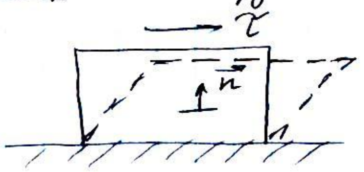
ЧМ → гипотезы
  → методы

— Имеем ур-я переноса:
- массы: $\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \vec{v})$
- внутр. энергии: $\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} - \nabla\vec{q} + \rho Q$
- импульса: $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$

Величины неизвестные $\rho(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$, $E(\vec{r},t)$,
$\overleftrightarrow{P}(\overleftrightarrow{S})$, $\vec{q}(E)$

Опр: Текучая среда — сплошная среда, приходящая в движение под действием сколь угодно малого касательного напряжения.

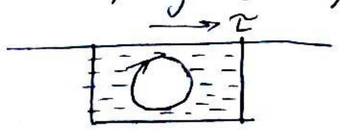
Пример: Твердое тело.



Смещение под действием напряжения до определенного состояния и зафиксируется

Для каждой малой площадки верно: все что над ней действует на все, что под ней, с тем же касательным напряжением τ

Текучая среда



Движение не прекратится.

Текучая среда не может находиться в покое под действием напряжения.

Ɐ текучую среду в равновесии.
$\vec{p}_n = p_n \cdot \vec{n}$ — напряжение на некоторой площадке с $\vec{n}$
Для координатных площадок:

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = p_{11}\vec{e}_1 \\ \vec{p}_2 = p_{22}\vec{e}_2 \\ \vec{p}_3 = p_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

(p_{ij}: i — ориентация площадки, j — на какую ось проецируется напряжение)

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$ — диагональная форма тензора напряжений для случая равновесия текучей среды

По формуле Коши
$$p_n = \overleftrightarrow{P}\cdot\vec{n}; \quad p_n\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & p_2 & \\ 0 & & p_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 n_1 = p_{11} n_1 \\ p_2 n_2 = p_{22} n_2 \\ p_3 n_3 = p_{33} n_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$$ — давление

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -p & & 0 \\ & -p & \\ 0 & & -p \end{pmatrix} = -p\,\mathcal{E}$$ — закон Паскаля

[При равновесии текучей среды нормальное напряжение на произвольно выбранной площадке не зависит от ее ориентации.

$\overleftrightarrow{P}$ - это шаровой тензор, то есть он не меняется от поворотов и инверсий.

$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{P} + \rho \cdot \vec{f}$; $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, так как среда неподвижна.

Отсюда $\nabla \cdot \overleftrightarrow{P} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(-p \overleftrightarrow{E}) = -\nabla p$

$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f}$ - уравнение Эйлера равновесия текучей среды

Баротропность сплошной среды

Баротропность - св-во плотности зависеть только от давления

$\rho = \rho(p)$.

За исключением несжимаемой среды, баротропность не является св-вом среды, а скорее сост / процесса.

Примеры $pV = \frac{R}{\mu} MT$; $p\, dV = \frac{R}{\mu} dM\, T$

Отсюда $p = \frac{R}{\mu} \rho T$ - локальное уравнение

$\rho = \frac{p\mu}{RT} \Rightarrow \rho = \rho(p, T)$ - в общем случае баротропии нет.

Изотермический процесс: $T = T_0 \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{RT_0} = \rho(p) = pC$

Адиабатический процесс: $\rho = c p^{\frac{1}{\gamma}}$, $\gamma = c_p / c_\rho \Rightarrow \rho = \rho(p)$

Потенциал давления в случае баротропии

$\mathcal{P}(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$;

$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_1} = \frac{d\mathcal{P}}{dp} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \Rightarrow \nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \quad (*)$

$\nabla \times \vec{f} = 0 \Leftrightarrow \vec{f} = -\nabla \Pi$ - потенциал силы $(**)$

Из $(*)$ и $(**)$ следует $\nabla \mathcal{P} = -\nabla \Pi \Rightarrow \nabla(\mathcal{P} + \Pi) = 0$
и ур-е Эйлера

$\Rightarrow \mathcal{P} + \Pi = const$ - первый интеграл

Если $\Pi = const$, то $\mathcal{P}$ тоже const
и тогда $p = const$, $\rho = const$, $T = const$

Уравнение равновесия текучей среды в собственном поле тяжести

$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f}$, где $\vec{f}$ - гравитационное поле, созд. средой

Пример - межзвездный газ, большие планеты.

$\nabla\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = \nabla\cdot\vec f = -\nabla^2\Pi = -4\pi\gamma\rho$ — уравнение равновесия

Выведем его. гравитац. постоянная

$\int_W \nabla\otimes\overleftrightarrow{T}\,dw = \oint \vec n\otimes\overleftrightarrow{T}\,ds$ — обобщенная теорема Гаусса.

Возьмем малый объем δW

$\nabla\otimes T = \lim_{\delta w\to 0}\frac{1}{\delta w}\int_{\delta w}(\nabla\otimes\overleftrightarrow{T})\,dw = \lim_{\delta w\to 0}\frac{1}{\delta w}\int_{\delta S}\vec n\otimes\overleftrightarrow{T}\,dS$

Аналогично: для конкретных $\otimes$ и T ($\cdot$ и $\vec f$)

$\nabla\cdot\vec f = \lim_{\delta w\to 0}\frac{1}{\delta w}\oint_{\delta S}\vec n\cdot\vec f\,ds$.

Положим, что δW - это шар радиуса δ

$\nabla\cdot\vec f \overset{?}{=} \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\delta^3}\oint_{\delta S} -\gamma\cdot\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi\delta^3}{\delta^2}\,\delta^2\,d\Omega = \lim_{\delta\to 0}\left(-\gamma\rho\oint_{\delta S} d\Omega\right) =$

переход?

$= -\gamma\rho\cdot 4\pi = -4\pi\gamma\rho$

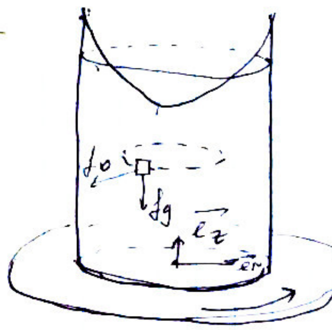
$\vec f = -\nabla\Pi$, тогда $-\nabla^2\Pi = -4\pi\gamma\rho \Rightarrow \nabla^2\Pi = 4\pi\gamma\rho$

(аналогично $\nabla^2\varphi = -\varepsilon_0 q$) Основное ур-е теории Потенциала

Несжимаемая среда

$\rho = \rho_0 = const(p) \Rightarrow \nabla^2 p = -4\pi\gamma\rho_0^2$ — уравнение Пуассона

Равновесие жидкости во вращ. цилиндре



$\vec f_c = -m\omega^2\vec r$ — центростремит. сила

f_0 — центробежная сила

Перейдем во вращающуюся СК, тогда рассматриваемый δW будет неподвижен

Объемные силы: $\vec f_g = \vec g = -g\vec e_z$

$f_0 = \omega^2\vec r = \omega^2 r\vec e_r$

$\vec f = f_0 + f_g = -g\cdot\vec e_z + \omega^2 r\vec e_r$ — потенциальная сила

$\vec f = -\nabla\Pi \Rightarrow \Pi = gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + C$

$\mathcal{P} = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho_0} = \frac{p-p_0}{\rho_0}$, $\quad gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + C + \frac{p-p_0}{\rho_0} = const$

$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} = const$

Для поверхности $p = p_A \Rightarrow \frac{p_A}{\rho_0} = const \Rightarrow gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} = const$

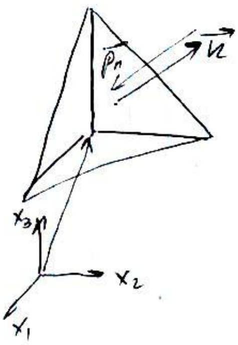
$z(\vec r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C$

Найдем C: $V = \pi R^2 H = \int_0^R 2\pi r z(r)\,dr \Rightarrow \dots$

16.03.2016

Динамика идеальной среды

Идеальная среда — нет кас. напряжений при любом её движении



$$\vec{P}_n = p_n\vec{n} \quad \to \quad \vec{P}_n = \overleftrightarrow{P}\vec{n}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_{11}\vec{e}_1 \\ p_2 &= p_{22}\vec{e}_2 \\ p_3 &= p_{33}\vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \text{тензор напряжений в диаг. виде.}$$

$$p_n\vec{n} = \overleftrightarrow{P}\cdot\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} p_n n_1 = p_{11} n_1 \\ \vdots \\ p_n n_3 = p_{33} n_3 \end{cases}$$

И вот так всегда, не только в равновесии

$\Rightarrow p_n = p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p$

$\overleftrightarrow{P} = -p\overleftrightarrow{E}$ — шаровой тензор

сжимающее напр.

А бывают растягивающие напряж.? в газе — нет. в жидкости — мож. (она метастабильна)

Три ур-я переноса:

- $\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\vec{v})$ — масса — не меняется у идеал. среды — массы
- $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{P} + \rho\vec{f}$ — импульса
- $\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} - \nabla\vec{q} + \rho Q$ — энергии

(в газе $\overleftrightarrow{P} = -p\overleftrightarrow{E}$ и $\vec{q} = 0$ есть утв. одного порядка) в жидкости это грубо, можно без производных

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla p + \rho\vec{f} \text{ — уравнение Эйлера}$$

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho f_1 \\ \vdots \\ \rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dots\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho f_3 \end{cases}$$

$$\rho\frac{dE}{dt} = \overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} + \rho Q \quad (\vec{q} = 0 \text{ по предположению})$$

$$\begin{pmatrix} -p & & 0 \\ & -p & \\ 0 & & -p \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{13} \\ & \ddots & \\ S_{31} & \dots & S_{33} \end{pmatrix} = -p(S_{11} + S_{22} + S_{33}) = -p\,\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{S}) = -p(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + v_1\frac{\partial E}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial E}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial E}{\partial x_3}\right) = -p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) + \rho Q$$

Физ смысл? Вот з '$\nabla\cdot\vec{v}$' смысл — скорость изм. энергии.

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{\delta W}\frac{d}{dt}(\delta W)$$

Тогда $\rho\frac{dE}{dt} = -p\frac{1}{\delta W}\frac{d}{dt}(\delta W) + \rho Q$ домножим на δW

$$\rho\delta W\, dE = -p\,d(\delta W) + \rho\,\delta W\, Q\,dt$$

$$\underbrace{\delta m\, d\overset{\text{вн. эн. на ед. массы}}{E}}_{\text{изм. вн. энергии}} = \underbrace{-p\,d(\delta W)}_{\text{работа сил давления}} + \underbrace{\delta m\, Q\,dt}_{\text{передача тепла.}} \leftarrow \text{I закон термодинамики!}$$

Ну вот...

Баротропные движ. и. среды в потенц. поле сил. Теорема Лагранжа

У нас была форма Лэмба. ← уравнение Эйлера

$$\rho\left[\frac{\partial \vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla\vec v)\vec v\right] = -\nabla p + \rho\vec f =$$

ротор $\underbrace{(\nabla\times\vec v)}_{\Omega}\times\vec v + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$ — представление Лэмба. (субст. произв) преобразуем

$$\rho\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t} + \vec\Omega\times\vec v\right) = -\rho\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \nabla p + \rho\vec f$$

$$\rho = \rho(p) = \mathcal{P} \doteq \int\frac{dp}{\rho(p)} \quad . \quad \nabla\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{P}}{dp}\nabla p = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

Отсюда $\nabla p = \rho\cdot\nabla\mathcal{P}$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t} + \vec\Omega\times\vec v\right) = -\rho\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \rho\nabla\mathcal{P} - \rho\nabla\Pi$$

$$\frac{\partial \vec v}{\partial t} + \vec\Omega\times\vec v = -\nabla\underbrace{\left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi\right)}_{} \quad \Big|\times(\nabla\times) \quad (\mathrm{rot\ grad} = 0)$$

трехчлен Бернулли, обнуляется

$$> \nabla\left(\frac{\partial \vec v}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec v) = \frac{\partial\vec\Omega}{\partial t}$$

по формуле раскрыли

$$> \nabla(\vec\Omega\times\vec v) = (\vec v\cdot\nabla)\vec\Omega - (\vec\Omega\cdot\nabla)\vec v + \vec\Omega(\nabla\cdot\vec v) - \vec v\,\cancel{(\nabla\cdot\vec\Omega)}^{\,0}$$

субст. произв.

$$\frac{\partial\vec\Omega}{\partial t} + (\vec v\cdot\nabla)\vec\Omega = (\vec\Omega\cdot\nabla)\vec v + \vec\Omega(\nabla\cdot\vec v) \qquad \frac{\partial\vec\Omega}{\partial t} = (\vec\Omega\cdot\nabla)\vec v + \vec\Omega(\nabla\cdot\vec v)$$

Короче. $\dfrac{d\vec\Omega}{dt} = (\vec\Omega\cdot\nabla)\vec v + \vec\Omega(\nabla\cdot\vec v)$ (уравнение Фридмана)

уравнение переноса вихря

$$\vec\Omega\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec\Omega}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \vec\Omega(t) = 0$$ — это теорема Лагранжа

она неочевидна и не следует из ур-е выше

— При баротр. несж. ид. среды $\underbrace{}_{\text{в пот. поле объемных сил}}$ завихр. не возр. зарождается.

$\nabla\times\vec v = 0$ — безвихревое течение. (потенциальное) $\Leftrightarrow$ $\vec v = \nabla\varphi$ (1)

ур-е Фридмана имеет вид $\dfrac{d\vec\Omega}{dt} = (\vec\Omega\cdot\nabla)\cdot\vec v$

Постановка краевых задач для потенциального т.

$\nabla\cdot\vec v = 0$ — несжим. среда $\Leftrightarrow$ $\vec v = \nabla\times\vec A$ (2). + среда безвихревая $\nabla\times\vec v = 0$

$$> \nabla\cdot(\nabla\varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\varphi = 0} \leftarrow \text{безвихр. течение}$$

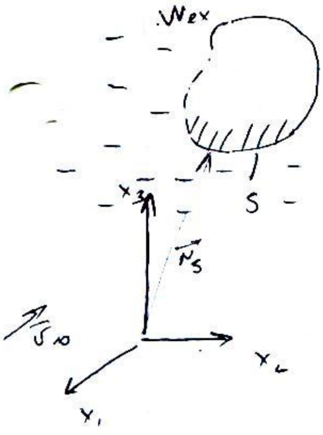
$$> \nabla\times(\nabla\times A) = 0 \Rightarrow \nabla^2\vec A - \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\vec A)}_{0\text{ в силу калибровки}} = 0 \qquad (\nabla^2\vec A = 0)$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2(A_1\vec e_1 + A_2\vec e_2 + A_3\vec e_3) = 0 \Rightarrow \nabla^2 A_i = 0$$

Плоское течение (плоская задача)

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{const}\,(x_3) = V_1(x_1, x_2) \\ V_2 = \dots = V_2(x_1, x_2) \\ V_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec A(x_1 x_2 x_3) = \mathrm{const}(x_3) = A(x_1 x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 = \psi \end{pmatrix}$$

В общем виде 1. $\nabla^2\psi = 0$. в W_{ex} Внешняя задача (жесткость снаружи)



2. $\nabla^2\varphi = 0$ в W_{ex} $\quad \nabla^2\vec A = 0 \ (\nabla^2\psi = 0)$ в W_{ex}

3. $V_n(\vec r_s) = V_{no}(\vec r_s)$ — краевое условие так задано? 99.

$\vec V\cdot\vec n(\vec r_s) = V_{no}(\vec r_s)$ Это мина физ. v_n на границе + проскальзывание

$(\nabla\cdot\varphi)\cdot\vec n = \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ $\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r_s} = v_{no}(\vec r_s) \quad (*)$

4. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\vec r_s} = 0$ для неподв. пов-ти. $\quad (s)\ \vec v\Big|_{|\vec r|\to\infty} = \vec v_\infty$

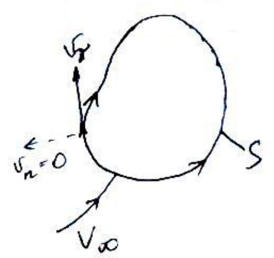
$(*)$ $\qquad \nabla\varphi\Big|_{|\vec r|\to\infty} \to \vec v_\infty$

Внутр. задача

$\nabla^2\varphi = 0$ в W_{in} $\qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\vec r_s} = V_{no}(\vec r_s)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\vec r_s} = 0$ для неподвижной пов-ти

Частный случай (плоское течение + неподв. тело)



Внешн. задача

$\nabla^2\psi = 0$ в W_{ex}, $\quad \psi\big|_{\vec r_s} = c \ (=0)$

$\vec v\Big|_{|\vec r|\to\infty} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\vec e_x - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\vec e_y\Big|_{|\vec r|\to\infty} \to \vec V_\infty$

Тип ГУ \ Тип области	$\nabla^2\varphi = Q$ в W_{ex} (внеш)	$\nabla^2\varphi = Q$ в W_{in}
$\varphi\|_s = q$ условие 1 рода (Дирихле)	Однозначно разрешимо ОР	ОР
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big\|_s = q$ условие 2 рода Неймана	ОР	Альтернатива Фредгольма

интенсивность

$\nabla^2\varphi = Q$ в W_{in}

Утверждение

$\boxed{\oint\limits_S q\,dS = \int\limits_W Q\,dw}$ Для усл. 2 рода

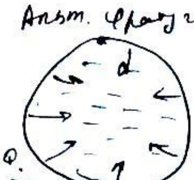
$\int\limits_{W_{in}} \nabla^2\varphi\,dw = \int\limits_{W_{in}} Q\,dw$

$\int\limits_{W_{in}} \nabla\cdot(\nabla\varphi)\,dw = \oint\limits_S \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \oint\limits_S q\,dS$

$\oint\limits_S \vec n\cdot\nabla\varphi\,dS$

И если это утв. верно, то ∞ реш. иначе 0 ⟶ может быть ложно, если $\exists\varphi$: $\nabla^2\varphi = Q$ в W, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\big|_s = q$

Альт. Фредгольма



$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{r_s} = V_{no}(\vec r_n)$ на S

$= \nabla(\nabla\varphi) = Q$

$\int\limits_S V_{no}(\vec r_s)\,dS = 0$; А если $\nabla\cdot\vec v = 0$, то $\int\limits_W \nabla\,\vec v\,dW = 0$

$\oint\limits_S \vec n\,\vec V_0\,dS = 0 \qquad \oint\limits_S \vec n\,\vec v\,dS = 0$ ⟶ нет решения типа (хим. тело не сжимаемое). В случае на карандаше интеграл ≠0.

Интегралы Лагранжа - Коши и Бернулли

- идеальная среда $\qquad\qquad \bullet\ \rho = \rho(p)$
- баротропное течение $\qquad \bullet\ \vec f = -\nabla\cdot\Pi$
- потенциальное поле сил $\qquad \bullet\ \vec\Omega\big|_{t=0} = 0$
- отсутствие начальной завихренности

Эта формула получается из ур-я Эйлера 1 стр. назад

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega}\times\vec{v} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi\right) \Rightarrow \nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi\right) = 0$$

$\vec{v} = \nabla\varphi$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Док.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi = const(\vec{r}) = f(t)$$ — Интеграл Л-К

+ стационарное течение $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ — ничего не меняется со временем

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi = const$$ — интеграл Бернулли

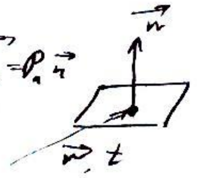
Еще в более частном случае ($\rho = \rho_0$, $\Pi = gz$)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} + \Pi = const \Rightarrow \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho\Pi = const \Rightarrow \underbrace{\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z = const}_{\text{даон из школы}}$$

5.04.2016

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & & 0 \\ 0 & p_{22} & \\ & & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & & 0 \\ 0 & -p & \\ & & -p \end{pmatrix} = -p\overleftrightarrow{\varepsilon}$$

$\vec{p}_n = p_n\vec{n}$



Получим:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\vec{v})$$ Потом частный случай — баротропное.

$\rho = \rho(p)$, потенциальное поле сил $\vec{F} = -\nabla\Omega$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \vec{v} = \nabla\varphi \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \vec{v} = \nabla\times\vec{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\nabla^2\varphi = 0 \\ &\nabla^2 A = 0 \quad (\nabla^2\varphi = 0) \end{aligned}$$

$V_n|_S = V_{n0}$ ← с границей совп. нормальная скорость

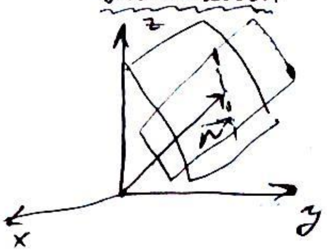
$\hookrightarrow 0$ для неподвижной пов-ти

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = V_{n0} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi = const(\vec{r})$$ идеальность, баротропность, потенциальность, безвихревость

+ стационарная

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + \Pi = const$$

Элементы теории криволинейных координат



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3) \\ \vdots \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

$$\det J = \det\left(\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(q_1, q_2, q_3)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \cdots & \vdots \end{vmatrix} \neq 0$$

$q_1 = c_1$

$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3) = c_1$ — координатная пов-ть q_1

$\begin{cases} q_1 = c_1 \\ q_2 = c_2 \end{cases}$ | координатная линия q_3 $\qquad \vec{r} = \vec{r}(c_1, c_2, q_3)$

$$\vec{e}_{q_3} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right|_{\substack{q_1 = c_1 \\ q_2 = c_2}} \qquad H_{q_3} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right| \qquad \tilde{\vec{e}} = \frac{1}{H_{q_3}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}$$

$\tilde{\vec{e}}_{q_i}\cdot\tilde{\vec{e}}_{q_j} = \delta_{ij}$ — ортогональная система координат

$$\varphi(x_1 x_2 x_3) \longrightarrow \varphi(x_1(q_1 q_2 q_3),\ x_2(\dots),\ x_3(\dots)) = \varphi(q_1 q_2 q_3)$$

$$\vec{a}(x_1 x_2 x_3) = a_1(x_1 \dots x_3)\vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$
$$\vec{a}(q_1 \dots q_3) = a_{q_1}(q_1 \dots q_3)\vec{e}_{q_1} + a_{q_2}(q_1 \dots q_3) e_{q_2} + a_{q_3} e_{q_3}$$

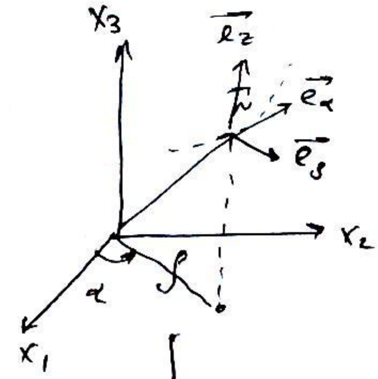
$$\nabla\varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_{q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_{q_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_{q_3} =$$

$$\nabla\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3 a_1) + \dots\right]$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right)\right)$$

$$\mathrm{rot} = \begin{vmatrix} H_1\vec{e}_{q_1} & H_2\vec{e}_{q_2} & H_3\vec{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_{q_1} & H_2 a_{q_2} & H_3 a_{q_3} \end{vmatrix}$$

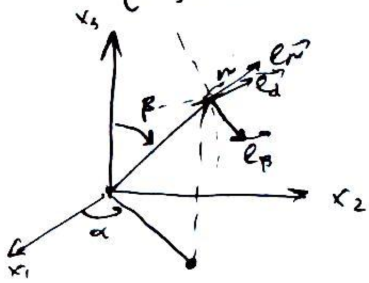
~~Def~~
$$\mathrm{Def}\,\vec{a} = \frac{1}{2}\left[(\nabla\vec{a}) + (\nabla\vec{a})^T\right]$$
$$S_{kk} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_{q_k}}{H_i H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{a_{q_k}}{H_k}\right)$$
$$2S_{kl} = \frac{H_k}{H_l}\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{a_{q_k}}{H_k}\right) + \frac{H_l}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{a_{q_l}}{H_l}\right)$$



$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha \\ x_2 = \rho\sin\alpha \\ x_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_\rho = 1 \\ H_\alpha = \rho \\ H_z = 1 \end{cases}$$ коэффициенты Ламе

нетрудно проверить $\quad H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}$

↑ с вики



$$\begin{cases} x_1 = r\sin\beta\cos\alpha \\ x_2 = r\sin\beta\sin\alpha \\ x_3 = r\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_r = 1 \\ H_\alpha = r\sin\beta \\ H_\beta = r \end{cases}$$

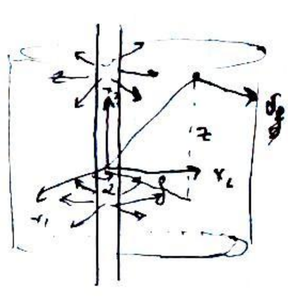
12.04.2016

1) Однородный поток

$$\vec{v}(\vec{r}) = \overrightarrow{\mathrm{const}}(\vec{r}), \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad \nabla\times\vec{v} = 0$$

$$\vec{V}_\infty = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \dots$$
$$\| $$
$$\vec{v}_{\infty 1}\vec{e}_1 + v_{\infty 2} e_2 + \dots \qquad \varphi = v_{\infty 1}x_1 + v_{\infty 2}x_2 + v_{\infty 3}x_3 + C$$

2) Линейный источник (прямая бесконечная заряженная нить)



Цилиндрические — (α, ρ, z).
Воспользуемся симметрией
Гауссова — окружим цилиндром.

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha \\ x_2 = \rho\sin\alpha \\ x_3 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_\rho = \mathrm{const}(\alpha, z) = f(\rho) \\ v_\alpha = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

$$Q = \underbrace{2\pi\rho z}_{\text{объем цилиндра}} v_\rho(\rho) = qz \quad \text{← сколько вытек. за длину}$$

$$v_\rho(\rho) = \frac{q}{2\pi\rho}$$ — интенсивность линейного источника

(в цилиндр.)

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$ (Проверим $\nabla\cdot\vec{v}=0,\ \nabla\times\vec{v}=0$)

$$(\nabla\times\vec{v})_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial z} = 0$$

$$(\nabla\times\vec{v})_\alpha = \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho} = 0$$

$$(\nabla\times\vec{v})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\alpha) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\alpha}\right] = 0$$

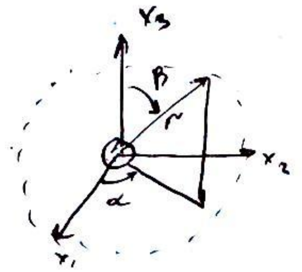
$\nabla\times\vec{v}=0.$ Найдем скал. потенциал

$$\vec{v} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$v_\rho\vec{e}_\rho + v_\alpha\vec{e}_\alpha + v_z\vec{e}_z, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{q}{2\pi\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho};\quad \varphi = \frac{q}{2\pi}\ln\rho + C$$ — логарифмический потенциал

3) Точечный источник



$$\begin{cases} x_1 = r\sin\beta\cos\alpha \\ x_2 = r\sin\beta\sin\alpha \\ x_3 = r\cos\beta \end{cases}$$

Из сообр. симм. окружим сферой:
$$\begin{cases} v_r = f(r) = const(\alpha,\beta) \\ v_\alpha = v_\beta = 0 \end{cases}$$

$$Q = f(r)\cdot 4\pi r^2 \qquad v_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}(v_\beta\sin\beta) + \frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial v_\alpha}{\partial\alpha} = 0$$

$$(\nabla\times\vec{v})_r = \frac{1}{r\sin\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(v_\alpha\sin\beta) - \frac{\partial v_\beta}{\partial\alpha}\right] = 0$$

$$(\nabla\times\vec{v})_\alpha = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\beta) - \frac{\partial v_r}{\partial\beta}\right] = 0$$

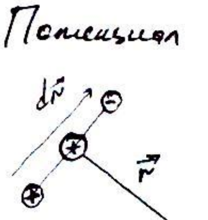
$$(\nabla\times\vec{v})_\beta = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\beta}\ \cdots\ \right] = 0$$

$(\nabla\times\vec{v}) = 0.$ Опять, найдем скал. потенциал.

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\vec{e}_\beta$$
$$= v_r\vec{e}_r + v_\alpha\vec{e}_\alpha + v_\beta\vec{e}_\beta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \varphi = -\frac{Q}{4\pi r} + const$$ — Ньютоновский потенциал.

4) Потенциал диполя



$d\vec{r} = dr\cdot\vec{n}$

$$\varphi_{-1}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi r}$$

$$\varphi_{-2}(\vec{r}) = \varphi_{-1}\left(\vec{r}+\frac{d\vec{r}}{2}\right) - \varphi_{-1}\left(\vec{r}-\frac{d\vec{r}}{2}\right) = \{\text{многочлен Тейлор}\} =$$
$$= \varphi_{-1}(\vec{r}) + \nabla\varphi_{-1}(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{2} + \ldots - \varphi_{-1}(\vec{r}) + \nabla\varphi_{-1}(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{2} + \ldots =$$
$$= \nabla\varphi_{-1}(\vec{r})\,d\vec{r} = \nabla\varphi_{-1}(\vec{r})\cdot\vec{n}\,dr = (\vec{n}\cdot\nabla)\varphi_{-1}(\vec{r})$$

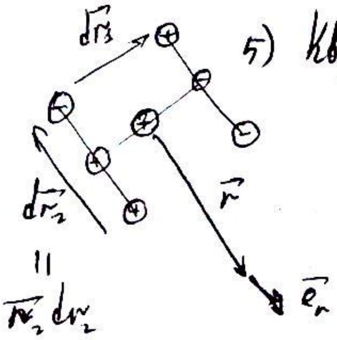
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{Q}{4\pi r}\right)\vec{e}_r\cdot d\vec{r} = \frac{Q\,d\vec{r}\cdot\vec{e}_r}{4\pi r^2} = \frac{\vec{D}\cdot\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$ поле мономоле

[Остальные переменные обнуляются]

$\vec{D}$ — дипольный момент

$\vec{D}$ зависит от углов. $\varphi_{-1}(\vec{r}) = \dfrac{S_0(\alpha,\beta)}{4\pi r} \sim \dfrac{1}{r}$

$\varphi_{-2}(\vec{r}) = \dfrac{S_1(\alpha,\beta)}{4\pi r^2} \sim \dfrac{1}{r^2}$



5) Квадруполь, мультиполь

$$\varphi_{-3}(\vec{r}) = \varphi_{-2}\left(\vec{r} + \frac{d\vec{r}}{2}\right) - \varphi_2\left(\vec{r} - \frac{d\vec{r}}{2}\right) =$$
$$= \dots = (\vec{n}_2 \cdot \nabla)(\vec{n}_1 \cdot \nabla)\varphi_{-1}(\vec{r}) = \frac{S_2(\alpha,\beta)}{r^3} \sim \frac{1}{r^3}$$
$$= (\vec{n}_2 \cdot \nabla)\cdot \varphi_{-2}(\vec{r})$$

Можно делить и дальше. направление не важно. можно делиться в цепь...

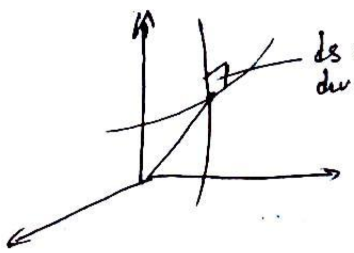
$$\varphi_{-(k+1)}(\vec{r}) = (\vec{n}_k \cdot \nabla)(\vec{n}_{k-1}\cdot\nabla)\cdots(\vec{n}_1 \nabla)\varphi_{-1}(\vec{r}) = \frac{S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+1}} \sim \frac{1}{r^{k+1}}$$

$S_k(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{4\pi k!}\dfrac{\mathcal{D}^{(k)}\vec{n}_1\vec{n}_2\dots\vec{n}_k}{r^{k+1}}$, где $\mathcal{D}^{(k)}$ – тензор k-го порядка, $\mathcal{D}^{(k)}$ симм. и свёртка в 0 по любой паре индексов

$S_0(\alpha,\beta), S_1(\alpha,\beta), \dots, S_k(\alpha,\beta)$ – (напр. на сфере ($\in C_S$)) сферические функции

Они образуют ортогональную систему в смысле скал. произв-я.

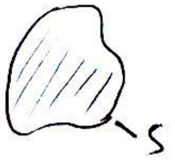
$$(S_k, S_e) = \int_{4\pi} S_k(\alpha,\beta)\, S_e(\alpha,\beta)\, d\omega =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_k(\alpha,\beta)\, S_e(\alpha,\beta)\, \underbrace{\sin\beta\, d\alpha\, d\beta}_{\text{Якобиан?}}$$



$ds = r^2 \sin\beta\, d\alpha\, d\beta$

$d\omega = \dfrac{ds}{r^2}$

И ещё немного:



$\vec{v}(\vec{r}), \ \varphi(\vec{r})$.

$\nabla^2\varphi = 0$ в W_{ex}

$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_s} = V_n(\vec{r}_s)$ (=0 для непод. пов-ти)

$\varphi\big|_{|\vec{r}|\to\infty} \to \varphi_\infty$

$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \delta\vec{v}$, $\varphi = \varphi_\infty + \delta\varphi$

$\delta\varphi\big|_{|\vec{r}|\to\infty} \to 0$

$$\delta\varphi(\vec{r}) = \delta\varphi(r,\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+1}} \quad (!)$$

и для обычных φ: $\varphi(r) = \varphi_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k \dfrac{S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+1}}$

Парадокс Даламбера

При стационарном обтекании непов. тела безвихр. потоком идеальной несжим. жидкости среда не оказывает никакого силового воздействия на тело.

В реальной жизни условие трудновыполнимо. Наблюдаются в сверхтекучих жидкостях.

$$\oint_\sigma \vec{v}\vec{n}\, d\sigma = 0 \overset{\text{Гаусс}}{\Longleftrightarrow} \int_W \nabla\cdot\vec{v}\, dW = 0$$

$$\oint_\sigma (\vec{v}_\infty + \delta\vec{v})\vec{n}\, d\sigma = 0, \quad \cancel{v_\infty \oint_\sigma \vec{n}\, d\sigma} + \oint_\sigma \delta\vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 0$$

0 – интеграл $\vec{n}$ по сфере

$$\int_\sigma \nabla(\delta\varphi)\cdot\vec n\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial n}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial r}\, d\sigma = 0.$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+1}}\right) d\sigma = 0.$$ Продиф. (S_0 - const)

$$\int_\sigma \left(-\frac{C_0}{r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(k+1)\,S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+2}}\right) d\sigma = 0.$$ $d\sigma$ в сфер. системе коор. это $r^2 \sin\beta\, d\alpha\, d\beta$

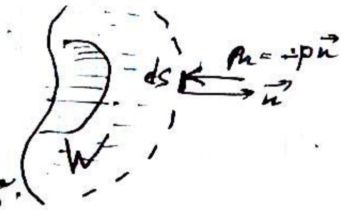
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Big[-\frac{C_0}{r^2} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(k+1)\,S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+2}}}_{\text{не дает вклада в поток}}\Big]\, r^2 \sin\beta\, d\alpha\, d\beta = 0$$

$$\lim_{r\to\infty}(-//-) = 0 \Rightarrow -4\pi C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = 0\,!$$

Итого имеем $\delta\varphi(r,\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{S_k(\alpha,\beta)}{r^{k+1}} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$ (!)

Без источника $\sim \frac{1}{r^2}$, а не $\sim \frac{1}{r}$. $\delta\vec v(r,\alpha,\beta) = \nabla(\delta\varphi) \sim \frac{1}{r^3}$

Теперь докажем парадокс: применим 2 закон Ньютона для жидкости в сфере вне тела.



$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_W \rho\vec v\, dW}_{\text{разложим на нестац. и стацион.}} = -\oint p\vec n\, d\sigma - \vec F \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho\vec v\, dW}_{0\ (\text{стационарность})} + \underbrace{\oint \rho\vec v\, v_n\, dS}_{+\text{Гаусс}}$$

$$\vec F = -\oint_\sigma \rho\vec v\, v_n\, d\sigma - \oint_\sigma p\vec n\, d\sigma;$$

$\left\{ p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} \text{ - интеграл Бернулли} \right\}$

$$\vec F = -\oint_\sigma \rho\vec v\, v_n\, d\sigma + \oint_\sigma \frac{\rho v^2}{2}\vec n\, d\sigma$$

Докажем, что $\vec F = 0$.

- $$\oint_\sigma \rho\vec v\, v_n\, d\sigma = \oint_\sigma \rho(\vec v_\infty + \delta\vec v)\, v_n\, d\sigma = \rho\vec v_\infty \underbrace{\cancel{\oint_\sigma v_n\, d\sigma}}_{0} + \rho\oint \delta\vec v\, v_n\, d\sigma$$

  0: поток вектора через сферу 0 несж. жидкость

  $$\rho\oint_\sigma \underbrace{\delta\vec v}_{\sim\frac{1}{r^3}}\, v_n\, \underbrace{d\sigma}_{\sim r^2}$$

- $$\int_\sigma \frac{\rho v^2}{2}\vec n\, d\sigma = \oint_\sigma \frac{\rho}{2}(\vec v_\infty + \delta\vec v)^2\, \vec n\, d\sigma = \underbrace{\cancel{\oint_\sigma \frac{\rho v_\infty^2}{2}\vec n\, d\sigma}}_{0} + \ldots \sim \frac{1}{r^4}$$

Итого все интегралы $\to 0$ или $= 0$. $\boxed{\vec F = 0}$

Парадокс доказан.

где F — сила с которой жидкость в сфере действует на тело.

3) $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

Δ $\varphi_{X+Y}(t) = Ee^{it(X+Y)} = E(e^{itX}e^{itY}) = \{\text{незав.}\} = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

4) Пусть $\exists\, E|X|^n$, $n\in\mathbb{N}$, тогда $\forall\, 1\le k\le n$

$$E(X^k) = (-i)^k\,\frac{d^k(\varphi_X(t))}{dt^k}\Big|_{t=0}$$ — все моменты — производные хар. ф-ции

Δ

$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,dF_X(x)$, $\varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx}\,dF_X(x)$, ..., $\varphi^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx}\,dF_X(x)$

$\int_{\mathbb{R}} |(ix)^k e^{itx}|\,dF_X(x) \le \int |x|^k\,dF_X(x) = E|X|^k \le \{\text{нер-во для моментов}\} \le \underbrace{(E|X|^n)^{\frac{k}{n}}}_{\text{конечно}}$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, т.к. правая часть — абс. сходящийся интеграл

При $k\le n$ $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

∇

NB $EX = -i\varphi'_X(0)$
$EX^2 = -\varphi''_X(0)$
$DX = -\varphi''_X(0) + (\varphi'_X(0))^2$

5) $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

Δ $\varphi_X(t) = E(e^{iXt}) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \cos tx\,dF_X(x)}_{I} + i\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \sin tx\,dF_X(x)}_{II}$

$\overline{\varphi_X(t)} = I - iII = \int_{\mathbb{R}} (\cos(-tx) + i\sin(-tx))\,dF_X(x) = E(e^{-itX}) = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$

∇

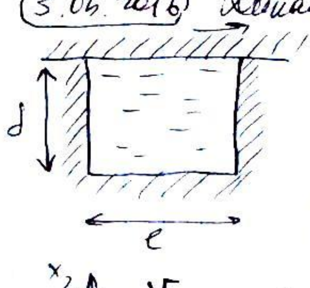
Опр X и $P_X(dx)$ называются симметричными, если $P_X(dx) = P_X(-dx)$ или распределения X и $(-X)$ совпадают.

В частности, для непр. случ. величины $f_X(x) = f_X(-x)$, то есть плотность четная

Пример Хар. ф-я сл. вел. $\sim N(0,1)$ — вещественна
т.е. $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})\,dx$

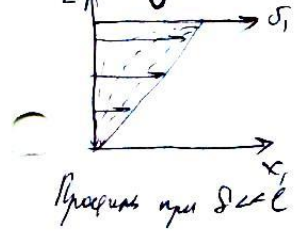
Найдем $\varphi_{N(0,1)}(t)$

3.05.2016 Динамика вязкой несжим. жидкости. Обобщенные законы Ньютона



Двигаем верх. крышку. В идеальной среде ничего.
В вязкой жидкости начнет циркулировать.

В случае $\delta \ll l$ профиль скоростей приближается к линейному $V_1(x, x_2) = const(x_1) = v\frac{x_2}{\delta}$



$\tau \sim v$, $p_{21} \sim \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$

ориентация площадки на что проецируем

$p_{21} = \mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ — закон Ньютона (линейная связь!) ← v_1 зависит только от x_2

μ = коэфф. динамической вязкости

$Па = [\mu]\frac{1}{c} \Rightarrow [\mu] = Па\cdot c = \frac{кг\cdot м}{c} = \frac{Пуаз}{10}$

Профиль при $\delta \ll l$ (Куэтта)

В общем случае связь тензора скорост. деф. и тензор. напряжений:

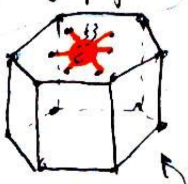
$$\overleftrightarrow{P} = \overleftrightarrow{A}_4 : \overleftrightarrow{S} + \overleftrightarrow{B}_2 \longleftarrow \text{2 порядка.}$$

↑ любой тензор 4 порядка (какой-то)

При полной изотропности среды (все направл. равноправны + ф-ла инвариантна от выбора сист. координат)

$$\overleftrightarrow{P} = a\overleftrightarrow{S} + b\overleftrightarrow{\xi}$$

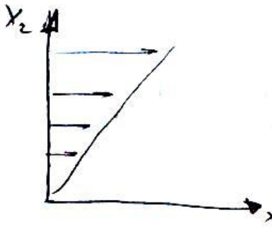
Но происходит муть?



Бывают молекулы с такой связью в изотропности такого нету

как жидкость действует на площадку $\perp v_2$ с нормалью v_1

$$P_{21} = \mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$ Выразим Куэтта через



$$P_{21} = a\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)$$

$\Rightarrow a = 2\mu$ $\quad \underset{0}{}$ ← в Куэтта $v_2 = 0$.

Посчитаем trace P

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = a\Big(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}}_{0\ \text{(диверг скорости)}}\Big) + 3b \Rightarrow b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = -p$$

для несжим. жидкость $\nabla\cdot\vec{v} = 0$

Итак имеем: $\boxed{\overleftrightarrow{P} = 2\mu\overleftrightarrow{S} - \underbrace{p}_{\frac{1}{3}(p_{11}+p_{22}+p_{33})}\overleftrightarrow{\xi}}$ – обобщенный закон Ньютона

Уравнения Навье – Стокса

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla\cdot\vec{v}) \text{ – неразр.}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overleftrightarrow{P} + \vec{f} \text{ – перенос импульса}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho}\overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} - \frac{1}{\rho}\nabla\vec{q} + Q \text{ – перенос энергии}$$

вектор пл-ти теплового потока; коэф. теплопроводности

$$\boxed{\vec{q} = -\lambda\nabla T} \text{ – закон Фурье}$$

$$\frac{Дж}{м^2\cdot с} = [\lambda]\frac{К}{м}$$

$$[\lambda] = \frac{Вт}{м\cdot К} = \frac{кг}{м^2 с^3\cdot К}$$

→ пост. плотность → $\nabla\cdot\vec{v} = 0$

→ подставим $\overleftrightarrow{P}$ из обоб. ур-я Ньютона → • $\nabla\cdot(-p\overleftrightarrow{\xi}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{pmatrix} = -\nabla p$

• положим $\mu = const \Rightarrow \nabla\cdot(2\mu\overleftrightarrow{S}) = 2\mu\nabla\cdot\overleftrightarrow{S}$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} & & \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\end{pmatrix} = \ldots;\quad (\nabla\cdot\overleftrightarrow{S})_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)$$

Выносим одинак. произв.

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}}_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\Big) = \frac{1}{2}\nabla^2 v_1$$

Аналогично $(\nabla\cdot\overleftrightarrow{S})_2 = \frac{1}{2}\nabla^2 v_2$

• Подставим $\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \vec{f}}$

→ $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho}\overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\vec{q} + Q$

$$-p\overleftrightarrow{\xi}:\overleftrightarrow{S} = \begin{pmatrix}-p & & \\ & -p & 0\\ 0 & & -p\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}S_{11} & \cdots & S_{13}\\ & \ddots & \\ S_{31} & \cdots & S_{33}\end{pmatrix} = -p(S_{11} + S_{22} + S_{33}) = -p\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$$2\mu\overleftrightarrow{S}:\overleftrightarrow{S} = 2\mu\overleftrightarrow{S}^2$$

$$\nabla \vec{q} = \nabla(-\overset{\text{постоянна}}{\lambda} \nabla T) = -\lambda \cdot \nabla^2 T$$

$$E = C_p T$$

$$\left(E = C_{p0} + \int_{T_0}^{T} C_p(T)\, dT\right)$$

С в общем случае

Подставим: $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{2\mu}{\rho}\dot{\xi}^2 + \dfrac{\lambda}{\rho}\nabla^2 T + Q$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \underbrace{\left(\frac{2\mu}{\rho C_p}\right)\dot{\xi}^2}_{\text{маленький, пренебрегаем}} + \left(\frac{\lambda}{\rho C_p}\right)\nabla^2 T + \frac{Q}{C_p}}$$

$\dfrac{\mu}{\rho} = \nu$ — коэффициент кинематической вязкости $[\nu] = \dfrac{м^2}{с}$

не фигурирует кг

$\dfrac{\lambda}{\rho C_p} = \chi$ — коэффициент температуропроводности $[\chi] = \dfrac{м^2}{с}$

Эти ур-я решаются независимо

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + f & (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)T = \chi \nabla^2 T + \frac{Q}{C_p} \qquad (3)$$

температура (ур-е теплопроводности)

$$\frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)X = D\nabla^2 X + Q_x$$

примеси $X = \dfrac{\rho_x}{\rho} \ll 1$ (4)

С помощью (1) (2) можно решить (3)(4)

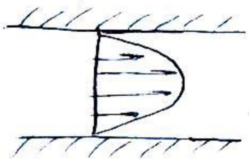
(1)(2) - ур-е Навье-Стокса

Особенности ур-е Навье-Стокса

1) Нелинейность (показывал пример)
2) Неволюционный вид

$\dfrac{df}{dt} = Af$, $f = \begin{pmatrix} f_1(\vec{r},t) \\ f_n(\vec{r},t) \end{pmatrix}$ — такого вида Навье-Стокс не имеет

3) Неустойчивость



Течение Пуазейля имеет такой профиль

Число Рейнольдса $Re = \dfrac{vd}{\nu} \ll Re^* = 2300$

Когда $Re \ll Re^*$, всё ок, иначе оно другое. (хаотическое) (турбулентность) (не ламинарность)

течение Пуазейля

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} v_1(x_1 x_2 x_3 t) \\ \vdots \\ v_3(\text{—//—}) \end{pmatrix}$$

В проекции на x_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_3\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \ldots\right) + f \\ \ldots \text{и еще } 3 \end{cases}$$

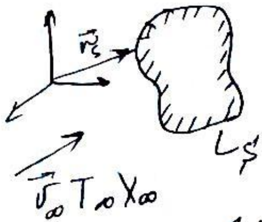
$$p(\vec{r},t) = p(x_1 x_2 x_3 t)$$
$$T(\vec{r},t) = T(x_1 x_2 x_3 t)$$
$$X(\vec{r},t) = X(x_1 x_2 x_3 t)$$ — концентрация примеси

Плюс теплопроводность.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v_1\frac{\partial T}{\partial x_1} - v_2\frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial T}{\partial x_3} + \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\right) + \frac{Q}{C_p}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -v_1\frac{\partial X}{\partial x_1} + \ldots + D\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + \ldots\right) + Q_x$$

Постановка граничных условий для Навье-Стокса



• Ур Н-С в W_{ex}:

1) $v\to v_\infty$, $T\to T_\infty$, $X\to X_\infty$
$|\vec r|\to\infty$ — условие затухания

2) $v_n|_s = v_{ns}(\vec r_s)$
$v_\tau|_s = v_{\tau s}(\vec r_s)$ $\Rightarrow \vec v|_s = \vec v_s(\vec r_s)$

условие непротекаемости
прилипание

Частный случай: непод. пов-ть $\vec v|_s = 0$

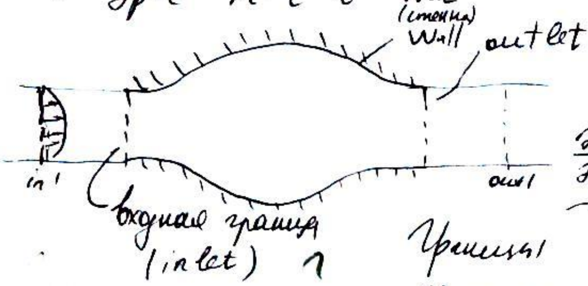
3) $T|_s = T_s(\vec r_s)$, $\vec q = -\lambda\nabla T$, $q_n = \vec n\vec q = -\lambda\vec n\nabla T = -\lambda\frac{\partial T}{\partial n}$
└ условие I-го рода (Дирихле)

$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n} = q_{ns}(\vec r_s)$ — условие II рода (Неймана)

$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = \alpha\left(T(\vec r_s) - T_0(\vec r_s)\right)$ — условие III рода.

Такие же условия на концентрацию X

• Ур-е Н-С в W_{in}



Стенка - совп. с условиями на S в W_{ex}.

$\vec v|_{in} = \vec v(\vec r_s)$, $T|_{in} = T(\vec r_s)$, $X|_{in} = X(\vec r_s)$
└ 1 рода

$\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{out} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{out} = 0$, $\frac{\partial X}{\partial n}\Big|_{out} = 0$ — 2 рода

так чтобы всё было плавно.

Границы лучше проводить немного раньше (in'), позже (out')

+ все предыдущие условия, полагаю

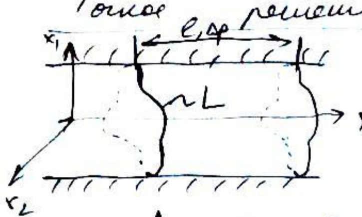
10.05.2016

$\boxed{j = -\rho D\nabla X}$ — ещё уравнение вдобавок к закону Фурье.

В идеальной (?) среде было:

$v_n|_s = V_{ns}(\vec r_s)$ (=0 для непод.)
$v_\tau|_s = V_{\tau s}(\vec r_s)$ (=0 для ...) } в ?
$\vec v|_s = \vec v_s(\vec r_s)$

Точное решение ур-я Навье-Стокса (Пуазейля)



$(\vec v\nabla)\vec v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec v$ — Навье-Стокс стационарный

$\nabla\vec v = 0$ ⌐ несжимаемости

Будем искать решение в виде $v_1 = v_2 = 0$
$v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3)$

С трубка бескон.
(сеч. - не огр.)

Из ур-я неразрывности:

$\underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}_{0} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow v_3 = const(x_3) = v_3(x_1, x_2)$

Подставим в Н-С:

$$\begin{cases} v_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cancel{v_2 \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\left(\cancel{\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}}\right), & \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad p = \mathrm{const}(x_1) \\ v_1 \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \cancel{\ldots} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \nu\left(\cancel{\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \ldots}\right) & \Rightarrow p = \mathrm{const}(x_2) \end{cases}$$

Тита несокращалось всё

Итого $p = p(x_3)$. Подставим в 3 ур-е:

$$\underbrace{\cancel{v_1}}_{0} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \underbrace{\cancel{v_2}}_{0} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \underbrace{v_3}_{\text{зависит от } (x_1, x_2)} \overbrace{\frac{\partial v_3}{\partial x_3}}^{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}}}_{0}\right)$$

v не зав. от x_3

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_3} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx_3}} = C$$

Слева зависит от x_1, x_2 справа от x_3

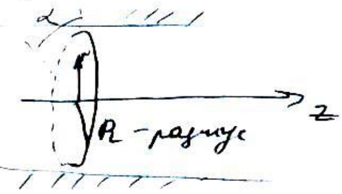
$C = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\Delta p}{l}$ ← если подставим Δp и l (см. рисунок)

Что такое Δp рисунка?

Граничные условия.

$v_3|_L = 0$ ← липка 0 на границе.

Задача та же, но для кругового среза трубы:



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \alpha^2}} = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta p}{l} = C$$

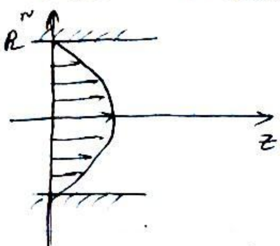
$$r\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{Cr^2}{2} + C_1 \Rightarrow v_z = \frac{Cr^2}{4} + C_1 \ln r + C_2.$$

Нужны некоторые условия, чтобы избежать проблем в 0

Ограниченность $\Rightarrow C_1 = 0$

$v_z|_{r=R} = 0 \Rightarrow \dfrac{CR^2}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\dfrac{CR^2}{4}.$

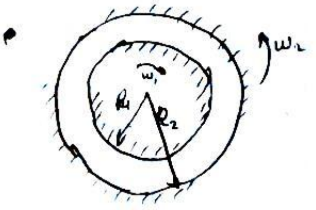
Итого имеем: $v_z(r) = \dfrac{C}{4}(r^2 - R^2) = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{\Delta p}{l}(r^2 - R^2) = \dfrac{\Delta p \cdot R^2}{4\mu l}\left[1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$



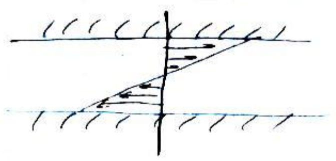
- Это вот так →

$$Q = \int_0^R V_z(r)\, 2\pi r\, dr = \frac{\Delta p R^2 2\pi R^2}{4\mu l}\int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right) =$$

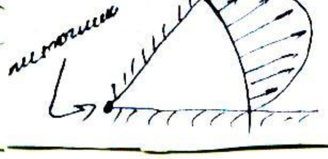
$$= \frac{\pi}{2}\frac{\Delta p R^4}{\mu l}\int_0^1 (1 - \xi^2)\,\xi\, d\xi = \boxed{\frac{\pi}{8}\frac{\Delta p R^4}{\mu l} = Q}$$



$\varepsilon = \dfrac{R_2 - R_1}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)} \ll 1 \Rightarrow$ течение Куэтта



— все линейное.



Течение Гамеля

Сложная математика...

Вязкие жидкости сверху

бесконечное простр-во

Скорость на бесконечности стремится к константе $C(\omega)$

Знаменитая задача, Сейчас забыл название

Навье - Стокса решают в основном численно. (точно - сложно)

Представим все величины в Н-С представлении в виде

$$X = [X]\tilde{X} \leftarrow \text{безразм. переменная}$$

↑ пост величина

$$t=[t]\tilde{t},\quad \vec{r}=[r]\tilde{\vec{r}},\quad \vec{v}=[v]\tilde{\vec{v}}$$

$$p=[p]\tilde{p},\quad T=[T]\tilde{T}$$

Стараются подбирать $[a]$ так, чтобы $\tilde{a} \simeq 1$.

$$\nabla = \frac{1}{[r]}\tilde{\nabla}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3 = \frac{1}{[r]}\tilde{\vec{\nabla}}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{[r]^2}\tilde{\nabla}^2$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{[v]}{[r]}\tilde{\nabla}\tilde{\vec{v}} = 0 \Rightarrow \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{v}} = 0.$$

• Н-С:

$$\frac{[v]}{[t]}\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}} + \frac{[v]^2}{[r]}(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}} = -\frac{[p]}{\rho[r]}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{\nu[v]}{[r]^2}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}} + [f]\tilde{\vec{f}}$$

$$\underbrace{\frac{[r]}{[v][t]}}_{Sh}\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}} = -\underbrace{\frac{[p]}{\rho[v]^2}}_{Eu}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \underbrace{\frac{\nu}{[r][v]}}_{\frac{1}{Re}}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}} + \underbrace{\frac{[f][r]}{[v]^2}}_{\frac{1}{Fr}}\tilde{\vec{f}}$$

Sh - число Струхаля, Eu Эйлера, $\frac{1}{Re}$ Рейнольдса, $\frac{1}{Fr}$ число Фруда

• $\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T = \varkappa\nabla^2 T \qquad T=[T]\tilde{T}$

$$\frac{[T]}{[t]}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{t}} + \frac{[v][T]}{[r]}(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{T} = \frac{\varkappa[T]}{[r]^2}\tilde{\nabla}^2\tilde{T}$$

$$\underbrace{\frac{[r]}{[v][t]}}_{Sh}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{T} = \underbrace{\frac{\varkappa}{[r][v]}}_{\frac{1}{Pe}}\tilde{\nabla}^2\tilde{T}$$

$\frac{1}{Pe}$ - Пекле - похоже на $\frac{1}{Re}$

$$Re = \frac{[r][v]}{\nu} = \frac{\rho[r][v]}{\mu}$$

$$Pe = \frac{[r][v]}{\varkappa} = \frac{\rho c[r][v]}{\lambda} = \left(\frac{\nu}{\varkappa}\right)Re = \left(\frac{\mu c}{\lambda}\right)Re = Pr\,Re$$

вязкости, смеси; теплопроводность

Pr - число Прандтля $= \frac{\nu}{\varkappa} = \frac{\mu c}{\lambda}$

• $\frac{\partial X}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)X = D\nabla^2 X \Rightarrow \frac{1}{[t]}\frac{\partial X}{\partial\tilde{t}} + \frac{[v]}{[r]}(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})X = \frac{D}{[r]^2}\tilde{\nabla}^2 X$

$$\frac{[r]}{[t][v]}\frac{\partial X}{\partial\tilde{t}} + (\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})X = \underbrace{\frac{D}{[r][v]}}_{Ped}\tilde{\nabla}^2 X$$

$Ped = \frac{[r][v]}{D}$ - число Пекле диффузионное $\qquad Ped = Sc\,Re$

$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D}$ - число Шмидта

Все числа обезразмерены!

$$Sh = \frac{[r]}{[v][t]} = \frac{[r]/[v]}{[t]} = \frac{\tau_{conv}}{\tau_{uns}}$$

Время за кот. среда пр. скорость расстояние

convective

τ unstable

Можем рассм. $Sh \lesssim 1.$

$$Re = \frac{[r][v]}{\nu} = \frac{[r]^2[v]}{\nu[r]} = \frac{[r]^2}{\nu} \Big/ \frac{[r]}{[v]} = \frac{t_{vis}}{\tau_{conv}} \geq 1$$

1) Выделение малых / больших пар. в + асимптотические методы

2) Критериальный анализ

Физ. подобие – величины равны (числа без. эл.)

Но если если мы моделируем движение корабля, но хотим сохр. Fr: $\frac{[f]_1[r_0]_1}{[v]_1^2} = \frac{[f]_2[r]_2}{[v]_2^2}$

$$[f_2] = [f_1]\frac{[r]_1}{[r]_2}\frac{[v]_2^2}{[v]_1^2}$$

– Стационарное течение

– Нет объемной силы

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (\tilde{\vec{v}}\,\tilde{\nabla}) = -Eu\,\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

$$\nabla\vec{v} = 0 \qquad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\vec{v}} = 0$$

Хотим $Re = \frac{\rho[r][v]}{\mu} \ll 1$ – это большая вязкость

$$Re\,\underbrace{(\tilde{\vec{v}}\,\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}}}_{\to 0} = -Eu\,Re\,\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

$\lim\limits_{Re\to 0} \dots$ $\qquad Eu\,Re \sim 1$

То есть в усл. большой вязкости – $\begin{cases}\mu\nabla^2\vec{v} = \nabla p \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0\end{cases}$ Ур-е Стокса

+ Стандартные Г.У. (граничные)

– Методы решения:

– разложение в ряды по ортогон. ф-ям (Фурье-синусы)

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\mu\nabla\times(\nabla^2\vec{v}) = \cancel{\nabla\times\nabla p}^{\,0} \Rightarrow \nabla^2(\nabla\times\vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla^4\vec{A} = 0$$

$$\nabla\times\vec{v} = \nabla^2 A - \nabla\underbrace{(\nabla A)}_{0} = -\nabla^2 A \qquad \vec{A}\to\psi \Rightarrow \nabla^4\psi = 0$$

$$\Delta^2\psi = 0$$

$$\mu\nabla^2\vec{v} = \nabla p \;\Big|\cdot\nabla$$

$$\mu\nabla\cdot(\nabla^2\vec{v}) = \nabla^2 p$$

$$\mu\nabla^2(\nabla\cdot\vec{v}) = \nabla^2 p \qquad \boxed{\nabla^2 p = 0}$$

– методы теории функц. компл. перем.

– методы граничных интегр. ур-й (ГИУ)

– вариационные методы

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \qquad \vec{v}\big|_S = \vec{v}_S(\vec{r}_S)$$

$$\nabla\cdot\vec{v}' = 0 \qquad \vec{v}'\big|_S = \vec{v}_S'(\vec{r}_S)$$

$N = \int_W \overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S}\,dW$ – тепло! $\quad W_S$

$$\overleftrightarrow{P}:\overleftrightarrow{S} = \left(-p\overleftrightarrow{E}_\varphi + 2\mu\overleftrightarrow{S}'\right):\overleftrightarrow{S} = -p(\underbrace{\nabla\cdot\vec v}_{0}) + 2\mu S'^2$$

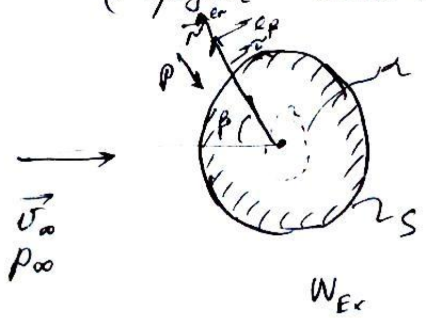
То есть $\int_W S^2 dW = \min$

$$\vec v(\vec r) = \sum_{i=0}^{N} C_i \vec v_i(\vec r)$$

$$\overleftrightarrow{S} = \sum_{i=0}^{N} C_i \overleftrightarrow{S}_i(\vec r)$$

Обтекание сферы потоком вязкой жидкости.
Решение Стокса.

(Парадокс Стокса – потом)



$$\left\{\begin{aligned} \mu\nabla^2\vec v &= \nabla p \\ \nabla\cdot\vec v &= 0 \end{aligned}\right| \text{ в } W_{EX}$$

Краевые условия $\vec v\big|_S = 0$, $\vec v \xrightarrow[|\vec r|\to\infty]{} \vec v_\infty$

$$\begin{cases} V_r = V_r(r,\beta) \\ V_\beta = V_\beta(r,\beta) \\ p = p(r,\beta) \end{cases}$$

Пренебрегаем α из симметрии

$$V_r(r,\beta) = -v_\infty\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\beta$$

$$V_\beta(r,\beta) = v_\infty\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\sin\beta$$

$\delta\vec v \sim \frac{1}{r}$ – для высоковязкой жидкости

($\delta\vec v \sim \frac{1}{r^2}$ – идеальной)

$$p(r,\beta) = p_\infty - \frac{3}{2}\mu v_\infty \frac{R}{r^2}\cos\beta$$

$F = p\cos\beta + \tau\sin\beta \qquad F = \oint_S (p\cos\beta + \tau\sin\beta)\,dS$, $dS \to 2\pi r^2\sin\beta\,d\beta$ =

$$= 2\pi\int_0^\pi (p\cos\beta + \tau\sin\beta)\, r^2 \sin\beta\, d\beta = \ldots = 6\pi\mu R V_\infty$$

Обобщение Рыбчинского

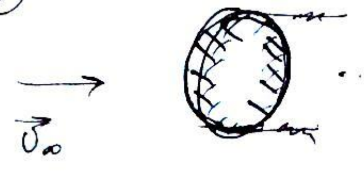
$$\left.\begin{aligned} \mu_1\nabla^2\vec V_1 &= \nabla p_1 \\ \nabla\cdot\vec v_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ в } W_{EX} \qquad v_1\big|_{|r|\to\infty} \to v_\infty$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_2\nabla^2\vec V_2 &= \nabla p_2 \\ \nabla\cdot\vec v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ в } W_{in} \qquad v_1\big|_S = v_2\big|_S \qquad \overleftrightarrow{P}_1\cdot\vec n\big|_S = \overleftrightarrow{P}_2\cdot\vec n\big|_S$$

Решение таково, что $\vec v_n = 0$ – нет норм. сост.
$\vec v_\tau \neq 0$ нет деформации

Парадокс Стокса

(2D)



$$\left.\begin{aligned} \mu\nabla^2\vec v &= \nabla p \\ \nabla\cdot\vec v &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ в } W_{EX} \quad (2D)$$

$\vec v\big|_S = 0 \qquad \vec v\big|_{|\vec r|\to\infty} \to \vec v_\infty$

Решение не существует!

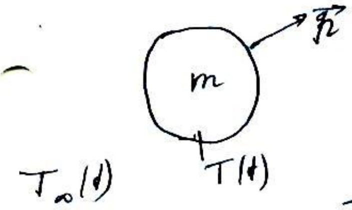
Это решение не работает, потому что мы посчитали $Re \sim 0$. Решение будет точным только вблизи окружности, а вне — плохо, особенно. И области дальнего — можно огр. и будет иметь неравномерная точность.

Есть решение лучше: $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}$ — полное

Приближение Озеена: $(\vec{v}_\infty \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}$
(для решения задачи)

(17.05.2016) ∮ сегодня Н-С при большом числе Re

Модельная задача о прогреве тела в среде с переменной температурой.



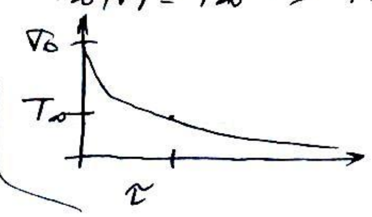
Предполагаем, что T зависит только от t.
T — темп. тела.
Температ. внешней среды $T_\infty(t)$.

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\rho W C}_{\text{незав. от } T} T) = -q_n S, \quad \vec{q} = -\lambda\nabla T \text{ — внутри среды}$$

тепл. поток — $q_n = \alpha(T(t) - T_\infty(t))$ — на границе от тела; α — коэфф. теплоотдачи

Получаем: $\frac{dT}{dt} = -\frac{T - T_\infty(t)}{\left(\frac{\rho W C}{\alpha S}\right)} = -\frac{T(t) - T_\infty(t)}{\tau}$

$T|_{t=0} = T_0$, частный случай $T_\infty(t) = T_\infty \Rightarrow T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-\frac{t}{\tau}}$



τ — хар. время затухания темп. в теле

• $T_\infty(t)$ периодична.

$t = [t]\tilde{t}$ — размер периода

$\frac{dT}{dt} = \frac{T - T_\infty(t)}{\tau}$

$\frac{1}{[t]}\frac{dT}{d\tilde{t}} = \frac{T - T_\infty([t]\tilde{t})}{\tau}$ Рассм. случай $[t] \ll \tau$.

Тогда $\frac{dT}{d\tilde{t}} = \frac{[t]}{\tau}[T - T_\infty([t]\tilde{t})]$, $T|_{t=0} = T_0$
$\varepsilon \ll 1$

Получим в пределе $\frac{dT}{d\tilde{t}} = 0$, $T(t) = const(t) = T_0$.

Среда быстро колеблется, тело пост. не меняет T — Медлен. тепловая релаксация

> $\tau \ll [t]$, $\frac{\tau}{[t]}\frac{dT}{d\tilde{t}} = -\left(T - T_\infty([t]\tilde{t})\right)$

$\varepsilon \ll 1$, $T_{ex}(t) = T_\infty(t)$ — температура тела совп. с Т внешн. среды, колебания медленные

Быстрая тепловая релаксация.

Проблема — не можем удовл. начальному условию — $T(0) = T_\infty(0) \neq T_0$. Это произошло, поскольку мы пренебрегли произв.

τ — время быстрой подстройки

$[\tau]$ время подстр. $[t]$ — внешн. масштаб

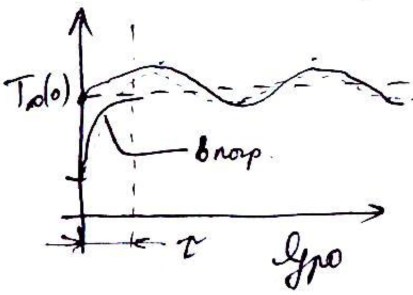
В промежутке Гистраб нарушение предположим $t = \tau \hat{t}$.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T(t) - T_\infty(t)}{\tau} \Rightarrow \frac{1}{\tau}\frac{dT}{d\hat{t}} = -\frac{T - T_\infty(\tau\hat{t})}{\tau}$$

За время τ $T_\infty(t)$ почти не меняется

$$\frac{dT}{d\hat{t}} = -[T - T_\infty(0)] \qquad T|_{\hat{t}=0} = T_0, \quad T_{in}(t) = T_\infty(0) + [T_0 - T_\infty(0)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

В итоге график:



В погр. слое - экспонента стремится к T_∞ - $T_{in}(t)$

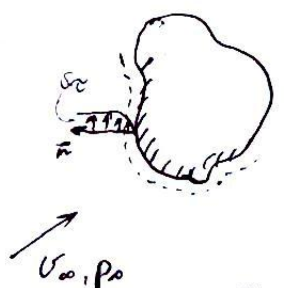
В сумме: $T(t) = T_{in}(t) + T_{ex}(t) - T_\infty(0)$ такое обеспечивает непр. решения. Это реш. удовл. нач. условиям.

$\lim\limits_{t\to 0} T_{ex}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} T_{in}(t)$ - принцип асимптотического сращивания.

Сращивание не в точке, а на ∞ или 0.

Для ур-й ≥ 2 порядка принцип постулируется.

Течение при больших числах Re. Уравн. Прандтля



В идеальной среде: $\begin{cases} (\vec{v}\cdot\nabla)\cdot\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \\ v_n|_S = 0 \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$ ур. Эйлера

Навье-Стокс: $\varepsilon \ll 1 \begin{cases} \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} \\ v_n|_S = 0 \quad v_\tau|_S = 0 \end{cases}$ прилипание

$$(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}} = -Eu\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

$$Re = \frac{[v][r]}{\nu} = \frac{\rho[v][r]}{\eta} \gg 1.$$

Пограничный слой схематично. Вне слоя решение как в идеальной жидкости.

Найдем решение в погр. слое:

$[v] = v_\infty$, $[r] = L$ - характ. размер тела

$[S] = L$ $\quad [n] = \delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$ — !!! (принять на веру) размер [погран. пред. слоя.

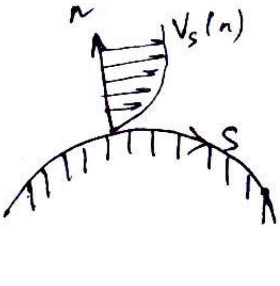
Масшт. продольной скор.

$[v_s] = v_\infty \qquad [v_n] = \frac{v_\infty}{\sqrt{Re}}$

$Re \to 0$
$\to 0$

Без выкладок: $\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0, \quad v_s\frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n\frac{\partial v_s}{\partial n} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \nu\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}\left(+\cancel{\nu\frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2}}\right)$

$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \left(p = const(n), \ \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}\right)$



Уравнения Прандтля.

$n = 0$ (стенка) $\Rightarrow V_n = V_s = 0$

$n \to \infty$ $\quad V_s = U$ — реш. пол. при обтек. идеал. ж.] принцип асимп. сращ.

$S = 0 \Rightarrow v_s = f(n)$ — надо задавать самому, напр. постоянно.

Мы получили, что $p \doteq const(n)$, $p = \lim_{n\to\infty} P(n,s) = P/s$

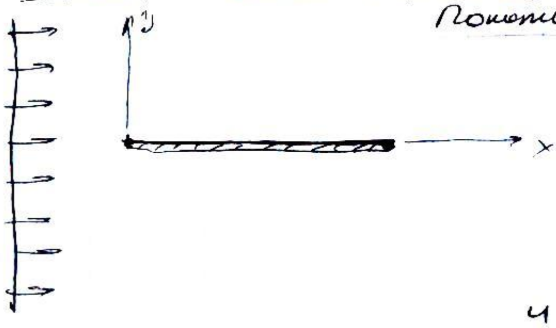
$$P + \frac{\rho U^2}{2} = const \Big| \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial p}{\partial s} + \rho U \frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial s} = -\rho U \frac{\partial U}{\partial s}$$

Подставим в Прандтля

$$v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} = U \frac{\partial u}{\partial s} + \nu \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}$$, тогда третье ур-е Прандтля не нужно.

Получили параболическое ур-е. (из эллипт.)

Пример точного решения Прандтля. Задача Блазиуса. Понятие автомодельности.



Бесконечно тонкая пластина.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\Big|_{y=0} = v\Big|_{y=0} = 0, \quad u\Big|_{y\to\infty} \to V_\infty$$

$$u\Big|_{x=0} = V_\infty$$

$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow v = \nabla \times \vec{A}$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Подставим $\Rightarrow$ $$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}\Big|_{y\to\infty} \to v_\infty \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}\Big|_{x=0} = v_\infty$$

Может $\exists$ $f(x,t) - \varphi(\underbrace{x-ut}_{\xi})$

ξ — комплекс. (автомодельность)

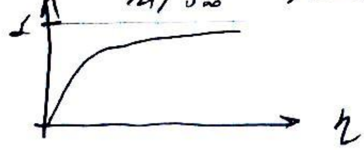
Выявить симметрию можно с пом. теории групп.

предположим, что комплекс

$\exists$ $\eta(x;y) = y\sqrt{\frac{V_\infty}{\nu x}}$ — безразмерная

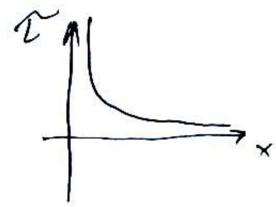
$\psi(x,y) = \sqrt{\nu v_\infty x}\, f(\eta)$. Если подст. это в ур-е и гран. условия:

$$\begin{cases} 2\dfrac{d^3 f}{d\eta^3} + f\dfrac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \\ f\Big|_{\eta=0} = 0, \quad \dfrac{df}{d\eta}\Big|_{\eta=0} = 0, \quad \dfrac{df}{d\eta}\Big|_{\eta\to\infty} \to 1 \end{cases}$$



$$\tau = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mu\rho v_\infty^3}{x}}\, f''(0) \approx 0{,}332\sqrt{\frac{\mu\rho v_\infty^3}{x}}$$

$y \sim \sqrt{x} \Rightarrow \eta = const$



Численное решение систем линейных алгебр. ур-й (СЛАУ)

Сведения из лин. алгебры:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff A\vec{x} = \vec{b}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Норма вектора: $\|\vec{x}\| \geq 0$
  $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \, \|\vec{x}\|$
  $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ И вообще $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

$\|\vec{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \max |x_i|$

- Норма матрицы (помох, $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$)

$\|A\| = \max_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$ – ассоциир. норма

$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \leq \|A\|_E = \left(\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

макс. сумма колонки $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\quad \|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_j |a_{ij}|\right)$ макс. сумма ряда

Опр Если верно $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum a_{ij} x_i x_j > 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, то A – положительно определена

Опр A симметрична, если $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$

Утв $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ – собств. числа A (симм, пол опр)

Тогда $\min\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \cdot \|\vec{x}\|^2 \leq (A\vec{x}, \vec{x}) \leq \max\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \cdot \|\vec{x}\|^2$

Обусловленность поставленной задачи

$\vec{x}, \vec{x}^*, A, A^*, \vec{b}, \vec{b}^*$ $\quad \Delta\vec{x} = \|\vec{x}^* - \vec{x}\|$, $\delta\vec{x}^* = \Delta x^* / \|\vec{x}\|$

1) $\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b} \\ A\vec{x}^* = \vec{b}^* \end{cases} \Rightarrow A(\vec{x}^* - x) = \vec{b}^* - \vec{b} \xRightarrow{A\text{-невыр}} \vec{x}^* - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b})$

$\|\vec{x}^* - \vec{x}\| = \|A^{-1}(\vec{b}^* - \vec{b})\| \leq \|A^{-1}\| \|\vec{b}^* - \vec{b}\| = \|A^{-1}\| \Delta\vec{b}^*$

$\|\vec{x}\| \delta\vec{x}^* \leq \|A^{-1}\| \|\vec{b}\| \cdot \delta\vec{b}^*$, $\quad \delta\vec{x}^* \leq \|A^{-1}\| \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|} \delta\vec{b}^* = \delta\vec{x}^*$

$\nu_\delta = \frac{\delta\vec{x}^*}{\delta\vec{b}^*} = \|A^{-1}\| \|A\| = \mathrm{cond}(A)$ – станд. число обусловл.

2) $\begin{cases} A\vec{x} = \vec{b} \\ A^*\vec{x^*} = \vec{b^*} \end{cases} \Rightarrow A^*\vec{x^*} - A\vec{x} = \vec{b^*} - \vec{b}$

$$(A + (A^* - A))(\vec{x} + (\vec{x^*} - \vec{x})) - A\vec{x} = \vec{b^*} - \vec{b}$$

$$(A^* - A)\vec{x} + A(\vec{x^*} - \vec{x}) + \underbrace{(A^* - A)(\vec{x^*} - \vec{x})}_{\text{погрешность 2 порядка, пренебрегаем}} = \vec{b^*} - \vec{b}$$

$$\vec{x^*} - \vec{x} = A^{-1}(\vec{b^*} - \vec{b}) - A^{-1}(A^* - A)\vec{x}$$

$$\|\vec{x^*} - \vec{x}\| \le \|A^{-1}\|\|\vec{b^*} - \vec{b}\| + \|A^{-1}\|\|A^* - A\|\|\vec{x}\| = \|A^{-1}\|\Delta\vec{b^*} + \|A^{-1}\|\Delta A^*\|\vec{x}\|$$

$$\|\vec{x}\|\delta\vec{x^*} \le \|A^{-1}\|(\delta\vec{b^*}\cdot\|\vec{b}\| + \|A\|\delta A^*\|\vec{x}\|)$$

$$\delta\vec{x^*} \le \|A^{-1}\|(\delta\vec{b^*}\frac{\|b\|}{\|x\|} + \|A\|\delta A^*) \le$$

погрешность вход. данных

$$\le \|A^{-1}\|(\delta\vec{b^*}\|A\| + \|A\|\delta A^*) = \|A^{-1}\|\|A\|(\delta\vec{b^*} + \delta A^*) = \overline{\delta\vec{x^*}}$$

$$\nu_\delta = \frac{\overline{\delta\vec{x^*}}}{\delta b^* + \delta A} = \|A^{-1}\|\|A\| = \text{cond}(A), \text{ снова.}$$

$$\text{cond}(E) = \|E^{-1}\|\|E\| = \|E\|^2 = 1$$

$$\|E\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\|\|A\| \Rightarrow \forall A \ \text{cond}(A) \ge 1$$

$$\text{cond}(\alpha A) = \|(\alpha A)^{-1}\|\|\alpha A\| = \|\tfrac{1}{\alpha}A^{-1}\|\cdot\|\alpha A\| = \frac{1}{|\alpha|}|\alpha|\|A^{-1}\|\|A\| = \text{cond}(A)$$

Методы решения задач:

— Прямые: решение получается за конечное число шагов; если на каждом шаге были произведены точные вычисления, то и решение будет точным.

— Итерационные: заведомо приближенны; важно исследование скорости сходимости.

<u>Обзор метода Гаусса</u>

$A\vec{x} = \vec{b}$

$a_{nn}x_n = b_n$

a_{nn} может быть нулевым или малым. при подсчете будет накапливаться ошибка.

<u>Хар-ки и свойства</u>

1. Чтобы обезопасить себя от накопления ошибки,

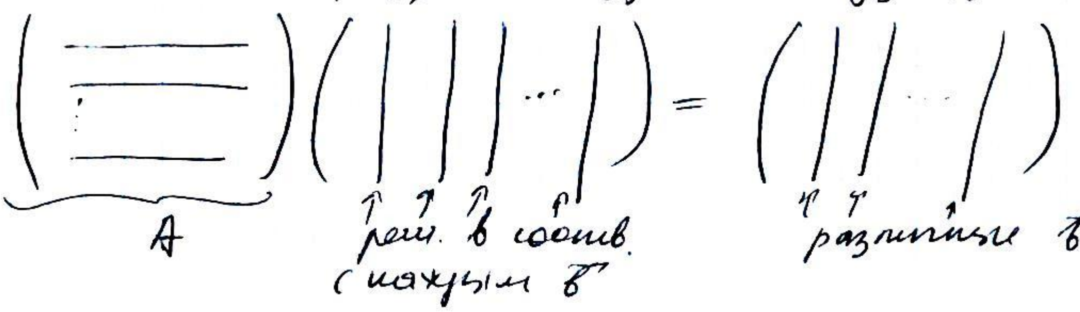
производят выбор ведущего элемента (макс по модулю)
- по столбцу
- по всей матрице

2. Кол-во операций $\sim \frac{2}{3} n^3$

3. Решение вырожденных систем ($\det A = 0$)
Альтернатива Фредгольма

   1. $\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{Rank}(A, \vec{b})$ => решений ∞ много
   2. $\mathrm{Rank}(A) \neq \mathrm{Rank}(A, \vec{b})$ => решений нет.

4. $A\vec{x} = \vec{b}$ подставляем различные правые части. Чтобы не решать одну и ту же задачу несколько раз, используют следующую схему:



Сегодня удивление, что мы это не знаем.

16.02.2016 LU-преобр. матрицы (метод Холецкого)

$\det A = \det(LU) = (\det L)(\det U) = \dots$ ← для чего нужна LU

Решение систем ЛАУ с трехдиагональной матрицей.

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ \dots \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \\ \dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1} \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Есть метод решения, детерм.

- $x_1 = \underbrace{-\frac{c_1}{b_1}}_{\alpha_1} x_2 + \underbrace{\frac{d_1}{b_1}}_{\beta_1} = \alpha_1 x_2 + \beta_1$,

И так далее, а в посл. ур-ии:

$$x_n = \frac{d_n - a_n \alpha_{n-1}}{a_n \alpha_{n-1} + b_n}$$

$$a_2(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$
$$(a_2 \alpha_1 + b_2) x_2 + c_2 x_3 = d_2 - \beta_1 a_2$$

- $x_2 = -\frac{c_2}{a_2\alpha_1 + b_2} x_3 + \frac{d_2 - \beta_1 a_2}{a_2 \alpha_1 + b_2} = \alpha_2 x_3 + \beta_2$

И так рекуррентно всё решается.

Построение α_i, β_i инкрементально – "прямой ход прогонки"
Когда все нашли, обратным ходом вычисляем x_n ... x_1.
Этот алго ~~может~~ называют ~~называться~~ Thomas algorithms

Все суть этого алго
$$\begin{cases} x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i & x_n = \dfrac{\alpha_n - a_n d_{n-1}}{a_n d_{n-1} + b_n} \\ \alpha_i = -\dfrac{c_i}{a_i \alpha_i + b_i} & \beta_i = \dfrac{\alpha_i - a_2 \beta_{i-1}}{a_1 \alpha_{i-1} + b_i} \end{cases}$$
(смотрите на википедии)

Работает за $\sim O(6n)$. Очень канонический алгоритм.
Есть достаточное условие ненакопления ошибки.

неточное, точное
$$\frac{\|\vec{x}^* - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \varepsilon \quad , \quad |b_n| \geq |a_n| + |c_n| \text{ – дост усл. ненакопл. ошибки}$$
точное

ненакопление: ошибка $\underset{n \to \infty}{\not\to} \infty$

Метод простых итераций (Якоби)

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{x} = B\vec{x} + \vec{c}$$
$$\vec{x}^0$$
$$\vec{x}^1 = B\vec{x}^0 + \vec{c}$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{c}$$
$$\vec{x}^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{x} \quad \left(\lim_{k\to\infty} \|x^n - \vec{x}\| = 0\right)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \otimes - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \otimes + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$
b_{12}, b_{1n}, c_1

Получим $b_{ii} = 0$, $b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $c_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

Еще один метод Якоби: (можно забить)
$$\vec{x} = \vec{x} - \alpha(A\vec{x} - \vec{b}) = (E - \alpha A)\vec{x} + \alpha\vec{b}.$$
Решение такое
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = -\beta(A\vec{x} - \vec{b}) \qquad \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$
$$\lim_{t\to\infty} x(t) \Rightarrow Ax + b$$

Решим систему, заменив производную конечной разностью
$$\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\Delta t} \approx -\beta(Ax^n - \vec{b}) \Rightarrow \vec{x}^{n+1} \approx x^n - \overset{\alpha}{(\beta\Delta t)}(Ax^n - b) =$$
$$= [E - (\beta\Delta t)A]x^n + (\beta\Delta t)\vec{b}$$

В этом методе дост. усл. сходимости ($\vec{x}^{n+1} = B\vec{x}^{n} + C$)

$$\|B\| < 1 \Rightarrow \|\vec{x}_n - \vec{x}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\vec{X} = B\vec{X} + \vec{C}$$

$$\vec{X}^{n} = B\vec{X}^{n-1} + C$$

$$\vec{X}^{n} - \vec{X} = B(\vec{X}^{n-1} - \vec{X})$$

$$\|\vec{X}^{n} - \vec{X}\| = \|B(\vec{X}^{n-1} - \vec{X})\| \le \|B\|\|\vec{X}^{n-1} - \vec{X}\| \le \|B^2\|\|\vec{X}^{n-2} - \dots\|$$

$$\vec{X}^{n} - \vec{X} = B(\vec{X}^{n-1} - \vec{X}^{n} + \vec{X}^{n} - \vec{X}) = B(\vec{X}^{n-1} - \vec{X}^{n}) + B(\vec{X}^{n} - \vec{X})$$

$$\|\vec{X}^{n} - \vec{X}\| \le \|B\|\|\vec{X}^{n-1} - \vec{X}^{n}\| + \|B\|\|\vec{X}^{n} - \vec{X}\|,$$ перенесем в левую часть

$$\|\vec{X}^{n} - \vec{X}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|\vec{X}^{n-1} - \vec{X}^{n}\| \le \varepsilon$$

если $\|B\| > 1$, то это < 0

$$\|\vec{X}^{n} - \vec{X}^{n-1}\| \le \frac{1 - \|B\|}{\|B\|}\varepsilon$$ — апостериорная оценка

Хотим сходимости по $\|\ \|_\infty$ норме.

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|B\|_\infty < 1 \qquad \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1 \qquad \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$$

Покажем, что это значит

думать о сумме как про $\forall$

$$b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

$$b_{ii} = 0$$

условие диагонального ~~преобразования~~ преобладания. Типа в строке диагональ самая тяжелая

А если ~~хотим~~ сходимости по $\|\ \|_2$ ... в грибном блоке №2

$$x^{k+1} = x^{k} - \alpha(A\vec{x}^{k} - \vec{b}) = \underbrace{(E - \alpha A)}_{B}\vec{x}^{k} + \alpha\vec{b}$$

$\|\vec{x}\|_2$, $\|A\|_2$, A — симметричная, положит. определенная

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n, \quad \lambda_1 = \lambda_{min},\ \lambda_n = \lambda_{max}$$

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}} \Rightarrow \|B\|_2 < 1$$

($\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$) вики

И будет сходимость. самая выс скорость сход.

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \Rightarrow \|B\|_2 = \min = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Если $\lambda_{max} \approx \lambda_{min} \Rightarrow \|B\|_2 \to 0$ и все быстро сходится

↳ матрица близка к диагон.

А если $\lambda_{min} \approx 0$, то все плохо — $\|B\| \approx 1$

Метод Зайдля (Зайделя)

$$\vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^{k} + \vec{C}, \quad \begin{cases} x_1^{k+1} = 0 + b_{12}x_2^{k} + b_{13}x_3^{k} + \dots + b_{1n}x^{k} + C_1 \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^{k} + b_{n2}x_2^{k} + b_{n3}x_3^{k} + \dots + 0 + C_n \end{cases}$$

Возникает соблазн на каждом шаге после подсчета менять k на $k+1$

Типа
$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dots \\ x_2^{k+1} = b_{21} x_1^{k+1} + 0 + b_{23} x_3^{k} + \dots + b_{2n} x_n^{k} + c_2 \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = b_{n1} x_1^{k+1} + b_{n2} x_2^{k+1} + b_{n3} x_3^{k+1} + \dots + 0 + c_n \end{cases}$$

Вот это метод Зайделя

Формализуем.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ b_{21} & 0 & & O \\ & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x}^{k+1} = B_1 \vec{x}^{k+1} + B_2 \vec{x}^{k} + \vec{c}$$

Этот метод работает чаще лучше, но иногда хуже.

Условие сходимости: (без д-ва)

$$\|B_1\| + \|B_2\| < 1 \Rightarrow \|\vec{x}^k - \vec{x}\| \le q^k \|\vec{x}^0 - \vec{x}\|, \quad q = \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1$$

$$\|\vec{x}^k - \vec{x}\| \le \frac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} \|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \le \varepsilon$$ априорная оценка

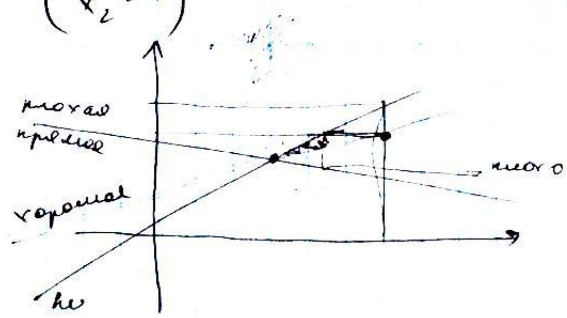
$$\|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \le \frac{1 - \|B\|}{\|B_2\|} \varepsilon$$ — апостериорная оценка

Для симметричных полож. опр. матриц метод сходится всегда. Визуализация в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{b_1}{a_{11}} = b_{12} x_2 + c_1 \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{b_2}{a_{22}} = b_{21} x_1 + c_2 \end{cases}$$

$$\vec{x}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

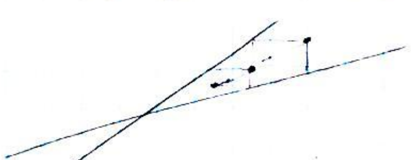
$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{12} x_2^k + c_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21} x_1^{k+1} + c_2 \end{cases}$$



Когда $\|B\| = 0$, линии параллельны (очевидно $x_i^k = b_i$)

Случай плохой обусловленности — угол между прямыми мал.

А в Якоби вот так:



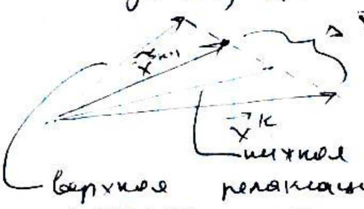
Метод последовательной релаксации.

$\vec{x}^{k} \longrightarrow \tilde{\vec{x}}^{k+1} = B_1 \vec{x}^{k+1} + B_2 \vec{x}^{k} + \vec{c}$ (Я думаю имелось в виду (…) и (…) матриц.)

предварит. значение $\vec{x}^{k+1} = \omega \tilde{\vec{x}}^{k+1} + (1-\omega)\vec{x}^{k} =$, где ω — некоторый вес.

$= \vec{x}^{k} + \omega(\tilde{\vec{x}}^{k+1} - \vec{x}^{k})$ ω — релаксационный множитель обычно $0 < \omega < 2$, иначе 2 расходится

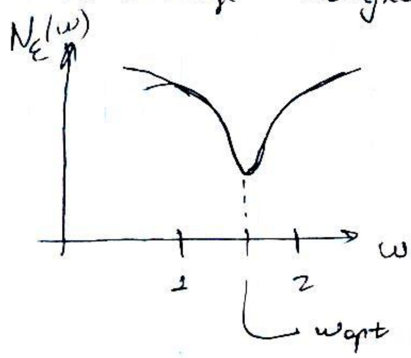
Допустим, что мы счит. Зейделем



нижняя релаксация $0 < \omega < 1$ — замедляет ск. сходимости, но фиксит ее, если её нету.

верхняя релаксация $1 < \omega < 2$ ускоряет сходимость, но она может пропасть.

В методе Зейделя для Б-диагональных матриц можно увидеть:



$N_\varepsilon(\omega)$ — кол-во итераций для $\|\vec{x}^{N} - \vec{x}\| \le \varepsilon$

ω_{opt} можно найти аналитически

Понятие о методах спуска.

Задана форма, решающая min задачу

$A\vec{x} = b \iff F(\vec{x}) = \min_{\vec{x}} F(\vec{x})$, A — симметр., пол. определ.

$B\vec{x} = \vec{c}$, B произвольна. Как эту систему сделать ↑?

$B^T(B\vec{x}) = B^T\vec{c} \Rightarrow \underbrace{(B^T B)}_{A}\vec{x} = \underbrace{B^T\vec{c}}_{\vec{b}}$, теперь A пол. опр + симм. (эрмитова)

$F(\vec{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$, $k = 1..n$ хочется по постановке задачи

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{a_{ki}\text{ (из симм.)}} x_i - b_k = 0$, $k = 1..n$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k = 0.$

$\vec{x}^0, \vec{p}^0$: $F(\vec{x}^0 + \alpha\vec{p}^0) \underset{\alpha\to 0}{<} F(\vec{x}_0)$, $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha_0 \vec{p}^0$

направление спуска; шаг спуска

общий вид того, как работает спуск

Направление спуска: $\dfrac{F(\vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0)-F(\vec{x}^0)}{\alpha} < 0$ ← Хотим $\forall\alpha$ имеет p, что...

$\alpha \to 0$

↑ верно, для того, чтобы подчеркнуть полож. α + компенсировать ||

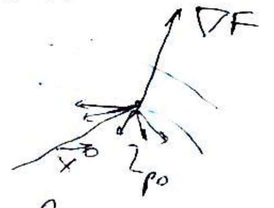
можно сокр.

$$\frac{d}{d\alpha} F(\vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0)\Big|_{\alpha=0} < 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big|_{\vec{x}^0} p_i^0 < 0 \quad , \quad \nabla F\Big|_{\vec{x}^0}\cdot\vec{p}^0 < 0$$

расписали покоординатно (скалярно)

В двумерном случае: пара векторов смотрят в разные стороны. Любое такое p_0 подойдет.



Шаг: $F(\vec{x}^0+\alpha^0\vec{p}^0) = \min\limits_{\alpha} F(\vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0)$ (при фиксированном $\vec{p}^0$)

В общем случае α ищем численно, но если квадрат. форма задана (как у нас), $(A\vec{x}=\vec{b})$ можем сделать это аналитически:

$$F(\vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0) = \frac{1}{2}\left[A(\vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0),\ \vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0\right] - (\vec{b}, \vec{x}^0+\alpha\vec{p}^0) =$$

в силу симметр. матрицы

$$= \frac{1}{2}(A\vec{x}^0,\vec{x}^0) + \frac{\alpha}{2}(A\vec{p}^0,\vec{x}^0) + \frac{\alpha}{2}(A\vec{x}^0,\vec{p}^0) + \frac{\alpha^2}{2}(A\vec{p}^0,p^0) - (\vec{b},\vec{x}^0) - \alpha(\vec{b},p^0) =$$

Линейн. $(A\vec{x}_0)$

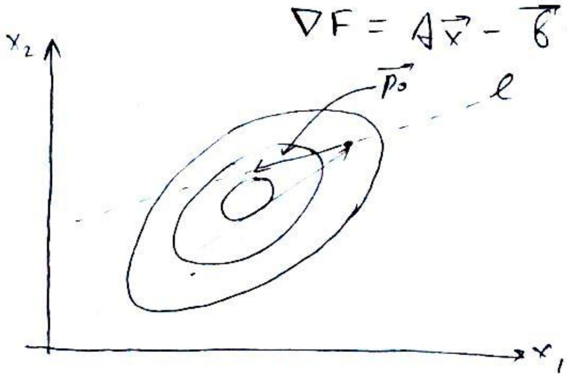
Первый переход потому что предст. функции $F(x)$...

$$= \frac{\alpha^2}{2}(Ap^0,p^0) + \alpha(A\vec{x}^0-\vec{b},p^0) + \frac{1}{2}(A\vec{x}^0,x_0) - (\vec{b},\vec{x}^0)$$

$$\frac{dF(x^0+\alpha\vec{p}^0)}{d\alpha} = 0 \qquad \alpha(A\vec{p}^0,\vec{p}^0) + (A\vec{x}^0-\vec{b},\vec{p}^0) = 0$$

$$\alpha = \alpha^0 = -\frac{(A\vec{x}^0-\vec{b},\vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0,\vec{p}^0)} = -\frac{(\vec{g}^0,\vec{p}^0)}{(A\vec{p}^0,\vec{p}^0)}$$

$$\nabla F = A\vec{x}-\vec{b} = \vec{g}$$ это вот он.



локальный минимум в направлении l это точка касания с каким-то эллипсом

Эллипсы — линии уровня полож. опред. квадрат. формы.

(1.03.2016) • Покоординатный спуск.

$$\vec{x}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \quad \min_{x_1}\left(F(x_1, x_2^k, x_3^k, \dots x_n^k)\right) \Rightarrow F(x_1^{k+1}, x_2^k \dots x_n^k)$$

(k — шаг)

$$\min_{x_2} F(x_1^{k+1}, x_2, x_3^k \dots x_n^k) \Rightarrow F(x_1^{k+1}, x_2^{k+1} \dots x_n^k)$$

И так все n координат

$$\min_{x_n} F(x_1^{k+1} \dots x_{n-1}^{k+1}, x_n) \Rightarrow F(x_1^{k+1} \dots x_n^{k+1})$$

Легко показать, что этот метод ~ Зейделю.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k = 0.$$

Вообще еще k, но, видимо, мы забываем

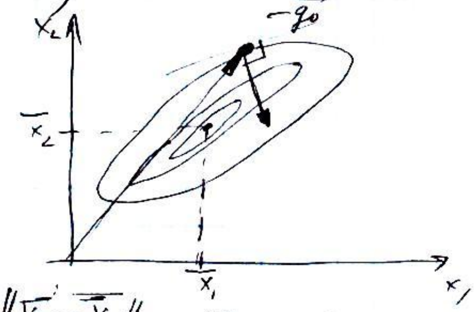
Откуда видно: $x_i = \sum_1^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k = \underbrace{\sum_1^{i-1} b_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{i+1}^{n} b_{ij} x_j^k}_{\text{метод Зейделя}}$

- Наискорейший спуск (градиентный)

Брать антиградиент: $\vec{p}^k = -\vec{g}^k$

$$\alpha_k = \frac{(g^k, g^k)}{(Ag^k, g^k)}$$

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \alpha^k \vec{g}^k$$



$$\| x^k - \bar{x} \| \le \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^k \| \vec{x}_0 - \vec{\bar{x}} \|$$ — скорость сх-ти без д-в.

- Методы сопряженных направлений

$\vec{p}^0 \ldots \vec{p}^{n-1}$ $\quad (A\vec{p}^i, \vec{p}^j) = 0$ при $i \ne j$

Этот метод итерационный, но при поиске операциях мы придем к решению за $\le n$ шагов, то есть прямой метод. Но в реальности это не так.

- Метод сопряженных градиентов

$\vec{x}^0$, $\vec{p}^0 = -\vec{g}^0$, $\alpha_0 = \frac{(\vec{g}^0, \vec{g}^0)}{(A\vec{g}^0, \vec{g}^0)}$, $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \alpha^0 \vec{g}^0$

$\vec{p}^1 = -\vec{g}^1 + \beta^0 \vec{p}^0$, $\beta_0 = \frac{(A\vec{p}^0, \vec{g}^1)}{(A\vec{p}^0, \vec{p}^0)}$, $\alpha^1 = -\frac{(\vec{g}^1, \vec{p}^1)}{(A\vec{p}^1, \vec{p}^1)}$,

$x^2 = \vec{x}^1 + \alpha^1 \vec{p}^1$

Хороший метод (и итерации интересные) и сходится круто.

- Предобусловливание. (pre-conditioning)

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\Rightarrow$ $A P^{-1} \vec{x} = P^{-1} \vec{b}$ $(\cdot P^{-1})$

С плохо обусл. матрица. Можно подобрать P так, что обусловленность улучшится.

$A = LU$

$A = LU + \delta P$ — приближенное LU-разложение

Q13: Решить СЛАУ итер. методами с хорошо и плох. обусл. матр.

A: Хорошо. Диаг. преобладание

B: Плохо: матрица Гильберта $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$

1. Найти $\operatorname{cond}(A)$ для A, B

2. Решить Гауссом.

3. Итерац. метод: Якоби, Зейделя, Релаксации

4. Спуск. сопр. градиенты.

Представить всё точно.

~

[illegible]

Численное решение с. нелинейных ау (трансцендентных).

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases} \qquad \vec{f}(\vec{x}) = 0$$

— Предварительный анализ

— Локализация решений — Нахожд. δ-окр. $\vec{\bar{x}}$, в кот. сущ единственное решение.

— Итерационное уточнение.

1 Простые итерации:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{x}^0, \vec{x}^1 = \varphi(\vec{x}^0), \dots \vec{x}^{k+1} = \varphi(\vec{x}^k)$$

δ-окр. $\vec{\bar{x}}$, $\quad \|\vec{\varphi}'(\vec{x})\| \le q < 1$

$$\vec{\varphi}'(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \vec{x}} = \frac{D(\varphi_1 \dots \varphi_n)}{D(x_1 \dots x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Тогда $\vec{x}_0 \in \delta$-окр.

При этих условиях метод сходится

$\|\vec{x}^k - \vec{\bar{x}}\| \le q^k \|\vec{x}_0 - \vec{\bar{x}}\|$ – априорная оценка

$x^k \in \delta$-окр. $\vec{\bar{x}}$

$$\|\vec{x}^k - \vec{\bar{x}}\| \le \frac{q}{1-q} \|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \le \varepsilon \Rightarrow \|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

апостериорная

2 Метод Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \varphi_1(x_1^k\ x_2^k \dots x_n^k) \\ x_2^{k+1} = \varphi_2(x_1^{k+1} x_2^k \dots x_n^k) \\ x_n^{k+1} = \varphi_n(x_1^{k+1} \dots x_{n-1}^{k+1} x_n^k) \end{cases}$$

3. Метод послед. релаксаций

$$\tilde{\vec{x}}^{k+1} = \vec{\varphi}(\vec{x}^{k})$$

$$\vec{x}^{k+1} = (1-\omega)\vec{x}^{k} + \omega \tilde{\vec{x}}^{k+1} = \vec{x}^{k} + \omega(\tilde{\vec{x}}^{k+1} - \vec{x}^{k}) = \ldots$$

$0 < \omega < 2$: $\omega \in [0,1]$ – нижняя, $\in [1,2]$ – верхняя

4. Метод Ньютона $\vec{f}(\vec{x}) = 0$

$$\vec{x}^0, \quad \vec{x} = \vec{x}^0 + (\vec{x} - \vec{x}^0) = \vec{x}^0 + \Delta\vec{x}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0. \quad f(\vec{x}^0 + \Delta\vec{x}) = 0$$

чем? членами высш. порядков? → пренебрежем

$$\begin{cases} f_1(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) = 0 \\ f_n(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1^0 \ldots x_n^0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0 \ldots x_n^0} \Delta x_1 + \ldots + \cancel{\ldots} = 0 \\ f_n(x_1^0 \ldots x_n^0) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0 \ldots x_n^0} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{\ldots} + \cancel{\ldots} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_{\vec{x}^0} \Delta\vec{x} = -\vec{f}(x_0)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_{x^0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \quad \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{x} = -\left[\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_{x_0}\right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}_0)$$

$$\vec{x}^0 + \Delta\vec{x} =: \vec{x}^1$$

Будем продолжать итерации: $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{k} - \left[\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_{\vec{x}^k}\right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}^k)$

Чувствителен к выбору $\vec{x}^0$

Но если сходимость есть, то она квадратична.

$\|\vec{x}^{k+1} - \bar{\vec{x}}\| \le q \|\vec{x}^k - \bar{\vec{x}}\|^2$ квадр.

$$\|\vec{x}^{k+1} - \bar{\vec{x}}\| \le \|\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k\| \le \varepsilon$$

5. Методы спуска

$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \Rightarrow F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(x_1 \ldots x_n)$ – ищем $\min F(\vec{x})$

$$\nabla F\big|_{\vec{x}_0} \vec{p}^0 < 0 \qquad \vec{x}^0, \vec{p}^0$$

$\min\limits_{\alpha} F(\vec{x}^0 + \alpha\vec{p}^0) \to \alpha^0 \Rightarrow \vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha^0 \vec{p}^0$

↳ обычно применяют одномерную оптимизацию

6. Универсальный метод = 4+5

Используем спуск с $F = \sum f_i^2$, но

направлением спуска возьмем $p_0 = \Delta \vec{x}^0 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}\right)_{\vec{x}^0}\right]^{-1} f(\vec{x}^0)$

+ продвижение до локального минимума ф-ии $F(\vec{x}^0 + \alpha \Delta x)$

4'. Модификация Ньютона (секущие и ложное положение)

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(\ldots x_j + \Delta x_j, \ldots) - f_i(x_j)}{\Delta x_j}$$

22.03.16

Численное нахождение собств. чисел и векторов

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$, $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$ — решаем однородную систему ЛАУ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} - \lambda & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow P_n(\lambda) = 0 \leftarrow \text{полином } n\text{-й степени}$$

На практике так не решают, а используют прямые методы.

Преобразование подобия

$B = P^{-1} A P$, $\exists \vec{y} = A\vec{x}$, преобразуем СК

$\vec{y} = P\vec{y}'$, $\vec{x} = P\vec{x}'$

$P\vec{y}' = AP\vec{x}' \Rightarrow \vec{y}' = \underbrace{(P^{-1}AP)}_{B}\vec{x}'$

Теорема Для любой матрицы A можно найти матрицу преобр подобия P (блок из линала — преобр. Жордана)

$$б_i = \begin{cases} 0 & \lambda_i - \text{простое} \\ 1 & \lambda_i - \text{кратное} \to \text{ширина блоки} \end{cases}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & б_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & б_2 & \\ & & \ddots & б_{n-1} \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема Любое преобр. подобия не меняет набора С.Ч.

Δ

$\det(B - \lambda E) = 0$

$\det(P^{-1}AP - \lambda E) = 0$; $\det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}(\lambda E)P) =$
$= \det(P^{-1}(A - \lambda E)P) = \frac{1}{\det P}\det(A - \lambda E)\det P = \det(A - \lambda E)$

∇

Обусловленность нахождения $\leftrightarrow$ задачи СЧ и СВ

$A \to \lambda_i, x_i$ $\quad i = 1..n$; A, A^* — симметричны. (необх и дост. усл чтобы $\lambda_i \in \mathbb{R}$)

$\max |\lambda_i - \lambda_i^*| \le \|A - A^*\|_2$ $\quad i \in 1..n$

$\left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i^*)^2\right]^{1/2} \le \|A - A^*\|_2$ $\quad i \in 1..n$

В качестве погрешности СВ берут угол между $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_i^*$

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{(\vec{x}_i, \vec{x}_i^*)}{\|\vec{x}_i\| \|\vec{x}_i^*\|}\right)$$

(собств. вектора задаются с точностью до длины, само важное — направление)

$\sin\varphi \le \frac{\|A - A^*\|}{\min|\lambda_{i\pm1} - \lambda_i^*|}$ Обусловленность нахождения СЧ всегда хорошая.

Обусл. нах. СВ ухудшается — если с.ч. $\lambda_{i\pm1}$ и λ_i^* близки.

Для несимм. матриц оценки максимально теоретические и далеки от практики.

Алго нахождения одного λ_i (Рэлея) (первого)

A — симм ($\lambda_i \in \mathbb{R}$). Сортируем СЧ в порядке убывания модуля.
$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|$, причем λ_1 — не кратное (простое)
$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_n|$
найдем ровно λ_1, оно наиболее важно в прикл. задачах.

$\rho(\vec x) = \frac{(A\vec x,\vec x)}{(\vec x,\vec x)}$ — отношение Рэлея

$\vec x^0$, $\vec x^1 = A\vec x^0$ $\quad \lambda^1 = \frac{(\vec x^1,\vec x^0)}{(\vec x^0,\vec x^0)} = \rho(\vec x^0)$

⋮

$\vec x^k = A\vec x^{k-1}$ $\quad \lambda^k = \rho(\vec x^{k-1})$

Утв $\lim_{k\to\infty}\lambda^k = \lambda_1$. Собств. вектор $\vec x^k \xrightarrow[k\to\infty]{\text{по направл.}} \vec x_1$

Норма $\|\vec x^k\|$ будет неограниченно возрастать

Fix: $\vec x^0$ $\|\vec x^0\| = 1$, $\vec y^1 = A\vec x^0$. $\vec x^1 = \vec y^1/\|\vec y^1\|$ $\quad \lambda^1 = (\vec y^1, \vec x^0)$

$\vec y^k = A\vec x^{k-1}$, $\vec x^k = \vec y^k/\|\vec y^k\|$ $\quad \lambda^k = (\vec y^k, \vec x^{k-1})$

Априорная оценка сходимости: $\frac{|\lambda_1^k - \lambda_1|}{|\lambda_1|} \le C\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$

Апостериорная $|\lambda_1^k - \lambda_1| \le \frac{\|\vec x^k - \lambda^k \vec x^{k-1}\|}{\|\vec x^{k-1}\|} \le \varepsilon$

QR - алгоритм

Опр. Q — ортогональна: $Q^{-1} = Q^T$

Теорема $\forall A\ \exists Q, R$: Q — ортогональная матрица (унитарная), R — верхнетреугольная

$$A = QR$$

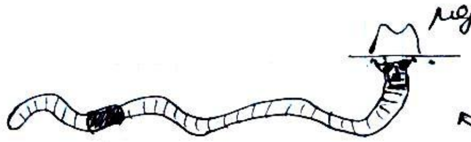
Δ google it! ∇

Статья "QR-алгоритм" на вики.

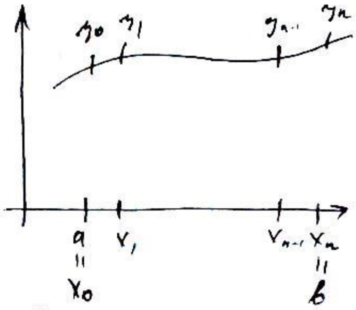
$A = A^0 = Q^0R^0$ — разложим A^0 (на вроде [illegible])
$A^1 = R^0Q^0 = (Q^0)^{-1}A^0Q^0$ — получили A^1
$A^1 = Q^1R^1$ — разложим A^1
⋮
$A^{k-1} = Q^{k-1}R^{k-1}$
$A^k = R^{k-1}Q^{k-1} = (Q^{k-1})^{-1}A^{k-1}Q^{k-1}$

Утв $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n}\\ & \lambda_2 & & \lambda_{2n}\\ 0 & & & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $|a_{ij}^k| \le C\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|^k$ $(i>j)$

=> числа на главной диагонали упорядочены по убыванию модуля



← тут было много свободного места, поэтому его занял червь Валерий



Приближение функций

Опр Интерполяция — приближенная ф-я должна совпадать с точной в заданных узлах

Опр Аппроксимация — не требуется совп. в узлах, лишь общая близость + более простая, чем точная

Снимем таблицу значений $f(x)$

Опр Экстраполяция — поиск приближенной ф-ии вне заданного $[a, b]$

(ненадежно, не будем использовать

Интерполяция

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) = \Phi(x)$$ — представим нашу ф-ю в виде ряда

$\varphi_i(x)$ — пробные ф-ии, $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ — ЛНЗ на $[a, b]$

Кол-во функций строго равно кол-ву узлов

$$\begin{cases} a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) = y_0 \\ a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ddots & \vdots \\ & & & \varphi_n(x_n) \\ \varphi_0(x_n) & \dots & & \end{vmatrix} \neq 0$$

Наиболее распростр. выбор пробных функций —

$\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = x^2 \dots$ $\varphi_n = x^n$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = P_n(x)$$ — интерполяционный полином.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} \overbrace{(-x_i + x_j)}^{x_j - x_i} \neq 0$$

Вандермонда

Матрица Ван-Дер-Монда

Произв. всевозм. разностей

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Bigg[\overbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}^{l_i(x)} \Bigg] y_i = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} y_0 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

Форма Лагранжа

$l_i(x_i) = 1$, $l_i(x_j) = \{j \neq i\} = 0$

$P_n(x_0) = y_0 \dots$ $P_n(x_n) = y_n$ — удовлетв. таблице

Более удобно записывать в форме Ньютона — Котеса

Опр Разделенные конечные разности

$x_0 \dots x_n$

$f_0(x_0) = f(x_0)$ 0-я разд. разн.

$f_1(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \approx f'(x_0)$ 1-я разд. разность

$$f_n(x_0 \dots x_n) = \frac{f_{n-1}(x_1 \dots x_n) - f_{n-1}(x_0 \dots x_{n-1})}{x_n - x_0} \approx f^{(n)}(x_0)$$

$f_0(x_i) = f(x_i)$

$f_1(x_i, x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

Утв $P_n(x) = f_0(x_0) + f_1(x_0,x_1)(x-x_0) + f_2(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) +$

$+ \dots + f_n(x_0 \dots x_n)(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$

интерполяционный полином n-й степени

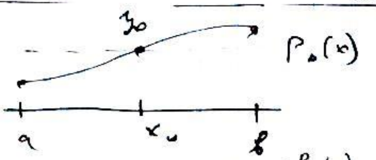
Формула Ньютона – Котеса

Δ prove it yourself n-степень? совп. в узлах?

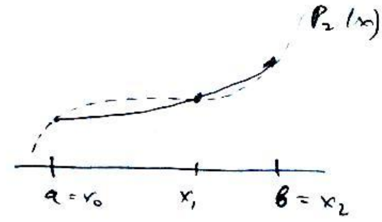
Из-за проверил узнали до x_2, а дальше сложно. горы арифметики

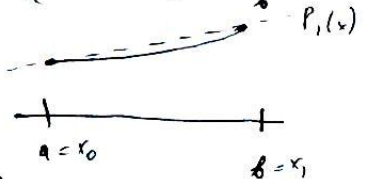
∇

Наращивание кол-ва узлов:



$P_0(x)$ – прямая $\parallel OX$

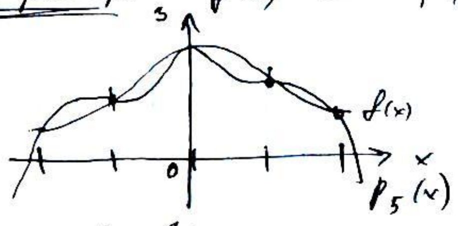




$P_1(x)$ – прямая

$P_2(x)$ – парабола

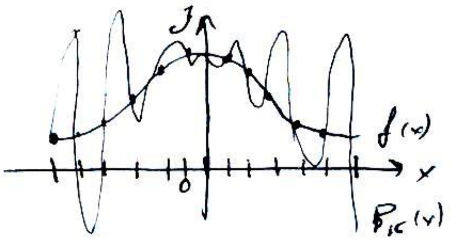
Пример: $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ на $[-1, 1]$



$n=5$ узлы на равном расстоянии друг от друга

$P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

но $|f(x) - P_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$



$n=15$ отклонение вне узлов увеличивается

Стратегия интерполяции, выбор стратегии.

Опр Стратегия интерполяции — способ распределения узлов при увеличении их количества.

$$\left.\begin{matrix} x_0^0 & & & & \\ x_0^1 & x_1^1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \\ \dots & & & & \end{matrix}\right\}$$

задаем 'матрицу' и является 'стратегией' (заметим, что она бесконечна и треугольна)

Опр Для заданной стратегии: если $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[a,b]} |P_n(x) - f(x)| = 0$, то интерполяция сходится к заданной функции.

Теорема (Фабера): о несуществовании универс. стратегии для непр. ф-ий
$\forall$ стратегии $\exists f(x)$ - непр : $\lim \max |P_n(x) - f(x)| = +\infty$

может быть не гладкая

Теорема (Чебышева): о существ. универс. стратегии для гладких ф-й

$\exists$ стратегия $\forall f(x)$ - гладкой, что $\lim \max |P_n - f| = 0$

Опр Полиномы Чебышева

- заданные на $[-1, 1]$
- строятся по рекурсивной формуле

Семейство ортогональных ф-й

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \vdots \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases}$$

NB $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$

$$\int_{-1}^{1} T_i(x) T_j(x) h(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \|T_i\|, & i = j \end{cases}$$ — ортогональны!

В качестве узлов интерполяции будем брать узлы полиномов Чебышева.

$$x_k^n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = 0..n$$ — узлы полинома

Интерполяция сплайнами

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1		y_n

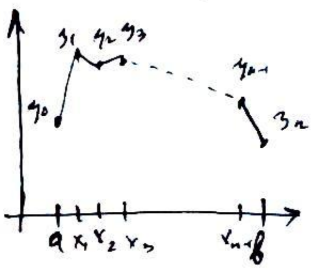
Строим для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ свой полином $P_{mi}(x)$

$S_m(x)$ — сплайн-функция

$S_m(x) = P_{mi}(x) \Big|_{[x_{i-1}, x_i]}$; $S_m(x), S_m'(x) \dots S_m^{(k)}(x)$ — непр. на $[a, b]$

m - степень сплайна, k - степень гладкости

$(m-k)$ - дефект сплайна (степень негладкости)



$$P_{1,i} = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1})$$

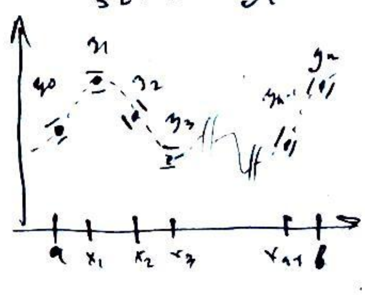
Приближаем прямыми Линейный сплайн

$k = 0$

$(m-k) = 1$

Кубический сплайн: $P_{3i}(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$

(*) $P_{3i}(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $P_{3i}(x_i) = y_i$ $P_{3i}'(x_{i-1}) = S_{i-1}$ (**), $P_{3i}'(x_i) = S_i$



Упругая линейка протягивается через желобки)))

$f^{IV}(x) = 0 \Rightarrow f(x) = P_3(x)$

Решаем (*) (4 ур-я с 4-мя неизвестными), получаем

$$P_{3i}(x) = \frac{(x - x_i)^2 [2(x - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})]}{(x_i - x_{i-1})^3} y_{i-1} +$$

$$+ \frac{(x-x_{i-1})^2[2(x_i-x)+(x_i-x_{i-1})]}{(x_i-x_{i-1})^3} y_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})^2} S_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2} S_i$$

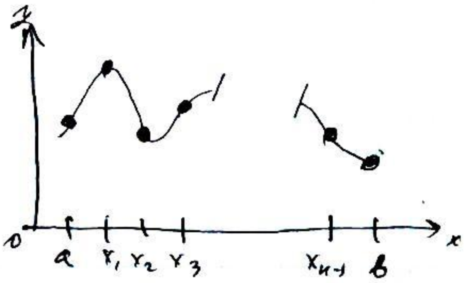
– Чтобы повысить гладкость, "накинем линейку на гвозди":

Заменим (**) на:

$P'_{3i}(x_{i-1}) = P'_{3i-1}(x_{i-1})$

$P''_{3i}(x_{i-1}) = P''_{3i-1}(x_{i-1})$

Потеряем 4_{n-2} уравнения



(5.04.2016) Аппроксимация

x_0	x_1		x_n
y_0	y_1		y_n

$f(x) \approx F(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x)$, $m=n \Rightarrow$ интерполяция

$m<n$ лучше, но менее точно. Для другого смысла 'разности' ф-й.

$$\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\right)^2 = \min \quad \leftarrow \text{метод наим. квадратов}$$

Min Square Root (MSR)

$\varphi(\vec{c}) = \varphi(c_0 \dots c_m)$ $\quad \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = 0 \quad k=0..m}$ ← необх. условие; чтобы был 1 экстремум? Ну типа минимум

$$\sum_{i=0}^{n} 2\left(y_i - \sum_j c_j \varphi_j(x_i)\right)(-\varphi_k(x_i)) = 0$$

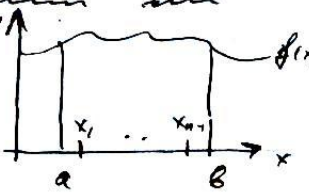
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_k(x_i)}_{\psi_k}$$

$$\sum_{j=0}^{m} c_j \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)}_{\varphi_{jk}} = \psi_k \quad \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} \varphi_{jk} c_j = \psi_k \quad k=0..m$$

Эту систему решаем и находим c_i

Численное интегрирование ф-й

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



Речь идёт о площади криволин. трапеции

Д квадратурных метод — разбиение на участки

x_i, $i \in [0..n]$ — узлы интегрирования

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f_i \quad \text{— квадратурная формула}$$

Зависит от
- выбора узлов.
- выбора весов A_i

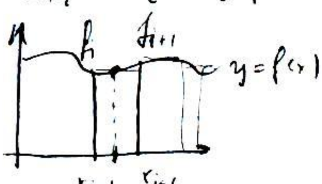
Фиксированные узлы, варьирующие A_i — КФ Ньютона – Котеса

Фиксиров. A_i, варьирующие узлы — КФ Чебышева

Варьируем всё — КФ Гаусса.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = const(i) = \Delta x$

(1)

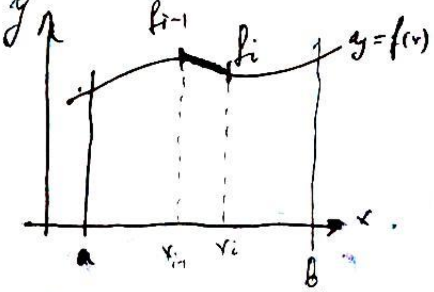


Тогда $I = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-\frac{1}{2}})\,dx =$

$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac{1}{2}}\Delta x$ — самая простая квадратур. ф-ла

(Это интерпол. полином 0 степени)

(2)



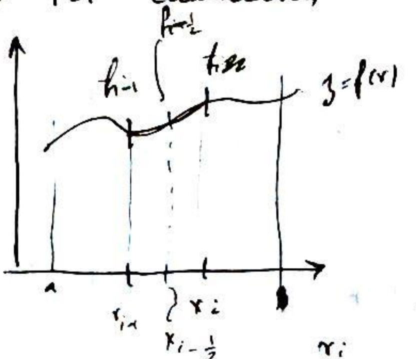
$$I = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1})\right]dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(f_{i-1}\Delta x + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\int_0^{\Delta x}\xi\, d\xi\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(f_{i-1}\Delta x + \frac{f_i - f_{i-1}}{\cancel{\Delta x}}\frac{\Delta x^{\cancel{2}}}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(f_{i-1}\Delta x + \frac{\Delta x(f_i - f_{i-1})}{2}\right) =$$

Это интерполяц. полином 1 степени. $= \frac{\Delta x}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right)$ — ф-ла трапеций

(13) КФ Симпсона



$$P_{i,2}(x) = f_{i-\frac12} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-\frac12}) + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-\frac12} + f_i}{\Delta x^2/2}(x - x_{i-\frac12})^2$$

$$P_{i,2}(x_{i-1}) = f_{i-\frac12} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-\frac12} + f_i}{\Delta x^2/2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2$$

$$= f_{i-\frac12} + 2(f_i - f_{i-1}) + 4(f_{i-1} - 2f_{i-\frac12} + f_i)$$

$$I \approx \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{i,2}(x)\,dx = \frac{\Delta x}{6}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n} f_i + 4\sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac12} + f_n\right)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{i,2}(x)\,dx = f_{i-\frac12}\Delta x + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\Delta x/2}\xi\, d\xi + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-\frac12} + f_{i}}{\Delta x^2/2}\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}}\xi^2\, d\xi =$$

$$= f_{i-\frac12}\Delta x + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-\frac12} + f_i}{6}\Delta x = \frac16\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i\right)\Delta x.$$

(**) вставить текст

$|I - I_0| \le \frac{M_2(b-a)}{24}\Delta x^2$ — для КФ прямоугольников (центральных)

$$|I - I_0| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f_{i-\frac12}\Delta x\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x) - f(x_{i-\frac12})\right]dx\right| \le$$

$$\le \sum\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x) - f(x_{i-\frac12})|\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\cancel{f(x_{i-\frac12})} + \cancel{f'(x_{i-\frac12})(x - x_{i-\frac12})} + \frac12 f''(\xi)(x - x_{i-\frac12})^2 - \cancel{f(x_{i-\frac12})}\right|dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_2/2 \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-\frac12})^2\,dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{M_2}{2}2\int_0^{\frac{\Delta x}{2}}\xi^2\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3\frac13 = \sum^{n}\frac{M_2}{24}\Delta x^3 = \frac{M_2}{24}\Delta x^2\sum\Delta x = \frac{M_2(b-a)}{24}\Delta x^2$$

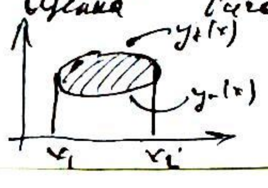
(**):
$$\begin{cases} |I - I_0| \le \frac{M_2(b-a)}{24}\Delta x^2 & \text{— квадр. прямоуг.} \\ |I - I_1| \le \frac{M_2(b-a)}{12}\Delta x^2 & \text{— трапеции} \\ |I - I_2| \le \frac{M_4(b-a)}{2880}\Delta x^4 & \text{— Симпсон} \end{cases}$$

$M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$

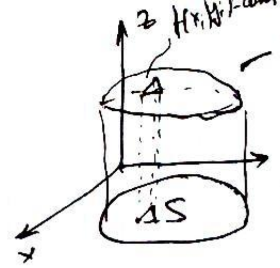
$M_4 = \max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$

Кратные интегралы

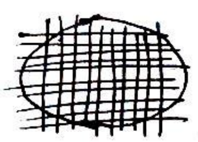
Оценка Ричардсона (апостериорная)



$$I = \int_S f(x,y)\,ds = \int_{x_1}^{x_2}dx\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} f(x,y)\,dy.$$



$z=f(x,y)$ Можно покрыть OXY декартовой сеткой



— неэффективно на краях

Эффективно — с помощью Делоне!

Как считать $\int_a^b f(x)\,dx$ с помощью Монте-Карло?

$$\int_a^b \underbrace{f(x)/P(x)}_{\varphi(x)} \cdot P(x) = \underbrace{\int_a^b \varphi(x)P(x)\,dx}_{\text{матожидание } \varphi(x)} \qquad \begin{cases} P(x)\geq 0 \text{ на } [a,b] \\ \int_a^b P(x)\,dx = 1 \end{cases} \Big| \; p(x) - \text{плотность } X$$

$$\tilde{I} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i) \xrightarrow[N\to\infty]{} I$$

считаем $\tilde{I}$, потом std — среднеквадр. отклонение, q — какой-нибудь 0,97-квантиль X, $a = \frac{q\cdot std}{\sqrt{N}}$ — ширина довер. интерв. (вероятность

сходимость по вероятности отклонения дальше)

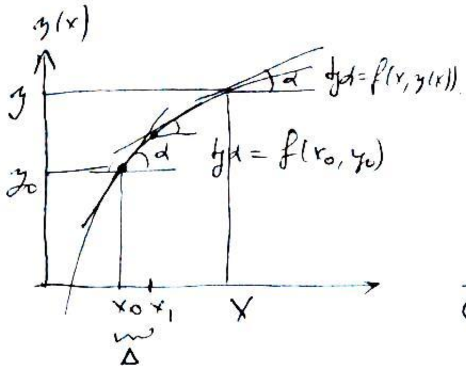
$$\Delta_N = |I-\tilde{I}| \sim \frac{\Delta_1}{\sqrt{N}}, \quad \Delta_1 = \left\{\int_a^b [\varphi(x)-I]^2 dx\right\}^{1/2}$$ — а это тоже.

(19.04 2016)

Решение ОДУ:

$m\vec{a} = \vec{f}$ ← это для непосвящённых

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$ ← вот в такой форме всё всегда у физиков



$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ ← начальные условия

Решать такое аналитически сложно.

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x_0} \approx \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = f(x_0, y_0)$$

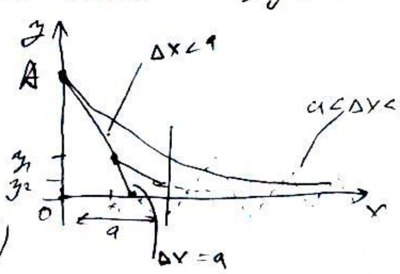
$y_1 \approx y_0 + f(x_0,y_0)(x_1-x_0) \to \Delta x_0$

$\left[\begin{array}{l} h = \Delta \text{ — размер шага} \\ \text{в итоге погрешность } O(h) \end{array}\right]$

$y_{i+1} \approx y_i + f(x_i, y_i)\Delta x_i$ ← насколько сильно отклоняется?

Это явный метод Эйлера (вот для такой задачи Коши)

Пример $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a}$, $y|_{x=0} = A$ | $y(x) = Ae^{-\frac{x}{a}}$



Проверим метод:

$\frac{y_1-y_0}{\Delta x} = -\frac{y_0}{a}$, $\frac{y_1-A}{\Delta x} = -\frac{A}{a}$, $y_1 = A\left(1-\frac{\Delta x}{a}\right)$

Если $\Delta x < a$, то похоже
$\Delta x = a$, в ноль и останется
$a < \Delta x < 2a$, осцилляции $\to 0$
$\Delta x = 2a$, осцилляции не затухают

$y_n = A\left(1-\frac{\Delta x}{a}\right)^n$

(вычислительная неустойчивость)

$\Delta x > 2a \Rightarrow$ расходящиеся осцилляции.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ Мы теряем много информации о точках!

$y(x_0) = y_0$

$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0)$; $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_1, y_1)$, $y_1 = y_0 + f(x_1, y_1)(x_1 - x_0)$

вблизи (x_0, y_0)

$y_{n+1} = y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1})(x_{n+1} - x_n)$

Это неявный метод Эйлера

Пример

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a}$; $y|_{x=0} = A$ | $y(x) = A e^{-\frac{x}{a}}$

$\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = -\frac{y_1}{a}$, $y_1 = \frac{y_0}{1 + \frac{\Delta x}{a}}$ ... $y_n = \frac{A}{(1 + \frac{\Delta x}{a})^n}$

геом. прогрессия с хорошим коэфф.

Видно, что тут нету безобразия как в явном методе

$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1})\Delta x_i$

$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_{i+1}, y_i)\Delta x_i$

$y_{i+1}^1 = y_i + f(x_i, y_{i+1}^0)\Delta x_i$

$y_{i+1}^{s+1} = y_i + f(x_i, y_{i+1}^s)\Delta x_i$

1 Внутренние итерации по нелинейности

Выбор s итераций до сходимости

Типа простые итерации с выбранным ε.

2 Предиктор - корректор

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x_i$

$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})\Delta x_i$

} только 2 шага, но здорово подавляются пилообразные осцилляции.

3 Итерационный метод 1 с фикс. кол-вом итераций

Обычно это так и работает.

4 Линеаризация по Ньютону

тут бред. Подумать.

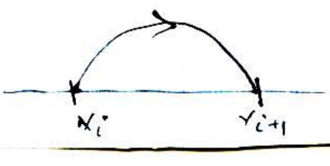
$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $y_i + \Delta y_i = y_i + f(x_{i+1}, y_i + \Delta y_i)\Delta x_i =$

$= \{\text{Тейлор}\} = \left[f(x_{i+1}, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_{i+1}, y_i} \Delta y_i + \cancel{X}\right]\Delta x_i$

$\left(1 - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_{i+1}, y_i}\right)\Delta y_i = f(x_{i+1}, y_i)\Delta x_i$

$\Delta y_i = \frac{f(x_{i+1}, y_i)\Delta x_i}{1 - \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x_{i+1}, y_i}}$

Квадратурные методы решения ОДУ



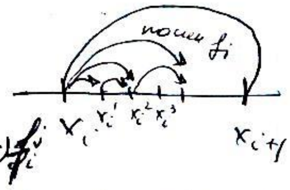
$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ → Проинтегрируем $y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx$

→ $y(x+h)$ → $y(x)$

Информация о предыдущих шагах

Квадратурные методы

— Одношаговые многошаговые (Рунге-Кутты) Многошаговые (Адамса)



y_i^v

$$f[x, y(x)] \approx \sum_{v=0}^{m} P_{m_v}(x) f_i^v$$

где $f_i^v = f(x_i^v, y_i^v)$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{v=0}^{m} P_{m,v} f_i^v\,dx = \sum_{v=0}^{m} f_v^i \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{m_v}(x)\,dx = \sum_{v=0}^{m} f_i^v C_v$$

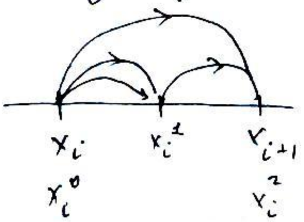
вот так предлагается искать Δy

$$\left|\begin{array}{l} y_i^1 = y_i^0 + C_0^0 f_i^0 \\ y_i^2 = y_i^0 + C_0^1 f_i^0 + C_1^1 f_i^1 \\ y_i^m = y_i^0 + \sum_{v=0}^{m-1} C_v^{m-1} f_i^v \end{array}\right\} \times 3$$

4 порядок аппроксимации

(Явный)

Метод 4-го порядка точности (Рунге-Кутта) (Аппр. ошибка $\sim O(h^4)$ $\sim O(\Delta x^4)$)



$$y_{i+1} = y_i + K_i \Delta x$$

$$K_i = \frac{1}{6}(K_i^0 + 2K_i^1 + 2K_i^2 + K_i^3)$$

$$K_i^0 = f(x_i, y_i)$$

$$K_i^1 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + K_i^0 \frac{\Delta x}{2}\right)$$

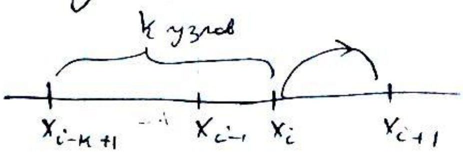
$$K_i^2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + K_i^1 \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$K_i^3 = f(x_i + \Delta x, y_i + K_i^2 \Delta x)$$

Ну и заметим, что такая интер. ф-ла подходит под вышесказанное выше.

<u>Метод Адамса</u>

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx$$



$$y_{i+1} \approx y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)\,dx = y_i + \sum_{j=1}^{k} C_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1})$$

— явный метод Адамса (– Башфорта)

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{k-1}(x)\,dx = y_i + \sum_{j=0}^{k-1} C_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1}) =$$

$$= y_i + C_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k-1} C_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1})$$

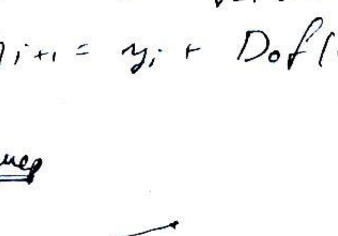
неявный метод Адамса. (– Моултона)

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{k} C_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1})$$ — тут явно

$$y_{i+1} = y_i + D_0 f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k-1} D_j f(x_{i-j+1}, y_{i-j+1})$$ — тут неявно

} метод предиктор-корректор

<u>Пример</u>



$$f[x, y(x)] = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}(x - x_{i-1})$$ — интерполяц. полином 1 степени $Q_1(x)$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f[x, y(x)]\,dx \approx y_i + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\underbrace{(x - x_{i-1})}_{\xi}\right] =$$

$$= y_i + f_{i-1}\Delta x + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\int_{\Delta x}^{2\Delta x} \xi\,d\xi = y_i + f_{i-1}\Delta x + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\frac{3}{2}\Delta x^2 =$$

$= y_i + \Delta x\left(\frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1}\right)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$ — явный метод Адамса 1го порядка по Δx

$\underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}})\right]$ — неявный метод Адамса

$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right)$ 1го порядка по Δx

← явный метод Адамса 4го порядка по Δx

$\underline{y_{i+1}} = y_i + \frac{\Delta x}{24}\left(9\underline{f_{i+1}} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right)$ — неявный

26.04.2016 Численное решение систем ОДУ и уравнений высокого порядка

1. Система дифф-ов 1го порядка, разр. отн. пр-ных

$$\begin{cases} \frac{dy_1(x)}{dx} = f_1(x, y_1(x) \dots y_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{dy_n(x)}{dx} = f_n(x, y_1(x) \dots y_n(x)) \end{cases} \qquad y_1(x_0) = y_1^0 \dots y_n(x_0) = y_n^0$$

Если система не зависит от x, она автономная. (или динамическая)

$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_n(x) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{в векторн. виде}]{\text{сист. в}} \frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \vec{f}\left[x, \vec{y}(x)\right]$

$\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$ ← нач. условие

Коши

Решаем любым из 3х известных методов

2. Одно ур-е высокого порядка.

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = F\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \dots \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right)$$ Ставим задачу Коши => нужно задать значение в x_0

- $y(x_0) = y_0 \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0} = y_0' \dots \quad \frac{d^{n-1}y(x)}{dx}\Big|_{x_0} = y_0^{(n-1)}$ Переобозначим все!

После ~~преобразов.~~ переобозначение, 1е уравнение сведется к

$$\begin{cases} \frac{dy_n(x)}{dx} = F(x, y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)) \\ \frac{dy_1(x)}{dx} = y_2(x) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} = y_3(x) \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}(x)}{dx} = y_n(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} &y_1(x_0) = y_0 \\ &y_2(x_0) = y_0' \\ &\vdots \\ &y_n(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Можно придать физич. трактовку, напр 2 закон Ньютона.

$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t, \frac{dx}{dt})$ — тоже задача Коши

$x(0) = x_0$ — нач. положение

$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = v_0$ — нач. скорость

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = f(t, x, v) \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = f(t, x, \frac{p}{m}) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

↑ скорость; ← импульс

Понятие о жесткости обыкновенных дифф. ур-й и систем
Численное решение жестких задач

Понятие жесткости надо $\boxed{\text{прочувствовать}}$ (оно неоднозначно)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y - f(x)}{X} & \text{- релаксационное уравнение} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

'хи'

Решим приближенно: выведем параметр, устремим к 0 и решим с таким пределом.

Δ масштаб изменения аргумента

$x = [x]\tilde{x}$

безразмерный аргумент

характеризует масштаб изменения $f(x)$, типа фиксирован.

Перейдем к новой переменной $\tilde{x}$

$$\frac{1}{[x]}\frac{dy}{d\tilde{x}} = -\frac{y - f([x]\tilde{x})}{X}$$

внешний масштаб задачи — внутренний масштаб

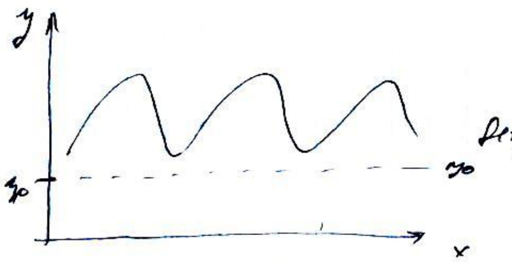
2 параметра — $[x]$ и X

"Регулярное возмущение"

1) $[x] << X$ внешнее воздействие быстро меняется, система не успевает релаксировать

инерционная система

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tilde{x}} = -\dfrac{[x]}{X}\left[y - f([x]\tilde{x})\right] & \left(\dfrac{[x]}{X} = \varepsilon << 1\right) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$



Устремим ε к 0. Решение по малости по отн. к начальному условию.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(\tilde{x}) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots$$

Быстрая релаксация при внешнем воздействии

2) $X << [x]$. Сингулярное возмущение

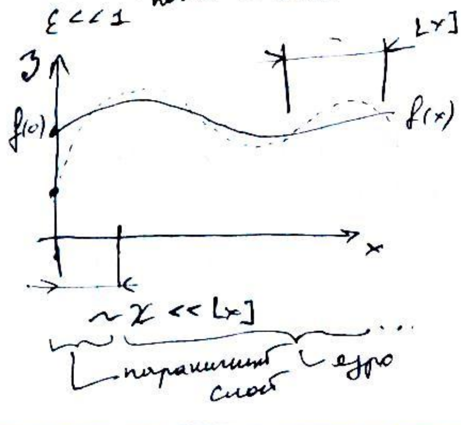
$$\frac{X}{[x]}\frac{dy}{d\tilde{x}} = -[y - f([x]\tilde{x})]$$

почти не влияет

$\varepsilon << 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \dots \Rightarrow y \approx f([x]\tilde{x}) = f(x)$$

$y(0) = f(0)$, $y(0) = y_0$



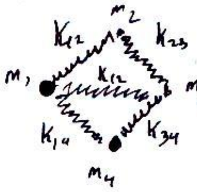
Малый параметр ε вносит в решение X возмущение, где X ∈ {регулярное, сингулярное}

В пограничном слое высокая ошибка, в ядре - малая.

Признак сингулярного возмущения — ε в старшей производной, который упрощает ур-ю.

$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{a}{y} \\ y(0) = A \end{cases}$ Регулярное возмущение

$\varepsilon = \frac{\tau}{[x]} \ll 1$. $\tau, [x]$ – 2 масштаба.



Пример

← пружинки, грузы разных масс. $\frac{m_1}{m_2} = \varepsilon \ll 1$

Жесткость – совокупность целевых эффектов возникающих в случае сингулярного возмущения

В линейных задачах жесткость – это $\frac{|\lambda_{min}|}{|\lambda_{max}|} \ll 1$.

Что делать??

1. Неявные методы Рунге-Кутты.
2. Алгоритмы Гира (не квадратурные)
   - неявные схема
   - производная аппроксимируется конечными разностями "назад" (с помощью уже просчитанных узлов)
   - ...

Пример:

$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x)] \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ | Гир-Эйлер (неявно) • $\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} = f(x_{i+1}, \underline{y_{i+1}})$ ← неявно • $f(x_{i+1}, y_{i+1}) = \frac{11y_{i+1} - 18y_i - 9y_{i-1} - 2y_{i-2}}{6\Delta x}$

Послойное: • $\frac{3y_{i+1} - 4y_i - y_{i-1}}{2\Delta x} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$

$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ • $\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \quad \text{на } [a,b] \\ \alpha_a y + \beta_a y'\big|_{x=a} = r_a \\ \alpha_b y + \beta_b y'\big|_{x=b} = r_b \end{cases}$ } условие 3 рода

Очевидно, что если $\beta_a = 0, \alpha_a \neq 0 \Rightarrow y|_{x=a} = \frac{r_a}{\alpha_a}$ ← зад. 1 рода (зад. Дирихле)

$\beta_a \neq 0, \alpha_a = 0 \Rightarrow y'|_{x=a} = \frac{r_a}{\beta_a}$ ← условие 2 рода

Как решать? Сведем к Коши: $y = y_1(x) + \mu y_2(x)$ Заменим y-ку и условие:

Возьмем 1 ф-лу из 3у $\begin{cases} y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = r(x) \\ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$ Неявно $\begin{matrix} \alpha_a y_1 + \beta_a y_1'\big|_{x=a} = r_a \\ \alpha_a y_2 + \beta_a y_2'\big|_{x=a} = 0 \end{matrix}$

• $\alpha_a y_1 + \beta_a y_1'\big|_{x=a} = r_a$ — если найдем, то решим • $y_2|_{x=a} = C\beta_a$, $y_2'|_{x=a} = -C\alpha_a$

$\alpha_a \neq 0$: $y_1|_{x=a} = r_a/\alpha_a$, $y_1'|_{x=a} = 0$

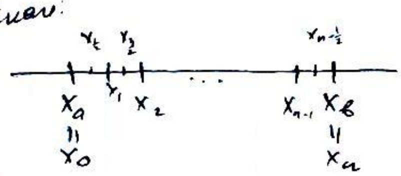
$\alpha_a = 0$: $y_1|_{x=a} = C$, $y_1|_{x=a} = r_a/\beta_a$

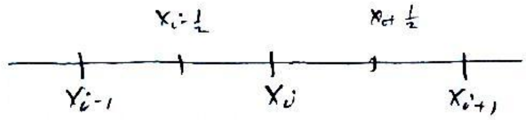
Вот две задачи Коши. Найдем такое μ, чтобы $y = y_1 + \mu y_2$ удовлетворяло 2 условию

$\alpha_b(y_1 + \mu y_2) + \beta_b(y_1' + \mu y_2')\big|_{x=b} = r_b$ ← подставили y в 2 условие

$\mu = \frac{r_b - (\alpha_b y_1 + \beta_b y_1')}{\alpha_b y_2 + \beta_b y_2'}\Big|_{x=b}$ ← ответ

Итак:





$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q(x)y(x) = r(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy(x)}{dx}\right]_i \approx \frac{1}{\Delta x}\left[P_{i+\frac12}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i+\frac12} - P_{i-\frac12}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{i-\frac12}\right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x}\left(P_{i+\frac12}\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x} - P_{i-\frac12}\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}\right) = \frac{P_{i-\frac12}}{\Delta x^2}y_{i-1} - \frac{P_{i-\frac12}+P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}y_i + \frac{P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}y_{i+1}$$

Итого
$$\underbrace{\frac{P_{i-\frac12}}{\Delta x^2}}_{a_i}y_{i-1} + \underbrace{\left(q_i - \frac{P_{i-\frac12}+P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}\right)}_{b_i}y_i + \underbrace{\frac{P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}}_{c_i}y_{i+1} = \underbrace{r_i}_{d_i}$$

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$$

Добавим краевых условий:

$$\alpha_a y + \beta_a \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = r_a$$

$$\begin{cases} \alpha_a y_0 + \beta_a \frac{y_1-y_0}{\Delta x} = r_a \\ \alpha_b y + \beta_b \frac{dy}{dx}\Big|_{x=b} = r_b \end{cases}$$

Подставим

$$\longrightarrow \alpha_b y_n + \beta_b\cdot\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta x} = r_b$$

$$\underbrace{-\frac{\beta_b}{\Delta x}}_{a_n}y_{n-1} + \underbrace{\left(\alpha_b+\frac{\beta_b}{\Delta x}\right)}_{b_n}y_n = \underbrace{r_b}_{d_n}$$

Решаем методом прогонки.

Замеч. $a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i$ $\qquad a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n$

1) $|b_i| \ge |a_i| + |c_i|$ — условие ненакопления ошибки (услов. диагон. преобладания)

$$\frac{P_{i-\frac12}}{\Delta x^2}y_{i-1} + \left(q_i - \frac{P_{i-\frac12}+P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}\right)y_i + \frac{P_{i+\frac12}}{\Delta x^2}y_{i+1} = r_i$$

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy(x)}{dx}\right] + q\cancel{(x)y}(x) = r(x)$$

2) Обобщение на нелинейные — $\frac{d}{dx}\left[P(x,y(x))\frac{dy}{dx}\right] + q[x,y(x)]y(x) = r[x,y(x)]$

Как обобщить метод?

Итерации (внутренние) по нелинейности. $y^0(x), y^1(x), \dots$

3) $q(x)=0$, $\alpha_a = \alpha_b = 0$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] = r(x) \quad \Big| \int_a^b dx \qquad P(x)\frac{dy}{dx}\Big|_a^b = \int_a^b r(x)\,dx$$

$$\beta_a y'|_{x=a} = r_a, \quad \beta_b y'|_{x=b} = r_b \qquad P(b)\frac{r_b}{\beta_b} - P(a)\frac{r_a}{\beta_a} = \int_a^b r(x)\,dx$$

Физически задача формулируется для производной. Наклон совпадает — ОК. Из-за производной решение ∞. Не совпадет — неразрешима.