Продолжение

9.02.2015

Теорема Леви (повт.) $0 \le f_n \le f_{n+1} \dots \to f$

$$\lim \left(\int_X f_n \, d\mu \right) = \int f \, d\mu$$

① T Об интегрировании пол. рядов $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$u_n(x)$ – изм ф-ии на X $u_n(x) \ge 0$ почти везде п.в.

$$\int_X \Big(\underbrace{\sum_n u_n(x)}_{\substack{\text{изм ф-я} \\ \text{(не выходим из} \\ \text{класса изм.)}}} \Big) \, d\mu = \sum_n \int_X u_n(x) \, d\mu$$

Δ

Из теоремы Леви получаю

возьмем $f_n = \sum^N u_n$ ← удовл. условиям теор. Леви

$$\sum^{\infty} \int u_n(x) \, d\mu \underset{\text{опр. } \sum}{=} \lim \sum^N \dots \underset{\text{теор. Леви}}{=} \int \sum^{\infty} u_n(x) \, d\mu$$

∇

C $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ u_n – сумм. ф-ии (значит $\int |f| \neq +\infty$, значит изм. ($S_{сумм}$))

$\sum \int_X |u_n| \, d\mu$ – кон., тогда $\sum u_n$ абс. сходящийся почти везде

Δ

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |u_n(x)| \qquad \ge 0 \text{ изм}$$

$$\int \lim_{N \to \infty} [S_n(x)] = \int_X \sum^{\infty} |u_n(x)| \, d\mu = \sum^{\infty} \int |u_n(x)| \, d\mu < +\infty$$

$\Rightarrow \sum |u_n(x)|$ – конечно п.в. (св-во инт.: $\int f < +\infty \Rightarrow f < \infty$ п.в.)

∇

П Странный пример

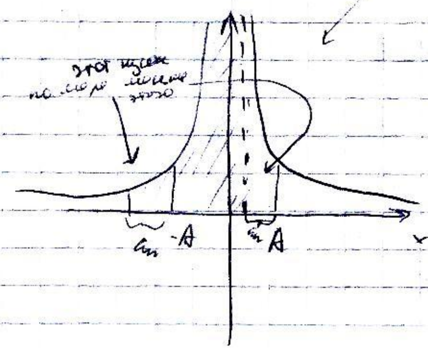
в $\mathbb{R}$ a_n – пол. $\sum |a_n| < +\infty$ $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{|x - a_n|}}$ – абс. сх. при почти всех x

$[-A, A]$? есть абс. сх-ть п.в. $x \in [-A, A]$

$$\int_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-a_n|}}\,dx = \int_{-A}^{A} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-a_n|}}\,dx \le |a_n| \int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{|x-a_n|}} =$$

$$= |a_n| \int_{-A-a_n}^{A-a_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \le |a_n|\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} = |a_n|\, 2\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= 4\sqrt{A}\, a_n$$



Тогда

$\sum \frac{a_n}{\sqrt{|\cdots|}}$ - сх. по пред. следствию.

2

Т Об абсолютной непрерывности инт-ла

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, f - сумм.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall E\in\mathfrak{A} \mid \mu E<\delta \quad \int_E |f| < \varepsilon$

Δ $X_n := X(|f|>n) \quad X_n \supset X_{n+1} \supset \dots$

$\bigcap^{\infty} X_n = e \mid \mu e = 0$

$E \mapsto \int_E |f|\,d\mu$ - это мера ν

$\tilde{X} = X \setminus e$ можно считать что $e = \varnothing$

$\nu(X) < +\infty$

т.е. есть f сумм.

Тогда по непр. меры сверху

$\nu(X_n) \to 0$

Берем $\varepsilon>0$, $\exists n_\varepsilon$, что $\nu(X_{n_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2}$

т.е. $\int_{X_{n_\varepsilon}} |f|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$, проверим $\mu E < \delta$ усл.

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_{E\cap X_{n_\varepsilon}} + \int_{E\cap X^c_{n_\varepsilon}} \le$$

$$\le \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E\cap X^c_{n_\varepsilon}} n_\varepsilon\,d\mu \le \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{n_\varepsilon\, \mu E}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow \varepsilon$$

замена по св-ву X_{n_ε}

▽

Сл. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $e_n \in \mathfrak{A}$ - посл. мн-в. $\mu e_n \to 0$

f сумм $\Rightarrow \int_{e_n} f\,d\mu \to 0$

3

Δ Опр. предела ∇

Напоминание. $f_n \overset{\mu}{\rightrightarrows}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(X/|f_n - f| < \varepsilon) \to 0$

сх. по мере ⓐ $|| \to \text{Ⓐ}$? нет стрелок

А ещё есть вот такое $\int\limits_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$

а) $f_n = \frac{1}{nx}$ $f_n \rightrightarrows 0$ /очевидно/

С др. стороны $\int |f_n - f| = \int \frac{1}{nx} \, dx = +\infty$

ⓐ не работает

б) Работает:

$$\mu(\underbrace{X/|f_n - f| > \varepsilon}_{X_n}) = \int\limits_{X_n} 1 \, d\mu \le \int \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} \, d\mu =$$

$$1 < \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} \qquad = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f_n - f| \, d\mu$$

если сх. к 0, то и

3

Т

Лебега о пред. переходе под знаком инт.

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ f_n, f - изм $f_n \underset{\mu}{\rightrightarrows} f$ и при этом

① $\exists g(x)$ $\forall n$ $|f_n(x)| \le g(x)$ почти всюду относ. x

② $g(x)$ - сумм. ф-я

Тогда f_n, f - сумм и $\int\limits_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$

и их тем более $\int\limits_X f_n \, d\mu \to \int\limits_X f \, d\mu$

Δ

f_n - сумм, $\int |f_n| \le \int g < +\infty$ по усл

f - сумм $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ п.в. $|f_{n_k}| \le g \Rightarrow f \le g$

$|\int f_n - \int f| = |\int f_n - f| \le \int |f_n - f|$

① $\mu X < +\infty$ берем $\varepsilon > 0$ $X_n = X(|f_n - f| < \varepsilon)$

$\mu X_n \to 0$

$$\int |f_n - f| \, d\mu = \int\limits_{X_n} + \int\limits_{X_n^c} \le \int\limits_{X_n} 2g \, d\mu + \int\limits_{X_n^c} \varepsilon \, d\mu \le 2 \int\limits_{X_n} g + \varepsilon \mu X$$

$|f_n - f| \le 2g$ $\quad \le \varepsilon(2 + \mu X)$ $\quad$ мал в силу абс. непр. инт. $(X_n \to 0)$ мал

② $\mu X = +\infty$ Берем $\varepsilon > 0$

$$\exists A \quad \mu A < +\infty \quad \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$

Δ $\int_X g = \sup\left(\int h_k,\ 0 \le h_k \le g,\ h_k - \text{ступ}\right)$

возьмем h - ступ $\int_X g - h \, d\mu < \varepsilon$

$$A = \{x : h(x) \ne 0\}$$

$$\int_{X \setminus A} g = \int_{X \setminus A} g - h \le \int_X g - h < \varepsilon$$

∇

$$\int_X |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{X \setminus A} |f_n - f| \le \int_A |f_n - f| + 2\int_{X \setminus A} g \le$$

$\le \varepsilon$ 1 пункт этой теоремы, по лемме выше

④ ∇

Т Лебега о предельном переходе под зн. интеграла

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ f_n, f - изм $f_n \to f$ п.в.

И при этом $\exists g$:

① $\forall n$ $|f_n(x)| \le g(x)$ п.в. X

② g - сумм

Тогда $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ и для тем более $\int f_n \to \int f$

Δ f_n, f сумм. как в пред. теореме пред. переход в ①

$$h_n = \sup\left(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots\right)$$

$$h_n \ge h_{n+1} \ge \dots$$

Так как $|f_n - f| \le 2g$, то $h_n \le 2g$

Кстати $\lim h_n = \overline{\lim} |f_n - f| = 0$ при п.в. x

$2g - h_n \ge 0$, возрастают, тогда по т. Леви

$$\lim \int_X (2g - h_n) = \int_X \lim(2g - h_n) = 2\int_X g$$

$\Rightarrow$

$\lim \left(\int_X g - \int_X h_n \right) = \lim \int (g - h_n)$ (это и пред. управе)

$\Rightarrow \int h_n \to 0$, значит $\int |h_n - f| \le \int h_n \to 0$.

∇

3 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \, dx$ $\quad f: X \times Y \to \mathbb{R}$

$(X, \mathfrak{a}, \mu)$ — Y - метрическое

$\uparrow$ $\quad\uparrow$

норм. мн-во $\quad$ параметр.

$\forall y \quad x \mapsto f(x, y)$ - суммируемая

О f удовлетворяет условию L_{loc} в точке y_0

если $\forall U(y_0) \; \exists g(x)$ - изм. $\forall y \in U(y_0) \; \forall x$ п.в.

$|f(x,y)| \le g(x)$

и $g(x)$ - сумм.

3 $\Gamma(t)$ удовл. L_{loc}

$\forall y_0 \quad x^{y-1} e^{-x}$ удовл. усл. $L_{loc}(y_0)$

$\xrightarrow{\;0 \quad a \quad y_0 \quad b\;}$ $\quad U(y_0) = (a, b) \quad \forall y \in (a, b) \; \forall x$

$$|x^{y-1} e^{-x}| \le \begin{cases} x^{a-1} e^{-x} & x \in (0, 1) \\ x^{b-1} e^{-x} & x \in [1, +\infty) \end{cases} = g(x)$$

$$\int g(x) = \underbrace{\int_0^1 x^{a-1} e^{-x}}_{a-1 > -1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{b-1} e^{-x}}_{\text{кон.}}$$

Т О непрерывности инт. по пар-ру

$f: \underset{\text{п-во с мерой}}{X} \times Y \to \mathbb{R} \quad \forall y \quad x \mapsto f(x,y)$ сумм (по x) т.е

Пусть вып. 2 усл: $y_0 \in Y$ $\quad$ $\forall y \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ имеет смысл

① f - удовл. усл. $L_{loc}(y_0)$

② $f(x,y)$ - непр. в y_0 при п.в. x

$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(x, y_0)$ при п.в. x

Тогда $\quad I(y) = \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ $\quad$ непр в y_0

$\triangleright$ $y_n \to y_0$ $\quad I(y_n) \overset{?}{\to} I(y_0)$?

$f_n(x) = f(x, y_n)$

1) $\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_0(x)$ непр $f(x)$ в y_0 при п. в x

2) п. с. и. м. $y_n \in U(y_0)$, $|f_n(x)| \le g(x)$

+ пред. переход под $\int$ по Лебегу:

$I(y_n) = \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

Из норм. по Лебеговому переходу всё.

$\triangleleft$

7

T О дифференцировании интеграла по параметру

$f: X \times Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$ — промежуток

0) $\forall y$ $x \mapsto f(x,y)$ сумм. $\quad I(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$

1) $\forall y$ при п. в x $\exists^* f'_y(x,y)$

2) $y_0 \in Y$ $\quad f'_y(x,y)$ — удовл. $L_{loc}(y_0)$

Тогда $I'(y_0) = \int_X f'_y(x,y)\, d\mu(x)$

Δ

$$F(x,h) = \frac{f(x, y_0+h) - f(x, y_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'_y(x,y) = F(x,0)$$

измерима, значит

$$\frac{I(y_0+h) - I(y_0)}{h} = \int F(x,h)\, d\mu(x) \xrightarrow[h\to 0]{?} \int_X f'_y(x,y)\, d\mu(x) \quad (\#)$$

F — вып. $L_{loc}(0)$? $\exists \tilde{U}(0)$ $= U(y_0) - y_0$ — сдвиг

$$|F(x,h)| = \frac{|f(x,y_0+h) - f(x,y_0)|}{h} = |f'_y(x, y_0 + \theta h)| \le g(x)$$

$f(y)$ удовл. $L_{loc}(y_0)$

Значит (#) законен в силу пред. теоремы

$\triangledown$

П $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} e^{-x}\, dx$ $\quad y > 0$

$\forall y_0 > 0$ Γ непр в y_0; y — фикс, $x \mapsto x^{y-1}e^{-x}$ — сумм по x на $[0, +\infty)$

$x^{y-1}e^{-x}$ — непр по y при всех x

$L_{loc}(y_0)$: $\quad 0 \quad y_0/2 \quad y_0 \quad \frac{3}{2} y_0$ $\qquad |x^{y-1}e^{-x}| \le \begin{cases} x^{\frac{3}{2}y_0 - 1} e^{-x} & x \in (1, \infty) \\ x^{\frac{y_0}{2} - 1} e^{-x} & x \in (0, 1) \end{cases}$

Вообще оба варианта выборки удовл. усл. Лебега, когда L_{loc} есть.

$\forall y_0 > 0$ Г-дифф в y_0

$$\Gamma'(y_0) = \int_0^{+\infty} x^{y_0-1} e^{-x} \ln x \, dx$$

8

П

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,dx =: I(y)$$

$$I'_y(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$$

0) $\forall y>0$ $\quad x \longmapsto e^{-xy}\frac{\sin x}{x}$ сумм по x $\quad \left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right| \le e^{-xy}$

1) подынтегральная - дифф

2) $L_{loc}(y)$ $\quad 0 \quad \frac{y}{2} \quad y \quad \frac{3}{2}y$ $\qquad |e^{-xy}\sin x| \le e^{-\frac{y_0}{2}x}$ └ сумм. по x

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} e^{-xy}e^{-ix}\,dx =$$

$$= \mathrm{Im} -\frac{1}{y+i}e^{-x(y+i)}\Big|_0^{\dots} = \mathrm{Im}\frac{1}{y+i} = \mathrm{Im}\frac{y-i}{y^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{y^2+1}$$

$I(y) = -\mathrm{arctg}\, y + C$

<u>Отв</u>: $I(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ по т. Лебега e^{-xy}

$$e^{-xy}\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \quad \text{п. в. } X \quad \text{при } y>A$$

$$\left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|e^{-xA}\frac{\sin x}{x}\right|$$

Итого $I(y) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, y$

$\downarrow ? \qquad \downarrow y\to 0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$J(y) = I(y) - \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx$$

$$\left|\int_0^t \frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx\right| \le \int_0^t |\quad| \le \int_0^t y|\sin x|\,dx \le \int_0^t y\,dx = yt$$

$0 \le 1-e^{-xy} \le xy \qquad e^t \ge 1+t$

$$\int_t^{+\infty}\frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx \underset{\text{по частям}}{=} \frac{1-e^{-xy}}{x}\cos x\Big|_{x=t}^{x=+\infty} + \int_t^{+\infty}\left(\frac{e^{-xy}-1}{x}\right)'_x\cos x\,dx$$

$\frac{1-e^{-ty}}{t}\cos t$

$$\left|\int_t^{+\infty}\frac{e^{-xy}-1}{x}\sin x\,dx\right| \le \frac{1}{t}\int_t^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_t^{+\infty}\frac{y}{x}e^{-xy}\,dx = \frac{3}{t}$$

Таким образом, $J(y) \equiv ty + \frac{3}{t}$

Замена переменных в интеграле

2 $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \_)$ $\Phi: X \to Y$

$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) = \{\Phi^{-1}(B), B \in \mathfrak{B}\}$ - σ-алгебра

ПУСТЬ: $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$

$\nu: \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ $\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$

это мера

Счетн. адд.

$\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(\sqcup B_i)) = \mu(\sqcup \Phi^{-1}(B_i)) = \sum \mu \Phi^{-1} = \sum \nu(B_i)$

3 $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} 1 d\mu$

$f: Y \to \mathbb{R}$ - изм. отн. $\mathfrak{B} \Rightarrow f \circ \Phi$ - изм. отн. $\mathfrak{A}$

$f \circ \Phi$ изм.? $\forall a$ $X(f(\Phi(x)) < a)$ - измеримо

$$\Phi^{-1}(\underbrace{Y(f < a)}_{\text{изм.}})$$ Φ^{-1} тоже изм. по упр.

3 О $\omega \geq 0$, изм. на X ф-я. $\Phi: X \to Y$ $(\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A})$

9 $\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$ - взвешенный образ меры (ν при отобр. Φ)

Т О взвешенном образе меры

$\Phi: X \to Y$ $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$, $\omega \geq 0$ - изм на X

$\nu(B) = \int\limits_{\Phi^{-1}(B)} \omega \, d\mu$ - взвеш. образ меры

$f \geq 0$, изм на Y

Тогда $\int\limits_Y f d\nu = \int\limits_{\Phi^{-1}(Y)} f(\Phi(x)) \, \omega(x) \, d\mu(x)$ $(*)$

Также верно для f - сумм. ф. (произв. знака)

Δ 0) $f = \chi_B$, $B \in \mathfrak{B}$

Л2 $= \nu(B)$, П2 $=$ $\chi_B(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, x \in \Phi^{-1}(B) \\ 0, x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$

$$\text{т.е.} = \int_{\varphi^{-1}(y)} \chi_{\varphi^{-1}B} = \int_{\varphi^{-1}(B)} \omega(x)\,d\mu(x) = \text{опр. } \nu(B)$$

① $\forall$ ступ. φ $f = \sum \alpha_k \chi_{B_k}$ формула (*) верна

② $f \geq 0$, изм.

$$\int f\,d\nu = \sup\{\int \varphi\,d\nu, \ldots\} = \sup\{\int \ldots \quad 0 \leq \varphi \leq f\}$$ ступ.

Возьмем $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq f$ $\quad \forall x\ \varphi_n(x) \to f$

Т. Леви $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi_n\,d\nu = \int f\,d\nu$

$$\varphi_n(\varphi(x))\omega(x) \leq \varphi_{n+1}(\varphi(x))\omega(x) \leq \ldots$$

$$\varphi_n(\varphi(x))\,\omega(x) \to f(\varphi(x))\,\omega(x)$$

по т. Леви:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varphi^{-1}(y)} \varphi_n(\varphi(x))\,\omega(x)\,d\mu(x) = \int_{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(x))\,\omega(x)\,d\mu(x)$$

③ $$\int_Y f\,d\nu = \int_X f_+ - \int_Y f_- = \int_{\varphi^{-1}(Y)} f_+(\varphi(x))\,\omega(x) - \ldots = \int f(\varphi(x))\,\omega(x)\,d\mu$$

$$f_+(\varphi(x))\,\omega(x) = (f(\varphi(x))\,\omega(x))_+$$

В усл. теоремы $\forall E \in \mathcal{B}$ $\quad \int_E f\,d\nu = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(x))\,\omega(x)\,d\mu(x)$

9 (1) $\exists X = Y$, $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$, $\varphi = id$

$$\nu(B) = \int_B \omega(x)\,d\mu(x) \qquad \int_B f\,d\nu = \int_B f(x)\,\omega(x)\,d\mu(x)$$

плотность ν относ. μ

10

T О плотности

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\quad \omega$ - изм. ≥ 0

ω - плотность ν отн. $\mu \Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{A}$

$$\mu(A) \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq (\sup_A \omega)\,\mu(A)$$

Δ

$\Rightarrow$ Очев.

$\Leftarrow$ $\omega > 0$ $\quad e_0 = X(\omega = 0)$ $\quad \nu(e_0) = 0$

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A(q^k \le \omega \le q^{k+1}) \quad q\in(0,1)$$

$$q^k \mu A_k \le \nu \le q^{k-1}\mu A_k$$

$$q^k \mu A_k \le \int_{A_k} \omega\, d\mu \le q^{k-1}\mu A_k$$

$$q\int \omega\, d\mu \le q^k \mu A_k \le \nu(A_k) \le \frac{1}{q} q^k \mu A_k \le \frac{1}{q}\int_{A_k} \omega\, d\mu$$

$$q\int_A \omega\, d\mu \le \nu(A) \le \frac{1}{q}\int_A \omega\, d\mu$$

$$\int_A \omega \le \nu(A) \le \int_A \omega \Rightarrow \nu(A) = \int_A \omega$$

5 ∇

О $(X, \mathfrak{A})$ $\mu: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, не обяз. $\mu \ge 0$

μ — счет. адд. наз. заряд

У Заряд обл. св-вом непрерывности снизу, сверху

$A_1 \subset A_2 \subset \dots$ $\bigcup A_i = A$ $\mu A = \lim_{i\to\infty} \mu A_i$

6 $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ $\bigcap A_i = A$ — // —

Ø $B \in \mathfrak{A}$ — мн-во положительности

если $\forall E \subset B$ $(E \in \mathfrak{A})$ $\mu(E) \ge 0$

11 $B_1 \dots B_n$ — м.п. $\Rightarrow \bigcup B_i$ — м.п.

Л $A \in \mathfrak{A}$, $\mu A \ge 0$

$\Rightarrow \exists B \subset A$ B — м.п. $\mu B \ge \mu A$

Δ C — множество ε-положительности

$\forall B \subset C$ $\mu B \ge -\varepsilon$ — понятное определение

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ A содержит мн-во ε-положительности

1) Если A — мεп, ОК

2) Если нет, то $\exists B_1 \subset A$, $\mu B_1 < -\varepsilon$

$C_1 = A \setminus B_1$

3) C_1 — мεп? если да, то ОК, если нет, то 2

тогда $\exists B_2 \subset C_1 \; \mu B_2 < -\varepsilon, \; C_2 = C_1 \setminus B_2$

Заряды конечны, поэтому этот $\mu C_2 > \mu C_1$ процесс конечен. (иначе $B = \cup B_i \; \mu B = +\infty$ запрещено)

$C_1 \subset A$, мн-во 1-плюс $\mu C_1 \geq \mu A$

$C_2 \subset C_1$, мн-во $\frac{1}{2}$-плюс

$C_n \subset C_{n-1}$: м-во $\frac{1}{n}$-плюс $\mu C_n \geq \mu C_{n-1}$

$B := \cap C_i$

$\forall C \subset B \; \mu C \geq 0$, т.к. если $\mu C = -\frac{1}{100}$, $C \notin C_{101}$

$\mu B = \lim \mu C_i \geq \mu A$

С непрерывности заряда сверху (упр-е)

$\triangledown$

3 Что мы не знаем о заряде:

Можно заменить пр-во на заряде

$(\alpha \mu + \beta \nu) E = \alpha \mu E + \beta \nu E$

$\| \mu \| = |\mu E_1| + |\mu E_2|$ — разложение (Х)Хана

7 О $\mu, \nu : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ — меры, пусть $\forall A \in \mathfrak{A} \; \mu A = 0$ выполнено $\nu(A) = 0$, тогда ν — абсолютно непрерывна по отношению к μ $(\nu \prec \mu)$

12 13 T Радон и Никодим

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\nu: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ μ, ν — конечные меры

ν — абсолютно непр по отн. μ,

Тогда $\exists! f$ - сумм отн. μ / f-плотность ν отн. μ

$(\forall A \subset \mathfrak{A} \; \nu(A) = \int_A f d\mu$

Δ

① Единственность f

Если f, g – сумм. (отн. μ) $\forall A \subset \mathfrak{A} \; \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$

$\Rightarrow f = g$ п.в.

$h := f - g \quad h = 0$ п.в (?)

$\forall A \subset \mathfrak{A} \ \int h \, d\mu = 0$. Ясно $\int_A |h| \, d\mu = 0$:

$X = X(h \geq 0) \cup X(h < 0)$, тогда $\int h = 0$ и $\int h = 0$

, а $\int |h| = \int h_+ - \int h_- = \int_{X(h \geq 0)} h + \underbrace{\ldots}_{=0}$ $X(h \geq 0)$ $X(h<0)$

$\Rightarrow h = 0$ п.в (из $\int |h| \, d\mu = 0$)

② Существование f, построим:

$P = \{ h \geq 0, h - \text{изм}, \ \forall A \ \int_A h \, d\mu \leq \nu(A) \}$

(не пустое множество $h = 0 \in P$)

св-во P $\quad h_1, h_2 \in P \Rightarrow \max(h_1, h_2) \in P$

$\int_A \max(h_1, h_2) = \int_{A(h_1 \geq h_2)} h_1 + \int_{A(h_1 < h_2)} h_2 \leq \nu A(h_1 \geq h_2) + \nu A(h_1 < h_2) = \nu(A)$ (постепенно)

$\max(h_1 \ldots h_m) \in P$

$I := \sup \{ h \in P \ \int_X h \, d\mu \} \leq \nu(X)$

Подберем $h_1, h_2, \ldots \ | \ \int_X h_i \, d\mu \longrightarrow I$

(это можно сделать)

$\tilde{h}_m = \max(h_1 \ldots h_m) \quad \tilde{h}_1 \leq \tilde{h}_2 \leq \ldots$

$\int_X \tilde{h}_i \longrightarrow I \quad (\int h_i \leq \int \tilde{h}_i \leq I)$

$f := \lim_{i \to \infty} \tilde{h}_i \quad \int_X \tilde{h}_i \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ - теорема Леви

$I = \int_X f \, d\mu \leq \nu(X)$

$\stackrel{?}{=}$ Приведем к противоречию

$? \ \forall A \ \int f \, d\mu = \nu(A)$. Допустим, что $\exists A_0$:

$\int_{A_0} f \, d\mu < \nu(A_0)$

$\mu A_0 > 0$, иначе $\int f = 0$, $\nu(A_0) = 0$ в силу абс. непр.

$\nu(A_0) - \int_{A_0} f \, d\mu > a \, \mu A_0$

Возьмем заряд φ; $\varphi(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu - a\mu(E \cap A_0)$

$\varphi(A_0) > 0$, $\boxed{\nu(E) \geq \varphi(E)}$

$\exists B_0 \subset A_0$ - мн-во пол-ти $\quad \varphi(B) \geq \varphi(A_0) > 0$

Проверим $(f + a\chi_B) \in P$

$\forall E \int_E (f + a\chi_B)d\mu \leq \nu(E)$

$$\int_E (f + a\chi_B)\,d\mu = \int_E f + a\mu(E\cap B) = \int_{E\setminus B} f + \int_{B\cap E} f + a\mu(E\cap B) =$$

$$= \int_{E\setminus B} + \cancel{f}\nu(E\cap B) - \varphi(E\cap B) \leq \left\{ \varphi(E) = \nu(E) - \int_E f\,d\mu - a\mu(E\cap B_0) \right.$$

$$\leq \nu(E\setminus B) + \nu(E\cap B) - \varphi(E\cap B) =$$

$$= \nu(E) - \varphi(E\cap B) \leq$$

замена $(\int f \leq \nu E)$

$$\leq \nu(E)$$

то есть $\int_X (f + a\chi_B)d\mu = \int_X f + a\mu B = I + a\mu B > I$

$\mu B > 0$ т.к. $\nu \prec \mu$

∇

3 Было $\varphi: \underset{\mu}{X} \to \underset{\nu}{Y}$, $\nu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} \omega\, d\mu$,

Была теорема $\int_A f d\nu = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(x))\omega(x)\,d\mu$

И еще знаем, что $\mu L(A)) = |\det L|\,\lambda A$

Л $\varphi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $a \in O$ φ - дифф в т. a

Пусть $c > |\det \varphi'(a)| > 0$, λ-мера Лебега в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\exists\, U(a)$ $\forall$ куба $Q \subset U(a)$, $a \in Q$

$$\mu(\varphi(Q)) < c\,\lambda Q$$

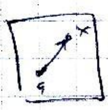
Δ

$\varphi(x) = \varphi(a) + L(x-a) + o(x-a)$, где $L = \varphi'(a)$

$L^{-1}(\varphi(x) - \varphi(a))$ ~~$+ a < x +$~~

$a + L^{-1}(\varphi x - \varphi a) < x + o(x-a)$ $\quad \psi(x) = x + o(x-a)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists B(a)$ $\forall x \in B(a)$ $|\psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a|$



$U(a) =$ $a \in Q \subset U(a)$ $\quad x \in Q$ $\quad |x-a| \leq \sqrt{m}\,h$

куб со стороной h

$|\psi(x) - x| < \varepsilon \cdot h$

$x, y \in Q \quad |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq$

$\leq |\psi_i(x) - x_i| + |\psi_i(y) + y_i| + |x_i - y_i| \leq$

$\leq |\psi(x) - x| + |\psi(y) - y| + |x_i - y_i| <$

$< (1+2\varepsilon) h$

то есть $\psi(Q) \subset$ куб со стор. $(1+2\varepsilon)h$

$\lambda(\psi Q) \leq (1+2\varepsilon)^m \lambda Q$

$\lambda(\Phi(Q)) \leq \underbrace{|\det L| \cdot (1+2\varepsilon)^m}_{\text{выберем } \varepsilon: \ < C} \lambda Q$

∇

15

T

О преобразовании меры Λ при диффеоморф.

$\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеоморфизм

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m \quad \lambda(\Phi(A)) = \int\limits_A |\det \Phi'(x)| \, d\lambda$

Δ

$\nu(A) = \lambda \Phi(A)$ – мера ; $J_\varphi(x) = |\det \Phi'(x)|$

J_φ – плотность ν отн. λ?

Проверим $\quad \forall A \quad \inf\limits_{x \in A} J_\varphi(x) \lambda A \leq \nu(A) \leq \sup\limits_{x \in A} J_\varphi \lambda A$

Дост. д-ть правое, левое работает по диффеоморфизму, левое рассмотрим отн. Φ^{-1} – $\frac{1}{\inf J_\varphi} = \sup J_\varphi$

Пусть правое работает для удов. требуемым:

$\nu(Q) \leq \sup J_\varphi \cdot \lambda Q$

$\leftarrow \neg: \quad \nu Q > \sup J_\varphi \lambda Q$

$\exists c > \sup J_\varphi, \quad \lambda Q \cdot c < \nu(Q)$

Половинное деление на 2^m частей

$\exists$ часть $Q_1 \quad \lambda Q_1 \cdot c < \nu(Q_1)$,

тогда $\exists$ более меньший $Q_2: \lambda Q_2 \cdot c < \nu(Q_2)$

$\operatorname{diam} Q_i = \frac{\operatorname{diam} Q}{2^i}$

$a = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$

$\forall k \quad a \in Q_k \quad \lambda Q_k \cdot c < \nu(Q_k)$

$\nu(Q_k) = \lambda(\Phi(Q_k))$ — при больших k противоречит лемме

Значит это работает для кубов.

Переходим к измеримым мн-вам, тогда уже открытых множеств можно.

$$A = \cup Q_i \quad , \quad \nu A = \sum \nu Q_i \leq \sum \sup_{x\in Q_i} J_\varphi \cdot \lambda Q_i \leq$$

$$\leq \sum \sup_A J_\varphi \lambda Q_i = \sup_A J_\varphi \cdot \lambda A$$

А если наш интерес $\nu(A) = \inf_{E:} (\nu E) \leq \inf(\sup_{x\in E} J_\varphi \cdot \lambda E) =$

$= \sup_A J_\varphi \cdot \lambda A$ $\quad |\infty \cdot 0 = 0|$ $\quad A \subset \underset{\text{откр}}{E} \subset O$

(E откр $\Rightarrow \varphi^{-1} E$ тоже откр)

$\mathcal{D}$-во "$=$" $\quad$ $\nu(A) = \lambda(\Phi(A)) = \inf_{E'} \{\lambda E'\}$

Рассмотрим случай $\quad$ ($A \subset \Phi^{-1}(E') \Leftrightarrow \Phi(A) \subset E'$)

$$\underset{\substack{\text{замкн.}\\ \text{куб}}}{A \subset \overline{Q} \subset O}, \quad A \subset \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{в } Q}}{E} \subset \overline{Q} \subset O$$

иначе разобьем A, чтобы $A_i \subset Q_i$

$\lambda A = 0 \Rightarrow$ "$=$" очевидно, $\inf = 0$

"$\geq$" – очевидно (вместо "$=$") – общее св-во инфимума.

Нам нужно "$\leq$"

$\lambda A > 0 \quad \sup_{x\in A} J_\varphi(x) < c \quad , \quad \sup J_\varphi < c_1 < c$

– ε - мал. число –

$J_\varphi^{-1}(-\infty; c_1)$ – откр. мн-во.

откр $E_0 \supset A \qquad \lambda(E_0 \setminus A) < \varepsilon$

$$E := E_0 \cap J_\varphi^{-1}(-\infty, c_1), \quad \lambda(E\setminus A) < \lambda(E_0 \setminus A) < \varepsilon$$

$$\sup_{x\in E} J_\varphi \cdot \lambda E \leq c_1(\lambda A + \varepsilon) \leq \lambda A \cdot c$$

нужно найти такое ε, чтобы работало

такое чтобы $\underline{c_1 \varepsilon \leq (c - c_1)\lambda A}$

16

∇

T **Самое лучшее**: $\Phi: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – диффеом.

$O' = \Phi(O) \quad f \geq$ изм. на O' или суммир. O'

Тогда $\displaystyle\int_{O'} f(y)\, d\lambda = \int_O f \circ \Phi(x) \, |\det \Phi'(x)| dx$

3 $\quad \forall E \subset O' \quad \displaystyle\int_E f(y)\, d\lambda = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(x)) |\det \Phi'(x)|\, dx$

Δ $\nu(E) = \lambda(\Phi(E))$ имеет вес $|\det \Phi'(x)|$ отн. λ: $\nu(B) = \displaystyle\int_{\Phi^{-1}(B)} |\det \Phi'(x)|\, dx$ $\quad \nabla$

16.03.2015

П

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi: (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_{\odot}$

$\varphi: [0;+\infty)\times[0;2\pi)$ $f: \mathbb{R}^m_{\odot} \to \mathbb{R}$ измер.

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \det\varphi' = r$$

$$\int f(x)\,d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(y))\,|\det\varphi'(y)|\,d\lambda$$

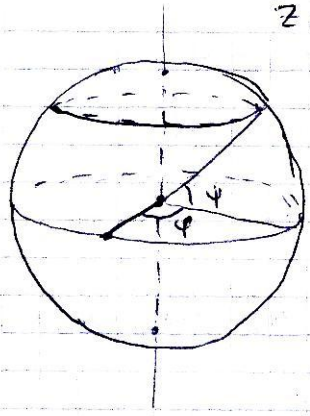
$$\int \frac{d\lambda_2}{(x^2+y^2)^p} = \int_{(0;1]\times[0,2\pi)} \frac{d\lambda_2}{r^{2p}}\cdot|r| = \int_{(0;1]\times[0,2\pi)} \frac{d\lambda_2}{r^{2p-1}} \overset{*}{=}$$ т. Тонелли

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{2p-1}}\,d\varphi\right) dr = \frac{-\pi}{(p-1)r^{2p-2}}\Big|_0^1 = \begin{cases} +\infty & p>1\ (!) \\ \text{кон.}, & p<1 \end{cases}$$

П $\mathbb{R}^3$

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ Цилиндрические координаты

$$|\det\varphi'| = \det\begin{vmatrix} \Pi\varphi' & 0 \\ & 0 \\ 0\ 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$



Сферические координаты

ψ – широта $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

φ – долгота $[0, 2\pi]$

$x = r\cos\psi\cos\varphi$

$y = r\cos\psi\sin\varphi$

$z = r\sin\psi$

$$\det\varphi' = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi & -r\cos\psi\sin\varphi & -r\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

смотрим ортогональность

$= r^2\cos\psi$

П Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

$r, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1$, $\varphi_k \in [0,\pi]$, $k \in 2..n-1$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$

Индукционно: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$

$\varphi_{n-1} = \widehat{\langle r\cos\varphi_n, e_{n-1}\rangle}$

$x_n = r\cos\varphi_{n-1}$

$x_{n-1} = r\sin\varphi_{n-1}\cdot\cos\varphi_{n-2}$

$x_{n-2} = r\sin\varphi_{n-1}\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-3}$

$x_3 = r\sin\varphi_{n-1}\cdots\sin\varphi_3\cos\varphi_2$

$x_2 = r\sin\varphi_{n-1}\cdots\sin\varphi_2\cos\varphi_1$

$x_1 = r\sin\varphi_{n-1}\cdots\sin\varphi_2\sin\varphi_1$

$x_n = \rho_{n-1} \cos\varphi_{n-1}$

$x_{n-1} = \rho_{n-1} \sin\varphi_{n-1}$

$x_1, x_3 \dots x_n$ — ост. прежними

$\varphi_1, \rho_2, x_3 \dots x_n$

$\rho_2 = \rho_3 \cos\varphi_2$

$x_3 = \rho_3 \sin\varphi_2$

$\varphi_1, \varphi_2, \rho_3, x_4 \dots x_n$ — ост. прежними

Итого $\lambda(n-1)$ приведет к появлению координат $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1} \rho_n$; $\rho_n \xleftrightarrow{\text{alias}} r$

Проверим:

$x_1 = \rho_2 \sin\varphi_1 = \rho_3 \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 = \dots = r \sin\varphi_{n-1} \dots \sin\varphi_1$

$x_3 = \rho_2 \cos\varphi_2$

$x_{n-1} = \rho_{n-1} \cos\varphi_{n-2} = r \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2}$

$$\int f(x_1 \dots x_n)\, d\lambda_n =$$

$$= \int f(\varphi_1, \rho_2, x_3 \dots x_n)\, \rho_2\, d\lambda_n = \int f(\varphi_1, \varphi_2, \rho_3, x_4, \dots)\, \underbrace{\rho_3 \sin\varphi_2 \cdot |\rho_3|}_{} =$$

$$= \int f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \rho_4, x_4 \dots)\, \rho_4^2 \sin^2\varphi_3 \sin\varphi_2 \cdot |\rho_4| =$$

якобиан сф замены в $\mathbb{R}^3$

$$= \int f(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}, r)\, \underbrace{r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_{n-1} (\sin\varphi_{n-2})^{n-3} \dots (\sin\varphi_2)}_{}$$

$\uparrow \rho_n$ — это Якобиан сферической замены

6) Произведение мер

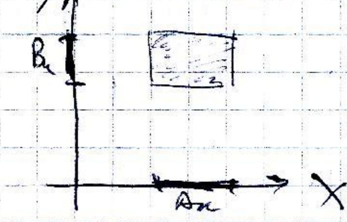
$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — п/к, тогда $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ — полукольцо $\hookrightarrow$ п/к обобщённых пр-в.

Заведем на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ меру m_0: $m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$

① m_0 — мера на п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$

② μ, ν — σ-кон. меры $\Rightarrow$ m_0 — σ-кон.



Δ

① ? сч. адд. m_0

$$A \times B = \bigsqcup A_k \times B_k \overset{?}{\Rightarrow} m_0(A \times B) = \sum m_0(A_k \times B_k)$$

$\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \chi_{A \times B} = \sum \chi_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \chi_{B_k}(y)$; $\mu A_k \cdot \nu B_k$

Проинтегр. по мере ν:

$\chi_A(x)\, \nu(B) = \sum \chi_{A_k}(x)\, \nu(B_k)$, $\mu(A)\nu(B) = \sum \mu A_k\, \nu B_k$

$\uparrow$ для неотр. ряда ✓

② $X = \bigcup X_k,\ X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots\ \forall k\ \mu X_k < +\infty$

$Y = \bigcup Y_e,\ Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \dots\ \forall e\ \nu Y_e < +\infty$

$X \times Y = \bigcup_{k,e} X_k \times Y_e$

8 ∇

О $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$ - σ-конечные меры.

Т.к. п/к $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, применим теорему о Лебеговском продолжении меры, получим:

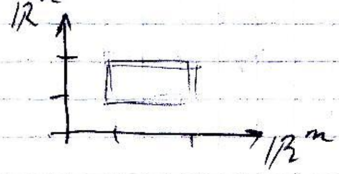
σ-алгебра $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ и мера m

$m = \mu \times \nu$ $\quad m(A \times B) = m_0(A \times B) = \mu A\, \nu B$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ - пр-ие пр-в $(X, \mathfrak{A}, \mu), (Y, \mathfrak{B}, \nu)$

А мера $\mu \times \nu$ - пр-е μ и ν

17 Т в пространствах $\mathbb{R}^m$ $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$



Δ без д-ва ∇

3 $m(A) = \inf\left(\sum m_0(P_k);\ A \subset \bigcup P_k,\ P_k \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\right)$

Регулярная мера Лебега

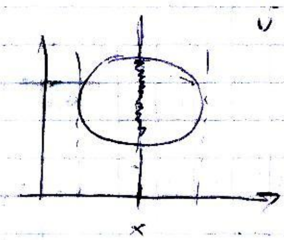
$\forall A$-изм $\exists$ борелевское B. $A \subset B$ $m(B \setminus A) = 0$

$\bigcap_i (\bigcup P_{ij}) = (\bigcup P_i^{(1)}) \cap (\bigcup P_i^{(2)}) \cap (\bigcup P_i^{(3)}) \cap \dots$

$\forall$ изм $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ $\exists P_{ij} \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$

Для $B := \bigcap_i (\bigcup_j P_{ij})$ верно $A \subset B$ $m(B \setminus A) = 0$

9 О



$C \subset X \times Y$

$x \in X,\ C_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}$

$y \in Y,\ C^y = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}$

$(\bigcup C_k)_x = \bigcup (C_k)_x\ ;\ (\bigcap C_k)_x = \bigcap (C_k)_x\ ;\ (C_1 \setminus C_2)_x = (C_1)_x \setminus (C_2)_x$

I

18

Принцип Кавальери

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$, μ, ν — σ-конечные; μ, ν — полные (все подмн-ва мн-в меры 0 измеримы)

$m = \mu \times \nu$, $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, тогда

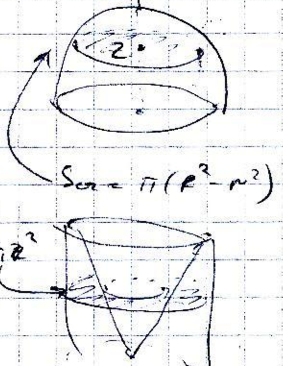
① C_x — ν-измеримо при почти всех x

② $x \longmapsto \nu(C_x)$ измерима* на X

③ $m(C) = \int\limits_X \nu(C_x)\, d\mu$

Аналогичное верно для сечений C^y

16 век — [illegible]!



C^y

$S_{сеч} = \pi(R^2 - r^2)$

$S_{сеч} = \pi R^2 - \pi r^2$

$S_{ш} = \pi R^2 R - \frac{1}{3} R^2 R \pi = \frac{2}{3}\pi R^3$

△ $\mathcal{D}$ — класс мн-в $\in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ и удовлетворяют трём св-м выше.

1) Проверим, что $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$

$C = A \times B$ $\quad C_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A \end{cases}$

① очевидно

② это ф-я $\chi_A \cdot \nu B$

③ $\int\limits_X \nu(C_x)\, d\mu = \int \chi_A(x)\, \nu B\, d\mu(x) = \mu A \cdot \nu B = m(A \times B)$

2) Если $E_1, E_2 \ldots \in \mathcal{D} \Rightarrow \sqcup E_i \in \mathcal{D}$

① $(\sqcup E_i)_x = \underbrace{\sqcup (E_i)_x}_{изм.}$ ② $\nu(E_x) = \nu(\sqcup (E_i)_x) = \sum \nu(E_i)_x$ — измерима как сумма изм.

③ $\int\limits_X \nu(C_x) = \sum \int\limits_X \nu(E_i)_x = \sum mE_i = mE$

23.03.15

3) $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{D}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ $\forall i$ $m(E_i)$ конечн.

Проверим, что $\cap E_i \in \mathcal{D}$

$mE_i = \int\limits_X \nu(E_{ix})\, d\mu$ — конечно $\Rightarrow \nu(E_{ix})$ конечна при п.в. x (**)

$E = \cap E_i$ $\quad E_x = \underbrace{(\cap E_{ix})}_{(***)}$ $\quad E_{1x} \subset E_{2x} \subset E_{3x} \subset \ldots$ (*) изм. при п.в. x

(*)+(***) : E_x изм. при п.в. x } $\Rightarrow \nu(E_x)$ — изм. при п.в. x

(*) (**) (***) } т.к. $\nu(E_x) = \lim \nu(E_{ix})$ по непр. меры сверху

$\nu(E_{1x}) \geq \nu(E_{2x}) \geq \nu(E_{3x}) \ldots$

$\int\limits_X \nu(E_x)\, d\mu = \lim\limits_{i \to \infty} \int \nu(E_{ix})\, d\mu = \lim m(E_i) = mE$

$m(A) = \inf \left(\sum m(P_i \times Q_i) : A \subset \bigcup (P_i \times Q_i) \right)$:

$\forall A \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \quad \exists \mathcal{D}_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

$A \subset \bigcap_j \bigcup_i \mathcal{D}_{ij} \qquad m\left(\bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij} \setminus A\right) = 0$

4) $E \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \qquad m(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{D}$

$\exists$ мн-во $H = \bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij}$, где $\mathcal{D}_{ij} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ т.ч. $H \in \mathcal{D}$ т.ч. $mH = 0$

при п.в. X H_x — изм., а $E_x \subset H_x$

$mH = 0 = \int_X \underbrace{\nu(H_x)}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow$ ф-я $x \mapsto \nu(H_x)$ — п.в. равна 0

Тогда при п.в. x E_x — изм. и $\nu(E_x) = 0$

по полноте меры

$0 \leq \underset{\substack{\| \\ 0 = mE}}{\int_X \nu(E_x)} \leq \int_X \nu(H_x) = 0$

огр. изм.

5) E — изм. $\in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \qquad E = H \setminus N \qquad H, N \in \mathcal{D}$

нулев. меры

из пред. пункта $\bigcap \bigcup \mathcal{D}_{ij}$

$E_x = H_x \setminus N_x$

$x \mapsto \nu(E_x) = \nu(H_x) - \nu(N_x)$ — изм.

$\nu(E_x) = \nu(H_x)$ п.в. $X \qquad \int \nu(E_x) = \int_X \nu(H_x) = mH$

6) E произв. изм. $\nu\cdots$ $E \in \mathcal{D}$

$X = \bigsqcup X_i \qquad \mu X_i < +\infty$

$Y = \bigsqcup Y_i \qquad \nu Y_i < +\infty$

$X \times Y = \bigsqcup_{ij} X_i \times Y_i \qquad E = \bigsqcup E_{ij}$

$E_{ij} = E \cap (X_i \times Y_i)$

$E_x = \bigsqcup E_{ij\,x}$

$\nu(E_x) = \sum \nu(E_{ij\,x}) \qquad \int \nu(E_x) = \sum \int \nu(E_{ij\,x})$

$\sum m E_i = mE$

$\mathcal{B}$ σ-во измеримых мн.

С $E \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

P_1 — проекция E_x на $X = \{x \in X \ \exists y \ (x,y) \in E\}$

Если P_1 — изм. в X, то $mE = \int\limits_{P_1} \nu(E_x)\, d\mu$

(на $X \setminus P_1 \ \nu(E_x) = 0$)

З E-изм $\not\Rightarrow P_1$ изм

С $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ — непр

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda$$

$\Pi\Gamma(f, [a,b])$ — изм. в $\mathbb{R}^2$

$\forall x \in [a,b] \quad \Pi\Gamma_x = [0, f(x)] \quad \nu(\Pi\Gamma_x) = f(x)$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lambda_2(\Pi\Gamma) = \int\limits_{[a,b]} \nu(\Pi\Gamma_x)\, d\mu = \int\limits_{[a,b]} f\, d\lambda$$

$f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X \quad f_x(y) = f(x,y): Y \to \overline{\mathbb{R}}$

19 $\forall y \in Y \quad f^y(x) = f(x,y): X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$

Т Тонелли

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ μ, ν — σ-кон. полные меры

$m = \mu \times \nu$ — мера на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

$f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, ≥ 0 — m-измеримая

Тогда:

1) f_x — ν-изм. ф-ция при п. в. x

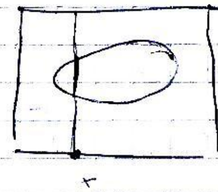
2) $X \mapsto \varphi(x) := \int\limits_Y f_x(y)\, d\nu(y)$ — эта ф-я μ-изм*

3) $$\int\limits_{X \times Y} f\, dm = \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu(x) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu$$

Д 1. $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \quad f = \chi_E$

$f_x = \chi_{(E_x)}(y)$

E_x - изм. п.в. $x \Leftrightarrow \chi_{E_x}$ - изм. п.в. x



$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int\limits_Y \chi_{E_x}\, d\nu = \nu(E_x)$$

$\varphi(x)$ - это ф-я $x \longmapsto \nu(E_x)$ - изм. по прин. К

Все через принцип Кавальери.

$$3: \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu = \int\limits_X \nu(E_x)\, d\mu = mE = \int\limits_{X\cdot Y} f$$

Для ступенчатых все работает

2. f - ступ. $\quad f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_k \chi_{E_k}$

$$f_x = \sum c_k \chi_{(E_k)_x}$$

$$\int\limits_Y f_x = \sum c_k \int\limits_Y \chi_{(E_k)_x}\, d\nu \qquad \int\limits_X \varphi(x)\, d\mu = \sum c_k \int\limits_X \Big(\int\limits_Y \chi_{E_{k_x}}\, d\nu\Big) d\mu$$

3. f - изм. $\geq 0 \quad f = \lim g_n$, где все g_i - ступ. $0 \leq g_i \leq g_2$

$\forall x\ f_x = \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x}_{\text{изм. п.в. } x}$ $\Big| \Rightarrow f_x$ изм. как предел изм. ф-й при п.в. y.

$$\varphi(x) = \int\limits_Y f_x\, d\nu(y) \underset{?}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_Y (g_n)_x\, d\nu(y)$$

т. Леви

$$\int \varphi(x) \underset{\text{т. Леви}}{=} \lim \int\limits_X \Big(\int\limits_Y (g_n)_x\, d\nu(y)\Big) d\mu(x) =$$

п. 3 этой теор. для ст.

$$= \lim \int\limits_{X\times Y} g_n\, dm = \int\limits_{X\times Y} f\, dm$$

т. Леви

Сл. $C \subset X\times Y$ m - изм.

$P_1(C)$ - проекция на X - μ - изм.

$f: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ≥ 0 изм.

$$\int\limits_C f\, dm = \int\limits_{P_1(C)} \Big(\int\limits_{C_x} f(x,y)\, d\nu(y)\Big) d\mu(x)$$

△ Очевидно

$$\int_C f\,dm = \int_{X\times Y} f\,\chi_C\,dm = \int_X\Big(\int_Y f\,\chi_C\,d\nu\Big)d\mu =$$

$$= \int_{B_1}\Big(\int_Y f_x\,(\chi_C)_x\,d\nu\Big)d\mu$$

▽

(20)

П Тут какой-то пример, я хочу спать, аналитически несложно.

(21)

30.03.2015

Фубини

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ μ, ν - биол. конечные

$m = \mu \otimes \nu$, $f: X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ - m-сумм.

Тогда 1) f_x является суммируемой при п.в. X
f^y сумм. при п.в. Y

2) $x \longmapsto \varphi(x) = \int_Y f_x\,d\nu$ - сумм.* на X ← может быть задана не всюду (кроме множ. меры 0)

$y \longmapsto \psi(y) = \int_X f^y\,d\mu$ - сумм. на Y

3) $\int_{X\times Y} f\,dm = \int_X \varphi(x)\,d\mu = \int_Y \psi(y)\,d\nu$, то есть

$$\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \dots$$

△ $f = f_+ - f_-$, суммируемость - $\int_{X\times Y} f_\pm\,dm$ - конечно, а тогда $\int_{X\times Y} f = \int_{X\times Y} f_+ - \int_{X\times Y} f_-$

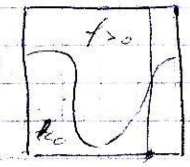
1. $(f_+)_x = (f_x)_+$ - имеем тоже, тогда по Тонелли

$\int_{X\times Y} f_+ = \int_X\Big(\int_Y (f_x)_+\,d\nu\Big)d\mu$ - конечен, значит подинтегр. выражение конечно.

$\int_Y (f_x)_+\,d\nu$ - конечен при п.в. x, аналогично с $\int_X \dots$

2. $$\int_{X\times Y} f = \int_X\Big(\Big(\int_Y f_+\Big) - \Big(\int_Y f_-\Big)\Big)\ ?$$

$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\right)_+$ ← Это К.П с уже сами $\varphi(x)_+ = \int_Y (f_x)_+ dy$



?

$\varphi(x) = \int_Y (f_x)_+ - \int_Y (f_x)_-$

$$\int_X |\varphi(x)|\, d\mu = \int_X \left|\int_Y f_{x+} - \int_Y f_{x-}\right| d\mu \le \int_X \left(\left|\int_Y f_{x+}\, dy\right| + \left|\int_Y f_{x-}\, dy\right|\right) d\mu =$$

$$= \int_X\int_Y f_{x+} + \int_X\int_Y f_{x-},$$

тогда $\int |\varphi(x)|$ конечен, значит $\varphi(x)$ конеч.

3. $$\int_{X\times Y} f\, dm = \int_{X\times Y} f_+ - \int_{X\times Y} f_- = \int_X\int_Y f_{x+} - \int_X\int_Y f_{x-} = \int_X\left(\int_Y f_{x+} - \int_Y f_{x-}\right) =$$

$$= \int_X\int_Y f_x.$$

∇

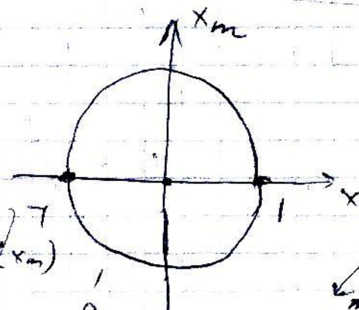
22

П

Найдём объем $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots \le r^2$, то есть объем $\lambda_m(B(0,r))$.

$\alpha_m = \lambda_m(B(0,1))$, причем $\lambda_m(B(0,r)) = \alpha_m r^m$ из-за гомотетии $\times \det$

$$\alpha_m = \int_{B(0,1)} 1\, d\lambda_m =$$



$$= \int_{[-1,1]} \left(\int_{B(0,\sqrt{1-x_m^2})} 1\, d\lambda_{m-1}\right) dx_m = \quad = d\lambda_1(x_m)$$

$x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2 \le r^2 - x_m^2$

< 1

$$= \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1} (1 - x_m^2)^{\frac{m-1}{2}}\, dx_m =$$

$$= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\, dx \underset{\sqrt{t}=x}{=} \alpha_{m-1} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{m-1}{2}}\, dt =$$

$$= \alpha_{m-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} = \alpha_{m-1} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$$

$m = 2$

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\sqrt{\pi}\, (\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \alpha_1 =$$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\alpha_1 = 2$

$$= \frac{(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)};$$

$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 2$, работает $\quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{\pi}^3}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}^3}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\pi$

5

T Фату

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\quad f_n$ - изм ≥ 0 $\quad f_n \to f$ п.в.

$\exists C > 0 \quad \forall n \quad \int\limits_X f_n \, d\mu \leq C$,

Тогда $\int\limits_X f \, d\mu \leq C$

Δ

$g_n(x) = \inf (f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x) \dots)$

$g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \dots$ и $\lim g_n(x) = \underline{\lim} f_n = f$

$\int g_n \leq \int f_n \leq C$, перейдем к lim по т. Леви отн g_n

$\int f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \leq C$

∇

П $f_n = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} \quad X = [0, 1]$

$f_n \to f \equiv 0$ (кроме $x = 0$) $\quad \int f = 0 \quad \int f_n = 1$

C1 f_n - изм, $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$, $\int f_n d\mu \leq C$, тогда $\int f \, d\mu \leq C$

Δ Выберем $f_{n_k} \to f$ п.в. (это можно сделать)
∇

C2 Человеконенавистническое (антипедагогическое вариант) формулировка Фату

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$: $f_n \geq 0$ - изм, Тогда

$\int\limits_X (\underline{\lim} f_n) \leq \underline{\lim} \int\limits_X f_n$

Δ Возьмем g_n как в д-ве Фату, $\lim g_n = \underline{\lim} f_n$

$\int g_n \leq \int f_n \leq \cancel{C} \leftarrow$ нету

перейдем к нижнему пределу

по $\int f_{n_k} \to \underline{\lim} \int f_n$, сделаем переход, тогда

$\int g_{n_k} \underset{\text{Леви}}{\to} \int \underline{\lim} f_n$, $\int f_{n_k} \to \underline{\lim} \int f_n$, тогда все ок

∇

10

5 Функция Распределения

О (X, Q, μ) $h: X \to \mathbb{R}$ почти функция

$\forall t \in \mathbb{R}$ $X(h<t)$ - конечна

Ф-я распределения (относ. ф-ии h) $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$H(t) := \mu X(h<t)$

(X, Q, μ) $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ $h: X \to \mathbb{R}$ - измерима
борелевская

$\exists$ мера в $\mathbb{R}$ $\nu = h(\mu)$ $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}$

$$\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} 1 d\mu$$

Т По опр. $\nu(A)$ задано на мн-вах (лучах) $(-\infty, t) / (t, +\infty)$ эти мн-ва порождают $\mathcal{B}$ и она значит задана на любом элементе $\mathcal{B}$, то есть $\mu(h^{-1}(A))$ всегда ...

О $H(t)$ - возр. μ_H $\mu_H[a, b] = H(b-0) - H(a-0)$
(Борель-Стилтьеса)

Продолжение μ_H с полукольца ячеек дает меру заданную минимум на борелевской σ-алг.

μ_H - она, задана на $\mathcal{B}$

Л (X, Q, μ)

h - изм, п.в. кон. и $\forall t$ $\mu X(h<t)$ - кон.

$\nu = h(\mu)$, H - ф-я распределения, μ_H - мера Борель-Стилтьеса

Тогда $\mu_H = \nu$ на $\mathcal{B}$

Δ

$$\mu_H[a, b) = H(b-0) - H(a-0) = H(b) - H(a) =$$

$$\left(\begin{array}{l} H(b - \frac{1}{n}) = \mu X(h < b - \frac{1}{n}) \\ H(b-0) = \lim\limits_{n\to\infty} ! = \mu X(h<b) \\ \bigcup\limits_n X(h < b - \frac{1}{n}) = X(h<b) \quad \text{непр. меры снизу} \end{array} \right) \begin{array}{l} = \mu X(h<b) - \\ \quad \mu X(h<a) = \\ = \mu X(a \le h < b) = \\ = \mu h^{-1}([a, b)) = \nu([a,b)) \end{array}$$

Тогда по продолжению (и 3. единств.) $\mu_H = \nu$ на $\mathcal{B}$

∇

Т $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, неотр., измеримая отн. $\mathcal{B}$

($\{x : f(x) < t\}$ - борелевское при $\forall t$)

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $h: X \to \mathbb{R}$ изм., п.в. кон., имеет ф.р. H (↳ распр.)

$\nu = h(\mu)$,

Тогда $$\int_X f(h(x))\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_H(t)$$

З) $f \geq 0 \iff f$ - сумм. отн. μ_H, изм. по Борелю.

Δ

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, $h: X \to Y$, тогда

$\nu = h(\mu)$

$$\int_X f(h(x))\, d\mu(x) = \int_Y f(y)\, d\nu$$

$\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} 1\, d\mu$ (или даже $\nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} \omega\, d\mu$)

по т. о замене меры в интеграле ($\omega = 1$)

∇

Л $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возр., дифф ($C^1$) μ_g

$f \geq 0$ $$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g'(t)\, dt$$

Δ

$$\mu_g(a, b) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\, dt$$

$$\int_X f(h(x))\, \overset{\omega(x)}{\cancel{\ }}\, d\mu = \int_Y f(t)\, \cancel{\omega(t)}\, d\nu, \quad \nu(A) = \int_{h^{-1}(A)} \omega(x)\, d\mu(x)$$

$X = Y = \mathbb{R}$ $h = id$, $\omega = g'$

$\nu \leftrightarrow \mu_g$, $\mu \leftrightarrow t$, тогда всё работает.

$$\int_{\mathbb{R}} f(id(t))\, g'(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_g(t)$$

∇

П $f \geq 0$ изм. по Борелю

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\|x\|)\, d\lambda_m = \quad h(x) = \|x\|, \quad H(t) = \lambda_m\{x : \|x\| < t\} = \lambda_m B(0, t) = \alpha_m t^m$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_H(t) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \alpha_m t^{m-1} m\, dt$$

$$= m \cdot \lambda_m \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{m-1}\, dt,$$

Гл. Ряды Фурье

§1 Пространство L_p

3 Интегрирование $\mathbb{C}$-значных ф-й

$$f: \underset{X}{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} \text{ или } \overline{\mathbb{C}}$$

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$

а) f-изм, если $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ изм.

б) $\int_X f = \int_X \mathrm{Re} f + i \int_X \mathrm{Im} f$

в) f-сумм, если $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ сумм.

1 Н-во Гёльдера

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $f, g: X \to \mathbb{R}$ изм, п.в кон. $p, q > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Тогда $\int_X |fg| d\mu \le \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\right)^{1/q}$

Δ тривиально через сумм. ф-ии (дискр. нер-во Гёльдера + Лебег ∇

Н-во Минковского

$p \ge 1$ $\left(\int_X |f+g|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p}$

Δ the same ∇

3 Если $f \mapsto \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} = \|f\|$, тогда н-во Минковского это н-во Δ: $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

0 Пр-во L_p, L^p, $1 \le p < +\infty$

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $L^p(X)$: $L^p(X, \mu)$

Рассм $\{f: X \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}),$ изм. $\int_X |f|^p$ - кон. $\}$ - лин. пр-во в силу н-ва Минковского

$f \longmapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}$ - услов. нор. ву Δ.

Отношение $\underset{п.в.}{\equiv}$ - отождествим ф-ии, равные п.в.

Результат - это L^p

0 L^∞ $\quad L^\infty(X, \mu)$ $\quad \{ \dots$

0 $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ существенный супремум

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{M \in \mathbb{R} \quad f(x) \le M \text{ при п.в. } X\}$$
(vraisup)

1 Св-ва esssup.

1) $\operatorname{esssup} f \le \sup f$

2) $f(x) \le \operatorname{esssup} f = S$ при п.в. x

3) f - сумм. на X $\quad g$ - сущ. ограниченная, $\operatorname{esssup}|g| < +\infty$

Тогда $\left|\int_X fg \, d\mu\right| \le \operatorname{esssup}|g| \int_X |f| \, d\mu$

Δ

1) чет очевидно

2) $S + \frac{1}{n}$ - сущ. в.г, т.е. $f(x) \le S + \frac{1}{n}$ при п.в. X

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ верно по опр "п.в."

Тогда $f(x) \le S$

3) Очевидно по модулю св-ва 2 и монот. интегр.

Ну, то есть поправим g так, чтобы

$|\tilde{g}| \le \operatorname{esssup}|\tilde{g}|$ при всех x

$$\left|\int fg \, d\mu\right| = \left|\int_X f\tilde{g} \, d\mu\right| \le \operatorname{esssup}|\tilde{g}| \int |f|$$

∇

3 ... L^∞ сост. из $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}})$,

они измеримы и ограничены ($\operatorname{esssup}|f| < +\infty$)

+ отождествлены ф-ии, совп. п.в.

- очевидно Л.П. ($\operatorname{esssup} f+g \le \dots f + \dots g$)

3 $$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}|f|$$

$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \qquad \|fg\| \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

Т | $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\quad \mu X < +\infty$

① $1 \le s < r < +\infty$, тогда $L^r \subset L^s$

② $\|f\|_s \le (\mu X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \|f\|_r$

З | 1) $L^\infty \subset L^p$ очевидно, любая из $f \in L^\infty$ лежит в L^p

2) Значение $\|f\|_p$ определено $\forall$ изм f

Δ

2 => 1

Если н-во выполнено, то $\|f\|_s$ огр, все ок.

$$\frac{r}{s} = p > 1 \quad q = \frac{r}{r-s} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

$$\|f\|_s^s = \int_X |f|^s = \int_X |f|^s \cdot 1 \le \left(\int_X |f|^{s \frac{r}{s}}\right)^{s/r} \left(\int_X 1^{\frac{r}{r-s}}\right)^{\frac{r-s}{r}} =$$

$$= \|f\|_r^s (\mu X)^{1 - \frac{s}{r}}$$

∇

Сл. | f_n, f - изм. на X

$f_n \xrightarrow[L^r]{} f$ $(\|f_n - f\|_r \to 0)$

$\mu X < +\infty$, тогда $\forall s$ $1 \le s < r$

$$f_n \xrightarrow[L^s]{} f$$

О | $x_n \in L$ - лин. норм. пр-во - фундаментальна

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N, m > N \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

$x_n \to x \Rightarrow x_n$ - фунд. $\quad \|x_n - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$

О | L - полное, если $\forall$ фунд. x_n $\exists \lim x_n$

$\mathbb{R}$ - полное

О | $C(K)$ K - компакт мн-во непр. ф-й $K \to \mathbb{R}$

$\|f\| = \max_K |f(x)|$ - норма

Л | $C(K)$ - полное пр-во

Δ $f_1, f_2, \ldots \in C(K)$ фунд $\Rightarrow \exists f \in C(K)$ $f_n \to f$

$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n(x) - f_m(x)\| = \max_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \Rightarrow$

$f_n(x)$ - фунд. в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

∇

13.04.2016

Т $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $L^p(X)$ - полное $(1 \le p < +\infty)$

Д

f_n - фунд. в L^p

(1) Строим кандидата на роль предела

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad \exists N_1$, $\forall m, n > N_1$ $\quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\quad \exists N_2 > N_1$ $\quad \forall m, n > N_2$ $\quad \|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{4}$ ← L^p норма

$\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ ...

Тогда ясно, что $\sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p < 1$

Рассмотрим $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)| \in [0, +\infty]$

$\|S_N\|_p = \|\sum_{k=1}^{N} \dots\|_p \le \sum_{k=1}^{N} \|f_{N_{k+1}} - f_{N_k}\|_p < 1$

То есть $\int_X |S_N(x)|^p d\mu(x) < 1$ и при всех x $S_n(x) \to S(x)$

Тогда по теор. Фату, $\int_X |S(x)|^p d\mu < 1$

Т.е. $|S(x)|^p$ п.в. конечно, это значит, что

$\sum f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)$ - абс. сх. п.в.

$f(x) = f_{N_1}(x) + \sum (f_{N_{k+1}} - f_{N_k}(x))$

п.в. x $\quad f = \lim f_{N_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\dots) = \lim_{k\to+\infty} f_{N_{k+1}}(x)$

$\|f(x) - f_n(x)\| \to 0$? $\qquad \|f\|_p \le \|f_n\|_p + \sum$ кон.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n, m > N$ $\quad \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon^p$

Возьмем $m = N_k > n$ $\quad n$ - фикс.

$\|f_n - f_{N_k}\|_p^p < \varepsilon^p$ ← опр. предела

$\int_X \underbrace{|f_m(x) - f_{n_k}(x)|}_{\downarrow \text{п.в.}\ |f_n(x) - f(x)|^p} d\mu(x) < \varepsilon^p$ $\xrightarrow{\text{т. Фату}}$ $\int |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) < \varepsilon^p$,

п.в. $\quad \|f_n - f\|_p < \varepsilon$

Θ X - метр. пр-во, $A \subset X$ - (всюду) плотно в X,

$\forall$ откр. мн-ва $G \subset X$ $A \cap G \neq \varnothing$
или $\forall$ шара $B(x_0, r)$ - в нем есть точки из A

П $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$

Λ $(X, \mathcal{G}, \mu)$ f - ступ. $= \sum_{k}^{n} c_k \chi_{E_k}$ $X = \bigsqcup E_k$

$\mu X(f \neq 0)$ - кон.

В $L^p(X, \mu)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ мн-во ступ. ф-й плотно.

Δ

① $p = \infty$, проверим $f \in L^\infty \Rightarrow \|f - C\| < \varepsilon$?

$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty$

поправим f на мн-ве меры 0.
$\forall x \in X$ $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$

f - изм, огр.
$\exists$ посл. h_n $\sup |f - h_n| \to 0$, но
$\operatorname{ess\,sup} |f - h_n| \to 0$, т.к. $\operatorname{ess\,sup} < \sup$

Следствие из теор. об аппрокс. ф-ии ступенч.

② $p < +\infty$, $f \in L^p$ $B(f, \varepsilon)$ - есть ли нужн. ступ. ф-ии?

$f \geq 0$ $\exists$ ступ $h_n \leq h_{n+1} \leq h_{n+2} \leq \dots$ $h_n \to f$

по этой же теореме $\int_X |f_n - h_n| \to 0$. всё монотонно.

Из нее:

$\|f - h_n\|_p^p = \int_X |f - h_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad |f(x) - h_n(x)| < |f(x)|$ $\quad |f(x) - h_n(x)|^p \leq |f(x)|^p$

по т. Лебега, мажоранта

∇

Ⓘ Нормальность $\forall$ тома - замкнут.

Если F_1, F_2 два непересек. замкн. мн-ва

Тогда $\exists G_1 G_2$ откр. $G_1 \cap G_2 = \varnothing$
$F_1 \subset G_1$ $F_2 \subset G_2$

$\mathbb{R}^m$ такое.

Л Лемма Урысона

F_1 и F_2 — два непер. множества, замкнутых на $\mathbb{R}^m$.

Тогда $\exists\, f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad f\big|_{F_1} = 0 \quad f\big|_{F_2} = 1$

Δ пропустили ☹

О f — финитная в $\mathbb{R}^m$, если она вне некот. шара 0

$C_0(\mathbb{R}^m)$ — мн-во финитных непрер. ф-й.

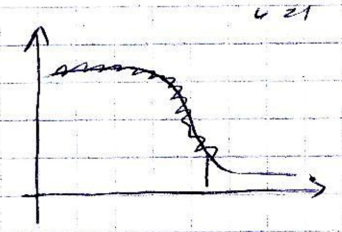
$\forall p \quad C_0 \subset L^p(\mathbb{R}^m)$

Т $\forall p \quad 1 \le p < +\infty \quad C_0(\mathbb{R}^m)$ плотно в $L^p(\mathbb{R}^m)$

Δ $f \in L^p,\ \varepsilon > 0,\ ?\ B(f, \varepsilon)$ — содерж. финит. непр. ф-ю

$\exists$ ступ. $h \quad \|f - h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$

$$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \quad \text{как приблизить } \chi_{E_k}?$$

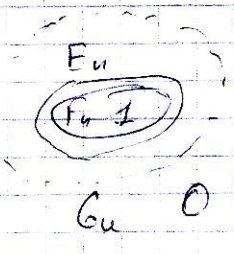


$F_k \subset E_k \subset G_k$

$\lambda(G_k \setminus F_k) < \delta$

$$\|\chi_{E_k} - f_k\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\chi_{E_k} - f_k|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{G_k \setminus F_k} |\chi_{E_k} - f_k|^p\right)^{1/p} \le \delta^{1/p}$$



f_k — ф-я из леммы Урысона

$$\|h - \sum a_k f_k\|_p = \|\sum a_k (\chi_{E_k} - f_k)\|_p \le$$

$$\le \sum |a_k| \, \|\chi_{E_k} - f_k\|_p \le \max|a_k| \cdot n \cdot \delta^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

∇

З в L^∞ это не работает. C^∞ — не всюду плотно в L^∞

З в L^p также всюду плотны: $(1 \le p < +\infty)$

— непр. ф-ии

— гладкие финитные ф-ии

— линейные комбинации х. ф. ячеек

! — равн. п.н. равн. огран. ☺

О $\quad \tilde{L}^P[0,T]$ - нам пр-во T-период. ф-й $\mathbb{R} \xrightarrow[T]{} \mathbb{R}$
С условием суммируемости $(\int |f|^p dx) < \infty$)

$f_h(x) = f(x+h) \qquad \int_0^T \ldots = \int_{0+h}^{T+h}$

$\tilde{C}[0,T]$ - пл. в $\tilde{L}^P[0,T]$

Т $\quad$ О непрерывности сдвига

$f_h(x) = f(x+h)$,

1) f - равном. непрерывна на $\mathbb{R}^m \Rightarrow \|f - f_h\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

2) $1 \le p < +\infty \quad f \in L^P(\mathbb{R}^m) \to \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

3) $f \in \tilde{C}([0,T]) \to \|f_h - f\|_\infty \to 0$

4) $1 \le p < +\infty \quad f \in \tilde{L}^P([0,T]) \quad \|f_h - f\|_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Δ

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \quad |x-y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ \forall h : |h| < \delta_1 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f(x) - f(x+h)| \le \varepsilon$

$h = x - y$

3. Очевидно, потому что равн. непрерывность на компакт. влечет равн. непр.

2, 4. дост. $f \leftarrow$ финитн. $\qquad g$ - финитн.

$\|f - g\| < \varepsilon/3$

$$\|f_h - f\|_p \le \|f_h - g_h\|_p + \|g_h - g\|_p + \|g - f\|_p$$

$$\int_{[0,T]} \le \frac{2\varepsilon}{3} + \|g_h - g\|_p \le \|g_h - g\|_\infty (\lambda B(0,2R))^{1/p} \to 0$$

$$(4) \quad \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \sup_x |g(x+h) - g| \left(\int_0^T 1\right)^{1/p} =$$

$$= \|g_h - g\|_\infty T^{1/p} \to 0$$

27.04.2015 (Recovery)

Конкр-то №2 з-во леммы Урысона

α, β - дв. рацион. $\quad \alpha < \beta \quad , \alpha, \beta \in [0,1]$
$G_\alpha \subset \bar{G}_\alpha \subset G_\beta$

$f: X \setminus F_1 \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \inf(\alpha$ - дв. рац. $x \in G_\alpha)$
$(x \in F_1 \Rightarrow f(x) = 1)$

1) $f^{-1}([-\infty; t)) = \bigcup_{\alpha < t} G_\alpha$

$\supset$:

$x \in G_\alpha \Rightarrow f(x) \le \alpha < t \Rightarrow x \in f^{-1}([-\infty, t))$

$\subset$:

$x \in f^{-1}([-\infty; t))$ $f(x) < t$

$f(x) < \alpha < t \Rightarrow x \in G_\alpha \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha < t} G_\alpha$,

значит $f^{-1}([-\infty; t))$ - открыто как объединение открытых.

2) $f^{-1}([-\infty, t]) = \bigcap_{\alpha > t} G_\alpha = \bigcap_{\alpha > t} \overline{G_\alpha}$

$\subset$ $x \in \cap \, 2 \Rightarrow x \in \cap \, 2$ (очев)

$\supset$ $x \in$ всем G_α $\alpha > t \Rightarrow f(x) \le t$

$\subset$ очевидно

$\supset$: $G_\alpha \subset \overline{G_\alpha} \subset G_\beta$ $t \quad \beta \quad \alpha$ $\overline{G_\beta} \subset G_\alpha$

$\bigcap G_\alpha \supset \bigcap_{\beta > t} \overline{G_\beta}$

$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((-\infty, b)) \setminus f^{-1}((-\infty, a])$ - откр

62 Гильбертовы пространства

Лин. пр-во над $\mathbb{R}$, над $\mathbb{C}$

$\langle , \rangle$ $L \cdot L \longrightarrow \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ $\quad \|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$

$|\langle \alpha, b \rangle| \le \|a\| \cdot \|b\|$

С $\mathcal{H}$ - линейное пространство со скалярным пр-ем, полное, тогда $\mathcal{H}$ - Гильбертово пр-во.

П $L^2(X, \mu)$ $\quad \|f\| = \left(\int\limits_X |f|^2 \, d\mu\right)^{1/2}$

$\langle f, g \rangle = \int\limits_X \underbrace{f \bar{g}}_{\text{сумм}} \, d\mu \le \|f\|_2 \, \|g\|_2$

О $\mathcal{H}$ - Гильбертово пр-во, тогда

1) $x, y \in \mathcal{H}$ $\quad x \perp y$, если $\langle x, y \rangle = 0$

2) $A \subset \mathcal{H}$, $x \perp A$, если $\forall a \in A$ $\langle x, a \rangle = 0$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ - ортогональный ряд, если $\forall k \, \forall j \quad k \ne j \quad x_k \perp x_j$

Т О св-вах сходимости в Гильб. пр-ве

1) $x_n \to x$, $y_n \to y$, тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

2) $\sum^{\infty} x_n$ - ряд, сходящийся в Г пр., тогда $\forall_y$ $\langle y, \sum x_n\rangle = \sum \langle y, x_n\rangle$

3) $\sum x_n$ - ортогональный ряд, тогда

$$\sum x_n - cx \Leftrightarrow \sum \|x_n\|^2 - cx$$

Например, $e_k = (0, \ldots \underset{k}{1} \ldots 0) \in l^2$ $\|e_k\| = 1$

$\sum \frac{1}{k} e_k$ - сх-ся ряд, т.к. $\|\frac{1}{k} e_k\| = \frac{1}{k^2}$

Δ

1) $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \overset{\text{н-во }\Delta}{\leq} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| +$
$+ |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq$ КБШ
$\leq \underset{\text{огр}}{\|x_n\|} \underset{\to 0}{\|y_n - y\|} + \underset{\to 0}{\|x_n - x\|} \cdot \underset{\text{огр}}{\|y\|}$

2) $S_N = \sum^{N} x_n$ - частичная сумма

„Ряд сходится" $\Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{H}$ $S_n \to S$

$\langle y, S_n\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle y, x_n\rangle$ - учит. угл конечного числа слагаемых

$N \to +\infty$

$\langle y, S_N\rangle \to \langle y, S\rangle$ (по 1 пункту), тогда
$\sum^{N} \langle y, x_n\rangle \to \sum^{\infty} \langle y, x_n\rangle$

3) $S_N = x_1 + \ldots + x_n$, $\|S_n\|^2 = \langle S_n, S_n\rangle = \langle x_1 + \ldots; x_1 + \ldots\rangle =$
$= \sum_{i,j=1}^{N} \langle x_i, x_j\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ортогон.} \\ \text{ряд}}}{=} \sum^{N} \langle x_i, x_i\rangle = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \|x_i\|^2}_{C_N}$ - т. Пифагора

$\|S_N - S_M\|^2 = C_N - C_M$ $(M < N)$

S_N и C_N - если фундаментальные, то одновременно
$(\|S_n - S_M\| \xrightarrow[M,N \to \infty]{} 0)$

$\Rightarrow$) $\|S_N\|^2 = C_n \Rightarrow \exists \lim C_N$, т.е.
$\sum \|x_n\|^2 - cx.$ $(\|S_N\|^2 \to \|S\|^2$ по пункту 1)

$\Leftarrow$) $C_N \to C \Rightarrow C_n$ - фундамент. $\to S_N$ фундамент.
$\Rightarrow S_N - cx.$

∇

О H – г. п., тогда

1) Мн-во $\{e_i \dots\}$ – ортогон. система векторов, (ОС) если $\forall i, j$ $i \neq j$ $e_i \perp e_j$

2) Если и помимо же $\|e_n\| = 1$, то ОНС – ортонорм. система
$\{e_n\}$ – ОС, $\{\frac{e_n}{\|e_n\|}\}$ – ОНС

П 1) ℓ^2 $e_n = (0, 0 \dots 1, \dots)$ – ОНС
3) $L^2[0, 2\pi]$ над $\mathbb{C}$ $\frac{\{e^{ikx}\}}{\sqrt{2\pi}}$ – ОНС

4.05.2015

Т Всякие забавные св-ва ОС
H – г. п., $\{e_n\}$ – ОС, $x = \sum^{\infty} c_n e_n$,
Тогда 1) $\{e_n\}$ – ЛНЗ ($\sum^{\text{кон}} c_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i$ $c_i = 0$)

2) $c_n = \frac{\langle x, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$

3) $c_n e_n$ – это проекция X на 1мерное пр-во порожденное e_n
$x = c_n e_n + z \Rightarrow z \perp e_k$

Δ кон (не обяз.) – в том плане, что лиз опр. $\overset{\text{кон}}{\{e_n\}}$

1) $\sum c_i e_i = 0$ i_0, $\cdot e_{i_0} \Rightarrow \sum c_i (e_i e_{i_0}) = 0$
выберем
$$\parallel$$
$c_{i_0} \|e_{i_0}\|^2 \Rightarrow c_{i_0} = 0$

2) $\sum c_n e_n = x$, $\sum c_n (e_n e_{n_0}) = \langle x, e_{n_0} \rangle$
$$\parallel$$
$c_{k_0} \|e_{k_0}\|^2 = \langle x, e_{k_0} \rangle$

3) $z \perp e_n$?

$\langle z, e_n \rangle = (x - c_n e_n, e_n) = c_n \|e_n\|^2 - c_n \langle e_n, e_n \rangle = 0$.

∇

О $c_k = \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2}$ — коэфф. Фурье эл-та x по ОС $\{e_k\}$

$\sum c_k e_k$ — ряд Фурье

З $\sum \frac{\langle x, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} e_k = \sum \frac{\langle x, 10 e_k\rangle}{\|10 e_k\|^2} (10 e_k)$

Т о св-вах частичных сумм ряда Фурье

$\{e_k\}$ — ОС в H, $x \in H$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$ — ч.с.р.Ф

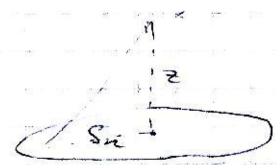
$L_n = Lin(e_1 \dots e_n)$

Тогда 1) S_n — проекция x на L_n

2) S_n — эл-т наилучшего прибл. (в L_n) для x

$\|x - S_n\| = \inf_{y \in L_n} \|x - y\|$

3) $\|S_n\| \le \|x\|$



Δ

1) $x = S_n + z$, $z \perp L_n$

$\langle z, e_k\rangle = \langle x - S_n, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - c_k \|e_k\| = 0$ по опр c_k

2) $\|x - y\|^2 = \|(S_n - y) + z\|^2 = \|S_n - y\|^2 + \|z\|^2 \ge \|z\|^2 =$

$= \|x - S_n\|^2$

3) $\|x\|^2 = \|S_n + z\|^2 = \|S_n\|^2 + \|z\|^2 \ge \|S_n\|^2$

∇

С Н-во Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$$

$\left(\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le x^2 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k \right)$

Т Теорема Рисса и Фишера

$\{e_k\}$ — ОС в H $x \in H$

(1) Ряд Фурье эл. x сх-ся в H

② $x = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) e_k + z$, тогда $\forall k\ z \perp e_k$
(если он 0, то все он)

③ $x = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) e_k$ т. и т.т. $\sum^{+\infty} |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$

Δ

1) По Т, н.З $\sum x_k$ - сх $\Longleftrightarrow \sum \|x_k\|^2$ - сх

$\sum |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2$ - Бессель

$\sum^{\infty} C_k(x) \cdot e_k$ сх, если $\sum |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2$ сх,

2) $\langle z, e_k \rangle = \langle x - \sum, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum C_j(x) \langle e_j, e_k \rangle =$

$= \langle x, e_k \rangle - C_k(x) \|e_k\|^2 = 0$

3) $\Rightarrow$ $x = \sum^{\infty} C_k(x) e_k \Rightarrow x = \lim \sum^{n}$

$\|x\|^2 = \lim \sum |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2$.

$\Leftarrow$ $x = \sum C_k(x) e_k + z$, $z \perp e_k$

$x = \lim \sum^{n} + z$

$\|x\|^2 = \lim \sum^{n} |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 + \|z\|^2$

$\|x\|^2 = \cancel{\lim} \sum^{\infty} |C_k(x)|^2 \|C_k\|^2 + \|z\|^2$

значит $z=0$ по усл. $\Leftarrow$

$\|z\| = 0 \Rightarrow z = 0$.

∇

$\mathcal{L} = Close(Lin(e_1 \ldots))$

Сначала замкнули, добавили все пред. точки

Тогда $z \perp \mathcal{L}$

3 $\{e_k\}$ - ОНС, $C_k \in \ell^2$ $\sum C_k e_k$ - сх-ся в $\mathcal{H}$

С все бесконечномерные Гильбертовы пр-ва изоморфны
~~сепарабельно~~, полностью

$\hookrightarrow$ имеет счетное плотное подмн-во

0 $\{e_k\}$ - ОС - базис, если $\forall x \in \mathcal{H}$ $x = \sum^{\infty} C_k(x) e_k$

0 $\{e_k\}$ - ОС - полная в $\mathcal{H}$, если $(\forall k\ z \perp e_k) \to z = 0$

$\sum |C_k(x)|^2 \|e_k\|^2 = \|x\|^2$ наз. нер-во Парсеваля
уравнение замкнутости

0 ОС $\{e_k\}$ - т.ч. $\forall x$ вып $\uparrow$, тогда $\{e_k\}$ - замкнутая

Т | О характеристике базиса

$\{e_n\}$ - ОС в H, тогда эквивалентно:

① $\{e_n\}$ - базис

② Выполняется обобщенное ур-е замкнутости

$\langle x, y\rangle = \sum c_n(x)\overline{c_n(y)}\|e_n\|^2$

③ Ур-е замкнутости выполнено. ($\{e_n\}$ замкнута)

④ $\{e_n\}$ полна

⑤ ЛО $\{e_n\}$ плотно в H

$1 \underset{1}{\Rightarrow} 2 \underset{2}{\Rightarrow} 3 \underset{3}{\Rightarrow} 4 \underset{4}{\Rightarrow} 1 \qquad 4 \underset{5,6}{\Leftrightarrow} 5$

Δ

1. $x = \sum c_n(x) e_n \quad y = \sum c_n(y) e_n$

$\langle x,y\rangle = \langle \sum c_n(x) e_n, \sum c_j(y) e_j\rangle =$
$= \sum c_n(x)\langle e_n, \sum c_j(y) e_j\rangle =$
$= \sum c_n(x)\overline{c_n(y)}\langle e_n, e_n\rangle$

2. возьмем $x = y$

3. ? $\{e_n\}$ - не полна, значит $\exists z \mid z \perp e_n$

$\|z_n\|^2 = \sum |c_n(x)|^2 \|e_n\|^2 \Rightarrow$

$z = \sum c_n(z) e_n$

Т. Р-ФВ что противоречит ортогональности
(Рисса-Фишера)

4. $\forall \quad x \overset{?}{=} \sum c_n(x) e_n$, но Т. Р-Ф п. 2

$x = \sum c_n(x) e_n + z, \ z \perp e_n$
не бывает по полноте.

11.05.2015

5. Пусть $\exists z \notin Cl(Lin\{e_n\})$

$z = \sum c_n(z) e_n + w \qquad$ Т. Р-Ф $\forall n \ w \perp e_n \Rightarrow w = 0$ (полнота)

т.е. $z = \lim \sum_{k=1}^{n} c_k(z) e_k \Rightarrow z \in Cl(Lin\{e_n\})$

6. $\forall n \ y \perp e_n \Rightarrow$ /* $y = \sum c_n(y) e_n$ (не нужно) */
$\forall z \ H \quad y \perp z \quad z = \lim_{n\to\infty} z_n \quad z_n \in Lin\{e_n\}$
$(z_n, y) = 0 \underset{\text{непр. }(\cdot,\cdot)}{\Rightarrow} (z, y) = 0$, тогда y ортогонален сам себе ⇒←

∇

(53) Тригонометр. ряды Фурье

0 $T_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригон. многочлен степени n

$\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right)$

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – тригоном. ряд

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} := \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n}$

Λ $T(x)$ – триг. ряд, $S_n(x)$ – ч. суммы. Пусть $\exists f \in L^1[-\pi, \pi]$ $S_n \to f$ в пр-ве L^1,

Тогда $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$ $k = 0, 1, \ldots$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx$ $k = 1, \ldots$

$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

Δ

$\underline{\underline{a_k}}$ $\langle S_n(x), \cos kx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx +$

Наблюдение ⟶ $+ \sum a_j \cos jx \cos x + b_j \sin jx \cos x =$

$= a_k \pi$

$\left| \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \cos kx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(S_n(x) - f(x)) \cos kx| dx \leq$

$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)| dx$ т. е. $a_k \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$.

$\|S_n - f\|_{L_1} \to 0$

∇

0 $f \in L^1[-\pi, \pi]$ тогда числа a_k, b_k наз. коэф. Фурье, а ряд $\frac{a_0(f)}{2} + \sum a_k(f) \cos kx + b_k \sin kx$,

$\sum c_k(f) e^{ikx}$ – ряд Фурье

3 1) $L^2[-\pi, \pi]$ f – чет., => $b_k = 0$

$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos k$

f – нечет., => $a_k = 0$ $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx$

2) $f \in L^1[0,\pi]$, $f \leftrightarrow \frac{a_0(f)}{2} + \sum a_k(f)\cos kx$

$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos kx$

$f \leftrightarrow \sum b_k(f)\sin kx \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin kx\,dx$

3) $A_k(f,x) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & k=0 \\ a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx & k=1,\dots \end{cases}$

Тогда $A_k(f,x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,dt & k=0 \\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos kt\,dt & k=1,2,\dots \end{cases}$

$A_k(f,x) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kx\,dt\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)\sin kx =$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx) =$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(t-x))\,dt = \qquad t - x = \tau, \quad t = x+\tau$

$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\cos k\tau\,d\tau.$

С $f \in L^1[-\pi,\pi]$, тогда

$|a_k(f)|,\ |b_k(f)|,\ |2a_0(f)| \le \frac{1}{\pi}\|f\|_1$

$|A_k(f,x)| \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 & k=0 \\ \frac{1}{\pi}\|f\|_1 & k \ge 1 \end{cases}$

f непр

Колмогоров

У $\exists f \in L^1$, для которой р.ф. всюду расх

У Карлесон: $f \in L^2$ р.ф. п.в. сходится

У Хант: $f \in L^p$ — // — $1<p$

Т Римана — Лебега

$E \subset \mathbb{R}$ — измеримо, $f \in L^1(E)$

Тогда $\int\limits_E f(x)e^{ikx}\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\int\limits_E f(x)\cos kx \to 0$

$\int\limits_E f(x)\sin kx \to 0$

Δ Считаем, что $f \equiv 0$ вне E

$$\int_E f(x)e^{ikx} = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx} \underset{y=x-\frac{\pi}{k}}{=} -\int_{\mathbb{R}} f(y+\tfrac{\pi}{k})e^{iky} =$$

$e^{i\pi}$ экспонента не зависит меняет знак

$$\underset{y=x}{=} -\int_{\mathbb{R}} f(x+\tfrac{\pi}{k})e^{ikx}$$

$$\left|\int_E f(x)e^{ikx}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} (f(x)e^{ikx} - f(x+\tfrac{\pi}{k}))e^{ikx}\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{k})|\,dx = \|f - f_{\frac{\pi}{k}}\|_1 \to 0$$

∇

С $a_k(f)$ $b_k(f)$ $c_k(f) \to 0$ если $f \in L^1$

С $f \in C^1[-\pi,\pi]$, период.

$a_k(f') = kb_k(f)$ $\qquad a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx =$

$b_k(f') = -ka_k(f)$

$c_k(f') = ikc_k(f)$

$= \frac{1}{\pi} f \ldots$

Значит $a_k(f) = o(\frac{1}{k}) = a_k(f')\cdot\frac{1}{k}$ $\quad b_k = \ldots$

С $f \in C^r[-\pi,\pi]$, период. $\quad a_k(f) = o(\frac{1}{k^r})$

$b_k(f) =$

c_k

О ① Ф-я $D_n(t) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt)$ - ядро Дирихле

$h(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy$

② $\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$ - ядро Фейера

Л ① $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+1/2)t}{2\pi(\sin t/2)}$ $\qquad$ ③ $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) = 1$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$

② $\Phi_n(t) = \dfrac{1}{2\pi(n+1)}\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{\sin^2\frac{t}{2}}$ $\qquad \Phi_n \ge 0$ Φ_n, D_n - чет

④ $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\quad S_n(f) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx =$

$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt$

Δ

3. $\int \sum \cos t \frac{1}{2\pi} = 1$, Φ_n - сред. арифм. $\ldots = 1$

1. $\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) \sin\frac{t}{2} =$, очевидно через 2

$$\left(\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}\right)$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t \overset{?}{=} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin t/2}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(n+1)t) = \sin^2 \frac{n+1}{2} t$$

4. $$S_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum f(x+t) \cos kt \, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$$

∇

18.05.2015

принцип локализации Римана

$f, g \in L^1[-\pi, \pi]$ $x_0 \in [-\pi, \pi]$ $\exists \delta > 0$

$f(x) = g(x)$ при $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ ← всюду на период.

Тогда р. Ф. ведут себя одинаково в (.) x_0 то есть

$$S_n(f, x_0) - S_n(g, x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Δ

$h = f - g$, $h \equiv 0$ на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ Тогда $S_n(h, x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Это эквивалентно тому, что нужно доказать.

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \cdot \sin nt + \cos nt$$

$$S_n(h, x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0+t)\, D_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\frac{1}{2} h(x_0+t) \operatorname{ctg}\frac{t}{2}}^{h_1(t)} \sin nt + \underbrace{\frac{1}{2} h(x_0+t)}_{h_2(t)} \cos nt =$$

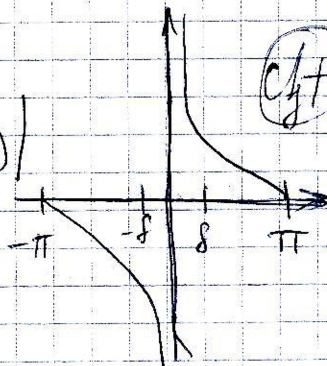
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$= b_n(h_1) + a_n(h_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ ← теорема Римана-Лебега

Если h_1 и h_2 - ф-ции из $L^1[-\pi, \pi]$

$h_2 \in L^1[-\pi,\pi]$ очевидно или сразу h_2 (линейная замена)

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h_1(t)| = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\int_{(-\delta,\delta)} \ldots} + \int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)} \ldots \le$$



$$\le \frac{ctg\,\delta/2}{2}\int_{[-\pi,\pi]\setminus(-\delta,\delta)}|h(x_0+t)| \le \frac{ctg\frac{\delta}{2}}{2}\int_{[-\pi,\pi]}|h(x_0+t)|$$

Значит $h_1\in L^1[-\pi,\pi]$

∇

Сл $f\in L^1[0,\pi]$ $\quad f\sim\sum a_k\cos kx \sim \sum b_k \sin kx$

(Разложим чётное продолжение...)
нечётное

Эти ф-ии равны на $(0,\pi)$.

З Без δ-ва $\quad [a,b]\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$$S_n(h,x)\underset{x\in[a,b]}{\overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows}} 0$$

Т Признак Дини

$f\in L^1[-\pi,\pi]$ $\quad x_0\in[-\pi,\pi]$ $\quad S\in\mathbb{R}$

Пусть $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S|}{t}dt<+\infty$,

Тогда $S_n(f,x_0)\to S$ $\qquad \frac{a_0}{2}+\sum a_k\cos kx+b_k\sin kx=S$

Δ

$$S_n(f,x_0)-S=\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+t)D_n(t)\,dt-\int_{-\pi}^{\pi}S\, D_n(t)\,dt=$$

$$/\int_0^\pi f(x_0+t)D_n(t)\,dt=\int_0^\pi f(x_0-t)D_n(t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi(\underbrace{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S}_{\varphi(t)})D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\varphi(t)}{2}\left(ctg\frac{t}{2}\sin nt+\cos nt\right)dt=b_n(h_1)+a_n(h_2)\to 0$$

где $h_1=\frac{\varphi(t)}{2}ctg\frac{t}{2}$ $\qquad$ n-ые Фурье чётного/нечётного прод-я

$h_2=\frac{\varphi(t)}{2}$ - лежит в $L_1[-\pi,\pi]$ $\qquad \int_{-\pi}^{\pi}|h_2|\le\frac{1}{2}(2\|f\|_1+2S\cdot 2\pi)$

Начнем h_1 - в L^1 потому что $ctg\frac{t}{2}$ и $\frac{\varphi}{t}$:

$$\int_0^\pi |\varphi(t) ctg\frac{t}{2}| \le \int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}\underbrace{\left(t\, ctg\frac{t}{2}\right)}_{\text{непр в нуле}} dt \le 2015\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}dt < +\infty$$

по опр

$$2\frac{t}{2}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \Big| \Rightarrow \text{огр на } [0,\pi] \le 2015.$$

∇

3 ① Вместо условие $\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}dt < +\infty$

достаточно условие $\exists \delta \quad \int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}dt < +\infty$

② f непр $\not\Rightarrow$ вып. условие Дини. Пример:

$$f(x) = \frac{1}{\ln|\frac{x}{10}|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad x_0 = 0, \; S = 0$$

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S|}{t}dt = \int_0^\pi \frac{1}{t\ln\frac{t}{10}}dt$$

расх.

С Пусть $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\exists f(x_0+0), f(x_0-0)$ - кон.

$$\exists\ \alpha_\pm = \lim_{x\to x_0\pm 0} \frac{f(x) - f(x_0\pm 0)}{x - x_0} \text{ - кон.}$$

Тогда $S_n(f, x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0))$

С [т. сл. f - непр x_0 $\exists f'_\pm(x_0)$ $\quad S_n(f,x_0) \to f(x_0)$]

П $f(x) = x \quad [-\pi,\pi]$

$a_k = 0$, в силу нечетности

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)x\Big|_{x=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx =$$

$$= -\frac{2}{k}\cos\pi k = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k}$$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k}\sin kx \qquad x \in (-\pi,\pi)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$0 = \sum \frac{(-1)^{k+1} 2}{k}\sin\pi k$$

б) Свертки и аппроксимативные единицы

О $f, K \in L^1[-\pi,\pi]$ $(f*K)(x)$ — свертка:

$$(f*K)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt$$

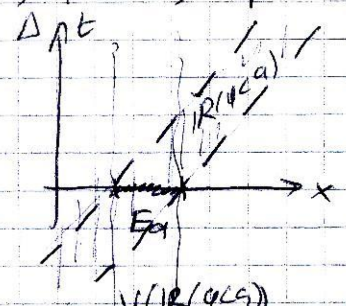
Λ Св-ва:

1) $f*K = K*f$

2) Корректность определения $g(x,t) = f(x-t)K(t)$

а) $\varphi(x,t) = f(x-t)$ $\quad \mathbb{R}(\varphi<a)$ $\quad E_a = \{x : f(x)<a\}$

△



$V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$x, y \longmapsto x-y, y$ — лин. отобр, выпрямляющее $\mathbb{R}(\varphi<a)$

$V(\mathbb{R}(\varphi<a)) = E_a \times \mathbb{R}$ — изм.

$\mathbb{R}(\varphi<a)$ измеримо.

$g(x,t)$ изм. как произведение изм.

б) $g(x,t) \in L^1([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$ по т. Тонелли:

$$\iint_{[-\pi,\pi]^2} |g| = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,|K(t)|\,dx\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)| \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx\right)}_{\text{норма } \|f\|_1 \text{ при всех } t} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |K(t)|\,\|f\|_1\,dt = \|f\|_1\|K\|_1$$

По т. Фубини $x \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)$ — сумм.,

▷ Таким образом $f*K \in L_1[-\pi,\pi]$

3) $f, K \in L^1$; $\quad C_n(f*K) = C_n(f)\cdot C_n(K)\cdot 2\pi$

△ $$2\pi C_n(f*K) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt\right)e^{-inx}\,dx =$$

по Фубини

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\cdot K(t)e^{-int}\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} K(t)e^{-int}\,dt \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-in(x-t)}\,dx\right)}_{2\pi C_n(f)} = 4\pi^2 C_n(f)C_n(K)$$

▷

Т | $f \in L^p$ $K \in L^q[-\pi,\pi]$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ $1\le p\le+\infty$

Тогда $f*K$ — непр $[-\pi,\pi]$

$$\|f*K\|_\infty \cancel{= \sup_{(\text{непр})}(f*K)} \le \|f\|_p\|K\|_q.$$

Δ

Н-во Гёльдера.

$$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| \le \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+h-t)-f(x-t))K(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \left(\int|f(x+h-t)-f(x-t)|^p dt\right)^{1/p}\|K\|_q =$$

н-во Гёльдера
$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(s+h)-f(s)|^p ds\right)^{1/p}\|K\|_q = \|f_h-f\|_p\|K\|_q \xrightarrow[h\to0]{} 0$$

Аналогично для $q=+\infty$, $p=1$

∇

З | Не сущ. единицы по умножению для $*$

$\forall f$ $f*e=f$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e(x)=1;\quad \int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)e(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x-t)e(t)\,dt \approx f(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e(t)\,dt \approx f(x)$$

$E_\delta = [-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]$

О | $D\subset\mathbb{R}$ $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ — пр. точка D

$\forall h\in D$ опр. ф-я $K_h(x)$, удовл. аксиомам:

АЕ1) $\forall h>0$ $K_h\in L^1[-\pi,\pi]$ $\int_{-\pi}^{\pi}K_h(t)=1$

АЕ2) L-нормы ф-ций K_h огр. в сов-ти
$\exists M$ $\forall h\in D$ $\int_{-\pi}^{\pi}|K_h|\,dt<M$

АЕ3) $\forall\delta>0$ $\int_{E_\delta}|K_h| \xrightarrow[h\to x_0]{} 0$ $(E_\delta=[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta])$

Тогда K_h — аппрокс. ед.

З | ① Если $K_h\ge0$ Тогда АЕ2 следует из АЕ1 при $M=1$

② Пусть $K_h \in L^\infty[-\pi,\pi]$
$\operatorname{Esssup}_{E_\delta} |K_h| \xrightarrow[h\to x_0]{} 0$
Это $\underbrace{AE3'}_{!!!}$

$\Rightarrow$ {AE1, AE2, AE3'} – усиленная аппроксимат. единица.

③ K_h – A.E. (или усил.) $\frac{|K_h|}{\|K_h\|_1}$ – тоже AE (в том числе усил.)

T K_h – a.e. Тогда $h \to h_0$

① $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$, тогда $f * K_h \underset{h\to h_0}{\rightrightarrows} f$

② $f \in L^p[-\pi,\pi]$, тогда $\|f * K_h - f\|_p \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$

③ $f \in L^1$, f-непр в x_0, K_h – усил. a.e. (без этого f имеет знач. в точке – L^1)
$f * K_h$ – непр. в (·) x_0
$(f * K_h)(x_0) \xrightarrow[h\to h_0]{} f(x_0)$

25.05.15

△ (Д-во теоремы вполне)

$$f * K_h(x) - f(x) \underset{AE1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\,dt$$

① f-р. непр. $\forall \varepsilon>0 \,\exists \delta>0 \,\forall x_1,x_2 \; |x_1-x_2|<\delta \; |f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

$$|f * K_h(x_0) - f(x_0)| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0-t) - f(x_0)| \cdot |K_h(t)|\,dt = \text{из } AE2$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{E_\delta} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ – наша равном. сх-ть}$$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \le \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2M} |K_h(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{2M} \int_{-\pi}^{\pi} |K_h(t)|\,dt \underset{AE2}{\le} \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_{E_\delta} \le 2 \max_{[-\pi,\pi]} |f| \int |K_h|\,dt \xrightarrow[AE3]{} 0$$

③ δ из опр. f р. непр. д-во аналог. ①
1 слаг. $\int_{-\delta}^{\delta}$ "работает"

$$\int\limits_{E_\delta} \le \operatorname{esssup}_{E_\delta} |K_h| \cdot \int\limits_{E_\delta} |f(x_0)-t)| + |f(x_0)| dt \le$$

$$\le \operatorname{essup}_{E_\delta} |K_h| \left(2\pi |f(x_0)| + \|f\|_1\right)$$

② $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f * K_h(x) - f(x) \right| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) K_h(t)\, dt \right| dx \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot |K_h(t)|\, dx\, dt = \|K_h\|_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{|K_h(t)|}{\|K_h\|_1} dt$$

$$g(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

$$g(0-t)\ \forall E$$

$$\Big\downarrow_{h \to h_0}$$

$$\|K_h\|_1\, g(0) = 0$$

g огр $\Rightarrow g \in L^1$

g непр в 0

по Ⓑ $g * \tilde{K}_h(0) \xrightarrow[h\to h_0]{} g(0)$

1) $|g(t)| \le 2\|f\|_1$

2) g — непр в 0 по лемме о непр. сдвига

▽

О Выражение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$ наз. суммой ряда $\sum a_n$ по Чезаро

$\sum a_n = S$ в смысле метода ср. ар

Т $\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n \underset{\text{ср.ар.}}{=} S$

△ $\boxed{S = +\infty}$ — упр

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} S_k}{n+1} - S \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{S_k - S}{n+1} \right| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{|S_k - S|}{n+1} \le$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1 \quad |S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le \underbrace{\frac{\sum\limits_{k=0}^{N_1} |S_k - S|}{n+1}}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\frac{\sum\limits_{k>N_1+1}^{N} |S_k - S|}{n+1}}_{< \varepsilon/2}$$

при больших n $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\sum S_k}{n+1} - S \right| < \varepsilon$$

П $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

$S_{\text{чет}} = 1 \quad S_{\text{неч}} = 1 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_0 + \dots + S_n}{n+1} = \dfrac{1}{2}$

О Сумма Фейера — $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k(f) = \sigma_n(f)$

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, dt$$

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, \Phi_n(t)\, dt \qquad \Phi_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, \Phi_n(t)\, dt$$

T Фейера

① $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ $\quad \sigma_n(f,x) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} f(x)$

② $f \in L^p[-\pi,\pi]$ $\quad \|\sigma_n(f,x) - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

③ $f \in L^1$, f - непр x $\Rightarrow$ $\sigma_n(f,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Δ

$\sigma_n(f,x) = f * \Phi_n(x) \to \Phi_n$ - АЕ (усил.)

Тогда это теорема 2 стр. назад.

проверим:

$\Phi_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{(\sin\frac{x}{2})^2}$ - непр $[-\pi,\pi]$ $\in L^\infty, L^1$

АЕ1) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n\, dx = 1$

АЕ2) $\Phi_n \geq 0$ $\quad \|\Phi_n\|_1 = \int \Phi_n = 1$

АЕ3) $\operatorname{esssup}_{E_\delta} |\Phi_n| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

∇

С1 $f \in L^1$, f непр в x_0 $\quad S_n(f,x_0)$ - сх

Тогда $S_n(f,x_0) \to f(x_0)$

$\sigma_n(f,x_0) \to f(x_0)$. (если $\exists S = \sum a_n$, то $\sum a_n \underset{ср.}{=} S$)

С2 ① Тригонометр. система полна в L^2 $\quad \sin kx$, $\cos kx$

② $f \in L^1[-\pi,\pi]$ $\quad \forall k$ $a_k(f) = b_k(f) = 0$ / $\forall n$ $c_n(f) = 0$

Тогда $f = 0$ п.в.

Δ $2 \Rightarrow 1$ тривиал. $\langle f, \sin kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx = \pi b_k(f)$

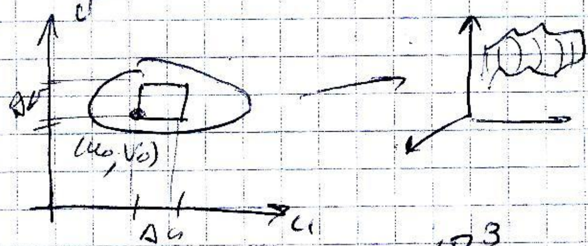
② $f \in L^1$ $\quad \underset{=0}{\sigma_k(f,x)} \to f$ в L

C $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 2\pi \sum_{k \geq 0} |c_k(f)|^2$ – равенство

Гл. Поверхностный интеграл

1) Интеграл по двумерной пов-ти в $\mathbb{R}^3$ (по мере)

$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



φ' – невырожд. матрица

$(\varphi'_u \Delta u,\ \varphi'_v \Delta v) = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \Delta u \Delta v$

О M – простая гладкая 2-мерная пов-ть в $\mathbb{R}^3$

$\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ гл. парам.

$A \subset M$ – изм. (по Лебегу), если $\varphi^{-1}(A)$ – изм. $\subset \mathfrak{M}^2$

$A \in \mathfrak{A}_M$ – σ-алгебра изм. м-в

Мера на $\mathfrak{A}_M$: $\sigma(A) = \int\limits_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du\, dv$

Л Св-ва:

1) φ – непр ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$) $\varphi^{-1}(\text{откр}) = \text{откр}$ (т.е. изм.)
откр. точки и любое откр. мн-во – изм.

$\Rightarrow$ замкнутые изм.
компактные изм.

2) Это определение не зависит от параметризации

$u(s,t)$
$v(s,t)$

$\psi(s,t) = \varphi(u(s,t), v(s,t))$

$$\psi'_s \times \psi'_t = (\underbrace{\varphi'_u u'_s}_{\text{вектор скаляр}} + \varphi'_v v'_s) \times (\varphi'_u u'_t + \varphi'_v v'_t) =$$

$$= \underbrace{(\varphi'_u \times \varphi'_u)}_{0} u'_s u'_t + \underbrace{(\varphi'_v \times \varphi'_v)}_{0} v'_s v'_t +$$

$$+ (\varphi'_u \times \varphi'_v) u'_s v'_t - (\varphi'_u \times \varphi'_v) v'_s u'_t =$$

$$= (\varphi'_u \times \varphi'_v) \cdot \begin{vmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_t \end{vmatrix}$$

$|\psi'_s \times \psi'_t| = |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, |J|$ $\sigma(A) = \iint\limits_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| \, du\, dv =$

$= \iint |\varphi'_u \times \varphi'_v| \underbrace{J J_1}_{1} = \iint\limits_{\psi^{-1}(A)} |\psi'_s \times \psi'_t| \, ds\, dt$. Интегралы равны в точности по замене пер.

3) Мера в M – взв. образ меры Лебега в $\mathbb{R}^2$
с весом $|\varphi'_u \times \varphi'_v|$

f – изм. на M $\quad \int\limits_A f\,d\sigma = \iint\limits_{\varphi^{-1}(A)} f\circ g\,|\varphi'_u \times \varphi'_v|\,du\,dv$

$f(\varphi(u,v))$ – изм. в $\mathbb{R}^2$

0 Интеграл 1 рода

$$\int\limits_A f\,d\sigma = \iint\limits_{\varphi^{-1}(A)} f\circ\varphi\,|\varphi'_u \times \varphi'_v|\,du\,dv$$

3 $|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u|\,|\varphi'_v| \sin(\varphi'_u, \varphi'_v)$

$$\cos(\varphi'_u, \varphi'_v) = \frac{\langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle}{|\varphi'_u|\,|\varphi'_v|}$$

$E = |\varphi'_u|^2 = (\varphi'_{1u})^2 + (\varphi'_{2u})^2 + (\varphi'_{3u})^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

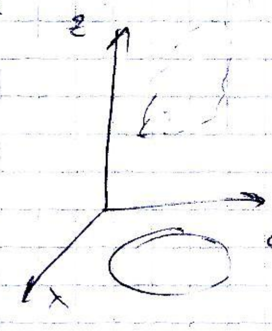
$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$

$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$

$\sqrt{EG - F^2}$

3 Частный случай

M – график ф-ции над $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longrightarrow (x, y, f(x,y))$

$$\varphi'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \quad \varphi'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{vmatrix} i & & \\ j & \varphi'_x & \varphi'_y \\ k & & \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}$$

$$\iint\limits_{\Gamma_f} h\,d\sigma = \iint\limits_{\Omega} h(x,y,z)\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}$$

0 $M \subset \mathbb{R}^3$ – кус.-гл. поверхность в $\mathbb{R}^3$, если
$M = \bigsqcup N$, где N – простая гл. пов-ть
при этом $\sigma(A) = \sum \sigma(A \cap M)$ $\quad + \bigsqcup D$ – простые дуги
$+ \bigsqcup X$ – конечное число точек

5) Поверх. инт. II рода

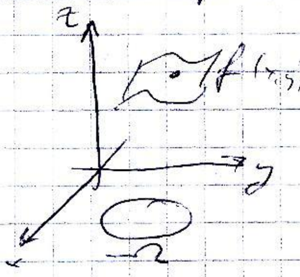
Сторона пов-ти

~~Единич~~ Непрерывное поле ед. нормалей на пов.

$M \subset \mathbb{R}^3$ $\quad n_0: M \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto n_0(x)$ $\quad |n_0| = 1$

У ленты Мёбиуса нет стороны

Ориентированная пов-ть - пов-ть, у которой есть сторона

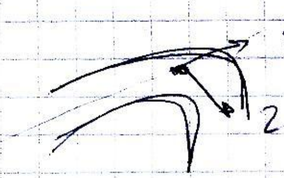


$x \mapsto x$
$y \mapsto y$
$z \mapsto f(x,y)$
$\begin{pmatrix}1\\0\\f'_x\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\f'_y\end{pmatrix}$

$$n = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

$$n_0 = \left(\mp \frac{f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \mp \frac{f'_y}{\sqrt{\dots}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{\dots}}\right)$$

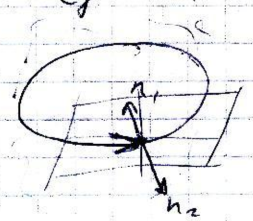
Репер - это набор из двух неколл. кас. векторов к поверхности



Поле реперов V_1, V_2 - непрерывное, $V_1(x), V_2(x)$ - репер

(1) Поле векторных реперов задает сторону векторным пр-ем: $n_0 = \frac{V_1(x) \times V_2(x)}{|V_1(x) \times V_2(x)|}$

(2) Сделаем цикл по пов-ти



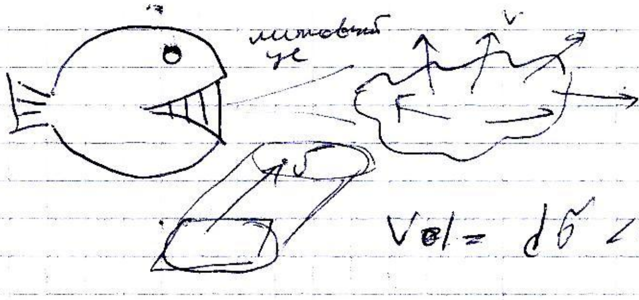
Из n_1 и n_2 выбираем то, по ходу которого расст. до мн-ва падает быстрее

$M \subset \mathbb{R}^3$ - простая гл. двум. пов-ть (Φ - ее пар., n_0 - ее сторона)

$F: M \to \mathbb{R}^3$ - в. поле

$\int_M \langle F, n_0 \rangle d\sigma$ - пов. интеграл 2 рода

Смена стороны - смена знака



$Vol = d\sigma \langle v, n_0 \rangle$, а интеграл по всей как раз опред.

$F = (P, Q, R) = (P(x,y,z), Q(\cdot), R(\cdot))$

$Int = \iint_M P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$, M — график — по верхней стороне графика

$$\iint_M R\,dx\,dy = \iint \langle (0,0,M), n_0 \rangle\, d\sigma =$$

$$= \iint R \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}}_{\text{поле}} \underbrace{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dx\,dy}_{d\sigma} =$$

$$= \iint R(x,y,f(x,y))\,dx\,dy$$

С Забавно если ∂M — граница огр. фигуры M, кус.-гл. пов.

$$\lambda M = \frac{1}{3} \iint_{\partial M} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

Л нашёл-то лемма о слоях 3,5 часа, выручало (Лемма Урысона из [?])

Т Грина

$\mathbb{R}^2$ — . $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное, с C^2-гладкой границей.

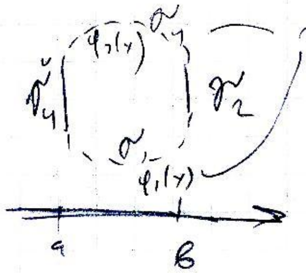
(P, Q) — гладкое векторное поле

Пусть ∂D ориентирована согласованно с ориентацией плоскости.

Тогда $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Δ

Рассмотрим случай: D — правильный



граница

- по обеим осям

$(P,0)$, аналогично для $(0,Q)$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx = -\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = +\int_a^b P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\,dx$$

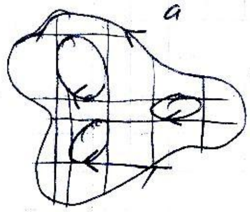
$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\sigma_1}+\int_{\sigma_2}+\int_{\sigma_3}+\int_{\sigma_4} = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt + 0$$

$x=t$, $y=\varphi_1(t)$; $x'_t=1$, $y'_t=\varphi_1'(t)$

$$+\int_b^a P(t,\varphi_2(t))\,dt + 0 =$$

$$= \int_a^b \left[P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\right]dt$$

З



теорема работает на угловых обл.
разрежем на куски

и применим теорему покусочно

Т Стокса

$D \subset \mathbb{R}^3$ — простая гладкая 2-м. пов-ть в $\mathbb{R}^3$

∂D — C^2-гладкая кривая

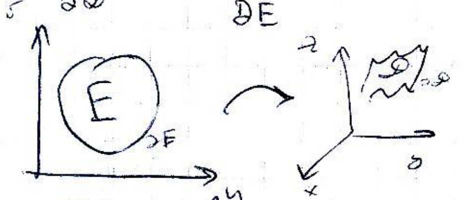
n_0 — сторона пов-ти, ориентация ∂D согласована.

(P,Q,R) — гладкое в. поле на D.

Тогда $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_D (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

Δ $(P,0,0)$: $\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_D P'_z\,dz\,dx - P'_y\,dx\,dy$

$$\int_{\partial D} P\,dx = \int_{\partial E} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\cdot(x'_u\,du + x'_v\,dv)$$



(u,v) — с выбором стороны пов-ти (порядок u,v)

$$\text{ПЧ} = \int_a^b P\,(x'_u(u(t),v(t))\,u'_t + x'_v v'_t)\,dt$$

$$\text{ЛЧ} = \int_a^b P(x'_u u'_t + x'_v v'_t)\,dt = \int_{\partial E} P x'_u\,du + P x'_v\,dv =$$

$$= \iint_E (P x'_v)'_u - (P x'_u)'_v \, du dv =$$

$$= \iint_E (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) x'_v - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v) x'_u +$$

$$+ P x''_{uv} - P x''_{uv} \, du dv = \iint P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u) -$$

$$- P'_y (y'_v x'_u - y'_u x'_v) \, du dv =$$

$$= \iint_{\Omega} P'_z \, dz dx - P'_y \, dx dy \quad // \int \langle (0, P'_z, P'_z), n \rangle d\sigma$$

$$\begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \frac{(n_1, n_2, n_3)}{\|\vec{n}\|} \|\vec{n}\| \, du dv$$

4.05.2016

0 (P, Q, R) - ги. вект. поле, в обл $E \subset \mathbb{R}^3$

$$\overset{\parallel}{V} \qquad \operatorname{rot} V = (R'_y - Q'_z, \, P'_z - R'_x, \, Q'_x - P'_y)$$

3 $\operatorname{rot} V$ не зависит от координат в $\mathbb{R}^3$

Ф-ла Стокса: A - в. поле, $\int_{\partial\Omega} A_e \, dl = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot} A)_n \, d\sigma$.

$$\left(l = (l_1(t), l_2(t), l_3(t)), \quad A_l = \frac{A_1 l'_1 + A_2 l'_2 + A_3 l'_3}{\|l'\|} \right)$$

$$dl = \|l'\| dt,$$

тогда $\int_{\partial\Omega} A_l \, dl = \int_{\partial\Omega} A_1 l'_1 + A_2 l'_2 + A_3 l'_3$,

в правой части $\quad (\operatorname{rot} = (B_1, B_2, B_3))$

$$\iint_{\Omega} \frac{B_1 n_1 + B_2 n_2 + B_3 n_3}{\|n\|} \|n\| \, du dv = \iint B_1 \, dy dz + B_2 \, dx dz + B_3 \, dx dy$$

Инвариантность относительно координат

$E \subset \mathbb{R}^3 \qquad x_0 \in E \qquad A : E \to \mathbb{R}^3$ ги. вект поле

Ω - круг $B(x_0, r)$ лежащий в пл $\perp n$

$$(\operatorname{rot} A(x_0))_n = \lim_{r \to 0} \frac{B(x_0, r)}{\pi r^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\int_{\partial B} (A_l) \, dl}{\pi r^2}$$

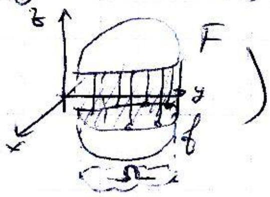
Поскольку rot считается физическим способом, то он не зависит от координат

3 $\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Omega} (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz) dx + \ldots =$

$$= \iint \text{I сл} + (P'_z - R'_x) \, dz dx + \text{III сл}.$$

T Формула Гаусса-Остроградского, частный случай

$\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ = разность двух подграфиков $f,F:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$/\forall x,y\in\Omega \;\; F(x,y)>f(x,y)/$

(пицца )

$R:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ - гладкая функция, Тогда

$$\underbrace{\iint_{\partial\mathcal{D}} R(x,y,z)\,dx\,dy}_{\substack{\text{интеграл 2 рода, где у } \partial\mathcal{D} \text{ ориент. полем внеш. нормалей} \\ 0\,dy\,dz+0\,dx\,dz+R\,dx\,dy}} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$\partial\mathcal{D} = \underset{\text{график } F}{\partial\mathcal{D}_1} + \underset{\text{граф. } f}{\partial\mathcal{D}_2} + \underset{\text{цилиндр. часть}}{\partial\mathcal{D}_3}$$

Δ

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega} dx\,dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_{\Omega} \big(R(x,y,F(x,y)) - R(x,y,f(x,y))\big)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\partial\mathcal{D}_1} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{\partial\mathcal{D}_2} R(x,y,z)\,dx\,dy +$$

графики ориентированы полем верхн. норм.

$$+ \underbrace{\iint_{\partial\mathcal{D}_3} R\,dx\,dy}_{\text{это } 0, \text{ верт. стенки.}}$$

∇

C полная формула Гаусса-Остроградского

$\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^3$, $\partial\mathcal{D}$ - ориентирована полем внеш. нормалей.

(P,Q,R) - гл. в. поле в $\mathcal{D}$, тогда

$$\iint_{\partial\mathcal{D}} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_{\mathcal{D}} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz$$

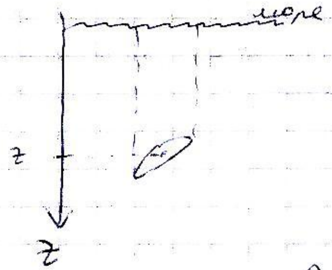
пред. теорема

$V = (P,Q,R)$

$\operatorname{div} V = P'_x + Q'_y + R'_z$ - скаляр. величина, от координат не зависит:

$$\operatorname{div} V(a) = \lim_{r\to 0} \Big(\iiint_{B(a,r)} \operatorname{div} V\,dx\,dy\,dz\Big) \Big/ \Big(\tfrac{4}{3}\pi r^3\Big) = \lim \frac{\iint \langle V, n\rangle\,d\sigma}{\tfrac{4}{3}\pi r^3}$$

П Закон Архимеда



$$\rho z\, d\sigma\, n_0 = \begin{pmatrix} \rho z n_1 d\sigma \\ \rho z n_2 d\sigma \\ \rho z n_3 d\sigma \end{pmatrix}$$

Сумм. давление $= (P_x, P_y, P_z)$

$$P_x = \iint_{\partial\Omega} \rho z n_1\, d\sigma = \rho \iint_{\partial\Omega} \langle (z,0,0), n_0 \rangle\, d\sigma =$$

$$= \rho \iint z\,dy\,dz + 0\,dz\,dx + 0\,dx\,dy = \iiint_{\Omega} \underbrace{(z'_x + 0'_y + 0'_z)}_{=0}\,dx\,dy\,dz =$$

$$P_y = \rho \iint 0\,dy\,dz + z\,dz\,dx + 0\,dx\,dy = 0$$

$$P_z = \rho \iint \cdot + z\,dx\,dy = \rho \iiint 1\,dx\,dy\,dz = \rho V_{ol}(\Omega)$$

11.05.2015

З (P, Q, R) — потенциально, если $\exists$ потенциал

$\exists f \quad (P,Q,R) = \operatorname{grad} f$

$\operatorname{rot}(P,Q,R) = 0 \qquad \begin{cases} R'_y - Q'_z = 0 \\ P'_z - R'_x = 0 \\ Q'_x - P'_y = 0 \end{cases}$

О (P, Q, R) — соленоидальное $= V$

$\exists$ „векторный потенциал", т.е. поле B,

$V = \operatorname{rot} B$

grad: $F \to V$
rot: $V \to V$
div: $V \to F$

Т V — гл. векторное поле, тогда эквивалентно

1) $\exists B_{\text{гладк.}} \mid V = \operatorname{rot} B$

2) $\operatorname{div} V = 0$

Δ $1 \Rightarrow 2$ $\quad \operatorname{div} \operatorname{rot} B = 0$

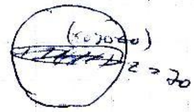
$$\operatorname{div}(V_1 V_2 V_3) = (V_1)'_x + (V_2)'_y + (V_3)'_z$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}(P,Q,R) = (R'_y - Q'_z)'_x + (P'_z - R'_x)'_y + (Q'_x - P'_y)'_z = 0$$

сократятся все

$2 >> 1 \quad V = (A_1\ A_2\ A_3) \qquad A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0$

Найдем $B = (B_1 B_2 B_3)$ $\underline{\operatorname{rot} B = V}$



$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

Есть единственность

$\operatorname{rot}(B + C) = V = \operatorname{rot} B$ может произвольно сделать C

значит $\operatorname{rot} C = 0$

Пусть $B_3 = 0$, тогда $B_2(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} A_1(x,y,z)\,dz$

$$B_1(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} A_2(x,y,z)\,dz + \varphi(x,y)$$

Тогда $B'_{2x} - B'_{1y} = -\int_{z_0}^{z} A'_{1x}(x,y,z)\,dz - \int_{z_0}^{z} A'_{2y}(x,y,z)\,dz - \varphi'_y(x,y) \overset{?}{=} A_3$?

$\operatorname{div} = 0$

$$\int_{z_0}^{z} A'_{3z}(x,y,z)\,dz - \varphi'_y = A_3(x,y,z)$$

$$A_3(x,y,z) - A_3(x,y,z_0) - \varphi'(x,y) = A_3(x,y,z)$$

$$\varphi'_y(x,y) = -A_3(x,y,z_0)$$

▽