1.08.2014

# Гладкие функции и отобр. в $\mathbb{R}^m$

§1 Воспоминание (утверждается, что мы это знаем!)

Структуры в $\mathbb{R}^m$

1. Векторное пр-во, метр. простр-и, нормиров. пр-во

$x \in \mathbb{R}^m \quad x = (x_1 \dots x_m) \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$

$x, y \in \mathbb{R}^m \quad \rho(x, y) = \|x - y\|$

Далее $|x| \sim \|x\|$ (символически)

2. Окрестность точки $(|\dots| < \varepsilon)$

Открытое множество = все точки внутр

Внутренность мн-ва $G = \mathrm{Int}(G) =$ мн-во внутр точ.

3. Сходимость: $x_n, x_0 \in \mathbb{R}^m \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Leftrightarrow |x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x^n = (x_1^n, x_2^n \dots)$, тогда если $x^n \to x^0$, то $\forall k \in [1, m] \quad x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k^0$

$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L \;/\; f: E \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$x_0 \in \mathrm{Int} E, \; L \in \mathbb{R}^k$

$\forall \underset{\mathbb{R}^m}{x_n} \to \underset{\mathbb{R}^m}{x_0} \quad \underset{\mathbb{R}^k}{f(x_n)} \to \underset{\mathbb{R}^k}{L} \quad \begin{pmatrix} x_n \in E \\ x_n \neq x_0 \\ \forall n \end{pmatrix}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall \underset{x \neq x_0}{x \in E} \; |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

$f$ - непр в $x_0$, если $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$

4. Пр. точка множества $G$ - $x_0$, если $\exists x_n \in G \; x_n \to x_0$, $\forall_n x_n \neq x_0$

Замкн. множество - сод. все свои пред. точки

$\overline{\text{Откр}}$ = замкн, $\overline{\text{замкн}}$ = откр.

Откр. шар $B(a, r)$ : $a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$

Замкн. шар $\overline{B}(a, r)$

Параллелепипед : $a, b \in \mathbb{R}^m - [a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m :$
$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \; a_2 \leq x_2 \leq b_2 \}$

5. Компактность - для любого откр. покр. $K$
$\exists$ конечное подпокрытие

или $K$ замкнуто и ограниченно

И еще секв. подпоследовательности: из любой посл. можно выделить сх. подпосл.

Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса: из любой огр. $x_n$ можно выделить сх. подпосл.

---

6. Отображение: $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ если $l=1$, то и функция

$$x \in \mathbb{R}^m \longleftarrow F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \\ F_l(x) \end{pmatrix} \text{ — коорд. ф-ии}$$

$L \in \mathbb{R}^l$, если $F(x) \to L$, то $F_1(x) \to L_1, \dots$ аналогично коорд. непрерывность.

Лин. отобр.: $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $(\forall x, y \in \mathbb{R}^m \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

= Оператор.

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

1) $A(\sum \alpha_i x_i) = \sum\limits_{кон} \alpha_i A(x_i)$

2) $A(\mathbb{O}_m) = \mathbb{O}_l$

$A = (A_{e_1}, \dots A_{e_m})$

3) $\mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^l \xrightarrow{B} \mathbb{R}^k$ $\quad B \circ A \longleftrightarrow BA$

T $\quad$ $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (однозначное линейное), тогда эквивалентно:

1) $A$ обратимо $\quad$ 2) $A(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$

3) $\det A \neq 0$ $\quad$ ДП

Частн. отображ.: $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

1) $m = l = 1$ $\quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \ A(x) = \alpha x$

2) $l = 1$, $m$ люб. $\quad A(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots$

3) $m = 1$, $l$ люб. $\quad A(x) = x \cdot V$, где $V \in \mathbb{R}^l$

§2 Дифференцирование

O $\quad$ Бесконечно малое в $x_0$: $\varphi: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $x_0 \in \operatorname{Int} E$, $\varphi$ — б.м. в $x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \mathbb{O}_l$

O $\quad$ Бесконечно малое в $x_0$: $\varphi: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $\mathbb{O}_m \in \operatorname{Int} E$, $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to \mathbb{O}_m$ — это по опред. $\lim\limits_{h \to \mathbb{O}_m} \frac{\varphi(h)}{|h|} = \mathbb{O}_l \Longleftrightarrow \exists \alpha(h)$ — б.м. при $h \to 0$: $\varphi(h) = \alpha(h)|h|$

П $\quad$ $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1; x_2) = x_1^{20} x_2^{14}$, $\quad \frac{x_1^{20} x_2^{14}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \to 0$

$\varphi(h) = o(h)$

0 $F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $a \in \mathrm{Int}\,E$; $F$ – дифф в $(\cdot)$ $a$, если $\exists\ \mathcal{L}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, такое что $F(a+h) = F(a) + \mathcal{L}(h) + o(h)$, $h \to 0$

$$F(a+h) = F(a) + \underbrace{Lh}_{\text{матрица на вектор}} + \alpha(h) \cdot |h|$$

$\alpha$ – БМ в $a$

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x)$$

$\alpha$ – БМ в $a$, $\alpha(a) = 0$

Акл $\mathcal{L}$ – это производное отобр. $F$ в точке $a$

$\mathcal{L} = F'(a)$ (производный оператор)

$L$ – матр. опер. $\mathcal{L}$ — матрица Якоби

0 Дифференциал отобр. в точке – это одно из двух:

1. Производного оператора: $h \mapsto F'(a) \cdot h$, $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$

2. Отображение $V(a) \times \mathbb{R}^m$ $(x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

3 Оп-р $F'(a)$ – единственный; $u \in \mathbb{R}^m$,

$\Delta$ малые $t$, $a + tu \in E$, подставим $h = tu$:

$F(a+tu) = F(a) + L \cdot tu + o(tu)$, $t \to 0$

Чему равно $L \cdot u$? $L u = \dfrac{F(a+tu) - F(a) - \alpha(tu) \cdot |t||u|}{t} =$ при всех малых $t$

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{F(a+tu) - F(a)}{t} + 0$

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f$ – дифф. в $(\cdot)$ $a \in \mathrm{Int}\,E \Longleftrightarrow$

$\exists\, l_1 \dots l_m \in \mathbb{R}$: $f(a+h) = f(a) + l_1 h_1 + l_2 h_2 + \dots + l_m h_m + o(h)$

3 $f$ – дифф в $(\cdot)$ $a \Rightarrow f$ непр. в $(\cdot)$ $a$

$\lim (f(a+h)) = f(a)$

$\Lambda$ Th покоорд. дифференцируемости:

$F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $a \in \mathrm{Int}\,E$ $\quad F(x) = (F_1(x) \dots F_l(x))$

1. $F$ – дифф в $(\cdot)$ $a \Leftrightarrow F_1 \dots F_l$ – дифф в $(\cdot)$ $a$

2. Если $F$ – дифф в $(\cdot)$ $a$, то м-ца Якоби $F'(a)$ – $m \times l$

$$F'(a) = \begin{pmatrix} F_1'(a) \\ F_2'(a) \\ \vdots \\ F_l'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{pmatrix} l$$

$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \alpha(h)|h|$

$F_i(a+h) = F_i(a) + (F'(a))_i \cdot h + \alpha_i(h)\cdot|h|$

$\uparrow$ i-тое строчка

П $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $\quad c \in \mathbb{R}^l,\ a \in \mathbb{R}^m$

$x \mapsto c$

$F'(a) = \mathbb{O}_{m\times l}$ $\quad \underbrace{F(a+h)}_{c} = \underbrace{F(a)}_{c} + \underbrace{\mathbb{O}\cdot h + o(h)}_{0}$

П $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ $\quad a \in \mathbb{R}^m$

$x \to \mathcal{A}x$ $\quad \mathcal{A}(a+h) = A\cdot a + A\cdot h =$

$\mathcal{A}'(a) = A$ $\quad \mathcal{A}(a) + \mathcal{A}'(a)\cdot h + o(h) = Aa + \mathcal{A}'(a)h + o(h)$

П $\mathcal{B}: x \longmapsto u_0 + Ax$

$\mathcal{B}'(a) = A$

## Частные производные

$F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \operatorname{int} E$ $\quad a = (a_1 \dots a_m)$

$1 \le k \le m$

$\varphi_k(t) = F(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots a_m)$ — функция $V(a_k) \to \mathbb{R}$

$\varphi_k'(a_k) = \lim \dfrac{\varphi(a_k+t) - \varphi(a_k)}{t}$ — если $\exists$, то это $\mathcal{D}$ $k$-й частной производной в $a$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(a) = (D_k F)a$ — обозначение

П $F(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \left(\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x_1 x_2 x_3}}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)(x_1 - 1)^{2014}$

$a = (1, 1, 1)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_2}(a) = 1 + (\dots)\cdot 0^{2014}$

А если в посл. скобке $(x_2 - 1)^{2014}$ $(\tilde{F})$

$\tilde{F}'_{x_2}(1,1,1) = 1$

П Антипример (не непр. в 0)

$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$\dfrac{\partial F}{\partial t}(0,0) = \varphi_1'(0) = 0$, где $\varphi_1(y) = \begin{cases} \dfrac{2\cdot 0\cdot x}{x^2+0^2} \\ 0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$

T Необходимое условие дифференцируемости

$l=1$ $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \operatorname{Int} E$, $f$ – дифф. в $(\cdot)\, a$

Тогда 1) $\exists$ все $m$ частных производных $f'_{x_1} \dots f'_{x_m}(a)$

2) $f'(a) = (f'_{x_1}(a), f'_{x_2}(a), \dots f'_{x_m}(a))$

$\Delta$
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \alpha(h)|h|$$
$$h = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$$ В обозначении из опр. част. произв.
$$\varphi_k(t) = \varphi_k(a_k) + (f'(a))_k \cdot t + \alpha(h)\cdot|t|$$
$\nabla$

C Пусть $F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $a \in \operatorname{Int} E$, $F$ – дифф. в $(\cdot)\, a$; Тогда $F'(a) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(\varphi)\right)_{1 \le i \le l,\ 1 \le j \le m}$

T Достаточное условие дифференцируемости

$l=1$ $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \operatorname{Int} E$

$\exists B(a,r) \subset E$ $\forall x \in B(a,r)$ $\exists f'_{x_1}(x), \dots f'_{x_m}(x)$ и все эти частные пр-е непрерывны в $a$

Тогда $f$ дифф. в $(\cdot)\, a$

8.09.2014

T $\exists f'_{x_1}, \dots f'_{x_n}$ в $B(a,\varepsilon)$ и они непр. в т. $a$

Тогда $f$ – дифф. в $(\cdot)\, a$ $(f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R})$

$\Delta$
$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \qquad m=2$$
$$= \left(f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)\right) + \left(f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)\right) = \quad \text{т. Лагранжа}$$
$$= f'_{x_1}(\bar{x}_1, x_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, \bar{x}_2)(x_2 - a_2) =$$
$$= f'_{x_1}(a_1, a_2)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a_1, a_2)(x_2 - a_2) +$$
$$+ |x-a|\Big(\underbrace{\big(f'_{x_1}(\bar{x}_1, x_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2)\big)}_{x \to a\ \to 0}\underbrace{\frac{x_1 - a_1}{|x-a|}}_{\le 1 \text{ по мд.}} + \underbrace{\big(f'_{x_2}(a_1, \bar{x}_2) - f'_{x_2}(a_1, a_2)\big)}_{x \to a\ \to 0}\underbrace{\frac{x_2 - a_2}{|x-a|}}_{\le 1 \text{ по мд.}}\Big)$$

А это опр. дифференцируемости

$\nabla$

## §3 Правила дифференцирования

1. Линейность дифференцирования

T $f, g: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f, g$ дифф в $(\cdot)\, a$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $(f+g)$, $\lambda f$ дифф. в $(\cdot)\, a$; $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$

$\Delta$ что очевидно $\nabla$

2. Производная композиции

Л Оценка нормы л.о.

$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, лин. Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m$ $|Au| \le C_A |u|$,

где $C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ — тут и далее

$\Delta$ $|Au|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j\right)^2 \underset{\text{КБШ}}{\le} \sum_i \left(\left(\sum_j a_{ij}^2\right)\left(\sum_j u_j^2\right)\right) =$

$= \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)\underbrace{\left(\sum_j u_j^2\right)}_{|u|}$;

$\nabla$

С Линейное отображение непрерывно; $|A_x - A_{x_0}| \le C_A |x - x_0|$

T $F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$; $G: I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$;

$a \in \operatorname{Int} E$, $F(E) \in I$, $F(a) \in \operatorname{Int} I$, $\exists b = F(a)$

$F$ - дифф$(a)$ $G$ - дифф$(F(a))$, Тогда:

$G \circ F: E \to \mathbb{R}^n$ - дифф. $a$, причем $(G \circ F)'(a) = G'(F(a))\, F'(a)$

$\Delta$ $F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \alpha(x)|x-a|$

$G(y) = G(b) + G'(b)(y-b) + \beta(y)|y-b|$

$G(F(x)) = G(\underbrace{F(a)}_{b} + \underbrace{F'(a)(x-a) + \alpha(x)|x-a|}_{y-b}) =$

$= G(F(a)) + G'(b)[F'(a)(x-a) + \alpha(x)|x-a|] + \beta(y)|F'(a)(x-a) + \dots| =$

$= G(F(a)) + G'(F(a))F'(a)(x-a) + G'(b)\alpha(x)|x-a| +$ I

$+ |x-a|\underbrace{\beta(y)}_{\substack{\text{БМ} \\ x \to a}}\left|F'(a)\frac{(x-a)}{|x-a|} + \alpha(x)\right|$ II

А I - это мало ом))

I: $|G'(b) \cdot \alpha(x)| \le C_{G'(b)} |\alpha(x)| \to 0$

II: бм. огр $\left|F'(a)\frac{(x-a)}{|x-a|} + \alpha(x)\right| \le C_{F'(a)}\left|\frac{(x-a)}{|x-a|}\right| + |\alpha(x)|$ - огр при $x \to a$

$\nabla$

3 $(F \circ G \circ H)'(a) = F'(G(H(a))) \cdot G'(H(a)) \cdot H'(a)$

3 $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l \quad G: \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$

$F = (f_1 \dots f_l) \qquad G = (g_1 \dots g_n)$

$H = G \circ F = (h_1 \dots h_n)$

$h_i(x_1, \dots x_n) = g_i(f_1(x_1 \dots x_m), f_2(x_1 \dots x_m), \dots, f_l(x_1 \dots x_m))$

$H' = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j} =$

$= \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$

П $e^{-x} \ln(x+1) = e^{-x} \ln(x+1) + ? \dots ??$

$g(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) \dots f_l(x_1, x_2)) =: h(x_1, x_2)$

$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_1}$

$h(x,y) = f(\underset{\mathrm{I}}{\sin xy}, \overset{\mathrm{II}}{\frac{y}{x}}); \quad h'_x = f'_{\mathrm{I}}(y \cos xy) + f'_{\mathrm{II}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$

~~$h(x,y) = f(\sin xy), -\frac{y}{x}$~~

3. Дифф. произведение

Т $F, G: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, \quad \lambda: E \to \mathbb{R} \quad a \in \operatorname{Int} E$

$\Rightarrow$ 1. $\underbrace{(\lambda F)'(a)}_{\text{л.о}} h = \underbrace{(\lambda'(a) h)}_{\text{скаляр}} F(a) + \lambda(a) F'(a) h$

2. $(\langle F, G \rangle)'(a) h = \langle F'(a) h, G(a) \rangle + \langle F(a), G'(a) h \rangle$

$x \mapsto \langle F(x), G(x) \rangle \qquad {}^{\text{в}}\mathbb{R}^{l}$

$\Delta$ 1) $F = (f_1 \dots f_l)$; $(\lambda f)'(a) h = ?$ — расписываем 1)

$\lambda(x) f(x) = (\lambda(a) + \lambda'(a) h + \alpha(x) \cdot |h|)(f(a) + f'(a) h + \beta(x)|h|) =$

$= \lambda(a) f(a) + (\lambda'(a) h) f(a) + \lambda(a) f'(a) h + |h| \Big[ \underbrace{(f(a) + f'(a) h + \beta(h)|h|)}_{\text{огр}} \underbrace{\alpha(x)}_{\text{бм}}$

$+ \underbrace{(\lambda(a) + \lambda'(a) h + \alpha(x)|h|)}_{\text{огр}} \underbrace{\beta(h)}_{\text{бм}} \Big]$

$(\lambda'(a) h)(f'(a) h)$

2) $\langle F, G \rangle (x) = \sum f_i(x) g_i(x)$

$\langle F, G \rangle'(a) h = \sum ((f_i g_i)'(a) h) = \sum (\underbrace{(f_i' h) g_i}_{i\text{-я комп.}} + f_i (g_i' h)) =$

$= \langle F' h, G \rangle + \langle F, G' h \rangle$

$\nabla$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

T н-во Лагранжа

$F\,[a,b] \to \mathbb{R}^l$ $F$-непрер. на $[a,b]$
дифф $(a,b)$

$\Rightarrow \exists c \in [a,b]: \ |F(b)-F(a)| \le |F'(c)|(b-a)$

$\Delta$

$\varphi(t) = \langle F(b)-F(a), F(t)-F(a) \rangle$

$\varphi(a)=0; \quad \varphi(b) = |F(b)-F(a)|^2;$

$\varphi'(t) = \langle F(b)-F(a); F'(t) \rangle$

т. Лагр. для $\varphi$: $\exists c: \varphi(b)-\varphi(a) = \varphi'(c)(b-a)$

$|F(b)-F(a)|^2 \le \langle F(b)-F(a), F'(c) \rangle (b-a) \le$

$\le |F(b)-F(a)|\,|F'(c)|(b-a)$, сократим.

$\nabla$

4. Градиент

O $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $a \in \operatorname{Int} E$, $f$ дифф $a$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = f(a) + \langle u, h \rangle + o(h)$

$L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad \exists u \in \mathbb{R}^m$ $\quad u$-градиент $f$ в (.) $a$

$v \to Lv$ $\quad Lv = \langle u, v \rangle$

O $\xi \in \mathbb{R}^m$ $\ |\xi| = 1$ $\quad \xi$-направление

Производная по направлению (в $a$)

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\xi)-f(a)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \lim_{t\to 0} \frac{f'_{x_1}(a)\cdot t\xi_1 + f'_{x_2}(a)\cdot t\xi_2 + \dots + f'_{x_m}(a) t\xi_m + o(|t\xi|)}{t} =$$

$$= f'_{x_1}(a)\xi_1 + \dots + f'_{x_m}(a)\xi_m = \langle \operatorname{grad} f(a); \xi \rangle$$

3. $(\forall \xi \ \exists f'_\xi \text{ в (.) } a) \not\Rightarrow f$-дифф $(a)$

T об экстр. св-ве Градиента

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \operatorname{Int} E$ $\quad f$-дифф $(a)$

$\operatorname{grad} f(a) \ne 0$

Тогда $\xi = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{|\operatorname{grad} f(a)|}$ — направление наибыстр. возр.

$-\xi$ — наиб. убыв.

А именно: $\forall$ напр $h$ $\quad -\frac{\partial f}{\partial \xi}(a) \le \frac{\partial f}{\partial h}(a) \le \frac{\partial f}{\partial \xi}(a)$

$\Delta \quad \frac{\partial f}{\partial h} = \langle \operatorname{grad} f, h \rangle \le \underbrace{|\operatorname{grad} f|\,|h| = |\operatorname{grad} f|}$

$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = |\operatorname{grad} f|$

15.09.2014

## §4. Формула Тейлора

О. $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad a \in \operatorname{Int} E$

$B(a,r) \subset E \qquad i = 1 \dots m$

$\forall x \in B(a,r) \qquad \exists g(x) = f'_{x_i}(x)$

$\exists g'_{x_k}(a)$ – наз. ч. пр. II порядка по $x_i$ и $x_k$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} f \quad f''_{x_i x_k} \quad D_k D_i f$

О. Аналогично по индукции частная производная $r$-го порядка

$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}\right)$ Смешанная пр. – много разных буквы

$i_1 \dots i_k \in \overline{1 \dots m}$

Т. О равенстве смешанных частных производных

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad B(a,r) \subset E \qquad m = 2$

В шаре $B(a,r)$ $\exists f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ и эти произв. непрерывны в $a$

Тогда $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$

$\Delta$

$x = a_1 + h, \quad y = a_2 + k$

$a_2 + k \qquad (a_1+h; a_2+k)$

$a \qquad a_1 + h$

$\Delta^2 = f(a_1+h, a_2+k) - f(a_1+h; a_2) -$

$- f(a_1; a_2+k) + f(a_1, a_2)$

зафиксируем $k$: $\Delta^2 = (f(a_1+h; a_2+k) - f(a_1+h; a_2)) - (f(a_1; a_2+k) -$
$- f(a_1; a_2))$

$g(h) - g(0) \xrightarrow{\text{Т. Лагранжа}} g'(\bar{h})\, h,$

где $g' = f'_x(a_1+h; a_2+k) -$
$- f'_x(a_1+h; a_2)$

$hg' = (f'_x(a_1+\bar h, a_2+k) - f'_x(a_1+\bar h_1, a_2))h = f''_{xy}(a_1+\bar h, a_2+\bar k)hk$

Аналогично функцию сначала $k$:

$\Delta^2 = f''_{yx}(a_1+\bar{\bar h}, a_2+\bar{\bar k})hk$

Итого $f''_{xy}(a_1+\bar h, a_2+\bar k) = f''_{yx}(a_1+\bar{\bar h}, a_2+\bar{\bar k})$

при $\begin{cases} h\to 0 \\ k\to 0\end{cases}$ получим $f''_{xy}(a_1,a_2) = f''_{yx}(a_1,a_2)$

(непрерывно в „$O$")

$\nabla$

Опр. $r\in\mathbb{N}$ $D$-откр. в $\mathbb{R}^m$

$C^r(D)$ – мн-во ф-й $D\to\mathbb{R}$ у кот. $\exists$ все ч. пр до $r$-того порядка непрерывные

$C^0(D) = C(D)$ – множество непрерывных функций

$C^0(D) \underset{\neq}{\supset} C^1(D) \underset{\neq}{\supset} C^2(D) \underset{\neq}{\supset}\dots$ – также

$C^\infty(D) = \bigcap\limits_{r=1}^{+\infty} C^r$

T. (3) ① $r$; $D$-откр $f\in C^r(D)$ в $\mathbb{R}^m$

$(i_1\dots i_r)$ $(j_1\dots j_r)$ – два списка, отлич. перестановкой из $1\dots m$

$\Rightarrow f^{(r)}_{i_1\dots i_r} = f^{(r)}_{j_1\dots j_r}$

$\Delta$ Меняем соседние дифф. (перестановка = X транспоз.) $\nabla$

② $C^r$ замкнут относительно $\_+\_$ $\_*\_$ $\_\circ\_$

$f: D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ $C^r(D,\mathbb{R}^n)$ – если все коорд. ф-ии $C^r(D)$

О. Бином для многочленов

L. Мультииндекс $i = (i_1,\dots,i_m)$ в $\mathbb{R}^m$ ($i_k\ (\forall k)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$)

$|i|$ – высота мультииндекса $=\sum\limits_{k=1}^m i_k$

$i! = i_1!\cdot i_2!\cdot i_3!\cdot\ldots\cdot i_m!$ $\quad f^{(i)} = \dfrac{\partial^{|i|}f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_m^{i_m}}$

$a^i = a_1^{i_1}a_2^{i_2}\dots a_m^{i_m}$

Л. Тот самый бином

$(a_1+a_2+\dots+a_m)^r = \sum\limits_{n_1=1}^m\sum\limits_{n_2=1}^m\dots\sum\limits_{n_r=1}^m a_{n_1}a_{n_2}\dots a_{n_r} =$

$$= \sum_{i:|i|=r} \frac{r!}{i!} a^i = \left( \sum_{\substack{(i_1 \dots i_m) \\ \sum i_k = r,\ i_k \geq 0}} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m} \right)$$

$\Delta$ Индукция по $r$

base $r=1$ очевидно

assump. $\Rightarrow$ $(a_1 + \dots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \dots + a_m) \sum \frac{r!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m} =$

$$= \left[ \sum \frac{r!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1+1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m} \right] + \left[ \sum \frac{r!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2+1} \dots a_m^{i_m} \right] + \text{ещё} =$$

$$= \left[ \sum_{\substack{(k_1 \dots k_m) \\ k_i \geq 0 \\ k_1 \geq 1}} \frac{k_1 \cdot (r!)}{(k_1! \cdot k_2! \cdot \dots)} a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_m^{k_m} \right] + \left[ \sum_{k_2 \geq 1} \frac{k_2 (r!)}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \right] + \text{ещё} =$$

Из замены $i \to k$ $\longrightarrow$ $k_1 \geq 0$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = r + 1$

$$= \sum_{\substack{(k_1 \dots k_m) \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = r+1}} \frac{r! \overbrace{(k_1 + \dots + k_m)}^{= r+1}}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} = \sum \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_m} \dots a_m^{k_m}$$

$\nabla$

$\Lambda$ $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $E$ - откр, $f \in C^r(E)$

$a \in E$ фикс $h \in \mathbb{R}^m$

$\varphi(t) := f(a + th)$, $t \in [-1, 1]$, $h$ - мал, так что $a + th \in E$

$\forall k \leq r$ $\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i: |i| = k} \frac{k!}{i!} h^i f^{(i)}(a)$

Вот, работает

$k=1$ $\varphi' = (f(a+th))' = f' \cdot h = f'_{x_1}(a+th) h_1 + f'_{x_2} h_2 + \dots + f'_{x_m} h_m$

$$= (f''_{x_1 x_1}(a + th) \cdot h_1 + f''_{x_1 x_2} h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m} h_m) + \dots =$$

$$\varphi''(0) = \sum_{i=1}^m f''_{x_i x_i} h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} f''_{x_i x_j} h_i h_j$$

$\Delta$ $\varphi''(t) = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m f''_{x_{n_1} x_{n_2}} (a + th) h_{n_1} h_{n_2}$

$\varphi'''(t) = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=2}^m \sum_{n_3=3}^m f'''_{x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3}} h_{n_1} h_{n_2} h_{n_3}$ и т.д.

$\varphi^{(k)}(0) = \sum \dots \sum f^{(k)}_{x_{n_1} \dots x_{n_k}} h_{n_1} \dots h_{n_k}$

$\nabla$

Т ф-ла Тейлора

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $E_{\text{откр}}$ $r \in \mathbb{N}$ $f \in C^{r+1}(E)$

$a \in E$, $B(a,\rho) \subset E \Rightarrow \forall x \in B(a,\rho)\ \exists t \in (0,1)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r} \Big( \sum_{i:|i|=k} \frac{k!}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i \Big) + \sum_{i:|i|=r+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a+t(x-a))(x-a)^i$$

$$\Big/ f(x) = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i + \frac{f^{(r+1)}(\bar{a})}{(r+1)!}(x-a)^{r+1} \Big/$$

$\Delta$

$x = a+h$

$\varphi(t) = f(a+th)$ $\quad f(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}\cdot 1^2 + \dots$

$$\dots + \frac{\varphi^{(r+1)}(t)}{(r+1)!} 1^{r+1}$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{r} \Big( \sum_{i:|i|=k} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a)(x-a)^i \Big)}_{\text{Многочлен Тейлора порядка } n} + \dots$$

$$\dots + \sum_{i:|i|=r+1} \Big( \frac{1}{i!} f^{(i)}(a+t(x-a)) \Big)(x-a)^i$$

Подставляем по пред. лемме

$\nabla$

О $k$-й дифференциал $f$ в (.) $a$

$$d^k f(a,h) = \sum_{i:|i|=k} \frac{k!}{i!} f^{(i)}(a) h^i \qquad f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{d^k f(a,h)}{k!} + \text{ост.}$$

П $f(x,y) = \frac{1}{x+2y}$ $\qquad df = -\frac{1}{(x+2y)^2}dx - \frac{2}{(x+2y)^2}dy$

$$d^2 f = \frac{2}{(x+2y)^3}dx^2 + \frac{4}{(x+2y)^3}dx\,dy + \frac{4}{(x+2y)^3}dx\,dy + \frac{8}{\dots}\dots$$

$df = -\frac{1}{(x+2y)^2}(dx+2dy)$

$d^{10} f = \frac{10!}{(x+2y)^{11}}(dx+2dy)^{10}$

$f(x,y) = g(\underbrace{xy^2}_{\mathrm{I}}, \underbrace{\frac{x}{y}}_{\mathrm{II}})$ $\qquad d^2 f$

$$df = g'_{\mathrm{I}}(y^2dx + x\cdot 2y\,dy) + g'_{\mathrm{II}}\Big(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\Big)$$

$$d^2 f = \Big(g''_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}(y^2dx + 2xy\,dy) + g''_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}}\Big(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\Big)\Big)(y^2dx + 2xy\,dy) +$$

$+ g'_{I}(4y\, dy\, dx + 2x\, dy^2) + (g''_{II\,I}(y^2 dx + 2xy\, dy) + g''_{II\,II} \times$

$\times (\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy))(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy) + g'_{II}(-\frac{2dx\, dy}{y^2} + \frac{2x}{y^3} dy^2)$

Будет 93 из §2, 3, 4

22.09.2014

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{\alpha:\, 0<|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a)\, h^\alpha + \sum_{\alpha:\,|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a+\theta h)\, h^\alpha$$

$$(0,97)^{1,02} = f(1,1) + f'_x(1,1)(-0,03) + f'_y(0,02) +$$
$$+ \frac{1}{2!} f''_{xx}(0,03)^2 + \frac{1}{2} f''_{yy}(0,02)^2 +$$
$$+ f''_{xy}(-0,03)(0,02) + \text{ост} =$$

$$= 1 - 0,03 - 1\cdot 0,03\cdot 0,02 = 0,9694 \pm 3\cdot 10^{-2} \text{ ost}$$

## §6 Линейные операторы

$O_1$. $X, Y$ — норм. пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ — пр-во ЛО из $X$ в $Y$

$Lin(X,Y)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{m,n}$

$O_2$ $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ $\quad \|A\| = \sup\limits_{\substack{|x|\le 1\\ x\in X}} |Ax|$ $\quad$ ← в пр-ве $Y$

$\|A\|_{mn}$

$З_1$ $\|A\|$ — конечно для $\mathcal{L}_{m,n}$ ($\{x : \|x\| \le 1$ — компакт) и этот sup ⟶ max

$З_2$ По лемме $A = (a_{ij})$ $\quad |Ax| \le \sqrt{\sum a_{ij}^2}\,|x|$

$\|A\| \le \sqrt{\sum a_{ij}}$

$З_3$ $\|Ax\| \le \|A\|\,|x|$ при всех $x$

$|x \ne 0$ отв. $x_0 = \frac{x}{|x|}$ $\quad |Ax_0| \le \|A\|$

$|A\frac{x}{|x|}| \le \|A\|$

$З_4$ Если $C$:

$\forall x\ |Ax| \le C|x|$, тогда $\|A\| \le C$

$П_1$ $m=1,\ n=1$

$A = (a)_{1\times 1}$ $\quad x \longmapsto ax$ $\quad \|A\| = \sup\limits_{|x|\le 1} |ax| = |a|$

$П_2$ $m=1,\ n$ — $\forall$, $\quad A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $t \longmapsto \vec{a}t$ $\quad \|A\| = \sup |\vec{a}t| = |\vec{a}|$

$П_3$ $\quad m \quad n=1$

$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad A \longleftrightarrow (a_1 \dots a_m) = \bar{a}$ ; $\|A\| = \sup |\langle \bar{a}, \bar{v}\rangle| =$

$v \in \mathbb{R}^m \longmapsto \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle$

$= |\bar{a}|$

(К-Б

$|\langle \bar{a}, \bar{v}\rangle| \leq |\bar{a}||\bar{v}|$

$\exists v = \bar{a}/|a|$

$П_4$ $\quad m, n \qquad \leq \sqrt{a_{ij}^2}$

Т $\quad \mathcal{L}(X, Y)$, тогда

① $\|\cdot\|$ – обладает всеми св-вами нормы

т.е. 1. $\|A\| \geq 0$, $\dots = 0$ при $A = 0$

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

② $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $\quad B \in \mathcal{L}(Y, Z)$

Тогда $\quad \|BA\| \leq \|B\| \|A\|$

$\Delta$

1.1. очев.

1.2. $\|\lambda A\| = \sup |\lambda A_x| = |\lambda| \sup |A_x| = |\lambda| \|A\|$

1.3. $\|A+B\| \leq \sup(|A_x| + |B_x|) \leq \sup |A_x| + \sup |B_x|$

2. $|BA_x| = |B \cdot A_x| \underset{\text{зам 4}}{\leq} \|B\| |A_x| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot |x|$

$|x| \leq 1 \qquad |BA_x| \leq \|B\|\|A\| \Rightarrow \|BA\| = \sup |BA_x| \leq$

$\leq \|B\| \|A\|$

$\nabla$

3. $\quad \|A\| = \sup\limits_{|x| \leq 1} |A_x| = \sup\limits_{|x|=1} |A_x| = \sup\limits_{|x| \neq 0} \dfrac{|A_x|}{|x|} = \inf \{C : \forall x \; |A_x| \leq C|x|\}$

Т. о непрерывности ЛО

$X, Y$ – норм. пр-ва, $A: X \to Y$. $(A \in \mathcal{L}(X, Y))$

$\Rightarrow$ Экв: ① $A$ – ограничен $\quad \|A\| < +\infty$

② $A: X \to Y$ – непр. в 0

③ $A$ непрерывен всюду

④ $A$ – равномерно непрерывен. $(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$

$\forall x_1, x_2 \in X \; |x_1 - x_2| < \delta$

$|A_{x_1} - A_{x_2}| < \varepsilon)$

$\Delta \quad 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ очев.

$2 \Rightarrow 1 \quad \forall \varepsilon > 0$ (берем $\varepsilon = 1$) $\exists \delta > 0 \; \forall x : |x| < \delta$

$|A_x| < 1$

при $x: |x| \le \delta \quad |Ax| < 1 \Rightarrow \quad \|A\| \le \frac{1}{\delta}$

$|x| \le 1 \quad \|Ax\| \le ?$

$\delta |Ax| = |A(\delta x)| \le 1$, т.е. $|Ax| \le \frac{1}{\delta}$

$\sup |Ax| \le \frac{1}{\delta}$

$1 \Rightarrow 4$

$|Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \le \|A\| \cdot |x_1 - x_2| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, тогда $|x_1 + x_2| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, то

$\nabla$

T Лагранжа для отображений

$F: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad B(a, r) \subset E$

$F$ - дифф в $B(a,r) \quad x \in B(a,r)$

$\Rightarrow \exists c \in (a, x)$ / отрезок в $\mathbb{R}^m$ с концами $(a, x)$

$c = a + \theta(x-a) \qquad 0 < \theta < 1$

$|F(x) - F(a)| \le \|F'(c)\| \, |x-a|$

C $|F(x) - F(a)| \le \left(\sup\limits_{t \in (a,x)} \|F'(t)\|\right) |x-a|$

$\Delta$ $f(t) := F(a + t(x-a)), \quad t \in [0, 1]$

$f'(t) = F'(a + t(x-a))(x-a)$

$|F(x) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \le |f'(\theta)| \cdot 1 =$

$= |F'(a + \theta(x-a))(x-a)| \le \|f'(a + \theta(x-a))\| \cdot |x-a|$

O $\Omega_m$ - мн-во обратимых операторов $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\det A \ne 0$

T Об обратном к оператору, близкому к обратимому

$\Omega_m$ - открытое мн-во в $\mathcal{L}_{m,m}$, а также:

Пусть $L \in \Omega_m \quad M \in \mathcal{L}_{m,m}: \|M - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$

$\Rightarrow$ 1) $M \in \Omega_m$; 2) $\|M^{-1}\| \le \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}$

3) $\|M^{-1} - L^{-1}\| \le \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|} \cdot \|M - L\|$

Л $\Delta$

$A \in \mathcal{L}_{m,m} \ \exists C > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \ |Ax| \ge C|x|$, тогда

$A \in \Omega_m; \ \|A^{-1}\| \le \frac{1}{C}$

$\Delta$

1 $\rightsquigarrow$ $\ker A = 0 \Rightarrow A$ - обратим.

$$\underset{y}{|Ax|} \geq C|x| \iff \frac{1}{c}|y| \geq \underset{\overset{\shortparallel}{A^{-1}y}}{|A^{-1}y|} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

И вообще: $|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax|$

т.е. $|Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}|x|$

$\nabla$

продолжение д. теоремы

2. $|Mx| = |Lx + (M-L)x| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq$

$\geq \frac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|M-L\||x| = \underbrace{\left(\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|M-L\|\right)}_{\text{по усл.}}|x|$

перев. $\Delta$ нер.

лемма „и вообще"

$$|Mx| \geq C|x|,$$

apply лемма

тогда $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|}$

3. $M^{-1} - L^{-1} = L^{-1}(L-M)M^{-1}$

$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|L^{-1}(L-M)M^{-1}\| \leq \|L^{-1}\|\|L-M\|\|M^{-1}\| \leq$

$\leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|} \cdot \|M-L\|$

по п. 2.

$\nabla$

C отобр. $\Omega_m \to \Omega_m$ $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно в каждой точке

$\Delta$ $A_k \to A$

$A_k^{-1} \to A^{-1}$ ? проверим по Гейне

$\|A_k^{-1} - A^{-1}\|$ - третий пункт теор.

При больших $k$

$\|A_k - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ограничение

$\|A_k^{-1} - A^{-1}\| \underset{п.3}{\leq} \frac{\|A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \underbrace{\|A_k - A\|}_{\to 0}} \underbrace{\|A_k - A\|}_{\to 0} \to 0$

Значит $A_k^{-1} \to A^{-1}$

$\nabla$

T $F: \underset{откр}{E} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ дифф на $E$

$F': E \to \mathcal{L}_{mn}$ <u>О непрерывно дифф. отобр</u>

$F: \underset{\text{откр}}{E} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ дифф на $E$

$\Rightarrow$ Эквивалентно: 1) $F \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ [$f_i$ - коорд. ф-ции $F$, все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ - непр на $E$]

2) $F': E \to \mathcal{L}_{mn}$ непрерывно

[$\forall x_0 \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ |x - x_0| < \delta$ $\|F'(x) - F'(x_0)\| < \varepsilon$]

$\Delta$

$1 \Rightarrow 2$ Возьмем $\varepsilon$

$$\|F'(x) - F'(x_0)\| \leq \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)^2} \leq$$

выберем окр. $x_j$ так, что

$$\left(\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}\right)$$

$$\leq \sqrt{\sum \frac{\varepsilon^2}{mn}} = \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$

$\|F'(x) - F'(x_0)\| < \varepsilon$

$h = (0, \dots 0, \underset{k}{1}, 0, \dots 0)$; $|(F'(x) - F'(x_0))h| \leq$

$\leq \|F'(x) - F'(x_0)\| \cdot |h| < \varepsilon$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x_0) \\ \partial f_2 \ \dots \\ \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x_0) \end{pmatrix} \Rightarrow \forall i = 1 \dots n \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0)\right) < \varepsilon$$

## §6 Экстремумы

О $Q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Кв. форма: $Q(h) = \sum_{i \leq j} a_{ij} h_i h_j$

① Пол. опр. $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Отр. опр. — // —

② Неопределенная: $\exists h_1, h_2 \quad Q(h_1) > 0 \quad Q(h_2) < 0$

③ Полуопределенная полож: $\forall h \ Q(h) \geq 0 \ \exists h \neq 0 \ Q(h) = 0$

отриц: ....

Л 1. $Q$ - пол. опр кв. ф-ция в $\mathbb{R}^m$ Тогда $\exists \gamma_Q > 0: \forall h$ $Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

2. $p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ - норма Тогда $C_1$ и $C_2 > 0 \ \forall x \quad C_1|x| \leq p(x) \leq C_2|x|$

З $x_n \to x$ в смысле Евклидовой нормы $|x_n - x| \to 0$

$p(x_n - x) \leq C_2|x_n - x| \to 0$

① $\gamma_Q := \min\limits_{|h|=1} Q(h)$ – по т. Вейерштрасса min ∃, ≠0 (сфера $\{x: |x|=1\}$ замкн, огр => комп)

$Q(h) = |h|^2 \cdot Q\left(\frac{h}{|h|}\right) \geq \gamma_Q \cdot |h|^2$

$Q(\alpha h_0) = \alpha^2 Q(h_0)$

② $C_1 := \min\limits_{|x|=1} p(x)$, $C_2 := \max\limits_{|x|=1} p(x)$

$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

$p(x) = |x| \cdot p\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq C_2 |x|$
$\geq C_1 |x|$

Все хорошо, если $p(x)$ – непр.

$p(x) - p(y) \leq$
$\leq p(x-y) = p\left(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{m} p((x_k-y_k)e_k) =$

$e_k = (0 \ldots 1 \ldots 0)$

$= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq M \sum |x_k - y_k| \leq M|x-y|\sqrt{m}$

$M := \max(p(e_1), p(e_2) \ldots)$

29.09.2014

О Локальный максимум:

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$   $x_0 \in E$ – лок. макс $f$

$\exists\, U(x_0): \ \forall x \in U(x_0) \cap E \ f(x) \leq f(x_0)$

строгий: $\ldots \ \dot{U}(x_0) \ldots \ < f(x_0)$

Аналогично минимум

О Экстремум = минимум | максимум

Т Ферма:

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Int} E$   $x_0$ – экстремум

$\Rightarrow \forall \ell \in \mathbb{R}^m \ (\|\ell\| = 1) \quad \frac{\partial f}{\partial \ell}(x_0) = 0$

Δ

Э „$\ell$" – прямая $\{x_0 + t\ell, \ t \in \mathbb{R}\}$

$f|_{„\ell"}$ – имеет в (·) $x_0$ лок. экстремум

$g(t) = f(x_0 + t\ell) \quad g'(0) = 0$

∇

С (необх. усл. экстр) $f'(x_0) = \mathbb{O}$ (Нулевой оператор)

С Теорема Ролля $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\overline{B(x_0, r)} \subset E$, непр.

$f$ – const $x \in S(x_0, r)$ (сфера) – диф в $B(x_0, r)$

$\exists\ a \in B(x_0, r) \quad f'(a) = 0$

K-комп $\subset E$, $f$ – const на $\partial K$ – граница $K$

Если $\operatorname{Int} K \neq \varnothing$   $\exists\, a \in \operatorname{Int} K: f'(a) = 0$

YOUR COPY

$\Delta$

$f \equiv const$ на $\overline{B}(x_0, r)$ — очев.

$B(x_0, r)$ — комп., $f$ — непр $\Rightarrow \exists \max$ и $\min$ $\exists a \in B(x_0, r)$

$\nabla$ точка экстр. $\Rightarrow f'(a) = 0$

T О достаточном условии экстремума

$f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $B(x_0, r) \subset E$, $f \in C^2(B(x_0, r))$

$f'(x_0) = 0$ $[\operatorname{grad} f(x) = 0]$

а) Если $d^2 f(x_0, h) = Q(h)$ — пол. опр. кв. ф-ция $[\forall h \neq 0\ Q(h) > 0]$ $x_0$ — точка min (строг.)

б) Если $Q(h)$ — отр. определена — // — $x$ — точка max

в) $Q(h)$ — неопр форма — нет экстремума

3 г) $Q(h)$ — полож. полуопределена или отриц. — ?

$\Delta$

$x, x_0$ $h = x - x_0 \in \mathbb{R}^m$

а) $\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{= \frac{1}{2} d^2 f(x_0 + th) =} = \frac{1}{2} Q(h) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^m (f''_{x_i x_i}(x_0 + th) - f''_{x x}(x_0)) h_i \right.$
$\left. + 2 \sum (f''_{x_i x_j}(x_0 + th) - f''_{x_i x_j}(x_0)) h_i h_j \right] \geq$
$\geq \frac{1}{2} (\gamma_Q |h|^2 - m^2 \cdot \frac{\gamma_Q}{m^2} |h|^2)$

$Q(h) \geq \gamma_Q \|h\|^2$ $|(f''_{x_i x_j}(x_0 + th) - f''_{x_i x_j}(x_0)) h_i h_j| < \varepsilon |h|^2$

$\left[ \begin{array}{l} \text{Для } \varepsilon = \frac{\gamma_Q}{2m^2}\ \exists U(x_0) \\ \forall x \in U(x_0)\ \forall i, j \end{array} \right]$ при $x$ близких к $x_0$

б) Аналогично

в) $X^*$, $h^* = x^* - x_0$ $Q(h^*) > 0$

$X_*$, $h_* = x_* - x_0$ $Q(h_*) < 0$

Подставим в а) Тейлора $[h = h^*]$

$\frac{1}{2} Q(\alpha h^*) = \frac{\alpha^2}{2} Q(h^*)$

$f(x_0 + \alpha h^*) - f(x_0) = \frac{1}{2} Q(h^*) \alpha^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \underbrace{\sum (f''_{x_i x_j}(x_0 + t_* h^*) - f''_{x_i x_j}(x_0)) h_i^* h_j^*}_{\to 0}$

б) Диффеоморфизмы

0 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ — область = откр + связное (линейно)

0 $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$,

$F: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм, если

$F$ дифф в $\mathcal{O}$, обратимо и $F^{-1}$ — дифференцируемо

3 $F^{-1}$ — дифференц. $F'(x)$ — обратимая матр-ца ($\forall x$)

$$(id)' = \left(F^{-1}(F(x))\right)' = (F^{-1})' F'$$

$$\shortparallel$$

$$E_m$$

1 Лемма (о локальной почти инъективности)

$F: \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ дифф $x_0 \in \mathcal{O}$ $\det F'(x_0) \neq 0$

невырожденность

$\Rightarrow$ Тогда сущ. $\exists\, C>0, \delta>0\ \forall x: \rho(x, x_0) < \delta$

$$|F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$$

$\Delta$

1. Пусть $F$ — лин. отобр. Тогда $F'(x) = F$

$$|x| = |F^{-1}(F(x))| \leq \|F^{-1}\| \cdot |F(x)| \qquad C = \frac{1}{\|F^{-1}\|}$$

$$|F(x - x_0)| \geq C|x - x_0|$$

2. Общ. сл. $F(x) - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)|x - x_0|$

$$|F(x) - F(x_0)| \geq |F'(x_0)(x - x_0)| - |\alpha(x)|\,|x - x_0| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|(F')^{-1}\|}|x - x_0| - |\alpha(x)|\,|x - x_0| = |x - x_0|\left(\frac{1}{\|F'^{-1}\|} - \alpha(x)\right)$$

$$\begin{cases} \exists\, V_\delta(x_0)\ \forall x \in V_\delta(x_0) & |\alpha(x)| < \frac{1}{2\|(F')^{-1}\|} \\ C := \frac{1}{2\|F'^{-1}\|} \end{cases}$$

$$\geq C|x - x_0|$$

$\nabla$

3 $F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1 x_2)$

$\det(F') \neq 0$ при $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, но оно склеивает далекие точки ($F(0,1) = F(0,-1)$)

Теорема о сохранении области

$F: \underset{\text{откр}}{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $F$ — дифф в $\mathcal{O}$ $\forall x \in \mathcal{O}$ $\det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(\mathcal{O})$ — откр.

3. 1. $F$ непр. $\mathcal{O}$ — лин. связно, $F(\mathcal{O}$ — лин. связно$)$

3. 2. $F$ непр. Если $F^{-1}(G)$ непр. если $G$ откр

$\Delta$

$y_0 \in F(\mathcal{O})$ ? $y_0$ — внутр. точка $F(\mathcal{O})$

$y_0 = f(x_0)$

$\exists\, C, \delta$ из семинары: $|F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$ при $|x - x_0| \leq \delta$

Таким образ. $F(x) \neq F(x_0)$

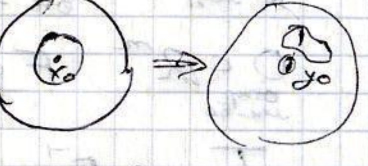
$(*)$ $r := \frac{1}{2}\operatorname{dist}(F(x_0), F(S(x_0,\delta))) - \inf(\rho(\cdot,\cdot)) > 0$

компакт. непр. по т. Вейерштр.

$x \mapsto \rho(F(x), F(x))$

Проверим $B(y_0, r) \subset F(\mathcal{O})$

$y \in B(y_0, r)$ $y = F(x)$? ← такое $x$ в шаре $B(x_0,\delta)$



$g(x) := |F(x) - y|^2 =$

$= (f_1(x) - y_1)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2$

$x \in \overline{B(x_0,\delta)}$ Где $\min(g(x))$?

Из он достигает по т. Вейерштрасса

$x \in S(x_0,\delta)$ $g(x) \geq r$ $\quad |F(x) - y|^2 \geq (\underbrace{|F(x) - y_0|}_{\geq 2r} - \underbrace{|y - y_0|}_{< r})^2$

$g(x_0) = |F(x_0) - y|^2 = |y_0 - y|^2 < r^2$ $(*)$

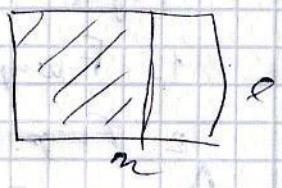
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x_1} = (f_1(x) - y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + (f_m(x) - y_m)\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dots \\ \dots \quad (f_1(x) - y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \dots + (f_m(x) - y_m)\frac{\partial f_m}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Это вся система ур.

$\det F' \neq 0$ $\cdot$ $f_1(x) = y_1$ $\dots$ $f_m(x) = y_m$ $\quad y = F(x)$

C $\quad F: \underset{\text{откр. мн-во}}{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad l < m$

Если в $\mathcal{O}$ $\quad rg(F'(x)) = l$. Тогда $F(\mathcal{O})$ — открыто



$\Delta$

$(x_1, \dots x_m) \quad F = (f_1, \dots f_l)$

$F' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \quad$ Пусть $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1..l} \neq 0$

$\tilde F: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \quad \tilde F(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x), x_{l+1}, \dots x_m)$

$$\begin{array}{c|c} \ast & \ast \\ \hline 0 & E_{m-l} \end{array} \qquad \underbrace{\tilde F(\mathcal{O}) \cap \mathbb{R}^{l}}_{\text{откр.}} " = \underbrace{F(\mathcal{O})}_{\text{откр}}$$

13.10.2014

Опрос будет $\approx$ 10.11.2014

А если есть д/з на сл. неделю.

А мы всё ещё обсуждаем диффеоморфизмы

T $\quad \underset{\text{откр. мн-во}}{\mathcal{O}} \subset \mathbb{R}^m, \quad F \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $F$ — обратимо, невырожд. $(\forall x \in \mathcal{O} \ \det F'(x) \neq 0)$

Тогда $F^{-1} \in C^1(F(\mathcal{O}), \mathbb{R}^m)$

$\forall x \quad y = F(x) \quad (F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$

$F(x) - F(x_0) \approx F'(x_0)(x - x_0)$

$x - x_0 \approx (F')^{-1}(F(x) - F(x_0))$

$\Delta \quad S = F^{-1}$, $S$ непр. по теореме о сохр. области; $\forall \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ $F(\mathcal{O}_1)$ — открыто $\}$ очевидно

$\forall F_*(\mathcal{O}) \quad S(F(\mathcal{O}_1))$ — открыто

$\forall \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O} \quad S^{-1}(\mathcal{O}_1)$ — откр — топол. опред. непрерывности.

$\mathcal{O}; \ F(\mathcal{O})$ — откр; $\quad S: F(\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$

$x_0 \quad y_0 = F(x_0)$; $\quad ?\ S$ дифф $y_0$

Лемма о почти лок. обратимости

$\exists c, \delta \ \forall x \in B(x_0, \delta) \ |F(x) - F(x_0)| > c|x - x_0|$ *

* $\quad F(\underset{S}{x}) - F(x_0) = F'(x_0)\underset{\rho(y)}{(x - x_0)} + |x - x_0|\alpha(x)$ — дифф.

$S(y) - S(y_0) = (F'(x_0))^{-1}(y - y_0) + \underbrace{|S(y) - S(y_0)|(F'(x_0))^{-1}}_{\beta(y)}$

Давайте покажем, что $|S(y)-S(y_0)|\,[F'(S(y_0))]^{-1}$ — нормальное б.малая величина.

$S(y)$ — непр. при $y \to y_0$ вып. (*)

$\forall \delta>0 \ \exists U(y_0) \ \forall y \in U(y_0) \ S(y) \in B(S(y_0), \delta)$

$|\beta(y)| = |x-x_0| \cdot |(F'(x_0))^{-1} \cdot \alpha(S(y))| \le \frac{1}{c}|y-y_0| \, \|F'(x_0)^{-1}\| \cdot |\alpha(S(y))| \to 0$

Рассмотрим отобр.-е

$$y \longmapsto \underset{\substack{\text{непр.}\\\text{сохран.}}}{S(y)} = x \longmapsto \underset{\text{непр.}}{F'(x)} \longmapsto \underset{\substack{\text{обр. напр.}\\\text{непр.}}}{(F'(x))^{-1}} = S'(y)$$

$y \mapsto S'(y)$

$\mathbb{R}^m \to Lin(\mathbb{R}^m\ \mathbb{R}^m)$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{непр}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\text{непр}} Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \longrightarrow$$

$A \mapsto A^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} A_n \to A_0 \\ A_n^{-1} \to A_0^{-1} \end{array}\right\}$ верно, потому что конструктивно прочтите

$\nabla$

3 $F \in C^r(O, \mathbb{R}^m) \Rightarrow F^{-1} \in C^r$

Л Лемма (об оценке лин. приближений)

$F \in C^1(O, \mathbb{R}^m) \quad x_0 \in O$

$|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x-x_0)| \le C \cdot |x-x_0|$,

где $C := \sup\limits_{z \in [x_0, x]} \|F'(z) - F'(x_0)\|$

$\Delta$

$|T(x) - T(x_0)| \le \|T'(c)\| \, |x-x_0|$

$T(x) := F(x) - F'(x_0)x \qquad T'(z) = F'(z) - F'(x_0)$

$T(x) - T(x_0) = F(x) - F'(x_0)\cdot x - (F(x_0) - F'(x_0)x_0)$

$\nabla$

Т О локальной обратимости

$F \in C^1(O, \mathbb{R}^m), \quad x_0 \in O \quad \det F'(x_0) \ne 0$

Тогда $\exists U(x_0) \quad F|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм

$\Delta$ $? \exists U(x_0) \quad F|_{U(x_0)}$ — обратима $\quad \forall x \in U(x_0) \ \det F'(x) \ne 0$

$\nabla$

Л $\exists c\ \forall h \quad |F'(x_0)h| \geq c|h|$

$\Delta$ Возьмем $U(x_0)$ так, что $\forall x \in U(x_0)\ \det(F'(x)) \neq 0$

и $\forall x \in U(x_0)\ \|F'(x) - F'(x_0)\| < \frac{c}{4}$

$x, y \in U(x_0)$. $\quad y = x + h$

$$|F(x) - F(y)| \leq \Big|(F(y) - \underset{мал}{F(x)} - F'(x)h) + (F'(x)h \underset{мал}{-} F'(x_0)h) + (F'(x_0)h)\Big| \geq$$

$$\geq |бол| - |мал| - |мал| \geq c|h| - \frac{c}{4}|h| - \overset{лоязм}{\frac{c}{2}}|h| \geq$$

$$\geq \frac{c}{4}|h| = \frac{c}{4}|y - x|$$

$$\sup_{z \in U(x_0)} \|F'(z) - F'(x)\| \leq \sup \|F'(z) - F'(x_0)\| + \sup \|F'(x) - F'(x_0)\| \leq \frac{c}{2}$$

20.10.14

Т о локальной обратимости (формулировка)

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots x_n) = y_n \end{cases}$$

$(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_n^0)$ – решение; $(x^0, y^0)$

Если все $f_i$ – гл. в окрестности $x^0$

и при этом $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right) \neq 0$

Тогда $\exists U(y^0)\ \exists V(x^0)\ \forall y \in U$ система разрешима

$\exists!$ реш. в $V(x^0)$ и это решение $x_i(y_1, \dots y_n)\ i = 1..n$ – гладкое

$\Delta$ $F: \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$

$(x, y)$

$x \in \mathbb{R}^m \quad y \in \mathbb{R}^n$

$$F' = \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ F_n & \dots & \end{matrix}}_{\substack{F'_x \\ m \times n}}, \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & & \dots \end{matrix}}_{F'_y \quad n \times n}\Bigg)$$

Т о неявном отображении

$F: \underset{откр}{E} \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n \quad F \in C^r(E, \mathbb{R}^n)$

$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m}}{(a,} \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{b)} \in E \qquad F(a, b) = \mathbb{0}_n$

Пусть матрица $F'_y(a,b)$ – обратима ($\det F'_y(a,b) \neq 0$)

$\Rightarrow \exists$ окр. $P(a)$ – откр. в $\mathbb{R}^m$, $Q(b)$ – откр. в $\mathbb{R}^n$,

$\varphi: \underset{\varphi(a)=b}{P \to Q} \mid \forall x \in P(a) \quad F(x, \varphi(x)) = 0_n$

При этом $\varphi \in C^r \quad \varphi'(a) = -(F'_y(a,b))^{-1} \cdot F'_x(a,b)$

▷

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots x_m, y_1 \dots y_m) = 0 \end{cases}$$

Переформулировка

$x_1^0 \dots x_m^0, \ y_1^0 \dots y_n^0 \quad \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)(x^0, y^0) \neq 0$

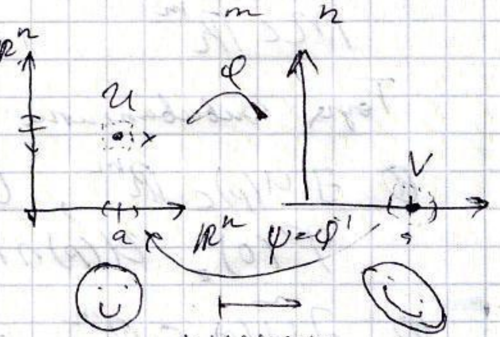
тогда $\exists P, Q : \forall x \in P \ \exists! \, y \in Q$

$\Phi : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}$

$\Phi(x,y) = (x, F(x,y)) \qquad \Phi' = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline F'_x & F'_y \end{array}\right) & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & n \end{array} & \end{array}$

$\det \Phi'(a,b) \neq 0$ очевидно

$\Phi(a,b) = (a, 0)$




$\exists$ $U$ – откр. в $\mathbb{R}^{m+n}$ $Q P \subset \mathbb{R}^{m+n}$ $U \neq P \times Q$ но сеть можно взять мн-во так, что $\varphi$ – диффеом.

1. $\Phi(U) = V$ – откр. в $\mathbb{R}^{m+n}$

$\Phi : U \to V$ – диффеоморфизм

$\Psi$ – обратное $V \to U$; $\Psi(x,y) = (x, H(x,y))$

$P$ – проекция мн-ва $V$ на $\mathbb{R}^m$; $\varphi(x) = H(x, 0)$

$F(x, \varphi(x)) = 0$

Дифф: $F'_x + F'_y \cdot \varphi'_x = 0 \qquad \varphi'_x = -(F'_y)^{-1} F'_x$

$(x,y) = \Psi\Phi(x,y) = \Psi(x,0) = (x, H(x,0)) = (x, \varphi(x))$

$F(x,y) = 0 \qquad F : E \subset \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1$

$F(a,b) = 0 \qquad \exists P(a)\, Q(b) \quad \exists! \varphi : P(a) \to Q(b)$

$F'_y(a,b) \neq 0 \qquad \forall x \in P(a) \quad F(x, \varphi(x)) = 0$

$$\varphi'(a) = -\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}$$

27.10.2014

О | $M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \le k < m$

$M$ – простое $k$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$

$M$ – гомеоморфно $O \subset \mathbb{R}^k$

$\exists \Phi: O \to M$ гомеоморфизм

---

$\Phi: O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \; / M = \Phi(O)$

$\begin{cases} \Phi \in C^r(O, \mathbb{R}^m) \text{ – многообразие } \overset{\text{класса}}{C^r} \\ \forall x \quad rg(\Phi'(x)) = k \end{cases}$

П | $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} \quad \varphi \in (0, \pi) \quad \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$rg \Phi' = 2$

Т | о двух опр. прост. $k$-мерного гладкого многообразия в $\mathbb{R}^m$

$M \subset \mathbb{R}^m \quad 1 \le k < m \quad 1 \le r < +\infty \quad p \in M$

$rg\Phi' = k$

Тогда эквивалентно:

① $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m, \; O \subset \mathbb{R}^k \quad \Phi: O \to \mathbb{R}^m \quad \Phi \in C^r$

$\Phi(O) = U(p) \cap M$

② $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m \quad \exists F_1, F_2, \dots F_{m-k}: \tilde{U}(p) \to \mathbb{R}$

$x \in \tilde{U}(p) \cap M \iff F_1 = 0 \dots F_{m-k} = 0$

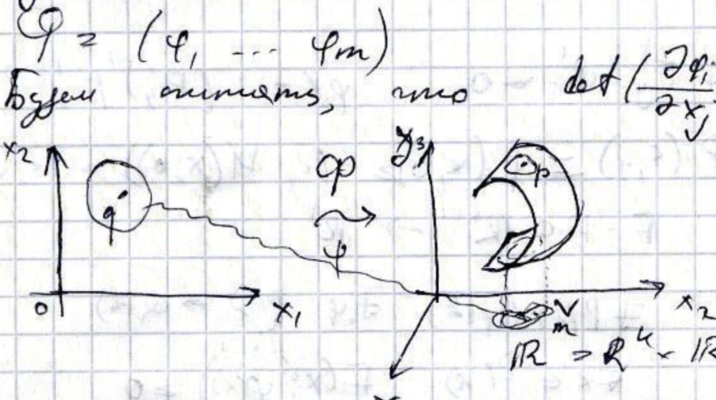
$(\text{grad} F_1 \dots \text{grad} F_{m-k})$

$\Delta$

$rg \Phi' = k$

$\Phi = (\varphi_1, \dots \varphi_m)$

Будем считать, что $\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i,j \in 1..k} \ne 0$



$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$

$P: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \qquad \Psi: P \circ \Phi \in C^r$

$(x_1, \dots x_m) \to (x_1 \dots x_k) \qquad$ Невыр: $rg\, \Phi' = k$

$\det \Psi'(q) \ne 0$

$\Psi: U(q) \to V(\Psi(q))$ диффеоморфизм

$\forall x' = (x_1' \dots x_k') \in V$ $\exists !$ точка $M \cap \varphi(U(p))$, которая проецируется в точку $x'$

$(x', U(x')) = \Phi(\psi^{-1}(x'))$

$U(x')$ – отобр. класса $C^2$

[ $U$ – откр.
[ $\Phi(U)$ – откр. мн-во в $M$ — Гомеоморфизм м.н. $\Phi^{-1}: M \to U$

$\exists\, \tilde U \subset \mathbb{R}^m$ $\quad F_j : \tilde U \to \mathbb{R}$

$\tilde U \cap M = \Phi(U)$ $\quad F_j(x_1 \dots x_m) = U_j(x_1 \dots x_k) - x_{k+j}$

$\tilde U \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ $\quad x \in \tilde U \cap M \Leftrightarrow \forall j\ F_j(x) = 0,\ j = 1 \dots m-k$

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{m-k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} m-k \end{array} \left| \begin{array}{c|ccc} * & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & -1 \end{array} \right|$$

$\nabla$

10.11.2014

$\Leftarrow$ Дано: $F(x) = 0$ $\quad F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists\, W(p) \ni 0$ $\quad \forall x \in W(p) \cap M$ $F(x) = 0$

$\operatorname{grad} F_1(p) \dots \operatorname{grad} F_{m-k}(p)$ – ЛНЗ

Д-ть: $\exists\, U(p)$ $\quad U \cap M$ – пр. $k$-мерное гл. многообр.

$\Delta$

$\operatorname{rang} F'(p) = m-k$ $\quad$ матрица $(m-k) \times m$, столбцы $k$, $m-k$: $\boxed{\ \ \ \ \ y\ }$ пусть невырожденная

$F(x, y) = 0$ $\quad x_1 \dots x_k\, y_1 \dots y_{m-k}$

$\det F'_y(p) \neq 0$

$\exists\, V((p_1 \dots p_k)) \subset \mathbb{R}^k$

$\exists\, \varphi : V \to \mathbb{R}^{m-k}$

$\forall x \in V(p_1 \dots p_k) \,|\, F(x, \varphi(x)) = 0$

Тем самым

$x = (x_1 \dots x_k) \in V \longmapsto (x, \varphi(x)) \in W(p)$

Якобиан $\begin{array}{c} \boxed{E} \\ \boxed{*} \end{array}\ m$, $\ k$

$\nabla$

## 5) Относительные экстремумы

О Лок. относит. максимум: $\Phi: E\subset\mathbb{R}^{m+k}\to\mathbb{R}^k$

$f: E\to\mathbb{R}$ — гладкие

$a$ — точка локального относ. максимума при $\Phi=0$

если $\Phi(a)=0$ и $\exists\, U(a)\ \forall x\in U(a)\ \Phi(x)=0 \quad f(x)\le f(a)$

---

Условие $\Phi(x)=0$ задает $m$-мерное гл. многообр. $M$

$a$ — лок. отн. макс. $f$ $\qquad a\in M$

$a$ — лок. макс. $f|_{M\cap U(a)}$

Т О необходимом условии отн. экстремума

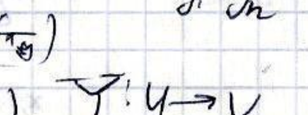
$\left.\begin{array}{l}\Phi: E\subset\mathbb{R}^{m+k}\to\mathbb{R}^k\\ f: E\to\mathbb{R}\end{array}\right\}$ гладкие

$a$ — точка лок. отн. ~~макс.~~ экстр. ф-ии $f$

$\operatorname{rang}\Phi'(a)=k$

$\Rightarrow\ \exists\,\lambda=(\lambda_1,\dots\lambda_k)\in\mathbb{R}^k \mid \begin{cases} f'(a)-\lambda\Phi'(a)=0\\ \Phi(a)=0\end{cases}$


$\Phi(x)=0$




$a=(a_x,a_y)$

~~$\exists\, U(a_x)\ \exists\ \exists W(a_y)$~~

$\exists\, U(a_x)\ \exists\, V(a_y)\ \varphi: U\to V \quad \forall x\in U\ \Phi(x, \varphi(x))$

Тогда $0_x$ — это точка лок. макс. $f(x,\varphi(x))$
$\mathbb{R}^m$

$\Phi(x,s)=0 \quad (x,s)\in U(s)$

$f(x,s)\le f(a_x,a_y)$

$f'_x+f'_y\cdot\varphi'=0 \quad (1)$

$\Phi'_x+\Phi'_y\,\varphi'=0$

$\{\Phi'_{x_1},\dots\Phi'_{x_n}=0$

и тогда $\forall\lambda\in\mathbb{R}^k$

$\lambda\Phi'_x+\lambda\Phi'_y\varphi'=0 \quad (2)$

$(1)-(2):\ (f'_x-\lambda\Phi'_x)+(f'_y-\lambda\Phi'_y)\varphi'=0$

Возьмем $\lambda=f'_y\cdot(\Phi'_y)^{-1}$,

при таком $\lambda$: $f'_x - \lambda\varphi'_x = 0$
и таких: $f'_y - \lambda\varphi'_y = 0$

$$f' - \lambda\varphi' = 0$$

О

$f, \varphi$ а-лок. экстр. В этой ситуации ф-я $F = f - \lambda\varphi$ наз. ф-ей Лагранжа

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x_1 \dots x_{n+m}) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n = 0 \end{cases} \quad \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$$ множители Лагранжа

$f(x_1, \dots x_{m+n})$

~ 17.11.2014

$F = f - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 - \dots - \lambda_n\varphi_n$

Это было повторение.

П

$A$ - сим. матрица $m \times m$ $(a_{ij})$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $f(x) = (Ax, x)$ /кв. ф-ма $x_1 \dots x_m$/

Найти экстремум на $S^{m-1} = S(0,1) = \partial B(0,1)$

Решение: $F = \sum a_{ij} x_i x_j - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 - 1)$

Дифф по $x_i$ $\begin{cases} 2\sum a_{ij} x_j - 2\lambda x_i = 0 \quad i = 1..m \\ x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ |x| = 1 \end{cases}$ $f(x_0) = \langle Ax_0, x_0\rangle = \langle\lambda x_0, x_0\rangle = \lambda_0$

max $f$, где $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ равен $\lambda$max (достиг. при $x =$ собств. в-р)

Т

$A \in \mathcal{L}_{m,n}$,

Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda}$, где $\lambda$ - с. число $A^T A\}$

$\Delta$ // Заметим

$A^T A x = \lambda x$ $\quad \langle A^T A x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = |Ax|^2$ ($= \lambda x^2$)

$\sum_i\sum_j b_{ij} y_i y_j = \sum_i (\sum_j b_{ij} y_j) x_i$

$\|A\| = \sup|Ax| = \max|Ax| = \max\sqrt{\langle A^T A x, x\rangle} =$
$= \sqrt{\max\langle A^T A x, x\rangle} =$ чему надо $\nabla$

Т Достаточное условие отн. экстр.

В усл. контексте н. усл. экстр

$x^0, \lambda^0$, $\begin{cases} f'(x^0) - \lambda^0 \Phi'(x^0) = 0 \\ \Phi(x^0) = 0 \end{cases}$

$F(x) = f(x) - \lambda^0 \Phi(x)$

$Q(h) = d^2 F(x^0, h) \quad h \in \mathbb{R}^{m+n}$

$\operatorname{rang} \Phi'(x^0) = n$ Рассмотрим ур-е $\Phi'(x^0)h = 0$

~~Выразим~~ Выразим из системы

$h_{m+1} \dots h_{m+n}$ через ост.

$h_{m+1}(h_1 \dots h_m) \dots h_{m+n}(h_1 \dots h_m)$

$\tilde{Q}(h_1 \dots h_m) = Q(h_1 \dots h_m, h_{m+1}(h_1 \dots h_m), \dots, h_{m+n}(\dots))$

Тогда $\tilde{Q}$ – положит. опр. – минимум
– отр. опр – максимум
– знаконеопределена или еще что нибудь – нет информ.

△ нету и не должно быть
▽

П $f(x, y, z) = x^2 z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z$
$xyz = 6$

$\Phi = xyz - 6$
$n = 1$
$(m+n) = 3$

Сост. ф-ию Лагранжа:

$F(x, y, z) = x^2 z^2 + y^3 - 12x - 9y - 4z - \lambda(xyz - 6)$

$\begin{cases} 2xz^2 - 12 - \lambda yz = 0 \\ 3y^2 - 9 - \lambda xz = 0 \\ 2x^2 z - 4 - \lambda xy = 0 \\ xyz = 6 \end{cases}$ $(1, 2, 3)$ – ?
$\lambda = 1$

$F''_{xx} = 2z^2$ 18 $F''_{xy} = -\lambda z$ -3
$F''_{yy} = 6y$ 12 $F''_{xz} = 4xz - \lambda y$ 10
$F''_{zz} = 2x^2$ 2 $F''_{yz} = -\lambda x$ -1

$d\Phi = 0$ $Q = 18dx^2 + 12dy^2 + 2dz^2 + 6dxdy + 20dxdz - 2dydz$

$yz\,dx + xy\,dz + xz\,dy = 0$

$[\, 6dx + 2dz + 3dy = 0$

$2\,dz = -3dy - 6dx$

$$\Phi = 18dx^2 + 12dy^2 + \frac{1}{2}(3dy + 6dx)^2 - 6dx\,dy - 10dx(3dy + 6dx) -$$
$$- dy\;(3dy + 6dx)^2$$

$$= dx^2(-14) + dy^2\left(1\cancel{8}\frac{9}{2}\right) + ?\,dx\,dy \text{ — нет экстр.}$$

П

$F(x, y, z) = x^2z^2 + y^3$

$x^2 + y^2 + z^2 = 100$
$x + y + z = 1$

$$F = x^2z^2 + y^3 - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 100) - \lambda_2(x + y + z - 1)$$

$$\begin{cases} 2xz^2 - \lambda_1 2x - \lambda_2 = 0 \\ 3y^2 - \lambda_1 2y - \lambda_2 = 0 \\ 2x^2z - \lambda_1 \cdot 2z - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$d^2F = L\,dx^2 + L\,dx\,dy + L\,dy^2 + \ldots$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot dx + 2 \cdot 2 \cdot dy + 2 \cdot 3 \cdot dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$$

# Криволинейный интеграл

## §1 Кр. интеграл

0 $\mathbb{R}^m$ путь $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ непр.

$\gamma \in C^1[a,b]$ - гл. путь $\gamma([a,b])$ - носитель

$\gamma(a)$ - начало $\gamma(b)$ - конец

$\gamma'(t)$ - вектор скорости

$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

$\gamma(t)$ - „гладкое, кусочно" - гл. кроме $\{t_1, \dots t_n\}$ $\forall t_i \; \exists \gamma'_+(t_i), \gamma'_-(t_i)$

0 $V: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - векторное поле в области $E$

$V \in C(E)$ - непр. в. поле

$V \in C^1(E)$ - гладкое в. поле

$V(x)$ - вектор в $x$

0 Интеграл в. поля по пути (кусочно-гладкий)

$\gamma: [a,b] \to E \subset \mathbb{R}^m$ - гл.

$V: E \to \mathbb{R}^m$ - в. поле (непрерывное)

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$V = (v_1, \dots v_n)$
$\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$

$$I(V,\gamma) = \int_a^b (V_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + V_m(\gamma(t))\gamma_m'(t)) dt$$

$$= \int_a^b (V_1(\gamma(t))\, d\gamma_1(t) + \dots + V_m(\gamma(t))\, d\gamma_m(t))$$

$$I(V,\gamma) \underset{\text{обозн}}{=} \int_\gamma (V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m)$$

Л Св-ва этого интеграла:

1. Линейность по полю $I(\alpha V + \beta U, \gamma) \underset{\text{очевидно}}{=} \alpha I(V, \gamma) + \dots$
2. Аддитивность по пути: дробление $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ $c \in [a,b]$ $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) \underset{\text{очевидно}}{+} I(V, \gamma_2)$$

3. Замена параметра

$\varphi: [p, q] \to [a, b]$ $\quad \varphi(p) = a \quad \varphi(q) = b \quad \varphi \in C^1$

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{\gamma}: [p, q] \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

$$I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

$\Delta$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \ldots \underset{t = \varphi(s)}{=} \int_p^q (V_1(\gamma(\varphi(s)))\gamma_1'(\varphi(s)) + \ldots)\varphi'(s)\,ds =$$

$\nabla$

$\gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) = \tilde{\gamma}'(s)$

4. Объединение носителей

$\bar{\gamma}: [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{\gamma}: [p, q] \to \mathbb{R}^m$

$\bar{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(p)$

$\bar{\gamma}(a) \quad \bar{\gamma}(b) = \tilde{\gamma}(p) \quad \tilde{\gamma}(q)$

$$\gamma = \bar{\gamma}\tilde{\gamma} := \begin{cases} \bar{\gamma}(t), & t \in [a, b] \\ \tilde{\gamma}(t - b + p), & t \in [a, q - p + b] \end{cases}$$

$\gamma: [a, q - p + b]$ $\quad$ Тогда $I(V, \gamma) = I(V, \bar{\gamma}) + I(V, \tilde{\gamma})$

$\Delta$ очевидно $\nabla$

5. Противоположный путь

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^m$

$\gamma_-: [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad \gamma_-(t) = \gamma(b - t + a)$

$$I(V, \gamma_-) = -I(V, \gamma)$$

$\Delta$

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,dt \underset{\substack{s = b - t + a \\ t = b - s + a}}{=} \int_b^a \langle V(\gamma(b - s + a)), \gamma'(b - s + a) \rangle \cdot (-1)\,ds$$

$$= \int \langle V(\gamma_-(s)), \gamma_-'(s) \rangle\,ds$$

6. Оценка

$\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^m$, гл.

$L := \gamma([a, b])$

$l(\gamma)$ – длина пути

$$|I(V, \gamma)| = \left|\int_a^b V_1\,dx_1 + \ldots + V_m\,dx_m\right| \le \max_{x \in L} |V(x)| \cdot l(\gamma)$$

$$A \le \int_a^b |\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle|\, dt \le \int_a^b |V(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt \le$$

$$\le \max_{x\in L} |V(x)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt}_{l(\gamma)}$$

$\nabla$

## §2 Потенциальные векторные поля

О Поле потенциально, если имеет потенциал

Потенциал:

$$\underset{\text{область}}{V: O \subset \mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^m \qquad f: O \to \mathbb{R}$$

$f$ - потенциал в поле $V$ в области $O$
если $\forall x \in O \quad \operatorname{grad} f(x) = V(x)$

Т Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$V: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ потенциальное, $f: O \to \mathbb{R}$

$\gamma: [a,b] \to O$ - кус. гл. путь

$A = \gamma(a) \quad B = \gamma(b)$

Тогда $\int_\gamma (V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m) = f(B) - f(A)$

$= \int \Phi'(t)\, dt = \Phi(b) - \Phi(a)$ для гл. пути

$\Delta$ $\Phi(t) = f(\gamma(t))$

$\Phi'(t) = f'_{x_1}\gamma'_1 + \dots + f'_{x_m}\gamma'_m$ для кус. гл. $\Phi(t)$ - почти первообр.

$\nabla$

О $V$, $O$ инт. в нап., не зав. от пути в $O$

$\forall A, B \in O$ $\forall$ кус. гл. $\gamma_1\ \gamma_2$
у кот. $A$, $B$ кон. и нач.

$I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$

Т $V: O \to \mathbb{R}^m$ - гл. векторное поле. Тогда экв.:

1) $V$ - потенциально
2) Инт. $V$ не зависит от пути в $O$
3) Интеграл по любой петле $\gamma(\dots)$ нач. $= A =$ конц. равен 0

$\Delta$

$1 \Rightarrow 2$ формула Ньют. Лейбница

$2 \Leftrightarrow 3$ очевидно

$2 \Rightarrow 1$ зададим $F: O \to \mathbb{R}$ фикс $x_0 \in O$

$\forall x \in O$ возьмем $\gamma_x$ из $x_0$ в $x$

$$F(x) = \int_{\gamma_x} \sum V_i dx_i$$

$$F'_{e_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+he_1) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim \frac{1}{h} \int_{[x, x+he_1]} V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \dots + V_m dx_m =$$

$$\gamma: [0,h] \to \mathbb{R}^n \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1+t \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$= \lim \frac{1}{h} \int V_1(x_1+t, \dots) = V_1(x_1 \dots x_m)$$

$\nabla$

Т3 Лейбница (о дифференцируемости) интеграла, зависящего от параметра

$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

$\forall (x,y)$ $\exists f'_y(x,y)$ - непр на $[a,b] \times [c,d]$

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y) dx$$

Тогда $\Phi(y)$ - дифф на $[c,d]$ и

$$\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y) dx$$

$\Delta$

$$\Phi'(y) = \lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} dx =$$

$\to f'_y$

$$= \lim_{h \to 0} \int_a^b f'_y(x, y+ch) dx, \text{ где } c \in [0,1]$$

$c$ зависит от $x$ и $y$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x, y$ $\rho(x,y) < \delta$

$[a,b] \times [c,d]$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

по т. Кантора $f$ - равн непр

$$\left| \int_a^b f'_y(x, y+ch) - f'_y(x,y) dx \right| \le \int_a^b |f'_y - f'_y| \le$$

$\le \int_a^b \varepsilon\, dx = \varepsilon(b-a)$

$\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall h\ |h|<\delta$

▷

Л диф. кр. потенциальности в. п.

$V$ — гладкое (!) в. поле в обл. $O$

$V$ — потенциально

Тогда $\forall x\in O\ \forall i,j\in\overline{1\ldots m}\ \frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$

◁

Если $F$ — потенциал $\Rightarrow$ оч. част.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$$

Т Лемма Пуанкаре (wow so beautiful)

$O\subset\mathbb{R}^m$ — выпукла, $V: O\to\mathbb{R}^m$ — гладкое, удовл. $\Rightarrow$ $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial V_j}{\partial x_i}(x)$ $(*)$

Тогда $V$ — потенциально в $O$

◁

$A\in O \quad x\in O$

$\gamma: t\to A+t(x-A) \quad t\in[0,1] \quad \gamma'=(x-A)$

$F(x)=\int_\gamma \sum V_i\, dx_i=\int_0^1\sum_{i=1}^m \underbrace{V_i(A+t(x-A))}_{\text{вектор}}(x_i-A_i)\,dt$

$F'_{x_k}=\int\sum_{l=1}^m \frac{\partial V_l}{\partial x_k}(A+t(x-A))\,t(x_l-A_l)+V_k(A+t(x-A))\,dt=$

$=\int_0^1\sum_{l=1}^m \frac{\partial V_k}{\partial x_l}(A+t(x-A))(x_l-A_l)+V_k(A+t(x-A))\,dt=$

$=tV_k(A+t(x-A))\Big|_{t=0}^{t=1}=V_k(x)$

▷

О $V$ — лок. потенц. в. поле в обл. $O$ если $\forall x\in O$

$\exists U(x)\subset O$ в $U(x)$ — поле потенц.

Сл (Л. Пуанкаре) $O$ — произвольна, $V$ — гл. поле, удовл. $(*)$

Тогда $F$ — локально потенциально

8.12.14

Л о гусенице 

$\gamma: [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — непр. путь, $\varepsilon > 0$

Тогда ∃ разб. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
∃ набор шаров $B_n$, радиус $< \varepsilon$
$\forall k \in 1..n$ $\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$

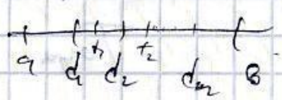
Δ

$t \in [a,b]$ $\gamma(t) \in O$, возьмем шар $B_t$ — с центром $\gamma(t)$ радиуса $< \varepsilon$, $\subset O$

Возьмем $[\alpha_t, \beta_t] \ni t$ | $\gamma([\alpha_t, \beta_t]) \subset B_t$

не на краях если $t \ne a$, $t \ne b$ ($t \in (\dots,\dots)$) ($t = a$, $[a, \beta)$) ($t = b$, $(\alpha, \beta]$)

Получим покрытие:
$[a,b]$ $t \mapsto (\alpha_t, \beta_t)$
∃ конечное подпокрытие
$(\alpha_1, \beta_1) \dots (\alpha_m, \beta_m)$ и делаем эти поправки
Выкинем лишние промежутки $(\beta_i \in B_i \cup \beta_k)$
$\forall (\alpha_i, \beta_i)$ из оставшихся
∃ $d$ покрытое только $(\alpha_i, \beta_i)$
Перенумеруем слева направо $d_1 \dots d_e$
Перенумеруем интервалы так что $d_i \leftrightarrow (a_i, b_i)$ и $B_i$
Между каждой $d_i\, d_{i+1}$ поставим $t_i$
так что $t_i \in (\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_{i+1}, \beta_{i+1})$
$t_i$, $B_i$ — искомые




∇

О

$\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — в $\mathbb{R}^m$ все пути похожи

похожи, если ∃ общее дробление
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$
и набор шаров $B_k$ из леммы 1
[ε-похожие?]

Л Равенство интегралов по похожим путям

$\gamma, \tilde\gamma : [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ кусочно-гладкие похожие, $\gamma(a) = \tilde\gamma(a)$, $\gamma(b) = \tilde\gamma(b)$

V — локально потенциальное в.п. в O

Тогда $I(\tilde\gamma, V) = I(V, \gamma)$ swap

Δ Берем общую гусеницу
$\forall k$ в шаре $B_k$ поле потенциально ($\subset O$)
∃ $P_k$ — потенциал в $B_k$
Пройдем по $\gamma$ и „согласуем потенциалы", чтобы $P_{k+1}(\gamma(t_k)) = P_k(\gamma(t_k))$ (отл. на const всегда)

$$I(v,\gamma) = \sum_{k=1}^{n} \int_{[t_{k-1},t_k]} \left[\sum v_i\,dx_i\right] = \sum \left(p_k(\gamma(t_k)) - p_k(\gamma(t_{k-1}))\right) =$$

благодаря нашей нормировке сумма телескопическая

$$= p_n(\gamma(t_n)) - p_1(\gamma(t_0))$$

С другой стороны $I(v,\tilde\gamma) = \sum\left[p_k(\tilde\gamma(t_k)) - p_k(\tilde\gamma(t_{k-1}))\right] =$

$$= p_n(\tilde\gamma(t_n)) - p_1(\tilde\gamma(t_0))$$

снова все в пересеч. - соглас.

$\nabla$

С Для путей-петель $I(v,\tilde\gamma) = I(v,\gamma)$, но тут не требуется равенство начал/концов путей

Л О похожести путей, близких к данному

$\gamma: [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ непр

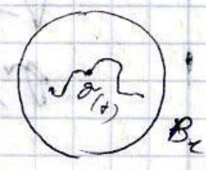
Тогда $\exists\,\delta>0\ \forall\,\tilde\gamma, \tilde{\tilde\gamma}: [a,b]\to O$, т.ч. $\forall t\in[a,b]$
$|\tilde\gamma(t)-\gamma(t)|<\delta$, $|\tilde{\tilde\gamma}(t)-\gamma(t)|<\delta$

Тогда эти $\tilde\gamma$ и $\tilde{\tilde\gamma}$ похожи (в нужном плане)

$\Delta$

$\gamma$, гусеница для нее из Л1

$\underbrace{\gamma([t_{k-1},t_k])}_{\text{компакт}} \subset B_k$



$\exists\,\delta>0 \quad \forall t\in[t_{k-1},t_k] \quad B(\gamma(t),\delta)\subset B_k$

ф-я $t \mapsto \operatorname{dist}(\gamma(t), \underbrace{\partial B_k}_{\text{граница}})$ непр. на $[t_{k-1},t_k] \Rightarrow \exists \min>0$

По всем промеж. $[t_{k-1},t_k]$ возьмем $\delta=\delta_{\min}$

Итак наша гусеница „обслуживает" все три пути (на всех)

$\nabla$

З. Вложит непрерывн. путь похож на кус-гл.

16.12.2014

О $\gamma:[a,b]\to O$ — непр. путь

V — вект. поле в O, лок. потенциальное

$$\int_\gamma \sum v_i\,dx_i \stackrel{def}{=} \int_{\tilde\gamma} \sum v_i\,dx_i,$$

где $\tilde\gamma$ кус. гл. путь близкий к $\gamma$ в смысле леммы

Корректность умб ($\tilde{\tilde\gamma}$ будет работать так же) доказывается леммой о похожести путей, близ. к д.

Таке.

6 Гомотопия

О Гомотопия, гомотопные пути

$\gamma, \tilde\gamma : [a,b] \to O \subset \mathbb{R}^m$ — связанно гомотопны, если

$$\begin{cases} \gamma(a) = \tilde\gamma(a) \\ \gamma(b) = \tilde\gamma(b) \end{cases} \Big\}\ \text{усл. связанности}$$

$\exists\, \Gamma : \underset{t}{[a,b]} \times \underset{s}{[0,1]} \to O$ — непрерывно!

$\Gamma(t,0) = \gamma(t)$,
$\Gamma(t,1) = \tilde\gamma(t)$,
$\forall s \in [0,1]$ $\Gamma(a,s) = \gamma(a)$
$\Gamma(b,s) = \gamma(b)$

О Петельная гомотопия

$\gamma, \tilde\gamma$ — петли, $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\tilde\gamma(a) = \tilde\gamma(b)$
$\forall s$ $\Gamma(a,s) = \Gamma(b,s)$ (могут не совпадать $\gamma(a)$ с $\tilde\gamma(a)$)

T О равенстве пот. в. п. по гомотопным путям

$V$ — лок. пот. в.п. в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde\gamma$ — два гомотопных пути (непр) /связанная или петельная гомот./

Тогда $\int\limits_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int\limits_{\tilde\gamma} \sum V_i dx_i$

$\Delta$ $\Gamma$ — гомотопия $\gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$

$\Phi(s) := \int\limits_{\gamma_s} \sum V_i dx_i : [0,1] \to \mathbb{R}$

Проверим, что $\Phi(s)$ — лок. постоянна

$s_0 \in [0,1]$ проверим, что $\exists U(s_0)\ \forall s \in U(s_0)$ $\Phi(s) = \Phi(s_0)$

$\underbrace{\Gamma : [a,b] \times [0,1]}_{\text{компакт}} \to O \mid \Rightarrow \Gamma$ — равном. непр.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (s,t) (s_1,t_1):$
$|s - s_1| < \delta$ $|t - t_1| < \delta$ $(*)$

$|\gamma_s - \gamma_{s_0}| = |\Gamma(t,s) - \Gamma(t,s_0)| = |\Gamma(s,t) - \Gamma(s_1,t_1)| < \varepsilon$
/возьмем $\varepsilon$ из п. 3 (оских..)/
/$\delta$ из $(*)$, пути $\gamma_s$ и $\gamma_{s_1}$ — близкие/

$|\Gamma(t,s_0) - \Gamma(t,s_0)| = \delta$

$\gamma_{s_0}$ — непр. Подберем $\tilde\gamma_{s_0}$ — близкий к $\gamma_{s_0}$, кус-гл.

$\bar\gamma$ близкий к $\gamma_s$ (кус-гл.)

$\Phi(s) = \int\limits_{\gamma_s} = \int\limits_{\bar\gamma}$ $\Phi(s_0) = \int\limits_{\gamma_{s_0}} = \int\limits_{\tilde\gamma}$ $\tilde\gamma$ и $\bar\gamma$ похожи, пот. что близки к $\gamma_{s_0}$

$\tilde{\gamma}$ близок по опр. $\overline{\gamma}$ близок и $\gamma_{s_0}$: $\delta$ по опр. $V$

$$|\overline{\gamma}(t)-\gamma_{s_0}(t)| \le |\overline{\gamma}(t)-\gamma_s(t)| + |\gamma_s(t)-\gamma_{s_0}(t)|$$

Нужно было взять $\frac{\delta}{2} \longrightarrow \hat{\delta}$ $< 2\delta$

$\nabla$

C Аналогично $\int_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}}$, если $\gamma$ и $\tilde{\gamma}$ петельно гомот. (а $V$ - лок. пот.)

O $O \subset \mathbb{R}^m$ - область - односвязна, если в ней все петли стягиваются

$\forall \gamma : [a,b] \to O \quad \gamma(a) = \gamma(b)$

$\gamma$ - гомотопна постоянному пути ($\tilde{\gamma} : \forall s\, \tilde{\gamma}(s) = k$)

T $O$ - односв. область, $V$ - лок. потенциально в $O$ $\Rightarrow$ $V$ потенциально в $O$

$\Delta$

$\gamma$ - путь петля в $O$ - гомотопен постоянному пути $\tilde{\gamma}$

$$\int_\gamma \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i = 0$$

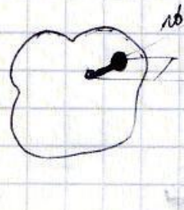
по опр.?

Это значит что $V$ - потенциально (интегр. не зав. от пути / по люб. петле $I = 0$)

$\nabla$

П Имеем гвоздик и веревочку. Как достать ее? (снять гвоздик))

$\mathbb{R}^2$ гвоздик



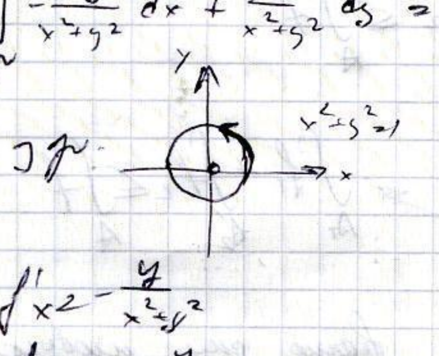
$$V = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$V'_{1y} = V'_{2x}$ ? это правда

$V$ локально потенциально

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_\gamma \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \, d\varphi = 2\pi$$

$\exists \gamma$:




Веревочку нельзя снять с гвоздика, иначе $\int \ldots = 0$

$\int' x = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$f = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad x > 0 \qquad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi \quad x < 0$

$\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ формула мы добавили $\pi$

22.12.2014

Л $A = \bigsqcup^{\infty} A_k$, все измеримы. $g$ - ступ $\geq 0$

$$\int_A g\, d\mu = \sum_{k\geq 1}^{+\infty} \int_{A_k} g\, d\mu$$

$\Delta$

$$g = \sum_{\text{кон.}} \alpha_i \chi_i \qquad \int_A g\, d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(E_i \cap A) =$$

$$(E_i \cap A = \bigsqcup_k^{\infty} E_i \cap A_k)$$

$$= \sum_{i,k} \alpha_i \mu(E_i \cap A_k) = \sum_k \left[\sum_i \alpha_i \mu(E_i \cap A_k)\right] =$$

$$= \sum_k \int_{A_k} g\, d\mu$$

$\nabla$

Т $A = \bigsqcup_{k\geq 1}^{+\infty} A_k$, $f$ - измеримая, неотрицательная ($\geq 0$)

$A_k$, $A$ - изм.

Тогда $\int_A f d\mu = \sum \int_{A_k} f d\mu$

$\Delta$

$\leq$ Возьмем ступ $g \geq 0, \leq f$

$$\int g\, d\mu = \sum \int_{A_k} g\, d\mu \leq \sum \int_{A_k} f\, d\mu$$

$\downarrow \sup$

и готово

$\geq$ $A = A_1 \sqcup A_2$, $f$: $0 \leq g_1 \leq f \chi_{A_1}$

$0 \leq g_2 \leq f \chi_{A_2}$

$$\underbrace{g_1 = \sum \alpha_i \chi_{E_i} \qquad g_2 = \sum \beta_i \chi_{E_i}}_{\text{совм. допуст. разбон.}}$$

$g_1 + g_2 \leq f$; $\int_A g_1 + \int_A g_2 \leq \int_A f$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 \leq \int_A f d\mu$$

$\downarrow \sup$

$$\int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} f \leq \int_A f \longrightarrow \int_{A_1} f_1 + \int_{A_2} f_2 \leq \int_A f$$

$\downarrow \sup$

По индукции верно для любого $n \in \mathbb{N}$ (конечного)

$A = \bigsqcup_{k\geq 1}^{+\infty} A_k$ для $n$ $A = \bigsqcup_{k\geq 1}^{n} (A_k \sqcup B_k)$

где $B_k = \bigsqcup_{k > n} A_k$

$$\int_A f \ge \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f + \int_{B_n} f \ge \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f \xRightarrow{n\to\infty} \int_A f \ge \sum^{\infty} \int_{A_k} f$$

$\nabla$

С Функция: $\mathfrak{A} \to \mathbb{R}_+$ ] $\exists f \ge 0$ изм.

$A \mapsto \int_A f\,d\mu$ → является мерой.

С $f \ge 0$, изм. $A \supset B$ $\int_A f \ge \int_B f$

С $f$ – сумм. $A = \bigsqcup^{\infty} A_k$ $A, A_k$ – измеримые

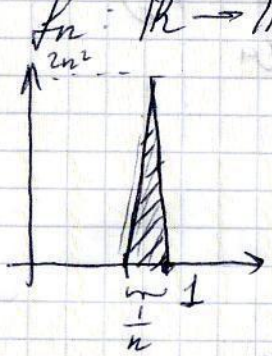
Тогда $\int_A f_\pm \, d\mu = \sum \int_{A_k} f_\pm \, d\mu$ (в оригинале без $\pm$, но д-во с ними)

$\Delta$ ... $\sum \alpha_k - \sum \beta_k = \sum (\alpha_k - \beta_k)$

$\nabla$ ...

## 5 Предельный переход под знаком интеграла

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




на $[0,1]$ $f_n \to f \equiv 0$

$n = \int_{[0,1]} f_n \not\to \int_{[0,1]} f = 0$

Т теорема Леви $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

$f_n \underset{\text{изм}}{\ge 0}$ $\forall x$ $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \dots$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

$\Delta$

$\le$ очевидно $\forall n$ $\int_X f_n(x) \le \int_X f(x)$

значит и предел не превосходит.

$\ge$ $0 \le \underset{\text{ступ}}{g} \le f$ Хотим: $\lim \int f_n \ge \int g$

$\square$ Будем док. $\forall c \in (0,1)$

$\lim \int f_n \geq c \int g \, d\mu$

$E_n = X(f_n \geq cg)$ $\quad \bigcup\limits^{\infty} E_n = X$ $(f_n(x_0) \to f(x_0) \geq g(x_0) \geq cg(x_0))$

$E_n \subset E_{n+1}$

$$\int\limits_X f_n \underset{\text{сл.2}}{\geq} \int\limits_{E_n} f_n \geq c \int\limits_{E_n} g \, d\mu$$

делаем переход по $n$

$$\int\limits_X f \underset{\text{по непр. сн.-зу меры } E_n}{\geq} c \int\limits_X g \, d\mu$$

Перейдем к $\lim / \sup$ по $c$

$\nabla$

T $f, g \geq 0$ — измеримые $\quad (X, \mathfrak{A}, \mu)$

Тогда $\int\limits_X f+g \, d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$

$\Delta$

$g_n$ — ступ. $\geq 0$ $\quad g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ $\quad g_n \to f$

по теор. об аппрокс.

$h_n$ — ступ. $\geq 0$ $\quad h_n \leq h_{n+1}$ $\quad h_n \to g$

$g_n + h_n$ — ступ $\geq 0$ $\quad (g_n + h_n) \leq (g_{n+1} + h_{n+1})$

$g_n + h_n \to f+g$

$$\int (g_n + h_n) \, d\mu = \int\limits_X g_n d\mu + \int\limits_X h_n \, d\mu$$

Тогда $\int\limits_X f+g \, d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$

$\nabla$

C $f, g$ — сумм, тогда $f+g$ — сумм

и $\int\limits_X f+g = \int\limits_X f + \int\limits_X g$

C $\mathcal{L}(X)$ — мн-во сумм. ф-й на $X$

Тогда это лин. пр-во

01

# Теория меры

## §1. Системы мн-в

О Дизъюнктный набор мн-в $A_1 \dots A_n \Rightarrow \forall i;\ A_i \cap A_j = \varnothing$

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \text{ — дизъюнктное объед.}$$

О $X$ — мн-во, $P$ — семейство подмножеств мн-ва $X$

$P$ — полукольцо:

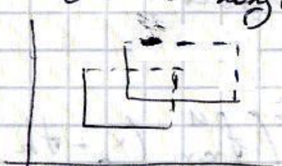
① $\varnothing \in P$

② $\forall A, B \in P \quad (A \cap B) \in P$

③ $\underbrace{\forall A, B}_{\in P} \quad \exists$ кон. дизъюнктный набор $D_1 \dots D_k$ $\quad A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_i$

П ① Полуинтервалы ячеек в $\mathbb{R}^m$

Левно-полуоткр. паралл.п. $[a, b) = \{x : a_1 \le x_1 < b_1, \dots, a_m \le x_m < b_m\}$



② $X = \mathbb{R}^2$, $P$ — огр. подмножества

О $X$, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — алгебра, если

① $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}$

② $X \in \mathcal{A}$

Св-ва:

① $\varnothing \in \mathcal{A} \quad X \setminus X$

② $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{A}$

③ $A \in \mathcal{A} \quad A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$

④ $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cup B \in \mathcal{A} \quad (A^c \cap B^c)^c = A \cup B$

⑤ $A_1 \dots A_n \in \mathcal{A} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{A} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

⑥ $\mathcal{A}$ — алг $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ — полукольцо

О $X$, $\mathcal{A} \subset 2^X$ $\sigma$-алгебра если
$\mathcal{A}$ - алгебра $\underbrace{\forall A_1, A_2, \ldots}_{\text{счетный набор}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in \mathcal{A}$

З ① $\bigcap_{\nu=1}^{+\infty} = X \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{+\infty} A_\nu^c\right)$

② $E \subset \mathcal{A}$ $\mathcal{A}_E = \{A \in \mathcal{A}; A \subset E\}$ - $\sigma$-ал.
(Тогда $A^c = E \setminus A$)

## §2 Объем

О $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ - адд. ф-ция
1) $\mu$ - не принимает беск значений разных знаков
2) $\mu(\emptyset) = 0$
3) $\forall A_1 \ldots A_n$ - дизъ, $\in \mathcal{P}$ и $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

О1 $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ - аддитивна $\geq 0$ Т.к. наз объем
О2 Если $\forall A \subset \mathcal{P}$, $\mu A < +\infty \Rightarrow \mu$ - кон. объем

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, возр, непрерывна $\nu([a, b]) = g(b) - g(a)$

П
1) $\nu([a, b)) = b - a$
2) $\nu_g([a, b)) = g(b) - g(a)$
3) Класс. объем в $\mathbb{R}^m$ $\nu([a, b)) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$
4) $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R}^m, E$ - огр либо $E^c$ огр$\}$
$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E\text{-огр} \\ 1, & E\text{-неогр} \end{cases}$$

Т О свойствах объема
$\exists \mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ позначно
$\Rightarrow$ ① $\mu$ - усиленная монотонность $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$
$A_k, A \in \mathcal{P} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \mu A_k \leq \mu A$

② Конечная полуаддитивность $A_k, A \in \mathcal{P}$ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_k$

③ $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}$ $\mu(A \setminus B) < +\infty$

$\mu(A-B) \geq \mu A - \mu B$

[А если $B \subset A$, то $\mu A \setminus B = \mu A - \mu B$]

$\Delta$

1. $\left(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigsqcup_{l=1}^{N} B_l$

$A = \bigsqcup A_k \sqcup \bigsqcup B_l$ (кон.) $\mu A = \sum \mu A_k + \sum \mu B_k$

$\sum (\mu A_k) \leq \mu A$

3. ? : (б) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ б) $B \subset A \Rightarrow$

$\mu(A \cap B) \leq \mu B$ по п.1, т.к. $A \cap B \subseteq B$ $\mu A = \mu(A \setminus B) + \mu B \Rightarrow$

$\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu(A \cap B) \geq \mu A - \mu B$ $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$.

2. $B_k = A \cap A_k \in \mathcal{P}$ $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$

$C_1 = B_1$

$C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right)$ — опред. полукольца

$A = \bigsqcup C_k$ $\longrightarrow$ $C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i\right) = \bigsqcup_j D_{kj}$

$A = \bigsqcup D_{kj}$

$\mu A = \sum_{k,j} \mu D_{kj}$ (кон.)

$\sum_j (\mu D_{kj}) \leq \mu A_k$ $\leftarrow$ первый

$(\sqcup D_{kj} \subset C_k \subset B_k \subset A_k)$

$\nabla$

Зад. ① $X = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{P} = 2^X$

? $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ $\mu(\{1\}) = 1$

$\mu\{1,2,3\} = 100$

② $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$\mu(A \cup B \cup C) =$
$= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) +$
$+ \mu(A \cap B \cap C)$

# 53 Мера

О $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера, если
1. $\mu$ — объём
2. $\mu$ — обл. св-вом счётной аддитивности
$$\left(A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i;\ (A_i, A \in \mathcal{P}) \Rightarrow \mu A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i\right)$$

З Пример № ?(4) (я не написал) (я написал) — не является счётно аддитивным $\sum 0 = 1$

П $X$ — множество, $A_1, A_2, \dots A_i \dots$ попарно разл. точки в $X$
$h_1, h_2 \dots h_i \dots > 0$ — веса.
$\mathcal{P} = 2^X$ $\quad \mu E = \sum_{i: A_i \in E} h_i$ — Считающая мера


Т О счётной полуаддитивности
$\mu: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mu$ — объём
Тогда эквивалентно:
① $\mu$ — $\overset{\text{has}}{\text{счётная}}$ аддитивность ($\mu$ — мера)
② $\mu$ — счётно полуаддитивна $A, A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{P}$,
$$A \subset \bigcup A_i, \quad \mu A \le \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i$$

$\Delta$ $1 \Rightarrow 2$ Аналогично теореме об объёмах п. 2 (там же [illegible] — нам счётно много пол.)

$2 \Rightarrow 1$
$$\boxed{?\ A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \mu A = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu A_i\ ?}$$
$$\forall n \quad \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \subset A \underset{\text{усил. монот.}}{\Rightarrow} \sum \mu A_i \le \mu A \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum^{\infty} \mu A_i \le \mu A$$
$$A \subset \bigsqcup A_i \Rightarrow \mu A \le \sum \mu A_i$$
▲

Сл $A \in \mathcal{P}$ $A_n \in \mathcal{P}$ $\mu A_n = 0$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \Rightarrow \mu A = 0$

T | $\mathcal{A}$ — алгебра $\quad \mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$

Тогда эквивалентно:

1. $\mu$ — мера

2. $\mu$ — непрерывна снизу $(A_1 \subset A_2 \subset \dots \quad A \quad A_i \subset A$
$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ Тогда
$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$

$\Delta$

$1 \Rightarrow 2$

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1 \quad B_3 = A_3 \setminus A_2$

$A = \bigsqcup B_i \quad \mu A = \sum \mu B_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu B_i = \lim_{N\to\infty} \mu A_N$

$2 \Rightarrow 1$

$C = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} C_i \quad \mu C \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mu C_i$

$D_1 = C_1$

$D_2 = C_1 \sqcup C_2 \dots \quad D_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$

$D_1 \subset D_2 \subset \dots \quad \bigcup D_i = C$

$\mu C = \lim_{n\to\infty} \mu D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mu C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$

$\nabla$

T | О непрерывности меры сверху

$\Delta$ TODO сочинить д-во

$\nabla$

4) Теорема о продолжении меры

О. | $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$ — п/к $\quad \mu_0: \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \mu_1: \mathcal{P}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ — меры

$\mu_1$ — продолжение $\mu_0$ (с $\mathcal{P}_0$ на $\mathcal{P}_1$) $\mu_1\big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

$/ \forall A \in \mathcal{P}_0 \ \mu_1(A) = \mu_0(A) /$

О $\mu$ - полная мера $\mu: \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, если
$\forall A \subset \mathcal{P}$ $\mu A = 0$ верно: $\forall B \subset A$: $B \in \mathcal{P}$
/и тогда $\mu B = 0$/

О $\mu: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ - объем $\mu$ - $\sigma$-конечный объем
$\mathcal{P}$ - подмн-в $X$ $\exists$ пос $A_k \in \mathcal{P}$ $\mu A_k < +\infty$,
$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$

$\tilde{\mu}: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$
$\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$ $\mu^*: 2^X \to \overline{\mathbb{R}}$
$\mu^*(A) = \{\inf \sum \mu: A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\}$
$A \subset 2^X$ $\inf\{\sum \mu(P_k): A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\}$
$\forall B$ $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$
$\mathfrak{A}$

Продолжение по Каратеодори

Т о стандартном (Лебеговском) продолжении меры
$\mu_0$ - $\sigma$- кон. объем на $\mathcal{P}_0$, Тогда
$\exists$ $\sigma$-алгебра $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}$, мера $\mu: \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ + мера

1. $\mu$ - продолж. $\mu_0$ с $\mathcal{P}_0$ на $\mathfrak{A}$
2. $\mu$ - полная мера
3. минимальность: $\tilde{\mu}$ - мера на $\sigma$-ал. $\tilde{\mathfrak{A}}$ - продолжение $\mu_0$, $\tilde{\mu}$ - полная, то $\mathfrak{A} \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. $\mathcal{P}_1$ - п/к $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathfrak{A}$ $\mu_1$ - продолж. $\mu_0$ на $\mathcal{P}_1$, то $\mu|_{\mathcal{P}_1} = \mu_1$
5. $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\mu(A) = \inf\{\sum \mu(P_k), A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}_0\}$

Сл. $A \subset \mathfrak{A}$ $\mu A < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$
$\exists P_1, P_2, \ldots$ $A \subset \bigcup P_k$; $\sum \mu P_k \leq \mu A + \varepsilon$

§5 Мера Лебега

$\mathbb{R}^m$ $\mathcal{P}^m$ - п/к ячеек $[a, b) = \{x: \forall k\ a_k \leq x_k < b_k\}$
$\mu [a, b) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$

Т $\mu$ - классический объем в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \mu$ - $\sigma$-кон мера (на $\mathcal{P}^m$)

$\Delta$

1) $\sigma$ кон-сть $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(-n,-n,\dots -n), (n,n\dots n)]$

2) $\mu$ – счет. адд?

$\mu$ – счет. полуадд.? $P \subset \bigcup P_k$ $\mu P \overset{?}{\le} \sum \mu P_k$

$P = [a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k)$ $\qquad [a_k, b_k) \subset (a_k', b_k) \subset [a_k', b_k)$

$[a, b'] \subset [a, b)$ $\qquad \mu[a_k', b_k) - \mu[a_k, b_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

выберем $b'$ так, чтобы $\mu[a,b) - \mu[a,b') < \varepsilon$

$\underline{[a,b']} \subset [a,b) \subset \bigcup^{\infty} [a_k, b_k) \subset \underline{\bigcup^{\infty} (a_k', b_k)}$

$\exists$ кон. набор $k_i$

$[a, b') \subset [a,b'] \subset \bigcup^{N} (a_{k_i}', b_{k_i}) \subset \bigcup [a_{k_i}', b_{k_i})$

$\mu[a,b') \le \sum \mu[a_{k_i}', b_{k_i})$

$\mu[a,b) - \varepsilon \le \sum \mu[a_{k_i}, b_{k_i}) + \varepsilon$

+ пред. переход

$\nabla$

О $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{P}^m$ $\mu$ – класс. объем. Результат Лебеговского продолжения наз. мерой Лебега в $\mathbb{R}^m$

$\mathfrak{A}$ – $\sigma$-алгебра лебеговских мн-в (мн-ва, измеримые по Лебегу; изм. мн-во)

$\mathfrak{M}^m$ $\lambda_m$

Т Св-ва:

① $A_1, A_2, \dots$ – изм. $\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots,\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots\ \mathbb{R} \setminus A_1}_{\text{измеримы}}$

② $\lambda A = 0$, изм. $\Rightarrow$ $\forall B \subset A$ – тоже изм. $\{a\}$ – изм.
$\lambda B = 0$

Если $B$ счетно $\Rightarrow$ $B$ измеримо, $\lambda B = 0$
(как счетное объед. одност. мн-в)

в $\mathbb{R}^1$ $\mathbb{Q}$ – изм. $\lambda \mathbb{Q} = 0$

② $A$-откр $\Rightarrow A \subset \mathfrak{M}^m$ ($B$-замкн – $B \subset \mathfrak{M}^m$)

Λ $]$ $A$-откр. Тогда

1) $\exists$ дизъюнкт. ячейки $P_1, P_2 \dots$ $A = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} P_k$

2) Можно считать, что $P_i$ - кубы, вершины имеют рациональные координаты, $\overline{P_i} \subset A$ двоично рац. -

3) $E$ - изм. $\lambda E = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_i$ - куб. ячейки $E \subset \bigcup P_i$
$\sum \lambda P_i < \varepsilon$

$\Delta$ (теорема о св-вах)

$\forall x \in A$ возьмем n-мер. ячейку $P(x)$ с рац. коорд. $x \in P(x) \subset A$

$A = \bigcup_{x \in A} P(x)$ - в этой совокупности ячеек не более чем н. различных, пронумеруем:

$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ $\quad R_1$; $R_2 \setminus R_1 = \bigcup S_i$; $R_3 \setminus \{R_1 \cup R_2\} = D_1, D_2 \dots$

$R_1 \, S_1 \, S_2 \dots D_1, D_2 \dots$

20.10.14

$E \subset \bigcup P_i \quad \sum \mu P_i < \frac{\varepsilon}{2}$

$P_i \subset Q_i \quad \lambda(Q_i) - \lambda(P_i) < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^i} \Rightarrow E \subset \bigcup P_i \cup \tilde{Q}_i$

... ?

③ Нетр. мн-во меры 0

Канторово мн-во

$\Delta_0 = [0,1]$
$\Delta_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
$\Delta_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], \dots, \dots$

$\Delta_n = \dots$

$K = \bigcap \Delta_i$ - замкнуто, но мера 0

$K \subset \Delta_n$

④. Неизм. мн-во (в $\mathbb{R}$)

Отн. экв-ти в $\mathbb{R}$

$x \sim y$ если $x - y \in \mathbb{Q}$ $\qquad A = \mathbb{R}/\sim$

$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

сдвиг на $q$

$\hat{A} = [0,1]/\sim$ $\qquad [0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (\hat{A} + q) \subset [-1; 2]$

$\lambda \hat{A} = \alpha$

$\lambda(\hat{A} + q) = \alpha$

⑤. $A$ - откр $\quad \lambda A > 0$,
$A$ - огр $\quad \lambda A$ - кон.
$\lambda A = 0$ - см. п 3 леммы

Λ 6. $A \in \mathfrak{M}^m$ Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G_\varepsilon$ - откр $F_\varepsilon$ - замкн.

регулярность меры Лебега $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ $\lambda(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

$A \subset \cup P_k$ $\sum \mu P_k - \mu A < \frac{\varepsilon}{4}$

$\forall P_k$ возьмем откр прям. в $Q_k$ | $\lambda(Q_k - P_k) < \frac{\varepsilon/4}{2^k}$

$A \subset \cup P_k \subset \cup Q_k = G_\varepsilon$

$\sum \lambda Q_k - \lambda A < \sum(\lambda Q_k - \lambda P_k) + (\sum \lambda P_k - \lambda A) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$

3 A - ор - не обязательно

G - как ...?

О $\mathfrak{B}$ - борелевская $\sigma$-алгебра в $\mathbb{R}^m$

это min $\sigma$-ал., содерж. все откр. мн-ва

Число эл-тов в $\mathfrak{B}$ - континуум

Сл Если A - измеримое, (т.е. $A \in \mathfrak{M}$), то $\exists B$ - борелевское

$\exists C$ $\lambda(C) = 0$ $A = B \sqcup C$

или $\exists D$ - сч. пересеч. откр.

$E$ $\lambda(E) = 0$ $A = D \setminus E$

▷ $F_{1/m} \subset A$ $B := \cup F_{1/n}$

$C := A \setminus B$

◁

С $\lambda A = \inf_{\substack{G \supset A \\ G - \text{откр}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкн}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K - \text{компакт}}} \lambda(K)$

10.11.2014

~~⇐ Дано:~~ $A \in \mathfrak{M}^m$

$A = B \sqcup C$

B - борелевское вида $\cap F_k$ ...?

§ Преобразование меры Лебега при движениях и линейных отображениях

Λ $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(X', \mathfrak{A}')$, $T: X \to X'$

$\forall A \in \mathfrak{A}$ $T(A) \in \mathfrak{A}'$

$/T(\varnothing) = \varnothing/$ Пусть $T(X) = X'$

Положим $\nu(A) := \mu(T(A))$ для $A \in \mathfrak{A}$

Тогда $\nu$-мера

$\Delta$ $\nu(\bigsqcup A_i) = \mu(T(\bigsqcup A_i)) = \mu(\bigsqcup T(A_i)) = \sum \mu T(A_i) = \sum \nu(A_i)$

$\nabla$

Л $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - непр.

$\forall C \in \mathfrak{M}^m$ $\lambda_m(C) = 0$ $\lambda_m(T(C)) = 0$

$\Rightarrow \forall A \subset \mathfrak{M}^m$ $T(A)$ - изм по Лебегу

$\Delta$

1. $A \in \mathfrak{M}^m$ $A$ - огр. Тогда $A = (\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k) \Delta C$, где $\lambda C = 0$

$B_k$ - компакты

$T(A) = T(\bigcup B_k \cup C) = \underbrace{\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} T(B_k)}_{\text{комп т.к. } T\text{-непр}} \cup \underbrace{T(C)}_{\text{по усл.}}$

2. $A$ - неогр. Содержит счетное

$A = \bigcup A_k$ $T(A) = \bigcup T(A_k)$

Т Об инвариантности меры Лебега отн. сдвига

$x_0 \in \mathbb{R}^m$ $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - сдвиг
$x \mapsto x + x_0$

$\forall A$ изм $T(A)$ - изм.

и $\lambda A = \lambda T(A)$

$\Delta$ $\forall$ ячейки $P$ $T(P)$ - тоже ячейка $\lambda P = \lambda T(P)$

Проверим $\forall A$ - изм $T(A)$ - изм; $T$ - непр.

По лемме 2 дост. проверить $A$ - изм, $\lambda A = 0$ - $T(A)$ - изм?

Теорема о продолж. меры, п. 5)

$\forall B$ - изм. $\lambda B = \inf \{ \sum \lambda(P_k)$, где $B \subset \bigcup P_k$, $P_k$ - ячейки$\}$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{P_k\}$ $A \subset \bigcup P_k$ $\sum \lambda P_k < \varepsilon$

$T(A) \subset \bigcup T(P_k)$; $\sum \lambda T(P_k) < \varepsilon$ обозначим $U_\varepsilon$

$T(A) \subset \underbrace{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_{\frac{1}{n}}}_{\text{изм. мн-во меры } 0}$

$\Rightarrow$ $T(A)$ - измеримо

4) $(T(A)) = 0$ /регулярность меры $\lambda$/

$\nabla$

О $\tilde{\lambda}(A) := \lambda(T(A))$ - $\tilde{\lambda}$ - мера заданная на $\mathfrak{M}^m$

т. 3) $\mu$, $\mathfrak{A}$

$\mu'$, $\mathfrak{A}'$ - полные, тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$

$\mu'|_{\mathfrak{A}} = \mu$

$\tilde{\lambda}(P) = \lambda(P) \Rightarrow \tilde{\lambda}(A) = \lambda(A)$ при $A \in \mathfrak{M}^m$

Т О мерах, инвариантных относительно сдвига

$\mathcal{P}^m \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}^m$

$\mu$ - мера на $\mathfrak{A}$, $\mu$ инвариантна отн. сдв.

($\forall A \subset \mathfrak{A}$, $\forall$ сдвиг $T$ $\lambda A = \lambda T(A)$)

$\exists$ ячейки $P$ $\mu P > 0$, $\mu P < +\infty$

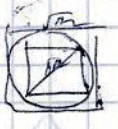
$\Rightarrow \exists c > 0$ $\forall A \in \mathfrak{A}$ $\lambda(A) = c\mu(A)$

Л $C \in \mathfrak{M}^m$ $\lambda C = 0$.

Тогда $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists (B_k)$ - посл. шаров $\mid$ $C \subset \bigcup B_k$; $\sum \lambda B_k < \varepsilon$

$\Delta$ $C \subset \bigcup G_k = \bigcup_{k,e} P_{ke} \subset \bigcup B_{k,e}$

$G_k$ откр, $\bigsqcup P_{kl} = G_k$



$\sqrt{n}^m$

$Q(a,1) \subset B(a, \frac{\sqrt{m}}{2}) \subset Q(0, \frac{\sqrt{m}}{m})$

куб (центр, длина_стороны)

$\sum \lambda B_{k,l} < (\sqrt{m})^n \cdot \varepsilon$

$\nabla$

Т Об инвариантности меры Лебега относит. ортогональных преобраз.

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейное орт. преобр.

$\forall A \in \mathfrak{M}^m$ $T(A) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(A) = \lambda(T(A))$

$\Delta$

1. Сохр. измеримости T-непр.

Достаточно проверить для $A$: $\lambda A = 0$

$\forall \varepsilon \ \exists U_\varepsilon := \bigcup B_k \supset A \quad \sum \lambda B_k < \varepsilon$

$T(A) \subset \bigcup T(B_k)$ — шар! $U_\varepsilon$ — ортог. преобр для шара - это почти то же самое, что и сдвиг.

т.к. $T$-ортогон. $\lambda T(B_k) = \lambda B_k$, т.к. радиус сохр.

$T(A) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_{\frac{1}{n}} \ldots$

2. $\mu = \lambda(T(A))$ — мера по п. 1 на $\mathfrak{M}^m$

? $\mu^*$ - инв. отн. сдвигов

$\mu(a+A) = \lambda(T(a+A)) = \lambda(T_a + TA) = \lambda(T(A))$

Значит $\exists C \quad \mu(A) = C\lambda(A)$

$\nabla \quad \mu(B(0,1)) = \lambda(T(B(0,1))) = \lambda(B(0,1)) \Rightarrow C = 1$

С Сл 1 Объем любого прям-пр-е сторон

С Сл 2 $L \subsetneq \mathbb{R}^m$ - лин. подпространство $\Rightarrow \lambda L = 0$

$\Delta \quad \dim L = k \xrightarrow{\text{ортог}} \{x,\ x_{k+1} = 0, \ldots x_m = 0\} \subset \{x_m = 0\} =: M$

$\lambda M = 0 \quad \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ возьмём плитку $k_i$

$M \cong \mathbb{R}^{m-1}$ - разбиваем на счёт. плитки по сл. 1

$\exists \varepsilon \quad \lambda(P_i) = \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda(P_i) = \varepsilon$

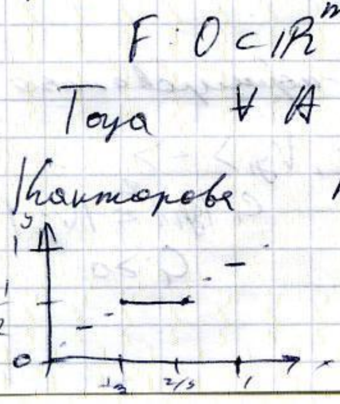
$\nabla \quad \nabla$

Т О сохранении измеримости при гладком преобразовании

$F: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ F \in C^1$

Тогда $\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \quad F(A)$ - измеримо

П Канторова лестница




по непрерывности доопределим $\varphi[0,1] \to [0,1] \to$ счёт. мн-во

$\Delta$ (теорема)

1. $A \subset Q$, $\lambda A = 0$ $\qquad$ ? $\lambda(F(A)) = 0$

$k = \max_{x \in Q} \|F'(x)\|$ $\qquad$ $a, b \in Q$ $\quad |F(b) - F(a)| \leq$

$\leq \|F'(c)\| \, |b-a| \leq k|b-a|$

$\forall \varepsilon \quad A \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} P_i$; $P_i < Q$ замкн. куб $\qquad$ $\exists c \in Q$

$\sum \lambda P_i < \varepsilon$

$F(A) \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} F(P_i)$ $\quad$ $P_i$ - куб со стороной $d$ и диагональю $d\sqrt{m}$

$F(P_i) \subset B(F(a), k\, d\sqrt{m}) \subset$ куб (центр $F(a)$, сторона $= 2k d\sqrt{m}$)

$d^m = \lambda(F(P_i)) \leq (2k\sqrt{m}\, d)^m = C_0 d^m$, где $C_0 = (2k\sqrt{m})^m$

$\sum \lambda F(P_i) < C_0 \sum \lambda P_i < C_0 \varepsilon$

Тогда $Q$ - замкн. куб $\subset O$

2. $O$ - откр - разобьем на $Q_i$ т.что $\overline{Q_i} \subset O$

$A \cap Q_i$ ...

$\Lambda$ $\quad$ $\nabla$ О структуре линейного оператора

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ лин. невырожденное

Тогда $\exists$ 2 ОНБ $h_1 \dots h_m$, $g_1 \dots g_m$

$\exists$ числа $s_1 \dots s_m > 0$

$\forall x \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle \cdot h_i$

и при этом $|\det V| = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$

$\Delta$

$W = V^T V$ - симм. м-ца

Пусть $c_1 \dots c_m$ - соб. числа

$g_1 \dots g_m$ - соб вектора - нормированные

$\langle V^T V g_i, g_i \rangle = \langle V g_i, V g_i \rangle \Rightarrow$

$\langle c_i g_i, g_i \rangle$ $\qquad$ $c_i |g_i|^2 = |V g_i|^2$

$s_i = \sqrt{c_i}$ $\qquad$ $h_i = \frac{1}{s_i} V(g_i)$ $\qquad$ $c_i > 0$

$\langle h_i, h_j \rangle = \frac{1}{s_i s_j} \langle V(g_i), V(g_j) \rangle = \frac{1}{s_i s_j} (V^T V g_i, g_j) =$

$= \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle = 0$ при $i \neq j$ $\quad \delta_j^i$

$= 1$ при $i = j$

$V(x) = V(\sum \langle x, g_i \rangle \cdot g_i) = \sum \langle x, g_i \rangle V(g_i) =$

$= \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$

$V(g_i) = s_i h_i$

$\underset{W}{\det} W = \det V^T \cdot \det V = (\det V)^2$

$c_1 \dots c_m \qquad |\det V| = s_1 \dots s_m$

$\nabla$

**T** О преобразовании меры Лебега при линейном отобр.

$V: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ - линейное

Тогда 1) $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad V(E) \in \mathfrak{M}^m$

2) $\forall E \in \mathfrak{M}^m \quad \lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

$/0 \cdot \infty = 0$, если что $/$

$\Delta$

1. $V$ - вырожд. $V(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathbb{R}^m$ - п-пр во $\Rightarrow$

$\lambda(V(\mathbb{R}^m)) = 0$

2. $\det V \neq 0$ Сохр измеримости - т.к. $V$ - гладкое

$\mu(E) = \lambda(V(E))$ - мера по лемме

инв. отн. сдвигов $\mu(a+E) = \lambda(V(a+E)) = \lambda(V(a) + V(E))$

$= \lambda(V(E)) = \mu(E)$

$\Rightarrow \exists c \quad \mu E = c \cdot \lambda E$

$E := \text{куб}(g_1 \dots g_m) \quad V(E)$ - прпп$(s_1 h_1 \dots s_m h_m)$

$\lambda E = 1 \qquad \lambda(V(E)) = \mu E = s_1 \cdot s_2 \dots s_m =$

$(|h_i| = 1)$

$= |\det V|$

$\nabla$

**С** $\lambda(B(0, r)) = r^m \cdot \lambda(B(0,1))$ - положение шаров

## § Мера Лебега – Стилтьеса

О $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – возр., непр

$\mathcal{P}^1$ $\quad \mu[a,b) = g(b) - g(a)$ – конечно адд. объём, мера

---

$g$ – возр. $\quad g(c-0),\ g(c+0) = \lim\limits_{x\to c+0} g(x)$

При отсутствии непрерывности

$\mu$ – не мера (очевидно, $\exists\, g(c-0) \neq g(c)$, $\exists\, d > c$

Но мы можем починить: $\quad \bigcap\limits_n [c-\frac{1}{n}, d) = [c, d)$

$\mu[a,b) = g(b-0) - g(a-0) \quad \lim \mu[c-\frac{1}{n}, d) \neq \mu[c,d)$

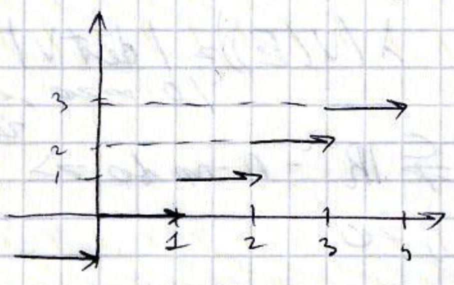
нет непр. сверху

Т $\mu$ – сигма-кон. мера на $\mathcal{P}^1$

$\Delta$ We don't need it! $\nabla$

О Лебеговское продолжение $\mu$ $\mathcal{P}$ мерой Лебега – Стилтьеса для $g$

П Возьмем считающую меру




$\mu[a,b)$ = кол-во целых точек в $[a,b)$

$\exists$ продолжение $\mu_g$ на $2^{\mathbb{R}}$

О Мера Борель – Стилтьеса – это $\mu_g|_{\mathcal{B}}$

## Гл. Интеграл.

### §1 Измеримые функции

О $E$ – мн-во; разбиение мн-ва $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} e_i$

О $X$ – мн-во $\quad f: X \to \mathbb{R}$ – ступенчатая, если $\exists$ разбиение $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} X_i \quad f|_{X_i} = c_i$

Такое разбиение – допустимое по отнош. к $f$

П $\chi_E$ – хар-ная ф-я мн-ва $E$ $\quad$ (=1, если $x \in E$; =0 otherwise)

произв – $\sum c_i \chi_{X_i}$

Л Св-ва: 1. $f_1$ и $f_2$ – ступенч. на $X$, тогда $\exists$ разбиение $X$ допустимое по отношению и обеим ф-ям.

$\Delta$ $X = \bigsqcup\limits^{n} X_i$ $X = \bigsqcup\limits^{m} Y_j$

$f_1 = \sum c_i \chi_{X_i}$ $f_2 = \sum d_j \chi_{Y_j}$

$E_{ij} = X_i \cap Y_j$ – дизъюнктно, $\bigcup\limits_{ij} E_{ij} = X$

Тогда $f_1 = \sum\limits_{ij} c_i \chi_{E_{ij}}$ $f_2 = \sum\limits_{ij} d_j \chi_{E_{ij}}$

$\nabla$

2. $f_1$ и $f_2$ – ступенчатые, тогда ступенчатые:

$f_1 + f_2$, $f_1 * f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $f_2 \neq 0$ $\frac{f_1}{f_2}$, $|f_1|$

О Лебегово мн-во $E(f<a)$

$f: X \to \mathbb{R}$, $E \subset X$, $a \in \mathbb{R}$,

$E(f<a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ $f^{-1}((-\infty, a)) \cap E$

Аналогично $X(f * a)$

О $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $E \subset X$ $f$ – изм. на $E$

$((X, \mathfrak{A}, \mu)$ – пр-во с мерой) $E \subset \mathfrak{A}$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $E(f<a)$ – изм. ($\in \mathfrak{A}$)

„$f$ – изм. на $X$" = „$f$ – изм"

$f$ – изм. по Лебегу – $X = \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^m$

З Эквивалентно:

① $\forall a$ $X(f<a)$ – изм. $\Delta$ $(X(f<a))^c = X(f \geq a)$

② $\forall a$ $X(f \leq a)$ – изм.

③ $\forall a$ $X(f > a)$ – изм. $X(f \leq a) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X(f < a + \frac{1}{n})$

④ $\forall a$ $X(f \geq a)$ – изм. $\nabla$ ...

П 1. $E$ – изм. мн-во $\Rightarrow$ $\chi_E$ – измеримо

2. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – непр. Тогда изм. по Лебегу

В силу топ. опр. непр – по опр $\mathbb{R}(f<a)$ – откр.

Л Св-ва:

1. $f$-изм. $\Rightarrow \forall a\ E(f<a)$ - изм.

$\forall a<b\quad E(f\in\langle a,b\rangle)$ - изм.

2. $f$-изм $\Rightarrow \forall \alpha\in\mathbb{R}_{\geq 0}\quad \alpha f$-изм, $-f$-изм.

3. $f$-изм на $E_k$ $k=1\ldots \Rightarrow f$ изм на $\bigcup E_k = E$

$$E(f<a) = \bigcup E_k(f<a)$$

4. $f$-изм $E$, $E'\subset E$, $E'$-измеримо

$$E'(f<a) = E(f<a)\cap E'$$

5. $f$-изм. $f\neq 0$; $f^{-1}$-измеримо

6. $f\geq 0$ изм. $\forall \alpha\in\mathbb{R}_{\alpha>0}\quad f^{\alpha}$-изм.

Т ① $f_n$ - изм. $\Rightarrow \sup\limits_n\{f_n\}$ - изм., $\inf\limits_n\{f_n\}$ - потр.

② $\underline{\lim} f_n(x)\quad \overline{\lim} f_n(x)$ - изм.

③ $\forall x\ \exists \lim f_n(x) = f(x)$, тогда $f(x)$ - изм.

$\Delta$ ② $\Rightarrow$ ③ тривиально

① $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{f_n(x)\}\quad X(g>a) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} X(f_n>a)$

② $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \inf\limits_n g_n(x)$ где $g_n(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x)\ldots\}$

Аналогично к ①

С $f$ - измеримо $\Rightarrow \underbrace{f_+, f_-}_{\text{срезки}}, |f|$ изм.

1.12.14

Т о характер. изм. ф-ий с помощью ступенч.

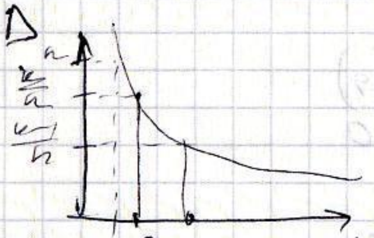
$(X, \mathfrak{A}, \mu)\quad f: X\to\mathbb{R}\quad f\geq 0$

Тогда $\exists$ ступ. $g_n$:

1) $0\leq g_n(x)\leq f(x)\quad \forall x\in X$

2) $g_1(x)\leq g_2(x)\leq\ldots\leq\ldots\ \forall x\in X$

3) $\forall x\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$



$e_{ki} = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)$

$k = 1 \dots n^2 \qquad e_0 = f^{-1}([n; +\infty])$

$0 \le h_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k} \dots + n \chi_{e_0} \le f$

$\lim h_n(x) = f(x)$ т.к. если $f(x) = +\infty$ то $h_n(x) = n$ при всех $x$

$f(x) < +\infty \quad |f(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n} \quad n > f(x)$

$g_n(x) = \max(h_1(x) \dots h_n(x))$

$h_n \le g_n \le f \quad g_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$

$g_n$ удовл. усл-ам

▷

С $f$ - изм. $\exists$ ступ. $g_n$: $\forall x \ \lim g_n(x) = f(x)$

$|g_n| \le |f| \qquad 0 \le \overline{g_n} \le f^+ \qquad |g_n| \ge |f|$

$0 \le \tilde{g}_n \le f^- \quad g_n = \overline{g_n} - \tilde{g}_n$

~~д-во~~

С $f$ - изм, $g$ - изм. $\Rightarrow$ $fg$ изм.

$[0 \cdot \infty = 0]$

$F_n \to f \qquad G_n \to g$

$|F_n| \le |f| \qquad |G_n| \le |g| \qquad F_n G_n \to fG$

$g(x) = 0 \Rightarrow G_n(x) = 0$ при всех $n$

С $f, g$ - изм. $\forall x \ \{f(x), g(x)\} \ne \{+\infty, -\infty\}$ $f(x) = \pm$

Тогда $f+g$ - изм. $/(F_n + G_n \to f+g)$

Л об измеримости ф. непрер. на мн-ве полной меры

$(X, \mathfrak{A}, \mu) \ \mathbb{R}^m \quad e \in \mathfrak{A}^m, \lambda_m e = 0 \quad E := \mathbb{R}^m \setminus e,$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \quad f|_E$ - непрерывно

Тогда $f$ - изм.

▷ $\forall a \in \mathbb{R} \quad E(f < a)$ - откр. в $E$ = (откр $\subset \mathbb{R}^m$) $\cap E$ изм. в $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^m (f<a) = B(f<a) \vee e(f<a)$ мера 0

$f(x) = \chi_{I_{rr}}$ изм

① $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ изм. ② $f$ — изм.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непр. Тогда $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ изм. $(x,y) \mapsto f(x-y)$ изм.

③ $\exists f$ — изм. при исправлении на мн-ве меры 0 эта ф-я не может стать непр.

$\triangleright$

§ Сх-ть почти всюду и по мере

О „почти всюду"

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\forall x \in X$ $\omega(x)$ — высказывание

„Утверждение $\omega(x)$ вып. почти всюду

(= при почти всех $x$)

Если мн-во где $!\omega(x)$ имеет меру 0

П $f_n$ — изм. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

(Тогда $f(x)$ — изм.)

„$f = g$ почти везде" — отношение экв-ти

$(f \sim f;\ f \sim g \Leftrightarrow g \sim f;\ f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$

З $\forall n$ $\omega_n$ — высказывание, верное п. в.

Тогда утв. „все $\omega_n(x)$ имеют место" вып. п. в.

О $f_n$ сх. к $f$ по мере ~~если~~:

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $f_n, f: X \to \mathbb{R}$

$f_n, f$ — п. в. конечны

$f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\mu(X |f_n - f| < \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$T_1$ Лебега о сходимости почти везде → по мере

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ !! $\mu X < +\infty$ !!

$f_n \to f$ почти везде, то $f_n \Rightarrow f$ (по мере)

$\Delta$ Поправим $f_n, f$ на мн-ве нулевой меры, тогда $f_n \to f$ всюду на $X$

① $f_n \to 0$ монотонно по $n$ ($\exists$ убывает) т.е. $f_n \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} X(f_n > \varepsilon) \supset X(f_{n+1} > \varepsilon) \\ \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} X(f_n > \varepsilon) = \varnothing \end{array}\right| \Rightarrow \mu X(f_n > \varepsilon) \to 0$$

непр. меры сверху

требует конечности мн-ва

② $f_n \to f$ $\exists g_n(x) = \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$ При фикс. $x$ $g_n(x) \to 0$ ($f_n(x) \to f(x)$)

$$X(|f_n - f| > \varepsilon) \subset X(g_n > \varepsilon)$$

$$\mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \leq \mu X(g_n > \varepsilon) \xrightarrow[\text{по п. 1}]{} 0$$

3 $f_n \Rightarrow f$ $f_n \sim \tilde{f}_n$ $f \sim \tilde{f}$ Тогда $\tilde{f}_n \Rightarrow \tilde{f}$

$T_2$ Рисса о сходимости по мере и почти везде

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $f_n \Rightarrow f$

Тогда $\exists n_k$ $f_{n_k} \to f$ п.в.

$\Delta$

(*) $\forall k$ $\mu X(|f_n - f| > \frac{1}{k}) \to 0$

$\exists n_k$ $\mu X(|f_n - f| > \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ при $n \geq n_k$

Можно считать $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

$f_{n_k} \to f$ п.в.?

(**) $E_k = \bigcup\limits_{j \geq k} X(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j})$ $E_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k$

① $\mu E_0 = 0$? $\ldots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \ldots$

$$\mu E_k \leq \sum_{j \geq k} \mu X(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{k-1}}$$

По непрерывности меры сверху $\mu E_k \to \mu E_0$ т.е. ($\mu E_0 = 0$)

② $x \notin E_0$ $f_{n_k}(x) \to f(x)$

$\exists K \quad x \notin E_K$ т.е. при $j > K$

$$x \notin X\left(|f_{n_j} - f| > \frac{1}{j}\right)$$

т.е. $0 \le |f_{n_j}(x) - f(x)| \le \frac{1}{j}$

$\nabla$

C $\quad f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \quad |f_n| \le g$ п.в.

Тогда $\quad |f| \le g \quad$ п.в.

$\Delta \quad f_{n_k} \to f$ п.в. $\quad |f_n| \le g$

$\nabla$

T Егорова

$(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \mu X < +\infty \quad f_n, f$ - изм. п.в. кон.

$f_n \to f$ п.в.

Тогда эта сходимость „почти равномерная"

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in X$ изм $\mu e < \varepsilon \quad f_n \rightrightarrows f$ на $X \setminus e$

$\Delta$

$$g_n(x) = \sup_{k \ge n} |f_k(x) - f(x)|$$

$g_n(x) \to 0$ п.в. $\underset{\mu X < \infty}{\Rightarrow} g_n \underset{\mu}{\Rightarrow} 0$

(*) $n_k$: $\quad \mu X(g_n > \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$ при $n > n_k$

(**) $\quad E_k = \bigcup_{j \ge k} X\left(g_{n_j} > \frac{1}{j}\right) \quad E_0 = \bigcap E_k$

$\cancel{\mu E_0} = \lim \mu E = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \quad \mu E_k < \varepsilon \quad e := E_k$

$x \notin E_k$ т.е. $\quad x \notin X\left(g_{n_j} > \frac{1}{j}\right) \quad j \ge n_k$

$g_{n_j}(x) \le \frac{1}{j} \quad j \ge nk$

$n > nk$

$g_n(x) \le g_{n_k}(x) \le \frac{1}{k}$

при $n > n_j$ $\quad \sup |f_k - f| \le \frac{1}{k}$

15.12.2014

§3 Интеграл

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ $\mathcal{L}^0(X)$ - пространство изм. ф-й

$O_1$ $f$ - ступ. ф-я (измеримая, как и все ост.)

$$f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_i \chi_{E_i} \quad f \geq 0 \qquad \int_X f\, d\mu := \sum \alpha_i \mu E_i$$

[соглашение $0 \cdot \infty = 0$]

$\Delta$ ① Для другого допуст. разбиения инт. тот же.

$\Delta$ $f = \sum \beta_j \chi_{F_j} = \sum_{ij} \alpha_i \chi_{E_i \cap F_j}$

$$\int f = \sum \alpha_i \mu E_i = \sum_{i,j}^{k_i} \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum \beta_j \mu F_j = \int f$$ для 2 разб.

$\nabla$

② $\underset{\text{неотр.}}{f \leq g}$ $\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$ $\Delta$ $f_i = \sum \alpha_i \chi_{E_i}$ $\alpha_i \leq \beta_i$

$g = \sum \beta_i \chi_{B_i}$ $\nabla$

$O_2$. $f$ - изм. $f \geq 0$ $\int_X f\, d\mu = \sup \{ \int g\, d\mu;\ 0 \leq g \leq f,\ g\text{-ступ} \}$

3 ① Если $f$ - ступ, то инт. в смысле св-ва ② равен инт. в смысле ①

② $\forall$ изм $f \geq 0$ $0 \leq \int_X f\, d\mu \leq +\infty$

③ $\underbrace{0 \leq g \leq f}_{\text{изм.}} \Rightarrow \int_X g \leq \int_X f$ - все интегралы в sup $g$ входят в $f$, то есть sup $\{X\}$ у $f$ $X$ - больше.

$O_3$ $f$ - произв. измеримая ф-я

$f_+ = \max(f, 0)$ $f_- = \max(-f, 0)$

Пусть $\int f_+$ или $\int f_-$ конечен, $\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu$ $\in \overline{\mathbb{R}}$

$\int_X f\, dx \neq \pm\infty$ - $f$ наз. суммируемой

3 ① Если $f \geq$ изм, то инт. в смысле 3 равен инт в с. 2

② $f$ - сумм $\Leftrightarrow \int_X |f|\, d\mu < +\infty$

$\Delta$ $|f| = f_+ + f_-$ $\Rightarrow$ $f$-сумм $\Rightarrow \int f_+ \overset{\text{кон}}{<} +\infty$ $\int f_- \overset{\text{кон}}{<} +\infty$

(конец д-ва см. дальше $\int (f_+ + f_-) < +\infty$)

$\nabla$

$О_ч$ | $E \subset X$, $E$ — изм $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_X f\cdot\chi_E\,d\mu$

$\star$

$\int f_+$ — кон $\Rightarrow \int f_+\chi_E$ кон, т.к. $f_+\chi_E \le f_+$

$(f\chi_E)_+ = f_+\chi_E$

З | ① $f: E \to \mathbb{R}$ — ступ

$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$ $\int\limits_E f = \sum \alpha_k \mu E_k + 0\cdot\mu(X\setminus E)$

$\bigcup E_k = E$ $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & x\in E \\ 0 & x\in X\setminus E\end{cases}$

② $\int\limits_E f\,d\mu = \sup\{\int\limits_E g\,d\mu : 0 \le g \le f$ на $E\}$

$f \ge 0$ изм

③ $\int\limits_E f\,d\mu$ — не зависит от значений ф-ции вне $E$

П | $\int\limits_{[1,+\infty)} \frac{1}{x^2}\,d\lambda_1(x) = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ — не существует как интеграл Лебега

$\frac{\sin x}{x}$ — не суммируемое на $[0,+\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)_+ = +\infty$ $\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)_- = +\infty$

т.к. нет абс. сходимости

Л | Св-ва интеграла

① $f, g$ — сумм. $f \le g \Rightarrow \int\limits_X f\,d\mu \le \int\limits_X g\,d\mu$

$\Delta$

$f, g \ge 0$ — см. выше

$f, g$ — произв. $\int f = \int f_+ - \int f_-$ $f_+ \le g_+$

$\int g = \int g_+ - \int g_-$ $f_- \ge g_-$

$$-\frac{\int f_+ \le \int g_+}{\int f_- \ge \int g_-} \Bigg| \Rightarrow \int f \le \int g$$

$\nabla$

② $\int\limits_E 1\,d\mu = \mu E$ $\int\limits_E 0\,d\mu = 0$

③ $\mu E = 0$, $f$ — изм. $\Rightarrow \int\limits_E f\,d\mu = 0$

$\Delta$

① $f$ – ступ $= \sum \alpha_k \chi_{E_k}$

$\int\limits_E f d\mu = \sum \alpha_k \underbrace{\mu(E_k \cap E)}_{\overset{\parallel}{0}} = 0$

② $f \geq 0$ изм $\int\limits_E f d\mu = \sup \{ \int\limits_E g,\ g$ – ступ … $\} = 0$

③ $f$ – сумм. $= f_+ + f_-$

$\int f = \int f_+ + \int f_-$

$\nabla$

④ $f$ – сумм. $\alpha \geq 0$ $\int\limits_X \alpha f = \alpha \int\limits_X f$ ; $\int\limits_X -f d\mu = -\int\limits_X f d\mu$

$\Delta$ $(\alpha f)_+ = \alpha f_+ \Rightarrow$ дост. рассм. $f \geq 0$ измер.

$\int\limits_X \alpha f = \alpha \int f$ ? $\alpha \cdot \sup \{ \int g\, d\mu\ 0 \leq g \leq f \}$ $\sup \{ \int h\ 0 \leq h \leq \alpha f$ $h$ – ступ $\}$

/Для ступ $f$ – очев/ $g \leftrightarrow h$: …

$(-f)_+ = f_-$ $(-f)_- = f_+$

$\int\limits_X (-f) = \int (-f)_+ - \int (-f)_- = \int f_- - \int f_+ = -\int f$

$\nabla$

⑤ $f$ – сумм. $\left| \int\limits_E f d\mu \right| \leq \int\limits_E |f| d\mu$

$\Delta$ $-\int\limits_E |f| d\mu \leq \int\limits_E f \leq \int\limits_E |f|$

$-|f| \leq f \leq |f| \underset{①}{\Rightarrow} -\int\limits_E |f| \leq \int\limits_E f \leq \int\limits_E |f|$

$\nabla$

⑥ $f$ – изм $E$ $a \leq f \leq b$ на $E$

Тогда $a \cdot \mu E \leq \int\limits_E f d\mu \leq b \mu E$

$\Delta$ $\int a\, d\mu \leq \int f\, d\mu \leq \int b\, d\mu$

$\nabla$

С $f$ – изм. на $E$, $f$ – огр. $\mu E < +\infty \Rightarrow f$ – сумм на $E$

$\Delta$

$f_+ \leq \max(|a|, |b|)$

$f_- \leq \max(|a|, |b|)$

$\nabla$

⑦ $f$ - сумм. на $E$ $\Rightarrow$ $f$ - конечна п.в. на $E$

$\Delta$ $f \geq 0$ $N = \{x : f(x) = +\infty\}$ - изм. $= \bigcap X(f > n)$

$\mu N > 0$ $f \geq n \chi_N$ при всех $n \in \mathbb{N}$

$\int f \geq n \int \chi_N = n \cdot \mu N \Rightarrow \int f = +\infty$

$\Rightarrow f$ - не сумм.

$\nabla$