ТФКП

Короче это типа матанализ в $\mathbb{C}$.

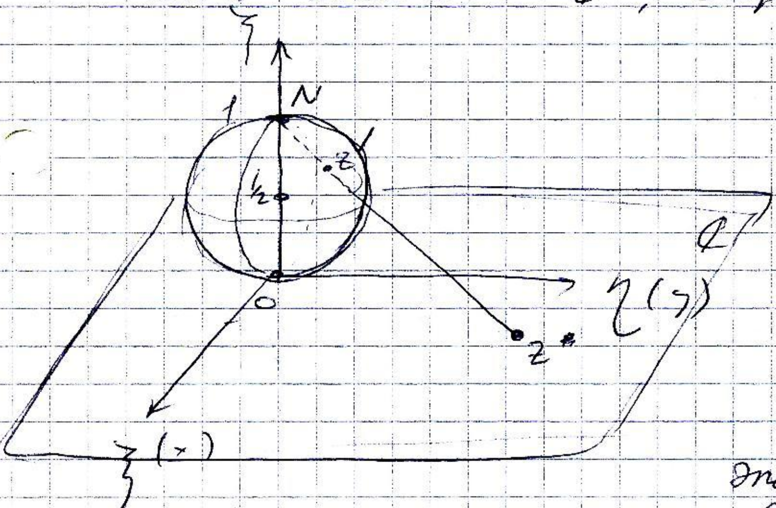
14.02.2015

Стереографическая проекция на $\mathbb{C}$

Бесконечно мал. в-на в всей плоскости — ф-я

Мы строим $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где '$\infty$' — бесконечно удалённая точка

Чтобы понять $\overline{\mathbb{C}}$, введем $\mathbb{R}^3$: $O\xi\eta\zeta$:



Введем сферу

$S(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\xi^2 + \eta^2 = \zeta(1-\zeta)$

Имеем $S \setminus \{N\} \leftrightarrow \mathbb{C}$

Тогда $N \leftrightarrow \{\infty\}$,

$S \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Это стереографическая проекция, сфера — Сфера Римана

Установим соответствие координат:

т.к. $(N, z', z) \in l \iff \overrightarrow{Nz'} \parallel \overrightarrow{Nz}$, тогда

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{1-\zeta} \\ y &= \frac{\eta}{1-\zeta} \end{aligned}}$$

Обратное соотв.:

$$\triangle\ |z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta} =$$

$$= -1 + \frac{1}{1-\zeta}; \quad \frac{1}{1-\zeta} = |z|^2 + 1 \Rightarrow \boxed{1 - \zeta = \frac{1}{1+|z|^2}}$$

Из формул $x =$ $y =$ … выразим

$$\boxed{\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{x}{1+|z|^2} \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}}$$

$\measuredangle\ (\overline{\mathbb{C}}, \rho)$ – метрическое пр-во

$$\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$$

Введем сферическую метрику

$$\tilde\rho(z_1, z_2) = \rho(z_1', z_2') = |z_2' - z_1'| =$$

$$= \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2} = \quad (\xi_1^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta)$$

$$= \sqrt{\zeta_2 + \zeta_1 + 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} + \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} - \frac{2(x_1x_2 + y_1y_2 + |z_1|^2|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{|z_2|^2 - |z_1|^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + |z_1|^2|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

$$\tilde\rho(\overset{\in\mathbb{C}}{z}, \infty) = \rho(z', N) = |z' - N| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \zeta} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$\tilde\rho(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & (z_1, z_2) \subset \mathbb{C} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_1 \in \mathbb{C} \quad z_2 = \infty \end{cases}$$

Тогда $(\overline{\mathbb{C}}, \tilde\rho)$ – метр пр-во.

$\measuredangle\ M \in \mathbb{C}$ $\quad M$ – огр $\quad M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R < \infty\}$

$$\tilde\rho(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\underset{\uparrow R^2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\ \underset{\uparrow R^2}{\sqrt{1+|z_2|^2}}} \le \rho(z_1, z_2)$$

$$\frac{\rho(z_1, z_2)}{1+R^2} = \frac{|z_2 - z_1|}{1+R^2} \le \tilde\rho(z_1, z_2)$$

// Пусть U – окр. $\quad U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \overset{\text{Евкл метр.}}{\rho}(z, z_0) < \varepsilon\}$

Пусть $\tilde U$ – окр $\quad \tilde U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \tilde\rho(z, z_0) < \varepsilon\}$

$\rho \sim \tilde\rho$ значит $\forall U(z_0, \varepsilon)\ \exists \tilde U(z_0, \varepsilon') : \tilde U \subset U$ и $U \subset \tilde U$

$$\tilde{U}(\infty,\varepsilon) = \{z\in\overline{\mathbb{C}} : \tilde{\rho}(z,\infty)<\varepsilon\} =$$
$$= \{z\in\overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}<\varepsilon\} =$$
$$= \{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z| > \sqrt{\left|\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right|} = E$$
$$\Rightarrow \tilde{U}(\infty,\varepsilon) = \{z\in \mathbb{C} : |z|>E\}$$

дополнение шара $R = E$

И это „внешность" шара.

„Внешность" содержит '∞' (чтобы не было путаницы внеш./внутр.)

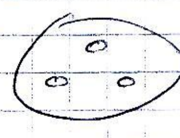
Односвязная область — любая петля стягивается.

Кривая — это непрерывное отобр. $\gamma(t): [0,1]\to\mathbb{C}$

Простой контур — кривая без пересечений. (Жорданов)

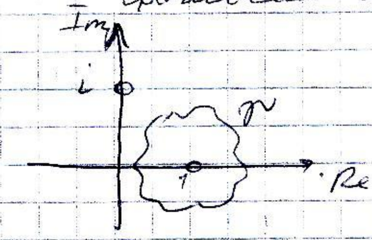
n-связность — мн-во (на плоскости) кол-во границ мн-ва

 — 2 связн.

 — 4-связн.

$\overline{C}\setminus\{1\}$ односвязн! (точка ∞ есть) стягиваем на ∞

$\overline{C}\setminus\{1\cup i\}$ — двусвязн



Последовательность компл. чисел $\{z_n\}: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$

Опр $A=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ $(A\in\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n>N\ |z_n-A|<\varepsilon$

Пусть $z_n = x_n + iy_n$

Т $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha & (x_n=\mathrm{Re}\, z_n)\\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta & (y_n=\mathrm{Im}\, z_n)\end{cases}$ $A=\alpha+i\beta$

Δ

$\Rightarrow$ Необх:

$\exists \lim z_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > N\ |z_n - a| < \varepsilon$

$\measuredangle\ \underbrace{|z_n - a| = \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2}} = |(x_n-\alpha) + i(y_n-\beta)| \leq$

$\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|; \Rightarrow$

$|x_n - \alpha| \leq |z_n - a|$

$|y_n - \beta| \leq |z_n - a|$

Тогда

$\begin{cases} |x_n - \alpha| < \varepsilon \\ |y_n - \beta| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lim x_n = \alpha \\ \lim y_n = \beta \end{matrix}$

$\Leftarrow$ Дост.

$\lim x_n = \alpha$

$\lim y_n = \beta$, тогда по опр $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$

$|y_n - \beta| < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| \geq |z_n - a|$ (из необх.)

Возьмем $\max(N_1, N_2) =: N$, тогда $|z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

∇

Утв: $\lim z_n = 0 \Leftrightarrow \lim |z_n| = 0$

I Критерий Коши

$\{z_n\}$ - сх $\Leftrightarrow$ $\{z_n\}$ - фундаментальна.

$|\cdot a| - |\cdot z|$

Опр z і огр если $\exists M \ /\ |z| < M$

I Принцип Больцано-Вейерштрасса

$\forall$ беск огр мн-во из $\mathbb{C}$ имеет хотя бы 1 пред. точку

Δ Z — огр. беск. $\{z_n\}$ - огр $\Rightarrow \{\operatorname{Re} z_n\}, \{\operatorname{Im} z_n\}$ - огр.

$\exists x_{n_k}$ подпосл по Б-В и y_{n_k} которые сх.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y \in \mathbb{R}$, $\{x_{n_k} + i y_{n_k}\} \to x + iy =$

$= z \in \mathbb{C}$

∇

Δ (Коши)

необх $\exists \lim z_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |z_n - a| < \varepsilon$

$\forall m > N\ |z_m - a| < \varepsilon \Rightarrow (|z_n - a| - |z_m - a|) < \varepsilon,\ |z_n - z_m| < \varepsilon$

дост

z_n - фунд. $\Rightarrow$ z_n сход.

$|z_n - z_m| < \varepsilon$ или $\forall z_n \in \mathring{K}(z_N, \varepsilon)$

тогда $\{z_n\}$ огр. $\Rightarrow$ $\exists$ пред. точка у $\{z_n\}$

[illegible]

∇

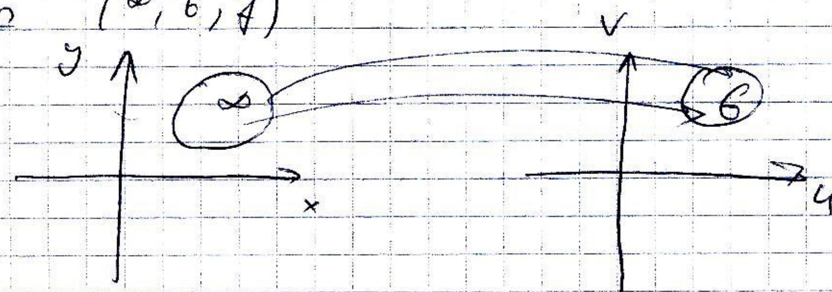
Упр. $\lim z_n = a \overset{?}{\Rightarrow} \lim |z_n| = |a|$?

Упр. Пусть $z_n = \rho_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$

если $\lim \rho_n = r$, $\lim \varphi_n = \theta \overset{?}{\Leftrightarrow} \lim z_n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Функции компл. переменного. Непр. Дифф.

Опр. (D, G, f)



$f: D \to G$

$\forall z_1 \in D$

$\exists \cdot f(z) = w \in D$

если ещё $z_1 \neq z_2 \in D \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2) \Rightarrow f$

$\Rightarrow f$ - биективное, однолистное

$z = f^{-1}(w)$

если $w = f(z)$ - однолистное $\Rightarrow f^{-1}$ - однозначное

если $w = f(z)$ - однозн. $\not\Rightarrow f^{-1}$ однозначна

Пр. $w = |z|$ $\forall c \Rightarrow |z| = c$

$w = f(z) = \mathrm{Re}\,w + i\,\mathrm{Im}\,w = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $A \in \overline{\mathbb{C}}$

Опр. $\lim f(z) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, U(A)\ \exists\, \mathring{V}(z_0)$

$\forall z \in \mathring{V}(z_0) \Rightarrow f(z) \in U(A)$

Опр. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim f(z) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$

$\forall z\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$

28.a.2015

Опр 2 $\exists z_0 \neq \infty$, $A \neq \infty$ => $\lim_{z \to z_0} f(z) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ . \ \forall z : \ 0 < |z - z_0| < \delta$

Опр 3 $\exists z_0 = \infty$, $A \neq \infty$ => $\lim_{z \to \infty} f(z) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists D(\varepsilon) > 0 \quad \forall z \ |z| > D$
$|f(z) - A| < \varepsilon$

Опр 4 $\exists z_0 \neq \infty$ $A = \infty$ => $\lim f(z) = \infty \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall E > 0 \ \exists \delta = \delta(E) \ \forall z \ 0 < |z - z_0| < \delta$ =>

$|f(z)| > E$

Опр 5 Гейне

$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \{z_n\} \to z_0 \Rightarrow \{f(z_n)\} \to A$

I $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, где $A = A_1 + iA_2 \Leftrightarrow$

$\exists \lim \operatorname{Re} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x,y) = A_1$

$\lim \operatorname{Im} f(z) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x,y) = A_2$

, где $f(z) = u + iv$

Δ (=>)

$z_0 \neq \infty$, $A \neq \infty$

$\exists \lim f(z) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$

$\forall z : \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$

$\measuredangle \ |f(z) - A| = \sqrt{(u(x,y) - A_1)^2 + (v(x,y) - A_2)^2}$ =>

=> $|u(x,y) - A_1| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$ => $\exists \lim u(x,y) = A_1$

=> $|v(x,y) - A_2| \leq \ldots$

(<=) $\begin{cases} \lim u = A_1 \\ \lim v = A_2 \end{cases}$ => $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{matrix} \exists \delta_1 \ \forall M \in B(M_0, \delta_1) \ \ u(x,y) \in B(A_1, \varepsilon) \\ \exists \delta_2 \ \forall M \in B(M_0, \delta_2) \ \ v(x,y) \in B(A_2, \varepsilon) \end{matrix}$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ => $|f(z) - A| = |u(x,y) - A_1 + i(v(x,y) - A_2)| \leq$

$\leq$ ~~|~~ $|u - A_1| + |v - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ => $\lim f(z) = A$

∇

Зам $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ => $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \sqrt{u^2 + v^2} =$

$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = |A|$

Утв. $\exists$ $A \neq 0$, $\arg A \neq \pi$

$\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \arg f(z) = \arg A$

Утв. $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |A| \to R$ и $\lim\limits_{z \to z_0} \arg f(z) = \varphi \to \arg A$,

тогда $\exists \lim \operatorname{Re} f(z) = R\cos\varphi$ $\quad \left(\Rightarrow \exists f(z) = (\cos\varphi + i\sin\varphi) R \right)$

$\exists \lim \operatorname{Im} f(z) = R\sin\varphi$

Непрерывность $W = f(z)$ f z_0

Опр. $W = f(z) \in C^0(z_0) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Дифференцируемость $W = f(z)$ в т. z_0

Опр. f $\exists$ $\boxed{\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)}$

Опр. $W = f(z)$ диф. в т. z_0 ~~$(W \in C)$~~

если $\Delta f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z)$

A - число не зав-т от Δz, но может зависеть от z_0; $o(\Delta z)$ - б.м.ф. б.в.п.м., т.е.

$\lim \frac{o(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0$

Опр. дифференциал $W = f(z)$ в т. z_0 наз-ся

линейн. часть $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ т.к. $dz = \Delta z \Rightarrow df(z_0) =$
$= f'(z_0)\, dz$

(Т) $f(z)$ - диф. в т. z_0

$\Longleftrightarrow u(x,y)$ и $v(x,y)$ - диф. в (x_0, y_0) и

Выполняется условие Коши-Римана

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Пример: $W_1 = x + iy$ - диф в $\mathbb{C}$ $\quad W_2 = x + 2iy$ - не диф в $\mathbb{C}$

Δ Необх. $f(z)$ диф в z_0 $\Rightarrow \Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y$

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) +$
$+ iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) =$

$= \Delta u(x_0,y_0) + i\Delta v(x_0,y_0)$

$O(z) = O_1(\Delta z) + iO_2(\Delta z)$

$\Delta z \to 0 \Rightarrow |\Delta z| \to 0 \Rightarrow |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow \begin{matrix}\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0\end{matrix}$

$\Rightarrow \Delta u + i\Delta v = (A+iB)(\Delta x + i\Delta y) + O_1(\rho) + iO_2(\rho)$

$f'(z_0) = A + iB$

$\left.\begin{matrix}\Delta u(x_0,y_0) = A\cdot\Delta x - B\Delta y + O_1(\rho)\\ \Delta v(x_0,y_0) = B\Delta x + A\Delta y + O_2(\rho)\end{matrix}\right\} \Rightarrow u, v$ – диф

и $\frac{\partial u}{\partial x} = A$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -B$,

где $A = \frac{\partial v}{\partial y}$, $B = \frac{\partial v}{\partial x}$

<u>Дост</u>

Пусть u, v – диф. в $(x_0,y_0) \Rightarrow$

$\Delta u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\rho)$

$\Delta v(\ldots) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\rho)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A$; $-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = B$

$\Delta f(z_0) = \Delta u(x_0,y_0) + i\Delta v(x_0,y_0) = A\Delta x - B\Delta y + \alpha(\rho) +$

$+ i(B\Delta x + A\Delta y + \beta(\rho)) = A(\Delta x + i\Delta y) + iB(\Delta x + i\Delta y) +$

$+ \alpha(\rho) + i\beta(\rho) = \overbrace{(A+iB)}^{f'(z_0)}\Delta z + \alpha(\rho) + i\beta(\rho)$

$\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \lim \frac{\alpha(\rho) + i\beta(\rho)}{\Delta z} =$

$= f'(z_0) + \lim \underbrace{\frac{\alpha(\rho) + i\beta(\rho)}{\rho}}_{\text{б.м}} \underbrace{\frac{\rho}{\Delta z}}_{\text{огр } \left(\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\right)} = f'(z_0)$

Пр $W = x + 2iy$, но

не вып. К-Р: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$,

Аналит. ф-ии

<u>Опр.</u> $w=f(z)$ ф. аналитической в $z_0\in\mathbb{C}$, если она дифф. в U_{z_0}

<u>Опр</u> $w=f(z)$ ф. анал в D, если она такова в $\forall a\in D$

<u>Опр</u> $w=f(z)$, анал в $\mathbb{C}$, ф. целая

<u>Пр</u> $w=z\cdot\bar z=x^2+y^2$ $\quad u(x,y)=x^2+y^2$ $\quad v(x,y)=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0$$

$z\bar z$ дифф. в $z=0$, но нигде не аналит.

<u>Опр</u> $f(z)$ ф. аналит в $z=\infty$, если $f(\frac{1}{z})$ аналит. в $z(0)$

<u>Св-ва</u> $+,-,\cdot,/$ ~~не изменяет~~ сохраняет аналитичность

<u>Теорема о нулях</u> иначе Ан. ф-и

если $f(z)\in An(z=a)$ и $f(a)=0$, то

$\exists U_a(z)\ \forall z\in U_a\ f(z)=0$

или

$\exists \mathring{U}_a\ \forall z\in \mathring{U}_a\ f(z)\neq 0$

<u>Теорема единств. аналит. ф-ии</u>

Если $f_1(z), f_2(z)\in An(D)$, $f_1(z)=f_2(z)$ на $E\subset D$, $\exists$ пред. точка a мн-ва E в D

Тогда $f_1(z)\equiv f_2(z)$ на D

◁ $f(z)=f_1(z)-f_2(z)\in An(D)$

$f(z)=0$ на $E \overset{?}{\Rightarrow} f(z)=0$ на D

или $M=\{z\in D: f(z)=0\}$, $E\subset M$, $M\overset{?}{=}D$

$z=a$ - пред. точка $E \Rightarrow a$ - пред. точка M

$f(z)\in An(D)\Rightarrow f(z)\in C(D)\Rightarrow \lim\limits_{\substack{z\to a\\ \in M}} f(z)=f(a)=0$

тогда $\exists U_a: \forall z\in U_a \overset{M}{\Rightarrow} f(z)=0$ или

$\exists \mathring{U}_a\ \forall z\in \mathring{U}_a \Rightarrow f(z)\neq 0$ ← не возм.

◁ $\mathring{M}$ - мн-во внутр. точек M а) $\mathring{M}\neq\emptyset$, $(z=a\in\mathring{M})$

б) $\mathring{M}$ - откр. (из опр) в) M - замкнуто в D (содержит все свои пред. т.)

Пусть $z = b$ – пр. точка M_0, $b \in D \Rightarrow \forall \mathring{U}_b \ni z \subset U_b$:
$f(z) = 0 \Rightarrow \exists \tilde{\mathring{U}}(b): \forall z \in \tilde{\mathring{U}}(b) \Rightarrow f(z) = 0$

$\Rightarrow b \in \mathring{M}_0$ (b - внутр. точка)

D линейно связно,

тогда $\mathring{M}_0 = D$ $f(z) \equiv 0$ в D.

∇

Следствие

$f(z) \in An(D)$ и $f(z) = const$ на кривой Γ,
тогда $f(z) = const$ на D

Пр $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z - 1 \quad \in An(\mathbb{C})$

$f(z) \equiv 0$ при $z = x \in \mathbb{R}$, $\overset{C_1}{\Rightarrow}$ $f(z) = 0$ в $\mathbb{C}$

Теор Связь аналит. ф-ий с гармоническими

$f(z) = u(x,y) + v(x,y)i \in An(D)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\Big| \Rightarrow \Delta u = 0$ ← лапласиан $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}$

$\Big| \Rightarrow \Delta v = 0$

Опр $u(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}$ $\Delta u = 0$ в D
– гармоническая в D

Утв Если $f(z)$ – аналит. $\Rightarrow u, v$ – гармонические.
обратное неверно

Опр Пара гарм. ф-ий, связанных усл. К-Р,
– сопряженно-гармонические

Утв $f(z)$ – аналит $\Longleftrightarrow$ u, v – сопр. гармон.

Утв Всегда можно восстановить аналит. ф-ю по известной гармонической (веществ. или мнимой части)

$\triangleright$ $f(z) \in An$ $\quad u(x,y) = Re\, f(z)$ – гарм.
$Im\, f(z) = v(x,y)$

т.к. К-Р$_{\text{условия}}$

◁ $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \overset{К-Р}{\Rightarrow}$

$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + C$$

полн. дифф.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow \Delta u = 0$ $\quad D$-односв.

▷

Более удобный способ:

$$\left.\begin{aligned} \exists: -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \overset{\text{интегр.}}{\Rightarrow} v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \frac{\partial u}{\partial y}dx\right) + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial u}{\partial y}dx$$

$$\Rightarrow \varphi$$

Пр восстановить: $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \Rightarrow \Delta u = 0 \Rightarrow \exists v$

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow v(x,y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y}dx + \varphi(y) = +\int (2y - 2x)dx + \varphi(y) = 2yx - x^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x + 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

$$v(x,y) = 2yx - x^2 + y^2 + C$$

Понятие об аналит. продолжении

Опр 1) $f(z)$ опр. на $E \subset \mathbb{C}$
2) $\Phi(z) \in A(D)$, $E \subset D$
3) $\Phi(z) \equiv f(z)$ на E
$\Rightarrow \Phi(z)$ наз ан. прод. $f(z)$ с E на D

Т. Если E имеет пред. точку в $D \Rightarrow \Phi(z)$ – !

Δ Пусть $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ – ан. пр. $f(z)$
$\in B$ на $D \Rightarrow \varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ на E
$\Rightarrow \varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ на D
$\triangleright$

14.03.2015

I $w = e^z$ $z = x+iy$, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
1) $D(e^z) = \mathbb{C}$
2) $E(e^z) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
3) $|e^z| = e^x$ $\operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Δ
1) $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (1)$ верно
2) Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{R}$ – фикс $\Rightarrow$ л. и п. ч. (1) – целые ф-ии от z_1
e^z при $z_1 \in \mathbb{R}$ (1) верно $\Rightarrow$ (1) верно для $\forall z_1 \in \mathbb{C}$
3) Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$ – фикс. $\Rightarrow$ л. ч. и п. ч. ф. (1) – целые функции от z_2
т.к. (1) верно при $z_2 \in \mathbb{R}$
(п. 1) $\xRightarrow{\text{т. ед.}}$ (1) верно $\forall z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow$ (1) верно $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\triangleright$

5) $e^z \in An(\mathbb{C})$
Δ $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y$ $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y$ $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$ $\triangleright$
6) $e^z \in C(\mathbb{C})$

Δ $e^z \in An(\mathbb{C}) \Rightarrow e^z \in \tilde{C}_1(\mathbb{C}) \Rightarrow e^z \in C(\mathbb{C})$ $\triangleright$
7) Период $w = e^z$, $\forall T = 2\pi i k$ $k \in \mathbb{Z}$
Δ По опр $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$
Пусть $T_0 = T_1 + iT_2$ – период $\Rightarrow e^{z+T} = e^z$ $T = ?$

$e^T = 1 \Rightarrow e^{T_1 + iT_2} = 1 \Rightarrow e^{T_1} = 1 \Rightarrow T_1 = 0$

$e^{iT_2} = 1 \Rightarrow T_2 = 2\pi k$

Тогда $T = 2\pi i k$

∇

8) $(e^z)^m \quad m \in \mathbb{R}$

$(e^z)^m = e^{mx}(\cos my + i \sin my) = e^{mz}$

III $w = \sin z \quad w = \cos z$

$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

Δ Т.к. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \varphi \in \mathbb{R}$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

По т. единств. в силу $\in$ Ан их можно продолжить в $\mathbb{C}$

∇

1) $D(\sin z, \cos z) = \mathbb{C}$

2) Все известные тождества переносятся

3) Периодичные $T = 2\pi$, $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Delta \quad \sin(z + 2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} =$

$= \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

∇

$\exists\, T = T_1 + iT_2 \Rightarrow \sin(z + T) = \sin z$

$\Delta \quad e^{iz}(e^{iT} - 1) - e^{-iz}(e^{-iT} - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{iT} - 1)(e^{iz} e^{iT} - e^{-iz}) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{iT} = 1, \quad e^{i(T_1 + iT_2)} = 1 \Rightarrow \begin{cases} e^{-T_2}\cos T_1 = 1 \\ e^{-T_2}\sin T_1 = 0 \end{cases}$

$T_1 = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \quad T_2 = 0$

$\nabla \qquad T = 2\pi k$

4) Аналит., непр

5) $\triangleleft\ |\sin z| = \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{iz}}{2i} - \frac{e^{-iz}}{2i}\right| \geq$

$\geq \left|\frac{|e^{iz}|}{2i} - \frac{|e^{-iz}|}{2}\right| = \left|\frac{e^{-y}}{2} - \frac{e^{y}}{2}\right|$

при $y \to \infty$ $|\sin z| \to \infty$

6) $sh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ $\quad ch z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$th\, z = \frac{sh z}{ch z};$

$$\left[\begin{array}{l} \sin iz = i\, sh\, z \\ \cos iz = ch\, z \\ tg\, iz = i\, th\, z \\ ctg\, iz = -i\, cth\, z \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} sh\, iz = i \sin z \\ ch\, iz = \cos z \\ th\, iz = i\, tg\, z \\ cth\, iz = -i\, ctg\, z \end{array}\right.$$

Δ

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)}-e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\,\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\, sh\, z$$

∇

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin \underset{(\bar z)}{z} = \sin(x \pm iy) = \sin x\, ch y \pm i \cos x\, sh y \\ \cos \underset{(\bar z)}{z} = \cos(x \pm iy) = \cos x\, ch y \mp i \sin x\, sh y \end{array}}$$

$\triangleleft\ |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y} =$

$= \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y} = \sqrt{ch^2 y - \cos^2 x}$

$\triangleleft\ |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x\, ch^2 y + \sin^2 x\, sh^2 y} =$

$= \sqrt{\sin^2 x + ch^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + sh^2 y}$

$|sh y| \leq |\sin z| \leq ch y$

$|sh y| \leq |\cos z| \leq ch y$

$y \to \infty$

$|\sin z| \approx |\cos z| \approx \frac{e^{|y|}}{2}$

7) $\cos z = 0$ $\cos(x+iy) = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - i \cdot \sin x \,\mathrm{sh}\, y = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \,\mathrm{ch}\, y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \\ \sin x \,\mathrm{sh}\, y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$ $x = \cancel{\pi k}\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

8) $\mathrm{tg}\, z = \mathrm{tg}(x+iy) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x + \cancel{\mathrm{tg}\, iy}\ i\,\mathrm{th}\, y}{1 - i\,\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{th}\, y} =$

$= \dfrac{(\mathrm{tg}\, x + i\,\mathrm{th}\, y)(1 + i\,\mathrm{tg}\, x\,\mathrm{th}\, y)}{1 + \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}^2 y} = \dfrac{\mathrm{tg}\, x + i\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}\, y + i\,\mathrm{th}\, y +}{1 + \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}^2 y}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{th}^2 y}{1 + \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}^2 y} + i\,\dfrac{\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}\, y + \mathrm{th}\, y}{1 + \mathrm{th}^2 y\,\mathrm{tg}^2 x} =$

$= \dfrac{1 - \mathrm{th}^2 y}{1 + \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{th}^2 y}\mathrm{tg}\, x + i\,\dfrac{\mathrm{th}\, y\,(\mathrm{tg}^2 x)}{1 + \mathrm{tg}^2 x \cdot \mathrm{th}^2 y}\,\mathrm{th}\, y$

III $\measuredangle\ e^w = z$ $z \neq 0 \Rightarrow w = \mathrm{Ln}\, z$ — логарифм.

$w = u + iv \Rightarrow e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = z$

$e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|,\ v = \mathrm{Arg}\, z$

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \Rightarrow \ln|z| + i \arg z$

$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$ $\mathrm{Ln}\, z^n = n \,\mathrm{Log}\, z$

$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$

Поскольку ф-ии ~~мультизначные~~ многозначные, то '=' – равенство мн-в

IV Общая показ. ф-я

$w = a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a}$ $a \neq 0$

V Общая степенная ф-я

$w = z^a = e^{a \mathrm{Ln}\, z}$, опр. в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

VI Обратные тригонометр. ф-ии

$w = \mathrm{Arcsin}\, z$ $w = \mathrm{Arccos}\, z$, ..

$\exists\ z = \sin w \Rightarrow w = \mathrm{Arcsin}\, z$

решим $z = \sin w$

$$\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = z \,/\, 2ie^{iw};\quad e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

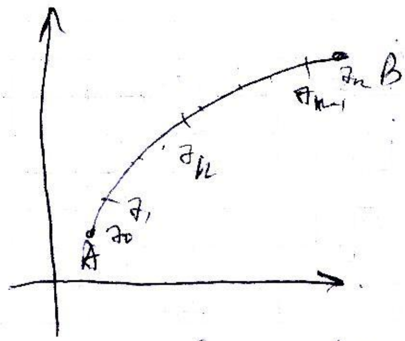
$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow iw = Ln(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\boxed{w = -i\, Ln(iz+\sqrt{1-z^2}) = Arcsin\, z}$$

21.03.2015 Интегрирование

1) $\exists l$ (z) AB – кус.-гл. кривая

$$w = f(z) \in C(AB)$$



$\xi_k = \xi_k + i\eta_k$

$f(\xi_k)\Delta z_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

$|\Delta z_k|$; $\sum f(\xi_k)\Delta z_k$ (1) – инт. сумма

$\delta \to 0$, $\delta = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \{l_k$, где l_k – длина дуги $n\}$

Если $\exists$ предел (1), и он не зависит ни от способа деления AB на части, ни от выбора точек ξ_k на них, то он наз. интегралом $f(z)$ по AB

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ n\to+\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \qquad \Delta z_k = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

если $\delta \to 0$, то $|\Delta z_k| \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \end{cases}$

$$\sum f(\xi_k)\Delta z_k = \sum u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + i\sum v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k$$

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AB} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{AB} v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Зам. $\gamma: z = z(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

Св-ва 1) Линейность $\forall f(z), g(z) \in C(\gamma) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\int_\gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz$$

2) $\forall f(z)$ непрерывной на $C(ABC)$

$$\int_{AC} = \int_{AB} + \int_{BC}$$

3) Ориентированность $\forall f(z) \in C(AB)$ AB - к. гл.

$$\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$$

4) Оценка $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma \underbrace{|f(z)|}_{\le M}\,dl \le M L_\gamma$

Интегральные теоремы Коши

Инт. теор. Коши для односв. обл.

(Т.) $f(z) \in An(D)$, $D \subset \mathbb{C}$, D - 1св. $\Rightarrow$

$\forall$ жорд. контура з-ного $\gamma \subset D \Rightarrow \oint f(z)\,dz = 0$

$\square$

$$\oint f(z)\,dz = \oint_\gamma u\,dx - v\,dy + i \oint_\gamma v\,dx + u\,dy = $$

Подынтегр. ф-ии - полные дифф. по Коши-Риману.
Значит интегр. не завис. от пути интегр., но они равны нулю. Всё это видно ~~для~~ из ф-лы Остроградского-Грина

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

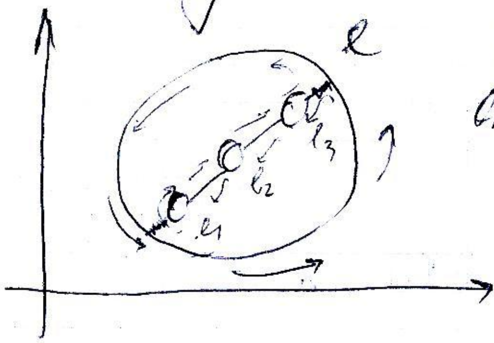
для односвязных

$$\Leftarrow \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_G \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy = 0$$

▽

T2 $\exists f(z) \in An(\bar{D})$, $D \in \mathbb{C}$ $\mathcal{D}$-многосв.

$$\Rightarrow \oint_\Gamma f(z)\,dz = 0, \text{ где } \Gamma = l \cup \{l_k\}$$



Δ разрезами, которые замыкают полость, область с разрезами односвязна.

\+ в силу ориентированности, $\int \cup l_k = 0$

▽

Следствие. При выполнении T2 $\oint_l f(z)\,dz = \sum_k \oint_{l_k} f(z)\,dz$

Δ $$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_l f\,dz + \sum \oint_{l_k} f\,dz + \underbrace{\sum_{\gamma_k}\oint - \sum_{\gamma_k}\oint}_{0 \text{ - взаимно } l_k} = 0 \Rightarrow$$

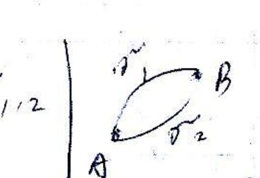
$$\Rightarrow \oint_l f\,dz = \sum \oint_{l_k} f\,dz$$

▽

T3 Независимость инт. от контура $\mathcal{D}$ - 1 св.
f - аналит.

$\int_\gamma f\,dz$ не зависит от γ, а только от γ нач и γ кон

Δ $\forall \gamma_{1,2}$



$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

▽

Первообразная

Опр $F(z)$ - первообразная ф-я для $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$

Т4 $f(z) \in C^0(D)$, $\int\limits_{\gamma} f\,dz$ - не зав. от γ

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \quad \forall z_0 \in D \text{ аналитическая в } D$$
и $F'(z) = f(z)$

Δ

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} \overset{?}{=} f(z)$$

$$\left| \frac{\Delta F(z_0 + \Delta z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} - f(z) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \left[\int\limits_{z_0}^{z_0 + \Delta z} (f(\xi) - f(z))\,d\xi \right] \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int\limits_{z}^{z + \Delta z} |f(\xi) - f(z)|\,d\xi.$$

Так как $f(z)$ непр., то $\forall \varepsilon\ \exists \delta \mid \forall z\ |\xi - z| < \delta$
$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon \int\limits_{z_0}^{z_0 + \Delta z} d\xi = \frac{1}{|\Delta z_n|} \varepsilon\, \Delta z_n \leq \varepsilon.$$

$\lim \sum \Delta z_k = \lim (z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots) =$
$= \lim (z_n - z_0) = z_n - z_0$

$$\Rightarrow \lim \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z) \Rightarrow F(z) \in An(D)$$

∇

Т5 если $f(z), g(z) \in An(D)$, $f'(z) = g'(z) \Rightarrow f(z) = g(z) + c$

Δ $h(z) = g(z) - f(z)$ - аналит. как разность

$h'(z) = 0 \Rightarrow \exists h(z) = u + iv$,

$h'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\exists a \in D$ $U(a)$ - односв. обл.

итак u, v - const в $U(a) \Rightarrow h(z)$ - const

в $U(a) \overset{\text{Т1}}{\Rightarrow} h(z) = \text{const}$ в $D \Rightarrow g = f + C$.

(Т6) Пусть $f(z)\in An(D)$, D — 1св. $\Phi(z): \Phi'(z)=f(z)$

Ип Совокупность $\Phi(z)+C$ - неопр. инт.

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \Phi(z_2)-\Phi(z_1)$$

◁

Пусть $f(z)\in An \Rightarrow f(z)\in C(D)$

$\xrightarrow{T_4} F(z)=\int_{z_1}^{z} f(\xi)\,d\xi \in An(D)$

$F'(z)=f(z) \xrightarrow{T_5} F(z)=\Phi+C$

Тогда $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \Phi(z)+C$

Пусть $z_1=z_2 \Rightarrow$ Пусть $z_1=z_2=z_0 \Rightarrow C=\Phi(z_1)$

Пусть $z_1=z_2$

$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \Phi(z_2)-\Phi(z_1)$ $\int f(z) = \Phi(z_2)-\Phi(z_1)$

▷

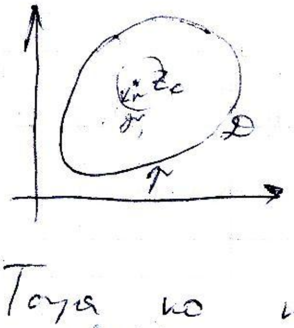
$\boxed{28.03.2015}$

(Т7) Пусть $f(z)\in An(\bar{D})$, D — 1св

$\Rightarrow \forall z_0\in D$ $\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}}$

$\gamma=\partial D$

◁



$\frac{f(z)}{z-z_0}\in An(D\setminus\{z_0\})$

$\frac{f(z)}{z-z_0}\in An(D^*)$ D^* - 2св.

Тогда по теореме 2:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_{\gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$$

Д $\oint_{\gamma_1}\frac{dz}{z-z_0}$: $\gamma_1: |z-z_0|=r$, $z-z_0=r(\cos t+i\sin t)$, $t\in[0,2\pi)$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi}\frac{r(-\sin t+i\cos t)\,dt}{r(\cos t+i\sin t)} = \int_0^{2\pi}(-\sin\cos+\sin\cos+i(\sin^2+\cos^2)) = i2\pi$$

Тогда $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{z - z_0}$ (*)

$\triangle$ $\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \right| \overset{(*)}{=} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq$

$\leq \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\overbrace{|f(z_0) - f(z)|}^{<\varepsilon}}{|z - z_0|} dl \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r} L_{\gamma_1} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

тогда $f(z_0) = \lim \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$

∇

Зам. Если $z_0 \notin D \Rightarrow \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 0$

$$\boxed{z_0 \in D \Rightarrow \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)}$$

(T18) Если $f(z) \in An(U_{(z_0)}) \Rightarrow f(z) \in C^{\infty}(z_0)$

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}}, \text{ где } \gamma \in U_{z_0}$$

$\triangle$

Пусть $n = 1$, $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$

по T_{17} $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0 - h} - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} \right) =$

$= \lim \frac{1}{2\pi h i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)(z - z_0) - f(z)(z - z_0 - h)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz =$

$= \lim \frac{1}{2\pi h i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z) \cdot h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz = \lim \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} \overset{?}{=}$

$\overset{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$

Докажем предел:

$\triangle$ $\left| \oint - \oint_{(\,)^2} \right| = \left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)\, h}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - h)} dz \right| \leq \oint\limits_{\gamma} \frac{|f(z)\, h|\, dl}{|z - z_0|^2 |z - z_0 - h|} \leq$

$\left\{ \begin{array}{l} |z - z_0| \text{ — наименьш., значит } \delta \\ |f(z)| \text{ — наибол., значит } \leq \Delta \\ |z - z_0 - h| \geq \big| \underbrace{|z - z_0|}_{\delta} - |h| \big| \geq \hat{\delta} - |h| \end{array} \right\} \leq \oint \frac{|h| \Delta}{\delta^2 (\delta - |h|)} dz = \frac{|h| \Delta}{\delta^2 (\delta - |h|)} L_{\gamma} \to 0$

тогда $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$

∇

(T₉) <u>Морера</u>

$\exists f(z) \in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}$ односв. и $\oint\limits_{\sigma} f(z) = 0$,

$\sigma \subset \mathcal{D} \Rightarrow f(z) \in An(\mathcal{D})$

Δ

$\exists f(z) \in C(\overline{\mathcal{D}})^{1\ св}$ и $\oint\limits_{\sigma} f(z) = 0 \overset{T_3}{\Rightarrow} \int\limits_{\sigma} f(z)$ не зав. от σ,

$\overset{T_4}{\Rightarrow} F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta \in An(\mathcal{D})$, $F'(z) = f(z) \overset{T_5}{\Rightarrow} f(z) \in An(\mathcal{D})$

∇

(T₁₀) Принцип максимума модуля аналит. функции

Если $f(z)$ – не const, тогда $|f(z)|$ достигает
$f(z) \in An(\mathcal{D})$ max на границе

<u>Нер-во Коши</u>

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\sigma} \frac{f(z)\,dt}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi} \oint\limits_{\sigma = \partial K} \frac{\overbrace{|f(z)|}^{\le M} dl}{|z-z_0|^{n+1}} \le$$

$\{\exists f(z) \in An(\overline{K(z_0, R)})^{\sigma}, \overline{K} \subset \mathcal{D}\}$

$$\le \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}$$

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{R^n}$$

(T₁₁) Теорема Лиувилля

Если $\left\{\begin{array}{l} f(z) \in An(\mathbb{C}) \\ f(z)\ \text{огр в}\ \mathbb{C} \end{array}\right| \Rightarrow f(z) \equiv const$

Δ

$|f'(z)| \le \underset{R^n \to \infty}{\frac{M}{R^n}} \to 0 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = const$

∇

Представление $\overset{(An)}{\text{функций}}$ рядами.

Разложение в ряды

<u>Опр</u> $\sum c_n (z-z_0)^n$ — степенной ряд

обл. сх $|z-z_0|<R$ $\qquad R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$$

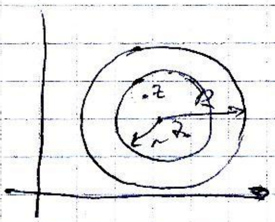
(T₁) Тейлора

Если $f(z)\in An(|z-z_0|<R) \Rightarrow \underline{f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}$,

$|z-z_0|<R$

Δ

П $f(z)\in An(|z-z_0|<R)$



инт. формула Коши

$\forall\ |z-z_0|=r \quad f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$

П $z\in(|z-z_0|<R)$, тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}$

$$\forall\ \frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

$|\xi-z_0|>|z-z_0|$ $\qquad <1$

$\forall\ \frac1r\sum\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac1r q^n$ — сх $\overset{\text{Вейерштр.}}{\Rightarrow}$ исх. ряд сх. равном. на l

Таким образом, подынтегр. сумма — равн. сх. ряд.

Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}f(\xi)\,d\xi=$

$$=\sum(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\sum c_n(z-z_0)^n,$$

где $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

l: $|z-z_0|=\rho$ — любой круг $(0<\rho<R)$

∇

Опр Ряд Лорана — содержит кроме полож. степеней $(z-z_0)$ и отр. степени

$$n=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n=\dots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dots+c_0+\dots+\frac{c_n}{(z-z_0)^{-n}}$$

Область сходимости - кольцо $R_1 < |z_0 - z| < R_2$

$0 < |z - z_0| < R_2$

$R_1 < |z - z_0| < +\infty$

$0 < |z - z_0| < +\infty$

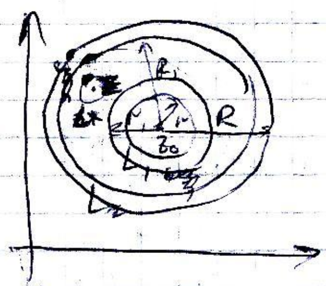
4.04.15

T Любую аналит. ф-ю в кольце $r < |z - z_0| < R$ можно представить рядом $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$,

где $C_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint \dfrac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

▷ $L: |z - z_0| = \rho \quad r < \rho < R \quad \Delta\ K_1: r_1 < |z - z_0| < R_1,$

$r < r_1 < R_1 < R$



$\dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \in An$(3-св. обл.) $\Rightarrow$

$$\oint_{L_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \oint_{L_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} + \oint_{L^*} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$$

инт. т. Коши $\Rightarrow \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{L^*} \dfrac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = f(z)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_2} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}.$$

$$\Delta\ \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} \overset{\xi \in L_1}{=} \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \sum \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n f(\xi)\,d\xi$$

$$= \sum (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}}_{C_n'} = \sum C_n' (z - z_0)^n$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)} \overset{\xi\in L_2}{=} -\frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}} =$$

$$= -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\ldots =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\sum \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\oint_{L_2} f(\xi)(\xi-z_0)^n\, d\xi =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$$

Отсюда $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, сход. где надо

▷ $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (*)$$

Опр $\sum c_n(z-z_0)^n$; c_n — $(*)$

ряд Лорана ф-ии f

Полож. $\left(\sum_{0}^{\infty}\right)$ — правильн. часть ряда Лорана

отр. — главная часть

Утв. Ряд Лорана ф-ии аналит. в кольце, внутри этого кольца сходится равномерно, абсолютно.

Равн. сходимость ряда Лорана позв. его диффер. и интегр. в кольце

Ф-я раскладыв. в ряд Лорана в том кольце где она $\in$ Ан.

На вн. гр-це max кольца и на внутр. границе хотя бы одна особ. точка ф-ии, причем особые точки на вн. границе — это ос. точки прав. части ряда Лорана, а особые точки на внутр. границе — на главн. части.

Для того чтобы найти все разложения:

1) Найти все особые точки $f(z)$
2) Отметить на пл. центр разложения и особ. точки
3) Провести окр. через z_0 и все особ. точки
4) При этом может быть неск. точек на 1 окр.

в) Они разбивают всю $\mathbb{C}$ на обл. аналит. $f(z)$:
1) круг, если z_0 не особая точка
2) кольца, внутри которых нет особых точек

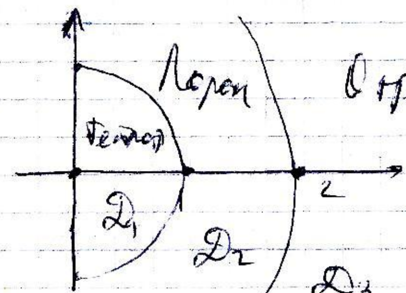
б) В каждой из этих областей ф-ю можно разложить в ряд Тейлора (для сам. внутр. обл. в случае когда z_0 не ос. точка)

в ряд Лорана

г) Коэф. разложения проще находить с помощью станд. разлож. $(\sin, ch, e^x, (1+x)^n)$

Пример Найти все возм. разл. в ряд Лорана: по степеням z

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \qquad (z)^n = (z-0)^n$$



$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

1) $|z|<1$ $\quad \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

2) $|z|>1$

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{-\infty}^{-1} z^n$$

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \end{cases} \qquad \frac{1}{z-2}$$

1) $D_1 \cup D_2$ $\quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\sum \left(\frac{z}{2}\right)^n$

2) D_3 $\quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$$D_1 \quad f_1 = -\sum^{+\infty}\left(z + \frac{z}{2}\right) = \sum_0^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n z^n$$

$$D_2 \quad f_2 = \sum^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{+0}^{\infty}\left(z/2\right)^n$$

Изолированные точки функции. Лоран

Изол. особые точки – точки в которых $f(z)$ не явл. аналит.

Особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции $f(z)$

назыв. изолиров., если $f(z) \in A_n$ в некот. окрестности этой точки, т.е. в малой U_{z_0} нет других особых точек.

В зависимости от повед. $f(z)$ вблизи z_0 различают три типа изол. особых точек:

1) Устранимая (правильная)
2) Полюс
3) Существенно особая точка

① Устранимая ос. точка z_0:
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$$

T_1 Изол. ос. точ. z_0 $f(z)$ явл. устранимой
$\Updownarrow$
главная часть Лор. разложение f в окр. z_0 равна 0, то есть
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n \quad (*) \quad 0 < |z-z_0| < R$$

Δ

необх: $\exists z_0$ - у.о.т $\Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = A$,
значит $f(z)$ огр в $0 < |z-z_0| < r \Rightarrow |f(z)| \leq M$

По неравенству Коши
$|C_n| \leq \frac{M}{r^n}$, r выберем малым, и при $n < 0$ $|C_n| = 0$, $\Rightarrow C_n = 0$

∇:
дост. $\exists$ $\exists (*)$, тогда ряд равном. сх-ся в круге, тогда $\lim f(z) = C_0 \neq +\infty$ - по опр у.о.т

∇

Зам. $\exists f(z_0) = C_0$, тогда разложение в z_0 ок.

② Полюс: $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

T_2 z_0 - полюс $\Leftrightarrow$ гл. часть Лор. разлож. вблизи z_0 содержит конечное число слаг.

т.е. $f(z) = \sum_{n=-M}^{-1} \frac{C_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$
$C_{-M} \neq 0$

Δ <u>необх.</u> z_0 – полюс, $\lim f(z) = +\infty$, $|f(z)| > 1$ в $\mathring{U}(z_0)$,
тогда $\frac{1}{f(z)} \in An(\mathring{U}(z_0))$; $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, z_0 – у.о.т. для $\frac{1}{f(z)}$

$$\overset{T_1}{\Rightarrow} \frac{1}{f(z)} = b_m (z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

$$f(z) = \frac{1}{\sum\limits_{n=m}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n} = \frac{1}{(z-z_0)^m \underbrace{\sum b_n (z-z_0)^{n-m}}_{\in An}} =$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} \left(C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots \right) =$$

= то что надо.

<u>дост.</u> Пусть есть $f(z) = \sum\limits_{-m}^{-1} + \sum\limits_{0}^{+\infty}$

$$f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^{m+n}$$

$$\lim \underbrace{f(z)(z-z_0)^m}_{\to \psi(z)} = C_{-m} \neq 0 \Rightarrow \psi(z) \text{ огр}$$

$$\Rightarrow \lim f(z) = \lim \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} = \infty \Rightarrow z_0 \text{ – полюс}$$

∇

<u>Опр</u>
Если $m > 0$ $C_m \neq 0 \Rightarrow m$ – порядок полюса z_0
$m = 1 \Rightarrow$ полюс <u>простой</u>

T_3 z_0 – полюс $f(z)$ порядка $m \Leftrightarrow z_0$ – нуль кратности m $\frac{1}{f(z)}$

Δ <u>необх</u>
$\exists z_0$ – полюс $\langle m \rangle$ $f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots =$

$$\Rightarrow \exists \lim f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} \neq 0$$

$$\exists \psi(z) = \begin{cases} f(z)(z-z_0)^m, & z \neq z_0 \\ C_{-m} & z = z_0 \end{cases}$$

$$\psi(z) \in An(U(z_0)) \Rightarrow \psi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists V(z_0)$$

$$\forall z \in V(z_0) \quad \psi(z) \neq 0 \Rightarrow \varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)} \in An(V(z_0))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{\psi(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z) \Rightarrow z_0 \text{ – нуль кратности } m$$

$\neq 0$

<u>дост</u>
$\exists z_0$ – нуль кр. m для $\frac{1}{f(z)} \Rightarrow$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z) \quad \varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{\varphi(z_0)} \Rightarrow$$

~~$\bar{z}$~~ z_0 – полюс пор. m

③ z_0 – существенно особо изолиров., если

$$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$$

(T_4) z_0 – сущ. ос. точка $f(z)$

$\Updownarrow$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{0}^{\infty}$$

Δ

<u>необх</u> из оч.

$\exists$ z_0 – с.о.т., тогда по т (Т), (Т) гл. часть Лоран. разл. $f(z)$ в окр z_0 не может быть равной 0, не может содержать конечное число чл., иначе z_0 – у.о.т.

<u>дост</u> аналогично

$\triangleright$

(Т) Сохоцкого.

Если z_0 – с.о.т, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$

$\exists \{z_n\} \to z_0 : \{f(z_n)\} \to A$

Δ

1) $\exists A = +\infty$, то $\exists \{z_n\} \to z_0$, $\{f(z_n)\} \to +\infty$ (иначе $f(z)$ огр и типа 1)

2) $\exists A \neq 0$ а) в $\forall\, U(z_0)$ $\exists z_1^*$: $f(z_1^*) = A$

$\Rightarrow \exists \{z_1^{(n)*}\} \to z_0 \Rightarrow f(z_1^{(n)*}) \to A$

б) $\nexists z_1^*$: $\in g(z_1) = \dfrac{1}{f(z) - A}$

z_0 – не у.о.т не полюс. $\Rightarrow z_0$ – сот $g(z)$

$\exists$ ~~z_n~~ $\{z_n\}$ $g(z_n) \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{z_n\to z_0} f(z_n) = \lim\left(A + \frac{1}{g}\right) = A$$

$\triangleright$

Тип о.т.	Вид Л.Р.	$\lim f(z)$
уст	$\sum_{0}^{+\infty}$	C_0
полюс т	$\sum_{-n}^{+\infty}$	∞
сот	$\sum_{-\infty}^{+\infty}$	$\nexists$

Опр $z_0 = \infty$ — беск. уд. точка $f(z)$, если $f(z)$ аналит. в z_0

$z \to +\infty$ — изол. от. аналит. ф-ии, если она предельная точка от. окр.

Опр $z_0 = \infty$ устр. точка, если ее Лоран. разл. имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_n}{z^n} \quad |z| > R$$

Опр $z_0 = \infty$ полюс, если $f(z) = \sum_{-m}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}$ или $\lim = \infty$

Опр $z_0 = \infty$ с.от., если $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{z^n}$

Опр Интеграл от f по $\gamma_r = \{|z-a| < r\}$ с центром в изол. особой точке a этой ф-ии $/2\pi i$ — вычет f в $(\cdot)\ a$

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f\,dz$$

Т1 Теорема Коши о вычетах

f $\operatorname{anal}(\overline{D} \setminus \{a_v\})$, $G \supset D$, $\partial G \not\ni a_i$

$$\int_{\partial G} f\,dz = 2\pi i \sum_{(G)} \operatorname{res}_{a_v} f, \quad a_v \in G$$

Т2 $\operatorname{res}_a f = C_{-1}$, где C_n — коэф. из Лоран. разл. в a

Д $\ddot{\frown}$ ∇

Т3 Вычет ∞ в устр. тоже равен 0.

$C_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$, а если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$

a - полюс I порядка,

тогда $C_{-1} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Полюс n-го порядка:

$C_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$

Опр Вычет в ∞

$\operatorname{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^-} f\,dz$, где $\gamma_R - \{|z|=R\}$, по час. стрелке

Т4 Полная сумма вычетов

$f\in An(\mathbb{C}\setminus \bigcup a_i)$, тогда

$\sum \operatorname{res}_{a_i} f + \operatorname{res}_\infty f = 0$

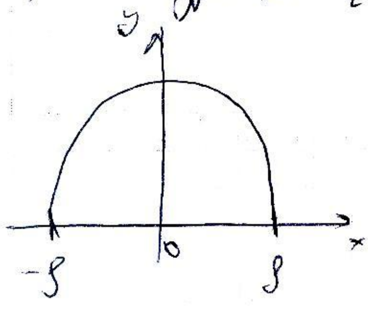
▷ очевидно, по Т4, берем окружность, тогда в пределе $\oint(+\sum)=0$, $R\to\infty$, ◁

16.05.2015

$\int f(x)dx$, $f(x)\in C(\mathbb{R})$

$\exists f(z)$ - аналит. продолжение $f(x)$ в $\mathbb{C}$ ($\operatorname{Im} z>0$)

Δ контур $L = \{[-\rho,\rho] + \gamma_\rho\}$ $\gamma_\rho = \{|z|=\rho, \operatorname{Im} z > 0\}$



Тогда $\oint_L f(z)dz = \int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx + \int_{\gamma_\rho} f(z)dz \overset{T.4}{=} 2\pi i \sum \operatorname{res} f(z)$

Пусть ρ такое большое, что все изол. особые точки содержатся внутри L;

Перейдем к пределу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{\forall z=z_k \\ Im z>0}}^{n} \operatorname{Res} f(z) - \lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz$$, но если мы умеем считать несобств. интегр.

Л1 Жордана

Пусть $f(z)$ - аналит. в верхней полупл-ти кроме конечного числа изол. особых точек;

$\forall z \quad |z| \geq \rho \quad |f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \; M>0, \delta>0$ - const;

Тогда $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 0$

Δ

$$\triangleleft \left| \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\gamma_\rho} |f(z)| |dz| = \left[z = \rho e^{i\varphi} \right] = \int_0^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi})| |i\rho e^{i\varphi}| d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{M}{\rho^{1+\delta}} \rho \pi = \frac{M\pi}{\rho^\delta} \xrightarrow{\rho\to\infty} 0$$

∇

Т1 Пусть $f(x)_{\in \mathbb{R}}$ может быть аналит. продолжена в верх. полуплоскость, причем это аналит. продолжение удовл. усл. Л1 Жордана. и не имеет особых точек на Re;

Тогда $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{z=z_k \\ Im z>0}} \operatorname{Res} f(z)}$$

Δ уже вверху ∇

$\triangleleft \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx \qquad \lambda>0$

Л2 Жордана

Пусть $f(z)$ аналит. в верхней полуплоскости, кроме конечного числа изол. особых точек.

$M(\rho) = \max\limits_{z\in\gamma_\rho} |f(z)| \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$

Тогда $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0$

Δ

$$\left|\int_{\gamma_\rho} e^{i\lambda z} f(z)\,dz\right| = [z=\rho e^{i\varphi}] = \left|\int_0^{\pi} e^{i\lambda(\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi)} f(\rho e^{i\varphi})\, i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi\right| \le$$

$$\le M(\rho)\rho \int_0^{\pi} e^{-\lambda\rho\sin\varphi}\, d\varphi = 2M(\rho)\rho \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\rho\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$= \left[\sin\varphi \ge \frac{2\varphi}{\pi}\right.$, где $\varphi \ge 0, \varphi \le \frac{\pi}{2}$ в силу выпуклости $\sin$ $\left.\right] \le$

$$\le 2M(\rho)\rho \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\rho\frac{2\varphi}{\pi}}\, d\varphi = \frac{2M(\rho)\rho\,\pi}{-\lambda\rho\cdot 2}\, e^{-\frac{\lambda\rho 2\varphi}{\pi}}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi M(\rho)}{\lambda}\left(e^{-\lambda\rho} - 1\right) \xrightarrow{\rho\to\infty} 0$$

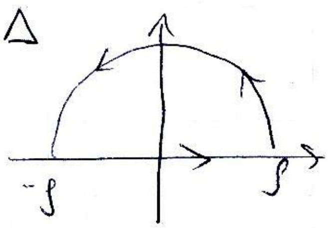
▽

T2 Пусть $f(x)$ м.б. аналит. продолжена на верх. полупл. причем ее аналит. продолж. удовл. усл. Л2 (леммы 2) и не имеет ос. точек на Re.

Тогда

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \operatorname{Im} z_k > 0}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left(e^{i\lambda z} f(z)\right)}$$

Δ



$$\oint e^{i\lambda z} f(z)\, dz = \int_{-\rho}^{\rho} + \int_{\gamma_\rho} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i \sum \operatorname{Res} - \underbrace{\lim}_{0}$$

по лемме 2.

▽

Аналог. рассуждение: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda x\, f(x)\, dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} f(z)\right) =$

$\displaystyle\int \sin\lambda x \ldots = \operatorname{Im}(\ldots) = 2\pi \operatorname{Re}(\ldots)$

$= -2\pi \operatorname{Im}(\ldots)$

б) Логарифмический вычет

$\exists f(z) - An(\mathring{U}(z_0))$ и $f(z) \ne 0$ в $\mathring{U}(z_0)$, z_0 – т. аналит. или и.о.т.

Опр Лог. вычетом $f(z)$ в z_0 наз. вычет ее логарифм. производной в z_0.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \qquad \underset{\text{окр.}}{L} \subset \mathring{U}(z_0)$$

T1 Пусть z_0 - нуль кратности m ф-ции $f(z)$

Тогда z_0 - простой полюс для лог. производной и лог. вычет в нём $= m$.

Δ

Пусть z_0 - нуль кратности m $f(z) \Rightarrow f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$

$\varphi(z_0) \in An(z_0)$, $\varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \varphi(z) \in An(V)$

$$\measuredangle \ \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z) + (z-z_0)^m \varphi'(z)}{(z-z_0)^m \varphi(z)} =$$

$$= \frac{m}{z-z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{m}{z-z_0} \Rightarrow z_0 \text{ - полюс}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$$

∇

Сл Пусть z_0 - полюс пор-ка p; $f(z) \Rightarrow z_0$ - пр. полюс $\frac{f'(z)}{f(z)}$, а $\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p$.

Δ аналогично T_1 ∇

Пр $f(z) = \frac{(z^2-5z+6)}{(z-1)^2}$ $\quad z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 1$

$\operatorname{Res}_{2,3} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \qquad \operatorname{Res}_1 \text{-//-} = -2$

Опр Пусть $f(z)$ - An на L, L - замкнутый жорданов контур. Пусть $f(z) \neq 0$ на L, $\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ наз. логарифм. вычетом $f(z)$ относ. контура L

T2 Пусть $f(z) \in An(\overline{D})$ кроме кон. числа полюсов P, D - 1 св., $f(z)$ имеет кон. число нулей N в D и на границе D нет ни нулей ни полюсов

$$\boxed{\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P}$$

Δ

Пусть $a_1 \dots a_l$ - нули $f(z)$ кр-ти $n_1 \dots n_l$

Пусть $b_1 \dots b_m$ - полюсы $f(z)$ порядков $p_1 \dots p_m$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{l} \operatorname{Res}_{z=a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{z=b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} =$$

По Т.1 а. $\sum_{\nu=1}^{l} n_\nu - \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu = N - P$

▷

Сл. Если использование ∀2.

$$\operatorname{Res}_L \frac{f'(z)}{f(z)} = N-P = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_L d[\operatorname{Ln} f(z)] =$$

// $\operatorname{Ln} f(z) = \underbrace{\ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z)}_{\text{одн. непр.}}$

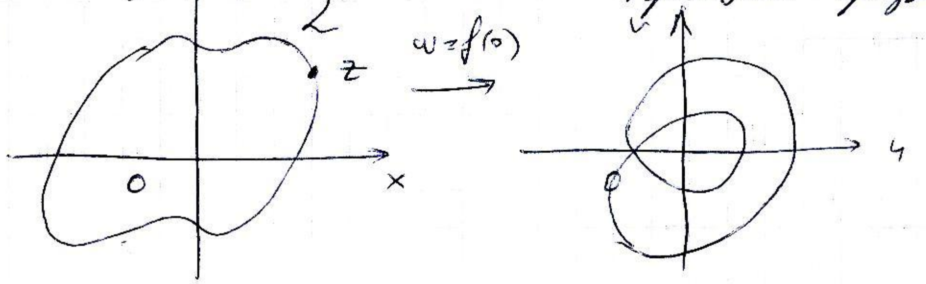
$$\Rightarrow [L: z=z(t) \quad t\in[\alpha,\beta]] = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta d[\operatorname{Ln} f(z(t))] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\operatorname{Ln} f(z(\beta)) - \operatorname{Ln} f(z(\alpha))\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\ln|f(z(\beta))| + i\operatorname{Arg} f(z(\beta)) - \ln|f(z(\alpha))| - i\operatorname{Arg}(f(z(\alpha)))\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Delta \operatorname{Arg} f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta \operatorname{Arg} f(z) \Rightarrow \boxed{N-P = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg} f(z)}$$

Принцип аргумента

Смысл:



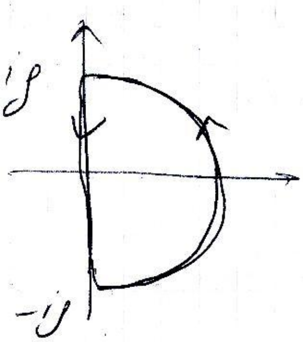
$N-P$ – кол-во поворотов $f(z)$ вокруг $w=0$

13.05.2015

Задание: найти нули z^5+5z^4-5 в $\operatorname{Re} z>0$

γ_ρ: $|z|=\rho$, $\operatorname{Re} z>0$

γ: $[i\rho, -i\rho]$



Пусть $\rho\to\infty$, тогда все нули внутри контура.

$P_5(iy) = iy^5 + 5y^4 - 5$

$\Rightarrow \begin{cases} y^5 = 0 \\ 5y^4 - 5 = 0 \end{cases} \qquad N = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg} P_5(z) =$

$N = \frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to\infty} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} P_5(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\lim \Delta_{\gamma_4} + \lim \Delta_{\gamma_\rho}\right)$

$P_5(z) = z^5\left(1+\frac{5}{z} - \frac{5}{z^5}\right)$ $\qquad \operatorname{Arg} P_5(z) = \operatorname{Arg} z^5 + \operatorname{Arg}\left(1+\frac{5}{z}-\frac{5}{z^5}\right)$

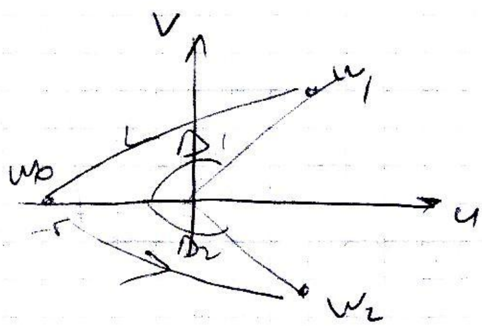
Вдоль γ: $\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to+\infty} 5\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{2\pi}\lim \Delta_\gamma \operatorname{Arg}\left(\lim_{\rho\to\infty}\left[1+\frac{5}{z}-\frac{5}{z^5}\right]\right) =$

$= \frac{5}{2} + 0;$

Вдоль ψ: γ: $z = -it$, $t\in[-\rho,\rho]$

~~$P(t) = P_5$~~ $P_5(z(t)) = it^5 + 5t^4 - 5$

$\Gamma: \begin{cases} u(t) = 5t^4 - 5 \\ v(t) = -t^5 \end{cases}$



$z = \pm i\rho$

$\frac{1}{2\pi}\lim \Delta_{\gamma_\rho} \operatorname{Arg} P_5(z) = \frac{2}{2\pi}\lim(\pi - \arg w_1) =$

$= \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\to\infty}(\pi + \arg w_1) =$

$= \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\to\infty}\left(\pi + \arg\frac{-t^5}{5t^4-5}\right) = \frac{3}{2}$

Тогда $N = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$

Теория автом. регуляторов. Принцип арг. мах. применен. при анализе уст. лин. моделей, условия уст. вкл. располож. всех корней χ ур-я без особ. дифф. ур-ю системы в левой п-плоскости ($\operatorname{Re} < 0$)

Т. Руше

1) $\exists f, \varphi \in A(\overline{D})$ $\quad$ 2) $|\varphi(z)| > |f(z)|$ на ∂D

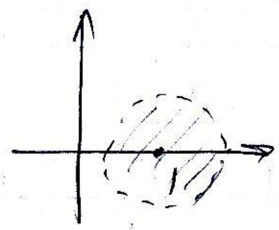
Тогда $N_{\varphi(z)+f(z)} = N_{\varphi(z)}$ в D

Δ $\quad |f(z)| \geq 0$ в $\overline{D} \Rightarrow |\varphi(z)| \overset{\alpha}{>} 0$

$|\varphi(z) + f(z)| \geq |\varphi(z)| - |f(z)| \overset{\alpha}{>} 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(z) \overset{L}{\neq} 0 \\ \varphi(z)+f(z) \overset{L}{\neq} 0 \end{cases} \Rightarrow N_{\varphi+f} = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg}(\varphi(z)+f(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg}\left[\varphi(z)\left(1+\frac{f}{\varphi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg}\varphi(z) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\Delta_L \operatorname{Arg}\left(1+\frac{f(z)}{\varphi(z)}\right)}_{=0} = N_\varphi$$



$=0$, нет оборотов вокруг нуля

∇

Задача $z^5+z^2+1=0$, внутри $|z|=2$ — сколько корней

$f(z)=z^2$

$\varphi(z)=z^5+1$

$|\varphi(z)|>|f(z)|$ на $|z|=2$

$|f(z)| = |z|^2\big|_{|z|=2} = 4$

$|\varphi(z)| \geq |z^5|-1 = 31 \quad \xRightarrow{\text{ТР уше}} \quad N_f = N_\varphi = 5$

Ответ: 5

Задача $z^6-8z+10=0$ в кольце $1<|z|<3$

1) $|z|<3$ — 6
2) $|z|=1$
3) $|z|<1$
4) $N_{|z|<3} - N_{|z|\leq 1}$

1) $|z|<3$ — $f(z) = -8z+10$, $|f(z)| \leq 8\cdot 3+10$

$\varphi(z)=z^6 > f$

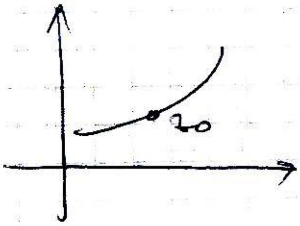
2) $|z|=1$, $N = N_f = 0$.

3) $|z|<1$, $N_{6+\varphi} = N_f = 0$.

Геометр. применение ТФКП

Геом. смысл Arg и $|z|$ для пр-й ФКП

$\operatorname{Arg}(z')=?$ $|z'|=?$



$\gamma: z(t) = x(t) + iy(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

$z'(t) = x'(t) + iy'(t) = 0$

$w = f(z) = f(z(t))$

$$w'(t_0) = \underset{\neq 0}{f'(z_0)} \cdot \underset{\neq 0}{z'(t_0)}$$

$$\operatorname{Arg} w'(t_0) = \underset{\overset{\shortparallel}{\alpha}}{\arg f'(z_0)} + \operatorname{Arg} z'(t_0) \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0)$$

Таким образом, $\operatorname{Arg} f'$ — угол пов. кас. кривой в z_0 при ее отобр. с п-ю $w = f(z)$ на w

$$|f'(z)| = \left|\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

Коэфф. растяж./сжатия

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad J(x,y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$$

Среди непрерывных отобр. наиболее важные — конформ. $f(z)$ однолистна в точке если она однолистна в некот. ее окрестности

(T) $\exists f(z) \in \mathrm{An}(z_0)$, $z_0 \neq \infty \Rightarrow f(z) \in \mathrm{In}(z_0) \Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0$

Сл $f(z) \in \mathrm{An}(z_0)$ $z_0 = \infty \Rightarrow f(z) \in \mathrm{In}(\infty) \Leftrightarrow \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$

Сл Если $f(z) \in \mathrm{In}(z_0)$ $\begin{cases} z_0 \neq \infty \\ z_0 = \infty \end{cases}$ z_0 — полюс, z_0 — прост. полюс

Конформные отобр.

Отобр. ориент. пл-ти на другую в z_0 наз. конформным если все беск. малые дуги, выход. из этой точки, поворачиваются при отобр на один и тот же угол. и получают одно и то же растяж/сж.

Или мы скажем, при конф. отобр. сохр-подобие в беск. малых частях.

Отобр. с помощью анал. ф-ии явл. конформным везде кроме (быть может) точек где $z' = 0$.

Таким образом, согласно теореме, конформность аналит. ф-ии в точке равносильно однолистн.

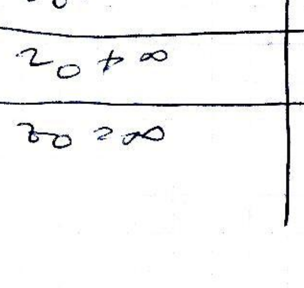
Тип точки	Тип знач. ф-ии	Критерий конф.	Альтерн. крит.
$z_0 \neq \pm\infty$	$w_0 \neq \infty$	$f'(z_0) \neq 0$	—
$z_0 = \infty$	$w_0 \neq \infty$	$h'(0) \neq 0$, $h(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta}) - f(\infty)$, $\zeta = \frac{1}{z}$	$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$
$z_0 \neq \infty$	$w_0 = \infty$	$g'(z_0) \neq 0$, $g(z) = 1/f(z)$	z_0 — прост. полюс
$z_0 = \infty$	$w_0 = \infty$	$w'(0) \neq 0$, $w(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$, $\zeta = \frac{1}{z}$	z_0 — прост. полюс

Под отобр., конф. в области, понимают отобр., конформн. в каждой точке обл. и осуществ. аналит. ф-ей однолистной в этой области

30.05.2016

Линейное. $w = az + b$

$w_1 = |a| z$
$w_2 = e^{i \arg a} w_1$
$w_3 = w_2 + b$



$|a| = 2$
$\arg = -\frac{\pi}{2}$

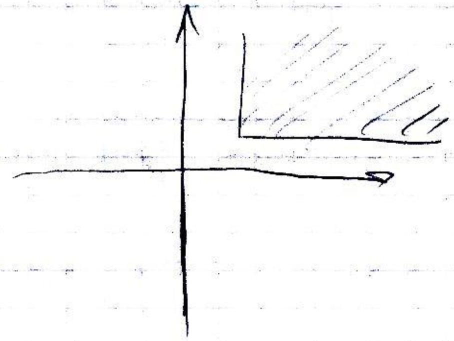
Дробно-линейное $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad}{c} \frac{1}{cz+d}$

Логарифмическая:

$w = Ln(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k);\ k \in \mathbb{Z}$

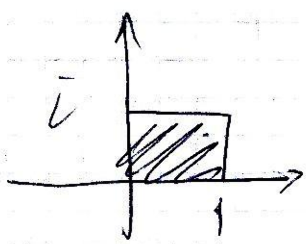
Степенная

$w = z^n$ конформность: $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$



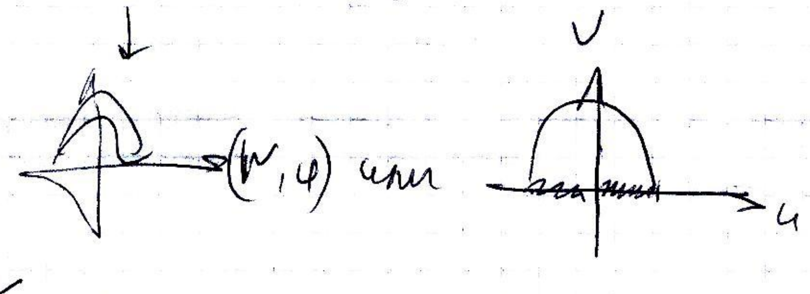
$0 < \arg z \cdot (z - 1 \cdot\ ) < \frac{\pi}{2}$

$w = -i(z-1\ i)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow Re\, z \geq 0$



$0 \leq x \leq 1$
$0 \leq y \leq 1$ $\Rightarrow$ $0 \leq r\cos\varphi \leq 1$
$0 \leq r\sin\varphi \leq 1$

$u = z^2$ $r \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$

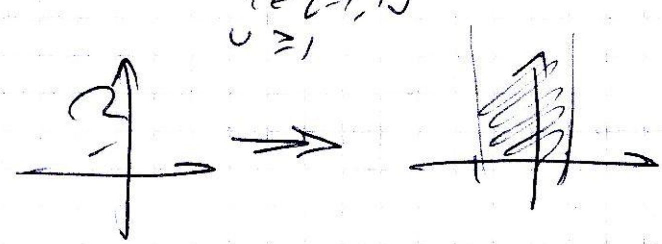


$y^2 = x^2 + 1$
$y^2 = x^2 - 1$
$xy \geq 1$

$-1 \leq x^2 - y^2 \leq 1$ $xy \geq 1$

$u \in (-1, 1)$
$v \geq 1$

$w = x^2 - y^2 + 2ixy$



Экспонента:

$w = e^z$ $z = x + iy$

$e^z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

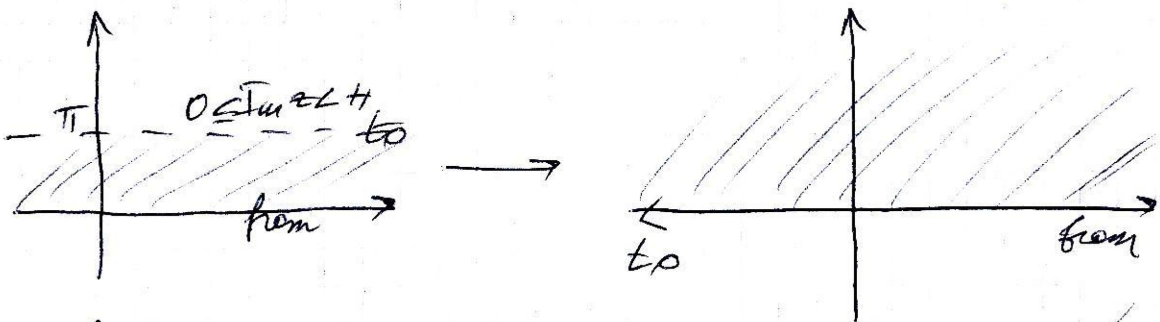
$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

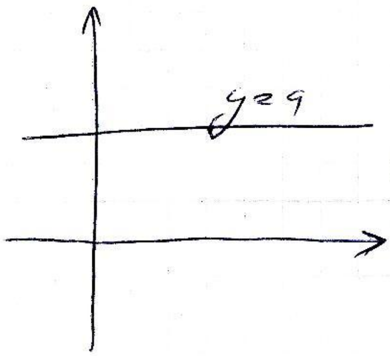
период 2π

условие:

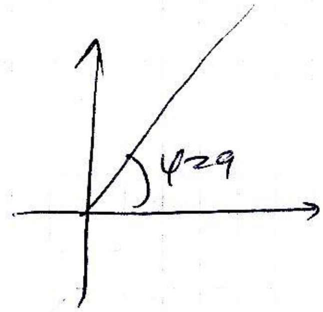
$\nexists z_1, z_2 : z_1 - z_2 = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$

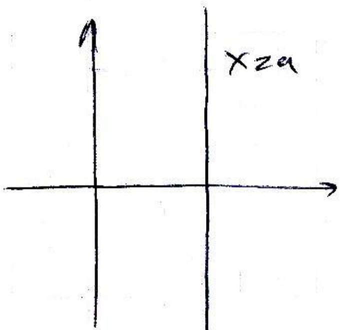
$e^{z_1} \neq e^{z_2}$ — $e^{z_1 - z_2} \neq 1 \neq e^{k\pi i}$ $\quad z_1 \neq z_2 \pm 2\pi i$



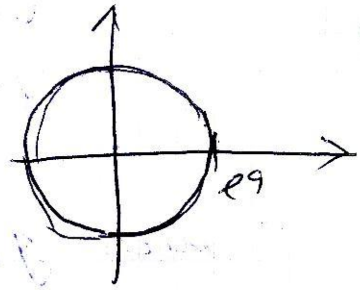


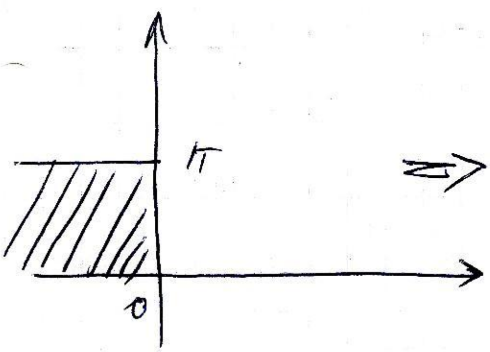
$$\left\{ \begin{array}{c} z = x + iy \\ w = e^{x+iy} = \\ = e^x(\cos y + i\sin y) \\ \varphi = y \\ |w| = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow$$



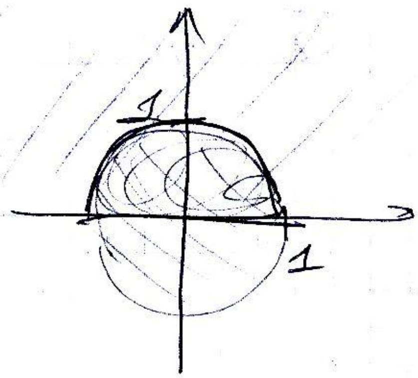


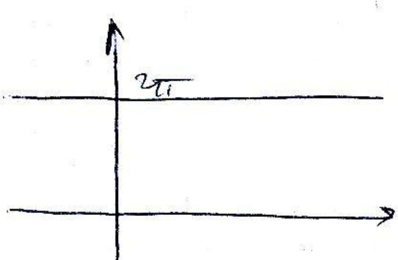
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} e^a(\cos y + i\sin y) \\ r = e^a \\ \varphi = y \end{array} \right\} \Rightarrow$$





$\Rightarrow \{ \ \}$ $\Rightarrow$





$\Rightarrow$ все пл-ть.

Ф-а Жуковского

$G(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = S_3(S_2(S_1(z)))$

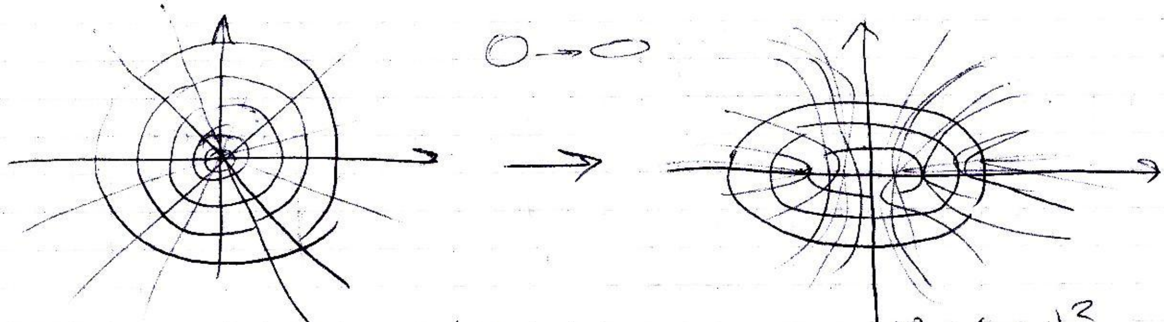
$S_1 = \frac{1+z}{1-z}$

$S_2 = z^2$

$S_3 = \frac{1-z}{1+z}$

$G(z) = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi +$

$+ \frac{1}{2} i \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$



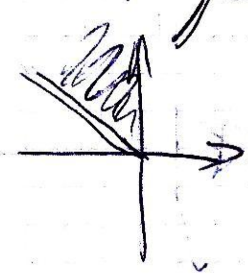
$u = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi$

$v = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$

$\left(\frac{u}{\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sin\varphi}\right)^2 = 1$

Обратное: $g(z) = z \pm \sqrt{z^2+1}$ неоднозначна везд.

$w = \sqrt[n]{z}$ условие $\varphi_1 - \varphi_2 \neq \frac{2\pi k}{n}$ при $r_1 = r_2$



Для замкн. крив. нельзя оборот. вокруг "0".

Область не должна содержать