Matematyka Dyskretna

Wersja 2.0 (28.09.2022)

Dawid Popławski

Spis treści

Informacje

Plik ten był przygotowywany pod użytek prywatny, dlatego sposób przedstawienia tu informacji jest bardzo subiektywny. Nie jest to opracowanie sylabusa przedmiotu, lecz zlepek informacji z działów kursu "Matematyka dyskretna (MAEW21400W)" przedstawionych przez Prof. dr hab. Mieczyslawa Wodeckiego jako potrzebnych do zaliczenia przedmiotu w semestrze letnim (2021/2022) na kierunku "Informatyczne Systemy Automatyki". Umieściłem tutaj jedynie pewniaki, dzięki którym dało się zdać egzamin. Brakuje tutaj przynajmniej połowy wiedzy jaką powinniście mieć z tego przedmiotu nie licząć dowodów, których na egzaminie nie będzie. Dokument ten nie jest publikacją naukową i nigdy nie powinien być traktowany z pełną ufnością. Nie udostępnie pliku .tex, jeżeli ktoś miałby chęć rozwinięcia informacji tu zaprezentowanych lub poinformowania o błędach które znalazł, kontakt jest na każdej stronie. Na githubie zawsze będzie znajdować się najnowsza wersja. Jak mówiłem są to zagadnienia, które były potrzebne na egzamin mojego rocznika. To co będzie na zaliczeniu zależy od waszego Wykładowcy.

Wyznaczanie wzoru jawnego na ciąg rekurencyjny

$$\begin{cases} a_0 & = & k, & k \in \mathbb{R} \\ a_1 & = & l, & l \in \mathbb{R} \\ a_n & = & b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2}, & b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Przenosimy wszystko na lewą stronę równania,
   - Pamiętamy o znakach,
   - Układamy wyrazy od lewej strony od największego do najmniejszego n'a,
2. $a_n - b \cdot a_{n-1} - c \cdot a_{n-2} = 0$
3. Tworzymy równanie charakterystyczne,
   - $r^2 - b \cdot r - c = 0$
4. Roziązujemy równanie kwadratowe (wyznaczamy miejsca zerowe),
   (a) Jeśli $\Delta > 0$
      - $a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$

   (b) Jeśli $\Delta = 0$
      - $a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$
5. Wyliczamy c_1 i c_2 podstawiając warunki podane w poleceniu tworząc układ równań,

$$\begin{cases} k & = & c_1 \cdot (r_1)^0 + c_2 \cdot (r_2)^0 \\ l & = & c_1 \cdot (r_1)^1 + c_2 \cdot (r_2)^1 \end{cases}$$

6. Podstawiamy do równania ogólnego i mamy odpowiedź.

Własności relacji

Zwrotna

$$\underset{x \in X}{\forall} (x, x) \in R$$

Każdy element ze zbioru X jest w relacji z samym sobą

Przeciwzwrotna

$$\underset{x \in X}{\forall} (x, x) \notin R$$

Żaden element ze zbioru X nie jest w relacji z samym sobą

Symetryczna

$$\underset{x,y \in X}{\forall} (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$$

Jeżeli jeden element jest w relacji z drugim, to drugi też jest w relacji z nim.

Antysymetryczna

$$\underset{x,y \in X}{\forall} (x, y) \in R \land (y, x) \in R \implies x = y$$

Jeżeli jeden element jest w relacji z drugim, a ten drugi jest też w relacji z nim, to musi oznaczać, że są sobie równe.

Przeciwsymetryczna

$$\underset{x,y \in X}{\forall} (x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$$

Jeżeli jeden element jest w relacji z drugim, to w żadnym wypadku ten drugi nie jest w relacji z pierwszym.

Przechodnia

$$\underset{x,y,z \in X}{\forall} (x, y) \in R \land (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$$

Jeżeli jeden element jest w relacji z drugim, a drugi z trzecim, to pierwszy na pewno jest w relacji z trzecim.

Rozszerzony algorytm Euklidesa

Szukanie odwrotności elementów odwracalnych w pierscieniu

$$Ax = C \quad \mathbb{Z}_B$$

Przykład

$$3x + 13 = 20x + 7 \quad \mathbb{Z}_{125}$$
$$-17x = -6 \quad / \cdot (-1)$$
$$17x = 6$$

125	*-*	*0*
17	7	*1*
6	2	-7
5	1	15
1	5	**-22**
0		

$$17x = 6 \quad / \cdot (-22)$$
$$x = 6 \cdot (-22)$$
$$x = -132$$
$$-132 + 125 = -7$$
$$-7 + 125 = 118$$
$$x \equiv 118$$

Równanie w pierścieniu

$$Ax + By = C \implies Ax = C \quad \mathbb{Z}_B$$

1. Mnożymy równanie obustronnie przez odwrotność liczby A w pierścieniu.
   - $x = A^{-1} \cdot C$
2. Szukamy liczby przystającej do x w pierścieniu.
3. Jeżeli wcześniej równanie podzieliliśmy obustronnie:
   (a) Do x dodajemy lub odejmujemy B dopóki nie osiągniemy granicy którą jest ta liczba (B).

Własności

- A i B muszą być względnie pierwsze.
  - Jeżeli nie są dzielimy równanie przez najwiekszy dzielnik, który będzie ilością naszych rozwiązań.
- Musi być spełniona własność: $A < B$,
  - Jeżeli nie jest odejmujemy A od B.
- Równanie możemy mnożyć przez (-1) obustronnie.

Układy równań w pierścieniu

$$\mathbb{Z}_{19}$$

$$\begin{cases} 11x + 13y &= 8 \\ 12x + 17y &= 6 \end{cases}$$

1. Liczymy rozwiązania twierdzeniem Cramera.

$$W = \begin{vmatrix} 11 & 13 \\ 12 & 17 \end{vmatrix} = 31 \equiv 12 \qquad W_x = \begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 6 & 17 \end{vmatrix} = 58 \equiv 1 \qquad W_y = \begin{vmatrix} 11 & 8 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -30 \equiv 8$$

19	***-***	***0***
12	1	***1***
7	1	-1
5	1	2
2	2	-3
1	2	**8**
0		

$$x = \frac{W_x}{W} = W_x \cdot W^{-1} = 1 \cdot 8 = 8$$

$$y = \frac{W_y}{W} = W_y \cdot W^{-1} = 8 \cdot 8 = 61$$

Zasada włączania i wyłączania

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Gołębnika

Jeżeli n obiektów umieścimy w m szufladach i $n > m > 0$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, to co najmniej jedna szuflada ma $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ lub więcej elementów oraz co najmniej jedna szuflada ma $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ lub mniej elementów

Kombinatoryka

- Na ile sposobów można ustawić n uczniów tak aby między (dwojką osób) A i B było co najmniej k osób.

$$\mathbf{(n-2)! \cdot 2 \cdot \sum_{1}^{(n-k-1)}}$$

- N ludzi A,B obok siebie

$$2(n-1)!$$

- Na ile sposobów można rozmieścić n kul białych i m kul czarnych w k szufladach.

$$\binom{n+k-1}{k-1} \cdot \binom{m+k-1}{k-1}$$

- Na ile sposobów można rozmieścić n kul w k szufladach.

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

- Na ile sposobów można podzielić n-osobową grupę na 2 równych grup.

$$\frac{1}{k!} \cdot \binom{n}{\frac{n}{2}}$$

Grafy i drzewa

Cykl Eulera

Graf mający cykl Eulera:

- Ma wszystkie wierzchołki parzystego stopnia,
- Musi być spójny.

Graf mający drogę Eulera:

- Ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego lub nie ma wierzchołków nieparzystego stopnia,
- Musi być spójny.

Kolorowanie grafów

Liczba chromatyczna: Ilość klas
Index chromatyczny: Najwyższy stopień wierzchołka

Izomorfizm grafów

Własności izomorfizmu

- Taka sama liczba wierzchołków, cykli oraz krawędzi,
- Muszą być takie same stopnie tych wierzchołków,
- Długość najkrótszego cyklu musi być taka sama.

Grafy wzory

1. Graf pełny n-wierzchołkowy ma $\frac{\mathbf{n(n-1)}}{\mathbf{2}}$ krawędzi.
2. Graf samodopełniającego się n-wierzchołkowy ma $\frac{\mathbf{n(n-1)}}{\mathbf{4}}$ krawędzi.
3. n-wymiarowa kostka Q_n ma $\frac{\mathbf{n \cdot 2^n}}{\mathbf{2}}$ krawędzi.
4. n-wierzchołkowy graf kubiczny (3-regularny) ma $\frac{\mathbf{n \cdot 3}}{\mathbf{2}}$ krawędzi.
5. n-wierzchołkowy graf pełny ma $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{3!(n-3)!}}$ trójkątów.
6. Dopełnienie k-regularnego grafu o n-krawędziach jest grafem $(\frac{\mathbf{2 \cdot n}}{\mathbf{k}} - \mathbf{1})$-regularnym.
7. Graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$ ma $\binom{\mathbf{n}}{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}}} + \binom{\mathbf{m}}{\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{2}}}$ cykli długości k (*parzyste*).
8. Drzewo mające n-wierzchołkowe stopnia k ma co najmniej $(\mathbf{2k - n})$ liści.
9. $2 \cdot \text{(liczba krawędzi)} = \sum_1^k i \cdot m$,   k - maks st. wierz.,   m - liczba wierzchołków stopnia i.