Решение задачи восстановления функции вместе с её производными с помощью операторов Ω_r

Ровачев Вадим Алексеевич

Специальность 010501
«Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель: Хромов А.А.

Саратов 2014

Содержание

Постановка задачи

- Постановка задачи восстановления функции.
  Пусть $u(x) \in C^m[0,1]$ задана приближением $f_\delta(x)$ по метрике пространства $L_2[0,1]$, т.е. $\|f_\delta - u\|_{L_2[0,1]} \le \delta$. Ставится задача по f_δ и δ найти равномерное приближение $u(x)$. Строится приближение с помощью оператора Ω_r
- Постановка задачи восстановления производной функции.
  Пусть $u(x) \in C^{k-1}[0,1]$ задана приближением $f_\delta(x)$ по метрике пространства $L_2[0,1]$. Ставится задача по f_δ и δ найти равномерное приближение $u^{(m)}(x), 0 \le m \le k-1$. Строится приближение с помощью оператора $D^m\Omega_r^{(k)}$

Формула резольвенты дифференциального оператора первого порядка

Рассмотрим простейший дифференциальный оператор первого порядка $L_1 : y^{'}, y(0) = 0$. Обозначим через $R_\lambda(L_1)$ его резольвенту, т.е. оператор $R_\lambda(L_1) = (L_1 - \lambda E)^{-1}$, где E - единичный оператор, λ - спектральный параметр (числовой параметр, вообще говоря, комплексный). Найдем формулу для резольвенты.

Лемма 1.1. Формула резольвенты дифференциального оператора первого порядка

Для $y(x) = R_\lambda(L_1)u$ имеет место формула:

$$y(x) \equiv R_\lambda(L_1)u = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}u(t)dt. \tag{1}$$

Положим в (7) $\lambda = -r$, где $r > 0$, и рассмотрим операторы $rR_{-r}(L_1)$. Эти операторы имеют вид:

$$\Omega_{1r}u = rR_{-r}(L_1)u = r\int\limits_0^x e^{-r(x-t)}u(t)dt \tag{2}$$

Формула резольвенты в пространствах гладких функций $C^l[0,1]$ и формула степеней резольвенты

Рассмотрим операторы
$D^k R_{-r}(L_1) \equiv (R_{-r}(L_1)u)_x^{(k)} k = 1, ..., l, D^1 \equiv D(Du = u')$.

Лемма 1.3. Формула резольвенты в пространствах гладких функций
Операторы $D^k R_{-r}(L_1)$ имеют вид:

$$D^k R_{-r}(L_1)u = u^{(k-1)}(x) - ru^{(k-2)}(x) + r^2 u^{(k-3)}(x) - ...+ \\ +(-1)^{k-1} r^{k-1} u(x) + (-1)^k r^k \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} u(t) dt, k = 1, ..., l. \tag{3}$$

Лемма 1.5. Формула степеней резольвенты
Операторы $(rR_{-r}(L_1))^k$ имеют вид:

$$(rR_{-r}(L_1))^k u = r^k \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t) dt. \tag{4}$$

Формула производной от резольвенты порядка m

Лемма 1.8. Формула производной от резольвенты порядка m
Операторы $D^m\Omega_{1r}^k u$ *при* $k \geq 1, m = 0, ..., k-1$ *имеют вид*

$$D^m\Omega_{1r}^k u = r^k \int\limits_0^x K_{1m}(x,t,k,r)u(t)dt, \tag{5}$$

где

$$K_{1m}(x,t,k,r) = (-1)^m e^{-r(x-t)}\left[r^m\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} - mr^{m-1}\frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} + \right.$$
$$+ C_m^2 r^{m-2}\frac{(x-t)^{k-3}}{(k-3)!} + ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} r\frac{(x-t)^{k-m}}{(k-m)!} + \tag{6}$$
$$\left. +(-1)^m\frac{(x-t)^{k-m-1}}{(k-m-1)!}\right].$$

Формула резольвенты дифференциального оператора первого порядка

Рассмотрим оператор $L_2 : y', y(1) = 0$, отличающийся от оператора L_1 лишь граничным условием. Обозначим его резольвенту $R_\lambda(L_2)$. Положим $\lambda = r, r > 0$ и рассмотрим оператор $-rR_r(L_2)$.

Лемма 2.1. Формула резольвенты дифференциального оператора первого порядка

Для $y(x) = R_\lambda(L_2)$ имеет место формула:

$$y(x) \equiv R_\lambda(L_2)u = -\int_x^1 e^{\lambda(x-t)}u(t)dt. \tag{7}$$

Положим в (1.1) $\lambda \; - r$, где $r > 0$, и рассмотрим операторы $-rR_r(L_2)$. Очевидно, эти операторы имеют вид:

$$\Omega_{2r}u = -rR_r(L_2)u = r\int_x^1 e^{r(x-t)}u(t)dt \tag{8}$$

Формула резольвенты в пространствах гладких функций $C^l[0,1]$ и формула степеней резольвенты

Рассмотрим операторы
$D^k R_r(L_2)u \equiv (R_r(L_2)u)_x^{(k)}, k = 1, ..., l, D^1 \equiv D(Du = u')$.

Лемма 2.3. Формула резольвенты в пространствах гладких функций
Операторы $D^k R_r(L_2)$ имеют вид:

$$D^k R_r(L_2)u = u^{(k-1)}(x) - ru^{(k-2)}(x) + r^2 u^{(k-3)}(x) + ... + \\ +(-1)^{k-1} r^{k-1} u(x) + (-1)^k r^k \int_x^1 e^{r(x-t)} u(t)dt. \tag{9}$$

Лемма 2.5. Формула степеней резольвенты
операторы Ω_{2r}^k имеют вид:

$$\Omega_{2r}^k u = r^k \int_x^1 \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t)dt. \tag{10}$$

Формула производной от резольвенты порядка m

Лемма 2.8. Формула производной от резольвенты порядка
Операторы имеют вид

$$D^m \Omega_{2r}^k u = r^k \int\limits_x^1 K_{2m}(x,t,k,r)u(t)dt, \tag{11}$$

где

$$K_{2m}(x,t,k,r) = e^{r(x-t)} \Big[r^m \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} - m r^{m-1} \frac{(t-x)^{k-2}}{(k-2)!} + \\ + C_m^2 r^{m-2} \frac{(t-x)^{k-3}}{(k-3)!} + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} r \frac{(t-x)^{k-m}}{(k-m)!} + \\ + (-1)^m \frac{(t-x)^{k-m-1}}{(k-m-1)!} \Big]. \tag{12}$$

Приближение функции и её производных на $[0, 1]$ с помощью оператора Ω_r

Рассмотрим оператор Ω_r, являющийся комбинацией операторов Ω_{1r}, Ω_{2r} приведённых в лемме 1.1 (4) и лемме 2.1 (7) соответственно.

$$\Omega_r u = \begin{cases} \Omega_{2r} u \equiv r \int\limits_x^1 e^{r(x-t)} u(t)dt, x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r} u \equiv r \int\limits_0^x e^{-r(x-t)} u(t)dt, x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{13}$$

В силу свойств операторов Ω_{1r} и Ω_{2r} на каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ эти операторы дают равномерную сходимость в метрике $C[0, 1/2]$ и $C[1/2, 1]$ соответственно к любой функции $u(x) \in C[0, 1]$.

Далее определим по аналогии с (13) в соответствии с леммами 1.5 (5) и 2.5 (8) оператор $\Omega_r^{(k)}$:

$$\Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} \Omega_{2r}^k u \equiv r^k \int\limits_x^1 \dfrac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{r(x-t)} u(t)dt, x \in [0, 1/2], \\ \Omega_{1r}^k u \equiv r^k \int\limits_0^x \dfrac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-r(x-t)} u(t)dt, x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{14}$$

А также построим оператор $D^k \Omega_r (D^k = \dfrac{d^k}{dx^k}, D' \equiv D)$:

$$D^k \Omega_r u = \begin{cases} D^k \Omega_{2r} u, x \in [0, 1/2], \\ D^k \Omega_{1r} u, x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

где в соответствии с леммами 1.3 (5) и 2.3 (8) операторы $D^k \Omega_{1r} u$ и $D^k \Omega_{2r} u$ определены в формулах (3) и (9) соответственно.

Теорема 3.1 *Для любой функции* $u(x) \in C^l[0,1], l \geq 0$ *выполняется сходимость:*

$$\|D^k \Omega_r u - u^{(k)}\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } r \to \infty, k = 0, 1, ..., l. \quad (16)$$

Рассмотрим операторы $D^m \Omega_r^{(k)}$ при $k \geq 1, m = 0, ..., k-1$:

$$D^m \Omega_r^{(k)} u = \begin{cases} D^m \Omega_{2r}^k u \equiv r^k \int\limits_x^1 K_{2m}(x,t,k,r) u(t) dt, x \in [0, 1/2], \\ D^m \Omega_{1r}^k u \equiv r^k \int\limits_0^x K_{1m}(x,t,k,r) u(t) dt, x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (17)$$

где $K_{1m}(x,t,k,r)$, $K_{2m}(x,t,k,r)$ определены в формулах (1.22),(2.19) в соответствии с леммами 1.8 (6) и 2.8 (9).

Теорема 3.2 *Для любой функции* $u(x) \in C^{k-1}[0,1]$ *при* $k \geq 1, m = 0, ..., k-1$ *выполняется сходимость:*

$$\|D^m \Omega_r^{(k)} u - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \text{ при } r \to \infty. \quad (18)$$

Задача восстановления функции

Теорема 3.3 *Для сходимости*

$$\Delta(\delta, \Omega_r, u) \equiv \sup_{f_\delta}\{\|\Omega_r f_\delta - u\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - u\|_{L_2[0,1]} \leq \delta\} \to 0 \text{ \textit{при} } \delta \to 0 \tag{19}$$

необходимо и достаточно выполенение согласования:

$$r = r(\delta), r(\delta) \to \infty, (r(\delta))^{1/2}\delta \to 0.$$

Задача восстановления производной функции порядка m

Теорема 3.4 *Для сходимости*

$$\Delta(\delta, D^m\Omega_r^{(k)}, u) \equiv$$
$$\equiv \sup_{f_\delta}\{\|D^m\Omega_r^{(k)} f_\delta - u^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - u\|_{L_2[0,1]} \leq \delta\} \to 0 \text{ при} \tag{20}$$
$$\delta \to 0, k \geq 1, 0 \leq m \leq k-1,$$

необходимо и достаточно выполенение согласования:

$$r = r(\delta), r(\delta) \to \infty, (r(\delta))^{\frac{2m+1}{2}}\delta \to 0.$$