



FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP FYSICA EN STERRENKUNDE

Academiejaar 2014–2015

IMPULSDISTRIBUTIES VOOR ATOMAIRE KERNEN

Jarrick Nys

Promotor: Prof. dr. J. Ryckebusch
Begeleider: Camille Colle

Scriptie voorgedragen tot het behalen van de graad van
MASTER IN DE FYSICA EN STERRENKUNDE

Dankwoord

Professor Ryckebusch,
bedankt voor de leerrijke ervaring en de verrijkende inzichten.

Camille,
bedankt om mijn vragen steeds met volle overgave te beantwoorden.

Bedankt aan de medestudenten, steeds aanwezig op het INW, voor de gezellige middagen. In het bijzonder Jarne, Ianthe, Jeroen en Mathieu.

Bedankt aan Jannes en Tom voor de leuke gesprekken en Sam om soms eens aanwezig te zijn.

Miquel,
bedankt om steeds te tonen hoe het niet moet.

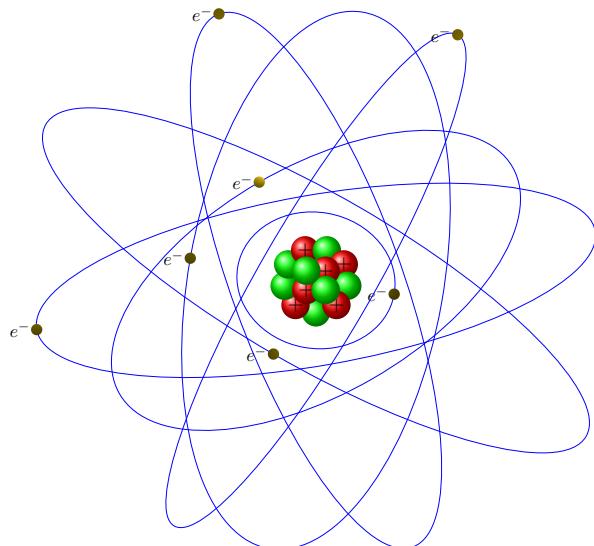
Inhoudsopgave

1 Inleiding	1
2 Het onafhankelijke-deeltjes model	5
2.1 Verantwoording	5
2.2 Golffunctie in een sferische harmonische oscillator potentiaal	7
3 Eéndeeltjes impulsdistributie	11
3.1 Algemene kenmerken	11
3.2 Resultaten	14
4 Tweedeeltjes impulsdistributie	23
4.1 Algemene kenmerken	23
4.2 Het onafhankelijke-deeltjes model	25
4.3 Resultaten	27
5 Wignerdistributie	39
5.1 Algemene kenmerken	39
5.2 Resultaten	42
6 Conclusie en vooruitzichten	47
6.1 Conclusie	47
6.2 Vooruitzichten	48
A Tweede kwantisatie	49
A.1 conventies	49
A.2 Eéndeeltjes impulsoperator	51

B Moshinsky-brakets	53
B.1 Recursieve berekening	53
B.2 Eigenschappen	55
C Antisymmetrische toestand in relatieve en massacentrumcoördinaten	57
D Wignerdistributie in sferische coördinaten	59
E Overzicht code	63
F Lijst van afkortingen	67

HOOFDSTUK 1

Inleiding



Het atoom, tot begin 19e eeuw bekend als de kleinste bouwsteen van het universum, werd later door Ernest Rutherford [15] ontwaard als zijnde een kern met rondom een wolk van elektronen, negatieve elementaire deeltjes. Elementair in de zin dat ze, voor zover we weten, niet uit kleinere deeltjes bestaan en dus als puntdeeltjes worden beschouwd. Rutherford concludeerde uit zijn verstrooiingsexperimenten dat deze kern ruwweg 10^4 keer kleiner is dan het atoom. Daar de elektronen puntdeeltjes zijn, kan gezegd worden dat het atoom dus vooral leeg is. De kern van een atoom werd ontleed als een zelf-gebonden systeem van fermionen, deeltjes met halftallige spin, waarbij we een onderscheid kunnen maken tussen ongeladen neutronen en positief geladen protonen. Het zijn de protonen die voor de elektromagnetische binding van de elektronen, ook fermionen, zorgen. In tegenstelling tot elektronen zijn protonen en neutronen, die onder de gezamenlijke term

van nucleonen vallen, geen elementaire deeltjes, maar uit quarks samengestelde systemen. Deze laatste zijn gekend als elementaire deeltjes die met elkaar interageren via de sterke wisselwerking, één van de vier fundamentele wisselwerkingen van de natuur. In deze thesis beschouwen we de kern samengesteld uit nucleonen en abstraheren we de onderliggende dynamiek van de quarks. Deze abstractie is mogelijk zolang we werken op energieschalen karakteristiek voor een kern, namelijk kleiner dan 1 GeV. Gaan we naar hogere energieën dan wordt de structuur van de nucleonen belangrijk. Daar de fundamentele interacties werken tussen elementaire puntdeeltjes, is het niet duidelijk hoe de wisselwerking tussen nucleonen, de nucleon-nucleon (NN) interactie genaamd, er uitziet. Teneinde dit probleem te benaderen, wordt gebruik gemaakt van effectieve interacties tussen nucleonen. Op basis van een aantal fysische restricties kan een algemene effectieve potentiaal worden opgesteld waarvan de vrijheidsgraden vastgelegd worden door NN verstrooiingsexperimenten. In het algemeen zijn deze interacties vrij complex en nog niet helemaal begrepen. Een kwantummechanisch probleem met veel deeltjes die interageren via een complexe wisselwerking is onmogelijk exact op te lossen en ook met bepaalde benaderingen is dit nog steeds niet evident. In het eenvoudigste model kan een kern benaderd worden door een Fermi-gas van nucleonen [14]. In dit model beschouwen we de kern als een niet-interagerend kwantumgas in een volume dat overeenkomt met het volume van een kern. Voor een schatting van de straal R van een kern kan men gebruik maken van de fenomenologische formule $R = 1.2A^{1/3}$ fm, waarbij A het aantal nucleonen in de kern voorstelt [14]. De relevante afstandsschaal is dus van de orde 1 fm voor de lichtste kernen en 10 fm voor de zwaarste. Gebruik makende van het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ toont dat de relevante schaal van de impuls in een kern van de orde 10 tot 100 MeV/c is en de bijhorende temperatuur 10^8 K tot 10^{10} K. Daar de omgevingstemperatuur op aarde rond 300 K ligt, kunnen we aannemen dat de nucleonen de A laagste toestanden bezetten. Het hoogst gevulde energieniveau heet dan het Fermi-niveau en de geassocieerde impuls met deze toestand is de Fermi-impuls. Dit eenvoudige model leent zich ertoe een schatting te maken van enkele grootheden. Zo wordt de dichtheid van de kern en de relatie met de Fermi-impuls:

$$\rho = \frac{A}{V} = 0.14 \text{ fm}^{-3} = \frac{2}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3. \quad (1.1)$$

Dit geeft dan een Fermi-impuls $p_F \approx 250$ MeV/c waaruit een gemiddelde kinetische energie $\langle T \rangle = 21$ MeV volgt. Dit eenvoudig model is slechts goed voor een schatting van grootheden want het houdt geen rekening met de specifieke eigenschappen van het systeem. Zo is de gemiddelde kinetische energie bijvoorbeeld dezelfde voor alle kernen. In de late jaren 1940 introduceerden Maria Goeppert Mayer en J. Hans D. Jensen onafhankelijk van elkaar de schillenstructuur in kernen [11, 7]. Deze structuur was onder meer succesvol in het verklaren van de zogenaamde magische getallen, zijnde bepaalde aantallen van neutronen en protonen waarbij de kern een verhoogde stabilitet heeft. Het eenvoudigste model dat deze schillenstructuur reproduceert, is het onafhankelijke-deeltjes model (ODM). Hierbij wordt aangenomen dat nucleonen bewegen in individuele orbitalen als gevolg van een potentiaal die de gemiddelde interactie in de kern voorstelt. Correlaties tussen de nucleonen worden hier dus verwaarloosd. Nu kunnen we ons de vraag stellen of nucleonen in een globale potentiaal überhaupt een goede benadering is voor een kern. In tegenstelling tot

het systeem van elektronen in het atoom, dat goed beschreven wordt in een ODM met externe potentiaal afkomstig van de kern, is er in het systeem van nucleonen geen externe materie die een potentiaal genereert. De externe potentiaal inwerkend op een nucleon zou dus het gevolg zijn van interacties met andere nucleonen, het systeem is zelf-gebonden. Dat het netto effect van alle interacties bij benadering beschreven kan worden met een extern veld is niet evident. De verantwoording voor het gebruik van dit model vindt men in paragraaf 2.1. Het doel van deze thesis is kennis te verwerven over de eigenschappen van een kern en in het bijzonder over de impulsdistributies van nucleonen, die beschrijven hoe de impuls van de nucleonen in de kern is verdeeld. Ze laten ook toe de verwachtingswaarden te berekenen van operatoren die een functie zijn van de impuls. Zo bepalen we de gemiddelde kinetische energie van de neutronen en protonen aan de hand van de één-deeltjes impulsdistributie. Impulsdistributies kunnen gebruikt worden als input bij experimenten waarbij detectie gebeurt via interactie van een deeltje met een kern waarbij een boson, deeltje met heeltallige spin, wordt uitgewisseld. Hoe hoger de impuls van het uitgewisselde deeltje, hoe meer structuur van de kern dit deeltje kan zien. Bij lage inkomende impuls (van de orde 100 MeV en lager) wordt een deeltje aan de volledige kern verstrooid en zijn er weinig effecten van de interne structuur van de kern. Bij hogere inkomende impuls (orde 0.2 GeV en meer) gebeurt verstrooiing echter aan enkelvoudige nucleonen, die een zekere impuls bezitten. Het is duidelijk dat bij detectie van deeltjes met voldoende hoge impuls de impulsdistributies van de nucleonen in kernen in de detectoren moeten gekend zijn om bijvoorbeeld werkzame doorsneden te berekenen. Het Long-Baseline Neutrino Experiment (LBNE [1]) maakt gebruik van vloeibare-argon detectoren om eigenschappen van neutrino's met hoge precisie te meten. Een optimale detectie vereist een goede kennis van de neutrino-argon werkzame doorsnede. Daar Ankowski *et al.*[2] melden dat er weinig theoretische studies zijn van de impulsdistributies voor $^{40}_{18}\text{Ar}$, onderzoeken we ook deze kern. In deze thesis bestuderen we ook tweedeeltjes impulsdistributies in functie van de relatieve impuls van twee nucleonen, de impuls van hun massacentrum en de hoek tussen deze twee impulsen. Ten slotte worden de Wigner-distributies [20] gerelateerd aan de één-deeltjes impulsdistributies uitgebreid. Deze geven een beeld van de faseruimte in een kwantumsysteem. Via de Weyl-transformatie (cfr. hoofdstuk 5) kunnen operatoren omgezet worden naar functies van positie en impuls, zoals observabelen in de klassieke, niet-kwantum fysica. Met de Wigner-distributie kan de verwachtingswaarde van deze operator berekend worden op dezelfde manier als dit in de klassieke fysica gebeurt, met andere woorden het Wigner-Weyl formalisme laat toe de mathematische methoden uit de klassieke fysica te gebruiken die vaak eenvoudiger zijn dan het kwantummechanische analogon.

HOOFDSTUK 2

Het onafhankelijke-deeltjes model

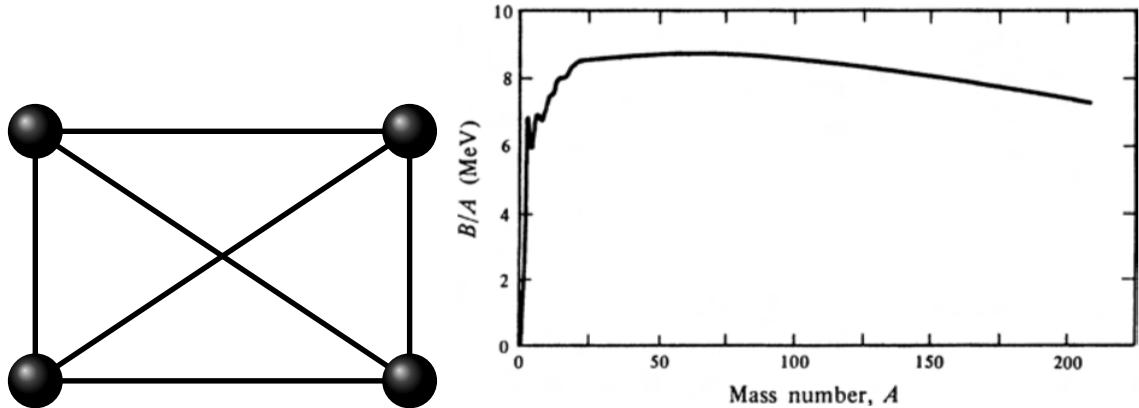
2.1 Verantwoording

Dat een ODM een goede benadering is voor een atomaire kern is niet evident. De nucleonen in de kern interageren namelijk met elkaar via de NN kracht die afstotend is op korte afstand en attractief op lange afstand. Naïef zou men dus verwachten dat een systeem van nucleonen zich gedraagt als een vloeistof van harde sferen die tegen elkaar stuiteren en een zwakke interactie op middellange afstand ondervinden. Omdat een kern echter uit fermionen bestaat geldt het uitsluitingsprincipe van Pauli dat zegt dat twee identieke fermionen niet dezelfde toestand kunnen bezetten. Hierdoor wordt het botsen van nucleonen onderdrukt, er zijn namelijk geen vrije orbitalen bij lage energie beschikbaar waar de nucleonen na interactie in terecht kunnen komen, met uitzondering van de nucleonen in de hoogst bezette toestanden die naar een leeg orbitaal kunnen verstrooien. Ter illustratie van een model waarbij botsingen verwaarloosd worden beschouwen we eerst een NN potentiaal van de vorm

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (2.1)$$

Hierbij is V_0 de centrale diepte van de potentiaalput en de functie f is van korte dracht en continu. De korte dracht volgt uit de vaststelling dat een nucleon niet interageert met alle andere nucleonen in de kern, een fenomeen gekend als de saturatie van de NN interactie die we illustreren in Figuur 2.1. Een fysische interactie is alleen afhankelijk van de relatieve vector tussen twee interagerende deeltjes, want een afhankelijkheid van het massacentrum zou translatie-invariantie schenden. Men kan nu een schatting maken van de centrale potentiaal gevoeld door nucleon 1 door uit te middelen over alle nucleonen interagerend met dit nucleon, gekend als een gemiddeld-veld benadering (GV):

$$V(\vec{r}_1) = V_0 \int d\vec{r}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2). \quad (2.2)$$



Figuur 2.1: Links: Beschouwen een kern met vier nucleonen, $A = 4$. Als elk nucleon met alle andere nucleonen in de kern interageert dan zijn er $4(4 - 1)/2$ interacties en is de bindingsenergie (B) proportioneel met $A(A - 1)$. Voor zware kernen zou dan bij benadering gelden dat $B \propto A^2$. Rechts: Bindingsenergie per nucleon (B/A) als functie van A [8]. Het is duidelijk dat een nucleon slechts interageert met een beperkt aantal andere nucleonen in de kern, m.a.w het aantal interacties per nucleon satureert. Vooral bij zwaardere kernen valt dit op.

Als de dracht van f kort genoeg is kan $\rho(\vec{r}_2)$ benaderd worden door $\rho(\vec{r}_1)$. $V(\vec{r}_1)$ wordt dan

$$V(\vec{r}_1) = C V_0 \rho(\vec{r}_1), \quad (2.3)$$

met $C = \int d\vec{r}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. In een ODM is de potentiaal gevoeld door een nucleon in de kern dus evenredig met de dichtheidsdistributie van de kern. Uit [14] weten we dat een Fermi-functie een goede benadering is voor de dichtheidsdistributie van een kern:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - c)/a)}. \quad (2.4)$$

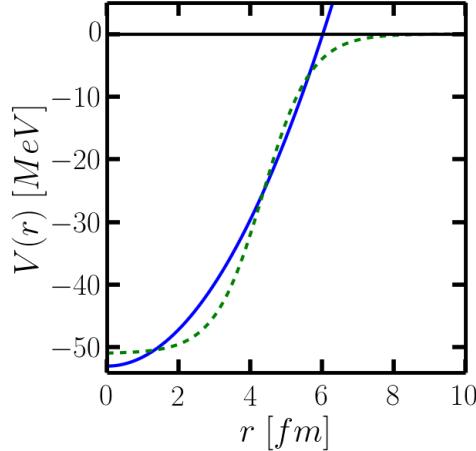
Hierbij is c de straal waarbij de distributie de helft is van zijn maximale waarde en a de spreiding van het interval waarover de distributie afneemt. Daar deze distributie geen hoekafhankelijkheden bevat, impliceert dit sferische symmetrie. Deze aanname wordt ondersteund door de vaststelling dat de quadrupoolmomenten en hogere orde momenten klein zijn voor atomaire kernen in de buurt van de magische getallen [10]. Uit deze dichtheidsdistributie volgt dan de Woods-Saxon (WS) potentiaal [14]:

$$V(r) = \frac{V_{WS}}{1 + \exp((r - c)/a)}. \quad (2.5)$$

De Schrödingervergelijking voor dergelijke potentiaal heeft geen analytische oplossing tenzij we deze potentiaal benaderen met een sferische harmonische oscillator (HO) potentiaal

$$V_{HO}(r) = \frac{1}{2} M_N (\omega r)^2 - V_0, \quad (2.6)$$

waarbij M_N de nucleonmassa voorstelt en V_0 een parameter die we zodanig kiezen dat een goede benadering van de WS potentiaal wordt bekomen. Echter, bij het oplossen van de Schrödingervergelijking



Figuur 2.2: Vergelijking van verschillende GV-potentiaLEN voor argon ($A = 40$). De gestreepte groene curve stelt een WS potentiaAL voor, gegeven door uitdrukking (2.5), met $V_{WS} = -51$ MeV, $c = 1.2$ fm en $a = 0.67$ fm . De volle blauwe curve is een HO potentiaAL, gegeven door uitdrukking (2.6), waarbij ω gegeven door (2.7) met $A = 40$ en $V_0 = 53$ MeV.

stellen we deze laatste constante gelijk aan nul voor eenvoudigheid, het is slechts een verschuiving van de energieschaal. Een goede parametrisatie van $\hbar\omega$ [18] wordt gegeven door

$$\hbar\omega(\text{MeV}) = \frac{45}{A^{1/3}} - \frac{25}{A^{2/3}}, \quad (2.7)$$

waarbij A het aantal nucleonen is in de kern. Figuur 2.2 laat zien dat dit een relatief goede benadering is. Daar het gemiddeld veld interagerend met een nucleon wordt bepaald door de $A - 1$ andere nucleonen moet de breedte van de externe potentiaAL afhankelijk zijn van A . Daar de straal van ker- nen vergroot met aantal nucleonen verwacht men dat de oscillator potentiaAL steeds breder wordt als A groter wordt. Dat deze potentiaAL naar oneindig gaat voor een steeds groter wordende straal is niet fysisch want nucleonen worden verondersteld de kern te kunnen verlaten als ze voldoende energie hebben. Daar we alleen de grondtoestand van ker- nen beschouwen speelt deze niet-fysische factor hier geen rol.

2.2 Golffunctie in een sferische harmonische oscillator potentiaAL

Uit al het bovenstaande is het duidelijk de we een kern kunnen benaderen als nucleonen die onaf- hankelijk van elkaar bewegen in een sferische HO potentiaAL die het gemiddeld veld gevoeld door een nucleon als gevolg van alle andere nucleonen voorstelt. De A -deeltjes Hamiltoniaan

$$\hat{H} = \sum_i^A \hat{T}_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}}^A \hat{V}_{ij} + \sum_{\substack{ijk \\ i \neq k \neq j}}^A \hat{W}_{ijk} + \dots, \quad (2.8)$$

waarbij \hat{V}_{ij} , \hat{W}_{ijk} respectievelijk tweedeeltjes en driedeeltjes interacties zijn en \hat{T}_i de kinetische energie operator is, vereenvoudigt zich dan tot

$$\hat{H} = \sum_i^A \left(\hat{T}_i + \hat{V}^{HO} \right). \quad (2.9)$$

De nieuwe Hamiltionaan is een som van ééndeeltjes Hamiltonianen die een interactie met een extern veld bevatten voorgesteld door \hat{V}^{HO} . Een GV benadering zorgt dus voor een reductie tot een probleem van één deeltje:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M_N} \nabla^2 + \frac{1}{2} M_N \omega^2 r^2 \right) \psi_{nlm}(\vec{r}) = E_{nl} \psi_{nlm}(\vec{r}). \quad (2.10)$$

De kern-afhankelijke ω wordt vastgelegd door (2.7). Eigenfuncties hebben een radiëel kwantumgetal n en een impulsmoment l met projectie m . Oplossingen van bovenstaande differentiaalvergelijking kunnen als gevolg van de sferische symmetrie van de HO potentiaal worden opgesplitst in een radiëel en een hoekafhankelijk deel:

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | nlm \rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Omega), \quad (2.11)$$

waar $Y_{lm}(\Omega)$ de sferische harmonieken voorstellen. Het radiële deel van de golffunctie in functie van de gegeneraliseerde Laguerre-polynomen $L_n^\alpha(r)$ wordt gegeven door

$$R_{nl}(r) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \nu^{l+\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} r^l e^{-\frac{\nu r^2}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\nu r^2), \quad (2.12)$$

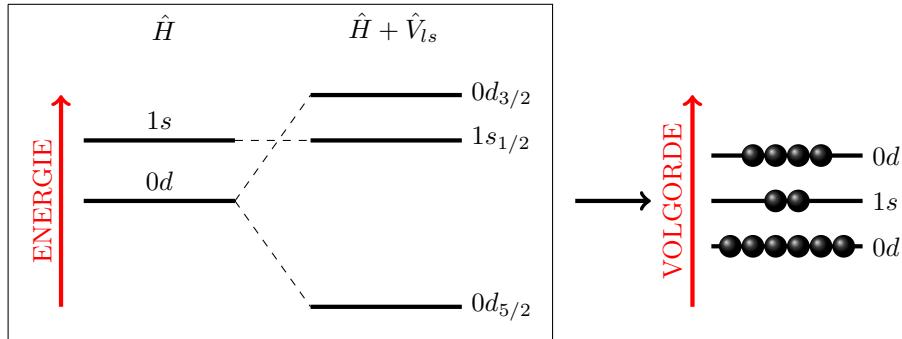
waarbij

$$\nu \equiv \frac{M_N \omega}{\hbar}. \quad (2.13)$$

De energie eigenwaarden zijn onafhankelijk van kwantumgetal m als gevolg van de sferische symmetrie:

$$E_{nl} = \hbar \omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right). \quad (2.14)$$

Een handige notatie wijst letters toe aan de verschillende l -waarden. Zo wordt de toestand met $n = 0$ en $l = 1$ geschreven als $0p$. De l -waarden $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ worden respectievelijk genoteerd als s, p, d, f, g, h . Uit formule (2.14) blijkt de HO potentiaal een ontaarding te hebben die dus bijgevolg een vrijheid laat bij het opvullen van de orbitalen. Een realistischer potentiaal, zoals een Woods-Saxon potentiaal, heeft deze vrijheid niet en elk niveau nl heeft een verschillende energie. Om dit probleem te illustreren kijken we naar de $1s$ en $0d$ toestanden in een HO. De energie gegeven door vergelijking (2.14) is voor beide toestanden dezelfde, namelijk $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ en het is dus onduidelijk welke toestand er eerst bezet wordt. Om deze ontaarding te vermijden gebruiken we de opvulling van een Woods-Saxon potentiaal. Hoe gebeurt de opvulling dan? Figuur 2.5 geeft aan dat toestanden van de harmonische oscillator met een hoog impulsmoment l zich met grotere waarschijnlijkheid verder van het centrum van de kern begeven dan toestanden met kleinere l . De

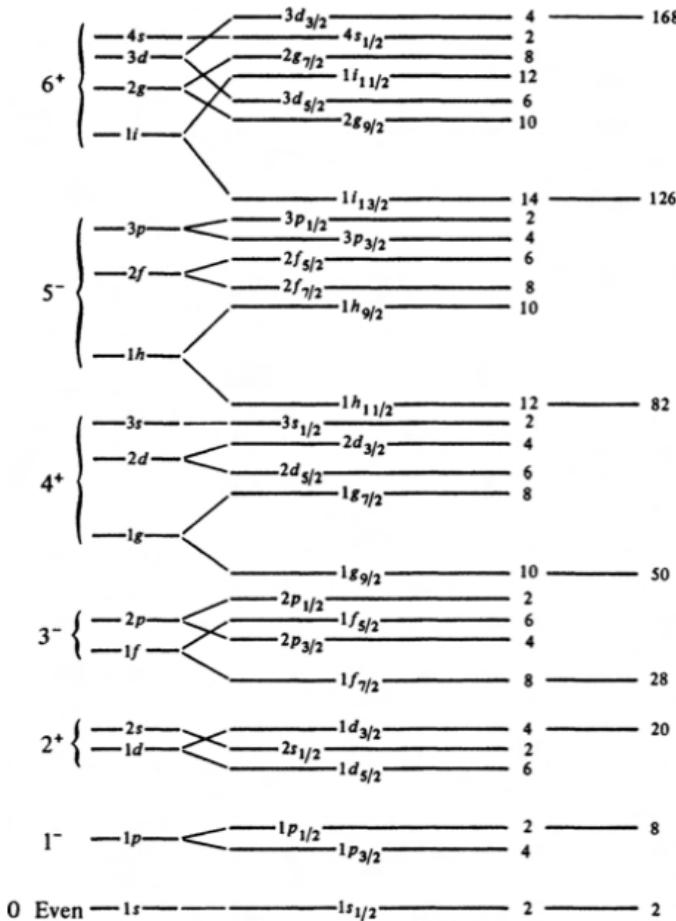


Figuur 2.3: Links: invloed van een spin-baan interactie op de eigentoestanden $1s$ en $0d$ van de Hamiltoniaan met een Woods-Saxon potentiaal. Rechts: volgorde waarin we toestanden bezetten in de harmonische oscillator potentiaal.

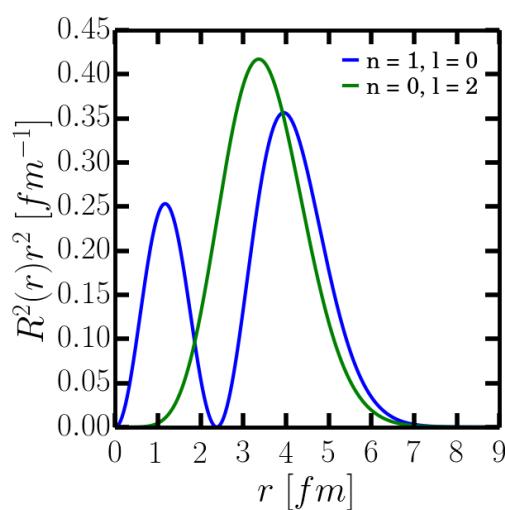
WS potentiaal is dieper dan de HO potentiaal op grote afstand van het centrum en minder diep op kleine afstand (Figuur 2.2). Dus toestanden met grote l voelen een diepere potentiaal en schuiven dus naar lagere energieën. Zoals reeds vermeld in de inleiding is de verklaring van de magische getallen één van de grootste successen van het schillenmodel. Een ODM zoals hierboven is opgesteld kan deze magische getallen echter nog niet verklaren. Een spin-baan potentiaal, een gemiddeld veld afkomstig van de individuele spin-baan interacties in de NN potentiaal, gegeven door

$$V_{ls} = C_{ls} \vec{l} \cdot \vec{\sigma} = \frac{C_{ls}}{2} \left(j^2 - l^2 - \sigma^2 \right), \quad (2.15)$$

zorgt voor gedeeltelijke opheffing van de ontaarding van de energieniveaus. Energietoestanden worden dan afhankelijk van het totaal impulsmoment, $\vec{j} = \vec{l} + \vec{\sigma}$ waarbij \vec{l} , $\vec{\sigma}$ respectievelijk het orbitaal en spin impulsmoment zijn. Daar de kern alleen fermionen bevat is $|\vec{\sigma}| = \frac{1}{2}$. Spin-baan koppeling zorgt dan voor een verschuiving in energie waarbij toestanden met $j = l + 1/2$ een lagere energie krijgen tegenover de toestand zonder spin-baan koppeling en toestanden met $j = |l - 1/2|$ steeds een hogere energie (Figuur 2.3). Deze extra term in de Hamiltoniaan zorgt er echter voor dat de oplossingen van de Schrödinger vergelijking geen analytische uitdrukking meer hebben. Om deze spin-baan koppeling enigszins te verwerken in ons model gebeurt de opvulling van de toestanden in de volgorde vastgelegd door een model die deze wel bevat. Omdat toestanden nog steeds een goed gedefinieerd kwantumgetal l hebben kunnen we de opvulling gebruiken van een Woods-Saxon potentiaal met spin-baan koppeling waarbij het kwantumgetal j slechts wordt gebruikt als een label van de toestanden. Dan gebeurt de opvulling zoals in Figuur 2.3. Het zijn echter de golffuncties van de harmonische oscillator (2.11) die gebruikt worden. We kunnen dus concluderen dat door de spin-baan koppeling het aantal nucleonen in de hoogst gevulde orbitalen zal wijzigen en er soms orbitalen worden bezet die zonder spin-baan niet bezet zouden zijn. Een volledig schema van de opvulling in een WS potentiaal wordt getoond in Figuur 2.4.



Figuur 2.4: Energieschema van individuele orbitalen in een Woods-Saxon potentiaal uit [8].



Figuur 2.5: De probabiliteitsdistributie $R^2(r)r^2$ voor twee ontaarde toestanden in de harmonische oscillator ($E = \frac{7}{2}\hbar\omega$). De beschouwde kern is argon ($A = 40$).

HOOFDSTUK 3

Eéndeeltjes impulsdistributie

3.1 Algemene kenmerken

Nucleonen opsluiten in een kleine ruimte - klein in de zin dat het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$) merkbaar is - zorgt ervoor dat deze nucleonen een zekere kinetische energie krijgen, die dus geassocieerd is met de lokalisatie van de nucleonen. We verwachten dus dat een nucleon een zekere impuls bezit die verdeeld is volgens een bepaalde impulsdistributie. Impulsdistributies spelen een belangrijke rol in verstrooingsexperimenten aan kernen als de uitgewisselde impuls voldoende hoog is. Daar de dimensies van een nucleon van de orde ≈ 0.8 fm zijn, verstrooit het inkomend deeltje aan een enkel nucleon in de kern als de uitgewisselde impuls van 0.2 GeV of hoger. Dit fenomeen heet quasi-elastische verstrooiing. Via quasi-elastische verstrooingsexperimenten waarbij het verstrooide nucleonen de kern verlaat kan men de initiële impuls bepalen van het verstrooide nucleon via behoud van energie en impuls, dus ook de ééndeeltjes impulsdistributie [9]. In deze thesis berekenen we de impulsverdelingen van nucleonen op basis van een ODM. Algemeen wordt de kans om een deeltje te vinden met een momentum in het interval $[k, k + dk]$ gegeven door $n^{[1]}(k)k^2dk$ met

$$n^{[1]}(k) = \int d\Omega_k n^{[1]}(\vec{k}), \quad (3.1)$$

waarbij

$$n^{[1]}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}'_1)} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \quad (3.2)$$

de ééndeeltjes impulsdistributie voorstelt. Hierbij is

$$\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) = \int \{d\vec{r}_{2-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}'_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A). \quad (3.3)$$

de ééndeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix (ENDM) en $\Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A)$ stelt de grondtoestand van een nucleus met A nucleonen voor. We maakten gebruik van de volgende notatie:

$$\{\{d\vec{r}_{i-A}\}\} = d\vec{r}_i d\vec{r}_{i+1} \dots d\vec{r}_A. \quad (3.4)$$

Als $\langle \Psi_A | \Psi_A \rangle = 1$, heeft men dat

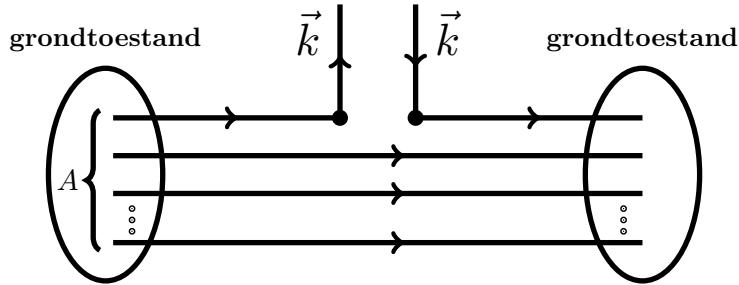
$$\int d\vec{k} n_1(\vec{k}) = 1. \quad (3.5)$$

Dit is niets anders dan de totale kans om A nucleonen te vinden in de kern. Het diagonalelement $\rho_1(\vec{r}, \vec{r}) \equiv \rho(\vec{r})$ is dan de dichtheid van de nucleonen op positie \vec{r} .

In het tweedekwantisatie formalisme (voor conventies zie Appendix A.1) kan men de ééndeeltjes impulsdistributie schrijven als

$$n^{[1]}(\vec{k}) = \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \Psi_A \rangle. \quad (3.6)$$

De operator die hier geëvalueerd wordt is een teloperator het aantal nucleonen met impuls \vec{k} geeft en wordt voorgesteld in Figuur 3.1. Het bewijs voor deze uitdrukking wordt gegeven in Appendix A.2.



Figuur 3.1: Feynmandiagram van de ééndeeltjes impulsoperator. De operator annihileert en creëert een nucleon met momentum \vec{k} op hetzelfde tijdstip, zo is er geen energiestroom. De initiële en finale toestand zijn dan dezelfde.

Op een analoge manier kan de ENDM in het tweedekwantisatie formalisme geschreven worden als

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) &= \int \{\{d\vec{r}_{2-A}\}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}'_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \\ &= \frac{1}{A!} \int \{\{d\vec{r}_{2-A}\}\} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \dots \psi^\dagger(\vec{r}_A) \psi(\vec{r}_{A-1}) \dots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hier annihileert $\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}'_1)$ een nucleon op positie \vec{r}'_1 en creëert een nucleon op positie \vec{r}_1 . De diagonaaloperator $\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1)$ is een teloperator in de configuratieruimte die het aantal nucleonen op positie \vec{r}_1 telt.

Eéndeeltjes impulsdistributie in een harmonische oscillator potentiaal

Een ODM veronderstelt dat een nucleon beweegt in het gemiddelde veld van alle andere nucleonen. Omdat er geen interacties zijn tussen de deeltjes, en dus ook geen correlaties, is de totale golffunctie slechts een product van ééndeeltjesgolffuncties van de nucleonen. Aangezien nucleonen fermionen zijn, en dus voldoen aan het uitsluitingsprincipe van Pauli, moet de totale golffunctie antisymmetrisch zijn onder elke permutatie van twee nucleonen. De golffunctie krijgt dan de gedaante van een Slaterdeterminant van de ééndeeltjesgolffuncties:

$$\Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{i_1 i_2 \dots i_A}^A \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \phi_{i_1}(\vec{r}_1) \phi_{i_2}(\vec{r}_2) \dots \phi_{i_A}(\vec{r}_A). \quad (3.8)$$

Hierbij is $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A}$ de totaal antisymmetrische Levi-Civita tensor en de sommaties over de indices i_1, \dots, i_A gaan over alle bezette ééndeeltjestoestanden in de grondtoestand van de kern. De ééndeeltjesgolffuncties voldoen aan de orthonormaliteitsregel:

$$\int d\vec{r}_i \phi_l^*(\vec{r}_i) \phi_m(\vec{r}_i) = \delta_{lm}. \quad (3.9)$$

Gebruik makende van deze eigenschap wordt de ENDM

$$\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) = \frac{1}{A} \sum_i \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}'_1). \quad (3.10)$$

Met de definitie van de golffunctie in de impulsruimte als de Fouriergetransformeerde van de golf-functie in de configuratieruimte,

$$\phi_i(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi_i(\vec{r}), \quad (3.11)$$

wordt (3.1):

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{A(2\pi)^3} \sum_i \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}'_1)} \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}'_1) \\ &= \frac{1}{A} \sum_i \phi_i^*(\vec{k}) \phi_i(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{A} \sum_i |\phi_i(\vec{k})|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De golffuncties in de impulsruimte kunnen berekend worden via Fouriertransformatie (3.11) van de golffuncties in de configuratieruimte. Echter, in het geval van een HO potentiaal is het eenvoudiger de Schrödingervergelijking (2.10) in de impulsruimte,

$$\left(-\frac{M_N \omega^2}{2} \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{2M_N} k^2 \right) \tilde{\psi}_{nlm}(\vec{k}) = E \tilde{\psi}_{nlm}(\vec{k}), \quad (3.13)$$

op te lossen. Deze differentiaalvergelijking heeft dezelfde vorm als de Schrödingervergelijking in de configuratieruimte, met andere woorden de oplossingen zijn van dezelfde vorm als (2.11):

$$\psi_{nlm}(\vec{k}) \equiv \langle \vec{k} | nlm \rangle = K_{nl}(k) Y_{lm}(\Omega_k) \quad (3.14)$$

met

$$K_{nl}(k) = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n + l + \frac{3}{2})} \nu'^{l+\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} k^l e^{-\frac{\nu' k^2}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\nu' k^2). \quad (3.15)$$

Hierbij is

$$\nu' \equiv \frac{\hbar}{M_N \omega}. \quad (3.16)$$

Nucleonen zijn fermionen, deeltjes met spin $\frac{1}{2}$. De spin van een deeltje heeft een bepaalde projectie langs een gekozen as, we kiezen hier de verticale z-as. Dan kan de projectie naar boven of naar onder zijn en wordt aangegeven door het kwantumgetal σ (respectievelijk $\sigma = 1/2$ of $-1/2$). Om een onderscheid te maken tussen protonen en neutronen maken we gebruik van het isospin kwantumgetal τ . Beiden hebben isospin $\vec{I} = 1/2$ maar protonen krijgen projectie $\tau = +1/2$ en neutronen $\tau = -1/2$. De totale golffunctie in de impulsruimte van een deeltje in een sferische HO potentiaal wordt dan gegeven door

$$\phi_\alpha(\vec{k}) = \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}) \chi_{\sigma_\alpha} \xi_{\tau_\alpha} \quad (3.17)$$

waarbij $\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k})$ de HO golffunctie in de impulsruimte is, gegeven door (3.14). Hier zijn $\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha}$ zijn spinspinoren gedefinieerd als

$$\chi_{+1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Analoge definities gelden voor isospinspinoren ξ_{τ_α} . Integratie over alle hoekafhankelijkheid Ω_k leidt tot een distributie van de grootte van de impuls:

$$\begin{aligned} n^{[1]}(k) &= \frac{1}{A} \int d\Omega_k \sum_{\tau nl m \sigma} \psi_{nlm}^*(\vec{k}) \psi_{nlm}(\vec{k}) \chi_\sigma^* \chi_\sigma \xi_\tau^* \xi_\tau \\ &= \frac{2}{A} \sum_{\tau} \sum_{nl} (2l+1) \gamma_{nl} K_{nl}^2(k). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hier corrigeert γ_{nl} voor niet volledig gevulde niveaus en is net als de golffunctie (door afhankelijkheid van ν) kernafhankelijk. Bijvoorbeeld bij ^{12}C is het niveau $nl = 0p$ voor protonen en neutronen maar voor 4/6 gevuld en bijgevolg is $\gamma_{0p} = 4/6$. Daar kernen een verschillend aantal protonen en neutronen kunnen bezitten zijn de bovengrenzen van sommaties over n, l afhankelijk van het aantal protonen en neutronen in de beschouwde kern. Dit gezegd zijnde kunnen we ook schrijven dat de één-deeltjes impulsdistributie de som is van de impulsdistributies van de neutronen en protonen:

$$n^{[1]}(k) = n_n^{[1]}(k) + n_p^{[1]}(k). \quad (3.20)$$

3.2 Resultaten

De berekende één-deeltjes impulsdistributies $n^{[1]}(k)$ voor verschillende kernen worden getoond in Figuur 3.3. Omdat de impulsdistributie in een ODM een som is van de individuele impulsdistributies van elke bezette één-deeltjestoestand (3.12) zijn ook deze individuele bijdragen tot de totale

distributie weergegeven. Uit de resultaten valt op dat de distributies nooit nul worden, dit is volgt uit de eigenschap van de HO golffuncties. De HO potentiaal in de impulsruimte wordt steeds groter voor grotere wordende impuls., maar blijft steeds eindig. Als gevolg hebben de golffuncties steeds een eindige probabilité voor k gaande naar oneindig. Aan de hand van de berekende distributies kan de gemiddelde kinetische energie van nucleonen in een bepaalde kern bepaald worden:

$$\langle T_N \rangle = \frac{\hbar^2}{2M_N} \frac{\int dk n_N^{[1]}(k) k^4}{\int dk n_N^{[1]}(k) k^2}, \quad (3.21)$$

waarbij de index staat voor protonen (p) of neutronen (n) en we aannemen dat protonen en neutronen dezelfde massa hebben ($M_p = M_n$). Resultaten voor de gemiddelde kinetische energie (3.21) vindt men in Tabel 3.1. Vergelijking van de distributies met de waarden berekend in een model met correlaties [18] blijkt dat een ODM de waarden goed reproduceert bij lage impuls ($k \lesssim 2.0 \text{ fm}^{-1}$) maar naarmate men naar grotere impuls gaat zorgen correlaties voor een brede staart in de distributie. De kinetische energie is gerelateerd aan het vierde moment van de impulsdistributie en daarom dus sterk afhankelijk van de staart van de distributie. Correlaties tussen de nucleonen zorgen dus voor een enorme toename in gemiddelde kinetische energie. Voor een beschrijving met correcties op het GV als gevolg van correlaties verwijzen we naar [16]. De waarden in Tabel 3.1 kunnen we verklaren aan de hand van twee effecten die elkaar tegenwerken. Een eerste effect is de invloed van de grootte van de kern, hoe groter de kern des te groter de ruimte waarin een nucleon kan bewegen. Volgens het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg volgt dan dat de gemiddelde impuls, en dus ook de kinetische energie lager zal zijn voor nucleonen in een grotere kern. Isotopen van Calcium, ^{40}Ca en ^{48}Ca bezitten bij definitie hetzelfde aantal protonen en in de grondtoestand bezetten deze protonen dus dezelfde toestanden in beide kernen. In ^{48}Ca voelen de protonen echter een bredere potentiaal en ligt hun gemiddelde kinetische energie dus lager dan in ^{40}Ca . Een tweede trend in de resultaten is een toename van de gemiddelde kinetische energie als een nieuw energieniveau bezet wordt. Als men bijvoorbeeld naar de gemiddelde kinetische energie van protonen kijkt bij ^{48}Ca en ^{56}Fe dan is deze groter voor de laatstgenoemde. In de grondtoestand van ^{48}Ca zijn te protontoestanden opgevuld tot en met energie $E = 7/2 \hbar\omega_{A=48}$ en in ^{56}Fe zijn er nog 6 protonen die een hogere energietoestand bezetten ($E = 9/2 \hbar\omega_{A=56}$) en dus voor een verhoogde gemiddelde kinetische energie zorgen. Aangezien we de massa van een neutron en proton als gelijk aannemen is het verschil in kinetische energie van de protonen en neutronen in eenzelfde kern te wijten aan een verschil in aantal bezette toestanden. Naarmate kernen een groter massagetel A hebben verwachten we steeds meer neutronen in verhouding met het aantal protonen (afnemende protonfractie $x_p = Z/A$) want voor zwaardere kernen wordt de Coulombafstoting steeds belangrijker. Als het hoogst gevulde energieniveau van de neutronen in een kern een hogere energie heeft dan het hoogst gevulde niveau van de protonen dan is er inderdaad een verschil in kinetische energie. In Figuur 3.4 wordt de kans om een A nucleonen te vinden met impuls k getoond in functie van de impuls, deze kans wordt gegeven door $n^{[1]}(k)k^2dk$. Het gemiddelde μ van een van een probabili-

teitsdistributie $P(x)$ is gedefinieerd als

$$\mu = \frac{\int_D dx x P(x)}{\int_D dx P(x)}, \quad (3.22)$$

en het i de centraal moment als

$$\mu_i \equiv \frac{\int_D dx (x - \mu)^i P(x)}{\int_D dx P(x)}, \quad (3.23)$$

waarbij D het domein is van de distributie. Met behulp van deze definities definiëren we de variantie $\sigma^2 = \mu_2$. Afwijkingen van een Gaussische (normale) distributie,

$$P_{normal}(k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(k - \mu)^2}{2\sigma^2}, \quad (3.24)$$

worden gekarakteriseerd door scheefheid

$$\mathcal{S} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (3.25)$$

en kurtosis

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (3.26)$$

die beiden nul zijn voor een normale distributie. De waarden in Tabel 3.2, weergegeven in Figuur 3.2 geven aan dat de distributies bij benadering Gaussisch zijn, kurtosis en scheefheid zijn klein. De absolute waarde van de kurtosis groeit naarmate A groter wordt. Een negatieve kurtosis duidt erop dat de distributies minder gepiek zijn en kleinere staarten hebben dan een Gaussische distributie. Lichte kernen hebben een linkse scheefheid ($\mathcal{S} > 0$) en scheefheid wordt kleiner naarmate we naar zwaardere kernen gaan. De zwaarste kernen hebben rechtse scheefheid ($\mathcal{S} < 0$) in de distributie wat erop duidt dat er meer nucleonen te vinden zijn met een kleiner dan gemiddelde impuls en dat de grootste afwijkingen van de gemiddelde impuls te vinden zijn rechts van het gemiddelde, bij de grootste impulsen. Daar kurtosis en scheefheid beperkt blijven in grootte kunnen we besluiten dat impulsverdeling van nucleonen in een kern bij benadering wordt beschreven door Gaussische verdeling. Figuur 3.4 geeft naast de berekende impulsdistributie ook een fit van een Gaussische distributie (3.24) aan de theoretische curve weer. De parameters μ en σ worden gefit volgens de methode van de kleinste kwadraten. Weergegeven in de figuur is ook χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_k (n^{[1]}(k)k^2 - P_{normal}(k))^2, \quad (3.27)$$

die de goedheid van de fit weergeeft. De sommatie gaat over $k \in [0, 2]fm^{-1}$ met een stap van $0.01 fm^{-1}$. Hoe kleiner χ^2 , hoe beter de normale verdeling de theoretische curve benadert. De normale verdeling, gedefinieerd in (3.24), heeft de eigenschap dat ze waarden kan aannemen voor een negatief argument. De beschouwde variabele is hier de grootte van de impuls k die slechts gedefinieerd is in het interval $[0, +\infty]$. Een Maxwell-Boltzmannverdeling zou een goed alternatief zijn aangezien het een sferisch equivalent is van de normale distributie:

$$P_{MB}(k) \propto k^2 \exp -\frac{k^2}{2a^2} \quad (3.28)$$

met

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\mu. \quad (3.29)$$

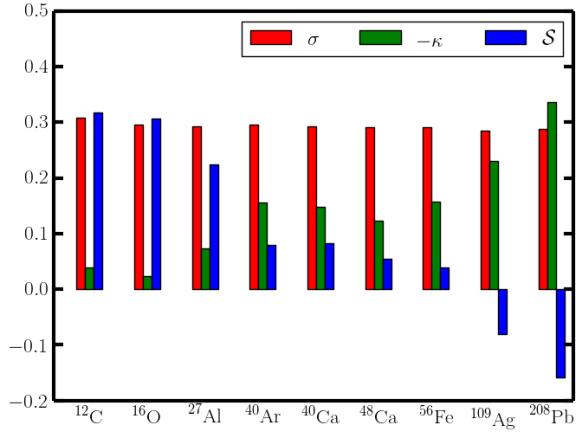
In [19] is reeds besloten dat een redelijke fit geeft voor lichte kernen en een slechte fit voor de zwaardere kernen in een GV-model met WS potentiaal. Hetzelfde verhaal geldt voor impulsdistributies in een HO potentiaal. De voornaamste reden voor de slechte fit is de negatieve kurtosis (kleinere staarten ten opzichte van normale verdeling) van de berekende impulsdistributies. Een Maxwell-Boltzmannverdeling heeft namelijk een zware staart aan de hoge-impulskant. Uit de conclusies over de twee bovenstaande fits lijkt het interessant om de functie

$$P_{PG}(k) = N_{norm} \times k^\alpha \exp -\frac{(k - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad (3.30)$$

te beschouwen waarbij N_{norm} , α , μ en σ gefit worden volgens de methode van de kleinste kwadraten. Aangezien er geen analytische uitdrukking is voor de integraal $\int dk P_{PG}(k)$ fitten we dus ook een normalisatiefactor N_{norm} . We controleren ook of de gefitte curve correct genormaliseerd is op 1. In Figuur 3.5 ziet men dat deze functie een heel goede fit geeft aan onze theoretische curve voor lichte kernen, χ^2 is verwaarloosbaar. Echter, voor zware kernen is de fit van dezelfde kwaliteit als de fit met een normale verdeling. Voor lichte kernen valt op dat de macht van k (α in uitdrukking (3.30)) relatief dicht bij 2 ligt, en dus bij benadering kan beschreven worden door een Maxwell-Boltzmannverdeling. Voor zwaardere kernen is de match α veel kleiner en een Maxwell-Boltzmannverdeling zal een slechte fit geven. Dit is ook de conclusie in [19]. Tenslotte merken we op dat de variantie vrijwel onafhankelijk is van de beschouwde kern.

A	x_p	$\langle T_p \rangle$ (MeV)	$\langle T_n \rangle$ (MeV)
^{12}C	0.500	16.13	16.13
^{16}O	0.500	15.66	15.66
^{27}Al	0.481	16.69	17.02
^{40}Ar	0.450	16.22	17.28
^{40}Ca	0.500	16.53	16.53
^{48}Ca	0.417	15.73	17.98
^{56}Fe	0.464	16.82	17.59
^{108}Ag	0.435	16.74	18.17
^{208}Pb	0.394	16.49	18.93

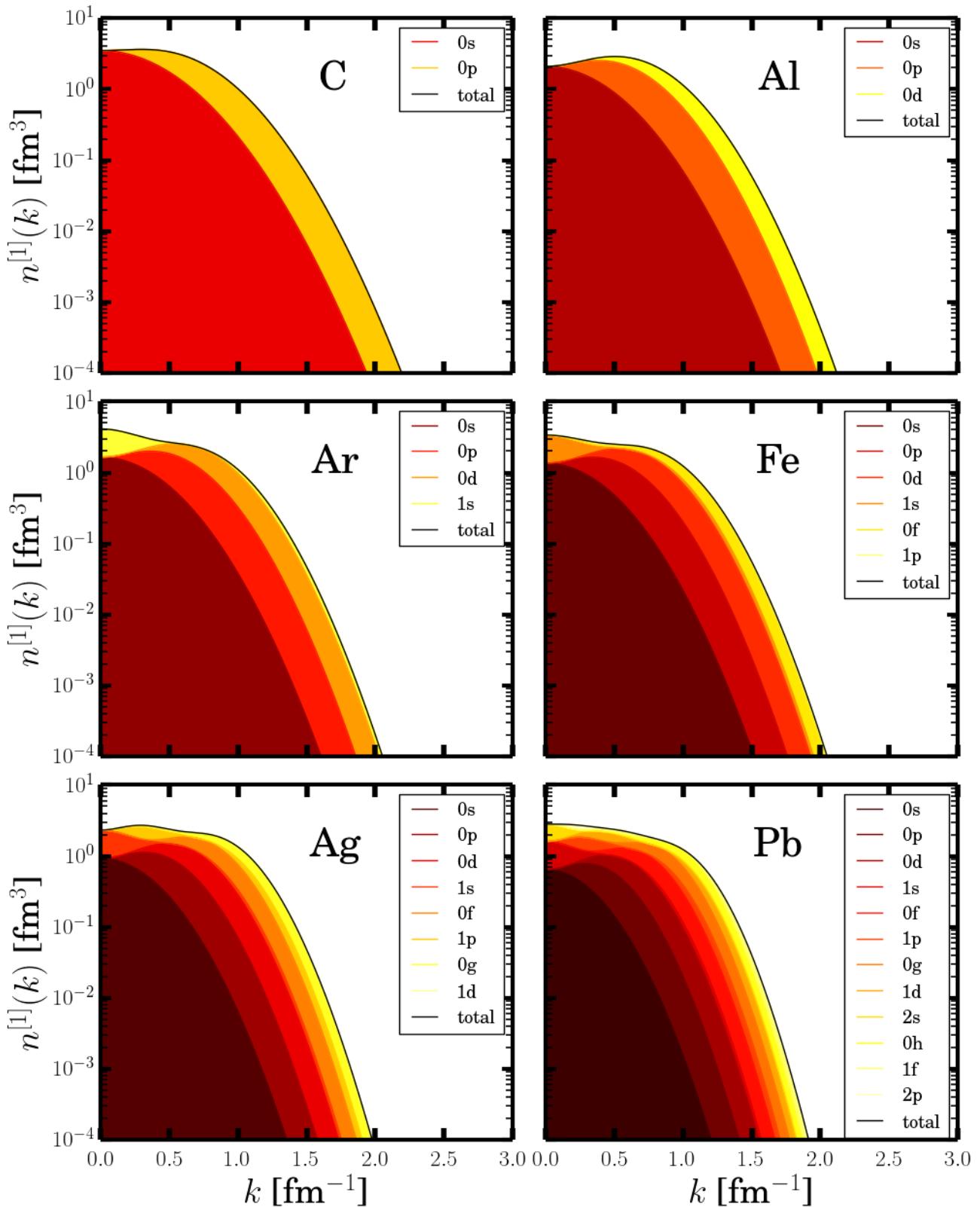
Tabel 3.1: De gemiddelde kinetische energie van neutronen en protonen voor verschillende kernen. x_p is de protonfractie, $x_p = Z/A$. De waarden zijn berekend aan de hand van uitdrukking 3.21 waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7).



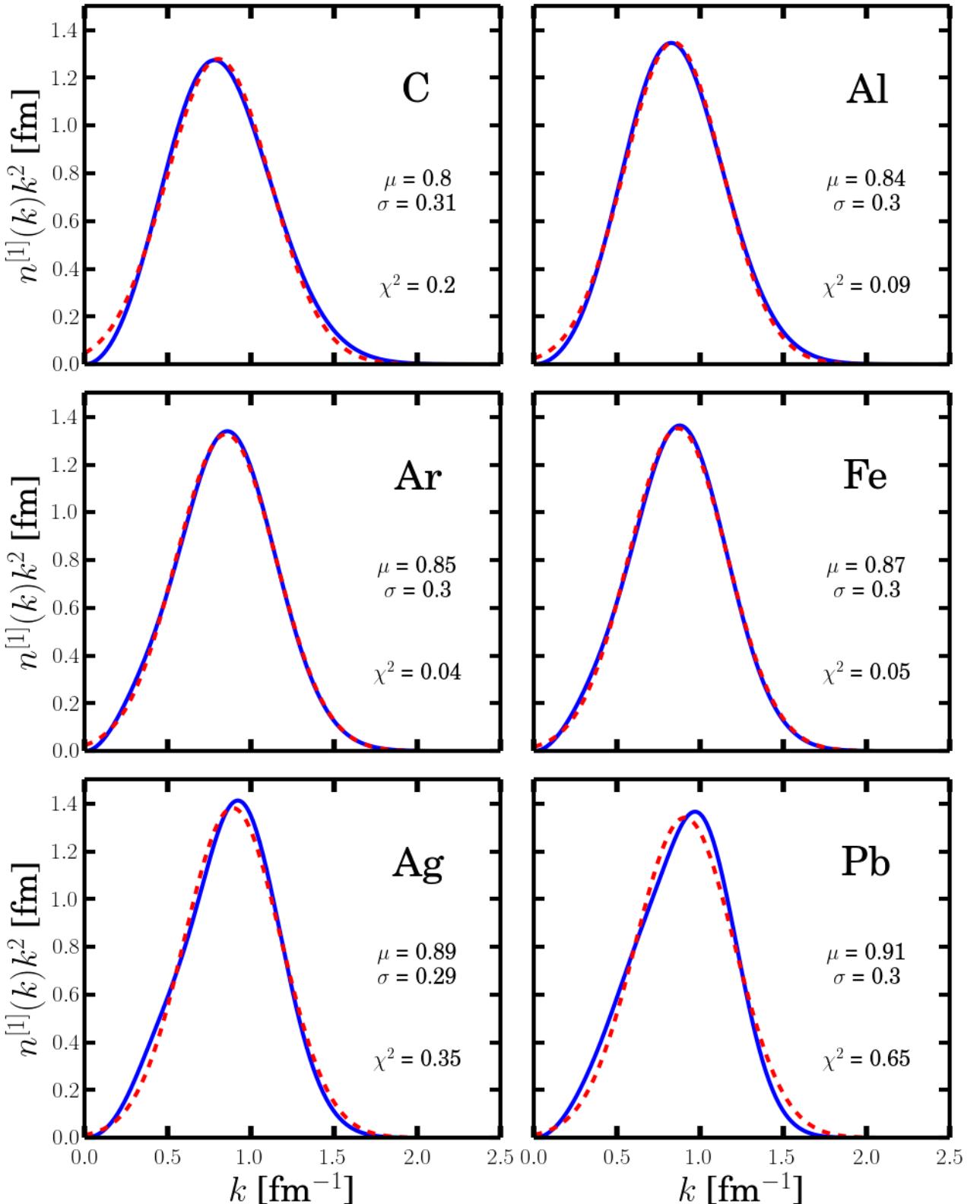
Figuur 3.2: Eigenschappen van $n^{[1]}(k)k^2$ waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO éendeeltjes golf-functies (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). σ wordt getoond in eenheid fm^{-1} . Kurtosis κ en scheefheid S zijn, respectievelijk, berekend aan de hand van uitdrukkingen (3.26) en (3.25). Let op: kurtosis wordt in absolute waarde gegeven.

A	$\sigma(MeV)$	κ	S
^{12}C	60.82	-0.04	0.32
^{16}O	58.36	-0.02	0.31
^{27}Al	57.69	-0.07	0.23
^{40}Ar	58.49	-0.16	0.08
^{40}Ca	57.81	-0.15	0.08
^{48}Ca	57.44	-0.12	0.05
^{56}Fe	57.55	-0.16	0.04
^{108}Ag	56.12	-0.23	-0.08
^{208}Pb	56.86	-0.34	-0.16

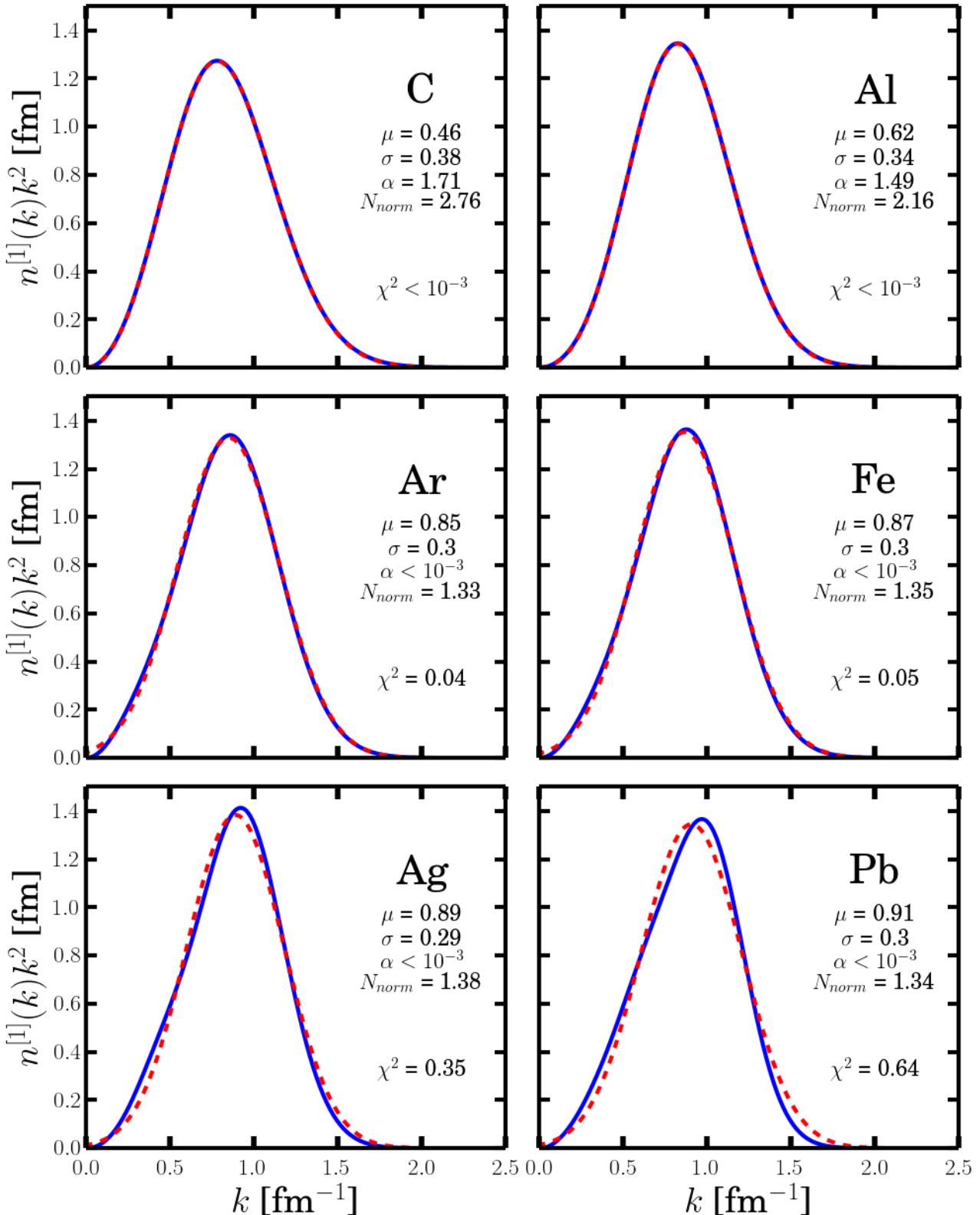
Tabel 3.2: Eigenschappen van $n^{[1]}(k)k^2$ waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO éendeeltjes golf-functies (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). Kurtosis κ en scheefheid S zijn, respectievelijk, berekend aan de hand van uitdrukkingen (3.26) en (3.25).



Figuur 3.3: Eéndeeltjes impulsdistributie $n^{[1]}(k)$ voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Ar}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$, $^{208}_{82}\text{Pb}$. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$.



Figuur 3.4: Blauwe curve: $n^{[1]}(k)k^2$ voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Ar}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$, $^{208}_{82}\text{Pb}$. Gestreepte rode curve: een normale verdeling ((3.24)) gefit aan de resultaten. De parameters zijn μ , σ zijn gefit volgens de methode van de kleinste kwadraten en χ^2 (zie (3.27)) is de goedheid van de fit. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$.



Figuur 3.5: Blauwe curve: $n^{[1]}(k)k^2$ voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Ar}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$, $^{208}_{82}\text{Pb}$. Gestreepte rode curve: de functie (3.30) gefit aan de resultaten volgens de methode van de kleinste kwadraten. De gefitte parameters zijn μ , σ , N_{norm} en α . De parameter χ^2 (zie (3.27) met $P_{normal}(k)$ vervangen door $P_{PG}(k)$, gegeven door (3.30).) is de goedheid van de fit. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$.

HOOFDSTUK 4

Tweedeeltjes impulsdistributie

4.1 Algemene kenmerken

Bij verstrooingsexperimenten aan enkelvoudige nucleonen in een kern is er een kans dat het verstrooide nucleon initieel deel was van een gecorreleerd paar van nucleonen. Via twee-nucleon knock-out reacties kan men tweedeeltjes impulsdistributies meten [13] en de invloed van correlaties bestuderen. In een ODM zijn er geen correlaties tussen nucleonen. Een vergelijking met een model die correlaties bevat brengt dan de beperkingen van een ODM aan het licht. De kans om een deeltje met impuls in het interval $[k_1, k_1 + dk_1]$ te vinden wanneer een ander deeltje een impuls heeft in het interval $[k_2, k_2 + dk_2]$ wordt gegeven door $n^{[2]}(k_1, k_2)k_1^2k_2^2dk_1dk_2$ waarbij

$$n^{[2]}(k_1, k_2) = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 n^{[2]}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \quad (4.1)$$

met

$$n^{[2]}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}'_1 \int d\vec{r}'_2 e^{i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}'_1)} e^{i\vec{k}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}'_2)} \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) \quad (4.2)$$

de tweedeeltjes impulsdistributie. Hier is

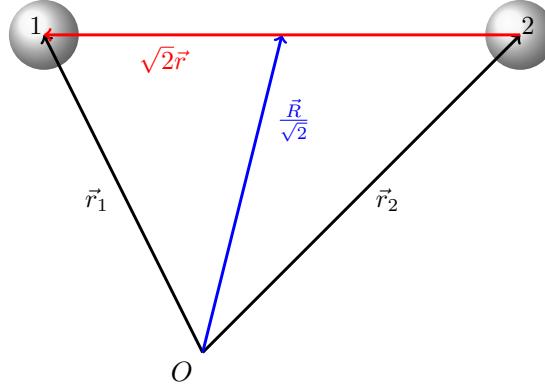
$$\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) = \int \{d\vec{r}_{3-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \quad (4.3)$$

de tweedeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix (TNDM). Aangezien interacties tussen twee nucleonen alleen functie zijn van de relatieve vector tussen deze twee nucleonen en de positie van hun massacentrum er niet toe doet wegens translationele invariantie van fysische wetmatigheden is het interessant de TNDM te bestuderen in functie van relatieve (\vec{r}) en massacentrumcoördinaten (\vec{R}) (Figuur 4.1). We definiëren deze coördinaten als

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \vec{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2). \quad (4.4)$$

De impulscoördinatendan transformeren dan als volgt,

$$\vec{k}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \vec{P}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2). \quad (4.5)$$



Figuur 4.1: Illustratie van relatieve en massacentrumcoördinaten van twee deeltjes.

In functie van deze nieuwe coördinaten wordt de tweedeeltjes impulsdistributie:

$$n^{[2]}(\vec{k}_{12}, \vec{P}_{12}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{r} \int d\vec{R} \int d\vec{r}' \int d\vec{R}' e^{i\vec{k}_{12} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{i\vec{P}_{12} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} \rho_2(\vec{r}, \vec{R}; \vec{r}', \vec{R}'), \quad (4.6)$$

waarbij

$$\rho_2(\vec{r}, \vec{R}; \vec{r}', \vec{R}') = \rho_2 \left(\vec{r}_1 = \frac{\vec{r} + \vec{R}}{\sqrt{2}}, \vec{r}_2 = \frac{-\vec{r} + \vec{R}}{\sqrt{2}}, \vec{r}'_1 = \frac{\vec{r}' + \vec{R}'}{\sqrt{2}}, \vec{r}'_2 = \frac{-\vec{r}' + \vec{R}'}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.7)$$

De tweedeeltjes impulsdistributie kan in het tweedekwantisatie formalisme geschreven worden als

$$n^{[2]}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{A(A-1)} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}_1) \psi^\dagger(\vec{k}_2) \psi(\vec{k}_2) \psi(\vec{k}_1) | \Psi_A \rangle. \quad (4.8)$$

We verwijzen naar Appendix A.1 voor de gebruikte conventies. De operator inwerkende op de grondtoestand in (4.8) telt het aantal deeltjes met impuls \vec{k}_1 en \vec{k}_2 . In de configuratieruimte wordt deze de TNDM-operator:

$$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) = \frac{1}{A(A-1)} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}'_2) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle. \quad (4.9)$$

De diagonaaloperator $\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1)$ is een teloperator die het aantal nucleonen telt op posities \vec{r}_1 en \vec{r}_2 . De diagonalmatrix $\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ is dan een maat voor de waarschijnlijkheid om een nucleon te vinden op positie \vec{r}_1 op voorwaarde dat er zich een nucleon bevindt op positie \vec{r}_2 .

4.2 Het onafhankelijke-deeltjes model

In een onafhankelijk deeltjes model waarbij de totale golffunctie van de kern een Slaterdeterminant is van ééndeeltjesgolffuncties (3.8) van bezette toestanden, wordt de TNDM (4.7), rekening houdend met de orthogonaliteitsrelatie (3.9):

$$\begin{aligned}\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) &= \frac{1}{A!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_A} \sum_{j_1 j_2 \dots j_A} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_A} \phi_{i_1}^*(\vec{r}_1) \phi_{i_2}^*(\vec{r}_2) \phi_{j_1}(\vec{r}'_1) \phi_{j_2}(\vec{r}'_2) \delta_{i_3, j_3} \dots \delta_{i_A, j_A} \\ &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{ij} \left[\phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) \phi_i(\vec{r}'_1) \phi_j(\vec{r}'_2) - \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) \phi_j(\vec{r}'_1) \phi_i(\vec{r}'_2) \right].\end{aligned}\quad (4.10)$$

Hierbij maakten we gebruik van de volgende eigenschap van de Levi-Civita tensor:

$$\sum_{i_1, \dots, i_{A-2}} \varepsilon_{i_1 \dots i_{A-2} j k} \varepsilon_{i_1 \dots i_{A-2} m n} = (A-2)! (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}). \quad (4.11)$$

Uit (3.10) volgt dat de TNDM in een onafhankelijke-deeltjes model kan geschreven worden in functie van ENDM's:

$$\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) = \frac{A}{A-1} [\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \rho_1(\vec{r}_2, \vec{r}'_2) - \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_2) \rho_1(\vec{r}_2, \vec{r}'_1)]. \quad (4.12)$$

Bijgevolg neemt de tweedeeltjes impulsdistributie (4.6) in een onafhankelijk deeltjes model de volgende vereenvoudigde vorm aan:

$$n^{[2]}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{A(A-1)} \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha\beta | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle_{nas} \langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \alpha\beta \rangle_{nas} \quad (4.13)$$

met

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \alpha\beta \rangle_{nas} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_\alpha(\vec{k}_1) \phi_\beta(\vec{k}_2) - \phi_\beta(\vec{k}_1) \phi_\alpha(\vec{k}_2)] \quad (4.14)$$

een totaal antisymmetrische en genormaliseerde tweedeeltjestoestand. De sommaties in (4.13) gaan over alle bezette ééndeeltjestoestanden van de beschouwde kern.

Tweedeeltjes impulsdistributies in relatieve massacentrumcoördinaten

De tweedeeltjes interacties V_{ij} in de volledige A-deeltjes Hamiltoniaan (2.8) zijn alleen afhankelijk van de relatieve posities van nucleonen en niet van hun positie ten opzichte van een vast punt in de ruimte. Bijgevolg wordt deze Hamiltoniaan liefst gescheiden in relatieve- en massacentrumcoördinaten van twee deeltjes. Tweedeeltjes impulsdistributies worden dan voornamelijk bestudeerd in functie van een relatieve impuls van twee deeltjes \vec{k}_{12} en de impuls van hun massacentrum \vec{P}_{12} . Daar we de vergelijking willen maken met distributies waarbij correlaties tussen de nucleonen in rekening worden gebracht, doen ook wij een transformatie van individuele coördinaten

naar deze nieuwe gedefinieerd in (4.4). Een handige eigenschap van HO golffuncties is de orthogonale transformatie van een tweedeeltjes golffunctie naar relatieve en massacentrumcoördinaten

$$\langle \vec{r}_1 | n_1 l_1 m_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | n_2 l_2 m_2 \rangle \rightarrow \langle \vec{r} | nlm \rangle \langle \vec{R} | NLM \rangle . \quad (4.15)$$

De nieuwe golffuncties zijn nog steeds eigenfuncties van de Schrödinger vergelijking (2.10) aangezien de Hamiltoniaan in nieuwe coördinaten dezelfde gedaante heeft. We demonstreren hier voor een kern bestaande uit twee nucleonen:

$$\frac{1}{2M_N}(k_1^2 + k_2^2) + \frac{1}{2}M_N\omega^2(r_1^2 + r_2^2) = \frac{1}{2M_N}(k_{12}^2 + P_{12}^2) + \frac{1}{2}M_N\omega^2(r^2 + R^2). \quad (4.16)$$

Deze transformatie is mogelijk door de specifieke vorm van de HO potentiaal die kwadratisch is in de positie. In het nieuwe coördinatensysteem zijn (n, l) de kwantumgetallen van de relatieve beweging van de twee nucleonen en (N, L) beschrijven de beweging van hun massacentrum. Men kan in beide coördinaatsystemen de impulsmomenten koppelen tot een totaal impulsmoment Λ :

$$|l_1 - l_2| \leq \Lambda \leq l_1 + l_2 \quad (4.17)$$

$$|l - L| \leq \Lambda \leq l + L \quad (4.18)$$

Twee deeltjes in een gekoppelde toestand hebben een welbepaald impulsmoment Λ en projectie M_Λ en deze toestand kan geschreven worden als:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{m_1, m_2} |n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2\rangle \langle l_1 m_1, l_2 m_2 | \Lambda M_\Lambda\rangle \quad (4.19)$$

En ook in het nieuwe coördinatensysteem kunnen we de impulsmomenten koppelen:

$$|nlNL; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{m, M} |nlmNLM\rangle \langle lmLM | \Lambda M_\Lambda\rangle . \quad (4.20)$$

Een HO tweedeeltjes golffunctie met totaal impulsmoment Λ en projectie M_Λ heeft een orthogonale transformatie van individuele coördinaten naar relatieve en massacentrumcoördinaten, namelijk de Moshinsky-transformatie [12]:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{nl, N\Lambda} |nlNL; \Lambda M_\Lambda\rangle \langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} . \quad (4.21)$$

De transformaticoëfficiënten $\langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle$ zijn gekend als de Moshinsky-coëfficiënten en zijn onafhankelijk van M_Λ . De energie van een deeltje (E), neem nu bijvoorbeeld een zeker deeltje "1", in een HO potentiaal is $\hbar\omega(2n_1 + l_1 + \frac{3}{2})$. Daar de totale energie van twee deeltjes dezelfde moet zijn in verschillende coördinaatsystemen moet er gelden dat

$$2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n + l + 2N + L. \quad (4.22)$$

De Moshinskycoëfficiënten zijn nul als deze gelijkheid niet is voldaan. Een recursieve methode voor de berekening van deze coëfficiënten kan gevonden worden in Appendix B.1.

Tweedeeltjes impulsdistributie voor harmonische oscillator potentiaal

Daar we de tweedeeltjes impulsdistributie (4.13) willen bestuderen in functie van relatieve impuls en massacentrumimpuls moeten de geantisymmetriseerde toestanden (4.14) geschreven worden in functie van \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} . De ontwikkeling van (4.14) in toestanden die functie zijn van \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} kan men vinden in Appendix C:

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \alpha\beta \rangle_{nas} = \sum_{\substack{n l m_l \\ N L M_L}} \sum_{S M_S} \sum_{T M_T} C_{\alpha\beta}^{n l m_l N L M_L S M_S T M_T} | n l m_l(\vec{k}_{12}) N L M_L(\vec{P}_{12}) S M_S T M_T \rangle. \quad (4.23)$$

Met behulp van deze transformatie wordt de tweedeeltjes impulsdistributie in functie van relatieve- en massacentrumimpuls (4.13) gevonden:

$$\begin{aligned} n^{[2]}(\vec{k}_{12}, \vec{P}_{12}) &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\substack{n l m_l \\ \alpha \neq \beta \\ N L M_L}} \sum_{n' l' m'_l} \sum_{S M_S} \sum_{T M_T} \left(C_{\alpha\beta}^{n l m_l N L M_L S M_S T M_T} \right)^{\dagger} C_{\alpha\beta}^{n' l' m'_l N' L' M'_L S M_S T M_T} \\ &\times \psi_{n l m_l}^*(\vec{k}_{12}) \psi_{N L M_L}^*(\vec{P}_{12}) \psi_{n' l' m'_l}(\vec{k}_{12}) \psi_{N' L' M'_L}(\vec{P}_{12}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

waarbij ψ de HO golffunctie (3.14) is. De golffunctie is kern-afhankelijk door parameter ω , gegeven door (2.7).

4.3 Resultaten

Allereerst bestuderen we de relatieve tweedeeltjes impulsdistributie die we krijgen door (4.24) te integreren over de massacentrumimpuls \vec{P} over alle directionele afhankelijkheid:

$$\begin{aligned} n^{[2]}(k_{12}) &= \int d\Omega_{k_{12}} \int d\vec{P}_{12} n^{[2]}(\vec{k}_{12}, \vec{P}_{12}) \\ &= \sum_l n_2^l(k_{12}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

waarbij

$$\begin{aligned} n_2^l(k_{12}) &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\substack{n m_l \\ N L M_L}} \sum_{n'} \sum_{S M_S} \left(C_{\alpha\beta}^{n l m_l N L M_L S M_S T M_T} \right)^{\dagger} C_{\alpha\beta}^{n' l m_l N L M_L S M_S T M_T} \\ &\times K_{nl}(k_{12}) K_{n'l}(k_{12}). \end{aligned}$$

$K_{nl}(k)$ is de radiële HO golffunctie in de impulsruimte gedefinieerd in vergelijking (3.15). Resultaten worden getoond in Figuur 4.3 waarbij we $n^{[2]}(k_{12})$ op een logschaal tonen omdat uit onderzoek waarbij kortedracht correlaties in rekening worden gebracht ([18, 21]) blijkt dat correlaties zorgen voor een brede staart in de distributie vanaf $k_{12} \gtrsim 1.5 \text{ fm}^{-1}$ en een zichtbaar verschil toont zich alleen op een logaritmische schaal. Resultaten uit gemiddeld veld berekeningen zijn dus relevant tot ongeveer 1.5 fm^{-1} . De distributie $n^{[2]}(k_{12}) k_{12}^2 dk_{12}$ geeft de kans om twee nucleonen te vinden met een onderling relatieve impuls in het interval $[k_{12}, k_{12} + dk_{12}]$ en is afgebeeld in Figuur 4.4 voor

verschillende kernen. De bijdragen van relatieve impulsmoment l worden getoond ter vergelijking met een model met correlaties zodat men kan zien welke l het meest worden beïnvloed door deze correlaties. Dat interacties tussen nucleonen de bezettingen van de relatieve l beïnvloeden is intuïtief te begrijpen als men kijkt naar overlap van twee nucleonen in verschillende relatieve l toestanden. In $l = 0$ is de overlap het grootst en we verwachten dat de bezetting van deze toestand het meest zal veranderen bij het invoeren van correlaties. Uit de resultaten valt ook op dat twee nucleonen zich voornamelijk in een $l = 1$ toestand bevinden.

Afwijkingen van een normale distributie, gekarakteriseerd door kurtosis κ en scheefheid S zijn duidelijk afhankelijk van de massa A van de kern zoals weergegeven in Figuur 4.7. Net zoals bij de ééndeeltjes impulsdistributie groeit ook bij de tweedeeltjes impulsdistributies de absolute waarde van de kurtosis met toenemende A . Kurtosis is steeds negatief zodat de distributies kleinere staarten en een en bredere piek hebben ten opzichte van een normale distributie. De andere parameter die afwijking van de normale distributie karakteriseert, scheefheid, neemt af naarmate A groter wordt en is steeds positief, de distributies zijn dus rechts scheef. Ook valt op dat de spreiding rond het gemiddelde ruwweg onafhankelijk is van de beschouwde kern. We kunnen besluiten dat de relatieve tweedeeltjesimpuls bij benadering normaal verdeeld is voor verschillende kernen.

Vervolgens bestuderen we de impulsdistributie van het massacentrum van twee deeltjes gegeven door

$$\begin{aligned} n^{[2]}(P_{12}) &= \int d\Omega_{P_{12}} \int d\vec{k}_{12} n^{[2]}(\vec{k}_{12}, \vec{P}_{12}) \\ &= \sum_l n_2^l(P_{12}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

waarbij

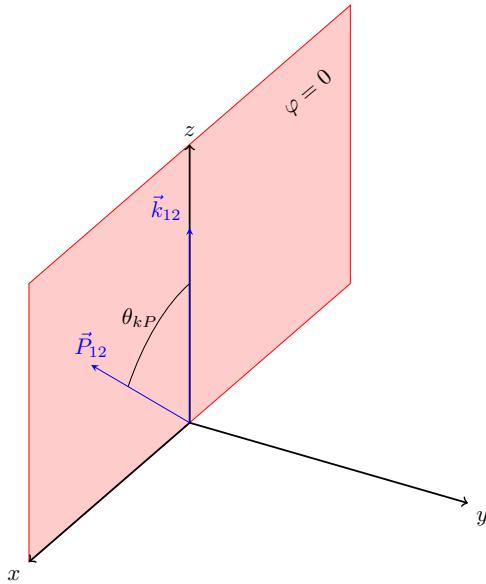
$$\begin{aligned} n_2^l(P_{12}) &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\substack{nlm_l \\ NLM_L}} \sum_{N'} \sum_{\substack{SM_S \\ TM_T}} \left(C_{\alpha\beta}^{nlm_l NLM_L SM_S TM_T} \right)^* C_{\alpha\beta}^{nlm_l N' LM_L SM_S TM_T} \\ &\quad \times K_{NL}(P_{12}) K_{N'L}(P_{12}). \end{aligned}$$

$K_{NL}(P_{12})$ is de radiële HO golffunctie in de impulsruimte gedefinieerd in vergelijking (3.15). Resultaten zijn afgebeeld in Figuur 4.5. $n^{[2]}(P_{12}) P_{12}^2 dP_{12}$ geeft de kans om twee nucleonen te vinden waarvan het massacentrum een impuls P heeft in het interval $[P_{12}, P_{12} + dP_{12}]$. De afwijkingen van een normale distributie vertonen dezelfde karakteristieken als bij de relatieve impulsdistributie. Contributies van relatieve orbitaal kwantumgetal l zijn weergegeven ter vergelijking met een model met correlaties. Ook hier gelden dezelfde conclusies als bij de relatieve distributie in verband met de bijdragen van de verschillende l . De kurtosis van de berekende distributies is steeds negatief en de absolute waarde wordt steeds groter met toenemende massa A van de kern. De scheefheid neemt af met de massa. De breedte van de massacentrum impulsdistributies is onafhankelijk van de massa van de kern. De scheefheid en kurtosis zijn steeds klein dus wordt de impuls van het tweedeeltjes massacentrum relatief goed beschreven door een normale verdeling. In Figuur 4.11 vergelijken we onze resultaten van de twee distributies, hierboven besproken, met overeenkomstige GV resultaten van M. Vanhalst [18]. Onze resultaten stemmen overeen.

Tenslotte bestuderen we de tweedeeeltjes impulsdistributie in functie van de hoek θ_{kP} tussen \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} :

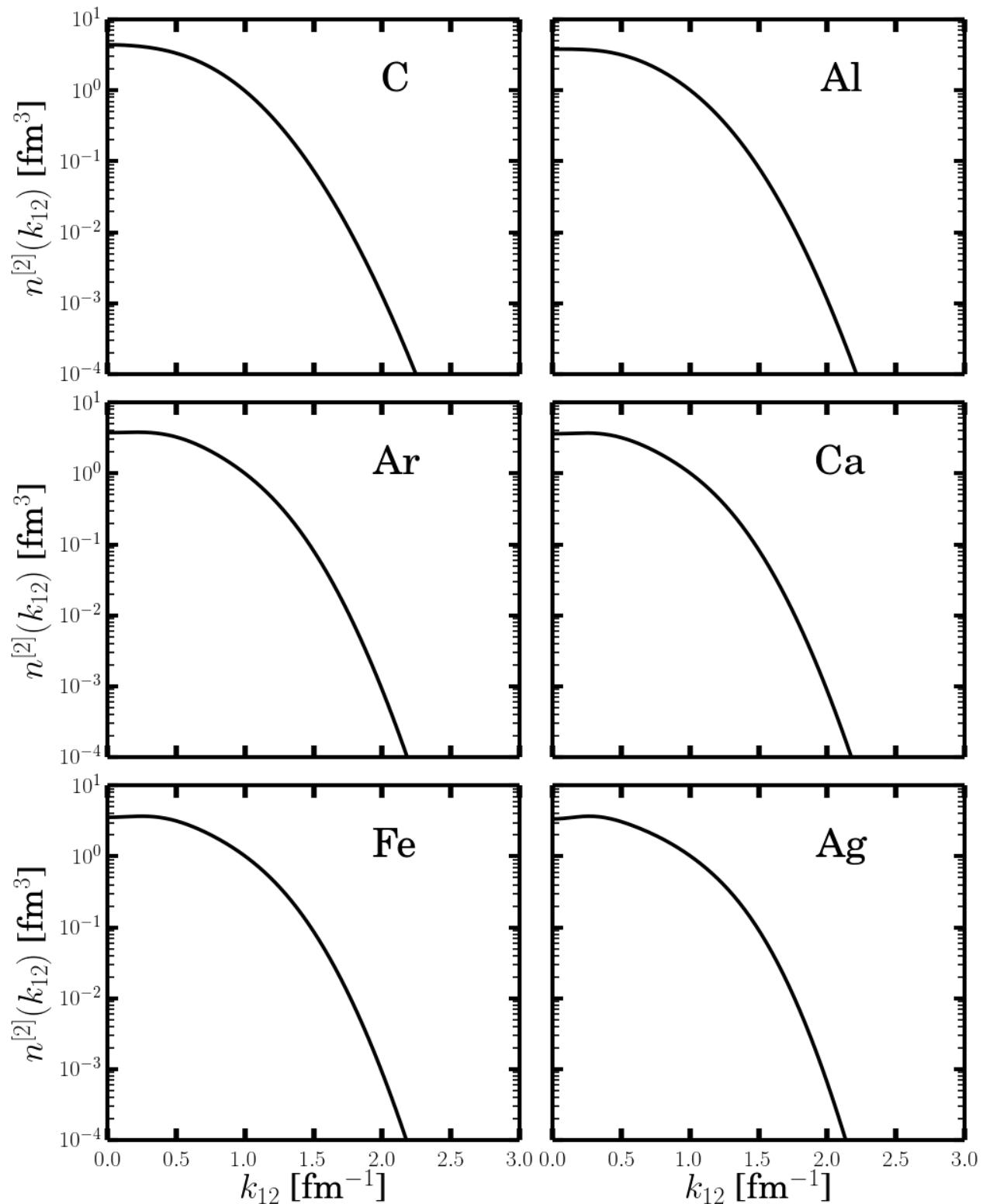
$$\begin{aligned} n^{[2]}(\theta_{kP}) &= 8\pi^2 \int dP_{12} \int dk_{12} P_{12}^2 k_{12}^2 n^{[2]}(\vec{k}_{12}, \vec{P}_{12}) \\ &= \frac{8\pi^2}{A(A-1)} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\substack{n l m_l \\ N L M_L}} \sum_{\substack{m'_l \\ M'_L}} \sum_{\substack{S M_S \\ T M_T}} \left(C_{\alpha\beta}^{n l m_l N L M_L S M_S T M_T} \right)^{\dagger} C_{\alpha\beta}^{n l m'_l N L M'_L S M_S T M_T} \\ &\quad \times Y_{lm_l}^*(0,0) Y_{lm'_l}(0,0) Y_{LM_L}^*(\theta_{kP}, 0) Y_{LM'_L}(\theta_{kP}, 0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Hierbij is er overgegaan naar een assenstelsel weergegeven in Figuur 4.2.

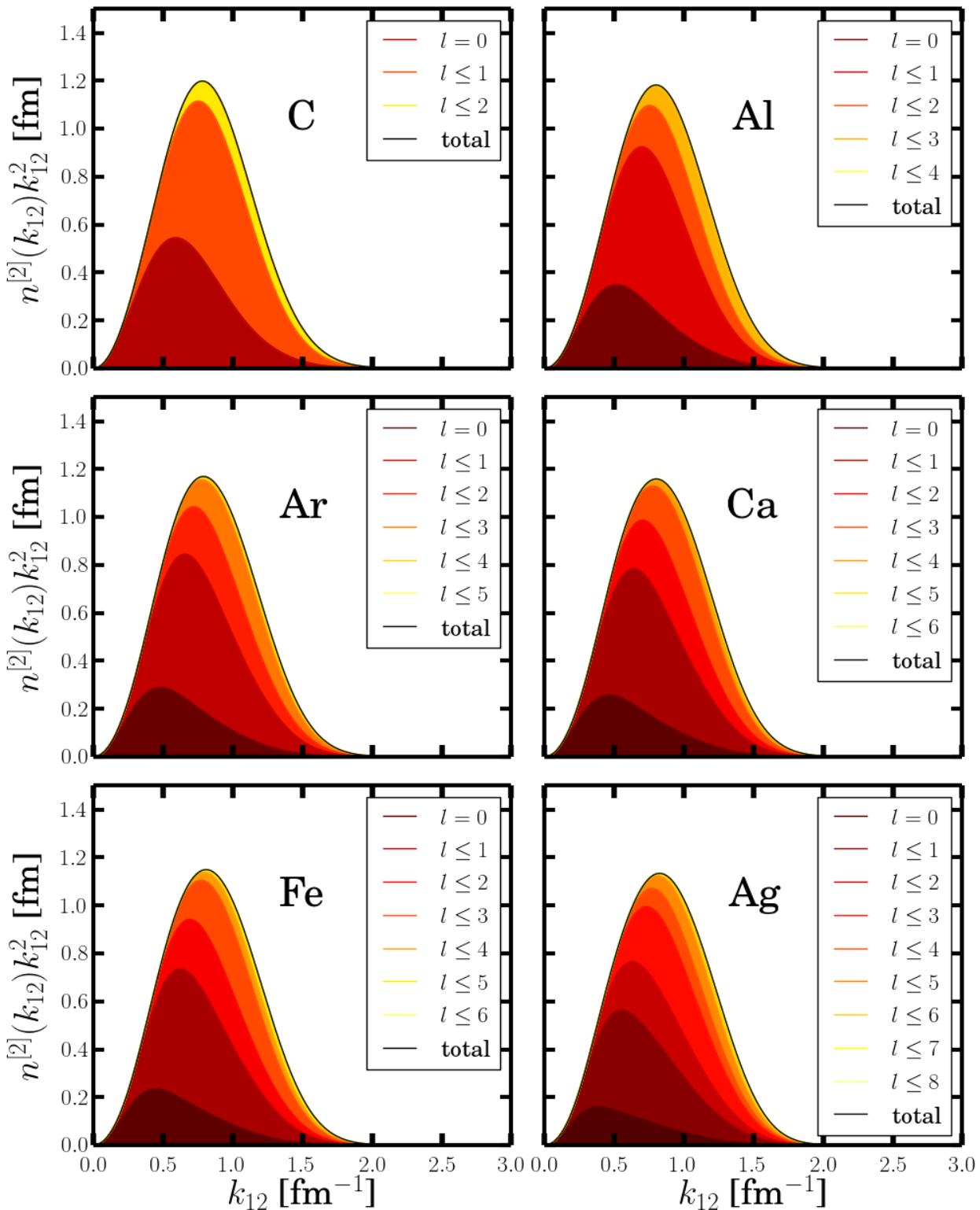


Figuur 4.2: We kunnen een transformatie doen naar dit coördinatensysteem zodat alle hoeken verdwijnen behalve de hoek tussen \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} : de azumitale hoek φ is voor beide vectoren nul en ook de poolhoek $\theta_{k_{12}}$ is nul.

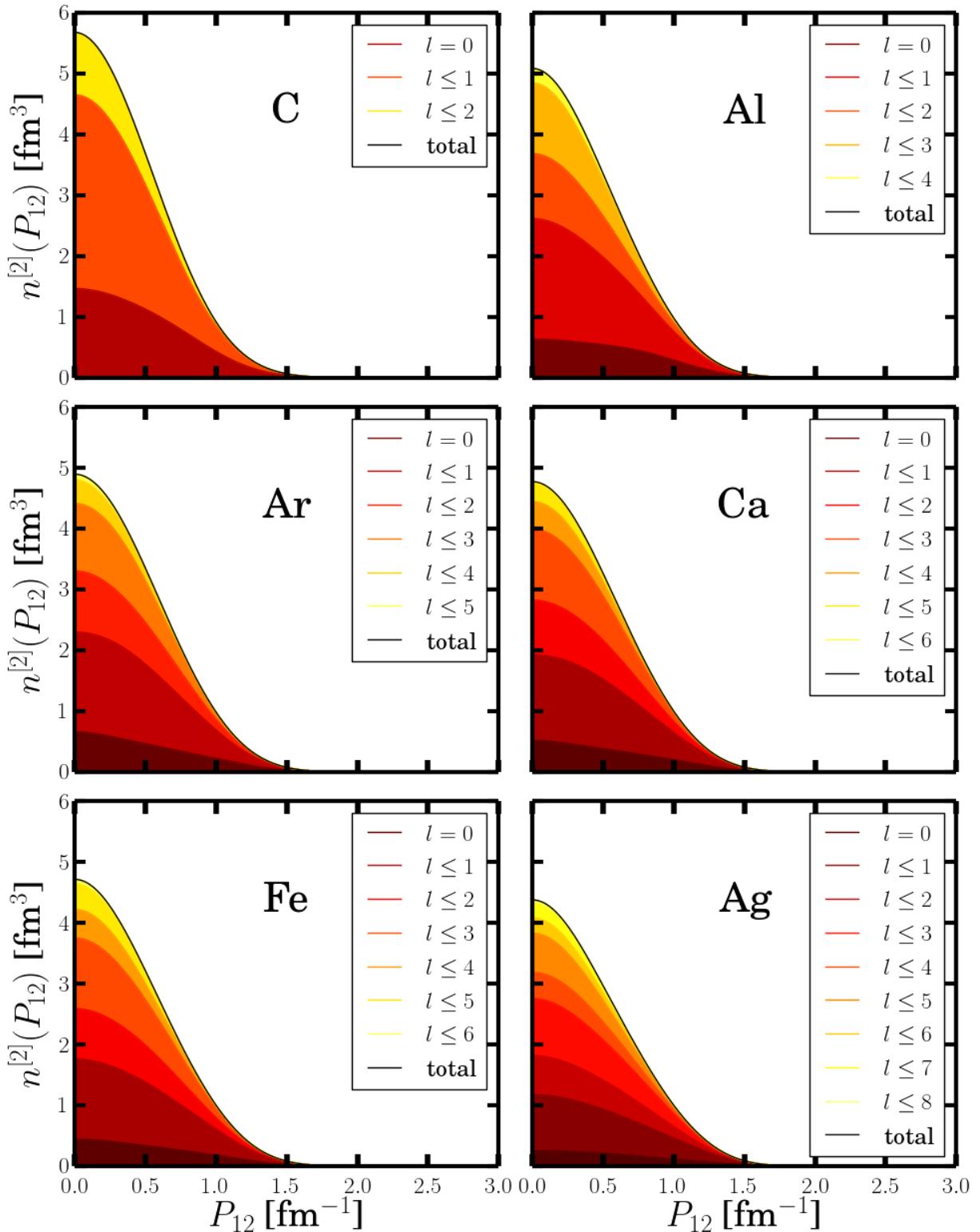
Resultaten worden getoond in Figuur 4.10. Voor alle kernen zijn deze maximaal bij $\theta_{kP} = 90^\circ$. Als \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} loodrecht staan op elkaar dan volgt uit hun definities (4.5) dat de groottes van de individuele impulsen van de deeltjes even groot zijn, $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$. $n^{[2]}(\theta_{kP}) \sin \theta_{kP} d\theta_{kP}$ geeft de kans om twee nucleonen te vinden waarvan de relatieve impuls een hoek θ_{kP} vormt met de impuls van hun massacentrum. Daar $\sin \theta_{kP}$ ook piekt bij $\theta_{kP} = 90^\circ$ is deze distributie voor alle kernen maximaal bij een loodrechte configuratie van \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} . Dus twee nucleonen bevinden zich met voorkeur in een toestand waarbij ze een even grote impuls hebben. Als we de eigenschappen van de hoekdistributies bekijken valt op dat de scheefheid steeds nul is, met andere woorden de distributies zijn steeds symmetrisch rond $\theta_{kP} = \pi/2$. Kurtosis en variantie variëren weinig van kern tot kern. De eerstgenoemde is duidelijk verschillend van nul en we kunnen nogmaals besluiten dat een normale distributie geen goede fit aan de resultaten zal geven.



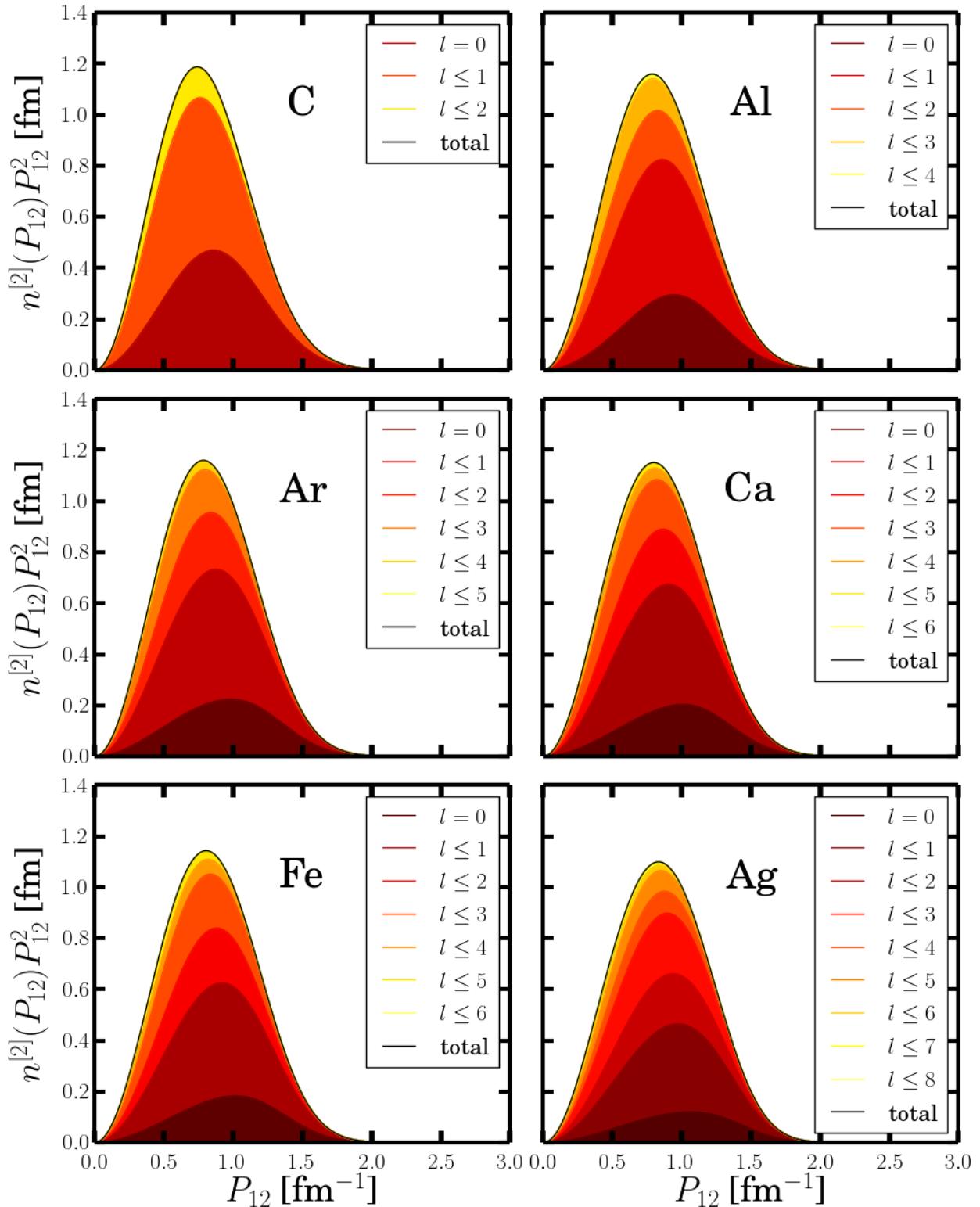
Figuur 4.3: Berekende $n^{[2]}(k_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.25) voor ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$, ${}^{40}_{18}\text{Ar}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, ${}^{109}_{47}\text{Ag}$. De normalisatie is zodanig dat $\int dk_{12} k_{12}^2 n^{[2]}(k_{12}) = 1$.



Figuur 4.4: Berekende $n^{[2]}(k_{12})k_{12}^2$, $n^{[2]}(k_{12})$ met gegeven door uitdrukking (4.25), voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Al}$, $^{48}_{20}\text{Ar}$, $^{56}_{26}\text{Ca}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$. De normalisatie is zodanig dat $\int dk_{12} k_{12}^2 n^{[2]}(k_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.



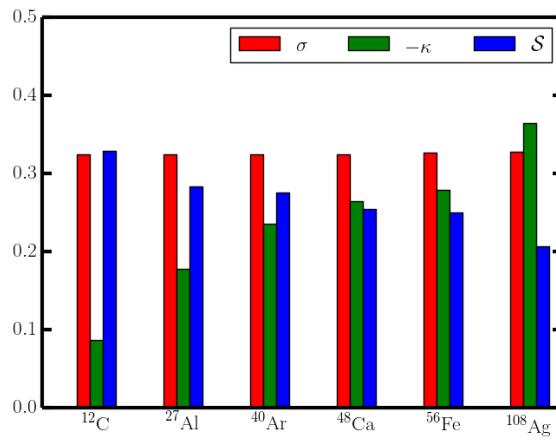
Figuur 4.5: $n^{[2]}(P_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.26) voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Ar}$, $^{48}_{20}\text{Ca}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$. Normalisatie is zodanig dat $\int dP_{12} P_{12}^2 n^{[2]}(P_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.



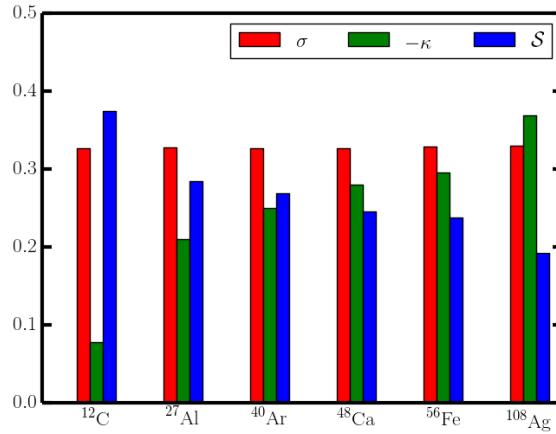
Figuur 4.6: $n^{[2]}(P_{12}) P_{12}^2$, met $n^{[2]}(P_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.26), voor $^{12}_6\text{C}$, $^{27}_{13}\text{Al}$, $^{40}_{18}\text{Ar}$, $^{48}_{20}\text{Ca}$, $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^{109}_{47}\text{Ag}$. De normalisatie is zodanig dat $\int dP_{12} P_{12}^2 n^{[2]}(P_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.

A	$\sigma(MeV)$	κ	\mathcal{S}
^{12}C	63.924	-0.086	0.329
^{27}Al	64.043	-0.177	0.283
^{40}Ar	63.959	-0.235	0.275
^{48}Ca	64.076	-0.264	0.254
^{56}Fe	64.461	-0.279	0.250
^{108}Ag	64.658	-0.364	0.206

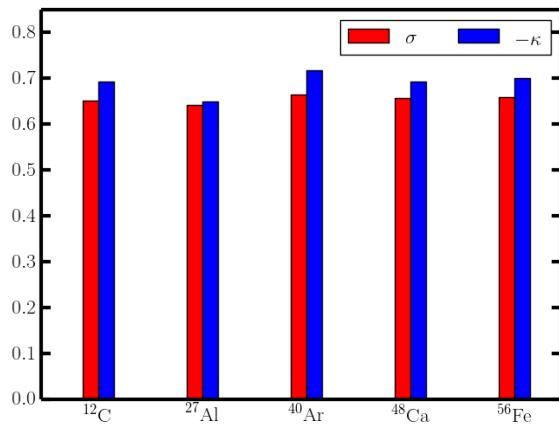
Tabel 4.1: De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid \mathcal{S} van relatieve tweedeeltjes impulsdistributies van Figuur 4.4.



Figuur 4.7: De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid \mathcal{S} van relatieve tweedeeltjes impulsdistributies van Figuur 4.4. Numerieke waarden staan in Tabel 4.1. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.



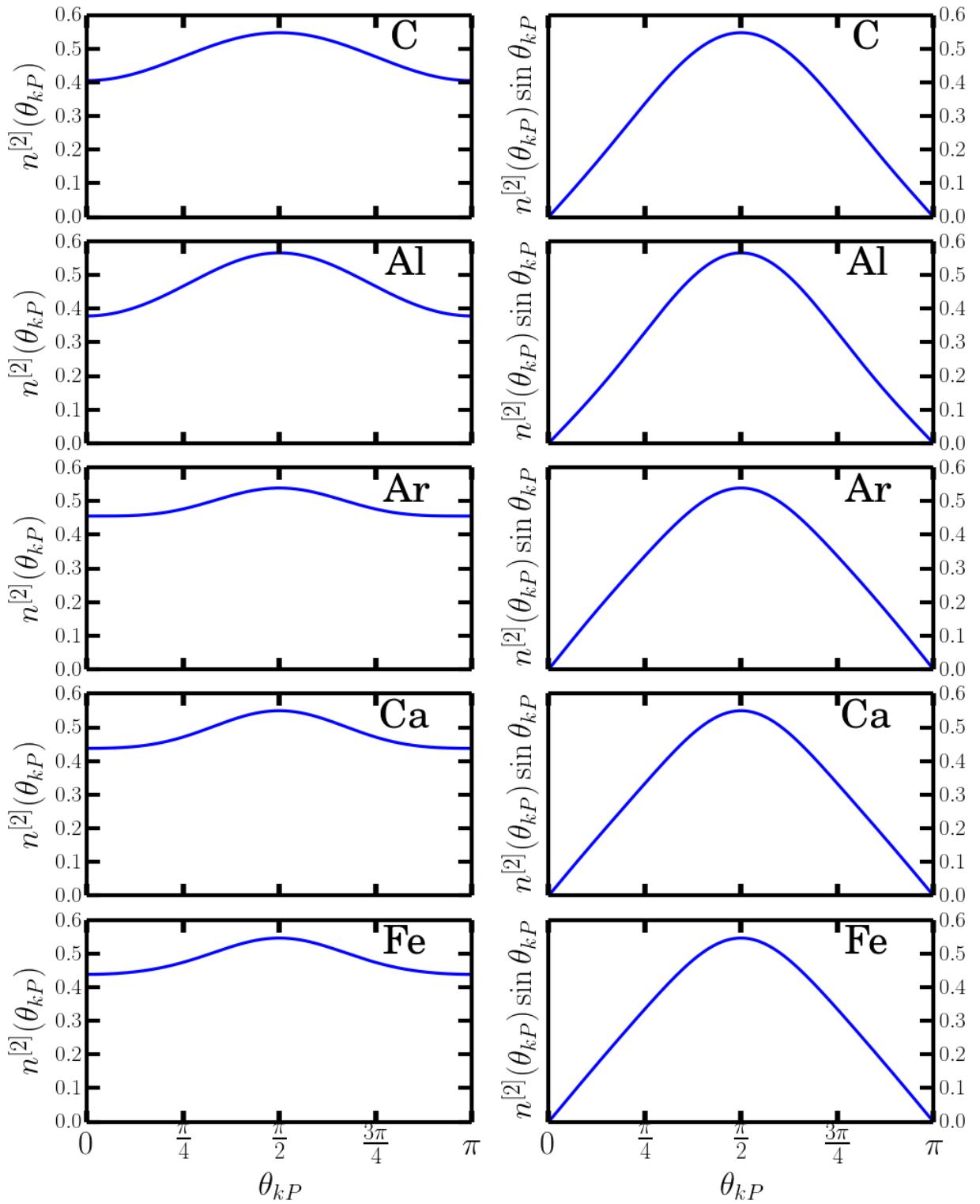
Figuur 4.8: De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid \mathcal{S} van massacentrum tweedeeltjes impulsdistributies van Figuur 4.6. Numerieke waarden staan in Tabel 4.2. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.



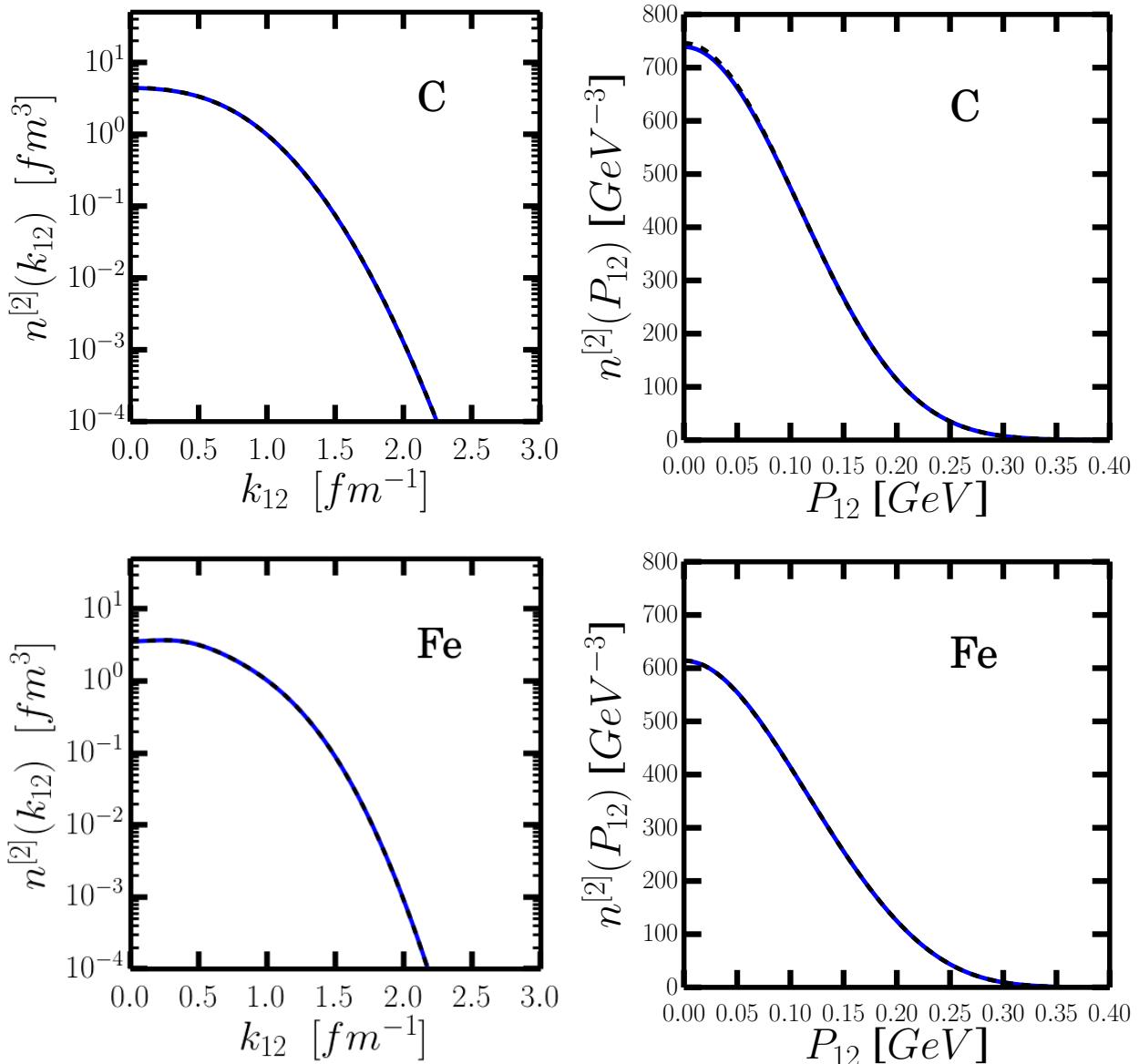
Figuur 4.9: De breedte σ en de kurtosis κ van de hoekdistributies tweedeeltjes impuls van Figuur 4.10. Scheefheid van deze distributie \mathcal{S} is nul voor alle beschouwde kernen. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.

A	$\sigma(\text{MeV})$	κ	\mathcal{S}
^{12}C	64.309	-0.077	0.374
^{27}Al	64.653	-0.210	0.284
^{40}Ar	64.353	-0.250	0.269
^{48}Ca	64.509	-0.280	0.245
^{56}Fe	64.866	-0.295	0.237
^{108}Ag	64.962	-0.369	0.192

Tabel 4.2: De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid \mathcal{S} van massacentrum tweedeeltjes impuls-distributies van Figuur 4.6.



Figuur 4.10: Hoekdistributies $n^{[2]}(\theta_{kP})$ en $n^{[2]}(\theta_{kP}) \sin \theta_{kP}$ van tweedeeltjes impuls waarbij $n^{[2]}(\theta_{kP})$ gegeven door uitdrukking (4.27). De normalisatie is zodanig dat $\int d\theta_{kP} n^{[2]}(\theta_{kP}) \sin \theta_{kP} = 1$.



Figuur 4.11: Vergelijking van resultaten voor $n^{[2]}(k_{12})$ (links) en $n^{[2]}(P_{12})$ (rechts) met resultaten uit [18]. De gestreepte curve is het resultaat bekomen door [18] en de blauwe curve ons resultaat.

HOOFDSTUK 5

Wigner-distributie

5.1 Algemene kenmerken

Een klassiek deeltje wordt in de faseruimte ((\vec{r}, \vec{k}) -ruimte) voorgesteld door een punt, het heeft een welbepaalde impuls en positie. Een netto inwerkende kracht zorgt ervoor dat het deeltje een traject beschrijft in de faseruimte. Voor een ensemble van klassieke deeltjes kan de kans op het vinden van een deeltje in een bepaald punt van de faseruimte beschreven worden door een probabiliteitsdistributie $P(\vec{r}, \vec{k})$. Een probabiliteit is steeds niet-negatief dus kan P een positief-definiete functie. De gemiddelde waarde van een observabele $O(\vec{r}, \vec{k})$ wordt berekend aan de hand van

$$O_{av} = \int d\vec{r} \int d\vec{k} P(\vec{r}, \vec{k}) O(\vec{r}, \vec{k}) \quad (5.1)$$

waarbij de integratie gaat over de volledige faseruimte. In een kwantumsysteem worden de positie en impuls operatoren, respectievelijk $\hat{\vec{r}}$ en $\hat{\vec{k}}$, die voldoen aan het onzekerheidsbeginsel van Heisenberg:

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2} \quad (5.2)$$

waarbij $\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$. $\langle \hat{O} \rangle$ is de verwachtingswaarde van operator \hat{O} . De oorsprong van deze ongelijkheid ligt in het niet commuteren van $\hat{\vec{r}}$ en $\hat{\vec{k}}$, namelijk

$$[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{k}}] = i, \quad (5.3)$$

met i de imaginaire eenheid. Daar een punt in de faseruimte een welbepaalde positie en impuls heeft, faalt de beschrijving van een kwantumsysteem met een klassieke probabiliteitsdistributie $P(\vec{r}, \vec{k})$. Deze zou het onzekerheidsbeginsel (5.2) schenden. In een klassiek systeem zijn observabelen getallen, geen operatoren, en commuteren bijgevolg altijd. Een voorstelling van een kwantumsysteem in de faseruimte wordt gegeven door een quasiprobabiliteitsdistributie. Een voorbeeld

hiervan is de Wignerdistributie. Dit kwantummechanische analogon van de klassieke probabilitatsdistributie verliest echter de fysische interpretatie als probabilitet en wordt dus beschouwd als een zuiver mathematisch hulpmiddel voor de berekening van verwachtingswaarden. In tegenstelling tot een klassieke probabilitatsdistributie kan een quasidistributie negatieve waarden aanne- men die worden gelinkt aan kwantumeffecten. Men kan bewijzen dat deze gebieden met negatieve quasidistributie steeds klein zijn en verdwijnen in de klassieke limiet $\hbar \rightarrow 0$. De Wignerdistributie laat dus toe een vergelijking te maken met een analoog klassiek systeem en vertelt waar in de fasruimte kwantumeffecten een rol spelen. Wignerdistributies hebben een relevantie bij verstrooingsexperimenten aan gebonden nucleonen in de kern. Er zijn experimenten die impulsdistributies meten in regionen die kleiner zijn dan het volledige nucleaire volume. Bij verstrooiing aan een gebonden nucleon in een kern observeert men de ééndeeltjes impulsdistributies van een nucleon in een beperkt volume [6]. De Wignerdistributie van een HO toestand gekarakteriseerd door een set kwantumgetallen $j = \{n, l, m\}$ definiëren we als

$$W_j(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}' \phi_j^* \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2} \right) \phi_j \left(\vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \quad (5.4)$$

in overeenkomst met de definitie van E. Wigner die deze functie introduceerde [20]. De bijhorende marginale distributies

$$\int d\vec{r} W_j(\vec{r}, \vec{k}) = |\phi_j(\vec{k})|^2 \quad (5.5)$$

$$\int d\vec{k} W_j(\vec{r}, \vec{k}) = |\phi_j(\vec{r})|^2, \quad (5.6)$$

zijn respectievelijk de impuls- en dichtheidsdistributie van de j -toestand. Bijgevolg is normalisatie

$$\int d\vec{r} \int d\vec{k} W_j(\vec{r}, \vec{k}) = 1 \quad (5.7)$$

en W_j is dimensieloos. De Wignerdistributie is een voorbeeld van een Weyltransformatie van een operator \hat{O} :

$$\tilde{O}(\vec{r}, \vec{k}) = \int d\vec{r}' \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2} \right| \hat{O} \left| \vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2} \right\rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (5.8)$$

De Weyltransfromatie zet een operator, die normaliter inwerkt op een golffunctie, om naar een functie van \vec{r} en \vec{k} . Men kan bewijzen dat de integraal over de volledige fasruimte van het product van twee getransformeerde operatoren gelijk is aan het spoor van het product van deze operatoren,

$$Tr[\hat{O}_1 \hat{O}_2] = \int d\vec{r} \int d\vec{k} \tilde{O}_1(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{O}_2(\vec{r}, \vec{k}). \quad (5.9)$$

Daar de dichtheidsoperator de gedaante

$$\hat{\rho} = \sum_j |j\rangle \langle j| \quad (5.10)$$

heeft, volgt dat

$$Tr[\hat{\rho} \hat{O}] = \sum_j Tr[|j\rangle \langle j| \hat{O}] = \sum_j Tr[\langle j| \hat{O} |j\rangle] = \langle \hat{O} \rangle. \quad (5.11)$$

Hierbij werd gebruik gemaakt van de invariantie van een spoor onder cyclische permutatie en het feit dat het spoor van een getal niets anders is dan het getal zelf. Met dit in het achterhoofd en met behulp van relatie (5.9) kunnen we, eens de Wignerdistributie gekend is, de verwachtingswaarde van een operator berekenen:

$$\langle \hat{O} \rangle = \int d\vec{r} \int d\vec{k} W(\vec{r}, \vec{k}) \tilde{O}(\vec{r}, \vec{k}) \quad (5.12)$$

waarbij

$$W(\vec{r}, \vec{k}) \equiv \tilde{\rho}(\vec{r}).$$

De totale Wignerdistributie van het systeem is dus de Weylgetransformeerde van de dichtheidsooperator. Merk op dat uitdrukking dat gemiddelde waarden van observabelen in een klassiek systeem op dezelfde manier berekend worden (zie vergelijking (5.1)). De relatie met de ééndeeltjes impulsdistributie

$$n^{[1]}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}'_1)} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \quad (5.13)$$

wordt duidelijk door de volgende transformatie van coördinaten:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r}'_1 - \vec{r}_1 \\ \vec{r} &= \frac{\vec{r}'_1 - \vec{r}_1}{2} \end{aligned}$$

De ééndeeltjes impulsdistributie kan dan in direct verband gebracht worden met de Wignerdistributie:

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} \int d\vec{r}' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \rho_1(\vec{r} - \vec{r}'/2, \vec{r} + \vec{r}'/2) \\ &= \int d\vec{r} W(\vec{r}, \vec{k}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Uit (5.10) en de definitie van de Wignerdistributie van een toestand (5.4) volgt dat de totale distributie van een kern niets anders is dan de som van de distributies van de individuele toestanden:

$$W(r, k) = \frac{2}{A} \sum_{\tau=-1/2}^{+1/2} (2l+1) \sum_{nl} \gamma_{nl} W_{nl}(r, k) \quad (5.15)$$

met

$$W_{nl}(r, k) = \int d\Omega_r \int d\Omega_k \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l W_{nlm}(\vec{r}, \vec{k}). \quad (5.16)$$

De sommatie gaat dan over alle bezette ééndeeltjestoestanden nl van de kern. Aangezien voor een bepaalde l de verschillende $m = -l, \dots, l$ energetisch ontaard zijn in ons model nemen we een gemiddelde over deze toestanden zodat

$$K_{nl}^2(k) = \int_0^\infty dr r^2 W_{nl}(r, k) \quad (5.17)$$

en

$$n^{[1]}(k) = \int_0^\infty dr r^2 W(\vec{r}, \vec{k}). \quad (5.18)$$

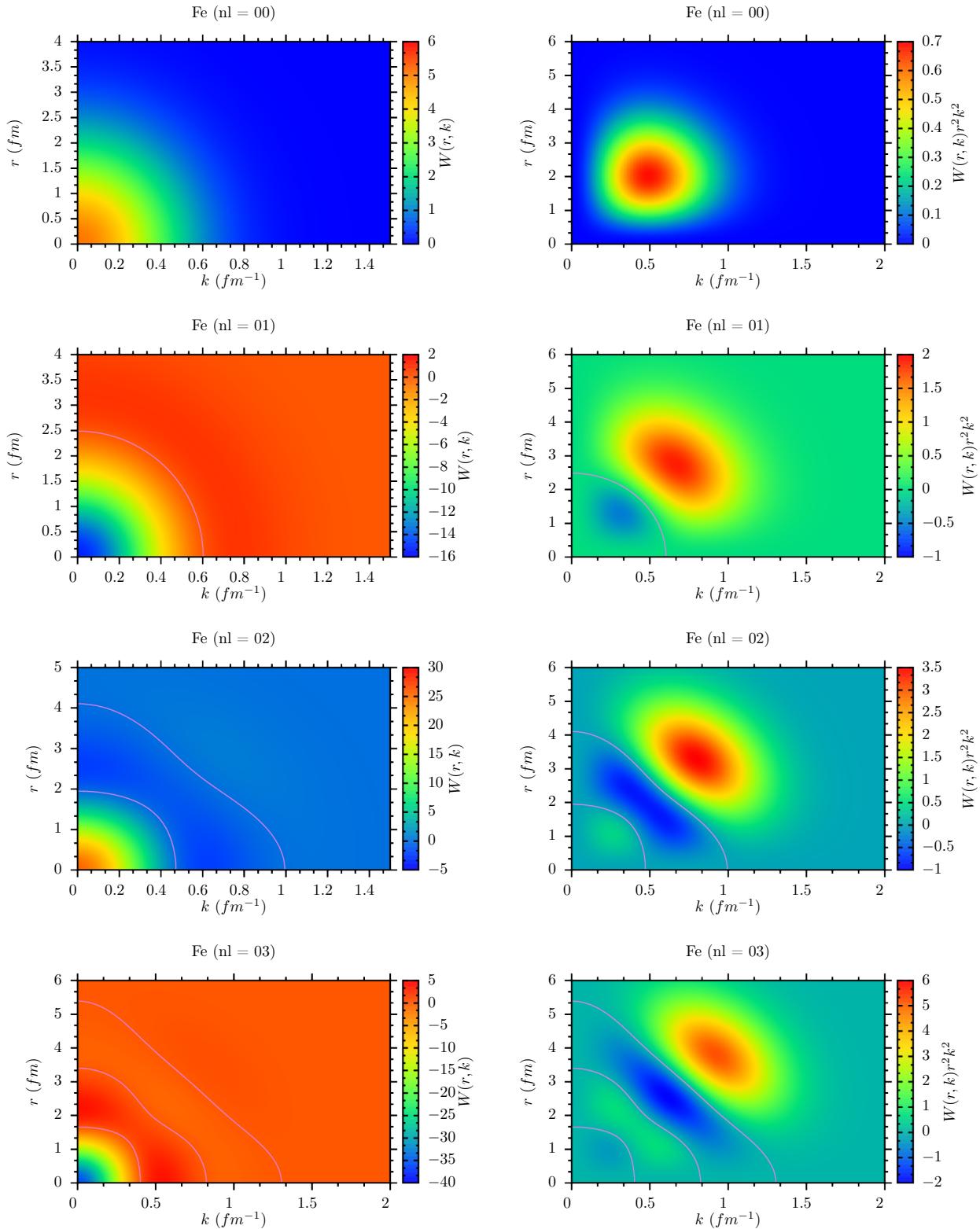
5.2 Resultaten

Resultaten zijn te vinden in Figuren 5.3 en 5.4. Naast de Wignerdistributie $W(r, k)$ tonen we ook nog $W(r, k)r^2k^2$. De kans (probabiliteit) om een deeltje te vinden op een afstand r van het centrum van de kern wordt gegeven door

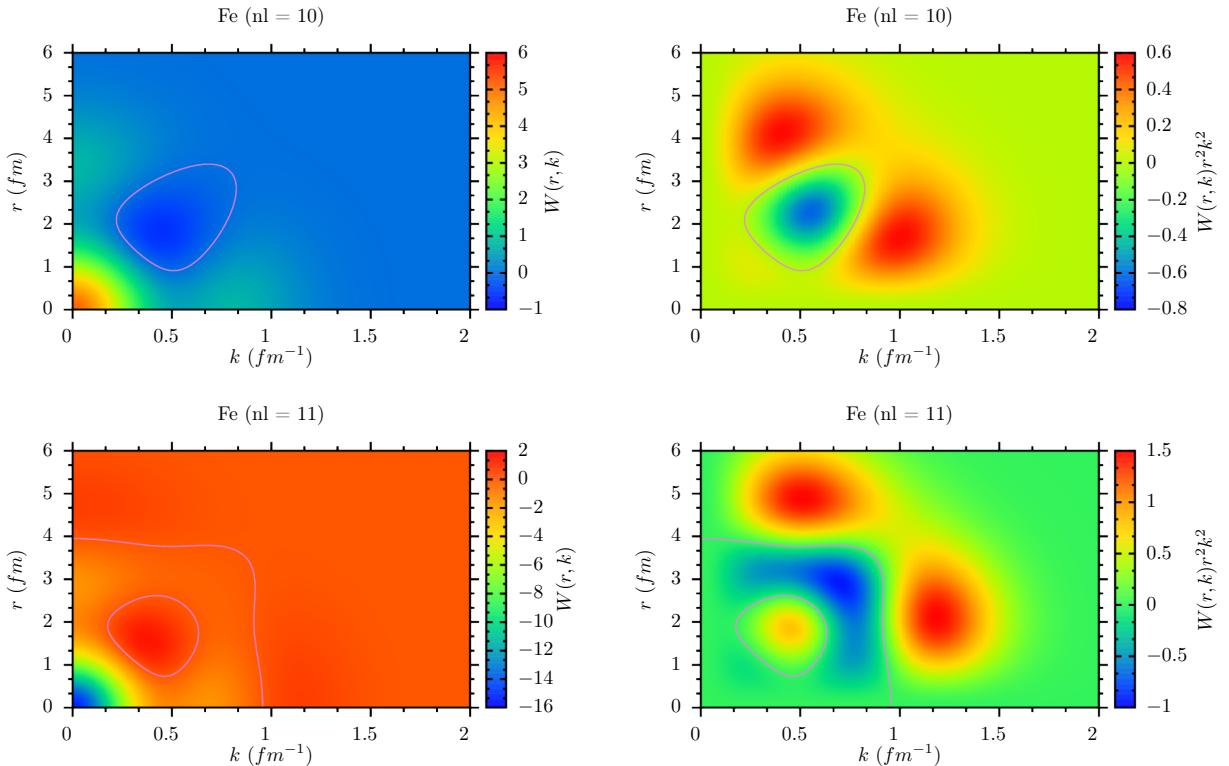
$$\rho(r) = r^2 \int dk k^2 W(r, k). \quad (5.19)$$

Bijgevolg wordt $W(r, k)r^2k^2$ gedefinieerd als quasiprobabiliteit.

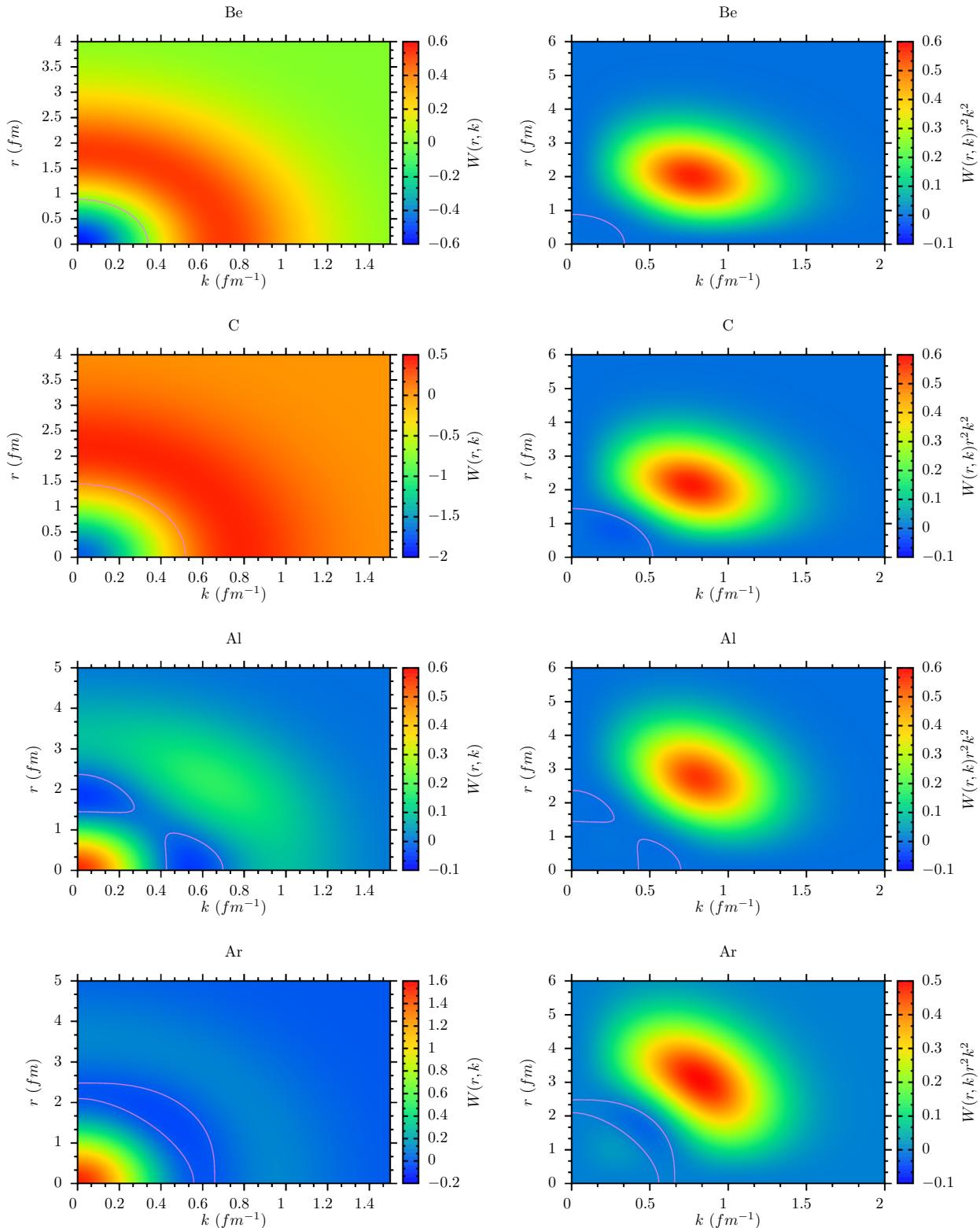
Een eerste opvallende eigenschap is dat alle berekende distributies oscillatorisch gedrag vertonen. Daar de totale Wignerdistributie in een ODM de som is van de Wignerdistributies van de bezette één-deeltjestoestanden tonen we deze individuele bijdragen in Figuur 5.1 voor een ijzerkern. Uit deze distributies valt dan op dat het aantal nodes toeneemt met de energie van de toestand bepaald door $N = 2n + l$. Het is zelfs zo dat het aantal nodes gelijk is aan N , een eigenschap die volgt uit de golffuncties van de respectievelijke toestanden, die dezelfde eigenschap hebben. We merken echter op dat voor $n = 1$ twee nodes samenkommen en een negatief gebied vormen. De Wignerdistributies, op deze van grondtoestand na, hebben negatieve waarden. De verwachte kwantumeffecten zijn dus aanwezig. Tenslotte merken we op dat het maximum van $W(r, k)r^2k^2$ opschuift naar grotere r naarmate we naar zwaardere kernen kijken. In k is er geen duidelijke verschuiving. Dit volgt uit de bijdragen van de individuele één-deeltjestoestanden die dezelfde eigenschap vertonen. Ter controle tonen we nog aan dat de berekende Wignerdistributies de correcte marginale distributies hebben (Figuur 5.5). We eisen namelijk dat de integratie van de Wignerdistributie van een kern over alle r -afhankelijkheid gelijk is aan de één-deeltjes impulsdistributie van deze kern. Deze voorwaarde is geformuleerd in uitdrukking (5.18).



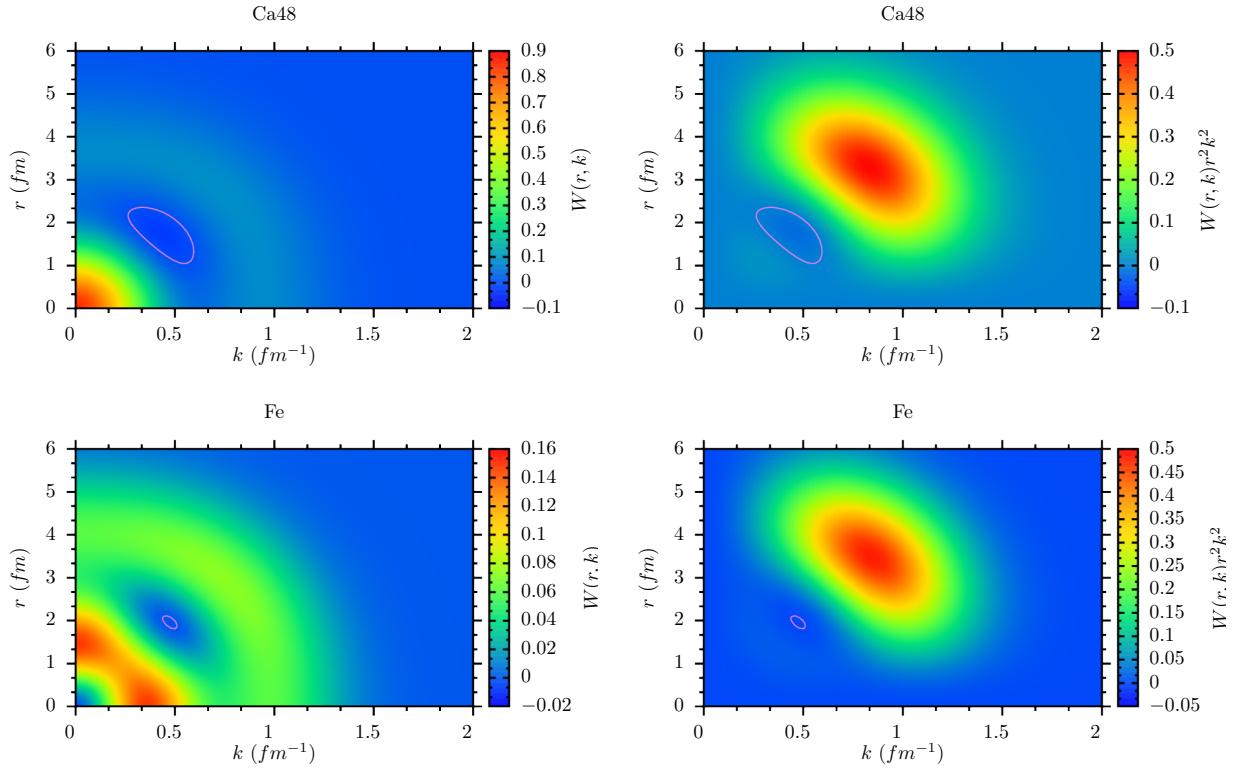
Figuur 5.1: Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.16), voor verschillende ééndeeltjestoestanden in een ijzerkern (Fe). Let steeds op de schalen van r en k , deze kunnen variëren van figuur tot figuur. Rechts: $W_{nl}(r, k)r^2k^2$ voor elk van deze toestanden. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.



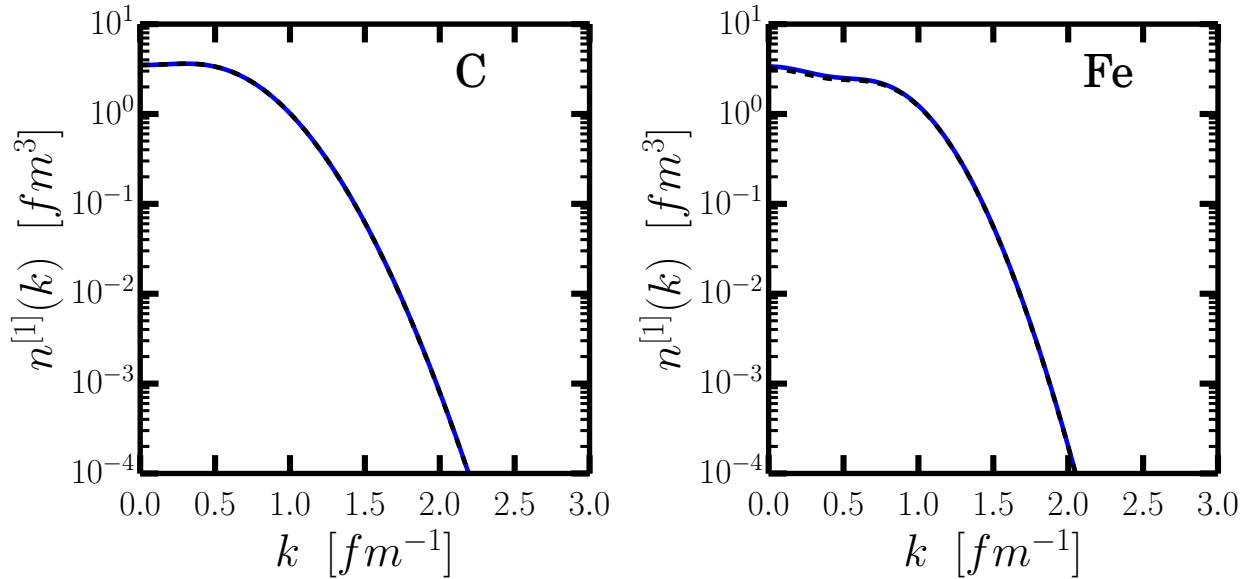
Figuur 5.2: Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.16), voor verschillende ééndeeltjestoestanden in een ijzerkern (Fe). Let steeds op de schalen van r en k , deze kunnen variëren van figuur tot figuur. Rechts: $W_{nl}(r, k)r^2k^2$ voor elk van deze toestanden. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.



Figuur 5.3: Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$ gegeven door uitdrukking (5.15), voor ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$ en ${}^{40}_{18}\text{Ar}$. Rechts: de bijhorende $W_{nl}(r, k)r^2k^2$. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.



Figuur 5.4: Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.15), voor $^{48}_{20}\text{Ca}$ en $^{56}_{26}\text{Fe}$. Rechts: de bijhorende $W_{nl}(r, k)r^2k^2$. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.



Figuur 5.5: De volle blauwe curve is de ééndeeltjes impulsdistributie berekend in Hoofdstuk 3 (vergelijking (3.19)). De gestreepte curve stelt $\int dr W(r, k)r^2$ voor met $W(r, k)$ gegeven door uitdrukking (5.15). We zien dat voorwaarde (5.18) is voldaan.

HOOFDSTUK 6

Conclusie en vooruitzichten

In dit hoofdstuk worden de besluiten uit bovenstaande onderzoeken gegeven en afsluitend besproken we nog enkele mogelijkheden voor verder onderzoek.

6.1 Conclusie

In een ODM is de één-deeltjes impulsdistributie een som van individuele bijdragen van de bezette orbitalen in een kern. Deze distributies vertonen niet-Gaussische kenmerken zoals een zekere scheefheid en kurtosis. De gemiddelde kinetische energie van een neutron en een proton in een kern, berekend aan de hand van de één-deeltjes impulsdistributies, ligt onder de waarde gegeven door een Fermi-model ($\langle T \rangle = 21 \text{ MeV}$). Ook modellen met correlaties tussen de nucleonen geven een hogere waarde omdat correlaties een brede staart bij hoge impuls introduceren ($k \gtrsim 2 \text{ fm}^{-1}$) en de gemiddelde kinetische energie afhankelijk is van het vierde moment van de impulsdistributie. Als we naar de impuls van twee nucleonen kijken in een onafhankelijke-deeltjes model kunnen we onderscheid maken tussen relatieve impuls die de twee nucleonen hebben ten opzichte van elkaar en de impuls van hun massacentrum. Zowel de verdeling van de relatieve impuls als de impuls van hun massacentrum is niet-Gaussisch en afwijkingen van een Gaussische distributie variëren met het massagetal van de kern. Uit vergelijking met resultaten berekend in een model met correlaties blijkt dat vooral $l = 0$ wordt beïnvloed door correlaties, die in de totale distributies voor een brede staart zorgen bij hoge impulsen. GV-berekeningen zijn hier relevant voor $k \lesssim 1.5 \text{ fm}^{-1}$. Uit de verdeling van de hoek tussen de relatieve impuls en de impuls van het massacentrum van twee nucleonen leren we dat twee nucleonen voornamelijk in een toestand voorkomen waarbij deze hoek $\frac{\pi}{2}$ is, een loodrechte configuratie. Daaruit volgt dat in een systeem van twee nucleonen de individuele impulsen bij voorkeur even groot zijn.

Tenslotte werden nog de Wigner-distributies van kernen uitgerekend welke een beeld geven van

de faseruimte van nucleonen in een kern. Deze distributies vertonen oscillatorisch gedrag en het maximum van de quasiprobabiliteit schuift steeds op naar grotere r voor grotere kernen.

6.2 Vooruitzichten

Eerst en vooral zou men andere golffuncties kunnen gebruiken, bijvoorbeeld eigenfuncties van de Schrödinger vergelijking met een WS potentiaal. Deze kunnen dan ontwikkeld worden in een basis van HO eigenfuncties zodat we nog steeds de handige eigenschappen van deze laatste kunnen gebruiken. Echter kwalitatief verwacht men een analoge uitkomst. Een ODM is een relatief goede benadering voor een kern maar het heeft beperkingen. Correlaties blijken essentieel om de experimenteel gemeten impulsdistributies te verklaren voor grote impuls. Er is echter reeds veel onderzoek gebeurd rond de invloed van deze correlaties, bijvoorbeeld in [18]. Interessant zijn de tweedeeltjes Wigner distributies die een beeld geven van de faseruimte van de relatieve beweging van twee nucleonen in een kern alsook de faseruimte van hun massacentrum. Tenslotte lijkt het ook interessant om een transformatie naar commutende variabelen toe te passen op de Wigner distributie, een pseudo-positie en een pseudo-impuls die bijvoorbeeld normaal verdeeld zijn, respectievelijk, rond de echte positie en impuls. Zo kan men de Wigner distributie transformeren naar een positief definierte functie die bijgevolg een probabiliteit voorstelt [3].

BIJLAGE A

Tweede kwantisatie

Kwantummechanica wordt meestal geïntroduceerd in een vorm die eerste kwantisatie heet. In de dit formalisme zijn golffuncties functie van de coördinaten van de bestudeerde objecten en elk van deze objecten krijgt dan een label. In tweede kwantisatie is de formulering echter zodanig dat er geen labels zijn. Dus we spreken niet meer over deeltje 1, deeltje 2, Dus in zekere zin sluit het tweede kwantisatie formalisme deze niet-fysische informatie uit. Het formalisme is heel handig om veeldeeltjessystemen te beschrijven. In de volgende sectie geven we de gebruikte conventies mee. We baseren ons hierbij op het hoofdstuk *Second quantization* uit [5].

A.1 Conventies

We schrijven de toestandsvector van een kern in tweede kwantisatie als

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \quad (\text{A.1.1})$$

waarbij n_α is het aantal deeltjes in het ééndeeltjes orbitaal u_α . Creatie- en annihilatie-operatoren worden respectievelijk gedefinieerd als c_α^\dagger en c_α . De creatie-operator c_α^\dagger voegt één deeltje toe aan een ééndeeltjes orbitaal u_α en c_α verwijdert één deeltje uit dit orbitaal:

$$c_\alpha^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes c_\alpha^\dagger \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \right) |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_\alpha\rangle \otimes \dots \quad (\text{A.1.2})$$

$$= (-1)^{s_\alpha} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes c_\alpha^\dagger |n_\alpha\rangle \otimes \dots \quad (\text{A.1.3})$$

$$= \delta_{0n_\alpha} (-1)^{s_\alpha} |n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_\alpha + 1, n_{\alpha+1}, \dots\rangle. \quad (\text{A.1.4})$$

waarbij

$$s_\alpha = n_1 + n_2 + \dots + n_{\alpha-1} \quad (\text{A.1.5})$$

en de Kronecker delta ervoor zorgt dat het Pauli-principe voldaan is. De factor $(-1)^{s_\alpha}$ volgt uit de anticommutatierelaties voor fermionen:

$$\{c_\alpha, c_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\{c_\alpha, c_\beta\} = \{c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger\} = 0. \quad (\text{A.1.7})$$

Relaties voor de annihilatie-operatoren volgen uit dezelfde principes:

$$c_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = \delta_{1n_\alpha} (-1)^{s_\alpha} |n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_\alpha - 1, n_{\alpha+1}, \dots\rangle. \quad (\text{A.1.8})$$

De teloper teloperator wordt gedefinieerd als

$$\hat{N} = \sum_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha \quad (\text{A.1.9})$$

en heeft eigenwaarden $N \in \mathbb{N}$ en eigenfuncties zijn golffuncties met een vast aantal deeltjes. Een genormaliseerde veeldeeltjestoestand kan gecreëerd worden door creatie-operatoren op de grondtoestand te laten inwerken:

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = (c_1^\dagger)^{n_1} (c_2^\dagger)^{n_2} \cdots |0\rangle. \quad (\text{A.1.10})$$

Voor fermionen zijn deze toestanden op één genormeerd en de n_i 's zijn 0 of 1. We kiezen een specifieke volgorde van de ééndeeltjestoestanden u_α en houden deze vast.

Een deeltje creëren op een plaats \vec{r} wordt gebeurt door de operator

$$\psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_\alpha c_\alpha^\dagger u_\alpha^*(\vec{r}) \quad (\text{A.1.11})$$

waarbij

$$c_\alpha^\dagger = \int d\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) u_\alpha^*(\vec{r}). \quad (\text{A.1.12})$$

Men kan bovenstaande definitie controleren door een deeltje te creëren in toestand α :

$$|\alpha\rangle = \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) |\vec{r}\rangle \quad (\text{A.1.13})$$

$$= \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) |0\rangle \quad (\text{A.1.14})$$

$$= \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) \sum_\beta c_\beta^\dagger u_\beta^*(\vec{r}) |0\rangle \quad (\text{A.1.15})$$

$$= c_\alpha^\dagger |0\rangle. \quad (\text{A.1.16})$$

Bij de laatste stap maakten we gebruik van de orthonormaliteit van de ééndeeltjesorbitalen:

$$\int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) u_\beta^*(\vec{r}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.1.17})$$

Men heeft ook nog de volgende handige relaties:

$$u_\alpha(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{\alpha} \rangle \quad (\text{A.1.18})$$

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.1.19})$$

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{A.1.20})$$

$$\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{A.1.21})$$

Nu wordt een genormaliseerde A-deeltjes Focktoestand in eerste kwantisatie:

$$|\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) |0\rangle. \quad (\text{A.1.22})$$

En de golffunctie in de configuratieruimte:

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A | n_1, n_2, n_3, \dots \rangle = \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A). \quad (\text{A.1.23})$$

A.2 Eéndeeltjes impulsoperator

Hier geven we een bewijs van de uitdrukking van de ééndeeltjes impulsoperator in tweede kwantisatie die de eenvoudige interpretatie van een teloperator in de impulsruimte. We beginnen bij de definitie:

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}'_1)} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) \\ &= \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 \int d\{\vec{r}_{2-A}\} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}'_1 \rangle \langle \Psi_A | \vec{r}_1, \{\vec{r}_{2-A}\} \rangle \langle \vec{r}'_1, \{\vec{r}_{2-A}\} | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{1}{A!} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 \int d\{\vec{r}_{2-A}\} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}'_1 \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) |0\rangle \langle 0 | \psi(\vec{r}_A) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

De projectie op de vacuümtoestand $|0\rangle \langle 0|$ kan vervangen worden door de eenheidsoperator omdat $\psi(\vec{r})$ ($\psi^\dagger(\vec{r})$) reeds alle deeltjes in de ket (bra) vector heeft geannihileerd:

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{A!} \int d\vec{r}'_1 \int d\vec{r}_{2-A} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}'_1 \rangle \\ &\quad \times \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) \psi(\vec{r}_A) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Integratie over de coördinaten \vec{r}_2 tot \vec{r}_A is triviaal aangezien $\int d\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r})$ de teloperator is in de configuratieruimte. Integratie over \vec{r}_A levert dus een factor één omdat het inwerkt op een toestandsvector $\psi(\vec{r}_{A-1}) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1) | \Psi_A \rangle$, waar alle deeltjes, op één na, geannihileerd zijn. Om dezelfde redenen geeft de integratie over \vec{r}_{A-1} een factor 2. Als men dus integreert over alle coördinaten \vec{r}_2 tot \vec{r}_A , krijgt men een factor $(A-1)!$. De ééndeeltjes impulsdistributie kan nu geschreven worden als

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{A} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}'_1 \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}'_1 \rangle \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}'_1) | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \Psi_A \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Bij de laatste stap maakten we gebruik van de definitie van creatie-en annihilatie-operatoren in de impulsruimte:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r}) \\ &= \int d\vec{r} \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \psi(\vec{r}).\end{aligned}\tag{A.2.4}$$

BIJLAGE B

Moshinsky-brakets

B.1 Recursieve berekening

Een tweedeeltjes golffunctie in een HO met totaal impulsmoment Λ en projectie M_Λ heeft een orthogonale transformatie van individuele coördinaten naar relatieve en massacentrumcoördinaten, namelijk de Moshinsky-transformatie [12]:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{nl, N\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda\rangle_{MB} |nlNL; \Lambda M_\Lambda\rangle. \quad (\text{B.1.1})$$

De transformatiecoëfficiënten zijn gekend als de Moshinsky-brakets en kunnen berekend worden volgens de recursieformule [17]:

$$\begin{aligned} \langle nlNL; \Lambda | n_1 + 1 l_1 n_2 l_2; \Lambda\rangle_{MB} &= [(n_1 + 1)(n_1 + l_1 + 3/2)]^{-1/2} \\ &\times \sum_{n'l'N'L'} \left\langle nlNL; \Lambda \left| -r_1^2 \right| n'l'N'L'; \Lambda \right\rangle \langle n'l'N'L'; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda\rangle_{MB}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

Wegens behoud van energie moet steeds gelden dat $2(n_1 + 1) + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n + l + 2N + L$. Indien dit niet het geval is, is de Moshinsky-braket nul. De matrix-elementen in relatie (B.1.2) zijn verschillend van nul voor slechts zes tweedeeltjestoestanden $|n'l'N'L'; \Lambda\rangle$ en zijn te vinden in Tabel B.1. Een analoge recursierelatie waarbij de index n_2 wordt verhoogd krijgen we door in de eerste factor de index te veranderen ($1 \rightarrow 2$) en de laatste vier matrix-elementen, nu van $-r_2^2$, in Tabel B.1 krijgen een minteken.

n'	l'	N'	L'	$\langle nlNL; \Lambda -r_1^2 n'l'N'L'; \Lambda \rangle$
$n-1$	l	N	L	$\frac{1}{2} \left[n \left(n + l + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}$
n	l	$N-1$	L	$\frac{1}{2} \left[N \left(N + L + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}$
$n-1$	$l+1$	$N-1$	$L+1$	$[nN(l+1)(L+1)]^{1/2} (-1)^{\Lambda+l+l} W(l+1LL+1; 1\Lambda)$
$n-1$	$l+1$	N	$L-1$	$[n(N+L+1/2)(l+1)L]^{1/2} (-1)^{\Lambda+l+l} W(l+1LL-1; 1\Lambda)$
n	$l-1$	$N-1$	$L+1$	$[(n+l+1/2)Nl(L+1)]^{1/2} (-1)^{\Lambda+l+l} W(l-1LL+1; 1\Lambda)$
n	$l-1$	N	$L-1$	$[(n+l+1/2)(N+L+1/2)lL]^{1/2} (-1)^{\Lambda+l+l} W(l-1LL-1; 1\Lambda)$

Tabel B.1: Matrixelementen van $-r_1^2$.

Dus kan men $\langle nlNL; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB}$ berekenen startend van [17]:

$$\begin{aligned} \langle nlNL; \Lambda | 0l_10l_2; \Lambda \rangle_{MB} &= \left[\frac{l_1!l_2!}{(2l_1)!(2l_2)!} \frac{(2l+1)(2L+1)}{2^{l+L}} \frac{(n+l)!}{n!(2n+2l+1)!} \frac{(N+L)!}{n!(2N+2L+1)!} \right]^{1/2} \\ &\quad \times (-1)^{n+l+L-\Lambda} \sum_x (2x+1) A(l_1l, l_2L, x) W(lLL_1l_2; \Lambda x). \quad (\text{B.1.3}) \end{aligned}$$

Hierbij is

$$\begin{aligned} A(l_1l, l_2L, x) &= \\ &\left[\frac{(l_1+l+x+1)!(l_1+l-x)!(l_1+x-l)!}{(l+x-l_1)!} \frac{(l_2+L+x+1)!(l_2+L-x)!(l_2+x-L)!}{(L+x-l_2)!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_q (-1)^{\frac{l+q-l_1}{2}} \frac{(l+q-l_1)!}{\binom{(l+q-l_1)}{2}!} \frac{1}{\binom{(l+l_1-q)}{2}!} \frac{(L+q-l_2)!}{\binom{(L+q-l_2)}{2}!} \frac{1}{\binom{(L+l_2-q)}{2}!}. \quad (\text{B.1.4}) \end{aligned}$$

De sommatie over q is beperkt tot die positieve waarden van q waarvoor de argumenten van de faculteiten niet-negatief zijn. $W(lLL_1l_2; \Lambda x)$ stelt de Racah W coefficient voor en staat in verband met de Wigner 6j-symbolen:

$$W(lLL_1l_2; \Lambda x) = (-1)^{l+L+l_1+l_2} \left\{ \begin{matrix} l & L & \Lambda \\ l_2 & l_1 & x \end{matrix} \right\}. \quad (\text{B.1.5})$$

De restricties voor de sommatie over x in (B.1.3) worden gegeven door :

$$|l - l_1| \leq x \leq l + l_1 \quad |L - l_2| \leq x \leq L + l_2. \quad (\text{B.1.6})$$

Deze relaties volgen uit de symmetrie-eigenschappen van het Wigner 6j-symbool.

B.2 Eigenschappen

Moshinsky-brakets hebben de volgende orthogonaliteitsrelaties:

$$\sum_{nlNL} \langle nlNL; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB} \langle nlNL; \Lambda | n'_1l'_1n'_2l'_2; \Lambda \rangle_{MB} = \delta_{n_1n'_1}\delta_{l_1l'_1}\delta_{n_2n'_2}\delta_{l_2l'_2}, \quad (\text{B.2.1})$$

$$\sum_{n_1l_1n_2l_2} \langle nlNL; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB} \langle n'l'N'l'; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB} = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{NN'}\delta_{LL'}. \quad (\text{B.2.2})$$

De volgende symmetrierelaties gelden:

$$\begin{aligned} \langle nlNL; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB} &= (-1)^{L-\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_2l_2n_1l_1; \Lambda \rangle_{MB} \\ &= (-1)^{l_1-\Lambda} \langle NLnl; \Lambda | n_1l_1n_2l_2; \Lambda \rangle_{MB} \\ &= (-1)^{l_1+l} \langle NLnl; \Lambda | n_2l_2n_1l_1; \Lambda \rangle_{MB} \\ &= (-1)^{l_2+L} \langle n_1l_1n_2l_2; \Lambda | NLnl; \Lambda \rangle_{MB}. \end{aligned}$$

Het bewijs van bovenstaande relaties kan men vinden in [4].

BIJLAGE C

Antisymmetrische toestand in relatieve en massacentrumcoördinaten

We willen de genormaliseerde antisymmetrische toestand in de impulsruimte

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \alpha \beta \rangle_{nas} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_\alpha(\vec{k}_1) \phi_\beta(\vec{k}_2) - \phi_\beta(\vec{k}_1) \phi_\alpha(\vec{k}_2)], \quad (\text{C.0.1})$$

ontwikkelen in toestanden gekarakteriseerd door kwantumgetallen van de relatieve beweging (nlm_l) en massacentrumbeweging (NLM_L), alsook door een totale spin S en isospin T met respectievelijke projecties M_S en M_T :

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \alpha \beta \rangle_{nas} = \sum_{\substack{n l m_l \\ N L M_L}} \sum_{S M_S} \sum_{T M_T} C_{\alpha \beta}^{n l m_l N L M_L S M_S T M_T} \langle n l m_l(\vec{k}) N L M_L(\vec{P}) S M_S T M_T \rangle \quad (\text{C.0.2})$$

met

$$\langle n l m_l(\vec{k}) N L M_L(\vec{P}) S M_S T M_T \rangle \equiv \langle \vec{k} | n l m_l \rangle \langle \vec{P} | N L M_L \rangle | S M_S \rangle | T M_T \rangle. \quad (\text{C.0.3})$$

Hiertoe beschouwen we eerst het product van twee golffuncties in de impulsruimte in individuele coördinaten:

$$\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2). \quad (\text{C.0.4})$$

Daar de uitdrukking (4.21) transformeert tussen gekoppelde toestanden, moet men eerst de impulsmomenten in toestand (C.0.4) koppelen tot een totaal impulsmoment Λ en projectie M_Λ :

$$\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) = \sum_{\Lambda M_\Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \left[\psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2) \right]_{\Lambda M_\Lambda}.$$

Hierbij werd gebruik gemaakt van de notatie:

$$\left[\psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2) \right]_{\Lambda M_\Lambda} \equiv \sum_{m_\alpha m_\beta} \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle.$$

Nu kan men de Moshinsky-transformatie toepassen:

$$\begin{aligned} [\psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2)]_{\Lambda M_\Lambda} &= \sum_{nl} \sum_{NL} [\psi_{nl}(\vec{k}) \psi_{NL}(\vec{P})]_{\Lambda M_\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \\ &= \sum_{nlm_l} \sum_{NLM_L} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \\ &\quad \times \psi_{nlm_l}(\vec{k}) \psi_{NLM_L}(\vec{P}). \end{aligned}$$

Dus wordt (C.0.4):

$$\begin{aligned} \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) &= \sum_{nlm_l} \sum_{\Lambda M_\Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \\ &\quad \times \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \psi_{nlm_l}(\vec{k}) \psi_{NLM_L}(\vec{P}). \end{aligned} \quad (\text{C.0.5})$$

Om een uitdrukking te vinden voor de antisymmetrische toestand (C.0.1) kan men in de eerste term ofwel de coördinaten \vec{k}_1 en \vec{k}_2 omwisselen ofwel de kwantumgetallen $n_\alpha l_\alpha m_\alpha$ en $n_\beta l_\beta m_\beta$. Omwisselen van \vec{k}_1 en \vec{k}_2 resulteert in een transformatie van de relatieve impuls $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$. Gebruik makende van de pariteitseigenschappen van de sferische harmonieken

$$Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \rightarrow Y_{lm_l}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \quad (\text{C.0.6})$$

krijgt men:

$$\psi_{nlm_l}(\vec{k}) \rightarrow \psi_{nlm_l}(-\vec{k}) = (-1)^l \psi_{nlm_l}(\vec{k}). \quad (\text{C.0.7})$$

Als men de kwantumgetallen $n_\alpha l_\alpha m_\alpha$ en $n_\beta l_\beta m_\beta$ omwisselt dan kan men gebruik makende van de symmetrie relaties van de Clebsch-Gordan en de Moshinsky-brakets

$$\langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \rightarrow \langle l_\beta m_\beta l_\alpha m_\alpha | \Lambda M_\Lambda \rangle = (-1)^{l_\alpha + l_\beta - \Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle, \quad (\text{C.0.8})$$

$$\langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \rightarrow \langle nlNL; \Lambda | n_\beta l_\beta n_\alpha l_\alpha; \Lambda \rangle_{MB} = (-1)^{L-\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB}.$$

Gebruik makende van de relatie $2n_\alpha + l_\alpha + 2n_\beta + l_\beta = 2n + l + 2N + L$ krijgt men een factor $(-1)^l$. Dit is zoals verwacht dezelfde factor als bekomen door het verwisselen van \vec{k}_1 en \vec{k}_2 . Het spin en isospin deel van de golffunctie kunnen we als volgt behandelen:

$$\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha} \chi_{\frac{1}{2}\sigma_\beta} \equiv \left| \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \right\rangle = \sum_{SM_S} \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta | SM_S \right\rangle | SM_S \rangle.$$

Een pariteitsoperatie levert, rekening houdend met (C.0.8):

$$\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\beta} \chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha} \equiv \left| \frac{1}{2}\sigma_\beta \frac{1}{2}\sigma_\alpha \right\rangle = \sum_{SM_S} (-1)^{1+S} \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta | SM_S \right\rangle | SM_S \rangle. \quad (\text{C.0.9})$$

Er is een analoge uitdrukking voor het isospin gedeelte. Combinatie van bovenstaande resultaten geeft de volgende transformatiecoëfficient in (C.0.2):

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^{nlm_l NLM_l SM_S TM_T} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1 - (-1)^{l+S+T}] \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta | SM_S \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}\tau_\alpha \frac{1}{2}\tau_\beta | TM_T \right\rangle \\ &\quad \times \sum_{\Lambda M_\Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle. \end{aligned}$$

BIJLAGE D

Wignerdistributie in sferische coördinaten

Het is de bedoeling een uitdrukking voor

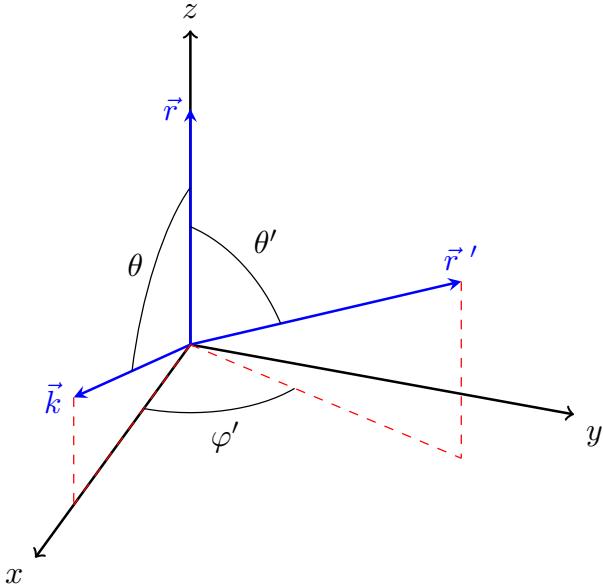
$$W_{nlm}(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}' \phi_{nlm}^* \left(\vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2} \right) \phi_{nlm} \left(\vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2} \right) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad (\text{D.0.1})$$

te bekomen in sferische coördinaten. We definiëren een coördinatensysteem (x, y, z) , weergegeven in Figuur D.1, zodat \vec{r} langs de z-as ligt en \vec{k} in het xz -vlak ligt:

$$\vec{r} = r(0, 0, 1)$$

$$\vec{k} = k(\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

$$\vec{r}' = r'(\sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta').$$



Figuur D.1: Nieuw coördinatensysteem voor de berekening van de Wignerdistributie.

We kunnen dan de volgende vectoren definiëren:

$$\vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{r}'}{2},$$

$$\vec{r}_- = \vec{r} - \frac{\vec{r}'}{2}.$$

In sferische coördinaten $(r_{\pm}, \theta_{\pm}, \varphi_{\pm})$ worden deze gegeven door:

$$\vec{r}_+ = \left(\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} + rr' \cos \theta'}, \arccos \left(\frac{r + \frac{r'}{2} \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} + rr' \cos \theta'}} \right), \varphi' \right)$$

en

$$\vec{r}_- = \left(\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} - rr' \cos \theta'}, \arccos \left(\frac{r - \frac{r'}{2} \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} - rr' \cos \theta'}} \right), \varphi' + \pi \right)$$

zodat

$$W_{nlm}(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r'^2 \sin \theta' R_{nl}(r_-) R_{nl}(r_+) \times Y_{lm}^*(\theta_-, \varphi_-) Y_{lm}(\theta_+, \varphi_+) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}, \quad (\text{D.0.2})$$

waarbij R_{nl} de radiële harmonische oscillator golffunctie en Y_{lm} de sferische harmoniek:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (\text{D.0.3})$$

Hier zijn P_{lm} de geassocieerde Legendrepolynomen. Deze zijn altijd reëel als hun argument reëel is. Aangezien de φ_\pm -component van \vec{r}_\pm op een constante term na onafhankelijk is van het onderschrift geldt dat

$$Y_{lm}^*(\theta_-, \varphi_-) Y_{lm}(\theta_+, \varphi_+) = (-1)^m \frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\cos \theta_+) P_{lm}(\cos \theta_-) \equiv f(\theta_-, \theta_+). \quad (\text{D.0.4})$$

Dan bevindt de φ_\pm -afhankelijkheid in het integrandum van (D.0.2) zich slechts in de exponentiële en kan de integraal over φ' geëvalueerd worden als

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikr' \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi'} d\varphi' = 2\pi J_0(kr' \sin \theta \sin \theta') \quad (\text{D.0.5})$$

waarbij J_0 de cilindrische Besselfunctie van de nulde orde is. We merken ook op dat in een sferisch symmetrisch systeem geldt

$$W_{nlm}(\vec{r}, \vec{k}) \equiv W_{nlm}(r, k, \theta) \quad (\text{D.0.6})$$

Combinatie van bovenstaande elementen geeft dan een analytische uitdrukking voor de Wigner-distributie in sferische coördinaten:

$$\begin{aligned} W_{nlm}(r, k, \theta) &= (-1)^m \frac{(2l+1)}{16\pi^3} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ &\times \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' r'^2 \sin \theta' R_{nl} \left(\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} - rr' \cos \theta'} \right) R_{nl} \left(\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} + rr' \cos \theta'} \right) \\ &\times P_{lm} \left(\frac{r - \frac{r'}{2} \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} - rr' \cos \theta'}} \right) P_{lm} \left(\frac{r + \frac{r'}{2} \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + \frac{r'^2}{4} + rr' \cos \theta'}} \right) \\ &\times J_0(kr' \sin \theta \sin \theta') \exp(-ikr' \cos \theta \cos \theta'). \end{aligned} \quad (\text{D.0.7})$$

Integratie over alle hoekafhankelijkheden geeft:

$$W_{nlm}(r, k) = 8\pi^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta W_{nlm}(\vec{r}, \vec{k}) \quad (\text{D.0.8})$$

Uit de symmetrierelaties van de geassocieerde Legendrepolynomen

$$P_{l-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x) \quad (\text{D.0.9})$$

en de normalisatiefactor in (D.0.7) volgt dat

$$W_{nl-m}(r, k) = W_{nlm}(r, k). \quad (\text{D.0.10})$$

Overzicht code

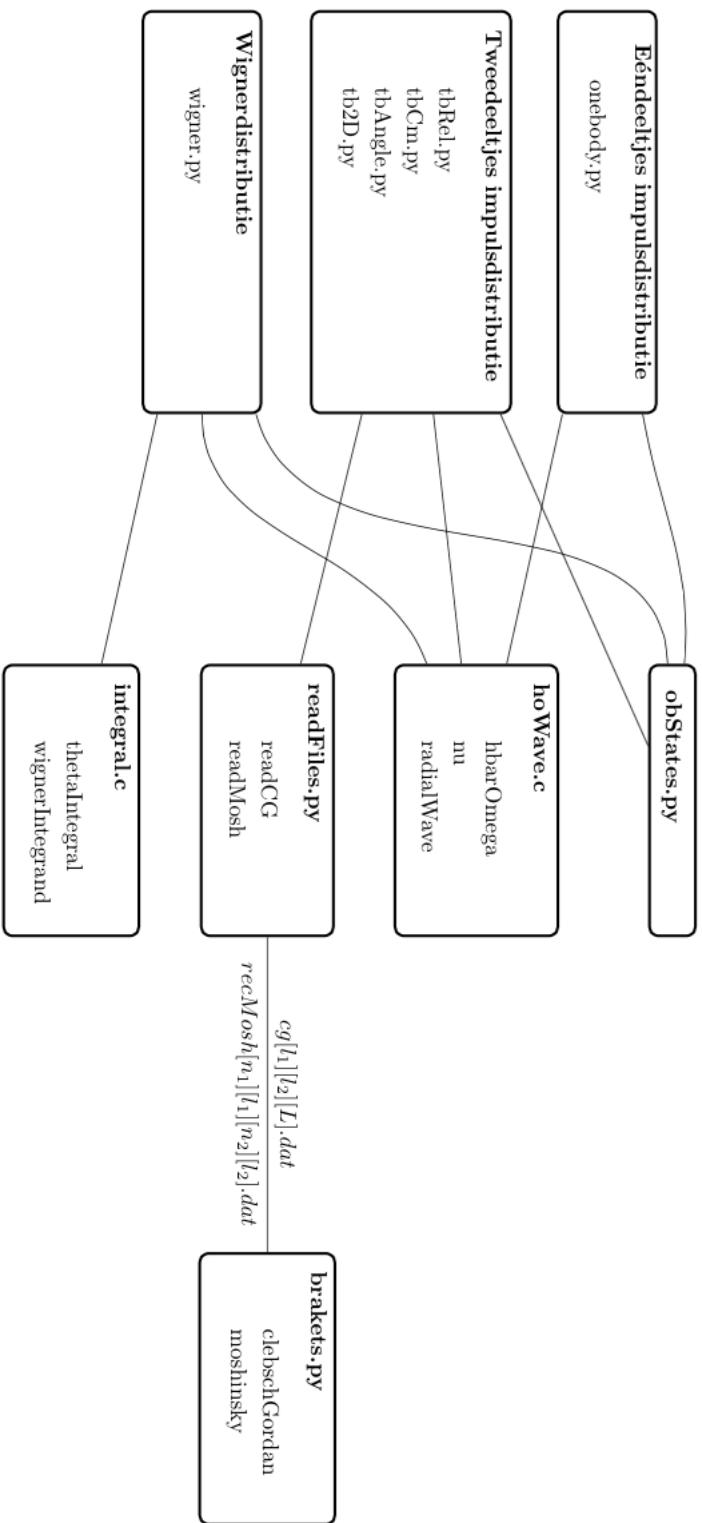
Wegens de relatief makkelijke leesbaarheid en eenvoudige implementatie werden, op enkele na, alle programma's in Python¹ geschreven. Python-code wordt niet gecompileerd en is bijgevolg relatief traag. Omdat de snelheid soms een probleem was hebben we enkele functies, voornamelijk diegene die we het meest aanroepen, geïmplementeerd in c-code en vervolgens geïmporteerd in onze Python-code. Zo is de radiële HO golffunctie geschreven in c-code. Een overzicht van de code vindt men in Figuur E.1. Links bevinden zich de hoofdprogramma's die voor onze uiteindelijke data zorgen. Deze maken elk op zich gebruik maken van *obStates.py* die voor een gegeven totaal aantal nucleonen aan de hand van de opvulling beschreven in Figuren 2.4 en 2.3 bepaalt hoeveel nucleonen zich in elke toestand *nl* bevinden. Dan berekent *onebody.py* de ééndeeltjes impulsdistributie aan de hand van formule (3.19) waarbij de radiële HO golffuncties uit de c-code *hoWave.c* wordt opgeroepen. Dit laatste geldt trouwens ook voor de andere hoofdprogramma's. Transformatiecoëfficienten (D.0.1) worden in elk van de tweedeeltjes Python-code berekend op basis van Moshinsky-brakets en Clebsch-Gordancoëfficienten ingelezen uit bestanden door *readFiles.py*. De reden om deze eerst weg te schrijven naar bestanden is de lange rekentijd voor sommige van deze coëfficienten. *brakets.py* rekent Moshinskybrakets uit aan de hand van de recursieve methode beschreven in B.1. Tenslotte is er nog *wigner.py* die uitdrukking (D.0.8) uitrekent. De buitenste integratie (over θ) doen we eerst aangezien deze afhankelijkheid slechts in de twee functies (J_0 en \cosinus) bevindt. Deze integratie gebeurt numeriek gebruik makende van GNU scientific Library². Integraties over r' en θ' gebeuren in Python met behulp van de *quad*-procedure³. De vermelde integralen zijn steeds ééndimensionaal en van de gedaante

$$I = \int_a^b dx f(x) \tag{E.0.1}$$

¹www.python.org

²www.gnu.org/software/gsl/.

³<http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.15.1/reference/generated/scipy.integrate.quad.html>



Figuur E.1: Overzicht van de code: uiterst links vindt men de hoofdprogramma's en gaande naar rechts worden de hulpprogramma's getoond.

en worden numeriek benaderd, met uitkomst I_{calc} , met als voorwaarde

$$|I_{calc} - I| \leq \max(\epsilon_{abs}, \epsilon_{rel}), \quad (\text{E.0.2})$$

waarbij ϵ_{abs} en ϵ_{rel} respectievelijk de gewenste maximale absolute en relatieve fout. Wij hebben gekozen voor de maximale waarden

$$\begin{aligned}\epsilon_{abs} &= 10^{-6} \\ \epsilon_{rel} &= 10^{-4}\end{aligned}$$

uit afweging tussen snelheid en precisie.

BIJLAGE F

Lijst van afkortingen

NN nucleon-nucleon

LBNE Long-Baseline Neutrino Experiment

GV gemiddeld veld

HO harmonische oscillator

WS Woods-Saxon

ODM onafhankelijke-deeltjes model

ENDM éédeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix

TNDM tweedeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix

Bibliografie

- [1] C Anderson, M Antonello, B Baller, T Bolton, C Bromberg, F Cavanna, E Church, D Edmunds, A Ereditato, S Farooq, et al. First measurements of inclusive muon neutrino charged current differential cross sections on argon. *Physical Review Letters*, 108(16):161802, 2012.
- [2] A Ankowski, R Beminiwattha, O Benhar, DG Crabb, DB Day, F Garibaldi, G Garvey, D Gaskell, C Giusti, O Hansen, et al. Measurement of the spectral function of ^{40}Ar through the $(e, e' p)$ reaction. *arXiv preprint arXiv:1406.4080*, 2014.
- [3] George A. Baker, Ian E. McCarthy, and Charles E. Porter. Application of the phase space quasi-probability distribution to the nuclear shell model. *Phys. Rev.*, 120:254–264, Oct 1960.
- [4] Thomas A Brody and Marco Moshinsky. *Tables of transformation brackets for nuclear shell-model calculations*. Gordon and Breach, 1967.
- [5] Willem Hendrik Dickhoff and Dimitri Van Neck. *Many-body theory exposed!: propagator description of quantum mechanics in many-body systems*. World Scientific, 2008.
- [6] R.J. Griffiths and R.M. Eisberg. The mechanism of the direct interaction process at intermediate energies. *Nuclear Physics*, 12(3):225 – 236, 1959.
- [7] Otto Haxel, J. Hans D. Jensen, and Hans E. Suess. On the "magic numbers" in nuclear structure. *Phys. Rev.*, 75:1766–1766, Jun 1949.
- [8] Ernest M Henley and Alejandro Garcia. *Subatomic Physics*, volume 35. World Scientific, 2007.
- [9] T Kobayashi, K Ozeki, K Watanabe, Y Matsuda, Y Seki, T Shinohara, T Miki, Y Naoi, H Otsu, S Ishimoto, et al. ($p, 2p$) reactions on 9–16 c at 250 mev / a. *Nuclear Physics A*, 805(1):431c–438c, 2008.
- [10] Eugene Marshalek, Lucy Wu Person, and Raymond K. Sheline. Systematics of deformations of atomic nuclei. *Rev. Mod. Phys.*, 35:108–116, Jan 1963.

- [11] Maria G. Mayer. On closed shells in nuclei. *Phys. Rev.*, 74:235–239, Aug 1948.
- [12] Marcos Moshinsky. Transformation brackets for harmonic oscillator functions. *Nuclear Physics*, 13(1):104–116, 1959.
- [13] RA Niyazov, LB Weinstein, G Adams, P Ambrozewicz, E Anciant, M Anghinolfi, B Asavapibhop, G Asryan, G Audit, T Auger, et al. Two-nucleon momentum distributions measured in ${}^3\text{He}(e, e' pp)n$. *Physical review letters*, 92(5):052303, 2004.
- [14] Bogdan Povh, Martin Lavelle, Klaus Rith, Christoph Scholz, and Frank Zetsche. *Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [15] Ernest Rutherford. Nuclear constitution of atoms. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, pages 374–400, 1920.
- [16] Jan Ryckebusch, Maarten Vanhalst, and Wim Cosyn. Stylized features of single-nucleon momentum distributions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 42(5):055104, 2015.
- [17] D Ursescu, M Tomaselli, T Kuehl, and S Fritzsche. Symbolic algorithms for the computation of moshinsky brackets and nuclear matrix elements. *Computer physics communications*, 173(3):140–161, 2005.
- [18] Maarten Vanhalst. *Quantifying short-range correlations in nuclei*. PhD thesis, Universiteit Gent, 2014.
- [19] Maarten Vanhalst, Jan Ryckebusch, and Wim Cosyn. Quantifying short-range correlations in nuclei. *Phys. Rev. C*, 86:044619, Oct 2012.
- [20] Eugene Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40(5):749, 1932.
- [21] Robert B Wiringa, Rocco Schiavilla, Steven C Pieper, and J Carlson. Nucleon and nucleon-pair momentum distributions in $a \leq 12$ nuclei. *Physical Review C*, 89(2):024305, 2014.

Lijst van figuren

2.1	Links: Beschouwen een kern met vier nucleonen, $A = 4$. Als elk nucleon met alle andere nucleonen in de kern interageert dan zijn er $4(4 - 1)/2$ interacties en is de bindingsenergie (B) proportioneel met $A(A - 1)$. Voor zware kernen zou dan bij benadering gelden dat $B \propto A^2$. Rechts: Bindingsenergie per nucleon (B/A) als functie van A [8]. Het is duidelijk dat een nucleon slechts interageert met een beperkt aantal andere nucleonen in de kern, m.a.w het aantal interacties per nucleon satureert. Vooral bij zwaardere kernen valt dit op.	6
2.2	Vergelijking van verschillende GV-potentialen voor argon ($A = 40$). De gestreepte groene curve stelt een WS potentiaal voor, gegeven door uitdrukking (2.5), met $V_{WS} = -51$ MeV, $c = 1.2$ fm en $a = 0.67$ fm. De volle blauwe curve is een HO potentiaal, gegeven door uitdrukking (2.6), waarbij ω gegeven door (2.7) met $A = 40$ en $V_0 = 53$ MeV.	7
2.3	Links: invloed van een spin-baan interactie op de eigentoestanden $1s$ en $0d$ van de Hamiltoniaan met een Woods-Saxon potentiaal. Rechts: volgorde waarin we toestanden bezetten in de harmonische oscillator potentiaal.	9
2.4	Energieschema van individuele orbitalen in een Woods-Saxon potentiaal uit [8].	10
2.5	De probabiliteitsdistributie $R^2(r)r^2$ voor twee ontaarde toestanden in de harmonische oscillator ($E = \frac{7}{2}\hbar\omega$). De beschouwde kern is argon ($A = 40$).	10
3.1	Feynmandiagram van de ééndeeltjes impulsoperator. De operator annihileert en creëert een nucleon met momentum \vec{k} op hetzelfde tijdstip, zo is er geen energiestroom. De initiële en finale toestand zijn dan dezelfde.	12

3.2 Eigenschappen van $n^{[1]}(k)k^2$ waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). σ wordt getoond in eenheid fm^{-1} . Kurtosis κ en scheefheid S zijn, respectievelijk, berekend aan de hand van uitdrukkingen (3.26) en (3.25). Let op: kurtosis wordt in absolute waarde gegeven.	18
3.3 Eéndeeltjes impulsdistributie $n^{[1]}(k)$ voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$, ${}^{208}_{82}Pb$. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$	19
3.4 Blauwe curve: $n^{[1]}(k)k^2$ voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$, ${}^{208}_{82}Pb$. Gestreepte rode curve: een normale verdeling ((3.24)) gefit aan de resultaten. De parameters zijn μ , σ zijn gefit volgens de methode van de kleinste kwadraten en χ^2 (zie (3.27)) is de goedheid van de fit. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$	20
3.5 Blauwe curve: $n^{[1]}(k)k^2$ voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$, ${}^{208}_{82}Pb$. Gestreepte rode curve: de functie (3.30) gefit aan de resultaten volgens de methode van de kleinste kwadraten. De gefitte parameters zijn μ , σ_{norm} en α . De parameter χ^2 (zie (3.27) met $P_{normal}(k)$ vervangen door $P_{PG}(k)$, gegeven door (3.30).) is de goedheid van de fit. Hier is $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). De normalisatie is zodanig dat $\int dk n^{[1]}(k)k^2 = 1$	21
4.1 Illustratie van relatieve en massacentrumcoördinaten van twee deeltjes.	24
4.2 We kunnen een transformatie doen naar dit coördinatensysteem zodat alle hoeken verdwijnen behalve de hoek tussen \vec{k}_{12} en \vec{P}_{12} : de azumitale hoek φ is voor beide vectoren nul en ook de poolhoek $\theta_{k_{12}}$ is nul.	29
4.3 Berekende $n^{[2]}(k_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.25) voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{48}_{20}Ca$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$. De normalisatie is zodanig dat $\int dk_{12} k_{12}^2 n^{[2]}(k_{12}) = 1$	30
4.4 Berekende $n^{[2]}(k_{12})$, $n^{[2]}(k_{12})$ met gegeven door uitdrukking (4.25), voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{48}_{20}Ca$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$. De normalisatie is zodanig dat $\int dk_{12} k_{12}^2 n^{[2]}(k_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.	31
4.5 $n^{[2]}(P_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.26) voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{48}_{20}Ca$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$. Normalisatie is zodanig dat $\int dP_{12} P_{12}^2 n^{[2]}(P_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.	32
4.6 $n^{[2]}(P_{12})P_{12}^2$, met $n^{[2]}(P_{12})$ gegeven door uitdrukking (4.26), voor ${}^{12}_6C$, ${}^{27}_{13}Al$, ${}^{40}_{18}Ar$, ${}^{48}_{20}Ca$, ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{109}_{47}Ag$. De normalisatie is zodanig dat $\int dP_{12} P_{12}^2 n^{[2]}(P_{12}) = 1$. De bijdragen van de tweedeeltjes relatieve impulsmomenten l worden getoond.	33
4.7 De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid S van relatieve tweedeeltjes impulsdistributies van Figuur 4.4. Numerieke waarden staan in Tabel 4.1. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.	34

4.8	De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid S van massacentrum tweedeeltjes impulsdistributies van Figuur 4.6. Numerieke waarden staan in Tabel 4.2. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.	34
4.9	De breedte σ en de kurtosis κ van de hoekdistributies tweedeeltjes impuls van Figuur 4.10. Scheefheid van deze distributie S is nul voor alle beschouwde kernen. Daar de kurtosis steeds negatief is tonen we zijn absolute waarde.	35
4.10	Hoekdistributies $n^{[2]}(\theta_{kp})$ en $n^{[2]}(\theta_{kp}) \sin \theta_{kp}$ van tweedeeltjes impuls waarbij $n^{[2]}(\theta_{kp})$ gegeven door uitdrukking (4.27). De normalisatie is zodanig dat $\int d\theta_{kp} n^{[2]}(\theta_{kp}) \sin \theta_{kp} = 1$	36
4.11	Vergelijking van resultaten voor $n^{[2]}(k_{12})$ (links) en $n^{[2]}(P_{12})$ (rechts) met resultaten uit [18]. De gestreepte curve is het resultaat bekomen door [18] en de blauwe curve ons resultaat.	37
5.1	Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.16), voor verschillende één-deeltjestoestanden in een ijzerkern (Fe). Let steeds op de schalen van r en k , deze kunnen variëren van figuur tot figuur. Rechts: $W_{nl}(r, k)r^2k^2$ voor elk van deze toestanden. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.	43
5.2	Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.16), voor verschillende één-deeltjestoestanden in een ijzerkern (Fe). Let steeds op de schalen van r en k , deze kunnen variëren van figuur tot figuur. Rechts: $W_{nl}(r, k)r^2k^2$ voor elk van deze toestanden. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.	44
5.3	Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$ gegeven door uitdrukking (5.15), voor ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$ en ${}^{40}_{18}\text{Ar}$. Let steeds op de schalen van r en k . Rechts: de bijhorende $W_{nl}(r, k)r^2k^2$. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.	45
5.4	Links: Wignerdistributies $W_{nl}(r, k)$, gegeven door uitdrukking (5.15), voor ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ en ${}^{56}_{26}\text{Fe}$. Let steeds op de schalen van r en k . Rechts: de bijhorende $W_{nl}(r, k)r^2k^2$. De lichpaarse lijn stelt de nodes voor van de beschouwde functie om de negatieve gebieden beter in kaart te brengen.	46
5.5	De volle blauwe curve is de één-deeltjes impulsdistributie berekend in Hoofdstuk 3(vergelijking (3.19)). De gestreepte curve stelt $\int dr W(r, k)r^2$ voor met $W(r, k)$ gegeven door uitdrukking (5.15). We zien dat voorwaarde (5.18) is voldaan.	46
D.1	Nieuw coördinatensysteem voor de berekening van de Wignerdistributie.	60
E.1	Overzicht van de code: uiterst links vindt men de hoofdprogramma's en gaande naar rechts worden de hulpprogramma's getoond.	64

Lijst van tabellen

3.1	De gemiddelde kinetische energie van neutronen en protonen voor verschillende ker- nen. x_p is de protonfractie, $x_p = Z/A$. De waarden zijn berekend aan de hand van uitdrukking 3.21 waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7).	17
3.2	Eigenschappen van $n^{[1]}(k)k^2$ waarbij $n^{[1]}(k)$ (3.19) berekend is met HO ééndeeltjes golffuncties (3.15) met A -afhankelijke parameter ω gegeven door (2.7). Kurtosis κ en scheefheid S zijn, respectievelijk, berekend aan de hand van uitdrukkingen (3.26) en (3.25).	18
4.1	De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid S van relatieve tweedeeltjes impulsdis- tributies van Figuur 4.4.	34
4.2	De breedte σ , de kurtosis κ en de scheefheid S van massacentrum tweedeeltjes im- pulsdistributies van Figuur 4.6.	35
B.1	Matrixelementen van $-r_1^2$	54