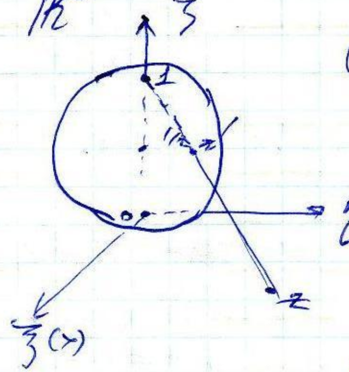
ТФКП

1. Топология комплексной пл-ти. Сф. Римана.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ∞ - бесконечно удал. точка

Построим биекцию между сферой и пл-ю.

$\mathbb{R}^3$



$S(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. $\xi^2+\eta^2=\zeta(1-\zeta)$

Сфера Римана $S \setminus \{N\} \leftrightarrow \mathbb{C}$

Тогда $N \leftrightarrow \{\infty\}$

$S \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Установим соотв. координат.

1) $\overrightarrow{NZ} \parallel \overrightarrow{NZ'} \Rightarrow \frac{\xi-0}{x-0} = \frac{\eta-0}{y-0} = \frac{\zeta-1}{0-1}$

Отсюда $\boxed{x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}}$

2) Обратное: $|z|^2 = x^2+y^2 = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta} =$

$= -1+\frac{1}{1-\zeta}$, то есть $\frac{1}{1-\zeta} = |z|^2+1 \Rightarrow \boxed{1-\zeta = \frac{1}{1+|z|^2}}$

из формул $x = \dots; y = \dots$ получаем $\boxed{\xi = \frac{x}{1+|z|^2} \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}}$

$(\mathbb{C}, \rho)$ метрическое пр-во, $\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

Введем метрику на сфере:

$\tilde{\rho}(z_1, z_2) = \rho(z_1', z_2') = |z_2' - z_1'| = \sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2} =$

$= \sqrt{\zeta_2+\zeta_1-2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)}$ (потому что $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta$)

$= \sqrt{\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}+\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2}-\frac{2(x_1x_2+y_1y_2+|z_1|^2|z_2|^2)}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} = \sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} =$

(*) $= \frac{|z_2-z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$. Тогда $\tilde{\rho}(z, \infty) = \rho(z', \overset{\text{North pole}}{N}) = |z' - N| =$

$= \sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2} = \sqrt{1-\zeta} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$ (**)

$\tilde{\rho}(z_1, z_2) = \begin{cases} (*) & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ (**) & z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty \end{cases}$

Тогда $(\overline{\mathbb{C}}, \tilde{\rho})$ - компл. пр-во.

Пусть $M = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R < +\infty\}$, тогда $\tilde{\rho}(z_1, z_2) \le \rho(z_1, z_2)$

U-окр: $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C};\ \rho(z, z_0) < \varepsilon\}$

$\tilde{U}$-окр: $\tilde{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}},\ \tilde{\rho}(z, z_0) < \varepsilon\}$

$\tilde{U}(\infty, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}},\ \tilde{\rho}(z, \infty) < \varepsilon\} \Rightarrow \tilde{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| > E\}$

Односвязное мн-во - любая замкн. стягивается.

Кривая - непр $[0,1] \to \mathbb{C}$

Простой контур - кривая без пересеч.

2. Последовательности комплексных чисел.

$\{z_n\}: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N$ $|z_n - A| < \varepsilon$

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, тогда

Теор. $\lim z_n = A = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \lim x_n = \alpha \\ \lim y_n = \beta \end{cases}$

Δ

1) $\Rightarrow$ $|z_n - a| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| \le$
$\le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$. Отсюда если $|z_n - a| < \varepsilon$,
то $|x_n - \alpha| < \varepsilon$, $|y_n - \beta| < \varepsilon$;

2) $\Leftarrow$ Аналогично, $|z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

∇

Очевидно, что $\lim z_n = 0 \Leftrightarrow \lim |z_n| = 0$

Критерий Коши: $\{z_n\}$ сх $\Leftrightarrow \{z_n\}$ фундаментальная

Опр. $\{z_n\}$ огр если $\exists M\ \forall n\ |z_n| < M$

Теорема: Принцип Больцано Вейерштрасса

$\forall$ беск. огр. мн-во из $\mathbb{C}$ имеет хотя бы 1 пред. точку

Δ

по Б-В для $\mathbb{R}$

z - огр, беск, $\{z_n\}$ - огр $\Rightarrow \{\operatorname{Re} z_n\}\ \{\operatorname{Im} z_n\}$ огр

$\to \exists \{x_{n_k}\}$ подпосл. и $\{y_{n_k}\}$ - сходятся, тогда z_n сходится и $\lim x_{n_k} + i \lim y_{n_k}$.

∇

Δ Необходимость: $\lim z_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |z_n - A| < \varepsilon$

$\forall n > N \quad |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow (|z_n - a| - |z_m - a|) < \varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Достаточность:

z_n фунд. $|z_n - z_m| < \varepsilon$ тогда $\{z_n\}$ ограничена и по Б-В фунд. точка $y \in \mathbb{C}$ значит $\{z_n\} \to y$

∇

3. Ф-ии комплексного переменного. Предел и непрерывность.

Будем называть $f: D \to G$ однолистной / однолистной если $\forall z \in D \ \exists! f(z) \in G$ и не совпад. точки.

$w = f(z)$, тогда $z = f^{-1}(w)$

$w = f(z)$ однолистное $\Rightarrow f^{-1}$ однозначное, обратное наверно

О. $\lim f(z) = A \Leftrightarrow \forall U(A) \ \exists \overset{\circ}{V}(z_0) \ \forall z \in \overset{\circ}{V}(z_0) \ f(z) \in U(A)$

О. $\exists z_0 \in \mathbb{C} \ A \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim f(z) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \delta(\varepsilon) > 0$

$\forall z \ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$

Определения пределов в ∞:

О. $\exists z_0 \neq \infty \ A \neq \infty$; $\lim f(z) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ |f(a)| > 0 \ \forall z \ |z - z_0| < \delta$?

О. $\exists z_0 = \infty \ A \neq \infty$; $\lim f(z) = A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{D}_{(\varepsilon)} > 0 \ \forall z \ |z| > \mathcal{D} \ \ |f(z) - A| < \varepsilon$

$|f(z) - A| < \varepsilon$

О. $\exists z_0 \neq \infty \ A = \infty$; $\lim f(z) = A = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0 \ \exists \delta_{f(E)} > 0 \ \forall z \ |z - z_0| < \delta \ \ |f(z)| > E$

О. По Гейне

$\lim\limits_{z_0} f(z) = A \Leftrightarrow \forall \{z_n\} \to z_0 \Rightarrow \{f(z_n)\} \to A$

(Т) Пусть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A_1 + iA_2 = A$, тогда

$\exists \lim \mathrm{Re} f(z) = \lim u(x,y) = A_1$

$\exists \lim \mathrm{Im} f(z) = \lim v(x,y) = A_2$

Δ

$\Rightarrow \ z_0 \neq \infty \ A \neq 0$ Имеем $|z - z_0| < \delta \ \ |f(z) - A| < \varepsilon$

$|f(z) - A| = \sqrt{(u(x,y) - A_1)^2 + (v(x,y) - A_2)^2}$, тогда

$|u(x,y) - A_1| \leq |f(z) - A| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim u(x,y) = A_1$

Аналогично с A_2

$\Leftarrow \lim u = A_1$; $\lim v = A_2$; $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 \delta_2 \ \forall M \in B(M_0, \delta_1) \ u(x,y) \in B(A_1, \varepsilon)$

$\in B(M_0, \delta_2) \ u(x,y) \in B(A_2, \varepsilon)$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow$

$|f(z) - A| = |u(x,y) - A_1 + i(v(x,y) - A_2)| \leq |u - A_1| + |v - A_2| < 2\varepsilon$.

∇

Утв. $\lim f(z) = A \Rightarrow \lim |f(z)| = \lim \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = |A|$

Утв. $\exists A \neq 0 \ \arg A \neq \pi \Rightarrow \lim \arg f(z) = \arg A$ $\qquad$ О. $f \in C_0(z_0) \overset{def}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{z_0} f$

Утв. $\exists \lim |f(z)|, \lim \arg f(z) \Rightarrow \exists \lim f(z)$. $\qquad$ непр. $\nearrow$

4. Производная и дифференциал ФКП. Необх. и дост. условие.

О. $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$, тогда в понятиях

О. $f(z)$ дифф. в z_0, если $\Delta f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z)$

О дифференциал $\underset{=f(z)}{w}$ в z_0 – это линейная часть

$df(z_0) = \underset{=A}{f'(z_0)}\Delta z$ $\quad (dz = \Delta z \Rightarrow df(z_0) = f'(z_0)dz)$

Теорема.

$f(z)$ – дифф. в z_0, $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифф в (x_0, y_0) и выполняется условие Коши-Римана:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Δ

$\Rightarrow$ $f(z)$ дифф в z_0, $\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z)$

- $\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(\dots) -$
  $- u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) = \Delta u(x_0, y_0) + i\Delta v(x_0, y_0)$
- $o(\Delta z) = o_1(\Delta z) + io_2(\Delta z)$; $\Delta z \to 0 \Rightarrow |\Delta z| \to 0 \Rightarrow$
  $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow$
  $\Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + o_1(\rho) + io_2(\rho)$ $\quad // f' = A + iB$

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + o_1(\rho) \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + o_2(\rho) \end{aligned}\right\} u - v \text{ дифф и } \frac{\partial u}{\partial x} = A \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B$$

Коши-Риман

где $A = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad B = \frac{\partial v}{\partial x}$

$\Leftarrow$

u, v дифф в (x_0, y_0)

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\rho)$ $\quad$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A$

$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\rho)$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = B$

Тогда

$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = (A + iB)\Delta z + \alpha(\rho) + \beta(\rho)$

$\exists \lim \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \lim \frac{\alpha(\rho) + \beta(\rho)}{\Delta z} = f'(z_0)$

∇

5. Аналитические ф-ции. Их св-ва.

Теорема единственности. Принцип аналит продолжения

Связь аналитических и гармонических ф-й.

О. $w = f(z)$ аналит. в $z_0 \in \mathbb{C}$ если она дифф. в U_{z_0}

О. $w = f(z)$ аналит. в D, если она ан. в $\forall z \in D$

О. $w = f(z)$ аналит в $\mathbb{C} \Rightarrow w$ целая

О. $w = f(z)$ аналит. в ∞, если $f(\frac{1}{z})$ аналит в 0.

Теорема о нулях. $f(z) \in An(a)$, $f(a)=0$, то
$\exists U_a \; \forall z \in U_a \; f(z)=0$ или
$\exists \mathring{U}_a \; \forall z \in \mathring{U}_a \; f(z) \neq 0$

Теорема единственности анал. ф-ии
$f_1, f_2 \in An(D)$ $f_1(z)=f_2(z)$ на $E \subset D$.
и $\exists$ пред. точка a мн-ва E в D
Тогда $f_1(z)=f_2(z)$ на D
Δ
$\nexists$ $f(z)=f_1(z)-f_2(z) \in An(D)$
$f(z)=0$ на $E \overset{?}{\Rightarrow} f(z)=0$ на D, переформулируем:
$M=\{z\in D : f(z)=0\} \overset{?}{=} \emptyset$
$f(z)\in An(D) \Rightarrow f(z)\in C(D) \Rightarrow \lim f(z) = f(a)=0$
Тогда по теореме о нулях
$\exists U_a : \forall z \in U_a \Rightarrow f(z)=0$ (второй вариант невозможен ввиду того, что $C\cap \mathring{U} \neq 0$)

$\nexists$ $\mathring{M}$ - мн-во внутр. точек M. а) $\mathring{M}\neq\emptyset$ ($z=a\in\mathring{M}$)
б) $\mathring{M}$ - откр (по опр.) в) $\mathring{M}$ - замкнуто в D (содержит все пред. точ)
$\exists z=b$ - пред. точка $\mathring{M}$, $b\in D \Rightarrow \forall \mathring{U}_b, \exists z \in \mathring{U}_b$:
$f(z)=0 \Rightarrow \exists \tilde{U}(b): \forall z \in \tilde{U}(b) \Rightarrow f(z)=0$
$\Rightarrow b\in \mathring{M}$ (внутр. точка)
D - линейно связно
тогда $\mathring{M}=D$, $f(z)\equiv 0$ в D
∇

Следствие: $f\in An(D)$ и $f(z)=const$ на кривой γ, тогда
$f(z)=const$ на D

$$\Delta \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

О. $u(x,y)\in C$, $\Delta u = 0 \Rightarrow u$ - гармоническая
Теорема. $f(z)=u+iv \in An(D)$, тогда u, v гармонические
Утв. всегда можно восст. An ф-ю по известной гармон. вещ/мнимой части.

О. $\left.\begin{array}{l} f(z) \text{ опр. на } E\subset \mathbb{C} \\ \varphi(z)\in An(D),\ E\subset D \\ \varphi(z)\equiv f(z) \text{ на } E\end{array}\right| \Rightarrow \varphi(z)$ - ан. продолж. $f(z)$ на D

Т. E имеет пред. точку в $D \Rightarrow \varphi(z)\,!$
Δ $\varphi_1=\varphi_2$ на E, по т. ед-ти анал ф-ий $\varphi_1=\varphi_2$ на D ∇

6. Элементарные ФКП и их св-ва

→ 1. $w = e^z$ $\quad z = x + iy$; $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

$w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\quad |e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} z = y + 2\pi k$

• $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

Δ $z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ верно

$z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{R}$ - фикс,

∇

• $e^z \in An(\mathbb{C})$ Δ $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ ∇

• $e^z \in C(\mathbb{C})$ Δ $e^z \in An(\mathbb{C}) \Rightarrow e^z \in C_1^2(\mathbb{C}) \Rightarrow e^z \in C(\mathbb{C})$

• период $2\pi i k$

$e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

• $(e^z)^m = e^{mx}(\cos^m y + i\sin^m y) = e^{mz}$

→ 2. $w = \sin z$; $w = \cos z$ $\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

• $w: D = \mathbb{C}$, все тождества работают, период $2\pi k$

$\Delta \sin(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$ ∇

• Аналит, непрер.

• $|\sin z| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} \infty$

• $\operatorname{sh} z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

• $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ $\quad \operatorname{sh} iz = i\sin z$ $\quad \Delta \sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} =$

$\cos iz = \operatorname{ch} z$ $\quad \operatorname{ch} iz = \cos z$ $\quad = i \operatorname{sh} z$ ∇

$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$ $\quad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$

$\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z$ $\quad \operatorname{cth} iz = -i \operatorname{ctg} z$

• $\sin(x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y$

$\cos(x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y$

• $\cos z = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \cos x \operatorname{ch} y = 0 \\ \sin x \operatorname{sh} y = 0 \end{array} \Big| \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

• $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) =$ * расписать в tg суммы *

→ 3. $w = \operatorname{Ln} z$. $(e^w = z, \quad z \neq 0)$

$w = u + iv \Rightarrow e^{u + iv} = e^u(\cos v + i\sin v) = z$

• $e^u = |z|$, $u = \ln|z|$, $v = \operatorname{Arg} z$

• $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$k=0 \Rightarrow \ln|z| + i\arg z$

- $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$ $\quad \mathrm{Ln}\, z^n = n\,\mathrm{Ln}\, z$
- $\mathrm{Ln}(z_1/z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$

Поскольку ф-я многозначная, надо '$=$' р-во мн-в.

4. $w = a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}$ $\quad a \neq 0$ Общая показательная
5. $w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$ опр. в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ Общ. степенная
6. $w = \mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$

$\exists\, z = \sin w \Rightarrow w = \mathrm{Arcsin}\, z$

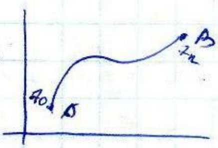
$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$

7. Интеграл, свойства.

AB - кус. гладкая кривая, $w = f(z) \in C(AB)$

$\xi_k = \xi_k + i\eta_k$ $\quad \forall\ \sum f(\xi_k)\Delta z_k$

$\in [z_k, z_{k+1}]$ $\quad \delta = \max\{l_k \mid l_k$ - длина дуги$\}$



$$\int f\,dz = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to+\infty}} \sum f(\xi_k)\Delta z_k$$

интеграл сущ. = предел сущ.; $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$

Если $\delta \to 0$, то $|\Delta z_k| \to 0$

$$\sum f(\xi_k)\Delta z_k = \sum\big(u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\big) + i\sum v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int(u\,dx - v\,dy) + i\int(v\,dx + u\,dy)$$

Зам. Пусть есть параметризация $z(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, тогда $\int_{AB} f\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$

Св-ва: 1. Линейность $\int(\alpha f + \beta g)\,dz = \alpha\int f + \beta\int g$

2. Непрерывность ($\forall f(z)$ непр. на ABC $\int_{AC} = \int_{AB} + \int_{BC}$)
3. Ориентированность $\int_{AB} = -\int_{BA}$
4. Оценка $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma \underbrace{|f(z)|}_{\le M}\,dl \le M L_\gamma$

8 Интегральные теоремы Коши

1. Для односвязной области!

$f(z) \in An(D)$, $D \in \mathbb{C}$, D - 1св. $\Rightarrow$

$\forall$ жорданового контура (замкнутого) $\gamma \subset D$

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Δ

$$\oint f(z)dz = \oint u\,dx - v\,dy + i\oint v\,dx + u\,dy \;\;(=)$$

Подинтегральные ф-ии - полные дифф. по Коши-Риману. Значит интеграл не зав. от пути инт.

Ф-ла Остроград.-Грина:

$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$ - для односвязных

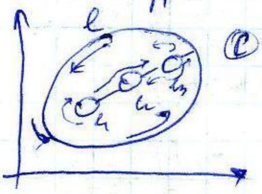
$$(=) \iint_G \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy + i\iint_G \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy = 0$$

∇

2. Для многосвязной:

$\exists f(z) \in An(D)$ $D \in \mathbb{C}$, D - многосв.

$\rightarrow \oint_\Gamma f(z)dz = 0$, где $\Gamma = l \cup \{l_k\}$



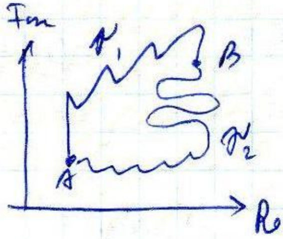
Δ Проведем разрезы между всеми областями, где D теряет связность.

Тогда область с разрезами односвязна и ввиду того, что по всем разрезам $\int_\gamma + \int_{l_k} = 0$, $\sum \int_{l_k} = \int_l \Rightarrow \int_\Gamma = 0$.

∇

9 Независимость интеграла от пути интегрирования

f - аналит. в D, D - 1св, тогда $\int f dz$ не зав. от γ, а только от z_{st}, z_{end}

Δ 

$\int\limits_{\gamma_1} f dz + \int\limits_{\bar{\gamma}_2} f dz = 0$ по $\quad$ ($\bar{\gamma}_2$ ← обр. напр.)

теореме Коши для 1св. обл.

отсюда $\int\limits_{\gamma_1} = \int\limits_{\gamma_2}$

▽

10 Первообразная фкц, неопредел. интеграл фкц, ф-ла Ньют.-Лейбница.

О. $F(z)$ – первообразная ф-я для $f(z)$, если $F' = f$.

Т. $f(z) \in C^0(\mathcal{D})$, $\int\limits_{\gamma} f dz$ не зав. от γ тогда

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi \quad \forall z_0 \in \mathcal{D} \text{ аналитична в } \mathcal{D} \text{ и } F'(z) = f(z)$$

Δ Проверим: $\left|\frac{\Delta F(z_0+\Delta z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{F(z_0+\Delta z)-F(z_0)}{\Delta z} - f(z)\right| =$

$= \left|\frac{1}{\Delta z}\left[\int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z}(f(\xi)-f(z))\,d\xi\right]\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int\limits_{z}|f(\xi)-f(z)|\,d\xi \le$

По непрерывности f $\forall \varepsilon$ $|\xi - z| < \delta$ $|f(\xi)-f(z)| < \varepsilon$

$\le \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon \int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z} d\xi = \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon \Delta z \le \varepsilon \Rightarrow \lim \frac{\Delta F}{\Delta z} = F' = f$

$= \lim \sum \Delta z_k = z_n - z_0$

▽

Т. $f, g \in An(\mathcal{D})$ $f' = g'$, то $f(z) = g(z) + C$

Δ

$\exists$ $h(z) = g(z) - f(z)$

$h'(z) = 0 \Rightarrow$ $\exists h(z) = u + iv$, $h'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

Тогда u, v – const $\Rightarrow h(z) = \text{const}$.

▽

Т. $\exists f(z) \in An(\mathcal{D})$ $\mathcal{D}$-1св. $\Phi(z): \Phi'(z) = f(z)$

Тогда $\int\limits_A^B f(z)dz = \Phi(B) - \Phi(A)$ $\qquad$ Н-Л

Δ

$\exists f(z) \in An \Rightarrow f(z) \in C(\mathcal{D}) \xRightarrow{\text{по теор.}} F(z) = \int\limits_A^z f(\xi)d\xi \in An(\mathcal{D})$

$F'(z) = f(z)$

Тогда $F = \Phi + C$

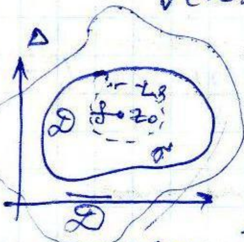
$\int_A^z f(\xi)d\xi = \Phi(z) + C$, $\exists\, z = B = 0$, тогда $\Phi(z) = C$, $C = \Phi(A)$

$\int_A^B f(z) = \Phi(B) - \Phi(A)$ к нахожд. C

11 Интегральная формула Коши

Т. $f(z) \in A_n(\overline{D})$, D - 1св, тогда $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$, где $\gamma = \partial D$



Окружим z_0 окр-ю L_ρ, тогда $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z - z_0}dz \approx \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$, точнее:

По теореме Коши о многосв. области $f \in A_n$ между γ и L_ρ, отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz \underset{\{\pm z_0\}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{1}{z - z_0}dz$$

Второй интеграл: $\frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{1}{z - z_0}dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i}2\pi i = f(z_0)$

Первый интеграл

а) Не зависит от ρ, интеграл по любой малой окружности равен, в силу Коши для многосвяз. и еще $\underbrace{\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0}_{\leftarrow \text{ докажем}}$, тогда первый интеграл $= 0$.

$M_\rho = \max|f(z) - f(z_0)|$ при $z \in D$, тогда $M_\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$ в силу непрер.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{L_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}|dz| \le \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M_\rho \cdot \rho}{\rho}d\varphi}_{= M_\rho \to 0}$$

12

Замечание: $\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$

Т. Если $f(z) \in A_n(U_{z_0}) \Rightarrow f(z) \in C^\infty(z_0)$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$ где $\gamma \in U_{z_0}$

Δ Пусть $n=1$: $f'(z_0)=\lim\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$, тогда

по пред. теореме $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{f(z)dz}{z-z_0-h}-\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{f(z)dz}{z-z_0}\right)=$

$=\lim\dfrac{1}{2\pi h i}\oint\dfrac{f(z)(z-z_0)-f(z)(z-z_0-h)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz=$

$=\lim\dfrac{1}{2\pi h i}\oint\dfrac{f(z)h}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz=\lim\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{f(z)\,dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)}\overset{?}{=}$

$\overset{?}{=}\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$

Докажем предел: $\left|\oint-\oint\dfrac{}{(\ )^2}\right|=\left|\oint\dfrac{f(z)h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}dz\right|\le$

$\le\oint\dfrac{|f(z)h|dl}{|z-z_0|^2|z-z_0-h|}\le\oint\dfrac{|h|\,\Delta}{\delta^2(\delta-|h|)}dz=\dfrac{h\Delta}{\delta^2(\delta+|h|)}L_\gamma\to 0$

$\left[\begin{array}{l}|z-z_0|-\text{компакт},\ \exists\min\\ |f(z)|-\text{компакт},\ \exists\max=\Delta\\ |z-z_0-h|\ge\delta-h\end{array}\right]$ тогда $f'=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

13 Теорема Морера

Т. Пусть $f(z)\in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}$ - односв. и $\oint f(z)=0$
$\gamma\subset\mathcal{D}\Rightarrow f(z)\in An(\mathcal{D})$ для $\forall\gamma$

Δ $f(z)\in C(\mathcal{D})$ и $\oint\limits_\gamma f(z)=0\Rightarrow$ по теореме о не зав. от пути $\int\limits_\gamma f(z)$ не зав. от пути

Тогда по теореме о первообр.

$F(z)=\int\limits_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi\in An(\mathcal{D})$, и тогда по пред. теореме $f=F'$ тоже An.

14 Принцип максимума модуля аналит. ф-ии. Н-во Коши, теорема Лиувилля.

Т. Если $f(z)\in An$ - не const, тогда $|f(z)|$ достигает максимума на границе

Δ чушится ∇

Т. Неравенство Коши

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\,dz$$

$$\le \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}}\,2\pi R = \frac{n!M}{R^n} \quad \{\exists f(z)\in An(\bar{K}(z_0,R)),\ K\subset D\}$$

то есть:

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!M}{R^n}$$

Т. Теорема Лиувилля

Если $f(z)\in An(\mathbb{C})$ и $f(z)$ огр в $\mathbb{C}$, то $f(z)=const$

Δ

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \Rightarrow f'(z)=0 \Rightarrow f\equiv const$$

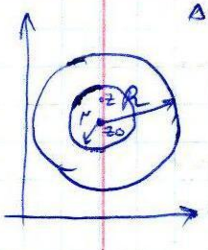
15 Разложение аналитической ф-ии в степенной ряд. Теорема Тейлора.

$\sum C_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. Обл. сх. $|z-z_0|<R$, где $R=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{C_n}}$ или $R=\lim\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$

Т. Тейлора

$f(z)\in An(|z-z_0|<R) \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

Δ



$\exists f(z)\in An(|z-z_0|<R)$

∡ $|z-z_0|=r$, $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\ell \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}$ (инт. ф-ла Коши)

$\exists z\in(|z-z_0|<R)$, тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)}{\xi-z}dz$

∡ $\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum\underbrace{\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n}_{1}$

Вейерштр.

∡ $\frac{1}{r}\sum\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^n=\sum^{\infty}\frac{1}{r}q^n$ — сх $\Rightarrow$ исх. ряд сх. равн. на ℓ

Таким образом почленно интегр. сумма — равн. сх. ряд.

Тогда $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}f(\xi)\,d\xi=\sum(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$

$=\sum C_n(z-z_0)^n$, где $C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

∇

16 Ряды Лорана, кольцо сходимости ряда Лорана, теорема Лорана.

О. Ряд Лорана – содержит отр. степени: $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

Область сходимости: кольца:

$R_1 < |z_0 - z| < R_2$

$0 < \dots < R_2$

$R_1 < \dots < +\infty$

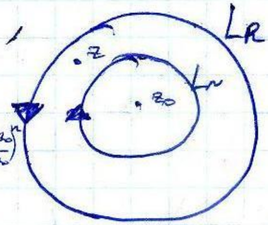
$0 < \dots < +\infty$

Т. Лорана.

Любую аналит. ф-ю в кольце $r < |z-z_0| < R$ можно представить в виде $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$

где $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

Δ Для любой точки кольца верно:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R} \frac{f(t)}{t-z}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

Внеш. по L_R: $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} = \frac{1}{t-z_0}\sum\limits_0^\infty \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$

и ряд сходится абсолютно потому можно интегрировать

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{t-z_0}\sum\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt = \sum_0^\infty A_n (z-z_0)^n, \text{ где } A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

По внутр. окр-ти: $\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\sum\limits_{n=0}^\infty\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_r}\frac{f(t)}{z-t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} f(t)\cdot(t-z_0)^n dt =$$

$$= \sum_{-1}^{-\infty} A_n (z-z_0)^n, \text{ где } A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt$$

Отсюда $f(z_0) = \sum\limits_{-1}^{-\infty} + \sum\limits_0^{\infty} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-z_0)^n$

∇

Полож. часть ряда – "правильная", отрицательная – "главная"

17 Изол. особые точки, классификация Лораном, УОТ и характеризация

О. ОТ – точка, в которой ф-я не аналитична,
↳ особая точка

Особая точка изолирована, если $f(z) \in An$ в некот. окрестности точки, то есть в малой U_{z_0} нет других особых точек.

тип о.т.	вид Л.Р.	$\lim f(z)$
уот	$0 \dots \infty$	$C_0 \neq +\infty$
полюс m	$-m \dots \infty$	$+\infty$
сот	$-\infty \dots \infty$	$\nexists$

Т. Устранимое особая точка $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C \neq +\infty$
о.т. устранима $\Leftrightarrow$ главная часть Лорана $= 0$

Δ

$\Rightarrow$ z_0 — уот, $\lim f = A$, тогда $f(z)$ огр в $0<|z-z_0|<R$, тогда $|f(z)| \le M$ и по н-ву Коши
$|C_n| \le \frac{M}{\rho^n}$ ρ выберем малым и при $n<0$ $|C_n| = 0 \Rightarrow C_n = 0$

$\Leftarrow$ $f(z) = \sum C_n (z-z_0)^n$ $0<|z-z_0|<R$ тогда ряд равномерно сх-ся в круге и $\lim f(z) = C_0 \neq +\infty$
С по изв. теореме матанализа $\quad$ L огр уот.

∇

18 Полюс и его характеризация

О. Полюс: $\lim f(z) = \infty$

Т. z_0 — полюс $\Leftrightarrow$ гл. часть Лорана содержит конеч. число слагаемых

$$f(z) = \sum_{-M}^{-1} \frac{C_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad M \neq 0$$

Δ

$\Rightarrow$ z_0 — полюс, $\lim = \infty$ $|f(z)| > 1$ в $\overset{\circ}{U}(z_0)$, тогда
$\frac{1}{f(z)} \in An(\overset{\circ}{U}(z_0))$; $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, z_0 — уот для $\frac{1}{f(z)}$

по теореме о уот $\frac{1}{f(z)} = b_m (z-z_0)^m + b_{m+1}(z-z_0)^{m+1} \dots$
тогда $\quad$ L может $b_0 \dots b_m = 0$

$$f(z) = \frac{1}{\sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-z_0)^n} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \underbrace{(C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \dots)}_{= \checkmark}$$

$\Leftarrow$ $f(z) = \sum_{-m}^{-1} + \sum_{0}^{+\infty}$; $f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) \dots$

$$\lim \underbrace{f(z)(z-z_0)^m}_{\varphi} = C_{-m} \neq 0 \Rightarrow \varphi \text{ огр.} \Rightarrow \lim f(z) = \lim \frac{\varphi}{(z-z_0)^m} = +\infty$$

∇

О. Если $m>0$, $C_m \neq 0$, m - порядок полюса z_0
$m=1 \Rightarrow$ полюс простой.

Т. z_0 - полюс f порядка $m \Leftrightarrow z_0$ - нуль $\frac{1}{f}$ кратности m

Δ

$\Rightarrow f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots$; $\exists \lim f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} \neq 0$

$\exists \psi(z) = \begin{cases} f(z)(z-z_0)^m & z \neq z_0 \\ C_{-m} & z = z_0 \end{cases}$

$\psi(z) \in An(U(z_0)) \Rightarrow \psi(z_0) \neq 0 \Rightarrow \exists V(z_0)$
$\forall z \in V(z_0)$ $\psi(z) \neq 0 \Rightarrow \varphi(z) = \frac{1}{\psi(z)} \in An(V(z_0))$

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{\psi(z)} = (z-z_0)^m \underset{\neq 0}{\varphi(z)} \Rightarrow z_0$ - нуль кратности m

$\Leftarrow$

$\exists z_0$ - нуль пор. m для $\frac{1}{f(z)} \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$
$\exists \lim f(z)(z-z_0)^m = \lim \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi(z_0)} \Rightarrow z_0$ - полюс пор. m.

∇

19 СОТ и характеризация. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.

О. z_0 - СОТ если $\nexists \lim f(z)$

Т. z_0 - СОТ $\Leftrightarrow f(z) = \sum_{-\infty} + \sum_{0}^{+\infty}$

Δ $\Rightarrow$ СОТ - не УОТ и не полюс, значит в гл. части Лорана не 0 и не m слагаемых. Значит ∞.

$\Leftarrow$ Аналогично по 1/2 теореме.

∇

Т. Сохоцкого

Если z - СОТ, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists \{z_n\} \to z_0 \mid \{f(z_n)\} \to A$

Δ

$\exists A = +\infty$, тогда $\exists \{z_n\} \to z_0$, $\{f(z_n)\} \to +\infty$
иначе $f(z)$ огр. в $U(z_0)$, что невозм.

$\exists A \neq 0$, тогда а) в $\forall \overset{o}{U}(z_0)$ $\exists z_1^*$: $f(z_1^*) = A$
$\Rightarrow \exists \{z_1^{(n)*}\} \to z_0 \Rightarrow \{f(z_1^{(n)*})\} \to A$

б) $\nexists z_1^*$, тогда $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$, z_0 - не УОТ и не полюс $\Rightarrow$
z_0 - СОТ g

$\Rightarrow$ по п. 1 $\exists \{z_n\} \to z_0$ $\{g(z_n)\} \to \infty$

$\Rightarrow \{f(z_n) - A\} \to 0 \Rightarrow \{f(z_n)\} \to A$

∇

20 Разложение ф-ии в ряд Лорана в окрестности ∞ бесс. особ. точки

О. $z_0=\infty$ $\exists$ бесс. особ. точка $f(z)$ если $f(z)$ аналитична в z_0.

Аналогично

О. $z_0=\infty$ УОТ если ее лоран. ряд имеет вид
$$f(z)=\sum_0^{+\infty}\frac{C_n}{z^n},\ |z|>R$$

О $z_0=\infty$ полюс m-порядка если
$$f(z)=\sum_{-m}^{+\infty}\frac{C_n}{z^n}\quad \text{или } \lim=\infty$$

О $z_0=\infty$ СОТ если
$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{C_n}{z^n}$$

21 Вычеты в изолированных ОТ
Основная теорема теории вычетов.
Вычисление вычетов в полюсах ОТ.

О. Вычет в (.)a : $\operatorname{Res}_a f=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f\,dz$, где $\{|z-a|<r\}$ γ_r

Т. Коши о вычетах
$f\in An(D\setminus\{\bigcup_N a_i\})$, $G\subset D$, ∂G не содержит a_i
тогда
$$\int_{\partial G} f\,dz=2\pi i\sum_G \operatorname{res}_{a_i} f\quad a_i\in G$$

Δ д-во - следствие из теоремы Коши для многосв. областей
∇

Т. $\operatorname{Res} f(z)=C_{-1}$

Δ
$$\exists\ f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^k\quad 0<|z-z_0|<R$$
где
$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\qquad L: |z-z_0|<\rho<R$$
$$\Rightarrow C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\,dz=\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$$
∇

Т. Если z_0 = УОТ, то $\operatorname{Res} f(z) = 0$

Δ $\exists z_0$ = УОТ, тогда $C_{-1} = 0$ по теореме о хар. УОТ

∇

Т. Если z_0 - полюс порядка $m \geq 1$, то

$$\operatorname{Res} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z-z_0)^m \right)$$

Δ

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots, \quad \text{в } K(z_0, R)$$

$$f(z)(z-z_0)^m = C_{-m} + \dots \Rightarrow z_0 - \text{УОТ} \Rightarrow \varphi(z) = \begin{cases} f(z)(z-z_0) & z \neq z_0 \\ C_{-m} & z = z_0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Res} f(z) = C_{-1} = \frac{\varphi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \dots = \text{ то что надо}$$

∇

Следствие. $m = 1 \Rightarrow \operatorname{Res} f = \lim \left(f(z)(z-z_0) \right)$

Следствие $f(z) = \varphi / \psi$, $\varphi, \psi \in An(U(z_0))$ $\varphi \neq 0$, $\psi = 0$ $\psi' \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z_0} f = \lim \frac{\varphi}{\psi} (z-z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Т. Для вычисл. Res в СОТ необх. разл. в Лорана.

22 Вычет относительно удаленной точки. Теорема о сумме вычетов

О. $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\, dz \quad L$ = окр

Т. $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = C_{-1}$

Δ в $|z| > R \Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n z \Rightarrow C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$ ∇

З Если $z_0 = \infty$ УОТ, то вычет в z_0 не всегда 0

Т. О сумме вычетов.

$f(z) \in An(\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots z_n\})$, тогда $\sum_{\{z_n\}} \operatorname{Res}_{z_i} f + \operatorname{Res}_{\infty} f = 0$

Δ

По теореме Коши о вычетах:

$\oint f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{\{z_i\}} \operatorname{Res} f(z)$, с другой стороны по опр $\operatorname{Res}_{\infty}$:

$$\oint_L f dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

∇

23 Вычисление криволинейных интегралов с пом. вычетов. Приложение теории вычетов к вычислению опр. интегралов от вещ. ф-й

2 2

24 Вычисление несобственных интегралов с использованием теории вычетов. Лемма Жордана.

$\forall \int f(x)dx$, $f(z)$ - аналит. продолжение $f(x)$ в $\mathbb{C}$ ($\mathrm{Im}\, z > 0$)
$\forall$ контур $h = \{[-\rho, \rho] + \gamma_\rho\}$, $\gamma_\rho = \{|z| = \rho, \mathrm{Im}\, z > 0\}$
Тогда
$$\oint f(z)dz = \int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx + \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z)$$
Перейдем к lim:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z_k} \mathrm{Res}\, f(z) - \lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz$$

Л1. Жордана
$f \in An$ в в-ней полуплоскости кроме кон. числа и.о.т. и $\forall z$ $|z| \geq \rho$ $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$ $\underbrace{M > 0\ \delta > 0}_{const}$:
Тогда
$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)dz = 0$$

Δ
$$\left|\int_{\gamma_\rho} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_\rho} |f(z)|dz = [z = \rho e^{i\varphi}] = \int_0^{\pi} |f(\rho e^{i\varphi}) i\rho e^{i\varphi}| d\varphi$$
$$\leq \frac{M}{\rho^{1+\delta}} \rho\pi = \frac{M\pi}{\rho^\delta} \xrightarrow[\rho\to\infty]{} 0$$
∇

T1. Жордана
f может быть аналит. продолжена вверх с сохр. Л1 Жордана, тогда
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\, f(z) \quad \Delta \text{ вверху } \nabla$$

Л2 Жордана
$f(z)$ аналит. в верх. полупл-ти кроме конечного числа из. ос. точек, $M(\rho) = \max_{\gamma_\rho} |f(z)| \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} 0$

Тогда $\lim_{\rho\to\infty} \int_{\gamma_\rho} e^{i\lambda z} f(z)dz = 0$

Δ $$\left|\int e^{i\lambda z} f(z)dz\right| = [z = \rho e^{i\varphi}] = \left|\int e^{i\lambda(\rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi)} f(\rho e^{i\varphi}) i\rho e^{i\varphi} d\varphi\right|$$
$\leq$

$\le M(\rho)\rho \int_0^{\pi} e^{-\lambda\rho\sin\varphi}\, d\varphi = 2M(\rho)\rho\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\rho\sin\varphi}\, d\varphi \le$

[в силу выпуклости $\sin$, $\sin\varphi \ge \frac{2\varphi}{\pi}$ $\varphi \ge 0$ $\varphi \le \frac{\pi}{2}$]

$\le 2M(\rho)\rho\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\rho\frac{2\varphi}{\pi}}\, d\varphi = \frac{2M(\rho)\rho\,\pi}{-\lambda\rho\cdot 2} e^{-\frac{\lambda\rho 2\varphi}{\pi}}\Big|_0^{\pi/2} =$

$= -\frac{\pi M(\rho)}{\lambda}\left(e^{-\lambda\rho}-1\right) \xrightarrow{\rho\to\infty} 0$

∇

T2. Жордана

Усл. аналогичны T1 Жордана, за искл. 1 2 вместо 1)

Тогда
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\{z_k\}} \mathrm{Res}\left(e^{i\lambda z} f(z)\right)$$

Δ

Аналогично T1 ∇.

Зам. Аналогичные рассуждения для:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\, f(x)\,dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i\sum \mathrm{Res}\, e^{i\lambda z} f(z)\right) = -2\pi\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\, f(x)\,dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum \mathrm{Im}\, e^{i\lambda z} f(z)\right)$$

25 Логарифмический вычет, теоремы о нем в нуле и полюсе.

О. Лог. вычетом $f(z)$ в z_0 наз. вычет ее лог. производной в z_0:

$$\mathrm{Res}\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \qquad L\subset \mathring{U}(z_0)$$

T. z_0 — нуль кратности m ф-ии $f(z)$ $\Rightarrow$ z_0 — простой полюс f'/f

$$\mathrm{Res}_{z_0}\frac{f'(z)}{f(z)} = m$$

Δ

z_0 — нуль кратности m, $f(z) = (z-z_0)^m\varphi(z)$

$\varphi(z)\in An(z_0)$, $\varphi(z_0)\ne 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(z)\in An(U(z_0))$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)}{(z-z_0)^m\varphi(z)} = \frac{m}{z-z_0}+\frac{\varphi'}{\varphi} \underset{z\to z_0}{\sim} \frac{m}{z-z_0} \Rightarrow z_0 \text{ полюс}$$

∇

Следствие. z_0 - полюс порядка p $f(z)$ $\Rightarrow$ z_0 - прост. полюс $\frac{f'}{f}$

Δ по пред. теореме + теорема о хар. полюса ∇ и Res $= -p$.

О. $\exists f(z) \in An(\mathcal{L})$, $\mathcal{L}$ - замкнут. Жорданов контур

$\exists f(z) \neq 0$ на $\mathcal{L}$, $\underset{\mathcal{L}}{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ - вычет отн. $\mathcal{L}$

Т. Пусть $f(z) \in An(\overline{\mathcal{D}})$, кроме кон. числа полюсов, $\mathcal{D}$ одноc., $\exists f(z)$ имеет кон. число нулей в $\mathcal{D}$, на границе $\mathcal{D}$ нет ни нулей ни полюсов.

$$\underset{\mathcal{L} = \partial\mathcal{D}}{Res} \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

N - число нулей

P - число полюсов

Δ

$\exists a_1 \dots a_l$ - нули $f(z)$ кратностей $n_1 \dots n_l$

$\exists b_1 \dots b_m$ - полюсы $f(z)$ порядка $p_1 \dots p_m$

$\Rightarrow Res \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum\limits_{k=1}^{l} Res \frac{f'}{f} + \sum\limits^{m} Res \frac{f'}{f} =$

[по пред. теореме] $= N - P$.

∇

26 Принцип аргумента. Теорема Руше.

Принцип аргумента: $Res \frac{f'}{f} = N - P = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{L}} d[Ln f] =$

// $Ln f(z) = \ln|f(z)| + i\, Arg\, f(z)$

$= [\mathcal{L} : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]] = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{L}} d[Ln f(z(t))] =$

$= \frac{1}{2\pi i} \left(Ln f(z(\beta)) - Ln f(z(\alpha)) \right) = \frac{1}{2\pi i} \left| \ln|f(z(\beta))| + i\, Arg f(z(\beta)) - \ln|f(z(\alpha))| - i\, Arg(f(z(\alpha))) \right| = \frac{1}{2\pi} \Delta Arg f(z)$

$(z(\alpha) = z(\beta))$

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta Arg\, f(z)$$

Смысл - количество оборотов вокруг $w = 0$

Т. Руше

$f, \varphi \in An(\overline{\mathcal{D}})$, $|\varphi(z)| > |f(z)|$ на $\partial\mathcal{D}$

Тогда $N_{\varphi(z) + f(z)} = N_{\varphi(z)}$ в $\mathcal{D}$

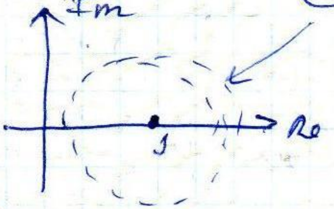
Δ $|f(z)| \geq 0$ в $\overline{\mathcal{D}}$ $\Rightarrow |\varphi(z)| \overset{?}{>} 0$; $|\varphi(z) + f(z)| \geq |\varphi| - |f| > 0$

Отсюда:

$\begin{cases} \varphi(z) \neq 0 \\ \varphi(z) + f(z) \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow N_{\varphi+f} = \frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg} (\varphi(z) + f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg} \left[\varphi(z)\left(1 + \frac{f}{\varphi}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg} \varphi(z) + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{f}{\varphi}\right)} = N_\varphi$

полн. оборотов вокруг нуля



28 Геом. смысл модуля и аргумента производной.

$\gamma: z(t) = x(t) + i y(t) \qquad t \in [\alpha, \beta]$

$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$.

$w = f(z) = f(z(t))$

$w'(t_0) = \underset{\neq 0}{f'(z_0)} \cdot \underset{\neq 0}{z'(t_0)}$

$\operatorname{Arg} w'(t_0) = \underbrace{\arg f'(z_0)}_{\alpha} + \operatorname{Arg} z'(t_0) \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arg} w' - \arg z'$

Тогда $\operatorname{Arg} f'$ – это угол поворота окрестности точки z_0 в получившуюся окрестность точки w.

$|f'(z)| = \left|\lim \frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ ← коэф. растяж. сжатия

$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$

T. $f(z) \in An(z_0) \quad z_0 \neq \infty \Longrightarrow f(z) \in In(z_0) \Leftrightarrow f'(z_0) \neq 0$ ← инъективн.

27 Конформные отображения. Теорема Римана и следствия

О. Взаимнооднозначное соответствие w комплексной плоскости на $G \subset \mathbb{C}$ конформно, если w обладает св-ми сохр. углов и постоянства растяжения.

Т1 Пусть f — однозн., однолистная, аналит, $f' \neq 0$ при $z \in G$. Тогда f производит конформное отображение при $z \in G$.

Т2 Пусть f конформна, тогда $f \in An$; $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$

Тип точки	Тип зн. ф-ии	Критерий	Альтерн. критерий
$\neq \pm\infty$	$w_0 \neq \infty$	$f' \neq 0$	
$= \infty$	$w_0 \neq \infty$	$h' \neq 0$ $h = f(\frac{1}{\xi}) = f(z)$ $\xi = \frac{1}{z}$	$\operatorname{Res} f \neq 0$
$\neq \pm\infty$	$w_0 = \infty$	$g' \neq 0$ $g(z) = 1/f(z)$	z_0 — прост. полюс
$= \infty$	$w_0 = \infty$	$w'(0) \neq 0$ $w(\xi) = \frac{1}{f(\frac{1}{\xi})}$ $\xi = 1/z$	z_0 — прост. полюс

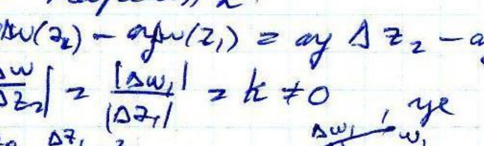
Т. Римана

Всякую G — одност., граница которой состоит более чем из 1 точки, можно конформно отобразить на внутр. ед. круга $|w| < 1$ пл-ти w.

Д-во теоремы 2:

$\forall z_1 z_2$ $\arg \Delta w(z_2) - \arg \Delta w(z_1) = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$ (*)

(**) $\left|\frac{\Delta w}{\Delta z_2}\right| = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = k \neq 0$, где $\Delta z_1 = z_1 - z_0$, $\Delta z_2 = z_2 - z_0$



$\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \alpha$, тогда из (*) $\arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha$

Из (**) и $\alpha = \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \Rightarrow \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = k e^{i\alpha}$

В силу произвольности z_1, z_2 это значит, что сущ. предел $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, тогда

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0 \quad (k \neq 0)$$

29 Принцип соотв. границ / сохр области

Т. Если ф-я f конформна $\bar{G} \to G$, то f непрерывна и осущ. непр и взаимно одназн. соотв. границ Γ и Γ' обл-ей G и G'