $\rho(f_1,f_2) - \varepsilon \le |f_1(x) - f_2(x)| \le$
$\le |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \le \rho(f_1, f_3) + \rho(..)$

Если f_n, f - огр. ф-ии
$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \iff \rho(f_n, f) \to 0$

57

Теорема Стокс, Зайдль

$\exists$ $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ $\forall n$ f_n - непр. в $c \in X$

$\exists$ $f_n \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f$ Тогда f непр. в $(\cdot)\ c$

Δ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(c)$ $\forall x \in U(c)$ $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(c)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$

Из равн. сх-ти: $\frac{\varepsilon}{3}$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\forall x$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

в частности $|f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\ldots < \varepsilon$ $\frac{\varepsilon}{3}$ $\ldots$ $|f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Зам. $f_n \to 0$ не равном
при этом $f \equiv 0$ непрер.

Следств. $f_n \in C(X)$, $f_n \rightrightarrows f$. Тогда $f \in C(X)$

Δ

$X_n \to a \quad \forall U(a) \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \in U(a)$

Опр. X — тополог. пр-во, в котором семейства открытых множеств с различным набором св-в:

- a, b — откр $\Rightarrow a \wedge b$, $a \vee b$ откр.
- G_α — откр. $\Rightarrow \cup G_\alpha$ — откр
- $\forall x \ \forall y \ \exists U(x) \ y \notin U(x)$

58

Теорема X — м.п., компактное, $\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} |f_2(x) - f_1(x)|$ — метрика на $C(x)$

$C(x)$ — полное метрическое пр-во.

$\frac{1}{x}$ — посл. Коши (фундамент.), а в $\mathbb{R}$ всякая фунд. посл. сходится ($\nexists$ „0" не сущ.)

Если фунд $\Rightarrow$ сх, то пр-во полное (всегда есть куда сойтись)

Δ

$f_n \in C(x)$ — фунд. посл-ть ($\forall \varepsilon \exists N \forall m, n > N \ \rho(f_m, f_n) < \varepsilon$)

$\Rightarrow \forall x \in X$ посл-ть чисел $f_n(x_0)$ — фундамент.

$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) =: f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$|f_n(x) - f_{m_1}(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$

∇

Δ

25) Функциональный переход под знаком интеграла

Пример $f_n(x) = n x^{n-1}(1 - x^n)$, $x \in [0, 1]$

$\forall x \ \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \qquad \int_0^1 n x^{n-1}(1 - x^n)\, dx = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \ne \int_0^1 \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx$ WTF?!

 — вот такие.

(59) Теорема

$f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f_n, f \in C[a,b]$ $\quad f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Тогда $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

Δ $\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\,dx\right| \le$

$\le \int_a^b |f_n - f|\,dx \le \sup_{[a,b]} |f_n - f|\,(b-a) =$

$= \rho(f_n, f)\,(b-a) \to 0$

(60) Теорема

о пр. переходе под знаком производной.

$(\lim f_n(x))' \overset{?}{=} \lim (f'(x))$

$f_n \in C^1[a,b]$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ поточечно на $[a,b]$

$f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$, тогда $f \in C^1[a,b]$

$\forall x \in [a,b]$, $f'(x) = \varphi(x)$

Δ $x_0, x \in [a,b]$ $\quad f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[x_0, x]$

$\int_{x_0}^{x} f_n'(x)\,dx \to \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$; $\quad f(x) - f(x_0) = \int \varphi(x)$

Пример

$f_n(x) = \frac{n^2x^2 - n\sqrt{x} + x + 1}{nx^3 + n^2x + 1}$ $\quad x \in (0, +\infty)$

1. Найти $f(x)$ - это поточечн. предел

$\lim_n f_n(x) = x$

2. Посмотреть на M_n $\quad |f_n - x| = \left|\frac{-n\sqrt{x}+1-nx^4}{nx^3+n^2x+1}\right|$

§ Равномерная сходимость функ. рядов

Опр. $\sum U_n(x)$ поточечно сходится на E,
$U_n : X \to \mathbb{R}$, $E \subset X$
если $\forall x \in E$ $\sum U_n(x)$ – сх. как числ. ряд
$S(x)$ – сумма этого ряда

Опр. „Поточ. сходимость" = „$S_N(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} S(x)$ поточечн."

Опр. $U_n : X \to \mathbb{R}$; $E \subset X$ $\quad S : E \to \mathbb{R}$
ряд $\sum U_n(x)$ р.сх. на мн. E к $S(x)$, если $S_N(x) \underset{\substack{N\to+\infty \\ \text{на } E}}{\rightrightarrows} S(x)$

$$\sup_{x\in E} |S_N(x) - S(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Замеч. $\boxed{\text{Зам}}$ 1. Р.сх. на E → поточ. сх. на E

$$|S_N(x) - S(x)| \le \sup |S_N(x) - S(x)|$$

2. $R_N(x) = \sum_{n=N}^{+\infty} U_n(x)$

„$S_n(x) \underset{\substack{N\to+\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} S(x)$" $\Longleftrightarrow$ „$R_N \underset{\substack{N\to+\infty \\ x\in E}}{\rightrightarrows} 0$"

3. $\sum U_n(x)$ р.сх. E ⟶ $U_n(x) = R_n(x) - R_{n+1}(x)$
$U_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$, $x \in E$ ⟵

Пример $U_n(x) \overset{def}{=} \frac{1}{n^2}$, $x \in [0, 1]$ $\quad \sum U_n(x)$ равн. сх.

Пример $U_n(x) \overset{def}{=} x^n$, $x \in (-1, 1)$
$\sum x^n$

$$S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1-x}$$

$$|S_N - S| = \frac{|x|^{N+1}}{1 - x}; \quad \sup_{x\in(-1,1)} |S_N - S| = +\infty$$

нет равн. сходимости на $E = (-1, 1)$

А для $E = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\sup_E |\dots| = \sup \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \le \frac{(\frac{1}{2})^{N+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$0 < q < 1$
на $[-q, q]$ есть равн. сход.
Но всем расходится, но $\forall x \in (-1, 1)$ $\exists [-q, q]$
x – внутри этого пр-ка и сход. есть

Теорема признак Вейерштрасса

$U_n : X \to \mathbb{R}$ $\quad \exists c_n$ – вещ. посл.;

① $\forall x \in X \; |U_n(x)| \le C_n$
② $\sum C_n$ — сх } тогда $\sum U_n(x) \rightrightarrows X$ сх

Δ

$$|R_n(x)| \le \sum_{n=N}^{+\infty} |U_n(x)| \le \sum_{n=N}^{+\infty} C_n = R_N^{(c)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$$\sup_{x\in X} |R_n(x)| \le R_N^{(c)} \to 0$$

∇

61 Пример $\sum \frac{n^2 x}{1+n^4x^2}$ $\quad x\in[0,+\infty)$

$U_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^2}$ Ищем max $U_n(x)$

$x = 1/n^2$

$C_n = \max|U_n(x)| = \frac{1}{2n}$ ☹ не сработало

Умопомрачение: !!!

Так как $\sum \frac{1}{2n}$ — расх., то и сх. ряд не сход. равн.
$U_n(x)$, мы нашли x_n — (·) max.
$U_n(x_n)$ — величина максимума
$\sum U_n(x_n)$ — расх

всё это — бред! разные x-ы, нет гарантии!

Теорема **Критерий Больцано–Коши**

S_n: $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n, n+p>N$: $|S_n - S_{n+p}|<\varepsilon$
$\sum a_n$: $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n, n+p>N$ $|a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$

$\sum U_n(x)$, $x\in E$
$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n, n+p>N\ \forall x\in E$: $|U_{n+1}(x)+\dots+U_{n+p}(x)|<\varepsilon$ (*)

(*) $\Leftrightarrow$ ряд $\sum U_n(x)$ — р. сх. $x\in E$

Упражнение

Теорема 1' (Стокса–Зайдля для рядов)

X — мн. $U_n: X\to\mathbb{R}$ — непр. в точке $x_0\in X$
$\sum U_n(x)$ — р. сх на X

$\sum U_n(x) = S(x)$, тогда $S(x)$ - непр. в x_0.

Δ

$$\left.\begin{array}{l} S_N(x) \rightrightarrows S(x) \\ S_N(x) \text{ непр. в } (\cdot)\, x_0 \end{array}\right| \Rightarrow S(x) \text{ непр. в } (\cdot)\, x_0$$

∇

Замеч.

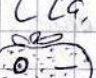
① U_n - непр. на X, $\sum U_n$ р. сх. $X \Rightarrow S$ непр на X

② U_n - непр. в $(\cdot)\, x_0$ $\sum U(x_0)$ $\sum U_n(x)$ - р. сх. на $U(x_0)$
$\Rightarrow S$ непр в x_0

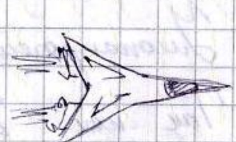
③ $U_n(x)$ - непр на X (X - комп.) $\sum U_n(x)$ - равн. сх на X
$S_n \to S$ по метрике в $C(X)$ $\rho(f_2, f_1) = \sup|f_1 - f_2|$

Теорема 2' (О почленном интегрировании рядов)

$U_n \in C[a,b]$, $\sum U_n(x)$ - р. сх $[a,b]$, $S(x) = \sum U_n(x)$ Теорема 62

Тогда  Клубничка ♡

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum \int_a^b U_n(x)\,dx;$$



Δ

$$\int_a^b S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\int_a^b U_n(x)\,dx \right)$$

$\downarrow N \to +\infty$

$$\int_a^b S(x)\,dx$$ Δ

Пример $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ р. сх $|x| \le q < 1$
$|(-1)^n x^n| \le q^n$, $\sum q^n$ сх

$\sum (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.

Интегр. по $[0, q]$: $\ln(1+q) = \sum \frac{q^{n+1}}{n+1}(-1)^n = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \dots$, $q \in [0,1)$

Такой ряд сходится при $q \in [0,1]$

$|R_n(q)| \le \frac{q^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0$

Сумма ряда непрерывна на $[0,1]$

Теорема о дифференцировании ф. рядов

$U_n \in C^1[a,b]$

① $\sum u_n(x) = S(x) \quad x \in \langle a, b\rangle$

② $\sum (u_n(x))'_x = \varphi(x)$ — сх-ся при $x \in \langle a, b\rangle$
данная сх-ть равномерная

Тогда 1) $S(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$
2) $S'(x) = \varphi(x)$ при $x \in \langle a, b\rangle$

Δ

Пропустил, тысяча чертей! (Но там 4 строки)

—
—
—
—

∇

Теорема 62

О почленном пр. переходе в суммах

$u_n : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in \langle a, b\rangle$

1) $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = a_n$

2) $\sum u_n(x)$ сх. равномерно на $\langle a, b\rangle$

Тогда: $\overset{①}{\sum a_n}$ — сх, $\overset{②}{\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum u_n(x)\right) = \sum a_n}$

Δ 1. $\sum a_n$ — сх $\quad S_N^a \quad (S_N^{(x)}$ — ч.с. $\sum u_n(x))$

∃ $\lim S_N$ — по кр. Б-К $|S_{N+p}^a - S_N^a| \le |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| +$

$+ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$

$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \;\forall n, n+p > N, \forall x \; |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
равном. сходимость

Зафикс. $n, n+p$

$\lim\limits_{x \to x_0} (S_n(x) - S_n^a) = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} (S_{n+p}(x) - S_{n+p}^a) = 0$
$\Rightarrow \exists x \; |S_{\substack{n \\ n+p}}(x) - S^a_{\substack{n \\ n+p}}| < \frac{\varepsilon}{3}$

возьмем такой x

Отсюда $|S_{n+p}^a - S_n^a| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

2. $\tilde{U}_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & x \ne x_0 \\ a_n & x = x_0 \end{cases}$

ряд $\sum \tilde{u}_n(x)$ — р. сх. на $\langle a, b\rangle$

$$|R_N^{\tilde{}}| = \left|\sum_{n=N}^{\infty} \tilde{U}_n(x)\right| \le \sum_{n=N}^{+\infty} a_n + \sup_{x\in\langle a,b\rangle} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} U_n(x)\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ по т. 1' $S(x) = \sum \tilde{U}_n(x)$ непр. в $(\cdot)\ x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \sum \tilde{U}_n(x) = \sum \tilde{U}_n(x_0)$$

∇

63 Теорема

4^* (о перестановке пред. переходов)

$f_n: X \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in X \quad x_0$ - пр. точка X

1. $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на X

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A_n$

Тогда: ① $\exists \lim A_n = A \in \mathbb{R}$

② $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$

Δ

$\exists\ U_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, $n>1$; $U_1 = f_1(x)$

$f_N = \sum\limits_{n=1}^{N} U_n(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} U_n(x) = A_n - A_{n-1} = a_n$

$A_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$

Это очевидно

∇

64 Теорема

Дирихле

$\sum (a_n(x)\cdot b_n(x))$ $\qquad a_n, b_n: X \to \mathbb{R}$

1. Ч. суммы ряда (A) р. ограничены (равномерно)

$\exists C_A \quad \forall N\ \forall x \quad \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)\right| \le C_A$

2. $b_n(x)$ – при каждом фикс. x монотонна по n

$b_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X, тогда $\sum a_n(x) b_n(x)$ р. сх на X

$\sup \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

$(\cdot)\ x_0$, то есть

точка X

$u_1 = f_1(x)$

(равномерно)

монотонно

(x), р. сх на X

12.05.2014 $\qquad A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Δ

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(x), \quad \sum_{n=N}^{M} a_n(x) b_n(x) = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{N}^{M-1} A_N (b_n - b_{n+1})$$

$|A_N| < C_A$;

$$\forall x, N \quad \sum_{N}^{M-1} |A_N| |b_n - b_{n+1}| \le C_A \sum (b_n - b_{n+1}) - C_A |b_n - b_M|$$

нут везде ... (x)

$C_A |b_n|$

X, N - фикс, $M \to \infty$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |A_n| |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \le C_A |b_n| \underset{N\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

равномерно сходится

(1) при $M \to +\infty$ $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = -A_{N-1}(x) b_{N-1}(x) + \sum_{n=N}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$

$$\sup \left|\sum a_n(x) b_n(x)\right| \le C_A \sup |b_{N-1}(x)| + C_A \sup |b_N(x)| \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

при $n \to \infty$ все u $\quad 0$

Теорема признак Абеля

$\sum a_n(x) b_n(x)$, $x \in E$

① $\sum a_n(x)$ - р. сходится $x \in X$

② $\forall x$ $b_n(x)$ - монот. по n
посл. $b_n(x)$ - равн. огр $\quad \exists C_B \ \forall x \ \forall n \ |b_n(x)| \le C_B$

Тогда $\sum a_n(x) \cdot b_n(x)$ р. сх.

Δ Упр.

Опр | Степенные ряды

Опр | $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ - шар с центром z_0, рад. r

Теорема 65 | Выражение $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ д-ся ст. рядом ($z_0, a_n \in \mathbb{C}$), z - комплекс.

о круге сх-ти ст. ряда

(A) $\sum a_n (z-z_0)^n$, возможно 1 из 3:

а) (A) сх. при всех $z \in \mathbb{C}$

б) (A) сх при $z = z_0$ (и только)

в) $\exists r \in [0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ | $|z-z_0| < r$ - сх, $|z-z_0| > r$ - расх
$z \in B(z_0, R)$ $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, R)$

Δ

$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n| |z-z_0|^n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z-z_0| =$ Коши

$= |z-z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} =$ 1) 0 $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ сх

или >1 <1 $\quad$ 2) $+\infty, z \neq z_0$; $0, z = z_0$ $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

$|z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$|z-z_0| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\qquad R := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ф-ла Адамара (Коши)

∇

Замеч.

1) R - радиус сход. ст. ряда

2) Если применить аналогично пр. Даламбера

$R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ / если предел сущ.

Примеры: ① $\sum z^n$ $\quad R = \overline{\lim} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{1}}\right) = 1$ $\quad |z|<1$ сх

② $\sum \frac{z^n}{n}$ $\quad R = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$ $\quad$ -//- $\quad |z|>1$ расх

$|z|=1$ расх $\quad |z|=1$ расх $\not\to 0$

$\sum \frac{e^{i\varphi n}}{n} = \underbrace{\sum \frac{\cos n\varphi}{n} + \sum i \frac{\sin n\varphi}{n}}_{\text{сх. по пр. Дирихле}}$

③ $\sum \frac{z^n}{n^2}$ $\quad R = \lim \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = 1$ $\quad |z|=1$

Теорема 66

Замеч.

Опр

Лемма

④ $\sum \frac{z^n}{n!}$ $R = +\infty$

66 Теорема о непр.-ти ст. ряда

(A) $\sum a_n (z-z_0)^n$ $0 < R \le +\infty$, тогда:

① $\forall r$ $0 < r < R$ => ряд (A) равном. сх. $\overline{B(z_0, r)}$

② $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ непр в $B(z_0, R)$

Δ

1. Пр. Вейерштрасса

$$\left\{\begin{array}{l} |a_n (z-z_0)^n| \le |a_n| \cdot r^n \text{ при } z \in \overline{B(z_0, r)} \\ \sum a_n r^n - \text{сх.} \end{array}\right.$$

=> ряд A сх. равномерно

докажем $\sum |a_n| r^n$ — сх: (по Коши)

$\lim \sqrt[n]{|a_n| r^n} = \lim r \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{r}{R} < 1$ - сх.; ч.т.д.

2. $z \in B(z_0, R)$

$\exists r : |z - z_0| < r < R$

все слаг. непр в $B(z_0, r)$

ряд (A) равн. сх в $B(z_0, r)$ =>

=> f непр. в $B(z_0, r)$ в т. числе в z.

∇

Замеч. ряд (A) абс. сх-тся в $B(z, R)$

Опр $f: B(z_0, R) \to \mathbb{C}$

$z \in B(z_0, R)$ Производная f в точке z:

$f'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ ← хитрый предел

Лемма $w, w_0 \in \mathbb{C}$ $|w| \le r$ $|w_0| \le r$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $|w^n - w_0^n| \le n \cdot r^{n-1} |w - w_0|$

Δ $|w^n - w_0^n| = |(w - w_0)(w^{n-1} + w^{n-2} w_0 + \dots + w_0^{n-1})| \le$

$\le |w - w_0| (|w|^{n-1} + \dots + |w_0|^{n-1}) \le |w - w_0| n r^{n-1}$

∇

Пример: $\lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim \left(C_n^1 \cdot z^{n-1} + \underbrace{C_n^2 z^{n-2} h + \dots}_{\to 0} \right.$ аналог. д.

$= n z^{n-1}$

(67) Теорема о д-ции ст. ряда

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-z_0)^n$ $0 < R \le +\infty$

(A') $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$, тогда

1. Радиус сх-ти A' равен R
2. $\exists f'(z)$ при $z \in B(z_0, R)$ и $f'(z) = \sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$

$(f(z) = \sum \dots$

Δ

1 очевидно по ф-ле Адамара

$R_{A'} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$

$\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

2 не так очевидно:

$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum a_n \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h}$,

$\sum$ этот ряд равн. сходится при $h \in B(0, \rho)$, $\rho \le (R - |z-z_0|)$

$\left| a_n \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} \right| \le |a_n| \cdot n (R-\rho)^{n-1}$ из леммы

$w = z+h-z_0$

$w_0 = z - z_0$

$w - w_0 = h$

$|w| \le R - \rho$

$|w_0| \le R - \rho$

$\sum |a_n| n (R-\rho)^{n-1}$ — сходится по Коши

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| n (R-\rho)^{n-1}} = \frac{R-\rho}{R} < 1$

$\lim_{h\to 0} \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} = n(z-z_0)^{n-1}$

а значит теорема 4: $\lim \sum \dots = \sum \lim_{h\to 0} \left(a_n \frac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h} \right)$

$= \sum n a_n (z-z_0)^{n-1}$

∇

Следств 1 $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ $0 < R \le +\infty$, тогда $f(z) \in C^{\infty}(B(z_0, R))$; все произв. ел. найти почл. дифф.

2578

a_n

28

$n \sum_{0}^{2} n^{n-2} h + \dots$

$) = \sum \dots$

$- z_0)^n$

-дитель $\rho \le (R - |z - z_0|)/2$

мы $= z + h - z_0$
$= z - z_0$
$w_0 = h$
$\le R - \rho$
$\le R - \rho$

$\dfrac{(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n}{h}$

и почл. дифф.

Следств. 2 | $f(x) = \sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$
При почленном интегрировании радиус сходимости этого ряда сохраняется
$$\sum \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

2578

$$a_n = \frac{1000^n}{n!} \qquad \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \frac{1000}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \text{ сход.}$$

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1000^n}{n!}} = \lim 1000/\sqrt[n]{n!} \to 0.$$

2579

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n!)} \qquad \frac{\frac{(n!(n+1))^2}{2n!(2n+1)(2n+2)^2}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\to \frac{1}{4} < 1 \text{ сход.}$$

№2580

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \infty$$

$$\lim \quad \lim \frac{n!(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \frac{n^{n+1} + n^n}{n^{n+1} + \dots + \dots} ?$$

$$\frac{n!}{n^n} \ge \frac{n!}{n} \qquad \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \text{ сход.}$$

19 мая 2014

Ряды Тейлора

Опр ① f — разл. в ряд Тейлора в окр. x_0

$$\forall x \in U(x_0) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Зам $f \in C^\infty$, $\sum$ ряда всегда C^∞

Опр ② f — разл в ст. ряд... $f(x) = \sum a_k (x-x_0)^k$

Лемма Если f разл. в степенной ряд в окр. x_0, то этот ряд — ряд Тейлора.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad \text{в } U(x_0)$$

$a_0 = f(x_0)$; $a_1 = f'(x_0)/1!$ $\left(f'(x) = \sum a_k \cdot k (x-x_0)^{k-1}\right)$

$a_2 = f''(x_0)/2!$

а) р. Тейлора сх. только при x_0

б) р. Тейлора сх. не к $f(x)$

Пример б) См. I семестр $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\exists f'(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ x \to 0-}} \left[\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right] = 0,$$ значит дифф в т. 0.

для $x_0 = 0$ $\sum 0 \cdot x^n$ (но не к f (сх-ся при $x \neq x_0$))

а) $f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2x} dx$, $t \geq 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2x} = \int_0^{+\infty} \left(1 - t^2x + (t^2x)^2 - (t^2x)^3 + \ldots - (t^2x)^{2n+1} + \frac{(t^2x)^{2n+2}}{1+t^2x}\right) e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{2k} x^k e^{-x} dx = t^{2k}\Gamma(k+1) = k!\, t^{2k}$$

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{(t^2x)^{2n+2} e^{-x}}{1+t^2x} \leq \int_0^{+\infty} (t^2x)^{2n+2} e^{-x} = (2n+2)!\, t^{2n+2}$$

$f(t) = 0!\, t^0 - 1!\, t^2 + 2!\, t^4 - \ldots - (2n+1)!\, t^{2n+1} + o(t^{2n})$

ф-ла Тейлора

Лемма. Если $\exists a_k$ $\forall n$ $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$, то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Зам.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad x \in (-1; 1) \text{ и при } x=1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$$

Теорема. $f(x) = (1+x)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$, Тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + C_\alpha^n x^n + \ldots$$

ряд $(*)$

Δ

ряд $(*)$ сх при $|x|<1$, расх при $|x|>1$ | это по Даламберовой формуле Адамара

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ если } \exists$$

$S(x)$ – сумма ряда $(*)$; $x \in (-1; 1)$

Утв: $(1+x) S' = \alpha S$

$$(1+x)\left(\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!} x^2 + \ldots\right) =$$

$$= x^2: \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1!\cdot 2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}\left(1 + \frac{\alpha-2}{2}\right) \ldots\right)$$

$$h(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}$$

$$h'(x) = \frac{S'(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = 0$$

$$\frac{S(x)}{(1+x)^\alpha} \equiv \text{Const} = \frac{S(0)}{(1+0)^\alpha} = 1 \quad (1+x)^\alpha = S(x)$$

∇?

Следств.
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-\frac{1}{2}}^n (-x^2)^n =$$

$$= \sum \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} (-1)^n x^{2n} = \sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$