



FACULTEIT WETENSCHAPPEN  
VAKGROEP FYSICA EN STERRENKUNDE

Academiejaar 2014–2015

# IMPULSDISTRIBUTIES VOOR ATOMAIRE KERNEN

Jarrick Nys

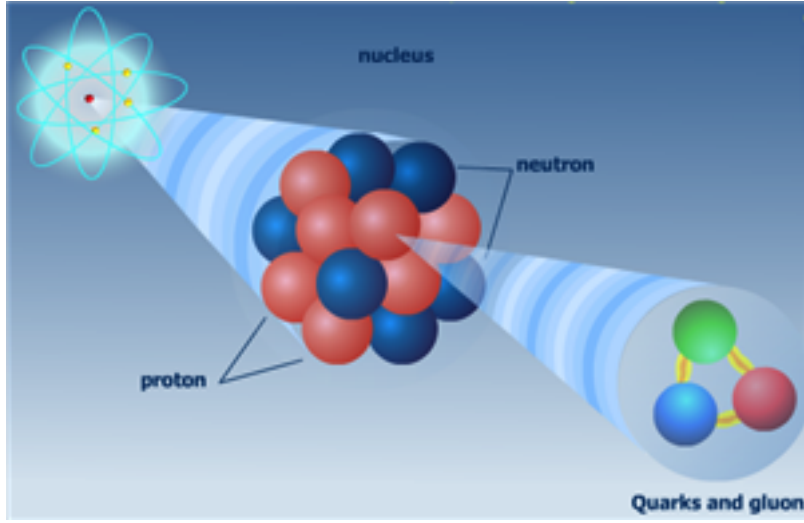
Promotor: Prof. dr. J. Ryckebusch  
Begeleider: Camille Colle

Scriptie voorgedragen tot het behalen van de graad van  
MASTER IN DE FYSICA EN STERRENKUNDE

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Eéndeeltjes impulsdistributie</b>	<b>2</b>
2.1	Algemene kenmerken . . . . .	2
2.2	Het onafhankelijk-deeltjes model . . . . .	4
2.2.1	Verantwoording . . . . .	4
2.2.2	Oplossen van de Schrödingervergelijking voor een sferische harmonische oscillator potentiaal . . . . .	5
2.2.3	Eéndeeltjes impulsdistributie in een harmonische oscillator potentiaal . . . . .	7
2.3	Resultaten . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Tweedeeltjes impulsdistributie</b>	<b>10</b>
3.1	Algemene kenmerken . . . . .	10
3.2	Het onafhankelijk-deeltjes model . . . . .	12
3.2.1	Twee-deeltjes momentumdistributies in relatieve- massacentrumcoördinaten . . . . .	13
3.2.2	Tweedeeltjes momentumdistributie met HO potentiaal . . . . .	14
3.3	Resultaten . . . . .	16
<b>A</b>	<b>Conventies Tweede kwantisatie</b>	<b>16</b>
<b>B</b>	<b>Moshinsky Brackets</b>	<b>19</b>
B.1	Recursieve berekening . . . . .	19
B.2	Eigenschappen . . . . .	20

# 1 Inleiding



Het atoom, tot begin 19de eeuw bekend als de kleinste bouwsteen van het universum, werd later ontwaard als zijnde een kern met rondom een wolk van elektronen. De kern van een atoom is een zelf-gebonden systeem van nucleonen, waarbij we een onderscheid kunnen maken tussen neutronen en protonen. Het doel van deze thesis is kennis te verwerven over de eigenschappen van dit systeem en in het bijzonder over de impuls die de nucleonen bezitten. We bestuderen Impulsdistributies van nucleonen in atomaire kernen. Deze beschrijven hoe de impuls van een nucleon in de kern is verdeeld. Ze kunnen onder meer als input gebruikt worden bij simulaties van scattering experimenten aan nucleonen in een kern. Bij deze experimenten is het nodig om zo goed mogelijk de spectraalfunctie  $P(\vec{k}, E)$  te kennen van de te beschieten kern. De Spectraalfunctie  $P(\vec{k}, E)$  staat in verband met de probabilliteit om een nucleon met impuls  $\vec{k}$  te verwijderen waarbij de kern achterblijft met een excitatie-energie  $E$ . De ééndeeltjes impulsdistributie  $n_1(\vec{k})$  kan gerelateerd worden aan de spectraalfunctie via

$$n^{[1]}(\vec{k}) = \int dE P_1(\vec{k}, E)$$

Een voorbeeld van dergelijk experiment is het Long-Baseline Neutrino Experiment (LBNE [1]) waar ze gebruik maken van vloeibare-argon detectoren. Een optimale detectie vereist een goede kennis van het neutrino-argon scatteringproces. Daar *Ankowski et al.*[2] meldt dat er geen theoretische studies zijn van de impulsdistributies voor  $^{40}_{18}\text{Ar}$  bestuderen hier in het bijzonder deze kern. We benaderen de nucleus met een gemiddeld-veld model waarbij nucleonen verondersteld worden onafhankelijk van elkaar te bewegen in een sferische symmetrische potentiaal. Correlaties worden dus bij definitie verwaarloosd. De gemiddelde kinetische energie van de neutronen en protonen wordt bepaald aan de hand van de ééndeeltjes momentumdis-

tributie. De tweedeeltjes momentumdistributie wordt bestudeerd in functie van het relatieve momentum, massacentrum momentum en de hoek tussen deze.

## 2 Ééndeeltjes impulsdistributie

### 2.1 Algemene kenmerken

De kans om een deeltje te vinden met een momentum in het interval  $[k, k + dk]$  wordt gegeven door  $n_1(k)k^2dk$  waarbij

$$n_1(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_1' e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_1')} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1'), \quad (1)$$

de ééndeeltjes impulsdistributie.

$\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1')$  stelt de ééndeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix voor, gedefinieerd als

$$\rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1') = \int \{d\vec{r}_{2-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}_1', \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A). \quad (2)$$

$\Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A)$  is de grondtoestand van een nucleus met A nucleonen. We maakten gebruik van de volgende notatie

$$\{d\vec{r}_{i-A}\} = d\vec{r}_i d\vec{r}_{i+1} \dots d\vec{r}_A. \quad (3)$$

Als  $\langle \Psi_A | \Psi_A \rangle = 1$ , heeft men dat

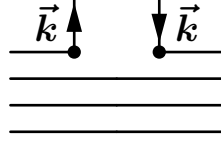
$$\int d\vec{k} n_1(\vec{k}) = 1. \quad (4)$$

Dit is niets anders de totale kans om een deeltje te vinden. Het diagonaalelement  $\rho_1(\vec{r}, \vec{r})$  stelt de dichtheid van de nucleonen op positie  $\vec{r}$  voor.

In het tweedekwantisatie formalisme kan men de ééndeeltjes momentumdistributie schrijven als

$$n_1(\vec{k}) = \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \Psi_A \rangle. \quad (5)$$

Intuïtief gezien telt de operator  $\psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k})$  het aantal deeltjes met momentum  $\vec{k}$ . Deze operator wordt voorgesteld in Figuur 1.



Figuur 1: Feynman-interpretatie van de ééndeeltjes momentumoperator. De operator annihileert en creëert een deeltje met momentum  $\vec{k}$  op hetzelfde tijdstip, zo is er geen energiestroom

Mathematisch kan dit als volgt gezien worden:

$$\begin{aligned}
 n_1(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_1' e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_1')} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1') \\
 &= \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_1' \int d\{\vec{r}_{2-A}\} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}_1' \rangle \langle \Psi_A | \vec{r}_1, \{\vec{r}_{2-A}\} \rangle \langle \vec{r}_1', \{\vec{r}_{2-A}\} | \Psi_A \rangle \\
 &= \frac{1}{A!} \int d\vec{r}_1' \int d\{\vec{r}_{2-A}\} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}_1' \rangle \\
 &\quad \times \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) | 0 \rangle \langle 0 | \psi(\vec{r}_A) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle
 \end{aligned} \tag{6}$$

De projectie op de vacuumtoestand  $|0\rangle \langle 0|$  kan vervangen worden door de eenheidsoperator omdat  $\psi(\vec{r})$  ( $\psi^\dagger(\vec{r})$ ) reeds alle deeltjes in de ket (bra) vector geannihileerd heeft.

$$\begin{aligned}
 n_1(\vec{k}) &= \frac{1}{A!} \int d\vec{r}_1' \int d\vec{r}_{2-A} \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}_1' \rangle \\
 &\quad \times \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) \psi(\vec{r}_A) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle
 \end{aligned} \tag{7}$$

Integratie over de coördinaten  $\vec{r}_2$  tot  $\vec{r}_A$  is triviaal aangezien  $\int d\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r})$  de teloperator is in de configuratieruimte. Dus levert de integratie over  $\vec{r}_A$  een factor één omdat het inwerkt op een toestandsvector  $\psi(\vec{r}_{A-1}) \cdots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1) | \Psi_A \rangle$ , waar alle deeltjes, op ééntje na, geannihileerd zijn. Om dezelfde redenen geeft de integratie over  $\vec{r}_{A-1}$  een factor 2. Als men dus integreert over alle coördinaten  $\vec{r}_2$  tot  $\vec{r}_A$ , krijgt men een factor  $(A-1)!$ . De ééndeeltjesmomentumverdeling kan nu geschreven worden als

$$\begin{aligned}
 n_1(\vec{k}) &= \frac{1}{A} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_1' \langle \vec{r}_1 | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | \vec{r}_1' \rangle \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle \\
 &= \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}) \psi(\vec{k}) | \Psi_A \rangle.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Bij de laatste stap worden de creatie en annihilatieoperatoren in momentumspace gedefinieerd:

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi(\vec{r}) \\
 &= \int d\vec{r} \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \psi(\vec{r}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Op een analoge manier kan de niet-diagonale dichtheidsmatrix in het tweedekwantisatie formalisme geschreven worden als

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_1') &= \int \{d\vec{r}_{2-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}_1', \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \\ &= \frac{1}{A!} \int \{d\vec{r}_{2-A}\} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \dots \psi^\dagger(\vec{r}_A) \psi(\vec{r}_{A-1}) \dots \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{1}{A} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle.\end{aligned}\quad (10)$$

$\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1')$  annihileert een deeltje op positie  $\vec{r}_1'$  en creëert een deeltje op positie  $\vec{r}_1$ . Intuïtief telt de diagonaaloperator  $\psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi(\vec{r}_1)$  het aantal deeltjes op positie  $\vec{r}_1$ .

## 2.2 Het onafhankelijk-deeltjes model

### 2.2.1 Verantwoording

Dat een onafhankelijk deeltjes model een goede benadering is voor een realistische kern is niet evident. De nucleonen in de kern intrageren namelijk met elkaar via de nucleon-nucleon kracht. Beschouwen we een nucleon-nucleon potentiaal van de vorm

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (11)$$

Hier is  $V_0$  de centrale diepte van de potentiaalput en de functie  $f$  is van korte dracht en continu. De korte dracht volgt uit de vaststelling dat een nucleon niet ingtrageert met alle andere nucleonen in de kern. Dit fenomeen heet saturatie (zie Figuur 2). Men kan nu een schatting maken van de centrale potentiaal gevoeld door deeltje 1 door uit te middelen over alle deeltjes intragerend met deeltje 1:

$$V(\vec{r}_1) = V_0 \int d^3\vec{r}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho(\vec{r}_2). \quad (12)$$

Als de dracht van  $f$  kort genoeg is kan  $\rho(\vec{r}_2)$  benaderd worden door  $\rho(\vec{r}_1)$ .  $V(\vec{r}_1)$  wordt dan

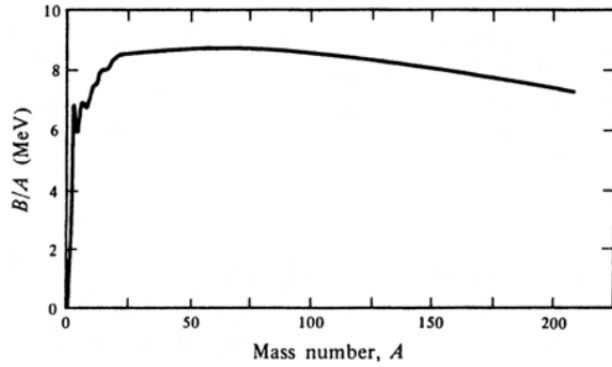
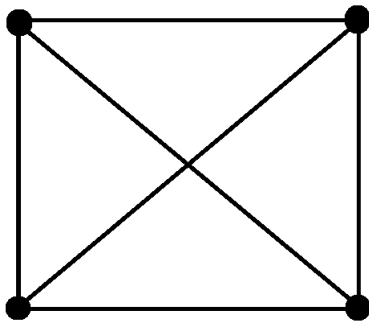
$$V(\vec{r}_1) = C V_0 \rho(\vec{r}_1). \quad (13)$$

We weten dus dat de potentiaal gevoeld door een deeltje in de kern bij benadering everedig is met de dichtheidsdistributie van de kern. Uit [5] weten we dat een Fermi functie een goede benadering is voor de dichtheidsdistributie van een kern:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + \exp(r - c)/a}. \quad (14)$$

Hier is  $c$  de straal is waarbij de distributie de helft is van zijn maximale waarde en  $a$  de spreiding waarover de distributie afneemt. Men krijgt dan de Wood-Saxon potentiaal [5]

$$V(\vec{r}_1) = \frac{C V_0 \rho(0)}{1 + \exp(r - c)/a}. \quad (15)$$



Figuur 2: Links: Beschouwen we een kern met vier nucleonen,  $A = 4$ . Als elk nucleon met alle andere nucleonen in de kern intrageert dan zijn er  $4(4 - 1)/2$  interacties en is de bindingsenergie ( $B$ ) proportioneel met  $A(A - 1)$ . Voor zware kernen zou dan bij benadering gelden dat  $B \propto A^2$ . Rechts: Bindingsenergie per nucleon ( $B/A$ ) als functie van  $A$ . Het is duidelijk dat een nucleon slechts intrageert met een beperkt aantal andere nucleonen in de kern, m.a.w. het aantal interacties per nucleon satureert. Vooral bij zwaardere kernen valt dit op.

De Schrödingervergelijking voor dergelijke potentiaal heeft geen analytische oplossing dus trachten we de potentiaal te benaderen met een sferische harmonische oscillator potentiaal

$$V_{HO}(r) = \frac{1}{2}M_N\omega^2r^2, \quad (16)$$

met de volgende parametrisatie van  $\hbar\omega$ :

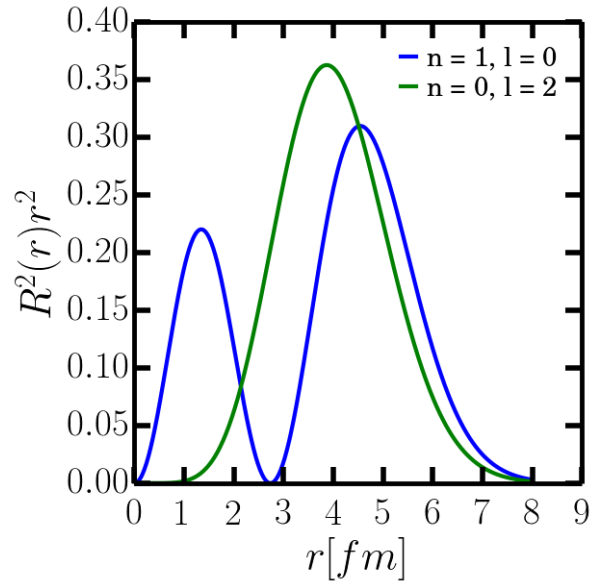
$$\hbar\omega(\text{MeV}) = 45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}, \quad (17)$$

Figuur 4 laat zien dat dit een relatief goede benadering is.

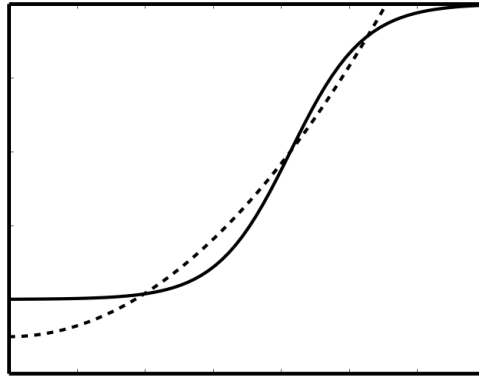
### 2.2.2 Oplossen van de Schrödingervergelijking voor een sferische harmonische oscillator potentiaal

Beschouw nucleonen die onafhankelijk van elkaar in een sferische harmonische oscillator potentiaal bewegen, beter bekend als de gemiddeld-veld benadering (GV). De Hamiltoniaan vereenvoudigt dan tot

$$\hat{H} = \sum_i^A \hat{T}_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}}^A \hat{V}_{ij} + \sum_{\substack{klm \\ k \neq l \neq m}}^A \hat{W}_{klm} \xrightarrow{GV} \hat{H} = \sum_i^A (\hat{T}_i + \hat{V}_i) \quad (18)$$



Figuur 3: probabiliteitsdistributie voor twee ontaarde toestanden in harmonische oscillator ( $N = 2$ )



Figuur 4: De volle curve is een Wood-Saxon potentiaal en de gestreepte curve deze van een harmonische oscillator.



De nieuwe hamiltoniaan is slechts een som van ééndeeltjes-Hamiltonianen, met andere woorden het probleem reduceert zich tot een ééndeeltjesprobleem:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M_N}\nabla^2 + \frac{1}{2}M_N\omega^2 r^2\right)\psi_{nlm}(\vec{r}) = E\psi_{nlm}(\vec{r}). \quad (19)$$

$\hbar\omega$  kan als volgt geparametriseerd worden

$$\hbar\omega(\text{MeV}) = 45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}, \quad (20)$$

waarbij  $A$  het aantal nucleonen is in de kern. Een eigenfunctie van vergelijking (19) wordt gegeven door

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | nlm \rangle = R_{nl}(r)Y_{lm}(\Omega) \quad (21)$$

waar  $Y_{lm}(\Omega)$  de sferische harmonieken voorstelt. Het radiële deel van de golf functie in functie van de gegeneraliseerde Laguerre-polynomen  $L_n^\alpha(r)$  wordt gegeven door

$$R_{nl}(r) = \left[ \frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \nu^{l+\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} r^l e^{-\frac{\nu r^2}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\nu r^2) \quad (22)$$

waar

$$\nu \equiv \frac{M_N\omega}{\hbar}. \quad (23)$$

De energie eigenwaarden zijn onafhankelijk van  $m_l$  als gevolg van de sferische symmetrie:

$$E_{nl} = \hbar\omega \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right) \quad (24)$$

Nadelig aan de harmonische oscillator potentiaal is de eigenaardige ontaarding van de energieniveaus. Deze ontaarding is er namelijk niet bij een Wood-Saxon potentiaal. Bijvoorbeeld, toestanden  $2s$  en  $1d$  hebben dezelfde energie. We gebruiken de opvulling van een Wood-Saxon om bij het opvullen van de toestand deze vervelende ontaarding te vermijden. Hoe gebeurt de opvulling dan? Figuur 3 geeft aan dat toestanden van de harmonische oscillator in met een hoger impulsmoment  $l$  zich met grotere waarschijnlijkheid verder van het centrum kern begeven dan toestanden met kleinere  $l$ . De realistische potentiaal is dieper op grote afstand en minder diep op kleine afstand van het centrum dan de harmonische oscillator potentiaal. Dus toestanden met grote  $l$  voelen een diepere potentiaal en schuiven dus naar lagere energieën.

### 2.2.3 Ééndeeltjes impuls distributie in een harmonische oscillator potentiaal

Een onafhankelijk deeltjes model (IPM) veronderstelt een nucleon beweegt in het gemiddelde veld van alle andere nucleonen. De totale golf functie van de nucleus is dus een Slaterdeterminant is van de ééndeeltjes golf functies:

$$\Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{i_1 i_2 \dots i_A}^A \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \phi_{i_1}(\vec{r}_1) \phi_{i_2}(\vec{r}_2) \dots \phi_{i_A}(\vec{r}_A). \quad (25)$$

$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A}$  staat voor het totaal ant-symmetrische Levi-Civita tensor en de sommaties over de indices  $i_1, \dots, i_A$  gaan van één tot A. De ééndeeltjes golffuncties voldoen aan de orthonormaliteitsregel:

$$\int d\vec{r}_i \phi_l^*(\vec{r}_i) \phi_m(\vec{r}_i) = \delta_{lm}. \quad (26)$$

Gebruik makende van deze eigenschap wordt de ééndeeltjes niet-diagonale matrix

$$\begin{aligned} \rho_1(\vec{r}_1, \vec{r}_1') &= \frac{1}{A!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_A} \sum_{j_1 j_2 \dots j_A} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_A} \phi_{i_1}^*(\vec{r}_1) \phi_{j_1}(\vec{r}_1') \delta_{i_2, j_2} \delta_{i_3, j_3} \dots \delta_{i_A, j_A} \\ &= \frac{1}{A} \sum_i \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}_1'). \end{aligned} \quad (27)$$

en met de definitie van de golffunctie in de impulsruimte:

$$\phi_i(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \phi_i(\vec{r}) \quad (28)$$

wordt (1):

$$\begin{aligned} n^{[1]}(\vec{k}) &= \frac{1}{A(2\pi)^3} \sum_i \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_1' e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_1')} \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_i(\vec{r}_1') \\ &= \frac{1}{A} \sum_i \phi_i^*(\vec{k}) \phi_i(\vec{k}) \\ &= \frac{1}{A} \sum_i \left| \phi_i(\vec{k}) \right|^2. \end{aligned} \quad (29)$$

De golffuncties in de impulsruimte krijgen we door de Schrödinger vergelijking (19) in de impulsruimte,

$$\left( -\frac{M_N \omega^2}{2} \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{2M_N} k^2 \right) \tilde{\psi}_{nlm}(\vec{k}) = E \tilde{\psi}_{nlm}(\vec{k}), \quad (30)$$

op te lossen. Deze differentiaalvergelijking heeft de zelfde vorm als de Schrödinger vergelijking in de configuratieruimte, met andere woorden de oplossingen zijn van dezelfde vorm als 21

$$\psi_{nlm}(\vec{k}) \equiv \langle \vec{k} | nlm \rangle = K_{nl}(k) Y_{lm}(\Omega_k) \quad (31)$$

met

$$K_{nl}(k) = \left[ \frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \nu^{l+\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} k^l e^{-\frac{\nu k^2}{2}} L_n^{l+\frac{1}{2}}(\nu k^2) \quad (32)$$

en

$$\nu' \equiv \frac{\hbar}{M_N \omega}. \quad (33)$$

De totale golffunctie in impulsruimte van een deeltje in een sferische harmonische oscillator-potentiaal wordt gegeven door

$$\phi_\alpha(\vec{k}) = \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}) \chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha} \xi_{\frac{1}{2}\tau_\alpha}. \quad (34)$$

$\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha}$  en  $\xi_{\frac{1}{2}\tau_\alpha}$  zijn respectievelijk de abstracte spin- en isospintoestand waarbij de eerste index steeds de spin- of isospinvector voorstelt en de tweede index de projectie.

Omdat de potentiaal sferisch symmetrisch is kan men de momentum golffunctie factoriseren in een hoekafhankelijk deel en een radiëel deel. Als men naar de distributie van de grootte van het momentum wil kijken kan men integreren over alle hoekafhankelijkheid  $\Omega_k$ , dit leidt dan tot

$$\begin{aligned} n_1(k) &= \frac{1}{A} \int d\Omega_k \sum_{\tau n l m \sigma} \psi_{nlm}^*(\vec{k}) \psi_{nlm}(\vec{k}) \chi_{\frac{1}{2}\sigma}^* \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \xi_{\frac{1}{2}\tau}^* \xi_{\frac{1}{2}\tau} \\ &= \frac{1}{A} \sum_{\tau n l m \sigma} K_{nl}^2(k) \chi_{\frac{1}{2}\sigma}^* \chi_{\frac{1}{2}\sigma} \xi_{\frac{1}{2}\tau}^* \xi_{\frac{1}{2}\tau}. \end{aligned} \quad (35)$$

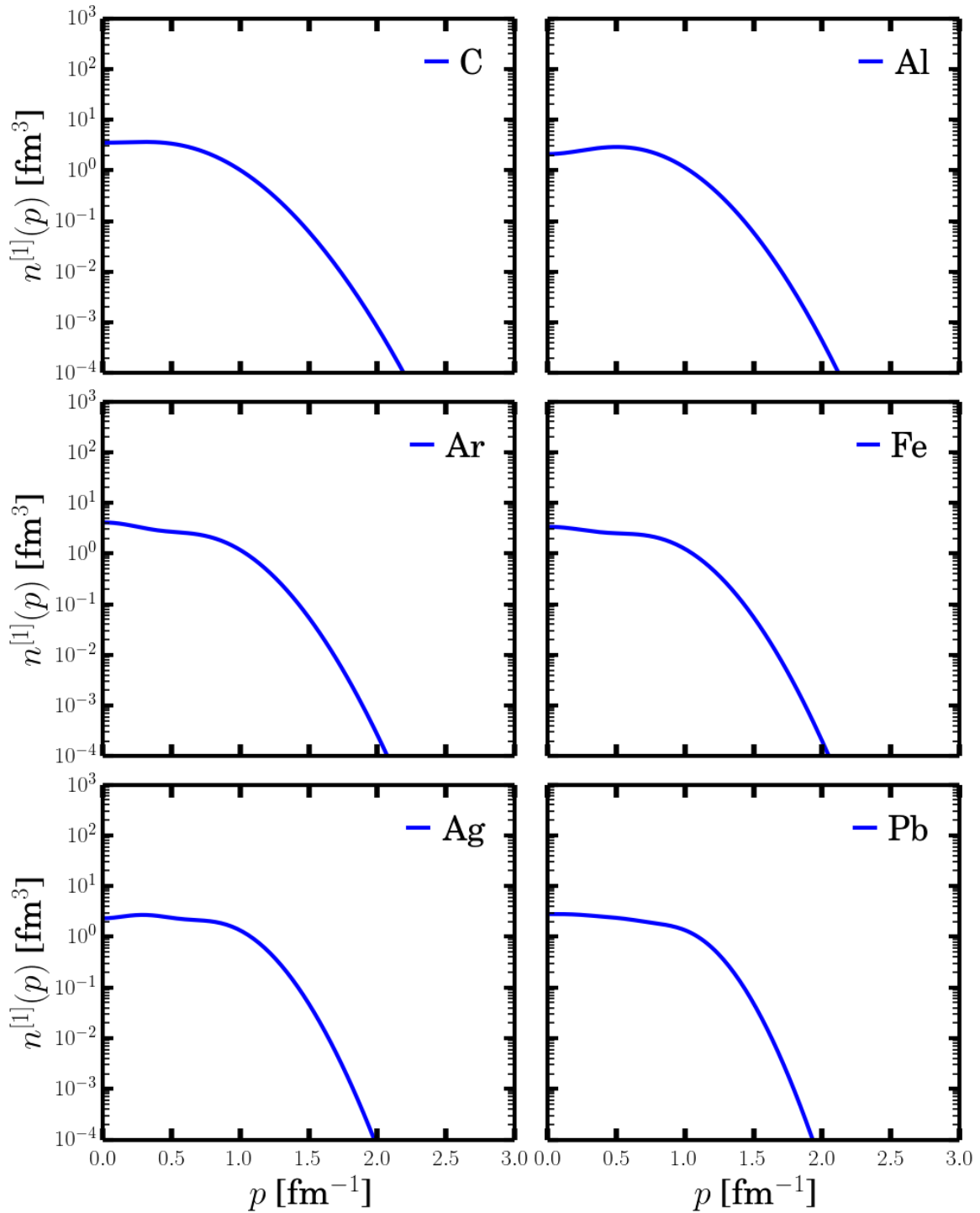
De bovengrenzen van sommaties over  $n, l, m, \sigma$  hangen af van het aantal protonen ( $\tau = +1/2$ ) en neutronen ( $\tau = -1/2$ ) in de beschouwde kern.

## 2.3 Resultaten

De ééndeeltjes impulsdistributies voor verschillende kernen worden getoond in Figuur 5. De distributies zijn op één genormeerd. Zoals verwacht wordt  $n^{[1]}(k)$  heel klein voor  $k$  gaande naar oneindig. We kunnen nu de gemiddelde kinetische energie bepalen van een nucleon in een kern:

$$\langle T_N \rangle = \frac{\hbar^2}{2M_N} \int dk n_N^{[1]}(k) k^4. \quad (36)$$

De index  $N$  kan  $n$  (neutron) of  $p$  (proton) zijn.  $n_N^{[1]}(k)$  stelt de ééndeeltjes impulsdistributie van de neutronen of protonen afhankelijk van de index  $N$ . Resultaten voor de kinetische energie 36 zijn te vinden in Tabel 1. Uit [7] blijkt dat de gemiddeld-veld benadering goed is bij lage impuls maar naarmate we naar grotere impuls gaan zorgen correlaties voor een grote staart. De kinetische energie is gerelateerd aan het vierde moment van de momentum distributie en daarom dus sterk afhankelijk van de staart van de distributie. Correlaties tussen de nucleonen zorgen dus voor een enorme toename in gemiddelde kinetische energie.



Figuur 5:  $n^{[1]}(k)$  voor  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{27}_{13}\text{Al}$ ,  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ ,  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ ,  ${}^{109}_{47}\text{Ag}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

### 3 Tweedeeltjes impulsdistributie

#### 3.1 Algemene kenmerken

De kans om een deeltje met impuls in het interval  $[k_1, k_1 + dk_1]$  te vinden wanneer een ander deeltje een impuls heeft in het interval  $[k_2, k_2 + dk_2]$  wordt gegeven door  $n_2(k_1, k_2)dk_1dk_2$  met

$A$	$x_p$	$\langle T_p \rangle$ (MeV)	$\langle T_n \rangle$ (MeV)
$^4\text{He}$	0.500	13.82	13.82
$^9\text{Be}$	0.444	15.86	16.65
$^{12}\text{C}$	0.500	16.13	16.13
$^{16}\text{O}$	0.500	15.66	15.66
$^{27}\text{Al}$	0.481	16.69	17.02
$^{40}\text{Ar}$	0.450	16.22	17.28
$^{40}\text{Ca}$	0.500	16.53	16.53
$^{48}\text{Ca}$	0.417	15.73	17.98
$^{56}\text{Fe}$	0.464	16.82	17.59
$^{108}\text{Ag}$	0.435	16.74	18.17
$^{208}\text{Pb}$	0.394	16.49	18.93

Tabel 1: De gemiddelde kinetische energie van neutronen en protonen voor verschillende kernen.  $x_p$  is de protonfractie  $x_p = Z/A$ .

$$n_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \int d\vec{r}_1' \int d\vec{r}_2' e^{i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_1')} e^{i\vec{k}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_2')} \rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1', \vec{r}_2') \quad (37)$$

de tweedeeltjes impulsdistributie. Hier stelt

$$\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2') = \int \{d\vec{r}_{3-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \quad (38)$$

de tweedeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix voor.

Het interessant deze te bestuderen in functie van relatieve ( $\vec{r}$ ) en massacentrumcoördinaten ( $\vec{R}$ ), een natuurlijker coördinatensysteem voor twee deeltjes (Figuur 6):

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \vec{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad (39)$$

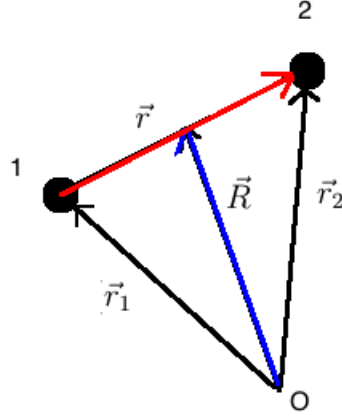
Dan transformeren de impulscoördinaten als volgt:

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \vec{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (40)$$

En wordt de tweedeeltjes impulsdistributie in functie van deze nieuwe coördinaten:

$$n(\vec{k}, \vec{P}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{r} \int d\vec{R} \int d\vec{r}' \int d\vec{R}' e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{i\vec{P} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} \rho_2(\vec{r}, \vec{R}; \vec{r}', \vec{R}') \quad (41)$$

met



Figuur 6: Illustratie van relatieve en massacentrum coördinaten.

$$\rho_2(\vec{r}, \vec{R}; \vec{r}', \vec{R}') = \rho_2 \left( \vec{r}_1 = \frac{\vec{r} + \vec{R}}{\sqrt{2}}, \vec{r}_2 = \frac{-\vec{r} + \vec{R}}{\sqrt{2}}, \vec{r}_1' = \frac{\vec{r}' + \vec{R}'}{\sqrt{2}}, \vec{r}_2' = \frac{-\vec{r}' + \vec{R}'}{\sqrt{2}} \right) \quad (42)$$

De tweedeeltjes impulsdistributie kan in het tweedekwantisatie formalisme geschreven worden als

$$n_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{A(A-1)} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{k}_1) \psi^\dagger(\vec{k}_2) \psi(\vec{k}_1) \psi(\vec{k}_2) | \Psi_A \rangle \quad (43)$$

en de tweedeeltjes niet-diagonale dichtheidsmatrix als

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1', \vec{r}_2') &= \int \{d\vec{r}_{3-A}\} \Psi_A^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \Psi_A(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) \\ &= \frac{1}{A!} \int \{d\vec{r}_{3-A}\} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \psi^\dagger(\vec{r}_3) \dots \psi^\dagger(\vec{r}_A) \psi(\vec{r}_A) \dots \psi(\vec{r}_3) \psi(\vec{r}_2') \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle \\ &= \frac{1}{A(A-1)} \langle \Psi_A | \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_2') \psi(\vec{r}_1') | \Psi_A \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

De operator in (43) telt het aantal deeltjes met impuls  $\vec{k}_1$  en impuls  $\vec{k}_2$ .

### 3.2 Het onafhankelijk-deeltjes model

Een uitdrukking voor de tweedeeltjes niet-diagonale matrix kan men bekomen door (42) uit te rekenen waarbij de totale golffunctie van de nucleus een Slaterdeterminant (25) is. Rekening houdend met de orthogonaliteitsrelatie (26) vindt men

$$\begin{aligned}
\rho_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_1', \vec{r}_2') &= \frac{1}{A!} \sum_{i_1 i_2 \dots i_A} \sum_{j_1 j_2 \dots j_A} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_A} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_A} \phi_{i_1}^*(\vec{r}_1) \phi_{i_2}^*(\vec{r}_2) \phi_{j_1}(\vec{r}_1') \phi_{j_2}(\vec{r}_2') \delta_{i_3, j_3} \dots \delta_{i_A, j_A} \\
&= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{i_1 i_2} \sum_{j_1 j_2} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) \phi_{i_1}^*(\vec{r}_1) \phi_{i_2}^*(\vec{r}_2) \phi_{j_1}(\vec{r}_1') \phi_{j_2}(\vec{r}_2') \\
&= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{ij} \left[ \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) \phi_i(\vec{r}_1') \phi_j(\vec{r}_2') - \phi_i^*(\vec{r}_1) \phi_j^*(\vec{r}_2) \phi_j(\vec{r}_1') \phi_i(\vec{r}_2') \right].
\end{aligned} \tag{45}$$

Dan kan de tweedeeltjes momentumdistributie als volgt geschreven worden:

$$\begin{aligned}
n_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \frac{1}{A(A-1)} \sum_{ij} \left[ \phi_i^*(\vec{k}_1) \phi_j^*(\vec{k}_2) \right] \left[ \phi_i(\vec{k}_1) \phi_j(\vec{k}_2) - \phi_j(\vec{k}_1) \phi_i(\vec{k}_2) \right] \\
&= \frac{1}{2A(A-1)} \sum_{ij} \left[ \phi_i^*(\vec{k}_1) \phi_j^*(\vec{k}_2) - \phi_j^*(\vec{k}_1) \phi_i^*(\vec{k}_2) \right] \left[ \phi_i(\vec{k}_1) \phi_j(\vec{k}_2) - \phi_j(\vec{k}_1) \phi_i(\vec{k}_2) \right].
\end{aligned} \tag{46}$$

### 3.2.1 Twee-deeltjes momentumdistributies in relatieve- massacentrumcoördinaten

De positie van twee deeltjes kan beschreven worden door een vector van het centrum van de potentiaalput naar elk van de deeltjes, namelijk  $\vec{r}_1$  en  $\vec{r}_2$ . Twee deeltjes kunnen ook beschreven worden door een relatieve coördinaat  $\vec{r}$  en een coördinaat  $\vec{R}$  die de positie van het massacentrum van de twee deeltjes beschrijft. De golf functie van een tweedeeltjes systeem in de coördinatenruimte kan bijgevolg op twee manieren worden geschreven, namelijk als  $\langle \vec{r}_1 | n_1 l_1 m_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | n_2 l_2 m_2 \rangle$  of als  $\langle \vec{r} | n l m \rangle \langle \vec{R} | N L M \rangle$ . Voor een harmonische oscillator potentiaal blijft de vorm van de golf functies identiek maar veranderen de kwantumgetallen. In het nieuwe coördinatensysteem worden de kwantumgetallen  $n$ ,  $l$  en  $N$ ,  $L$ . De eerste twee beschrijven de relatieve beweging van de deeltjes en de laatste beschrijven de beweging van het massacentrum. Men kan  $l_1$ ,  $l_2$  en  $l$ ,  $L$  koppelen tot een totaal impulsmoment  $L$ .

$$|l_1 - l_2| \leq \Lambda \leq l_1 + l_2 \tag{47}$$

$$|l - L| \leq \Lambda \leq l + L \tag{48}$$

Twee deeltjes zijn gekoppeld tot een welbepaald impulsmoment  $\Lambda$  en projectie  $M_\Lambda$

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{m_1, m_2} |n_1 l_1 m_1 n_2 l_2 m_2\rangle \langle l_1 m_1, l_2 m_2 | \Lambda M_\Lambda\rangle \tag{49}$$

$$|n l N L; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{m, M} |n l m N L M\rangle \langle l m L M | \Lambda M_\Lambda\rangle \tag{50}$$

Een harmonische oscillator tweedeeltjes golfunctie met totaal impulsmoment  $\Lambda$  en projectie  $M_\Lambda$  heeft een orthogonale transformatie van individuele coördinaten naar relatieve en massacentrumcoördinaten

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{nl, N\Lambda} |nlNL; \Lambda M_\Lambda\rangle \langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda\rangle. \quad (51)$$

De transformatiecoëfficiënten  $\langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda\rangle$  zijn gekend als de Moshinsky brackets. Deze zijn onafhankelijk van  $M_\Lambda$ . De energie van een deeltje ( $E$ ) in een harmonische oscillator potentiaal is  $\hbar\omega(2n_1 + l_1 + \frac{3}{2})$ . De totale energie van twee deeltjes moet dezelfde zijn in beide coördinatensystemen

$$2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n + l + 2N + L \quad (52)$$

De Moshinsky brackets zijn gelijk aan nul als deze gelijkheid niet is voldaan.

### 3.2.2 Tweedeeltjes momentumdistributie met HO potentiaal

Tweedeeltjes momentumdistributie in centraal coördinatensysteem wordt gegeven door:

$$n_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{2A(A-1)} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \alpha \neq \beta}} \left[ \phi_\alpha^*(\vec{k}_1) \phi_\beta^*(\vec{k}_2) - \phi_\beta^*(\vec{k}_1) \phi_\alpha^*(\vec{k}_2) \right] \left[ \phi_\alpha(\vec{k}_1) \phi_\beta(\vec{k}_2) - \phi_\beta(\vec{k}_1) \phi_\alpha(\vec{k}_2) \right]. \quad (53)$$

De sommatie gaat over alle bezette toestanden in de kern ( $n_\gamma, l_\gamma, m_\gamma, \sigma_\gamma, \tau_\gamma$ ). We willen deze nu schrijven in functie van  $\vec{k}$  en  $\vec{P}$ . Beschouw het product van twee golffuncties in impulsruimte:

$$\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2). \quad (54)$$

Daar transformatie (51) transformeert tussen gekoppelde toestanden moet men eerst de impulsmomenten in toestand (54) koppelen tot  $\Lambda$  en projectie  $M_\Lambda$ :

$$\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) = \sum_{\Lambda M_\Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \left[ \psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2) \right]_{\Lambda M_\Lambda}.$$

met notatie :

$$\left[ \psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2) \right]_{\Lambda M_\Lambda} \equiv \sum_{m_\alpha m_\beta} \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle$$

Nu kan men de Moshinsky-transformatie toepassen:

$$\begin{aligned} \left[ \psi_{n_\alpha l_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta}(\vec{k}_2) \right]_{\Lambda M_\Lambda} &= \sum_{nl} \sum_{NL} \left[ \psi_{nl}(\vec{k}) \psi_{NL}(\vec{P}) \right]_{\Lambda M_\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \\ &= \sum_{nlm_l} \sum_{NLM_L} \langle l m_l L M_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \psi_{nlm_l}(\vec{k}) \psi_{NLM_L}(\vec{P}) \end{aligned}$$



Dus wordt (54):

$$\begin{aligned} & \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) = \\ & \sum_{\substack{nlm_l \\ NLM_L}} \sum_{\Lambda M_\Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \psi_{nlm_l}(\vec{k}) \psi_{NLM_L}(\vec{P}). \end{aligned} \quad (55)$$

Om een uitdrukking te vinden voor de anti-symmetrische toestand in (53):

$$\psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) - \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_2) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_1). \quad (56)$$

kan men in de eerste term ofwel de coördinaten  $\vec{k}_1$  en  $\vec{k}_2$  omwisselen ofwel de kwantum getallen  $n_\alpha l_\alpha m_\alpha$  en  $n_\beta l_\beta m_\beta$ . Omwisselen van  $\vec{k}_1$  en  $\vec{k}_2$  resulteert in een transformation van de relatieve impuls  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Men kan dan gebruik maken van de pariteitseigenschappen van de sferische harmonieken  $Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \rightarrow Y_{lm_l}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$

$$\psi_{nlm_l}(\vec{k}) = K_{nl}(k) Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \rightarrow \psi_{nlm_l}(-\vec{k}) = (-1)^l K_{nl}(k) Y_{lm_l}(\theta, \varphi) : \quad (57)$$

Als men de quantumgetallen  $n_\alpha l_\alpha m_\alpha$  en  $n_\beta l_\beta m_\beta$  omwisselt dan kan men gebruikt maken van de symmetrie relaties van de Clebsch-Gordan en de Moshinsky brakets:

$$\langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \rightarrow \langle l_\beta m_\beta l_\alpha m_\alpha | \Lambda M_\Lambda \rangle = (-1)^{l_\alpha + l_\beta - \Lambda} \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle, \quad (58)$$

$$\langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \rightarrow \langle nlNL; \Lambda | n_\beta l_\beta n_\alpha l_\alpha; \Lambda \rangle_{MB} = (-1)^{L - \Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB}.$$

Gebruik makende van de relatie  $2n_\alpha + l_\alpha + 2n_\beta + l_\beta = 2n + l + 2N + L$  krijgt men een factor  $(-1)^l$ . Dit is zoals verwacht dezelfde factor als bekomen door het verwisselen van  $\vec{k}_1$  en  $\vec{k}_2$ .

De twee-deeltjes anti-symmetrische toestand in momentum ruimte wordt dan

$$\begin{aligned} & \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_1) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_2) - \psi_{n_\alpha l_\alpha m_\alpha}(\vec{k}_2) \psi_{n_\beta l_\beta m_\beta}(\vec{k}_1) = \\ & \sum_{\substack{nlm_l \\ NLM_L}} \sum_{\Lambda M_\Lambda} \left[ 1 - (-1)^l \right] \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \\ & \times \psi_{nlm_l}(\vec{k}) \psi_{NLM_L}(\vec{P}). \end{aligned}$$

Het spin en isospin deel van de golffunctie kunnen we als volgt behandelen

$$\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha} \chi_{\frac{1}{2}\sigma_\beta} \equiv \left| \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \right\rangle = \sum_{SM_S} \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \middle| SM_S \right\rangle |SM_S\rangle.$$

Met de symmetrierelatie van Clebsch-Gordan wordt dit

$$\chi_{\frac{1}{2}\sigma_\beta} \chi_{\frac{1}{2}\sigma_\alpha} \equiv \left| \frac{1}{2}\sigma_\beta \frac{1}{2}\sigma_\alpha \right\rangle = \sum_{SM_S} (-1)^{1+S} \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \middle| SM_S \right\rangle |SM_S\rangle \quad (59)$$

Er is een analoge uitdrukking voor het isospin gedeelte.

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\vec{k}_1)\phi_\beta(\vec{k}_2) - \phi_\beta(\vec{k}_1)\phi_\alpha(\vec{k}_2) = & \sum_{\substack{nlm_l \\ NLM_L}} \sum_{\Lambda M_\Lambda} \sum_{SM_S} \sum_{TM_T} \left[ 1 - (-1)^{l+S+T} \right] \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \left| SM_S \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}\tau_\alpha \frac{1}{2}\tau_\beta \left| TM_T \right\rangle \right. \\ & \left. \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \right. \\ & \left. \phi_{nlm_l}(\vec{k}) \phi_{NLM_L}(\vec{P}) | SM_S \rangle | TM_T \rangle \right. \quad (60) \end{aligned}$$

Dus,

$$\begin{aligned} n_2(\vec{k}, \vec{P}) = & \frac{1}{2A(A-1)} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \alpha \neq \beta}} \sum_{\substack{nlm_l \\ NLM_L}} \sum_{\Lambda M_\Lambda} \sum_{\substack{n'l'm'_l \\ N'L'M'_L}} \sum_{\Lambda'M'_\Lambda} \sum_{SM_S} \sum_{TM_T} \left[ 1 - (-1)^{l+S+T} \right]^2 \\ & \times \left\langle \frac{1}{2}\sigma_\alpha \frac{1}{2}\sigma_\beta \left| SM_S \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}\tau_\alpha \frac{1}{2}\tau_\beta \left| TM_T \right\rangle \right. \\ & \times \langle l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta | \Lambda M_\Lambda \rangle \langle nlNL; \Lambda | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda \rangle_{MB} \langle lm_l LM_L | \Lambda M_\Lambda \rangle \\ & \times \langle \Lambda' M'_\Lambda | l_\alpha m_\alpha l_\beta m_\beta \rangle \langle n'l'N'L'; \Lambda' | n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta; \Lambda' \rangle_{MB} \langle l'm'_l L'M'_L | \Lambda' M'_\Lambda \rangle \\ & \times \phi_{nlm_l}^*(\vec{k}) \phi_{NLM_L}^*(\vec{P}) \phi_{n'l'm'_l}(\vec{k}) \phi_{N'L'M'_L}(\vec{P}) \quad (61) \end{aligned}$$

### 3.3 Resultaten

Resultaten zijn afgebeeld in Figuur 7.

## A Conventies Tweede kwantisatie

We schrijven de toestandsvector van een kern in tweede kwantisatie als

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle. \quad (62)$$

$n_\alpha$  is het aantal deeltjes in het ééndeeltjes orbitaal  $u_\alpha$ . Creatie- en annihilatieoperatoren worden respectievelijk gedefiniërd als  $c_\alpha^\dagger$  en  $c_\alpha$ . De creatieoperator  $c_\alpha^\dagger$  voegt één deeltje toe aan een ééndeeltjes orbitaal  $u_\alpha$  en  $c_\alpha$  verwijdert één deeltje uit dit orbitaal:

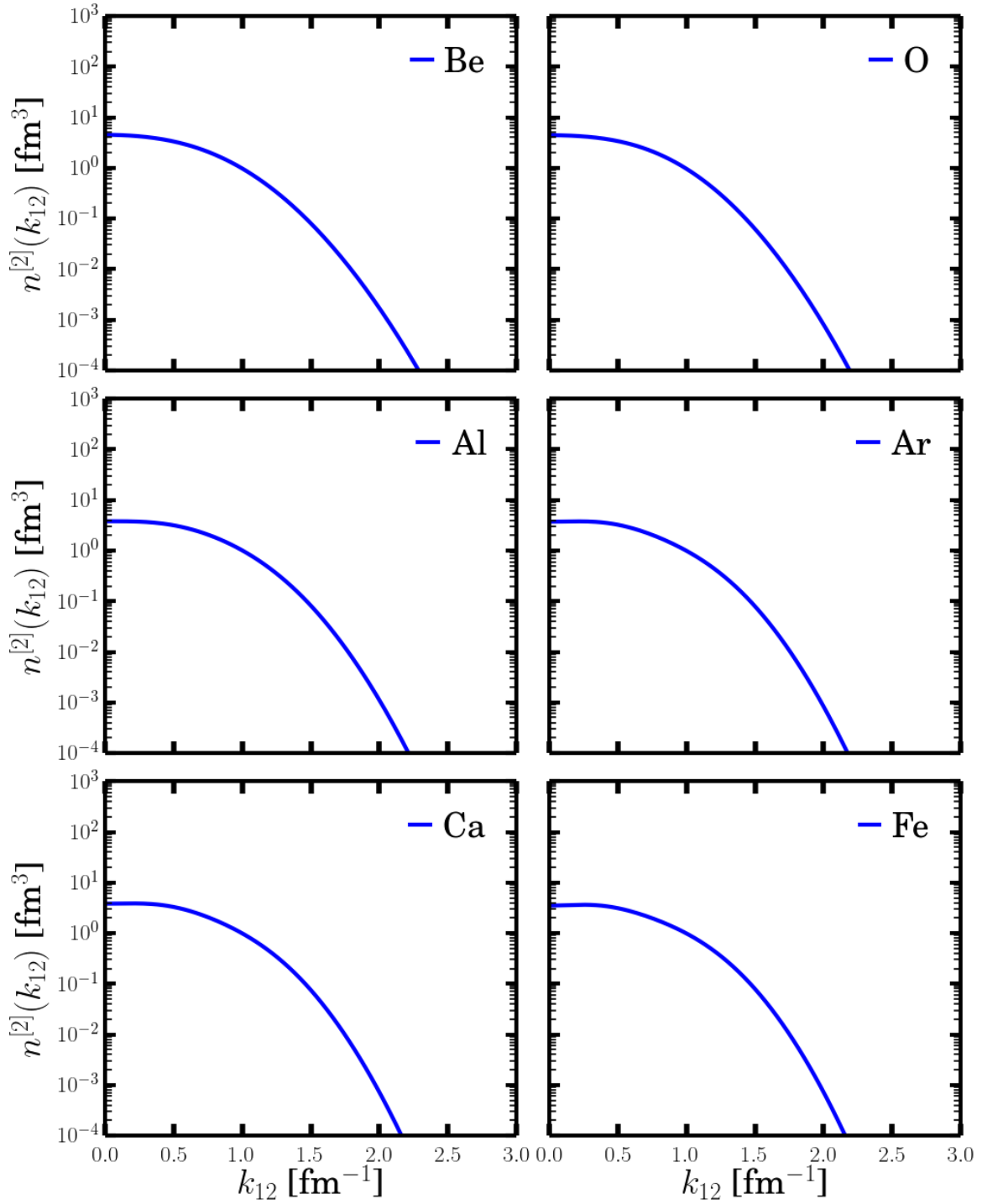
$$c_\alpha^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \left( \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes c_\alpha^\dagger \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \right) |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_\alpha\rangle \otimes \dots \quad (63)$$

$$= (-1)^{s_\alpha} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes c_\alpha^\dagger |n_\alpha\rangle \otimes \dots \quad (64)$$

$$= \delta_{0n_\alpha} (-1)^{s_\alpha} |n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_\alpha + 1, n_{\alpha+1}, \dots\rangle. \quad (65)$$

waar

$$s_\alpha = n_1 + n_2 + \dots + n_{\alpha-1}. \quad (66)$$



Figuur 7:  $n^{[2]}(k_{12})$  voor  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{27}_{13}\text{Al}$ ,  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ . Alle distributies zijn genormeerd op één.

De kronecker delta zorgt ervoor dat het Pauli-principe voldaan is. De factor  $(-1)^{s_\alpha}$  volgt uit de anitcommutatierelaties voor fermionen

$$\{c_\alpha, c_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \quad (67)$$

$$\{c_\alpha, c_\beta\} = \{c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger\} = 0. \quad (68)$$

De volgende relatie volgt uit dezelfde principes:

$$c_\alpha |n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle = \delta_{1n_\alpha} (-1)^{s_\alpha} |n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_\alpha - 1, n_{\alpha+1}, \dots\rangle. \quad (69)$$

Men kan een teloperator definiëren

$$\hat{N} = \sum_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha \quad (70)$$

die eigenwaarden  $N \in \mathbb{N}$  heeft en waarvan de eigenfuncties golffuncties zijn met een vast aantal deeltjes. Een genormaliseerde veeldeeltjestoestand kan gecreëerd worden door creatieoperatoren op de grondtoestand te laten inwerken:

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = (c_1^\dagger)^{n_1} (c_2^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle. \quad (71)$$

Deze normalisatie is correct voor fermionen en de  $n_i$ 's zijn 1 of 0. Men kiest een specifieke volgorde van de ééndeeltjestoestanden  $u_\alpha$  en houden deze vast.

Men kan een operator definiëren die een deeltje creëert op een plaats  $\vec{r}$

$$\psi^\dagger(\vec{r}) = \sum_\alpha c_\alpha^\dagger u_\alpha^*(\vec{r}), \quad (72)$$

met

$$c_\alpha^\dagger = \int d\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) u_\alpha^*(\vec{r}). \quad (73)$$

Men kan de vergelijkingen controleren door een deeltje te creëren in toestand  $\alpha$ :

$$|\alpha\rangle = \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) |\vec{r}\rangle \quad (74)$$

$$= \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}) |0\rangle \quad (75)$$

$$= \int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) \sum_\beta c_\beta^\dagger u_\beta^*(\vec{r}) |0\rangle \quad (76)$$

$$= c_\alpha^\dagger |0\rangle. \quad (77)$$

Bij de laatste stap maakten we gebruik van de orthogonaliteit van de ééndeeltjesorbitalen

$$\int d\vec{r} u_\alpha(\vec{r}) u_\beta^*(\vec{r}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (78)$$

Men heeft ook nog de volgende relaties

$$u_\alpha(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \vec{\alpha} \rangle \quad (79)$$

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (80)$$

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (81)$$

$$\langle \vec{k} | \vec{r} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (82)$$

Nu wordt een genormaliseerde A-deeltjes Focktoestand in eerste kwatisatie

$$|\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \psi^\dagger(\vec{r}_1) \psi^\dagger(\vec{r}_2) \cdots \psi^\dagger(\vec{r}_A) |0\rangle \quad (83)$$

en de golffunctie in de configuratieruimte

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A | n_1, n_2, n_3, \dots \rangle = \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A). \quad (84)$$

## B Moshinsky Brackets

### B.1 Recursieve berekening

Een tweedeeltjes golffunctie in een harmonische oscillator met totaal impulsmoment  $\Lambda$  en projectie  $M_\Lambda$  heeft een orthogonale transformatie van individuele coördinaten naar relatieve en massacentrumcoördinaten, namelijk de Moshinsky transformatie [4]:

$$|n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda M_\Lambda\rangle = \sum_{nl, N\Lambda} |nlNL; \Lambda M_\Lambda\rangle \langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB}. \quad (85)$$

Men kan de Moshinsky-brackets berekenen volgens de recursieformule [6]:

$$\begin{aligned} \langle nlNL; \Lambda | n_1 + 1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} &= [(n_1 + 1)(n_1 + l_1 + 3/2)]^{-1/2} \\ &\times \sum_{n'l'N'L'} \langle nlNL; \Lambda | -r_1^2 | n'l'N'L'; \Lambda \rangle \langle n'l'N'L'; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB}. \end{aligned} \quad (86)$$

Wegens behoud van energie moet steeds gelden dat  $2(n_1 + 1) + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n + l + 2N + L$ . Indien dit niet het geval is, is de Moshinsky-bracket nul. De matrix-elementen in relatie (86) zijn verschillend van nul voor slechts zes tweedeeltjes toestanden  $|n'l'N'L'; \Lambda\rangle$ . Deze kunnen gevonden worden in Tabel 2. Een analoge recursierelatie waarbij de index  $n_2$  wordt verhoogd krijgen we door in de eerste factor de index te veranderen ( $1 \rightarrow 2$ ) en de laatste vier matrix-elementen, nu van  $-r_2^2$ , in Tabel 2 krijgen een minteken. Dus kan men  $\langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB}$  berekenen startend van  $\langle nlNL; \Lambda | 0l_1 0l_2; \Lambda \rangle_{MB}$ . Een uitdrukking hiervoor kan gevonden worden in [6]:

$$\begin{aligned} \langle nlNL; \Lambda | 0l_1 0l_2; \Lambda \rangle_{MB} &= \left[ \frac{l_1! l_2!}{(2l_1)!(2l_2)!} \frac{(2l+1)(2L+1)}{2^{l+L}} \frac{(n+l)!}{n!(2n+2l+1)!} \frac{(N+L)!}{n!(2N+2L+1)!} \right]^{1/2} \\ &\times (-1)^{n+l+L-\Lambda} \sum_x (2x+1) A(l_1 l, l_2 L, x) W(lL l_1 l_2; \Lambda x) \end{aligned} \quad (87)$$

$n'$	$l'$	$N'$	$L'$	$\langle nlNL; \Lambda \mid -r_1^2 \mid n'l'N'L'; \Lambda \rangle$
$n-1$	$l$	$N$	$L$	$\frac{1}{2} \left[ n \left( n + l + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}$
$n$	$l$	$N-1$	$L$	$\frac{1}{2} \left[ N \left( N + L + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2}$
$n-1$	$l+1$	$N-1$	$L+1$	$\left[ nN(l+1)(L+1) \right]^{1/2} (-1)^{\Lambda+L+l} W(l+1LL+1; 1\Lambda)$
$n-1$	$l+1$	$N$	$L-1$	$\left[ n(N+L+1/2)(l+1)L \right]^{1/2} (-1)^{\Lambda+L+l} W(l+1LL-1; 1\Lambda)$
$n$	$l-1$	$N-1$	$L+1$	$\left[ (n+l+1/2)Nl(L+1) \right]^{1/2} (-1)^{\Lambda+L+l} W(l-1LL+1; 1\Lambda)$
$n$	$l-1$	$N$	$L-1$	$\left[ (n+l+1/2)(N+L+1/2)lL \right]^{1/2} (-1)^{\Lambda+L+l} W(l-1LL-1; 1\Lambda)$

Tabel 2: The matrix elements of  $-r_1^2$ 

met

$$A(l_1 l, l_2 L, x) = \left[ \frac{(l_1 + l + x + 1)!(l_1 + l - x)!(l_1 + x - l)!}{(l + x - l_1)!} \frac{(l_2 + L + x + 1)!(l_2 + L - x)!(l_2 + x - L)!}{(L + x - l_2)!} \right]^{1/2} \sum_q (-1)^{\frac{l+q-l_1}{2}} \frac{(l+q-1)!}{\left(\frac{(l+q-l_1)}{2}\right)! \left(\frac{(l+l_1-q)}{2}\right)!} \frac{1}{(q-x)!(q+x)!} \frac{(L+q-l_2)!}{\left(\frac{(L+q-l_2)}{2}\right)! \left(\frac{(L+l_2-q)}{2}\right)!}. \quad (88)$$

De sommatie over  $q$  is beperkt tot die positieve waarden van  $q$  waarvoor de argumenten van de faculteiten niet-negatief zijn.  $W(lLL_1l_2; \Lambda x)$  stelt de Racah W coefficient voor en staat in verband met de Wigner 6-j symbolen:

$$W(lLL_1l_2; \Lambda x) = (-1)^{l+L+l_1+l_2} \begin{Bmatrix} l & L & \Lambda \\ l_2 & l_1 & x \end{Bmatrix}. \quad (89)$$

De restricties voor de sommatie over  $x$  in (87) worden gegeven door

$$|l - l_1| \leq x \leq l + l_1 \quad |L - l_2| \leq x \leq L + l_2. \quad (90)$$

Deze relaties volgen uit de symmetrie-eigenschappen van het Wigner 6-j symbool. ‘

## B.2 Eigenschappen

Moshinsky-brackets hebben de volgende orthogonaliteitsrelaties:

$$\sum_{nlNL} \langle nlNL; \Lambda \mid n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} \langle nlNL; \Lambda \mid n'_1 l'_1 n'_2 l'_2; \Lambda \rangle_{MB} = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{n_2 n'_2} \delta_{l_2 l'_2} \quad (91)$$

$$\sum_{n_1 l_1 n_2 l_2} \langle nlNL; \Lambda \mid n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} \langle n'l'N'L'; \Lambda \mid n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{NN'} \delta_{LL'} \quad (92)$$

De volgende symmetrierelaties gelden:

$$\begin{aligned}
 \langle nlNL; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} &= (-1)^{L-\Lambda} \langle nlNL; \Lambda | n_2 l_2 n_1 l_1; \Lambda \rangle_{MB} \\
 &= (-1)^{l_1-\Lambda} \langle NLnl; \Lambda | n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda \rangle_{MB} \\
 &= (-1)^{l_1+l} \langle NLnl; \Lambda | n_2 l_2 n_1 l_1; \Lambda \rangle_{MB} \\
 &= (-1)^{l_2+L} \langle n_1 l_1 n_2 l_2; \Lambda | NLnl; \Lambda \rangle_{MB}
 \end{aligned}$$

Het bewijs van bovenstaande relaties kan men vinden in [3].

## Referenties

- [1] C Anderson, M Antonello, B Baller, T Bolton, C Bromberg, F Cavanna, E Church, D Edmunds, A Ereditato, S Farooq, et al. First measurements of inclusive muon neutrino charged current differential cross sections on argon. *Physical review letters*, 108(16):161802, 2012.
- [2] A Ankowski, R Beminiwattha, O Benhar, DG Crabb, DB Day, F Garibaldi, G Garvey, D Gaskell, C Giusti, O Hansen, et al. Measurement of the spectral function of  $^{40}\text{Ar}$  through the  $(e, e'p)$  reaction. *arXiv preprint arXiv:1406.4080*, 2014.
- [3] Thomas A Brody and Marco Moshinsky. *Tables of transformation brackets for nuclear shell-model calculations*. Gordon and Breach, 1967.
- [4] Marcos Moshinsky. Transformation brackets for harmonic oscillator functions. *Nuclear Physics*, 13(1):104–116, 1959.
- [5] Bogdan Povh, Martin Lavelle, Klaus Rith, Christoph Scholz, and Frank Zetsche. *Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] D Ursescu, M Tomaselli, T Kuehl, and S Fritzsche. Symbolic algorithms for the computation of moshinsky brackets and nuclear matrix elements. *Computer physics communications*, 173(3):140–161, 2005.
- [7] Maarten Vanhalst. *Quantifying short-range correlations in nuclei*. PhD thesis, Universiteit Gent, 2014.