СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

1 Приближающие свойства резольвенты оператора $L_1 : y^{'}, y(0) = 0$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Рассмотрим простейший дифференциальный оператор первого порядка $L_1 : y^{'}, y(0) = 0$. Обозначим через $R_\lambda(L_1)$ его резольвенту, т.е. оператор $R_\lambda(L_1) = (L_1 - \lambda E)^{-1}$, где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр (числовой параметр, вообще говоря, комплексный). Найдем формулу для резольвенты.

1.1 Лемма 1.1

Для $y(x) = R_\lambda(L_1)u$ имеет место формула:

$$y(x) \equiv R_\lambda(L_1)u = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}u(t)dt. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda(L_1)u$. Тогда

$$y' - \lambda y = u, \tag{1.2}$$

$$y(0) = 0. \tag{1.3}$$

По методу вариации произвольной постоянной общее решение уравнения (1.2) есть

$$y(x) = Ce^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}u(t)dt, \tag{1.4}$$

Где C - произвольная постоянная. Находим эту постоянную из условия (1.3). Получаем $C = 0$. Отсюда приходим к формуле (1.1).

Положим в (1.1) $\lambda \ \ -r$, где $r > 0$, и рассмотрим операторы $rR_{-r}(L_1)$. Очевидно, эти операторы имеют вид:

$$rR_{-r}(L_1)u = r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt \tag{1.5}$$

Выясним приближающие свойства операторов (1.5) при $r \to \infty$.

1.2 Лемма 1.2

Для любой функции $u(x) \in C[0,1]$ имеет место сходимость:

$$\|rR_{-r}(L_1)u - u\|_{C[\varepsilon,1]} \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{1.6}$$

ε - произвольное малое положительное число.

Доказательство. Пусть сначала $u(x) \in C^1[0,1]$. Тогда

$$\int_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt = \tfrac{1}{r}\Big|_0^x e^{-r(x-t)}u(t) - \tfrac{1}{r}\int_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt =$$
$$= \tfrac{1}{r}\Big[u(x) - e^{-rx}u(0) - \int_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt\Big].$$

Отсюда получаем

$$rR_{-r}(L_1)u = u(x) - e^{-rx}u(0) - \tfrac{1}{r}(rR_{-r}(L_1)u').$$

Тогда

$$rR_{-r}(L_1)u - u = u(x) - e^{-rx}u(0) - \int_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt.$$

Далее,

$$\Big|\int_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt\Big| \le \|u'\|_{C[0,1]}\int_0^x e^{-r(x-t)}dt =$$
$$= \tfrac{1}{r}\|u'\|_{C[0,1]}.(1 - e^{-rx})$$

Тогда

$$\Big|rR_{-r}(L_1)u - u\Big| \le e^{-rx}\Big|u(0)\Big| + \frac{1}{r}(1 - e^{-rx})\|u'\|_{C[0,1]}. \tag{1.7}$$

В силу того, что первое слагаемое в правой части последней оценки при $x = 0$ является константой, не зависящей от r, то на всем отрезке $[0,1]$ сходимости функций $rR_{-r}(L_1)u$ к $u(x)$ при $r \to \infty$ мы отсюда не получим. Но если мы рассмотрим отрезок $[\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon > 0$ - любое фиксированное как угодно малое число, то тогда $\|e^{-rx}_{C[\varepsilon,1]} = e^{-r\varepsilon} \to 0\|$ при $r \to \infty$. Отсюда следует утверждение леммы для $u \in C^1[0,1]$.

Пусть теперь $u(x) \in C[0,1]$. Покажем, что нормы операторов $eR_{-r}(L_1)$, рассматриваемых как операторы из $C[0,1]$ в $C[\varepsilon,1]$, ограничены константой, не зависящей от r.

Действительно, имеем:

$$\begin{gathered}\|rR_{-r}(L_1)u\|_{C[\varepsilon,1]} \le \|rR_{-r}(L_1)u\|_{C[0,1]} = \\ = \Big\|r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt\Big\|_{C[0,1]} \le \|u\|_{C[0,1]}\|1-e^{-rx}\|_{C[0,1]} \le \|u\|_{C[0,1]}.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Далее, множество функций $u \in C^1[0,1]$ является всюду плотным в пространстве $C[0,1]$. (Это следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции полиномами). Поэтому по теореме Банаха- Штейнгауза из ограниченности норм операторов $rR_{-r}(L_1)$ отсюда следует сходимость (1.6) для любой $u \in C[0,1]$.

Лемма доказана.

Покажем теперь, что приближающие свойства операторов $rR_{-r}(L_1)$ сохраняются и в пространствах гладких функций, т.е. в пространствах $C^l[0,1]$.

Пусть сначала $u \in C^{l-1}[0,1]$. Рассмотрим операторы $D^kR_{-r}(L_1) \equiv (R_{-r}(L_1)u)_x^{(k)} k = 1,...,l, D^1 \equiv D(Du = u')$.

1.3 Лемма 1.3

Операторы $D^kR_{-r}(L_1)$ имеют вид:

$$\begin{gathered}D^kR_{-r}(L_1)u = u^{(k-1)}(x) - ru^{(k-2)}(x) + r^2u^{(k-3)}(x) - ...+ \\ +(-1)^{k-1}r^{k-1}u(x) + (-1)^kr^k\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt, k = 1,...,l.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Доказательство. Для $k = 1$ имеем:

$$\begin{gathered}DR_{-r}(L_1)u = (DR_{-r}(L_1)u)'_x = \Big(\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt\Big)'_x = \\ = u(x) - r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt.\end{gathered}$$

Применяем метод математической индукции. Пусть (1.9) выполняется для $k = m - 1$, т.е.

$$D^{m-1}R_{-r}(L_1)u = u^{(m-2)}(x) - ru^{(m-3)}(x) + ... +$$
$$+(-1)^{m-2}r^{m-2}u(x) + (-1)^{m-1}r^{m-1}\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt.$$

Тогда для $k = m$ получим:

$$D^m R_{-r}(L_1)u = D(D^{m-1}R_{-r}(L_1)u) = u^{(m-1)}(x) - ru^{(m-2)}(x) + ... +$$
$$+(-1)^{m-2}r^{m-2}u'(x) + (-1)^{m-1}r^{m-1}u(x) + (-1)^m r^m \int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt.$$

Лемма доказана.

1.4 Лемма 1.4

Если $u(x) \in C^l[0,1]$, то имеет место сходимость:

$$\|rD^k R_{-r}(L_1)u - u^{(k)}(x)\|_{C[\varepsilon,1} \to 0 \text{ при } r \to \infty, k = 1, ..., l. \quad (1.10)$$

ε - произвольное малое положительное число.

Доказательство. Пусть $k = 1$. По лемме 1.3 имеем:

$$DR_{-r}(L_1)u = u(x) - r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt. \quad (1.11)$$

Далее,

$$\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt = e^{-rx}\int\limits_0^x e^{rt}u(t)dt =$$
$$= e^{-rx}\Big|_0^x \frac{1}{r}e^{rt}u(t) - \frac{1}{r}\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt = \quad (1.12)$$
$$= \frac{1}{r}u(x) - \frac{1}{r}e^{-rx}u(0) - \frac{1}{r}\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u'(t)dt$$