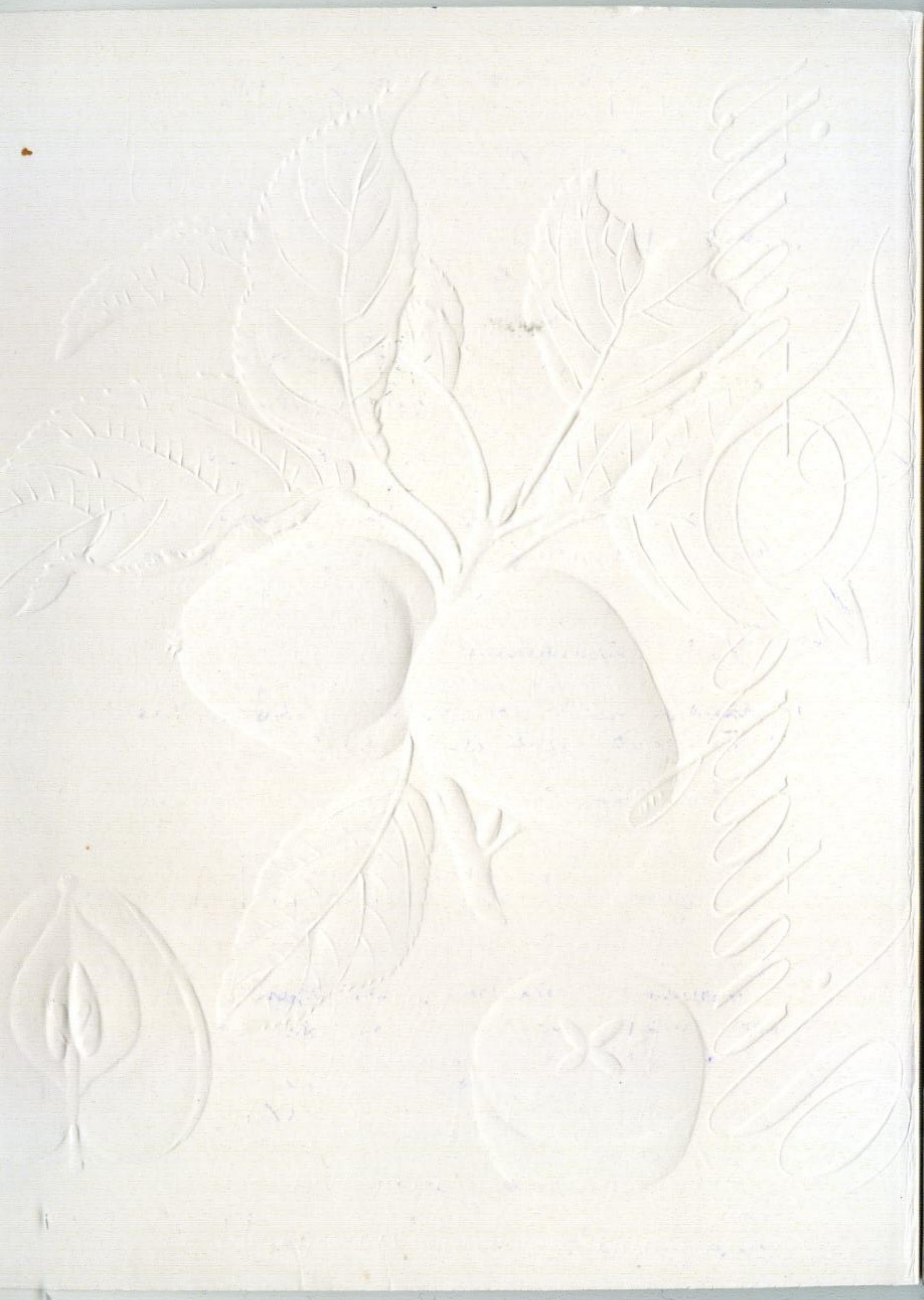


Подготовка к экзамену по диффурам.

1 Ticket 1.

а) Дифф. ур-е I рода

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

порядок – n.

б) Понятие уравнения и решения

• Решение на $\langle a, b\rangle$ – $y = \varphi(x)$, определенное и непр. дифференц. на $\langle a, b\rangle$, обращ. (1) в тождество $\forall x \in \langle a, b\rangle$

в) Поле направлений

• Интегр. кривая – кривая, явл. графиком некоторого решения ур-е

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Свойство: напр. кас. в любой точке совпадает с напр. поля, определенным ур-ем в точке.

• Изоклина – кривая, вдоль которой поле имеет один и тот же наклон

$y' = f(x, y)$, тогда изоклина $f(x, y) = k$ наклон.

• Поле направлений – графическое изображение решений диф. ур-е.

г) Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f(x,y) \in C(D), \text{ где } D = \begin{cases} |x - x_0| \le a \\ |y - y_0| \le b \end{cases}$$

По теор. Вейерштрасса f ограничена
(непр. на огр → огр. на огр)

• Условие Липшица

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \bar{\bar{y}})| \le L |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \in C(D)$$

д) Теорема Пикара

Рассмотрим $f(x,y)$.
Если она непрерывна на D и удовлетворяет условием Липшица, то задача Коши для f имеет единственное решение непрерывное для $|x - x_0| \le h$ $(h = \min(a, \frac{b}{M}))$, $|f(x,y)| \le M = \max f$ и решение не выходит из области

$$D' : \begin{cases} |x - x_0| \le h \\ |y - y_0| \le b \end{cases}$$

△ 1. Утверждение, что всякое решение Коши, не выходящее из $|x - x_0| \le h$ есть непр. решение этой ф-ии:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\, ds$$

И наоборот.

2. Построим последов-сть прибл. Пикара:

$$y_n(t) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds \qquad (*)$$

$$y_0(t) = y_0, \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

Докажем индукцией по n, что $(*)$ непрерывны и не выходят за $|y_n(x) - y_0| \le b$.

3. Установим факт равномерной сходимости $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ к $\bar{y}(x)$

$$y_n(x) \rightrightarrows \bar{y}(x)$$

Равн. сх-ть обеспечивает непрерывность $\bar{y}(t)$ на $|x - x_0| \le h$

△

$$y_0(x) + (y_1(x) + y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots$$

ч.
Частичные суммы этого ряда совпадают с y_n.
По индукции и условию Липшица можно показать

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le M L^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

Учитывая, что $|x - x_0| \le h$, получим:

$$|y_0| + Mh + ML\frac{h^2}{2!} + \dots + \dots = |y_0| + \frac{M}{L}(e^{Lh} - 1)$$

↑ сходится

▽

4. Установим, что $\bar{y}(x)$ — решение $(*)$ и соответствует условием:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(s, y_m(s))\,ds - \int_{x_0}^{x} f(s, \bar y(s))\,ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, y_m(s)) - f(s, \bar y(s))|\,ds\right| \le$$

$$\le \mathcal{L}\left|\int_{x_0}^{x} |y_m(s) - \bar y(s)|\,ds\right| \qquad (**)$$

Поскольку $y_m \rightrightarrows \tilde y$,

$$(**) \le \mathcal{L}\varepsilon h \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Итого имеем

$$\bar y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \bar y(s))\,ds$$

Эта ф-я и явл. решением задачи Коши.

5. Покажем единственность $\bar y(x)$

Пусть существует другое решение $z(x)$, тогда

$$|z(x) - y_m(x)| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))\,ds - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, y_{m-1}(s))\,ds\right| \le$$

$$\le \mathcal{L}\left|\int_{x_0}^{x} |z(s) - y_{m-1}(s)|\,ds\right|$$

Так как $|z(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le Mh$,

$$|z(x) - y_m(x)| \le \frac{M\mathcal{L}^m}{(m+1)!}|x-x_0|^{m+1} \le \frac{M(\mathcal{L}h)^{m+1}}{\mathcal{L}(m+1)!}$$

Отсюда $y_m \rightrightarrows z(x) \Leftarrow z(x) = \bar y(x)$.

▽

г) Общее, частное и особое решение.

- Общее решение — $y = \varphi(x, C)$, у удовл. уравнению при любом C & ∀ нач. усл. $y = \varphi(x, C)$ есть решение З.К.
- Частное решение — общее решение с конкретной константой C
- Особое решение — решение, в любой окрестности каждой точки которого нарушается единственность решения ЗК.
- Общий интеграл — $\Phi(x, y, C) = 0$
- Частный интеграл — аналогично.

2 Ticket 2

а) Методы интегрирования ур-й I порядка

Вот они: !

б) Уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = p(x)\,dx$$

\+ проинтегрируем

Когда мы можем интегрировать, значит ур-е уже с разделенными переменными.

в) Однородные уравнения и приводящиеся к однородным.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

M и N — однородные ф-ии порядка k

$$(\exists k \ge 0\ \forall \lambda > 0\ \ M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x,y))$$

Делаем замену $\frac{y}{x} = t$

$y = xt, \quad dy = x\,dt + t\,dx, \ \ldots$

Ур-е приводится к однородному, если $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, тогда план такой:

1. Пусть $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, где α и β находятся из системы:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 & \text{— реш} \to \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 & \text{— реш} \to \beta \end{cases}$$

2. Если же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то $a_1x + b_1y = t$

③ Ticket 3

а) Линейные уравнения I порядка

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$$

б) Бернулли — способ решения

$\exists\ y(x) = u(x)v(x)$, тогда

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - p(x)u(x)v(x) - q(x) = 0$$

$$u(x)[v'(x) - p(x)v(x)] + u'(x)v(x) - q(x) = 0$$

$$\exists\ v'(x) - p(x)v(x) = 0$$

$$\frac{dv(x)}{v(x)} - p(x) = 0 \Rightarrow \ln|v(x)| - \int p(x)\,dx = 0$$

$$v(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Также $u'(x)v(x) = q(x)$, отсюда

$$u(x) = \int q(x) e^{-\int p(x)dx}\,dx + C$$

Тогда в итоге

$$y(x) = e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x) e^{-\int p(x)dx}\,dx + C\right]$$

в) Лагранж — способ решения

$$y' = p(x)y \Rightarrow y_{oo}(x) = Ce^{\int p(x)dx}$$

$$y_{он}(x) = C(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C'(x)e^{\cdots} + C(x)p(x)e^{\cdots} =$$

$$= p(x)C(x)e^{\cdots} + q$$

$$C'(x) = q(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\dots} \Rightarrow y(x) = e^{\int p(x)\,dx}\left[\int q(x) e^{-\int p(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

2) Ур-е Бернулли

$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^{-m} \qquad m \neq 0,\ m \neq 1 \text{ лин. днор}$$

$$y^{-m}\,y' = p(x)\,y^{1-m} + q(x)$$

$$\frac{1}{1-m}\left(y^{1-m}\right)' = p(x)\,y^{1-m} + q(x)$$

И сделаем замену $y^{1-m} = z$

Ticket 4

(1) Ур-е в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

а) Уравнение в полных дифференциалах.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Тогда л.ч. $= du(x,y)$

• Теорема

Пусть $M, N \in C(D)$ и $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(D)$

Тогда $M\,dx + N\,dy = du \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Δ

$\Rightarrow$

$$M\,dx + N\,dy = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy}^{du(x,y)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Следовательно $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\Leftarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow M\,dx + N\,dy \overset{?}{=} du$$

или

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}\ (1)\ \&\ N = \frac{\partial u}{\partial y}\ (2)\ ?$$

Из (1): $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \underbrace{u(y)}_{C(y)}$?

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx\right) + u'(y) = N(x,y)$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + u'(y) = N(x,y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy + C_1$$

$$u(x,y) = 0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy = C$$

∇

• ~~Теорема~~

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x,y)\in C^1(D)\\ &\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}N-\frac{\partial \omega}{\partial y}M}=\psi(\omega)\in C(D)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mu(x,y)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}$$

Δ

$\mu(x,y)=\varphi(\omega)$

б) Интегрирующий множитель

$\mu(x,y)\,M\,dx+\mu(x,y)\,N\,dy=0$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)\cdot M\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)\cdot N\right)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}\mu=\frac{\partial \mu}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}\mu$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M-\frac{\partial \mu}{\partial x}N=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\quad(*)$$

• Теорема о поиске μ

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x,y)\in C^1(D)\\ &\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x}N-\frac{\partial \omega}{\partial y}M}=:\psi(\omega)\in C(D)\end{aligned}\right]\ \mu(x,y)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}$$

нет свол. вхождений x, y.

Δ

$\exists\ \mu=h(\omega(x,y))$

Подставим в выражение $(*)$:

$$h'_\omega\cdot\omega'_y\cdot M-h'_\omega\omega'_x\cdot N=h\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dh}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot M-\frac{dh}{d\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot N=h\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dh}{d\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot M-\frac{\partial \omega}{\partial x}N\right)=h\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{dh}{d\omega}\cdot\frac{1}{h}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial y}M-\frac{\partial \omega}{\partial x}N}$$

должно зависеть только от ω для $\int$..

$$\ln|h|=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial y}M-\frac{\partial \omega}{\partial x}N}d\omega$$

$$h=e^{\int\psi(\omega)d\omega},\ \text{где } \psi=$$

∇

• Случай с $\omega(x)\equiv x$

Такой случай часто работает в нашем случае.

(5) Ticket 5

а) Ур-е первого порядка, неразрешимые относительно производной

1. $y = \varphi(y')$

Заменим y' на t:

$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = t \end{cases}$ $y' = \frac{dy}{dx}$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{t}$

Тогда $y = \varphi(t)$

$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$

2. $x = \varphi(y')$ $\quad \exists\, y' = t$

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = t \end{cases} \Rightarrow dy = t\varphi'(t)dt$

$y = \int t\varphi'(t)dt$

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\varphi'(t)dt \end{cases}$

б) Лагранж и Клеро

1. Ур-е Лагранжа $\quad \exists\, t := y'$

$y = \varphi(y')x + \psi(y')$

$dy = x\varphi'(t)dt + \varphi(t)dx + \psi(t)dt$

$dx(\varphi(t) - t) + \dots$

$\begin{cases} y = \varphi(t)x + \psi(t) \\ y' = t \end{cases}$

2. Ур-е Клеро

$y = y'x + \psi(y') \quad \exists\, t := y'$

$\begin{cases} y = tx + \psi(t) \\ y' = t \end{cases}$

$[x + \psi'(t)]dt = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} dt = 0 \\ x = -\psi'(t) \end{array}\right.$

• $\begin{cases} y = -t\psi'(t) + \psi(t) \\ x = -\psi'(t) \end{cases}$ – особое

• $y = Cx + \psi(C)$ – общее, поскольку $dt = 0$

(6) Ticket 6

а) Дифф. ур-е высших порядков. Основные понятия и определения.

• Дифф. ур-е высшего порядка:

$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = O(1)$ или 0

• Решение все так же $y = \varphi(x)$

б) Коши, Пикар

• Задача Коши – найти решение $F(x, y, y', \dots) = 0$ $\quad y = \varphi(x)$, удовл. условиям $y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0 \dots$ при $x = x_0$

- Теорема Пикара

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y', \dots y^{(n-1)})$ п.ч. и все ее частные пр-е кроме по $y^{(n)}$ непрерывны в D, замкнутой, такой что:

$|x-x_0|<a$; $|y-y_0|<b$; $|y'-y_0'|<b$, …
$a>0$ $b>0$

и, следовательно, ограничены в ней, т.е.

$$|f(x,y,y', \dots y^{(n)})| \le C, \quad \left|\frac{\partial f(\dots)}{\partial y^{(k)}}\right| \le C_1$$
$(k=0,1,\dots n-1, \ y^0 = y)$

где $C>0$, $C_1>0$, $M(x,y,y',\dots y^{(n-1)}) \in D$,
$M_0(x_0,y_0,y_0',\dots y_0^{(n-1)}) \in D$,

То существует ! решение $y=\varphi(x)$, удовл. условию зад. Коши, причем оно определено и непрерывно вместе с производными до порядка n включительно в промежутке $|x-x_0| \le h$, где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{\max\limits_D (C, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)}\right)$$

в) • Понижение порядка уравнения, прочее

1. $y^{(n)} = f(x)$
$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$
⋮
$$y = \underbrace{\iint \cdots \int}_{n} f(x)(dx)^n + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots$$

2. Ур-е, не содержащее искомой ф-ии и последовательных первых пр-х.

$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad k>1, k \in \mathbb{Z}$

Тут делаем замену
$y^{(k)}(x) =: z(x)$, $y^{(k+1)}(x) =: z'(x)$, …

3. Ур-е не содержащее независимой переменной.

$F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$,

$\boxed{y'(x) =: z(y)}$, тогда $y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} =$
$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{y'' = z\frac{dz}{dy}}$

Аналогично $y''' = z''_y z^2 + z'_y z$, то есть в итоге имеем

$$F(y, z, z'z, \dots, \omega(z, z', \dots z^{(n-1)})) = 0$$

7 Ticket 7

а) Линейные дифференциальные ур-е n-того порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$$

Если $q(x) = 0$, то ур-е однородным, иначе неоднородным.
Левая часть — линейный оператор.

б) Свойства реш. однородных ур-й:

- Суперпозиция: если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения, то $y_1 + y_2$ тоже решение.
- Если y_1 — решение, то $C \cdot y_1$ — тоже

в) ФСР, Вронскиан

- Совокупность n решений вместе ЛНЗ, если она такая в привычном понимании $\sum C_k y_k = 0 \Leftrightarrow \forall k\ C_k = 0$
- Если $y_1 \cdots y_n$ — ЛЗ на (a, b), то... одно из них ЛК остальных.
- Определитель Вронского (Вронскиан):

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

г) Теорема о ЛНЗ системы реш.

Для того, чтобы решение $\{y_1 \cdots y_n\}$ были ЛНЗ, НИД чтобы $W \neq 0$ во всех точках (a, b)

Δ

$\Rightarrow$ $y_1 \cdots y_n$ — ЛНЗ и $W = 0$ в $x_0 \in (a, b)$

Тогда составим систему:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n)}(x_0) + C_2 y_2^{(n)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Поскольку $W = 0$, то $\exists \{C_1^0, \dots C_n^0\}$, что хотя бы одно $C_i \neq 0$

и

$$C_1^{(0)} y_1(x_0) + C_2^{(0)} y_2(x_0) + \cdots = 0,$$

в силу единственности решение и $\{$ какое-то $C_i \neq 0\}$ система ЛЗ. —×

$\Leftarrow$

$W \neq 0 \Rightarrow \forall x \in (a, b)$ $\sum C_k y_k(x)$ — ЛНЗ.

По контрпозиции докажем ЛЗ $\to W = 0$

$$y_n = -\frac{a_1}{a_n} y - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y_{n-1}(x)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cdots & (*) \\ & (*)' \\ & \vdots \\ & (*)^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

из-за всей этой колонки

∇

д) Формула Остроградского — Лиувилля

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int p_1(x) dx}$$

⑧ Ticket 8

а) Построение об. реш. линейного однородного ур-е по ФСР.

$\exists \{y_1 \cdots y_n\}$ — ФСР, $\Rightarrow y_{oo} = \sum C_k y_k$ $\quad a < x < b$, $|y| < \infty$, $|y'| < \infty \dots$

△

Пусть $\{y_1 \dots y_n\}$ — ФСР. $\sum c_i y_i(x) = \tilde{y}(x)$

Рассмотрим задачу Коши:

$\tilde{y}(x)$ — решение как суперпозиция,

$$\begin{cases} \sum c_i y_i(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ \sum c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0} \end{cases}$$

Определитель системы — $W \neq 0$ (по условию $y_1 \dots y_n$ ЛНЗ). При этом система имеет единств. решение. И оно решение как комбинация.

▽

б) Структура общего решения неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \qquad (*)$$

△

Докажем, что если известно $\tilde{y}_{чн}$, то можно получить любое другое $\tilde{\tilde{y}}_{чн}$ по $(*)$.

Так как и $\tilde{y}_{чн}$ и $\tilde{\tilde{y}}_{чн}$ решения

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots = f(x)$$

, то $L_n(\tilde{y}_{чн}) = f(x)$ и $L_n(\tilde{\tilde{y}}_{чн}) = f(x)$

По линейности L_n, $L_n(\tilde{\tilde{y}}_{чн} - \tilde{y}_{чн}) = L_n - L_n = 0$.

$\tilde{\tilde{y}}_{чн} - \tilde{y}_{чн}$ удовл. одн. ур-ю, поэтому содержится в $\sum c_i y_i$, т.е. $\tilde{\tilde{y}}_{чн} - \tilde{y}_{чн} = \sum c_i y_i$,

т.е. $\tilde{\tilde{y}}_{чн} = \sum c_i y_i + \tilde{y}_{чн} = y_{оо} + y_{чн}$

▽

в) Принцип наложения

$$\mathcal{L}(y) = f_1(x) + f_2(x) \quad (*)$$

если $\mathcal{L}(y_1) = f_1(x)$, $\mathcal{L}(y_2) = f_2(x)$, то оно ($(*)$) — реш. $y_1 + y_2$.

г) Метод вариации (Лагранжа) для второго порядка.

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x) \qquad (*)$$

Пусть $\{y_1, y_2\}$ — ФСР однородного $(*)$

$y_{оо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Тогда решение $y_{он}$ можно найти в виде $y_{он} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

△

$$y' = [C_1' y_1 + C_2' y_2] + [C_1 y_1' + C_2 y_2']$$

Нужно найти y'', но воспользуемся тем фактом, что мы можем наложить одну связь на C_1 и C_2, тогда

$\exists\ C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$

Тогда $y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$

Подставим y' и y'' в $(*)$, преобразуем

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1[\underbrace{y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1}_{=0}] + C_2[\underbrace{y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2}_{=0}] = f(x)$$

→ потому что $C_1' y_1 + C_2' y_2$ — реш однородного

$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0.$

Вместе со связью имеем систему

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f_2 \end{cases}$$

Определитель — $W \neq 0$ (по ЛНЗ $\{y_1, y_2\}$)
Значит система имеет ед. решение $C_1'(x)$, $C_2'(x)$. Найдём, проинтегрируем и подставим в

$$y_{он} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

∇

9) Общий случай n-ного порядка

Имеем $\{y_1 \dots y_n\}$, ищем решение в виде $y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots$

После взятия n производных имеем систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1' y^{(n-1)} + C_2' y^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

$W \neq 0$ по ЛНЗ, можем найти все C_i и составить решение.

9. Ticket 9

а) Системы диф. ур-й. Основные понятия и определения. нормальная (разр. отн. $y^{(k_i)}$) система

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \dots y_n^{(k_n-1)}) \\ \vdots \\ y_n^{(k_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \dots y_n^{(k_n-1)}) \end{cases}$$

Порядок системы — $p = \sum k_i$

Понятно, что если система не явная, то имеем нечто на уровне

$$\begin{cases} F_1(x, y_1 \dots y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \dots y_2^{(k_2)}, \dots y_n^{(k_n)}) = 0 \\ \vdots \\ F_n(-//-) = 0 \end{cases}$$

- Задача Коши для системы — набор решений $\{y_1 \dots y_n\}$, удовлетворяющих каждому ур-ю системы и нач. условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0 \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots y_n(x_0) = y_n^0$$

б) Механическое истолкование

Поправления $\{y_1 \dots y_n\}$ можно изменить как функции проекций скорости на оси n-мерного пространства.
Линейная оболочка векторов решения — фазовое пространство, а конкретные траектории — фазовые. Фазовый портрет — тоже конкретные траектории в пр-ве.

в) Теорема Пикара

Пусть мы имеем нормальную систему и все f_i определены в $n+1$-мерной области D изменение переменных $\{x, y_1 \dots y_n\}$. Если $\exists$ окрестность Ω точки $M_0(x, y_1^0, y_2^0 \dots y_n^0)$ в которой все f_i непрерывны и имеют ограниченные производные по $y_1 \dots y_n$, то $\exists\,(x_0 - h, x_0 + h)$ в котором $\exists!$ решение норм. системы, удовлетворяющее нач. условиям.

г) Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифф. ур-й 1-го порядка.

Пусть имеется ур-е вида:

$$y^{(n)} = f(t, y, y' \dots y^{(n-1)})$$ – n-порядка в норм. форме

Тогда $\exists$:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y_1' \\ y_3 = y_2' \\ \vdots \\ y_n = y_{n-1}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = (y_{n-1}')' = y^{(n)} = f(\dots) \end{cases}$$

Обратно – поменять "буквами со словами и продифференцировать".

(10) Ticket 10

а) Линейные системы

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \cdots & p_{1n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1}(x) & \cdots & & p_{nn}(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Матричная форма выглядит вот так.

- $y_1 \dots y_n$ – ЛНЗ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \sum \alpha_k y_k = 0 \leftarrow \sum \alpha_k = 0$
- Система однородна если $\forall i\,(f_i = 0)$ и наоборот

б) Фундаментальная матрица

$$\Phi(t) = (y_1 \dots y_n) = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ y_{12} & & \vdots \\ \vdots & & \\ y_{1n} & & y_{nn} \end{pmatrix}$$

ЛНЗ решения (ФСР)

- Ф. матрица невырождена, тогда $\exists\, \Phi^{-1}$. При подстановке в $X'(t) = A(t)X(t)$ получим $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \Rightarrow A(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)$
- Общее решение системы $Y_0(t) = \Phi(t) \cdot C$, где C – вектор из $C_1 \dots C_n$

в) Вронскиан и формула Остроградского – Лиувилля.

$$W(x) = \sum W_{ik}(x)\, \Phi_{ik}(x)$$

• Вронскиан

$W = \det \Phi$, но если $W \neq 0$ $\{y_1 \dots y_n\}$ — ЛНЗ

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}$$

• Формула Остроградского-Лиувилля

$$\frac{dW}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \varphi_{ij}} \cdot \frac{d\varphi_{ij}}{dx} = \sum W_{ij}\left[\sum p_{ik}\varphi_{kj}\right] =$$

$$= \sum_{i,k} p_{ik} \cdot \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \cdot \varphi_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}\, W(x)$$

Так как $\sum_{j=1}^{n} W_{ij} \cdot \varphi_{kj} = \delta_k^i \cdot W(x)$

Тогда $$W(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \sum p_{ii}\, dx} \cdot W(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x} Tr(p)\, dt}\, W(x_0)$$

(11) Ticket 11

а) Построение общего решения линейной однородной системы по ФСР

Аналогично, решение — $\sum_i C_i y_i$

Δ было в 8 билете ∇

б) Нахождение ФСР и всяких λ
(кажется, этого пункта нет в вопросах, но она обязана в них входить).

1. Лин. ур-е: $p_1 y^{(n)} + p_2 y^{(n-1)} + \dots = 0$.
Заменим y^{n} на k^n, y' на k, y на 1.
Получим его хар-е ур-е, найдем корни $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$.

2. Системы
Найдем $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ из хар. ур-е: $\det(A - \lambda E) = 0$.

3. Как получить y_{oo} по $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$:

а) $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \in \mathbb{R}$, простые
$$y_{oo} = \sum C_i e^{\lambda_i x}$$

б) $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \in \mathbb{R}$, есть кратные
$$\underbrace{\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \dots = \lambda_{i_k}}_{\text{кратн}} \quad \underbrace{\lambda_{j_1} = \dots = \lambda_{j_l}}_{\text{кратн}} \quad \dots \quad \underbrace{\lambda_{k+1} \dots \lambda_{n}}_{\text{простые}}$$
$$y_{oo} = \underbrace{\sum C_i e^{\lambda_i x}}_{\text{простые}} + \sum_{\text{по наборам кратных}} \sum_{i=1}^{n} x^{i-1} e^{\lambda_i x}$$

в) $\lambda_k = \alpha + i\beta$, простое
$$y_k = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right]$$

г) $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = \dots \lambda_{k_n}$ — кратные и $\in \mathbb{C}$
$$y_k = e^{\alpha x}\left[P_m \cos\beta x + P_n \sin\beta x\right]$$

Собственно, вот.

в) Метод Эйлера поиска решения с помощью неопределенных коэффициентов.

Ищем решение системы

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y(t)$$

В форме: $y_1 = \lambda_1 e^{rt}$, $y_2 = \lambda_2 e^{rt}$, $y_3 = \dots$
Подставив эти выражения в систему, сократим на e^{rt} и получим систему для $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$. ее определитель должен быть $= \neq 0$, тогда найдем для $\{\lambda_1^1, \lambda_1^2 \dots \lambda_n^1\}$ r^1 через $\det = 0$

В итоге ответ на уровне

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \lambda_1^1 e^{r_1 t} + C_2 \lambda_2^1 e^{r_1 t} + \dots + C_n \lambda_n^1 e^{r_1 t} \\ \vdots \\ y_n = C_1 \lambda_1^n e^{r_n t} + C_2 \lambda_2^n e^{r_n t} + \dots + C_n \lambda_n^n e^{r_n t} \end{cases}$$

Это для простых вещественных r_1, r_2, r_3

(12) Ticket 12

а) Структура общего решения неоднородной системы ⟺ линейной.

$$Y_{он} = Y_{ч.н} + Y_{оо}.$$

Δ Как и в 8 билете, $\overline{Y}_{чн} - \overline{\overline{Y}}_{чн}$ есть решение однородной системы

∇

б) Метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа)

Предположим, что решение найдено в виде

$$Y_0(x) = \Phi(x) \cdot C, \text{ где } \Phi - \text{ф.с.р.}$$

Пусть C_i это $C_i(x)$, подставим функцию в систему

$$Y'(x) = AY(x) + f(x)$$

$$\cancel{\Phi'(x)C(x)} + \Phi(x)C'(x) = \cancel{A\Phi(x)C(x)} + f(x)$$

$$\Phi(x)C'(x) = f(x)$$

$$\Phi^{-1}(x)\Phi(x)C'(x) = \Phi^{-1}(x)f(x)$$

$$C(x) = \int \Phi^{-1}(x) f(x)\,dx + C_0.$$

Тогда общее решение неоднородной системы

$$Y(x) = \Phi C = \Phi C_0 + \Phi \int \dots = Y_{оо}(x) + \int \dots$$

13. Ticket 13.

а) Матричный метод интегрирования линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Пусть у нас есть система вида

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

тогда решение можно искать в виде $X = \alpha e^{kt}$

$ke^{kt}\alpha = Ae^{kt}\alpha$

$k\alpha = A\alpha$

$A\alpha - k\alpha = 0$

$(A - kE)\alpha = 0 \Rightarrow \det(A - kE) = 0$

Пусть $\{k_1 \dots k_n\}$ различны, тогда каждому k_i соотв. $\alpha^{(i)}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{k_n t} \end{pmatrix}$$

б) Фундаментальная матрица

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (*)$$

• Теорема — e^{At} — фунд. матрица $(*)$

Δ $\frac{dX}{dt} = \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}$ (можно через предел-определение)

∇ $= \lim \dots = e^{At} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} (e^{A\Delta t} - 1) = e^{At} \lim \frac{1}{\Delta t} (E + A\Delta t + \underset{\alpha(\Delta t) \to 0}{\dots} - E) = e^{At} \cdot A$

Следствие — $X = e^{At}$

в) Структура фундамент. матрицы

$X = SZ$ $\quad$ S – матр. перехода к жордан. базису

$$S\frac{dZ}{dt} = ASZ$$

$$\frac{dZ}{dt} = \underbrace{S^{-1}AS}_{}Z \longrightarrow \operatorname{diag} A$$

$$A = SJS^{-1} \Rightarrow e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

$$\Rightarrow X = Se^{Jt}S^{-1}\cdot C \text{ – решение}$$

- Поиск J: $\det(A-\lambda E) = 0$
  $\Rightarrow \sigma = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$
  Находим собств. и присоед. вектора
  $S = (X_1, X_1^{(1)}, \ldots X_2 \ldots X_n)$
  $S^{-1} = (S)^{-1}$, $J = S^{-1}AS$

(14). Ticket 14.

а) Краевая задача для обыкновенного дифференциального ур-я 2 порядка

- Краевая задача – задача вида

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) & a \le x \le b \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = \omega \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = \overline{\omega} \end{cases}$$

- Если $\omega = \overline{\omega} = 0$, то краевые условия называются однородными.
- Краевая задача, в отличие от задачи Коши, не всегда разрешима.
- $\left.\begin{matrix} y(a) = A \\ y(b) = B \end{matrix}\right\}$ задача Дирихле $+\Delta y = 0$
- $\left.\begin{matrix} y'(a) = A \\ y'(b) = B \end{matrix}\right\}$ задача Неймана $+\Delta y = 0$

б) Функция Грина краевой задачи Дирихле:

Пусть мы имеем краевую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = 0 \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Тогда $G(x,s)$ — ф-я Грина для задачи Дирихле, если

1. G непр по x при $\forall s$
$x \in [x_0, x_1]$, $s \in (x_0, x_1)$

2. $(p(x) G_x')' + q(x) G = 0$

3. $G(x_0, s) = 0 \quad G(x_1, s) = 0$

4. $G_x'(s+0, s) - G_x'(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$

Если $G(x,s)$ найдена, то решение краевой задачи есть

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,s) f(s) ds$$

Δ

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) dx\right) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x,y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) + \alpha'(y) f(\alpha(y), y)$$

Тогда с $y(x)$ по x:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_x'(x,s) f(s) ds + 0 + 0 = \int_{x_0}^{x} + \int_{x}^{x_1}$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_{xx}''(x,s) f(s) ds + G_x'(x+0, x) f(x) + G_x'(x-0, x) f(x)$$

Подставим все в ур-е (1) кр. зад. Дирихле

$$p(x) \int G_{xx}''(x,s) f(s) ds + f(x) + p'(x) \int_{x_0}^{x} G_x'(x,s) f(s) ds + q(x) \int_{x_0}^{x} G(x,s) f(s) ds \overset{?}{=} f(x)$$

$$\int_{x_0}^{x} (p G'' + p' G' + q G) f(s) ds + f(x) = \underset{\text{по def. } G}{0} + f(x) = f(x)$$

∇

в) Построение функции Грина

$$\begin{cases} (p(x) z')' + q(x) z = 0 \\ z(x_0) = 0 \\ z(x_1) = 0 \end{cases}$$

Построим две системы для z_1 и z_2

$$\begin{cases} (p(x) z_1')' + q(x) z_1 = 0 \\ z_1(x_0) = 0 \\ z_1'(x_0) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -//- (z_2) \\ z_2(x_1) = 0 \\ z_2'(x_1) \neq 0 \end{cases}$$

z_1 и z_2 лин. нез, иначе ?

Получив z_1 и z_2, решив задачи Коши, построим G:

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 z_1(x) & [x_0; s] \\ C_2 z_2(x) & [s, x_1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 z_1(s) - C_2 z_2(s) = 0 \\ C_1 z_1'(s) - C_2 z_2'(s) = \frac{1}{p(s)} \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{z_2(s)}{p(s) w(s)} \qquad C_2 = \frac{z_1(s)}{p(s) w(s)}$$

г) Задача Штурма-Лиувилля.

З. Ш-Л состоит в поиске λ, таких, что $\exists$ нетривиальное ($\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$) решение системы:

$$\begin{cases} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y}_{L(y)}+\lambda p(x)y=0 \\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0 \\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \end{cases}$$

(15) Ticket 15

а) Элементы теории устойчивости. Понятия и определения.

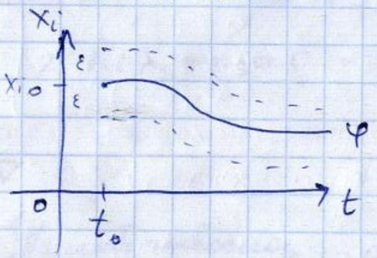
Пусть мы имеем систему

$$\frac{dX}{dt}=f(t,X) \quad \text{и} \quad \left(f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_c}\right)\in C$$

- Решение $X_*(t)=\varphi(t)$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\forall X(t)$ $\exists t_0$ $\forall t\geq t_0$

$$\|x_i(t)-\varphi_{i0}\|<\delta \Rightarrow \|X_i(t)-\varphi_i(t)\|<\varepsilon$$

(тут подразумевается наличие начального условия $X_i(t_0)=X_{i0}$) ($t_0=0$ без уменьшения общности)



- Решение устойчиво асимптотически, если

$$\|x(t_0)-\varphi(t_0)\|\longrightarrow \lim_{t\to\infty}\|X(t)-\varphi(t)\|=0$$

б) Возмущенные движения

Пусть ур-я мех. системы представлены в виде:

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i(y_1\dots y_m, t) \quad i=1..m$$

Рассмотрим мех. движение, отвечающее

некоторому частному решению

$y_i^* = f_i(t)$ при н.у. $y_{i0} = f_i(t_0)$

называется невозмущенным. Все остальные (другие нач. условия) ур-е, подходящие под $y_i \neq f(t)$ — возмущенными.

в) Устойчивость нулевого решения

Вопрос об устойчивости решения $x = \varphi(t)$ сводится к вопросу об устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$ другой системы, получаемой из

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \text{ заменой } y = x - \varphi(t)$$

16. Ticket 16.

а) Устойчивость системы линейных дифференциальных уравнений

Линейная система называется устойчивой, если все ее решения устойчивы по Ляпунову

Неоднородная система $X' = A(t)X + f(t)$ устойчива, если устойчив ее однородный вариант.

б) Критерий устойчивости

Линейная однородная система с постоянными коэфф. устойчива, когда

$\forall \lambda \in \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ $\quad \mathrm{Re}[\lambda_i] \leq 0$

Причем если $R_i = 0$, то жорданова клетка должна быть 1×1

Если $<$ строгое, то аналогично система асимптотически устойчива

Δ

∃ система устойчива, но $\exists \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ |

1. $\mathrm{Re}\,\lambda_s = \alpha_s > 0 \Rightarrow x(t) = e^{\alpha_s t}(\alpha\cos\beta_s t + \beta\sin\beta_s t)$

$|x(t)| \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$ противор. с усл. уст.

2. $\mathrm{Re}\,\lambda_s = \alpha_s = 0 \Rightarrow x(t) = \bar{\alpha}\cos\mu t + \bar{\beta}\sin\mu t \Rightarrow$

$\Rightarrow |x(t)| \not\to 0$

∇

в) Устойчивость системы диф. ур-й с постоянными коэффициентами

? $X' = A(t)X + f(t) \Leftrightarrow X' = A(t)X$

• Нулевое решение одн. устойчиво (однородная $\varphi(t) = 0$ уст.)

⇕

Любое решение неодн. устойчиво. X^* уст.

Δ

$\Rightarrow \forall t_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall x(t)$ — реш. неодн. $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \delta \to$ $\forall t > t_0\ |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$.

? ~~~ $\forall \tilde{x}(t)$ — реш. одн. $|\tilde{x}(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \to$ ~~ $\underbrace{|\tilde{x}(t) - \varphi(t)|}_{|\tilde{x}(t)|} < \varepsilon$

Тогда $\tilde{x} + x^*$ — реш. неодн. подст. в ... представлено разностью.

∇

г) Теоремы Ляпунова об устойчивости по I приближению

Преобразуем систему вида

$Y' = f(X)$

и систему вида

$X' = JX + R(x)$, где $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

, а $R(x)$ – члены 2 и более порядка

Тогда если все λ_i якобиана J меньше 0, то система устойчива. Если >0 $(\exists\lambda>0)$ неустойчива. 0 – нужно проводить более трудное исследование.

д) Теорема Рауса – Гурвица

$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \Leftrightarrow$ главные миноры (диагональные) матрицы R-G >0

$$R\text{-}G = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \; a_1 \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & a_n \end{pmatrix}$$, то есть

$|a_1| > 0$ $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ $\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots$

- Следствие: $a_1 > 0$ $\Delta_{n-1} > 0$ $\Delta_{n-3} > 0 \dots$

17. Ticket 17

а) Функции Ляпунова

Рассматриваем системы вида $\frac{df}{dt} = F(t)$, $X' = f(X)$

$V(x)$, где $x = (x_1, \dots x_n)$ /

1. $V(0) = 0$
2. $\left(V(x), \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) \in C^0(U_0)$
3. $V(x) > 0 \quad \forall X \in U_0 \setminus \{0\}$
4. $\frac{\partial V}{\partial t} \le 0 \quad \forall X \in U_0$

, называется ф-ей Ляпунова.

- $V(x)$ знакоопр., если $V(x) > 0$ в $U \setminus \{0\}$
- $V(x)$ знакопост., если $V(x) \geq 0$ в $U \setminus \{0\}$ и $\exists x_0\, V(x_0) = 0$
- $V(x)$ знакопеременна, otherwise.

б) Теоремы об устойчивости

- Если в U-окрест. нулевого реш. $X = 0$ автономной системы (t не вх. в п.г. явно) сущ. ф-я Ляпунова, то $X = 0$ устойчиво по Ляпунову.
- Если в U сущ. V | $\frac{\partial V}{\partial t} < 0$ строго, для всех $X \in U \setminus \{0\}$, то реш. асимпт. устойчиво.

То есть необходимо строгое неравенство <0.

в) Теоремы о неустойчивости.

• Ляпунова

$\exists$ в U-окр. $X=0$ $\exists\, V(x)$ |

1. $V(0)=0$
2. $V'_t > 0$

Тогда $\exists x\ V(X) > 0 \Rightarrow X=0$ неустойчив.

• Четаева

$\exists\, V(X)$ непр. дифф. около $X=0$ в U.

1. $\exists U_1 \subset U$ | $(0, 0, \dots 0) \in U_1$ (нач. коорд.)
2. $V(x) > 0$ для $X \in U_1 \setminus \{0\}$
3. $V'_t(x) > 0$ для $X \in U_1 \setminus \{0\}$
4. $V(x) = 0$ для $X \in \delta U_1$ — граница подобласти U_1

Тогда $X=0$ неустойчиво

18 Ticket 18

5) Особые точки на фазовой пл-ти

• Фазовое пр-во — ЛО$\{x_1 \dots x_n\}$

• Фазовая пл-ть — 2-мерное ф. пр-во.

б) Свойства ОСЛДУ с пост. коэф.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Downarrow$

$\exists \chi$ — хар. полином

Рассмотрим 3 случая:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

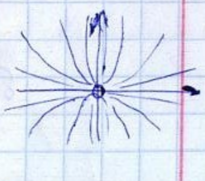
I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 t}}_{\xi_1(t)} \cdot \bar{a}_1 + \underbrace{C_2 e^{\lambda_2 t}}_{\xi_2(t)} \cdot \bar{a}_2$$

Проведем лин. одн. преобр. координат

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = \lambda_1 \xi_1 \\ \frac{d\xi_2}{dt} = \lambda_2 \xi_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \alpha x + \beta y \\ \xi_2 &= \gamma x + \delta y. \end{aligned}$$

1. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$



Поделим второе на первое

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\xi_2}{\xi_1} \Rightarrow \xi_2 = c|\xi_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

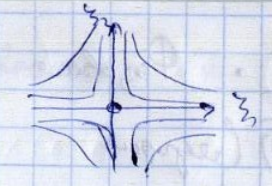
Пусть $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ без умаления общн.

Тогда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$ и это семейство парабол.

Если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, узел устойчив, напр. — к центру. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ — неуст.

2. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

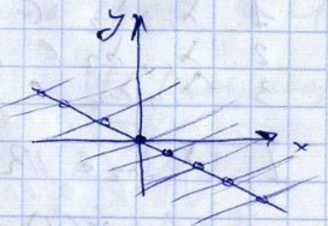
$\xi_2 = C|\xi_1|^{-\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|}$



Это седло, причем при $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ точка $\to 0$ на ξ_2 и $\to \infty$ на ξ_1
Седло всегда неустойчиво.

3. $\lambda_1 = 0$

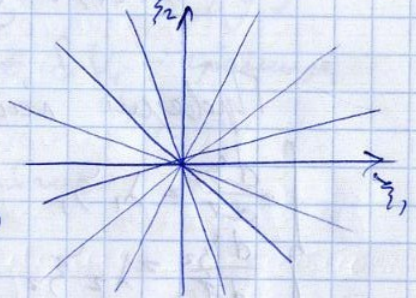
Такое имеет место, если $\det = 0$.
Тогда любая точка $ax + by = 0$ есть полож. равновесие. в зависимости от знака λ_2



II $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

а) $a_{12} = a_{21} = 0$

$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\xi_2}{\xi_1} = const$



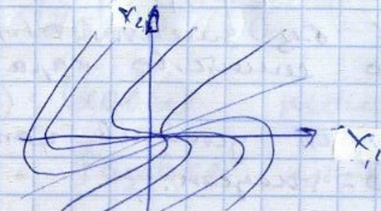
Дикритический узел

$\lambda < 0$ устойчив

$\lambda > 0$ неустойчив

б) $a_{12} \neq 0$

Решение имеет вид $x(t, C_1, C_2) = (C_1 \bar{\alpha} + C_2(\alpha t + \beta))e^{\lambda t}$



Что-то такое. Вырожденный узел.

III $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Введем преобразование

$\xi_1 = u + iv \qquad \xi_2 = u + iv$

$\frac{du}{dt} + i\frac{dv}{dt} = (a_1 + ib_1)(u + iv)$

$\frac{du}{dt} - i\frac{dv}{dt} = (a_1 - ib_1)(u - iv)$

$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 v \\ \frac{dv}{dt} = a_1 v + b_1 u \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{a_1 v + b_1 u}{a_1 u - b_1 v} \quad (*)$

Пусть $u = r\cos\varphi$ $v = r\sin\varphi$, тогда

$(*) \Rightarrow r = Ce^{\frac{a_1}{b_1}\varphi}$ — логарифм. спираль

$a_1 < 0$ — устойчивый фокус

$a_1 > 0$ — неустойчивый фокус

$a_1 = 0$ — эллипсы вида $bu^2 + (a-d)xy - cx^2 = const$ «центр»

19. Ticket 19

а) Первые интегралы

Рассматриваем системы вида $x' = f(x)$

$u(x) \in C^1(D)$ — первый интеграл, если $u(x) \neq const$ $\forall$ подобл. D & $u(\varphi(t)) = const$ ← решение

$\frac{du}{dt} = (\nabla u, f)$

б) Теорема о сущ. первых интегралов.

u – I интеграл $\Longleftrightarrow$ $(\nabla u, f) = 0$ в D

Δ

Необх. Имеем $\frac{dx}{dt} = f(x)$

$\exists u(x)$ – I интеграл системы

• Произв. в силу системы

$v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad v(x, \dots x_n)$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x_1} \underbrace{\frac{dx_1}{dt}}_{f_1(x)} + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \underbrace{\frac{dx_n}{dt}}_{f_n(x)}$$

u – I инт., тогда $\forall g$ $u \circ g = const$,

тогда $u'(g_1(t), g_2(t) \dots g_n(t)) =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dg_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dg_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(x) = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i =$$

$$= \sum (\nabla u)_i f_i =$$

$$= (\nabla u, f) = 0$$

в) Понижение порядка системы с помощью I интегралов

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z) \\ y' = f_2(-\,//\,-) \\ z' = f_3(-\,//\,-) \end{cases}$$

$+ x(t_0) = x_0$
$y(t_0) = y_0$
z –//– –//–

u – I инт. $u(x_0, y_0, z_0) = C_0$
из тогда выразим

$z = \varphi(x, y, C_0)$

и подставим в