

зано. Числ. линии, получаемые путем итераций, можно привести в виде

С.В.ГОРИН

3.2. Писемной частью Товарищества А.Ф.Макаров скончалась
всеславная память о князе Г. В. Одоевском. В отличие от процедуры вывода линий тока, описанной в предыдущем разделе, в данном разделе описана процедура вывода линий тока, которая не требует предварительного определения коэффициентов линий тока.

I. Общая постановка задачи.

Пусть в области $D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ задано векторное поле. Линии, которые в каждой своей точке имеют заданные данным векторным полем касательные, будем называть линиями тока. Приведем более строгое определение линий тока.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение вида

$$V(x, y)dx + U(x, y)dy = 0, \quad (I)$$

функции $U(x, y)$ и $V(x, y)$ определены в некоторой области

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\} \cup U^2 + V^2 > 0$$

Это уравнение задает в каждой точке области проекции касательной на оси x и y , равные $U(x, y)$ и $V(x, y)$, к проходящему через эту точку графику решения уравнения (I).

Поставим задачу интегрирования дифференциального уравнения. В области D найти все линии, имеющие в каждой точке направление, заданное уравнением (I). Эти линии будем называть линиями тока уравнения (I).

В данной статье описывается один из методов графического решения уравнения (I). Основная идея метода заключается в следующем.

Пусть перо находится в точке (x_0, y_0) . Двигаясь по касательной, приводим перо в следующую точку с координатами (x_1, y_1) . При достаточно малом приращении можно считать, что мы находимся на графике решения. Повторяя эту процедуру, в итоге получим линию, которую приближенно можно считать решением уравнения (I). Однако движение по касательной дает слишком большую ошибку. Поэтому в процедуре `ток` следующая точка находится по более точным формулам, которые имеют вид:

$$x_1 = x_0 - \tau \frac{U(x_0, y_0) + U(\tilde{x}, \tilde{y})}{2},$$

$$y_1 = y_0 + \tau \frac{V(x_0, y_0) + V(\tilde{x}, \tilde{y})}{2},$$

где вспомогательные величины \tilde{x} , \tilde{y} находятся следующим образом:

$$\tilde{x} = x_0 - \tau U(x_0, y_0),$$

$$\tilde{y} = y_0 + \tau V(x_0, y_0),$$

а τ - характерный параметр дискретизации дифференциальной задачи (I). Точность интегрирования уравнения, т.е. расстояние от точки (x_1, y_1) до кривой, будет порядка $O(\tau^3)$.

Очень просто иллюстрируется описанный метод графически:

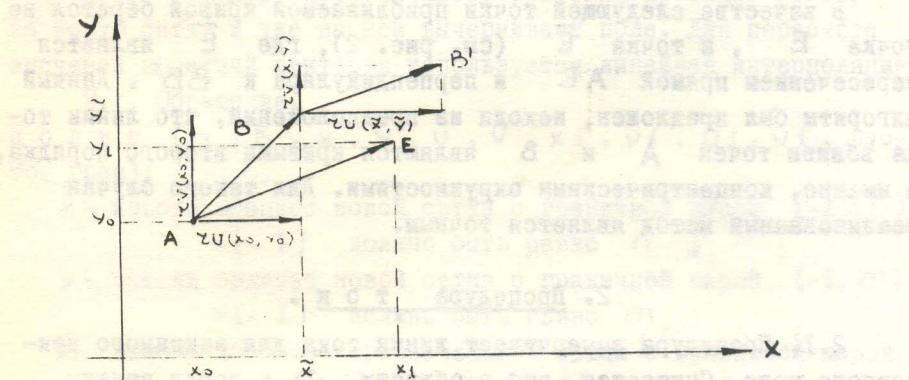


Рис. I

Правда, в процедуре реализована несколько другая схема:

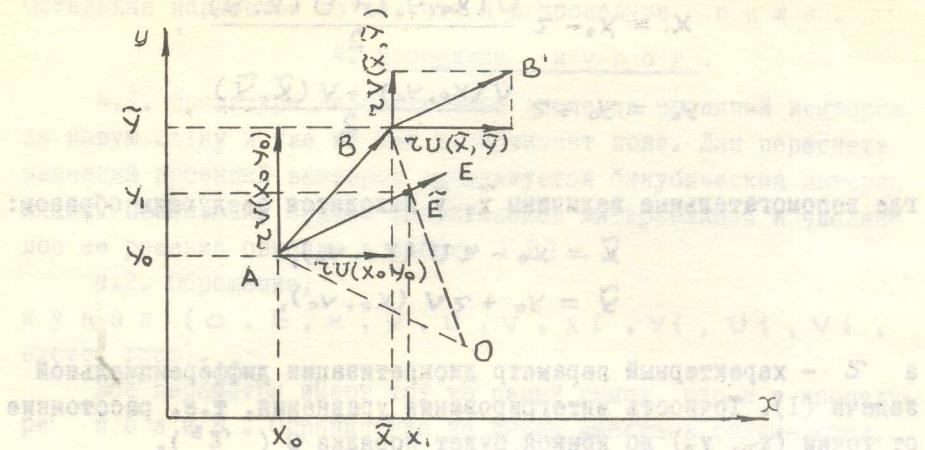


Рис. 2. Построение следа линии тока.

В качестве следующей точки приближаемой кривой берется не точка E , а точка \tilde{E} (см. рис. 2), где \tilde{E} является пересечением прямой AE и перпендикуляра к BB' . Данный алгоритм был предложен, исходя из предположений, что линии тока вблизи точек A и B являются кривыми второго порядка, а именно, концентрическими окружностями. Для такого случая реализованный метод является точным.

2. Процедура ток.

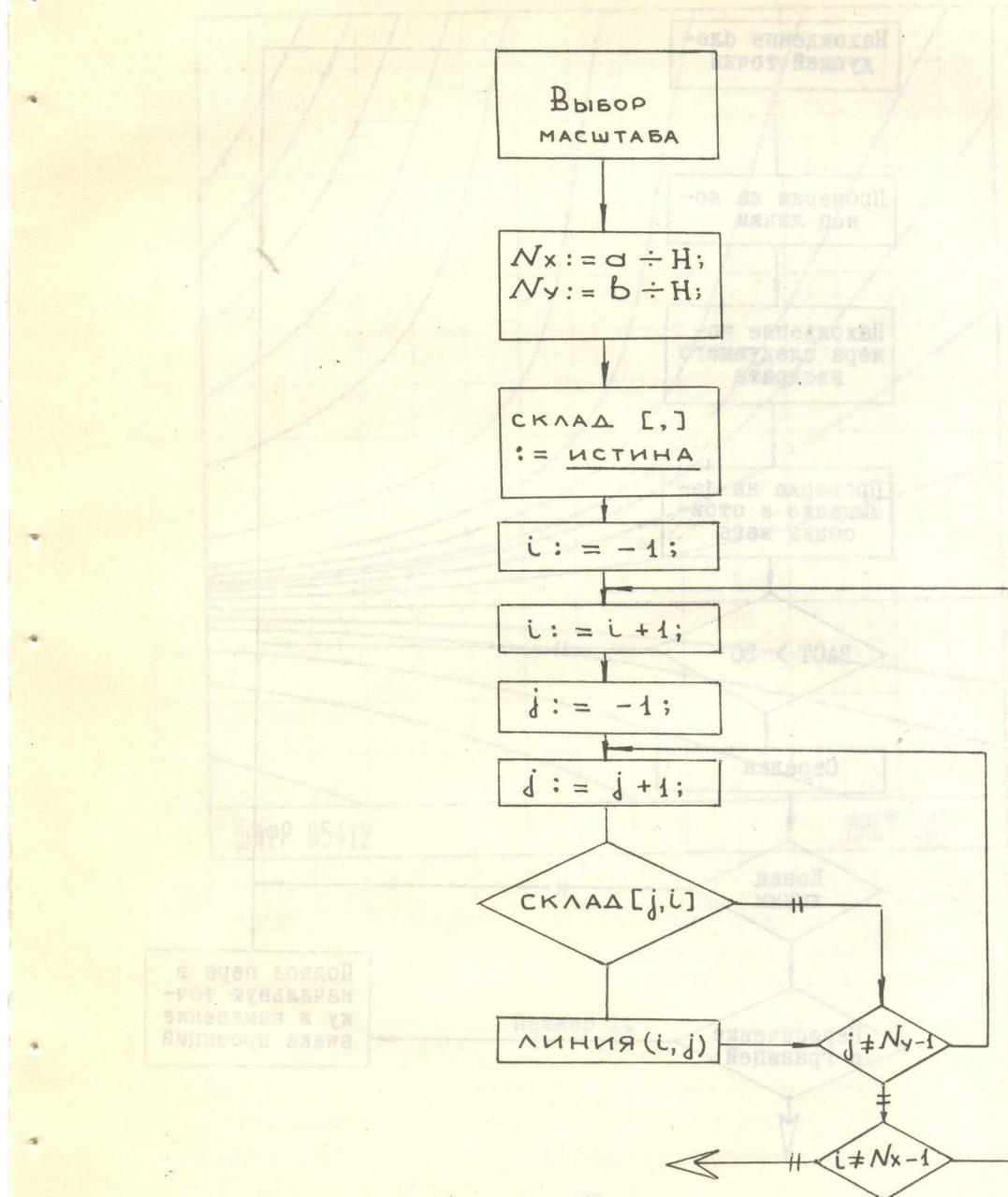
2.1. Процедура вычерчивает линии тока для заданного векторного поля. Считается, что в области D всюду заданы проекции касательных к линиям тока. Проекция на ось x равна $U(x, y)$, а на ось y - $V(x, y)$.

2.2. Обращение.

ток ($x_n, x_k, y_n, y_k, U, V, H, A, B$);
 x_n, y_n - координаты левого нижнего угла области в координатах пользователя;
 x_k, y_k - координаты верхнего правого угла области в координатах пользователя;
 U, V - функции, задающие проекции касательных на оси x и y соответственно;
 H - примерное расстояние между линиями тока на рисунке (в миллиметрах);
 A, B - размер рисунка в миллиметрах.

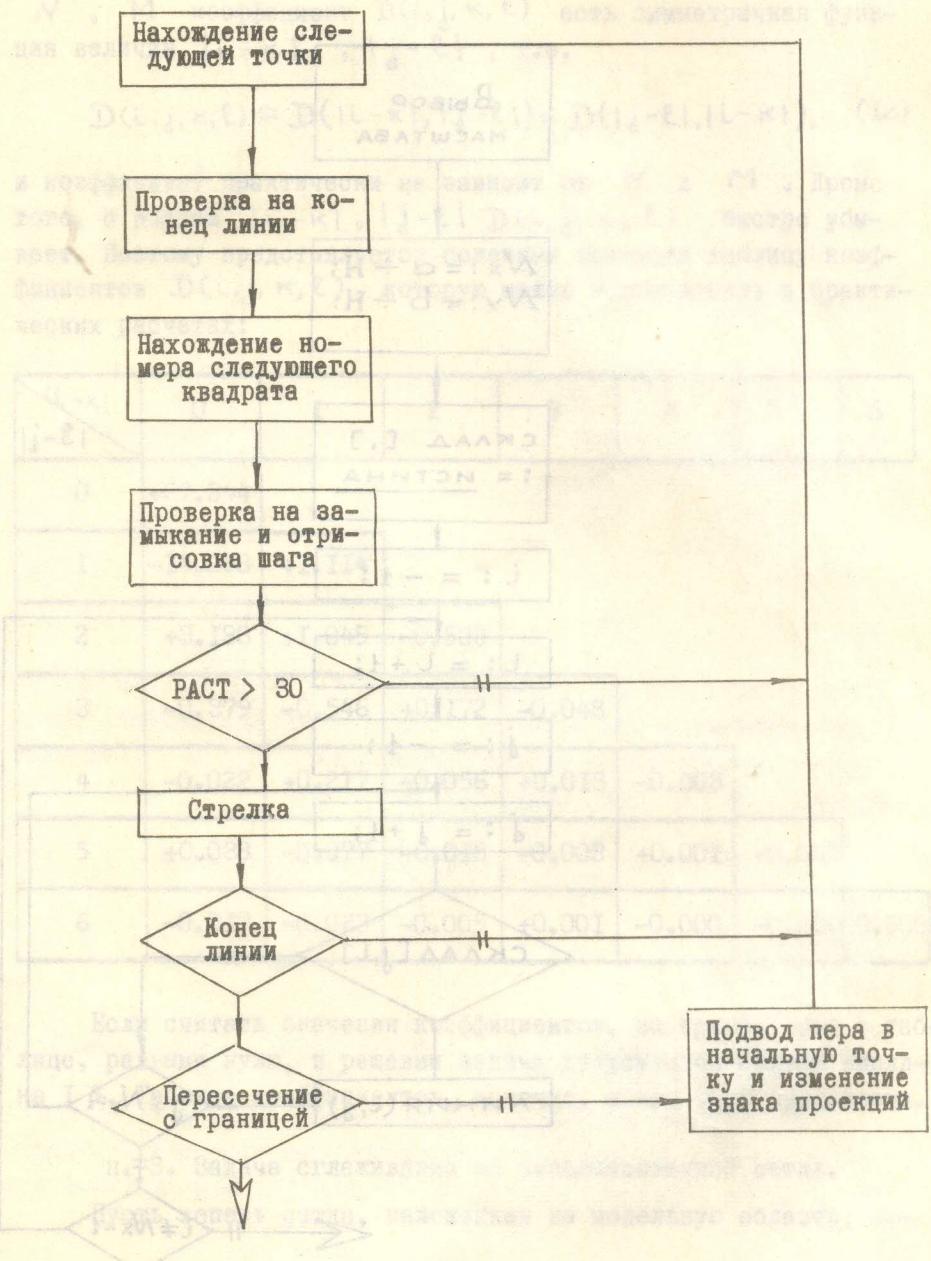
Блок-схема 1.

Процедура ТОК

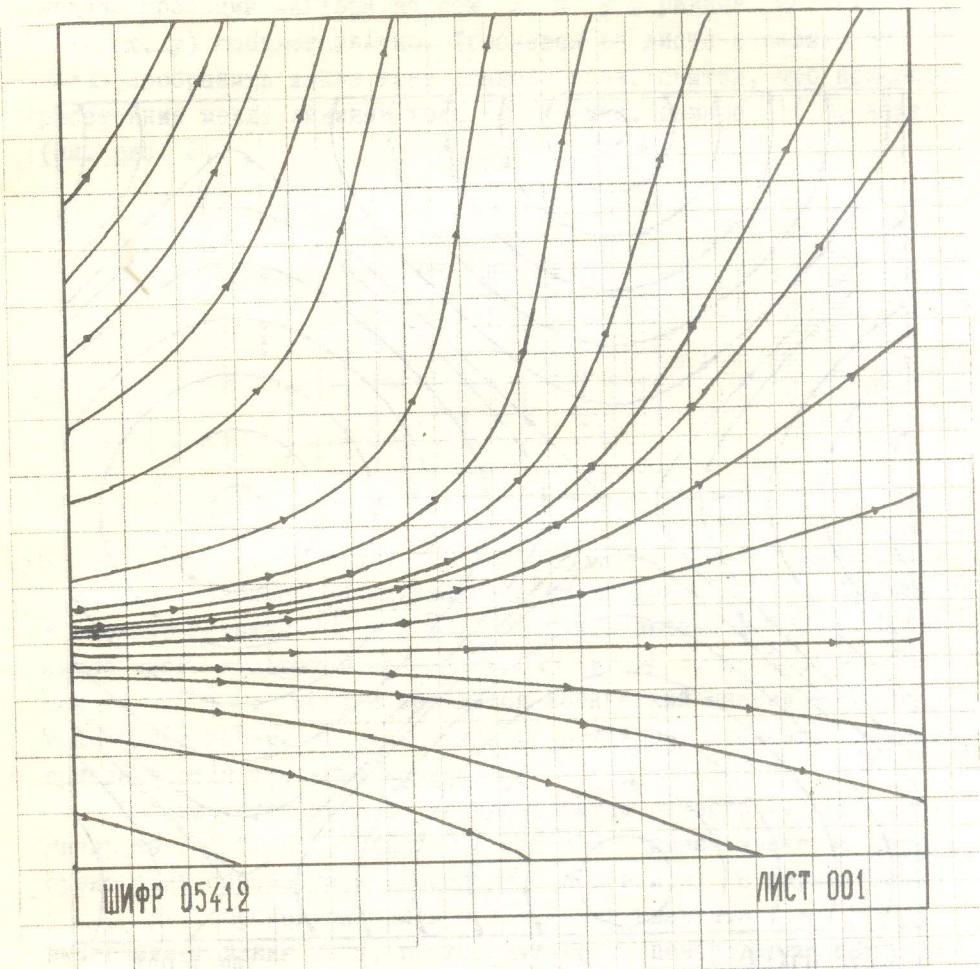


Блок-схема П. оного изображения на листе

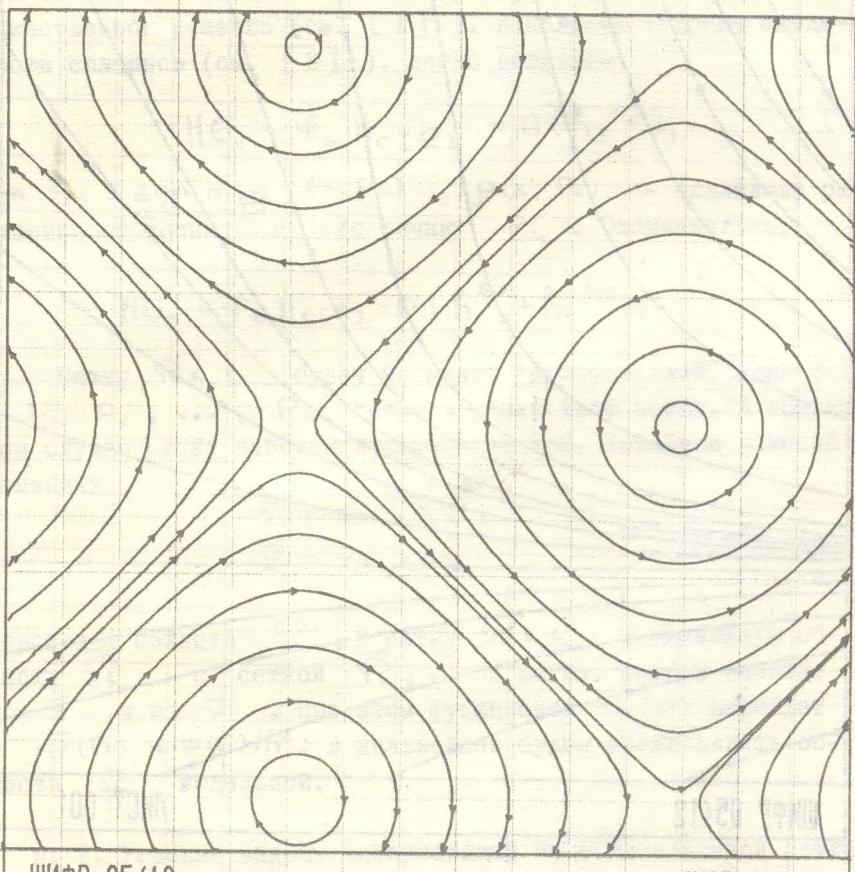
Процедура линия.



Примеры использования процедуры ток.



Пример I.



1) $\vec{v} = \varphi \vec{e}_r$ Пример 2.

2) $v = \varphi(r)$

3. Описание алгоритма.

Пусть в области $D = \{(x, y) : x \in [x_0, x_k], y \in [y_0, y_k]\}$ всюду задано векторное поле, т.е. в каждой точке (x, y) из D заданы проекции вектора на оси x и y , равные $U(x, y)$ и $V(x, y)$ соответственно. Требуется на листе с размерами $a \times b$ изобразить линии тока данного поля, считая, что примерное расстояние между линиями тока на рисунке, равное H , задано (см. рис. 3).

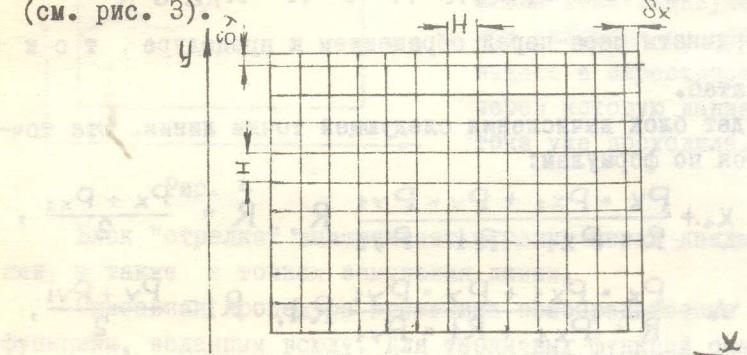


Рис. 3

Лист разбивается на квадраты со стороной H . Причем возможные остатки ($\delta x, \delta y$) не учитываются. В N_x заносится число квадратов по оси x ($a + H$), а N_y - по оси y ($b + H$) и заводится логический массив - СКЛАД с граничными парами $[0:N_y-1, 0:N_x-1]$, каждому элементу которого присваивается значение истина.

Организуется цикл по всем квадратам области и, если для квадрата (i, j) СКЛАД [j, i] имеет значение истина, происходит обращение к процедуре линия с параметрами i, j . Процедура линия для квадрата (i, j) вычерчивает линию тока, проходящую через центр данного квадрата. Линия тока вычерчивается полностью, т.е. либо до пересечения со сторонами области, либо до замыкания. Если линия проходит через квадрат (i_1, j_1), то этот квадрат считается "занятым" и СКЛАД [j_1, i_1] присваивается значение ложь.

Линия начинает чертиться только из "незанятого" квадрата. А так как в процессе вычерчивания линии не делается проверка на "занятость" очередного квадрата (это существенно ухудшило бы качество рисунка), то заданное расстояние между линиями

сохраняется только в точках начала черчения. В дальнейшем линии могут как угодно сходиться и расходиться.

Рассмотрим подробнее работу этой процедуры. Входными данными является номер квадрата (i , j). Перо подводится в точку (x_0, y_0) , где

$$x_0 = x_1 + xH \times M + i \times H + H/2,$$

$$y_0 = y_1 + yH \times M + j \times H + H/2$$

x_1, y_1 - координаты пера перед обращением к процедуре ток и M - масштаб.

Далее идет блок вычисления следующей точки линии. Эта точка вычисляется по формулам:

$$x = x_0 + \frac{Px \times Px_1 + Py \times Py_1}{R \times Px_1 + R1 \times Py_1} R, \quad R = \frac{Px + Px_1}{2},$$

$$y = y_0 + \frac{Px \times Px_1 + Py \times Py_1}{R \times Px_1 + R1 \times Py_1} R1, \quad R1 = \frac{Py + Py_1}{2},$$

P_x - нормированное значение U (x, y) в точках (x_0, y_0) ,

P_y - нормированное значение V (x, y) в точках (x_0, y_0) ,

Px_1 - нормированное значение U (x, y) в точках $(x_0 + Px, y_0 + Py)$,

Py_1 - нормированное значение V (x, y) в точках $(x_0 + Px, y_0 + Py)$,

U и V - нормируются так, чтобы вектора с проекциями (Px, Py) и (Px_1, Py_1) не выходили за миллиметровый квадрат.

Наличие множителя $\frac{Px \times Px_1 + Py \times Py_1}{R \times Px_1 + R1 \times Py_1}$ отличает реализованный метод от описанного в пункте I. Легко видеть, что присутствие этого множителя не влияет на оценку точности.

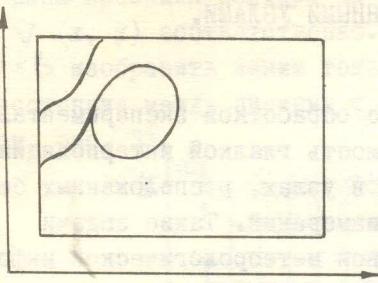
Блок проверки конца линии устанавливает, выходит ли линия тока за пределы области. Если выходит (причем первый раз), то перо возвращается в точку (x_0, y_0) , где

$$x_0 = x_1 + xH \times M + i \times H + H/2,$$

$$y_0 = y_1 + yH \times M + j \times H + H/2$$

Знак у проекций меняется на противоположный, и вычерчи-

вается линия тока с противоположным направлением. Если линия не выходит за пределы области, то сравниваются координаты точки начала линии тока и конечной точки. Если расстояние между ними меньше 0,2 мм, то линия тока нарисована полностью.



Кроме того, линия тока может замкнуться и так, как показано на рис. 4. Считается, что линия тока замкнулась, если при движении по ней перо попадает в окрестность точки, через которую данная линия тока уже проходила.

Рис. 4

Блок "стрелка" вычерчивает стрелку через каждые 3 см линии, а также в точках замыкания линии.

Описанная процедура применима непосредственно только к функциям, заданным всюду. Для табличных функций она, как и в случае процедур вычерчивания графиков и изолиний функций (см. работы [2], [3]), дополнена процедурой интерполяции бикубическими полиномами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическое обеспечение для графопостроителей (I уровень). Под ред. Куртукова А.Я. ВЦ СО АН СССР, 1971.
2. Дворжец В.И. Процедуры вычерчивания изолиний. Настоящий сборник.
3. Дворжец В.И. Комплект процедур вывода графиков. Настоящий сборник.

В.А.ВАСИЛЕНКО, Е.М.ПЕРЕЛОМОВ

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ХАОСТИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ УЗЛАМИ.

Во многих задачах, связанных с обработкой экспериментальной информации, возникает необходимость гладкой интерполяции функций, значения которых известны в узлах, расположенных беспорядочно в области произведенных измерений. Такие задачи встречаются при обработке объективной метеорологической информации, при обработке результатов геодезической и тахеометрической съемки и т.д. В настоящей работе для решения подобных задач предлагается применять аппарат сплайнов.

п. I. Постановка задачи.

В плоскости переменных x, y рассмотрим прямоугольную область Ω с нанесенной на нее равномерной по x и по y сеткой $\Omega_{h,\tau}$; h, τ - шаги сетки соответственно по x и по y . Пусть, кроме того, в области Ω выделены точки P_1, P_2, \dots, P_n , в которых нам известно значение функции $\varphi^*(x,y) \in W_2^2[\Omega]$. Нашей задачей является построение интерполяционной функции $\bar{\varphi}$, которая была бы гладкой, совпадала в узлах P_i с функцией φ^* и сходилась к ней в некотором смысле во всей области Ω .

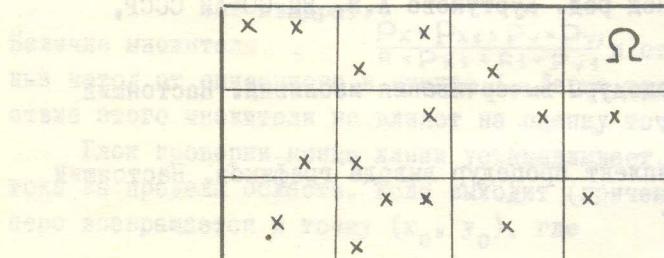


Рис. I

Введем в рассмотрение пространство $H_2[\Omega]$ функций, заданных на Ω и удовлетворяющих следующим условиям.

I. В каждой ячейке $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ сетки

$\Omega_{h,\tau}$ функция $f \in H_2$ является бикубическим многочленом, т.е.

$$f(x,y) = \sum_{k,\ell=0}^3 a_{ij}^{k\ell} (x-x_i)^k (y-y_j)^\ell, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M},$$

2. $f(x,y) \in C^2[\Omega]$

$$3. f_{xx}|_{\Gamma_y} = f_{yy}|_{\Gamma_x} = f_{xxyy}|_{\Gamma} = 0.$$

Здесь Γ_x , Γ_y - части границы $\Gamma = \Gamma_x \cup \Gamma_y$ области Ω , параллельные, соответственно, осям x и осям y .

Известно (см. [2]), что любая функция из $H_2[\Omega]$ однозначно определяется значениями в узлах сетки $\Omega_{h,\tau}$. Пространство $H_2[\Omega]$ имеет конечную размерность, равную количеству узлов в сетке $\Omega_{h,\tau}$. Базис $H_2[\Omega]$ можно, например, составить из функций $\omega_{ij}(x,y) \in H_2[\Omega]$, равных единице в узле (x_i, y_j) , и нулю в остальных узлах сетки $\Omega_{h,\tau}$. Тогда любая функция f из $H_2[\Omega]$ представляется в виде

$$f = \sum_{i,j} f_{ij} \omega_{ij}, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j). \quad (I)$$

Для любой функции $\varphi_* \in W_2^2[\Omega]$ существует единственная функция $\hat{\varphi}_*$ из $H_2[\Omega]$, удовлетворяющая условию

$$\hat{\varphi}_*(x_i, y_j) = \varphi_*(x_i, y_j) \quad \forall i, j. \quad (2)$$

Кроме того (см. [4]), справедливо асимптотическое равенство

$$\|\varphi_* - \hat{\varphi}_*\|_{C[\Omega]} = O(h^{3/2} + \tau^{3/2}). \quad (3)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что $h = \tau$. Введем в пространстве $H_2[\Omega]$ скалярное произведение, индуцированное скалярным произведением пространства $W_2^2[\Omega]$, именно

$$(f, g)_{H_2[\Omega]} = (f, g)_{W_2^2[\Omega]} \quad (4)$$

для любых $f, g \in H_2[\Omega]$. Пространство $H_2[\Omega]$ становится гильбертовым. Поставим задачу отыскания функции $\sigma_n \in H_2[\Omega]$, удовлетворяющей двум условиям:

$$1) \quad \sigma_n(p_i) = \hat{\varphi}_*(p_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$2) \Phi(\delta_n) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_n}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \delta_n}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_n}{\partial y^2} \right)^2 \right] d\Omega = \min$$

Если подмножество пространства $H_2[\Omega]$, определяемое условием I), не пусто, и среди точек $P_i, i = 1, N$ есть три точки, не лежащие на одной прямой, задача I) - 2) имеет единственное решение (см. [1]). Используя теорему сходимости сплайнов (см. [3]), легко получаем

$$\|\delta_n - \hat{\varphi}_*\|_{C[\Omega]} = O(h_1^{3/2}), \quad (5)$$

где $h_1 = \sup_{x \in \Omega} \max_{i=1, N} \rho(x, P_i)$, $\rho(x, P_i)$ – евклидово расстояние от точки x до точки P_i . Окончательно,

$$\|\delta_n - \varphi_*\|_{C[\Omega]} = O(h^{3/2} + h_1^{3/2}). \quad (6)$$

Сетку $\Omega_{h, k}$ будем называть согласованной, если точки P_1, P_2, \dots, P_N лежат в узлах этой сетки. В противном случае сетку назовем несогласованной. Линейной заменой переменных

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_0 + h_x, \\ \bar{y} &= y_0 + h_y \end{aligned} \quad (7)$$

переведем область Ω и сетку $\Omega_{h, k}$ в модельную область $\bar{\Omega}$ с сеткой $\bar{\Omega}_{1,1}$ с шагом, равным единице по \bar{x} и по \bar{y} . При этом функционал $\Phi(\delta)$ перейдет в $\bar{\Phi}(\delta) = \Phi(\delta)/h^2$. В дальнейшем будем предполагать область Ω модельной.

п. 2. Решение задачи интерполяции на согласованной сетке.

Пусть в модельной области Ω в группе узлов Δ_1 нам известно значение функции φ_* , и мы хотим вычислить значение функции в узлах $\Delta_2 = \bar{\Omega}_{1,1} / \Delta_1$. Поставим задачу нахождения функции $\delta \in H_2[\Omega]$, удовлетворяющей двум условиям:

$$1). \frac{\delta}{\Delta_1} = \varphi_*/\Delta_1$$

$$2) \Phi(\delta) = \min$$

Заметим, что задача I) - 2) имеет единственное решение, если все узлы Δ_1 не лежат на одной прямой.

Инструкция хранится в памяти телефона. Используйте её для выполнения заданий.

-яяФ вириптоммю это ОЭД телевидения М. И

какой-либо из них не подходит для решения задачи I) - 2).

(15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15) (15)

емой. М и

-ибд ожидает от вас ответа. Пожалуйста, выберите правильный вариант.

Рис. 2 включает в себя 4 узла, расположенных в виде квадрата.

Согласно (I),

$$\sigma = \sum_{i,j} \sigma_{i,j} \omega_{i,j}. \quad (8)$$

Поэтому решение задачи I) - 2) удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_{i,j}} \Big|_{(i,j) \in \Delta_2} = 0, \quad (9)$$

$$\sigma_{i,j} \Big|_{(i,j) \in \Delta_1} = \varphi_{i,j} \Big|_{(i,j) \in \Delta_1}.$$

Легко видеть, что (9) представляет собой линейную алгебраическую систему с матрицей $A = A^*$, и так как решение задачи I) - 2) существует и единственно, $\det A \neq 0$. Изучим матрицу A более подробно. Ясно, что

$$\Phi(\sigma) = \sum_{i,j,k,\ell} \sigma_{i,j} \sigma_{k,\ell} D(\omega_{i,j}, \omega_{k,\ell}), \quad (10)$$

$$\text{где } i, k, = 0, 1, \dots, N; \ell, = 0, 1, \dots, M, \text{ и} \quad (11)$$

$$D(\omega_{i,j}, \omega_{k,\ell}) = \int \left[\frac{\partial^2 \omega_{i,j}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_{k,\ell}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega_{i,j}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega_{k,\ell}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega_{i,j}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega_{k,\ell}}{\partial y^2} \right] d\Omega$$

При решении системы (9) каким-нибудь итерационным или прямым методом возникает необходимость расчета коэффициентов $D(i,j, k, \ell) = D(\omega_{i,j}, \omega_{k,\ell})$, что ведет к значительным зат-

ратам машинного времени. Расчет одного коэффициента на сетке $N \times M$ требует приблизительно $0,05 \times N \times M$ сек. на ЭВМ БЭСМ-6. Путем простых, но довольно громоздких вычислений, которые мы здесь не приводим, можно показать, что при больших N, M коэффициент $D(i, j, k, l)$ есть симметричная функция величин $|i-k|, |j-l|$, т.е.

$$D(i, j, k, l) \approx D(|i-k|, |j-l|) = D(|j-l|, |i-k|), \quad (12)$$

и коэффициент практически не зависит от N и M . Кроме того, с ростом $|i-k|, |j-l|$ $D(i, j, k, l)$ быстро убывает. Поэтому представляется полезным привести таблицу коэффициентов $D(i, j, k, l)$, которую можно использовать в практических расчетах:

$ i-k $	0	1	2	3	4	5	6
$ j-l $							
0	+37.344						
1	-14.253	+1.114					
2	+3.133	+1.045	-0.503				
3	-0.379	-0.546	+0.172	-0.048			
4	-0.022	+0.217	-0.056	+0.013	-0.003		
5	+0.038	-0.077	-0.018	-0.003	+0.001	-0.000	
6	-0.017	-0.023	-0.005	+0.001	-0.000	-0.000	0.000

Если считать значения коэффициентов, не приведенных в таблице, равными нулю, в решении задачи допускается ошибка порядка 1 %. Таблица коэффициентов, конечно, может быть продолжена.

п. 3. Задача сглаживания на несогласованной сетке.

Пусть теперь сетка, наложенная на модельную область, во-

обще говоря, не согласована с точками P_1, P_2, \dots, P_n . В этом случае поставим задачу отыскания функции $\bar{\sigma}$, которая минимизирует функционал

$$\Phi_1(u) = \Phi(u) + \rho \sum_{i=1}^n [u(P_i) - \psi_*(P_i)]^2 \quad (I3)$$

на пространстве $H_2[\Omega]$. Если существует решение $\bar{\sigma}$ задачи I) - 2) п. I, то из общей теории сплайн-приближений (см. [1]) известно, что $\bar{\sigma} \rightarrow \sigma$ при $\rho \rightarrow \infty$. Заметим, что функционал $\Phi_1(\sigma)$ имеет единственный минимум, если среди точек P_1, P_2, \dots, P_n есть не лежащие на одной прямой. Учитывая разложение

$$\bar{\sigma} = \sum_{i,j} \bar{\sigma}_{ij} \omega_{ij},$$

запишем условие минимума функционала $\Phi_1(\sigma)$:

$$\frac{\partial \Phi_1(\sigma)}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = 0, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}. \quad (I4)$$

Подробнее,

$$\sum_{k,\ell=0}^{N,M} [D(i,j,k,\ell) + \rho \sum_{r=1}^n \omega_{ij}(P_r) \omega_{k\ell}(P_r)] \bar{\sigma}_{kl} = \sum_{r=1}^n \psi_*(P_r) \omega_{ij}(P_r), \quad (I5)$$

где $i = \overline{0, N}$; $j = \overline{0, M}$.

Итак, решение задачи сплайн-сглаживания сводится к решению линейной алгебраической системы (I5) с симметричной невырожденной матрицей. Элементы матрицы имеют вид

$$D_{ij}(k,l) = D(i,j,k,l) + \rho \sum_{r=1}^n \omega_{ij}(P_r) \omega_{kl}(P_r) \quad (I6)$$

Предположим, что интерполяционные узлы P_1, P_2, \dots, P_n являются выборкой из совокупности, равномерно распределенной на области Ω . Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{r=1}^n \omega_{ij}(P_r) \omega_{kl}(P_r) \approx \frac{n}{NM} \int \omega_{ij} \omega_{kl} d\Omega. \quad (I7)$$

Величина $\int \omega_{ij} \omega_{kl} d\Omega$ при больших N, M зависит

только от $|i-k|$ и $|j-l|$ и практически не зависит от N и M , т.е.

$$\int_{\Omega} \omega_{ij} \omega_{k\ell} d\Omega = Q(i,j,k,\ell) = Q(|i-k|, |j-l|) = Q(|j-l|, |i-k|) \quad (18)$$

Окончательно, при $N, M, n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$D(i,j,k,\ell) \approx D(|i-k|, |j-l|) + \frac{P_n}{NM} Q(|i-k|, |j-l|). \quad (19)$$

Для коэффициентов $Q(|i-k|, |j-l|)$ мы приведем следующую таблицу:

$ i-k $	0	1	2	3	4	5	6
$ j-l $							
0	0.76428						
1	0.08925	0.01042					
2	-0.04914	-0.00574	0.00316				
3	0.02037	0.00238	-0.00131	0.00054			
4	-0.00738	-0.00086	0.00047	-0.00020	0.00007		
5	0.00247	0.00029	-0.00016	0.00007	-0.00002	0.00001	
6	-0.00073	-0.00008	0.00005	-0.00002	0.00001	-0.00000	0.00000

ЛИТЕРАТУРА

I. Anselone P. M., Laurent P. J. A general method
for the construction of interpolating or smoothing spline-function.
Num. Math., 12(5), 1968.

2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1972.
3. Василенко В.А. Сходимость сплайнов в гильбертовом пространстве. "Численные методы механики сплошной среды", т. 3, № 3, 1972.
4. Varga R.S. Functional analysis and approximation theory in numerical analysis. SIAM, Philadelphia, 1971.

В.А.ВАСИЛЕНКО

ОБРАБОТКА СОДЕРЖАЩЕЙ ОШИБКИ ИНФОРМАЦИИ МЕТОДОМ
СПЛАЙН-СГЛАЖИВАНИЯ.

п. I. Постановка задачи.

Пусть X - гильбертово пространство, вектор $\varphi_* \in X$, k_1, k_2, \dots, k_n - линейно независимая система функционалов, лежащая в $X^* = X$.

Предположим, что с помощью некоторого прибора, характеристики которого заранее известны, мы производим измерение функционалов k_1, k_2, \dots, k_n на векторе φ_* . Результатом измерения является вектор конечно-мерного пространства E_n , который мы обозначим $\tilde{\varphi}_n$. Точнее,

$$\tilde{\varphi}_n = \begin{pmatrix} (k_1, \varphi_*)_x + \xi_1 \\ (k_2, \varphi_*)_x + \xi_2 \\ \dots \\ (k_n, \varphi_*)_x + \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_n^1 \\ \tilde{\varphi}_n^2 \\ \dots \\ \tilde{\varphi}_n^n \end{pmatrix} \quad (I)$$

Символом $(\cdot, \cdot)_x$ обозначено скалярное произведение в пространстве X , $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - случайные величины, равные ошибкам измерения. Допустим, что произведенные нами замеры независимы, т.е. независимы случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Пусть, кроме того

$$M\xi_i = 0,$$

$$D\xi_i = d^2 \|\varphi_*\|_n^2, i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Символами M и D обозначены соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины, а $\|\cdot\|_n$ порождается скалярным произведением, введенным в пространстве E_n по формуле

$$(\varphi, \psi)_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i \psi_i . \quad (3)$$

В работах [1, 2] при решении интерполяционной проблемы ставится задача отыскания сглаживающего сплайна $\tilde{\varphi} \in X$, исходя из условия

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \lambda \|T\tilde{\varphi}\|_Y^2 + \sum_{i=1}^N [(\kappa_i, \tilde{\varphi})_X - \tilde{\varphi}_i]^2 \underset{\tilde{\varphi} \in X}{\min}, \quad (4)$$

где Y — гильбертово пространство, вообще говоря, отличное от X , $T: X \rightarrow Y$ — непрерывный линейный оператор, отображающий из X в Y , $\lambda > 0$ — вещественный параметр.

Нашей задачей будет определение оптимального параметра λ , если известно количество измерений N , относительное квадратичное уклонение прибора d и исходный информационный вектор φ_N .

п. 2. Выбор оптимального параметра сглаживания.

Определим оператор $P: X \rightarrow E_N$ соотношением

$$P_\varphi = [(\varphi, \kappa_1)_X, (\varphi, \kappa_2)_X, \dots, (\varphi, \kappa_N)_X]. \quad (5)$$

В дальнейшем для кратности вместо P_φ будем писать φ_N .

Используя результаты, изложенные в [1], легко получить, что вектор $\tilde{\varphi}_N$ ($\tilde{\varphi}$ — решение задачи (4)) связан с известным нам вектором φ_N соотношением

$$\tilde{\varphi}_N = A_N(\lambda) \tilde{\varphi}_N = [I_N - \lambda Q_N(\lambda)] \tilde{\varphi}_N, \quad (6)$$

где I_N — единичная матрица порядка N , $A_N(\lambda)$ и $Q_N(\lambda)$ — некоторые матрицы, зависящие от λ , причем $A_N(\lambda) = A_N^*(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$.

Рассмотрим полную нормированную в E_N систему собственных векторов $P_1^N, P_2^N, \dots, P_N^N$ матрицы $A_N(\lambda)$ и соответствующие им собственные числа $\lambda_1^N(\lambda), \lambda_2^N(\lambda), \dots, \lambda_N^N(\lambda)$, то есть

$$A_N(\lambda) P_i^N = \lambda_i^N(\lambda) P_i^N, \quad (7)$$

при этом

$$\lambda_i^N(\alpha) = 1 - \mu_i^N(\alpha), \quad (8)$$

где $\mu_i^N(\alpha)$ - собственные числа матрицы $\alpha Q_N(\alpha)$.

Представим векторы $\tilde{\varphi}_N$ и $\tilde{\varphi}_{*N}$ в виде

$$\tilde{\varphi}_N = \sum_{i=1}^N (\tilde{\varphi}_N, p_i^N)_N p_i^N = \sum_{i=1}^N c_i^N p_i^N, \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}_{*N} = \sum_{i=1}^N (\tilde{\varphi}_{*N}, p_i^N)_N p_i^N = \sum_{i=1}^N c_{i*}^N p_i^N.$$

Используя (2), видим, что^{*})

$$M \tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_{*N},$$

$$M \left(\frac{\|\tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2}{\|\tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2} \right) = d^2. \quad (10)$$

Параметр α задачи сглаживания (4) естественно считать оптимальным, если выполнено условие

$$M \left(\frac{\|\tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2}{\|\tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2} \right) = \min_{\alpha}. \quad (II)$$

Произведем необходимые вычисления:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2 &= \|\tilde{\varphi}_N - \alpha Q_N(\alpha) \tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2 = \\ &= \|\tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}\|_N^2 - 2(\tilde{\varphi}_N - \tilde{\varphi}_{*N}, \alpha Q_N(\alpha) \tilde{\varphi}_N)_N + \\ &\quad + \|\alpha Q_N(\alpha) \tilde{\varphi}_N\|_N^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая разложение (9), получим:

*). Здесь и далее предполагаем, что $\|\tilde{\varphi}_{*N}\|_N \neq 0$

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2 = \|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2 - \\
& - 2 \left(\sum_{i=1}^N (c_i^{*N} - c_{i*}^{*N}) p_i^{*N}, \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) c_i^{*N} p_i^{*N} \right)_N + \\
& + \left(\sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) c_i^{*N} p_i^{*N}, \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) c_i^{*N} p_i^{*N} \right)_N = \\
& = \|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2 - 2 \sum_{i=1}^N (c_i^{*N} - c_{i*}^{*N}) c_i^{*N} \mu_i^{*N}(\omega) + \\
& + \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) c_i^{*N 2}.
\end{aligned} \tag{I3}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
M \left(\frac{\|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \right) &= d^2 - \frac{2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) + \\
& + \frac{2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) c_{i*}^{*N 2} + \sum_{i=1}^N \mu_i^{*N}(\omega) M c_i^{*N 2}.
\end{aligned} \tag{I4}$$

Вычислим матожидание случайной величины C_i^{*N} .

$$\begin{aligned}
C_i^{*N} &= (\varphi_N, p_i^{*N})_N^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\varphi}_N^k p_{ik}^{*N} \right)^2 = \\
& = \frac{1}{N^2} \sum_{k, l=1}^N \tilde{\varphi}_N^k \tilde{\varphi}_N^l p_{ik}^{*N} p_{il}^{*N}.
\end{aligned} \tag{I5}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
M C_i^{*N} &= \frac{1}{N^2} \sum_{k \neq l} \varphi_{*N}^k \varphi_{*N}^l p_{ik}^{*N} p_{il}^{*N} + \\
& + \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N p_{ik}^{*N} M \tilde{\varphi}_N^{k 2}.
\end{aligned} \tag{I6}$$

Учитывая $C_{i*}^{*N} = \frac{1}{N^2} \sum_{k, l=1}^N \varphi_{*N}^k \varphi_{*N}^l p_{ik}^{*N} p_{il}^{*N}$,

$$C_{i*}^{*N} = \frac{1}{N^2} \sum_{k, l=1}^N \varphi_{*N}^k \varphi_{*N}^l p_{ik}^{*N} p_{il}^{*N}, \tag{I7}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 M \left(\frac{\|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \right) &= d^2 - \frac{2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \mu_i^{N^2}(\lambda) \times \\
 &\times \sum_{k=1}^N P_{ik}^{N^2} (M \varphi_N^{k^2} - \varphi_{*N}^{k^2}) + \frac{1}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) M C_i^{N^2} = \\
 &= d^2 - \frac{2d^2}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) + \frac{d^2}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) + \\
 &+ \frac{1}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) (\varphi_{*N}, P_i^N)_N^2. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Так как функция φ_{*} нам неизвестна, объединим в формуле (18) два члена суммы и получим приближенную формулу

$$\begin{aligned}
 M \left(\frac{\|\tilde{\varphi}_N - \varphi_{*N}\|_N^2}{\|\varphi_{*N}\|_N^2} \right) &= \\
 &= d^2 - \frac{2d^2}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) + \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_N\|_N^2} \sum_{i=1}^N \mu_i^{N^2}(\lambda) (\tilde{\varphi}_N, P_i^N)_N^2. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Условие минимума выражения (19) по параметру λ имеет вид:

$$J(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu_i^{N^2}(\lambda) (\tilde{\varphi}_N, P_i^N)_N^2}{\|\tilde{\varphi}_N\|_N^2} - \frac{d^2}{N} \right] \frac{\partial \mu_i^{N^2}(\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \tag{20}$$

Таким образом, задача отыскания оптимального параметра λ в задаче (4) сводится к решению нелинейного уравнения $J(\lambda)$. В приложениях это уравнение может быть решено одним из известных методов, например, методом Ньютона, с начальным приближением $\lambda_0 = 0$.

п. 3. Пример оптимизации параметра сглаживания при обработке исходных данных интерполяции.

Рассмотрим для простоты отрезок прямой $[0, 1]$ с расположеными на нем узлами $x_i = i/N$, $i = 0, N$. Положим

$x \in W_2^2[0,1]$, $y \in L_2[0,1]$, $T = \frac{d^2}{dx^2}$. Определим систему функционалов $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N$, удовлетворяющих условию

$$(f, \kappa_i)_{W_2^2} = f(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (21)$$

для всех $f \in W_2^2[0,1]$. Пусть функция $\varphi_*(x)$ лежит в $W_2^2[0,1]$. С помощью некоторого прибора, который дает относительное квадратичное уклонение d , мы измеряем функцию $\varphi_*(x)$ в узлах сетки. Результатом является массив φ_N . Известными методами (см. [1]) будем решать задачу сплайн-сглаживания, т.е. нахождения функции $\tilde{\varphi} \in W_2^2[0,1]$ из условия

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \omega \int_0^1 \left(\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dx^2} \right)^2 dx + \sum_{i=0}^N [\tilde{\varphi}(x_i) - \varphi_N]^2 - \min \quad (22)$$

Хорошо известно, что решением этой задачи является кусочно-кубическая функция $\tilde{\varphi} \in C^2[0,1]$. Кроме того, легко показать, что ее узловые значения $\tilde{\varphi}(x_i)$ связаны с φ_N соотношением

$$\tilde{\varphi}_N = A_N(\omega) \varphi_N, \quad (23)$$

при этом матрица $A_N(\omega) = A_N^*(\omega) > 0$ имеет собственные числа

$$\lambda_i^N(\omega) = 1 - \mu_i^N(\omega) = 1 - \frac{\omega \left[\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{i\pi h}{2} \right]^2}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos i\pi h + \omega \left[\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{i\pi h}{2} \right]^2} \quad (24)$$

$i = 0, 1, \dots, N$, и соответствующие им собственные векторы

$$P_0^N = (1)_{x=x_0}^{x=N} \quad (25)$$

$$P_i^N = \frac{1}{c_i} (\sin i\pi x)_{x=x_0}^{x=N}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $h = 1/N$, символом $(f(x))_{x=x_0}^{x=N}$ обозначен вектор $(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N))$, c_i – нормировочный множитель.

Решая теперь уравнение (20), находим оптимальный параметр ω .

Численные эксперименты, в которых нахождение оптимального параметра ω осуществлялось методом Ньютона с $\omega_0 = 0$,

показали значительное улучшение информации после сглаживания. В таблице I приведены результаты, полученные при $N=20$, $d=10\%$ и функции $\Phi_*(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$. После обработки информации квадратичное уклонение уменьшилось до 1.5 %.

Таблица I.

i	2	8	10	15	18
Ψ_*	0.100	0.400	0.500	0.750	0.900
$\tilde{\Psi}$	0.108	0.432	0.469	0.803	0.861
$\tilde{\varphi}$	0.101	0.406	0.492	0.761	0.887

Я выражаю искреннюю признательность Г.И.Марчуку и Ю.А. Кузнецову за постоянное внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

- I. Anselone P.M., Laurent P.J. A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions. *Num. Math.*, 1968, 12(5).
2. Завьялов Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания. В сб. "Вычислительные системы", вып. 42, ИМ СО АН ССР, Новосибирск, 1970.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, 1972.

В.В.ШАЙДУРОВ

О ПОСТРОЕНИИ КРИВЫХ.

В работе излагается метод построения фазовых и интегральных кривых. Метод основан на применении простейшей явной разностной схемы с помощью уточнения комбинациями решений, получаемых при различных шагах разностной сетки.

Сначала рассматривается вопрос о построении интегральных кривых одной функции в расширенной фазовой плоскости (см. [I]). В этом случае численно решается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad t \in T = [0, T_0] \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $f(t, x)$ - вещественная функция двух аргументов. Потребуем от данных задачи, чтобы

$$f \in C^{(\gamma)}(T \times (-\infty, \infty)), x \in C^{(\gamma+1)}(T), (\gamma \geq 2) \quad (*) \quad (3)$$

Вопрос, когда первое утверждение в (3) влечет второе, не затрагивается. Решение этого вопроса можно найти в [I], [3].

На отрезке T строится равномерная сетка

$$\omega_T = \{t_j : t_j = j\tau, j = 0, \dots, M\} \quad (4)$$

с шагом $\tau = T_0/M$ (целое $M > 0$), и задача (1)-(2) заменяется приближенной

$$\frac{x^\tau(t_{j+1}) - x^\tau(t_j)}{\tau} = f(t_j, x^\tau(t_j)), 0 \leq j \leq M-1 \quad (5)$$

$$x^\tau(0) = x_0.$$

Относительно решения этой задачи можно установить сле-

*¹) $C^{(\gamma)}(\Omega)$ для произвольной области Ω означает класс ℓ раз непрерывно дифференцируемых на Ω функций.

дующее.

Теорема I. При выполнении требований (3) решение дифференциальной задачи (1)-(2) при произвольном τ связано с решением задачи (5) соотношением

$$x^\tau(t) = x(t) + \sum_{\ell=1}^{\tau-1} \tau^\ell x_\ell(t) + \tau^\tau x_{\tau,\tau}(t), \quad t \in \omega_T. \quad (6)$$

Здесь для $\ell = 1, \dots, \tau - 1$ функции $x_\ell(t)$ из класса $C^{(\tau+1-\ell)}(T)$ и не зависят от τ , а $x_{\tau,\tau}(t)$ — сеточная функция, ограниченная при всех τ

$$\max_{t \in \omega_T} |x_{\tau,\tau}(t)| \leq C_1$$

константой C_1 , зависящей от $x(t)$, но не от τ .

Доказательство. Предположим выполненным соотношение (6) и найдем некоторые необходимые условия для его существования. С этой целью подставим (6) в левую часть (5) и учтем, что из гладкости функций $x_\ell(t)$ следуют соотношения

$$\frac{x_\ell(t_{j+1}) - x_\ell(t_j)}{\tau} = \frac{dx_\ell}{dt}(t_j) + \sum_{s=1}^{\tau-\ell-1} \tau^{\frac{s-1}{(s+1)!}} \frac{d^{(s+1)}x_\ell}{dt^{s+1}}(t_j) + (7)$$
$$+ \tau^{\tau-\ell} x_{\tau-\ell,\tau}(t_j) \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где

$$\max_{0 \leq j \leq M-1} |x_{\tau-\ell,\tau}(t_j)| \leq \frac{1}{(\tau-\ell+1)!} \max_T \left| \frac{d^{(\tau-\ell+1)}x_\ell}{dt^{\tau-\ell+1}} \right|$$

Результатом подстановки (6) является соотношение

$$\frac{x^\tau(t_{j+1}) - x^\tau(t_j)}{\tau} = \frac{dx}{dt}(t_j) + \sum_{s=1}^{\tau-1} \tau^{\frac{s-1}{(s+1)!}} \frac{d^{(s+1)}x}{dt^{s+1}}(t_j) +$$
$$+ \tau^{\tau-\ell} x_{\tau-\ell,\tau}(t_j) + \sum_{\ell=1}^{\tau-1} \tau^\ell \left\{ \frac{dx_\ell}{dt}(t_j) + \sum_{s=1}^{\tau-\ell-1} \tau^{\frac{s-1}{(s+1)!}} \frac{d^{(s+1)}x_\ell}{dt^{s+1}}(t_j) + (8) \right.$$
$$\left. + \tau^{\tau-\ell} x_{\tau-\ell,\tau}(t_j) \right\} + \tau^\tau \frac{x_{\tau,\tau}(t_{j+1}) - x_{\tau,\tau}(t_j)}{\tau}$$
$$0 \leq j \leq M-1.$$

Подставим теперь (6) в правую часть (5) и разложим функцию f в ряд Тейлора по второму аргументу

$$f(t_j, x^\tau(t_j)) = f(t_j, x(t_j)) + \sum_{\ell=1}^{\tau-1} \left\{ \sum_{s=1}^{\tau-1} \tau^s x_s(t_j) \right\}^\ell \times$$

$$\times \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^{(\ell)} f}{\partial x^\ell}(t_j, x(t_j)) + \tau^\tau g_{\tau,\tau}(t_j) + \tau^\tau x_{\tau,\tau}(t_j) h_{\tau,\tau}(t_j) \quad (9)$$

$$0 \leq j \leq M-1.$$

Здесь $g_{\tau,\tau}(t_j)$ — остаточный член, равный

$$\frac{1}{\tau!} \left\{ \sum_{s=1}^{\tau-1} \tau^s x_s(t_j) \right\}^\tau \frac{\partial^{(\tau)} f}{\partial x^\tau}(t_j, \xi_j),$$

где ξ_j — некоторая точка, зависящая от x и x_ℓ ($\ell = 1, \dots, \tau - 1$). А $h_{\tau,\tau}(t_j)$ — сеточная функция, равная

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t_j, \xi_j),$$

где ξ_j — некоторая точка, зависящая от всех функций x , x_ℓ , $x_{\tau,\tau}$.

Для того, чтобы (8) равнялось (9) независимо от τ , необходимо выполнение ряда равенств, вытекающих из сравнения коэффициентов при различных степенях τ . Приравнивая свободные члены, получаем

$$\frac{dx}{dt}(t_j) = f(t_j, x(t_j)), \quad 0 \leq j \leq M-1.$$

Справедливость этого равенства при любом τ следует из уравнения (I).

Приравняем коэффициенты при t

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2}(t_j) + \frac{dx_1}{dt}(t_j) = x_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x(t_j))$$

$$0 \leq j \leq M-1.$$

Из этого равенства легко сделать задачу для определения $x_1(t)$:

$$\frac{dx_1}{dt}(t) - x_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2}(t), t \in T \quad (10)$$

$$x_1(0) = 0$$

Отметим, что уравнение линейно. Поэтому с учетом гладкости коэффициентов решение $x_1(t)$ задачи (10) существует, единственно, принадлежит $C^{(\infty)}(T)$ (см. [3]) и не зависит от

τ . Тем самым функция $x_1(t)$ с заданными свойствами определена и справедливо разложение (7) для $\ell = 1$.

Сравним коэффициенты при τ^2 в (8) и (9).

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{d^3 x_1}{dt^3}(t_j) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x_1}{dt^2}(t_j) + \frac{dx_1}{dt}(t_j) &= x_2(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x(t_j)) + \\ &+ x_1^2(t_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_j, x(t_j)) \end{aligned}$$

$$0 \leq j \leq M-1.$$

Так же, как и ранее, построим, исходя из этого равенства, уравнение для нахождения $x_2(t)$:

$$\frac{dx_2}{dt} - x_2(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) = \alpha(t), \quad t \in T.$$

Здесь $\alpha(t) \in C^{(2-2)}(T)$ и не зависит от τ , так как выражается через x , f и ранее определенную функцию $x_1(t)$. Вместе с начальным условием

$$x_2(0) = 0$$

задача разрешима, ее решение не зависит от τ и

$$x_2 \in C^{(2-1)}(T).$$

Продолжая сравнивать коэффициенты при последующих степенях τ , вплоть до τ^{2-1} , мы можем отыскать все функции $x_\ell(t)$ ($\ell = 1, \dots, 2 - 1$) с требуемыми свойствами.

Для того, чтобы окончательно приравнять (8) и (9), необходимо совпадение коэффициентов при степенях τ , больших $2-1$. Это требование влечет за собой выполнение разностного тождества

$$\frac{x_{2,\tau}(t_{j+1}) - x_{2,\tau}(t_j)}{\tau} = x_{2,\tau}(t_j) h_{2,\tau}(t_j) + b_{2,\tau}(t_j) \quad (II)$$

$$0 \leq j \leq M-1$$

$$x_{2,\tau}(0) = 0.$$

Здесь в $b_{2,\tau}(t_j)$ включены все слагаемые из (8) и (9), у которых степень τ больше $2-1$, не зависящие от $x_{2,\tau}(t)$. Они выражаются через $x(t)$ и $x_\ell(t)$ ($1 \leq \ell \leq 2-1$), поэтому $b_{2,\tau}(t)$ ограничена для всех

$j = 0, \dots, M-1$ и любого $\tau > 0$.

Отметим, что для устойчивости разностной задачи (IO) достаточно ограниченности $h_{\tau, \tau}(t_j)$ при всех $j = 0, \dots, M-1$. Рассмотрим подробнее эту функцию и покажем на основании априорных сведений, что можем считать ее ограниченной.

В самом деле, из гладкости $x(t)$ следует ограниченность

$$|x(t)| \leq C_2 \quad \text{при } t \in T. \quad (I2)$$

Поэтому достаточно определить $f(t, x)$ так, чтобы вновь определенная функция совпадала с исходной на множестве $T_x[-C_2, C_2]$, как решение задачи (I)-(2) не изменится. А для того, чтобы $h_{\tau, \tau}(t)$ была ограничена, необходимо $f(t, x)$ продолжить гладким образом (чтобы $f(t, x) \in C^{(2)}(T_x(-\infty, \infty))$) так, чтобы $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ была ограничена на $T_x(-\infty, \infty)$. Это достаточно просто делается, и мы не останавливаемся на этом вопросе.

Возвращаясь к задаче (IO) и используя ее устойчивость, получаем ограниченность

$$|x_{\tau, \tau}(t_j)| \leq C_3 \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где C_3 не зависит от τ (однако зависит от $x(t)$). Этим мы достигли совпадения (8) и (9), а это и означает, что определяемое тождество (6) разложение найдено и все требуемые функции определены.

Теорема доказана.

На основании этой теоремы можно сформулировать следующий метод численного решения задачи (I)-(2).

Пусть выполнены требования теоремы I. Для целых $M_1 < \dots < M_n$ построим разностные сетки ω_{τ_i} и разностные аналоги (5) для каждой сетки. Обозначим решения задач (5) через $x^{\tau_i}(i=1, \dots, n)$. В случае, если точка $\tilde{t} \in T$ является общей для всех сеток ω_{τ_i} , мы имеем n разложений, вытекающих из теоремы I:

$$x^{\tau_i}(\tilde{t}) = x(\tilde{t}) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \tau_i^\ell x_\ell(\tilde{t}) + \tau_i^n x_{\tau_i, \tau_i}(\tilde{t}) \quad (I3)$$

Если же точка \tilde{t} не является узлом какой-либо сетки, то необходимо применить интерполяцию по n соседним узлам этой сетки, и с учетом гладкости $x_\ell(t)$ и $x(t)$ мы получим раз-

ложение (I3) в этой точке.

Так как $x(t)$ и $x_\ell(t)$ не зависят от τ , то они могут быть исключены, если просуммировать соотношения (I3) с весами γ_i , определяемыми из уравнений

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \tau_i^\ell \right) = 0 \quad \ell = 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, для линейной комбинации

$$\bar{x}(\tilde{t}) = x(\tilde{t}) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \tau_i^2 x_{\tau_i}(\tilde{t}) \quad (I4)$$

мы имеем

$$\bar{x}(\tilde{t}) = x(\tilde{t}) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \tau_i^2 x_{\tau_i}(\tilde{t}).$$

Поэтому справедлива

Теорема 2. При выполнении требований теоремы I линейная комбинация $\bar{x}(\tilde{t})$ сходится к точному решению $x(\tilde{t})$ в любой точке \tilde{t} при стремлении $\tau_i \rightarrow 0$ и имеет место оценка

$$|\bar{x}(\tilde{t}) - x(\tilde{t})| \leq C_1 \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \tau_i^2,$$

где C_1 — константа из условия теоремы I, не зависящая от τ_i и γ_i .

Теперь рассмотрим вопрос о построении фазовых кривых в двумерной плоскости. Пусть на отрезке $T = [0, T_0]$ задана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t)) \quad t \in T \quad (I5)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x(t), y(t)) \quad \text{с начальным условием}$$

$$(I6) \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

Потребуем от данных задачи (I5)-(I6), чтобы

$$f, g \in C^{(2)}(T \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)) \quad x, y \in C^{(n+1)}(T), \quad (I7)$$

и на разностной сетке (4) построим явную схему - аналог задачи (15)-(16):

$$\frac{x^\tau(t_{j+1}) - x^\tau(t_j)}{\tau} = f(t_j, x^\tau(t_j), y^\tau(t_j)) \quad (18)$$
$$\frac{y^\tau(t_{j+1}) - y^\tau(t_j)}{\tau} = g(t_j, x^\tau(t_j), y^\tau(t_j))$$
$$0 \leq j \leq M-1$$
$$x^\tau(0) = x_0, \quad y^\tau(0) = y_0.$$

Дальнейшее рассмотрение отличается от одномерного случая лишь тем, что вместо одной функции везде рассматривается вектор с двумя компонентами-функциями. Поэтому для задачи (15)-(16) остается справедлив метод, изложенный выше для предыдущей задачи.

Предлагаемая методика может быть широко использована в машинной графике для расчета линий тока векторных полей и изолиний скалярного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. "Наука", М., 1971.
2. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Изд. "Мир", М., 1969.
3. Картан А. Дифференциальное исчисление, дифференциальные формы. Изд. "Мир", М., 1971.
4. Понtryгин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. "Наука", М., 1965.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть нам известны значения некоторой непрерывной функции $f(x)$ в N точках x_1, x_2, \dots, x_n n -мерного пространства

$$f(x_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Требуется найти $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначим расстояния между точками x_i и x_j через γ_{ij} , т.е.

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\sum_{\ell=1}^n (x_i^\ell - x_j^\ell)^2}, \quad (1)$$

где $x_i^\ell, x_j^\ell, (\ell = 1, 2, \dots, n)$ - координаты точек x_i, x_j соответственно.

Допустим, что $f(x_0)$ можно представить в виде линейной комбинации величин

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^N p_i f(x_i), \quad (2)$$

причем веса p_i в формуле (2) нормированы

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (3)$$

Предположим, что веса p_i , входящие в формулу (2), обратно пропорциональны расстояниям γ_{0i} , т.е.

$$p_i = D / \gamma_{0i}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad D = \text{const} \quad (4)$$

Тогда из условия нормировки (3) получаем:

$$D = \frac{\prod_{i=1}^N \gamma_{0i}}{\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{0j}}. \quad (5)$$

Учитывая (4), (5), из выражения (2) получим окончательную интерполяционную формулу вида

$$f(x_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{0j}} \sum_{k=1}^N \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \gamma_{0i} f(x_k). \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что, если $\gamma_{0i}=0$, то $f(x_0)=f(x_i)$. Надо заметить, что интерполяционная формула (6) проста и экономична по сравнению с известными интерполяционными методами на многомерном пространстве.

Как известно, учет взаимного расположения точек при интерполяции является существенным. Естественно предположить, что вес точек, расположенных близко друг к другу, при равных условиях, должен быть меньше, чем вес изолированно расположенных точек. Очевидно, что интерполяционная формула (6) этим свойством не обладает. Поэтому в дальнейшем будет идти речь о построении интерполяционной формулы, веса которой учитывают взаимное расположение точек x_0, x_1, \dots, x_N .

Искомую интерполяционную формулу представим в виде

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^N D P_i f(x_i), \quad (7)$$

где D выбирается из условия

$$\sum_{i=1}^N D P_i = 1. \quad (8)$$

P_1, P_2, \dots, P_N являются решением следующей системы:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \gamma_{ij} P_j = \gamma_{0i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (9)$$

В частных случаях, когда $N=2, 3$, веса формулы (7) имеют вид:

при $N=2$

$$D P_1 = \frac{\gamma_{02}}{\gamma_{02} + \gamma_{01}}, \quad D P_2 = \frac{\gamma_{01}}{\gamma_{02} + \gamma_{01}}; \quad (10)$$

при $N = 3$

$$P_1 = (\gamma_{03} \gamma_{12} + \gamma_{31} \gamma_{02} - \gamma_{23} \gamma_{01}) \gamma_{23} / 2 \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{13},$$

$$\gamma_2 = (\gamma_{23} \gamma_{10} + \gamma_{21} \gamma_{03} - \gamma_{13} \gamma_{02}) \gamma_{13} / 2 \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{13},$$

$$P_3 = (\gamma_{23} \gamma_{10} + \gamma_{31} \gamma_{02} - \gamma_{21} \gamma_{03}) \gamma_{15} / 2 \gamma_{12} \gamma_{23} \gamma_{13}, \quad (II)$$

$$D = 1 / (P_1 + P_2 + P_3).$$

Как уже говорилось, если некоторые точки расположены близко одна к другой, то вес этих точек должен быть меньше, чем вес точки, расположенной изолированно на том же расстоянии от точки x_0 . Можно показать, что при интерполяции по формуле (7) указанное обстоятельство учитывается автоматически.

В самом деле, рассмотрим N групп точек T_1, T_2, \dots, T_N . Пусть каждая группа T_i состоит из s_i точек. Тогда общее количество имеющихся точек во всех группах:

$$S = \sum_{i=1}^N s_i.$$

В этом случае система уравнений (9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s_1} \gamma_{ij} P_j + \sum_{j=s_1+1}^s \gamma_{ij} P_j &= \gamma_{0i}, \quad (i=1, \dots, s_1), \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s_1+s_2} \gamma_{ij} P_j + \sum_{\substack{j=s_1+1 \\ j \neq i}}^{s_1+s_2} \gamma_{ij} P_j + \sum_{j=s_1+s_2+1}^s \gamma_{ij} P_j &= \gamma_{0i}, \quad (i=s_1+1, \dots, s_1+s_2), \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s-s_N} \gamma_{ij} P_j + \sum_{\substack{j=s-s_N+1 \\ j \neq i}}^s \gamma_{ij} P_j &= \gamma_{0i}, \quad (i=s-s_N+1, \dots, s), \end{aligned} \quad (I2)$$

т.е. получим N групп систем уравнений. Пусть точки каждой группы T_i стремятся к некоторой точке O_i . Обозначим расстояние между точками O_i, O_j через $R(O_i O_j)$, а между O_i и интерполируемой точкой через $R(O_i O)$. Очевидно,

видно, что при стремлении точек группы T_1, T_2, \dots, T_N к точкам O_1, O_2, \dots, O_N соответственно выражения

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{S_1} \gamma_{ij} \rho_j, \quad (i = 1, \dots, S_1),$$

$$\sum_{\substack{j=S_1+1 \\ j \neq i}}^{S_1+S_2} \gamma_{ij} \rho_j, \quad (i = S_1 + 1, \dots, S_1 + S_2),$$

$$\sum_{\substack{j=S-S_N+1 \\ j \neq i}}^S \gamma_{ij} \rho_j, \quad (i = S - S_N + 1, \dots, S)$$

стремятся к нулю. Поэтому, отбрасывая малые члены и учитывая стремление расстояний между группами T_i и T_j к $R(O_i, O_j)$, получим следующую систему:

$$\sum_{j=1}^N R(O_i, O_j) q_j = R(O_i, O), \quad (i = 1, \dots, N), \quad (13)$$

где q_j — сумма весов точек, входящих в группу T_j .

Тем самым мы пришли к системе N -ого порядка с неизвестными q_j . Система (13) имеет такой же вид, как и система (9). При стремлении точек группы T_j к точке O_j сумма весов точек, входящих в группу T_j , стремится к весу q_j точки O_j , вычисленному из системы (13). Следовательно, если точки группы T_1, T_2, \dots, T_N стремятся к O_1, O_2, \dots, O_N соответственно, то автоматически получаем

интерполяцию по N точкам. Отсюда следует, что веса точек, расположенных близко друг к другу, при равных условиях, будут меньше, чем веса точек, расположенных изолированно.

В заключение автор благодарит ВАСИЛЕНКО В.А. за помощь, оказанную в выполнении данной работы.

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Предисловие	3
2. Куртуков А.Я. Система математического обеспечения для задач с графическим выводом	4
3. Куртуков А.Я., Горин С.В., Дворжец В.И., Дебелов В.А. Система для БЭСМ-6	18
4. Дворжец В.И., Куртуков А.Я. Система для М-220 . . .	23
5. Вишневский Е.В., Володюков А.М., Лукинцов А.В. Стан- дартная программа для вывода графической ин- формации на плоттер.	26
6. Васильева Л.Ф., Томилин А.Н. Математическое обеспе- чение для подключения графопостроителя к операционной системе БЭСМ-6	31
7. Васильева Л.Ф. Программа связи системы "ЭКРАН" с операционной системой БЭСМ-6	40
8. Дворжец В.И. Комплект процедур вывода графиков . . .	45
9. Дворжец В.И. Процедуры вычерчивания изолиний	54
10. Дебелов В.А. Процедуры изображений поверхностей . .	66
11. Горин С.В. Процедуры вывода векторных полей	76
12. Горин С.В. Процедуры вывода линий тока	86
13. Василенко В.А., Переломов Е.М. Сплайн-интерполяция прямоугольной области с хаотически расположеными узлами	96
14. Василенко В.А. Обработка содержащей ошибки информа- ции методом сплайн-сглаживания	104
15. Шайдуров В.В. О построении кривых	III
16. Бабалиев А.М. Об одном методе интерполирования функций многих независимых переменных	118

Ответственный редактор Ю.А.Кузнецов
Технический редактор Л.А.Карева

МН 08613 . Подписано к печати 17.1.1973 . Формат бумаги 60 x 92 I/16. п.л. 7,6 , уч.изд. л. 5, 6 .
Тираж 600 экз. Заказ № 296 . Цена - 40 коп.
