Analiza Matematyczna 1.2A

Wersja 2.0 (27.09.2002)

Dawid Popławski

Spis treści

Informacje

Plik ten był przygotowywany pod użytek prywatny, dlatego sposób przedstawienia tu informacji jest bardzo subiektywny. Nie jest to opracowanie sylabusa przedmiotu, lecz zlepek 90% informacji z działów kursu "Analiza matematyczna 1.2A (MAEW00110W)" przedstawionych przez Prof. dr hab. Mieczyslawa Wodeckiego jako potrzebnych do zaliczenia przedmiotu w semestrze zimowym (2021/2022) na kierunku "Informatyczne Systemy Automatyki". Dokument ten nie jest publikacją naukową i nigdy nie powinien być traktowany z pełną ufnością. Nie udostępnie pliku .tex, jeżeli ktoś miałby chęć rozwinięcia informacji tu zaprezentowanych lub poinformowania o błędach które znalazł, kontakt jest na każdej stronie. Na githubie zawsze będzie znajdować się najnowsza wersja. Jak mówiłem są to zagadnienia, które były potrzebne na egzamin mojego rocznika. To co będzie na zaliczeniu zależy od waszego Wykładowcy.

Funkcje

Definicja Funkcji

Funkcją $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ nazywamy takie przyporządkowanie, które elementom ze zbioru **X** przyporządkowuje dokładnie jeden element ze zbioru **Y**.

Nie każde przyporządkowanie elementom z jednego zbioru, elementów z drugiego zbioru jest funkcją! np.:

1. Jeżeli jakiś element ze zbioru **Y** ma przyporządkowany więcej niż jeden element ze zbioru **X**.
2. Jeżeli jakiś element ze zbioru **X** nie jest przyporządkowany do żadnego elementu ze zbioru **Y**.

Przekształcanie wykresów funkcji

- $f(x) + 3 \to$ Do góry
- $f(x) - 3 \to$ W dół
- $f(x + 3) \to$ W lewo
- $f(x - 3) \to$ W prawo
- $-f(x) \to$ Symetria osiowa względem osi OX
- $f(-x) \to$ Symetria osiowa względem osi OY
- $|f(x)| \to$ Odbicie od osi OX
- $f(|x|) \to$ Usuwanie części wykresu po lewej stronie OY, odbicie prawej strony
- $-f(-x) \to$ Symetria osiowa względem początku układu współrzędnych
- $f(k * x) \to$ dla $k > 1$ - ściaśnianie OX, dla $k \in (0, 1)$ rozciąganie OX
- $k * f(x) \to$ dla $k > 1$ - rozciąganie OY, dla $k \in (0, 1)$ ściaśnianie OY

Funkcja liniowa

- $f(x) = ax + b$
- Funkcje są równoległe, gdy $\mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}$
- Funkcje są prostopadłe, gdy $\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} = \mathbf{-1}$
- $x_0 = -\frac{b}{a}$

- Rosnąca: $a > 0$.
- Malejąca: $a < 0$.
- Stała: $a = 0$.

Funkcja kwadratowa

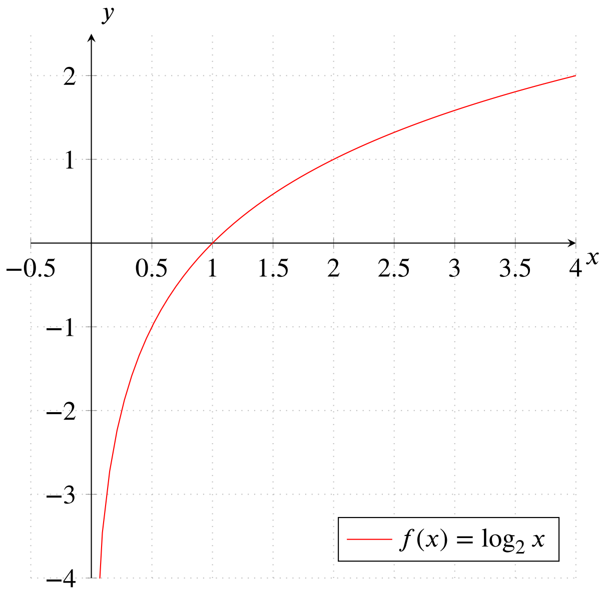
- Postać ogólna: $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$
- Postać iloczynowa: $a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0$
- Postać kanoniczna: $a(x - p)^2 + q, \quad a \neq 0$
- Wierzchołek: $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}$ lub $f(p))$

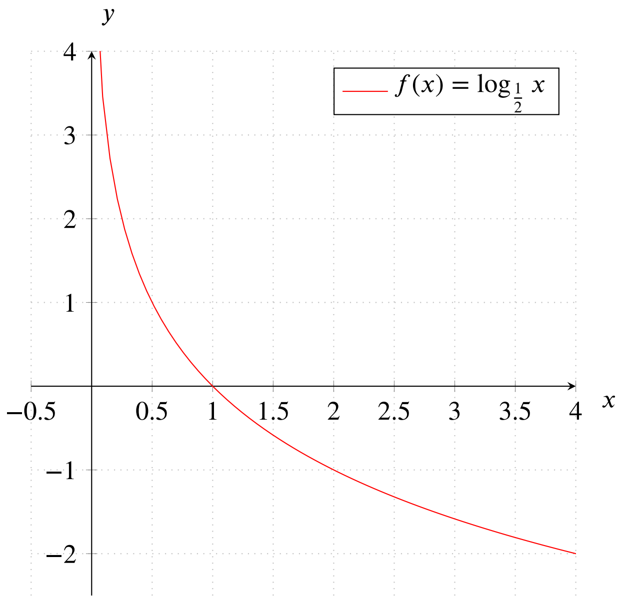
Wzory Vieta:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Funkcja logarytmiczna

$$f(x) = log_a x, \quad a \neq 1$$

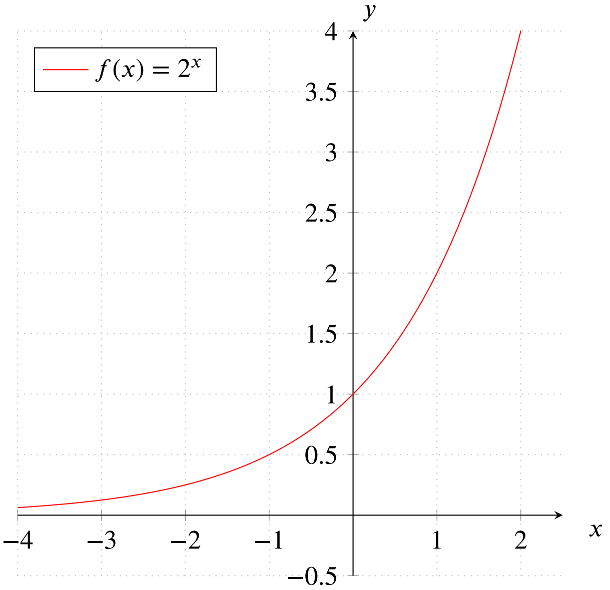


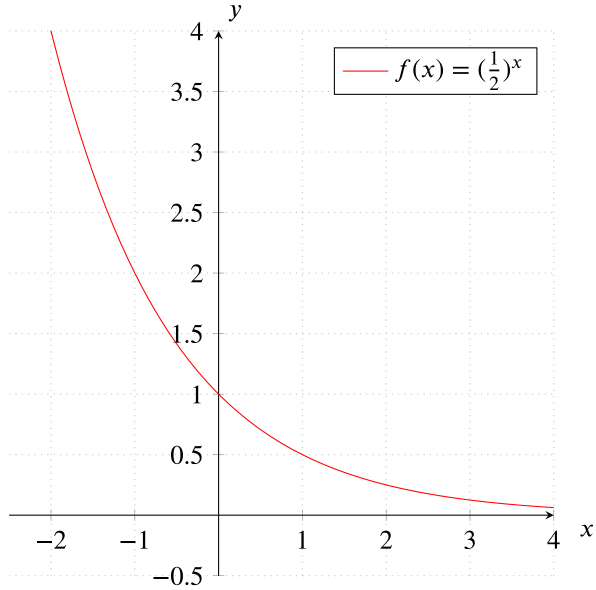


D: $\mathbb{R}_+$
ZW: $\mathbb{R}$
Monotoniczność: rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $a < 1$.
Funkcja jest różnowartościowa.
Nie jest parzysta ani nieparzysta.

Funkcja wykładnicza

$$f(x) = a^x$$





D: $\mathbb{R}$
ZW: $\mathbb{R}_+$
Monotoniczność: rosnąca dla $a > 1$, malejąca dla $a < 1$.
Funkcja jest różnowartościowa.
Nie jest parzysta ani nieparzysta.
Funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie $f(x) > 0$.

Funkcja wymierna

$$f(x) = \frac{W_n(x)}{W_m(x)}$$

$W_n(x)$ - jest wielomianem stopnia n, $\quad n \in \mathbb{N}$,

$W_m(x)$ - jest wielomianem stopnia m, $\quad m \in \mathbb{N}$, $W_m(x) \neq 0$.

Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które nie są pierwiastkami wielomianu w mianowniku.

Zatem funkcją wymierną jest każda funkcja, której licznikiem i mianownikiem jest pewien wielomian. Funkcje wymierne dzielimy na funkcje wymierne właściwe i niewłaściwe (podobnie jak ułamki). Jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest większy bądź równy niż stopień wielomianu w mianowniku, to mówimy o funkcji wymiernej niewłaściwej. Jeżeli natomiast stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy niż stopień wielomianu w mianowniku, to mówimy o funkcji wymiernej właściwej.

Każda funkcja wymierna niewłaściwa, jest sumą pewnego niezerowego wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

Funkcja homograficzna

Funkcję nazywamy homograficzną w postaci:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad \neq bc, c \neq 0,$$

Założenie, **ad ≠ bc** gwarantuje, że funkcja **nie jest funkcją stałą**.

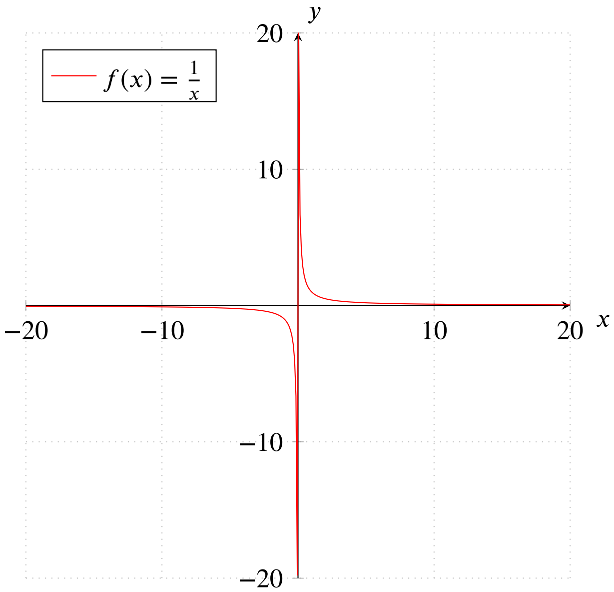
$$\mathbf{D} : \mathbb{R}\backslash\{-\tfrac{d}{c}\}, \quad \mathbf{ZW} : \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{a}{c}\}$$

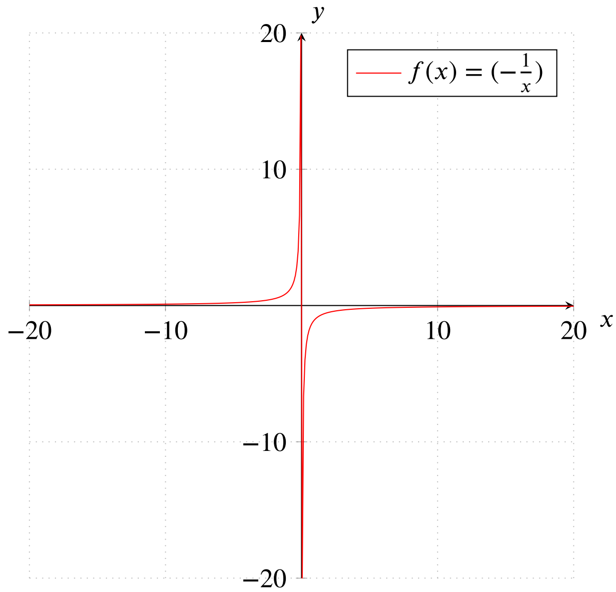
Szczególnym przypadkiem funkcji homograficznej jest funkcja proporcjonalności odwrotnej:

$$f(x) = \tfrac{k}{x}, \quad k \neq 0$$

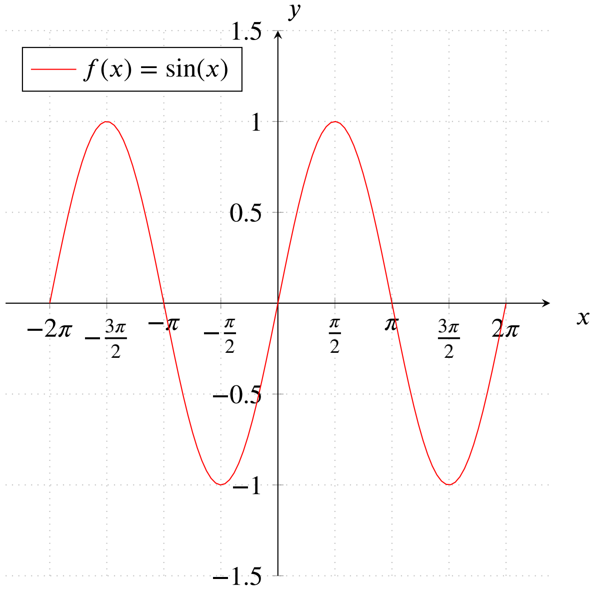
- Jeżeli **k ≥ 1** → wykres jest w **I** i **III** ćwiartce.
- Jeżeli **k ≤ 1** → wykres jest w **II** i **IV** ćwiartce.

Jej wykresem jest hiperbola, której asymptotami są osie układu współrzędnych.

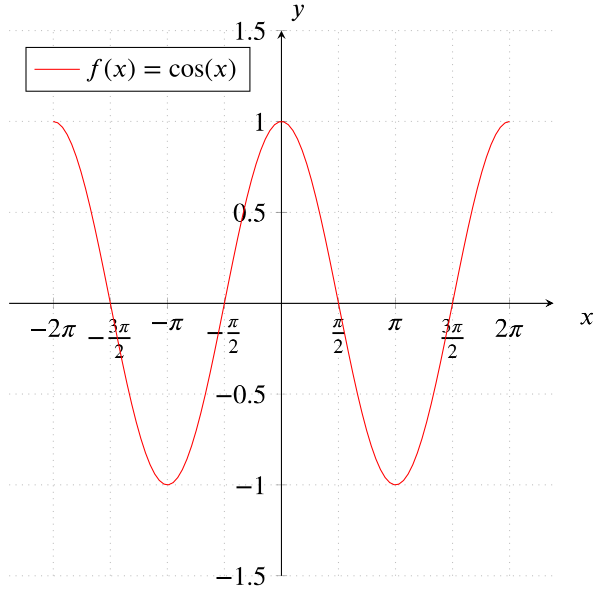




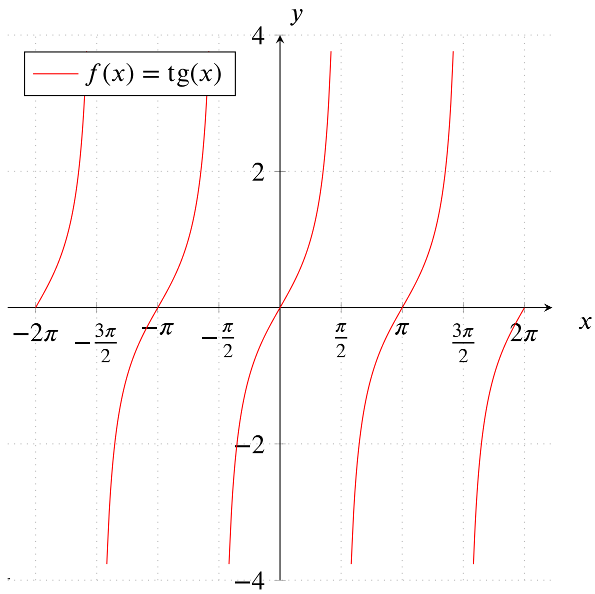
Funkcje trygonometryczne



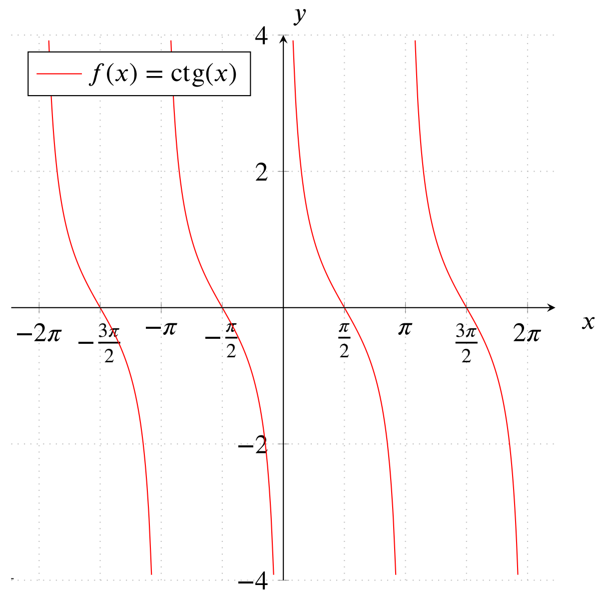
D: $x \in \mathbb{R}$
ZW: $[-1, 1]$
$\mathbf{Z_0} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
T: 2π
$\sin(-x) = -\sin(x)$



D: $x \in \mathbb{R}$
ZW: $[-1, 1]$
$\mathbf{Z_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
T: 2π
$\cos(-x) = \cos(x)$

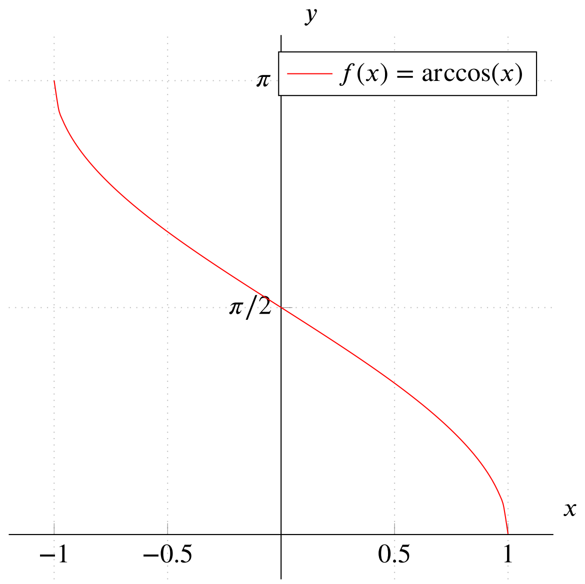


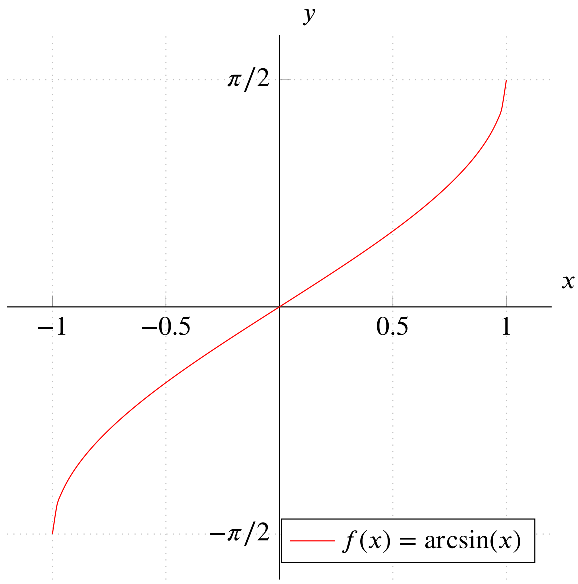
D: $x \in \mathbb{R}\ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ZW: $\mathbb{R}$
$\mathbf{Z_0} = k\pi$
T: π
$\tan(-x) = -\tan(x)$

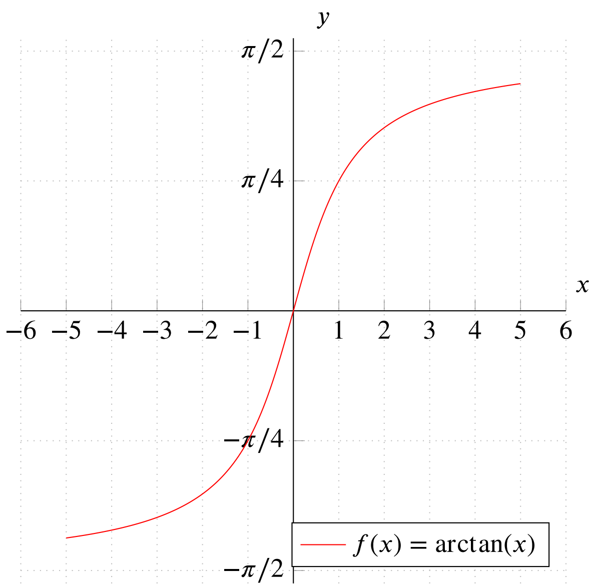


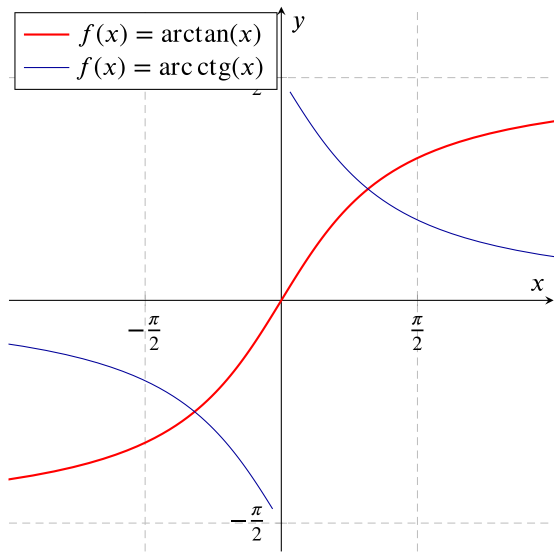
D: $x \in \mathbb{R}\ x : x = x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ZW: $\mathbb{R}$
$\mathbf{Z_0} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
T: π
$\cot(-x) = -\cot(x)$

Funkcje cyklometryczne









Injekcja - funkcja różnowartościowa

Funkcja różnowartościowa to taka, która dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości.

Funkcja $\mathbf{f}:\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}$ jest różnowartościowa jeżeli dla wszystkich $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in\mathbf{X}$ prawdziwa jest implikacja:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$x_1 - x_2 \neq 0 \implies f(x_1) - f(x_2) \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
$$f(x_1) - f(x_2) = 0 \implies x_1 = x_2$$

Własności

- Funkcja, która jest rosnąca lub malejąca w danym zbiorze, jest w tym zbiorze różnowartościowa.

Surjekcja - funkcja "na"

Funkcję $\mathbf{f}:\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y}$ nazywamy funkcją "na" (*surjekcją*), jeżeli dla każdego $\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ istnieje $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$, taki, że $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{x\in X}{\exists}\ y = f(x)$$

Bijekcja - (*wzajemnie jednoznaczna*)

Bijekcją nazywamy funkcję, która jest jednocześnie **funkcją różnowartościową** (*injekcją*) i **funkcją "na"** (*surjekcją*).

Funkcja odwrotna

Załóżmy, że funkcja **f** jest bijekcją (*jest funkcją różnowartościową oraz funkcją "na"*).

Funkcją odwrotną nazywamy funkcję $\mathbf{f^{-1}} : \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ określoną następująco:

$$\mathbf{f^{-1}(y) = x}$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ jest taki, że $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x, \quad \text{dla } x \in X \ (f^{-1} \circ f = 1_X) \\ f(f^{-1}(y)) &= y, \quad \text{dla } y \in Y \ (f \circ f^{-1} = 1_Y) \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną f^{-1}, to nazywamy ją **funkcją odwracalną** .

Własności funkcji odwrotnej:

- funkcją odwrotną do $\mathbf{f^{-1}}$ jest $\mathbf{f}$,
- funkcja odwrotna jest bijekcją (*injekcją i surjekcją*),
- dla każdej funkcji będącej bijekcją istnieje dokładnie jedna funkcja odwrotna,
- Jeżeli funkcję **f** i jej funkcję odwrotną przedstawimy na wykresie, to wykresy tych funkcji są symetryczne względem prostej $\mathbf{y} = \mathbf{x}$,
- Jeżeli złożymy ze sobą funkcję **f** i funkcję do niej odwrotną $\mathbf{f^{-1}}$ to otrzymamy identyczność.

Funkcje parzyste i nieparzyste

Funkcja jest **parzysta**, jeżeli jest symetryczna względem osi **OY**:

$$\underset{x \in D}{\forall} \ \underset{-x \in D}{\forall} \wedge f(x) = f(-x)$$

Funkcja jest **nieparzysta**, jeżeli jest symetryczna względem **początku układu współrzędnych**:

$$\underset{x \in D}{\forall} \ \underset{-x \in D}{\forall} \wedge f(x) = -f(-x)$$

Funkcje ograniczone

Funkcję f, której zbiór wartości jest ograniczony, nazywa się funkcją ograniczoną, czyli taką, której wszystkie wartości należą do pewnego przedziału ograniczonego.

Funkcję f nazywamy ograniczoną **z dołu**, jeśli istnieje taka liczba $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ że dla każdej liczby $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ spełniona jest nierówność $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{m}$.

$$\underset{m \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in D_f}{\forall} f(x) \geq m$$

Funkcję f nazywamy ograniczoną **z góry**, jeśli istnieje taka liczba $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ że dla każdej liczby $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ spełniona jest nierówność $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{M}$.

$$\underset{M \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in D_f}{\forall} f(x) \leq M$$

Funkcję f nazywamy **ograniczoną**, jeśli istnieją takie liczby $\mathbf{m}, \mathbf{M} \in \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $\mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$ spełniona jest nierówność $\mathbf{m} \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{M}$.

$$\underset{M,m \in \mathbb{R}}{\exists} \ \underset{x \in D_f}{\forall} m \leq f(x) \leq M$$

Badanie funkcji

Schemat badania przebiegu zmienności funkcji

1. Dziedzina funkcji.
2. Punkty przecięcia z osiami.
    - Z osią **OX** (*może wyjść kilka punktów*) - Przyrównujesz wzór $f(x)$ do 0 $\to (x, 0)$.
    - Z osią **OY** (*zawsze jeden punkt*) - Wstawiasz za $x = 0 \to (0, y)$.
        - Punkty przecięcia mogą nei istnieć gdy nie zgadzają się np. z dziedziną lub zasadami matematycznymi.
3. Parzystość/nieparzystość/okresowość
    - **Parzysta** - symetria względem osi OY.
        - $f(x) = f(-x)$
    - **Nieparzysta** - symetria względem początku układu współrzędnych.
        - $f(x) = -f(-x)$
    - **Okresowość** - $\underset{t \neq 0}{\exists} \; \underset{x}{\forall} \; f(x) = f(x+t)$
4. Asymptoty.
5. Monotoniczność i ekstrema.
6. Wklęsłość/wypukłość i punkty przegięcia.
7. Tabelka i wykres.

Dziedzina funkcji

- $\frac{\dots}{\square} \to \square \neq 0$
- $\sqrt{\square} \to \square \geq 0$
- $\log_a \square \to \square \geq 0$
- $\ln \square \to \square \geq 0$
- $\begin{matrix} \arcsin \square \\ \arccos \square \end{matrix} \to -1 \leq \square \leq 1$
- $\frac{a}{b} \binom{\leq}{\geq} 0 \to a \cdot b \binom{\leq}{\geq} 0$

Asymptoty

Kroki wyznaczania asymptot

1. Dziedzina funkcji (zapisujemy przedziałami),
2. Granice na krańcach przedziałów dziedziny (ale nie w $\pm\infty$),
3. Określenie asymptot pionowych,

Prosta $x = a$ jest równaniem **asymptoty pionowej** *lewo/prawo/obustronnej*, gdy:

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Prosta $y = ax + b$ jest równaniem **asymptoty ukośnej** $x \to \pm\infty$, gdy:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{cases}$$

- a i b muszą być liczbami, a nie $\pm\infty$,
- Jeżeli podczas obliczania granic okaże się, że dla $x \to +\infty$ i dla $x \to -\infty$ wychodzą różne wyniki rozbijamy zadanie na dwa przypadki, (przy $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$). Możemy wtedy uzyskać dwie różne asymptoty ukośne.
- Jeżeli $a = 0$ i b jest liczbą, asymptotę ukośną nazywamy poziomą.

Monotoniczność funkcji

- Funkcja jest monotoniczna, jeżeli jest rosnąca, lub malejąca, lub niemalejąca, lub nierosnąca, lub stała,
- Funkcja jest rosnąca, jeżeli jej wykres rośnie,
- Funkcja jest malejąca, jeżeli jej wykres maleje,
- Funkcja jest niemalejąca, jeżeli jej wykres rośnie lub jest stały,
- Funkcja jest nierosnąca, jeżeli jej wykres maleje lub jest stały,
- Funkcja jest stała, jeżeli jej wykres tworzy linię poziomą, równoległą do osi x-ów.

Rosnąca

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) < 0$$

Malejąca

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) > 0$$

Niemalejąca

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) \leq 0$$

Nierosnąca

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0 \implies f(x_1) - f(x_2) \geq 0$$

Monotoniczność, wklęsłość i wypukłość funkcji

1. Dziedzina funkcji,
2. Liczymy pochodną pierwszego lub drugiego rzędu i sprawdzamy czy $D_f = D_{f'} = D_{f''}$,
3. Przyrównujemy pochdną do zera,
4. Szkic pochodnej,
5. Nanosimy na wykres:
   - dziedzinę,
   - $(+, -, \nearrow, \searrow, min, max)$,
   - $(+, -, \cup, \cap, pp)$.
6. Piszemy przedziały monotoniczności/wklęsłości/wypukłości,
7. Wyznaczamy:
   - Wartości funkcji w ekstremach lokalnych $\rightarrow f(min)$ i $f(max)$,
   - Punkty przegięcia.

	> 0	< 0	$= 0$
$f'(x)$	$f \nearrow$	$f \searrow$	Być może ekstrema lokalne
$f''(x)$	Wklęsła	Wypukła	Potencjalny punkt przegięcia

Szkic pochodnej

1. Rysujemy od prawej strony:
   - Jeżeli współczynnik przy największej potędze ujemny od dołu,
   - Jeżeli współczynnik przy najwiekszej potędze dodatni od góry.
2. Jeżeli krotność miejsca zerowego jest parzysta odbijamy wykres,
3. Nanosimy dziedzinę (*wspólny przedział funkcji i pochodnej*).

Najmniejsze i największe wartości funkcji (ekstrema globalne)

1. Liczymy $f'(x)$,
2. Tworzymy równanie $f'(x) = 0$ i rozwiązujemy je,
3. Obliczamy wartości funkcji dla x-sów obliczonych w 2) należących do przedziału $[a, b]$ i na krańcach przedziału $[a, b]$,
4. Wybieramy najmniejszą i najwiekszą wartość z wyników i pizsemy odpowiedzi.

Superpozycja funkcji (*złożenie*)

Załóżmy, że mamy trzy zbiory X, Y, Z, oraz dwie funkcje:

$$f : X \to Y \quad g : Y \to Z$$

Droga od zbioru **X** do zbioru **Z** jest daleka, przez funkcję **f**,a później jeszcze przez funkcję **g**. I właśnie w takich sytuacjach, kiedy chcemy bezpośrednio przejść ze zbioru **X** do zbioru **Z**, tworzymy **superpozycję funkcji** (*złożenie funkcji*), tzn. nową funkcję **h**, dzięki której bezpośrednie przejście ze zbioru **X** w zbiór **Z** będzie możliwe.

Funkcję $\mathbf{h} : \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ oznaczamy $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$.

Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Równość funkcji

Dwie funkcje są równe, jeżeli mają takie same dziedziny, oraz dla każdego argumentu z dziedziny przyjmują dokładnie taką samą wartość.

Przybliżone wartości funkcji

$$f(x_0 \pm \triangle x) \approx f'(x_0) \cdot \triangle x + f(x_0)$$

$\triangle x \to$ najmniejszy przyrost do pełnej liczby.

$x_0 \to$ zaokrąglenie do pełnej liczby.

Zamiana stopni na radiany proporcją

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & - & 2\pi \\ b^\circ & - & x \end{array}$$

Styczna i normalna do krzywej $f(x)$ w punkcie $(x_0, y_0 = f(x_0))$

Równanie stycznej

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$y = f'(x_0)x - f(x_0)x_0 + y_0$$

$$a = f'(x_0)$$

Równanie normalnej

Normalna jest prostopadła do stycznej.

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + \frac{1}{f'(x_0)}x_0 + y_0$$

$$a = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Twierdzenie o trzech funkcjach

1. $x_0 \in (a, b)$
2. $\underset{x \in (a,b)}{\forall} f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\implies \left(\lim_{n \to +\infty} f(x) = g \land \lim_{n \to +\infty} h(x) = g \right) \implies \lim_{n \to +\infty} g(x) = g$$

Ciągłość funkcji

Funkcja jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Jeżeli granice z prawej i lewej strony są inne, to granica funkcji **nie istnieje**.

Funkcja jest ciągła prawo lub lewostronnie, jeżeli x_0 należy do dziedziny i istnieje granica stronna, która jest równa wartości funkcji w tym punkcie.

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$$

Istnienie pochodnej, pochodna w punkcie, iloraz różnicowy

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna (właściwa) w punkcie x_0, to jest ciągła w tym punkcie.

$$\left(\lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = g \land \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = g \right) \implies \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = g$$

$$\left(\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g \land \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g \right) \implies \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g$$

Granice

Symbole nieoznaczone

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], \left[1^{\infty}\right], \left[0^{0}\right], \left[\infty^{0}\right]$$

Mnożenie przez sprzężenie

$$\lim_{n\to+\infty} f = \begin{pmatrix} \sqrt{\ } & - & \sqrt{\ } \\ a & - & \sqrt{\ } \\ \sqrt{\ } & - & a \end{pmatrix}$$

Wzory granic funkcji

$$\left[\frac{A}{\pm\infty}\right] = 0$$

$$\left[\frac{A}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{\square\to+\infty} (1 + \frac{a}{\square})^{\square} = e^{a}$$

$$\lim_{\square\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$a^{\infty} = \begin{cases} \infty & dla\ a > 1 \\ 1 & dla\ a = 1 \\ 0 & dla\ |a| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\ln(1+\square)}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\log_a(1+\square)}{\square} = \log_a e$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{e^{\square}-1}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{a^{\square}-1}{\square} = \ln a$$

$$\ln 0 \to -\infty$$
$$\ln 1 = 0$$
$$\ln e = 1$$
$$\ln \infty = \infty$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\sin\square}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,\square}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\arcsin\square}{\square} = 1$$

$$\lim_{\square\to 0} \frac{\arctan\square}{\square} = 1$$

Dla $a > 1$

$$\log_a 0 \to -\infty$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a \infty \to \infty$$

Dla $a < 1$

$$\log_a 0 \to \infty$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a \infty \to -\infty$$

Reguła de L'HOSPITALA → $[\frac{0}{0}], [\frac{\infty}{\infty}]$

1. $[\infty - \infty]$
   - Wspólny mianownik
   - Wyciąganie przed nawias
   - $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$
2. $[\mathbf{0} \cdot \infty]$
   - $\lim_{x \to \square} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to \square} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to \square} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
3. $[\mathbf{1}^{\infty}], [\infty^{\mathbf{0}}], [\mathbf{0}^{\mathbf{0}}]$
   - $\lim_{x \to \square} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to \square} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\triangle}$
   - $\lim_{x \to \square} (g(x) \cdot \ln f(x)) = ... = \triangle$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$(\mathrm{arc})\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$(\mathrm{arc})\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$(\mathrm{arc})\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$(\mathrm{arc})\,\mathrm{ctg}\, x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$

$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$

$\mathrm{arc}\sin(-x) = -\mathrm{arc}\sin x$

$\mathrm{arc}\cos(-x) = \pi - \mathrm{arc}\cos(x)$

$\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{arc}\,\mathrm{tg}\, x$

$\mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}(-x) = \pi - \mathrm{arc}\,\mathrm{ctg}\, x$

Granica funkcji w punkcie

Jeśli dla dowolnego ciągu x_n zbieżnego do x_0 (zarówno z lewej jak i z prawej strony), wartości $f(x_n)$ zbiegają do liczby g, to g jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

$$\left(\lim_{n\to+x_0} f(x) = g \wedge \lim_{n\to-x_0} f(x) = g\right) \implies \lim_{n\to x_0} f(x) = g$$

Twierdzenie o granicach właściwych

Jeżeli istnieją wszystkie granice po prawych stronach i dodatkowo granica w mianowniku jest rózna od zera, to:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Funkcje wielu zmiennych

Granica Funkcji wielu zmiennych

Odpowiednik definicji Heinego (streszczonej) dla funkcji dwóch zmiennych:

Funkcja posiada granicę $\lim\limits_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, jeżeli dla KAŻDYCH ciągów argumentów $\mathbf{x_n} \to \mathbf{x_0}, \mathbf{y_n} \to \mathbf{y_0}$ odpowiadający im ciąg wartości funkcji $\mathbf{f_n}(\mathbf{x_n},\mathbf{y_n})$ dąży do JEDNEJ i tej samej granicy $\mathbf{g}$ (którą nazywamy "granicą funkcji").

Schemat rozwiązania

1. Najpierw podstawiasz i sprawdzasz co wychodzi, jeżeli nie dostałeś symbolu nieoznaczonego to es.
2. Jeżeli wychodzi symbol nieoznaczony to:
   (a) Bierzemy dwa ciągi, które zbiegają do x i y.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad\qquad x_n = \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$y_n = \frac{7}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0 \qquad\qquad y_n = \frac{6}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2+(\frac{7}{n})^2} = \frac{1}{50} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2+(\frac{6}{n})^2} = \frac{1}{37}$$

Wyniki są różne, więc z definicji Heinego granica **nie istnieje**.

   (b) Jeżeli dostaniemy takie same wyniki (w przykładzie 0):

   Czasami nie trzeba wyznaczać nowego ciągu a_n, ponieważ jesteśmy w stanie oszacować zakresy w twierdzeniu używając x_n i y_n.

   Niech x_n i y_n będą DOWOLNYMI ciągami, takimi, że $x_n \to 0$ i $y_n \to 0$.

   Bierzemy nowy ciąg a_n, taki, że:

   $a_n = max(|x_n|, |y_n|)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$-a_n = -\frac{(a_n)^3}{(a_n)^2} \leq \frac{(x_n)^3}{(x_n)^2+(y_n)^2} \leq \frac{(a_n)^3}{(a_n)^2} = a_n$$

   Zatem pokazaliśmy, że dla dowolnyuch ciągów $x_n \to 0$ i $y_n \to 0$, odpowiadający im ciąg wartości funkcji zbiega do 0 (na mocy twierdzenia o trzech ciągach). Oznacza to, że granica jest równa 0.

Ekstrema (lokalne) funkcji wielu zmiennych

1. Wyznaczamy dziedzinę,
2. Liczymy pochodne cząstkowe I-go rzędu,
3. Przyrównujemy te pochodne do zera, tworząc układ równań,
4. Rozwiązujemy układ równiań otrzymując punkty, które są KANDYDATAMI na ekstremum,
5. Liczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu (mieszane powinny być takie same) i tworzymy z nich wyznacznik:

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dydx} \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{vmatrix}$$

Dla funkcji 2 zmiennych

6. Do wyznacznika wstawiamy punkty jeden po drugim i go liczymy.
   (a) $\mathbf{W(P_1) > 0}$ wtedy w punkcie P_1 funkcja osiąga ekstremum,
   (b) $\mathbf{W(P_1) < 0}$ wtedy w punkcie P_1 funkcja nie osiąga ekstremum,
   (c) $\mathbf{W(P_1) = 0}$ nie możemy roztrzygnąć, czy w punkcie P_1 funkcja osiąga ekstremum.
7. W punktach w których funkcja ma ekstremum określamy:
   (a) $\frac{d^2f}{dxdx}(P_1) > 0$ - w P_1 mamy **MINIMUM**,
   (b) $\frac{d^2f}{dxdx}(P_1) < 0$ - w P_1 mamy **MAKSIMUM**.

Dla funkcji wielu zmiennych

6. Układamy macierz (hesjan) z pochodnych cząstkowych.
7. Wstawiamy punkty i liczymy wyznaczniki:

$$\text{H} = \begin{matrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dzdx} & \dots \\ \frac{d^2f}{dxdy} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^2f}{dxdz} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

$H_1(P) > 0$ $H_2(P) > 0$ $H_3(P) > 0$ ...	$H_1(P) < 0$ $H_2(P) > 0$ $H_3(P) < 0$ ...	$H_1(P) = 0$ lub $H_2(P) = 0$ lub $H_3(P) = 0$ lub ...
Funkcja osiąga w P **MINIMUM**.	Funkcja osiąga w P **MAKSIMUM**.	Przypadek nieokreślony.

Inne ułożenie znaków - **BRAK EKSTREMUM**.

---

8. Liczymy wartość funkcji w tych punktach i piszemy odpowiedź.

Ciągłość funkcji wielu zmiennych

Funkcję nazywamy ciągła w punkcie x_0, jeśli jej granica w tym punkcie jest równa jej wartości w tym punkcie.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Przybliżone wartości wyrażeń

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx \frac{df}{}(x_0,y_0)\cdot\Delta x + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\cdot\Delta y + f(x_0,y_0)$$

Tworzysz sobie funkcję, która po podstawieniu liczb dałaby ci wartość, którą masz obliczyć.

Pochodne kierunkowe

W przypadku pochodnej kierunkowej mamy do czynienia z jednoczesnym przyrostem argumentów x i y, któremu oczywiście odpowiada pewien przyrost wartości funkcji $f(x,y)$.

$$f'_{\underset{v_k}{\rightarrow}}(P_0) = \frac{df}{}(P_0)\cdot v_x + \frac{df}{dy}(P_0)\cdot v_y$$

$f'_{\underset{v_k}{\rightarrow}}(P_0)$ - pochodzna kierunkowa w punkcie P_0 w kierunku wektora $\overrightarrow{v}$.

P_0 to punkt, w którym liczymy pochodną kierunkową.

v_x, v_y to współrzędne wektora kierunkowego $\overrightarrow{v}$.

$\frac{df}{}(P_0), \frac{df}{dy}(P_0)$ to pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)$ w punkcie P_0.

Wektor kierunkowy

$\underset{v_k}{\rightarrow} = \frac{1}{|\underset{v}{\rightarrow}|}\cdot \underset{v}{\rightarrow}$ - wektor kierunkowy

$|\underset{v}{\rightarrow}| = \sqrt{x^2+y^2}$ - długość wektora

Liczenie pochodnych kierunkowych

1. Robimy z wektora wiektor kierunkowy według wzoru.
2. Liczymy pochodne kierunkowe
3. Podstawiamy do wzoru i liczymy pochodną kierunkową.

Gradient funkcji (kierunki najszybszego wzrostu)

$$\bigtriangledown (nabla) \quad f(P_0) = [\frac{df}{1}(P_0), \frac{df}{2}(P_0), ..., \frac{df}{n}(P_0)]$$

Schemat liczenia gradientu funkcji

1. Liczymy pochodne cząstkowe funkcji.
2. Pod zmienne w obliczonych pochodnych podstawiamy zmienne z punktu.
3. Zapisujemy gradient jako wektor.

$$f(x, y, z) = ln(x^2 + 3yz), \qquad (x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$$

$$\frac{df}{} = \frac{2x}{x^2+3yz}, \qquad \frac{df}{}(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0) = 1$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{3z}{x^2+3yz}, \qquad \frac{df}{dy}(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0) = 0$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{3y}{x^2+3yz}, \qquad \frac{df}{dz}(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Odp. } \bigtriangledown f(x, y, z) \text{ w punkcie } (2, 1, 0) = [1, 0, \frac{3}{4}]$$

Różniczka zupełna funkcji

$$df = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x + \frac{df}{dy} \cdot \Delta y \qquad \text{I liczysz z niewiadomymi } \Delta x, y.$$

Rozkład na ułamki proste

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. st.$Q(x)$ > st.$P(x)$,
   - Jeżeli nie jest przekształcamy go:
     - Dzieląc wielomiany pisemnie,
     - Wzorami skróconego mnożenia,
     - Grupowaniem wyrazów.
2. Potęga czynnika w mianowniku to liczba stałych,
3. Stopień nierozkładalnego wielomianu w czynniku w mianowniku, to rodzaj stałej w liczniku,
   - $x \to A, B, C...,$
   - $x^2 \to Bx + C.$
4. W mianowniku każdego z wygenerowanych ułamków prostych przepisuje czynnik z potęgami od najmniejszej do największej,
5. Sprowadzamy do mianownika FUNKCJI WEJŚCIOWEJ!,
6. Wyliczamy stałe przyrównując licznik ułamka prostego do licznika ułamka wejściowego,
7. Przedstawiamy rozkład na ułamki proste z obliczonymi stałymi.

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{2}} = a^2 + 2a \cdot b + b^2$ → Kwadrat sumy

$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{\mathbf{2}} = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ → Kwadrat różnicy

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{3}} = a^3 + 3a^2 b + 3a \cdot b^2 + b^3$ → Sześcian sumy

$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{\mathbf{3}} = a^3 - 3a^2 b + 3a \cdot b^2 - b^3$ → Sześcian różnicy

$\mathbf{a^2} - \mathbf{b^2} = (a-b)(a+b)$ → Różnica kwadratów

$\mathbf{a^3} + \mathbf{b^3} = (a+b)(a^2 - a \cdot b + b^2)$ → Suma sześcianów

$\mathbf{a^3} - \mathbf{b^3} = (a-b)(a^2 + a \cdot b + b^2)$ → Różnica sześcianów

$\mathbf{a^4} - \mathbf{b^4} = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

$\mathbf{a^n} - \mathbf{b^n} = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

$\mathbf{a^n} - \mathbf{1} = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^2 + a + 1)$

$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^{\mathbf{2}} = a^2 + b^2 + c^2 + 2a \cdot b + 2a \cdot c + 2b \cdot c$ → Kwadrat sumy trzech składnikow

$\mathbf{a^n} + \mathbf{b^n} = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + ... + a^{n-3} \cdot b^2 - ... + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$ → n nieparzyste

$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^{\mathbf{n}} = a^n \pm n \cdot a^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 \pm ... + \binom{n}{n-k} \cdot a \cdot b^{n-1} \pm b^n$ → Dwumian Newtona

$\mathbf{x^4} + \mathbf{1} = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)$

$\mathbf{x^4} + \mathbf{4} = (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (\sqrt{4}x)^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

$\mathbf{x^4} + \mathbf{b} = (x^2 + \sqrt{b})^2 - \frac{b}{2}x^2 = (x^2+b)^2 - (\sqrt{b}x)^2 = (x^2 + b - \sqrt{b}x)(x^2 + b + \sqrt{b}x)$

Całki

Całki z pierwiastkami (IV typy)

1. TYP I

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$$

2. TYP II – $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
   (a) Liczymi pochodną wielomianu pod pierwiastkiem,
   (b) Doprowadzamy licznik tak, aby część jego składników była równa pochodnej mianownika,
   (c) Rozbijamy na dwie całki i obliczamy.

3. TYP III – $\int \frac{W_{n\geq 2}(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$\int \frac{W_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = W_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} / \cdot ()' \cdot \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

   $W_{n-1}(x)$ - Postać ogólna wielomianu stopnia o 1 mniejszego.
   (a) Licze pochodne z obu stron,
   (b) Mnożenie przez mianownik obie strony,
   (c) Wyliczam A, B, Λ,
   (d) Podstawiam do wejściowego wzoru i liczę całkę.

4. TYP IV – $\int F(\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}, ...)dx$
   (a) Szukam najmniejszą wspólną wielokrotność stopni pierwiastków,
   (b) Stosuję podstawianie t za pierwiastek do tej wielokrotności,
   (c) Podnoszę obie strony do tej wielokrotności,
   (d) Liczę pochodną OBU STRON,
   (e) Wyliczam dx i upraszczam całkę.

Całki trygonometryczne (VI typów)

1. TYP I – $\int \cos / \sin(a \cdot x) \cdot \cos / \sin(b \cdot x) dx$

   $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

   $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

   $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

2. TYP II – $\int F((\cos / \sin)^n x) dx, \quad n -$ **nieparzyste**

   (a) Rozbijamy nieparzystą potęgę na iloczyn parzystej i nieparzystej,

   (b) Parzyste zamieniamy z jedynki trygonometrycznej:

      - $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$,
      - $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$,
      - $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$.

   (c) Potem podstawienie parzystej części trygonometrycznej zaniżonej do potęgi 1.

3. TYP III – $\int F((\cos / \sin)^n x) dx, \quad n -$ **parzyste**

   (a) Zamieniamy parzystą potęgę dokładając do wzoru jedynkę trygonometryczną:

      - $\cos(2 \cdot x \cdot a) = \cos^2(x \cdot a) - \sin^2(x \cdot a)$,
      - $\sin^2(x \cdot a) = \frac{1-\cos(2 \cdot x \cdot a)}{2}$,
      - $\cos^2(x \cdot a) = \frac{\cos(2 \cdot x \cdot a)+1}{2}$,

4. TYP IV – $\int F((\cos / \sin)^n x, (\cos / \sin)^m x) dx$

   (a) Bierzemy nieparzystą potęgę i rozpisujemy ją jak w typie II.

5. TYP V – $\int F((\mathrm{tg} / \mathrm{ctg})^n x) dx$

   (a) Wydzielamy zawsze $\mathrm{tg}^2(x), \mathrm{ctg}^2(x)$,

   (b) Zamieniamy:

      - $\mathrm{tg}^n(x) = \frac{\sin^n(x)}{\cos^n(x)}$,
      - $\mathrm{ctg}^n(x) = \frac{\cos^n(x)}{\sin^n(x)}$.

   (c) Licznik zamieniamy z jedynki trygonometrycznej,

   (d) Rozbijamy na dwa ułami,

   (e) Przemnażamy pozostały $\mathrm{tg}(x)$ przez całke.

   (f) Rozbijamy na dwie całki i obliczamy.

6. TYP VI – Podstawienie uniwersalne:

$$\int F(\sin(x),\cos(x))dx$$

$$\left|\begin{array}{c} t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2}) \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$\int F(\sin^2(x),\cos^2(x),\sin(x),\cos(x))dx$$

$$\left|\begin{array}{c} t = \mathrm{tg}(x) \\ \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin(x)\cos(x) = \frac{t}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

1. $\int 1 \quad = x$
2. $\int x^n \quad = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$
3. $\int x \quad = \frac{x^2}{2}$
4. $\int \frac{1}{x} \quad = \ln|x|$
5. $\int a^x \quad = \frac{a^x}{\ln(a)}$
6. $\int e^x \quad = e^x$
7. $\int \sin(x) \quad = -\cos(x)$
8. $\int \sin(a\cdot x) \quad = -\frac{\cos(a\cdot x)}{a}$
9. $\int \cos(x) \quad = \sin(x)$

1. $\int \cos(a\cdot x) \quad = \frac{\sin(a\cdot x)}{a}$
2. $\int \mathrm{tg}(x) \quad = -\ln|\cos(x)|$
3. $\int \mathrm{ctg}(x) \quad = \ln|\sin(x)|$
4. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \mathrm{tg}(x)$
5. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} = -\mathrm{ctg}(x)$
6. $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{\mathrm{arc\,tg}(\frac{x}{a})}{a}$
7. $\int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\ln|\frac{x-a}{x+a}|}{2\cdot a}$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a})$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+q}} = \ln|x+\sqrt{x^2+q}|$

1. $(C)' = 0$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3. $(x)' = 1$
4. $(\frac{a}{x})' = -\frac{a}{x^2}$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a = e^{x \cdot \ln a}$
7. $(a^b)' = e^{b \cdot \ln a}$
8. $(e^x)' = e^x$
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
11. $(\sin x)' = \cos x$
12. $(\cos x)' = -\sin x$
13. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
14. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
15. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$
18. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
19. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$
3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Szeregi

Zbieżność szeregu z definicji (suma szeregu)

Aby zbadać zbieżność szeregu $\sum a_n$ z definicji, lub sumę tego szeregu, należy:

Rozpisać ciąg sum częściowych:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

... = ...

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Obliczyć sumę tego ciągu, to znaczy:

$\lim\limits_{n \to +\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

Granica tego ciągu jest sumą szeregu $\sum a_n$.

Kryterium D'Alamberta

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, wtedy:

- Szereg jest zbieżny, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- Szereg jest rozbieżny, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$
- Nie można stwierdzić tym kryterium, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

Kryterium Cauchy'ego

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych, wtedy:

- Szereg jest zbieżny, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$
- Szereg jest rozbieżny, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$
- Nie można stwierdzić tym kryterium, gdy $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ był zbieżny, musi zachodzić: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

Zbieżność bezwzględna szeregu

Mamy szereg: $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (może mieć wyrazy ujemne).

Jeżeli szereg: $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest również zbieżny.

O takiej zbieżności mówimy, że jest to „zbieżność bezwzględna”, a szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ nazywamy „zbieżnym bezwzględnie”

Zbieżność warunkowa szeregu

Szereg, który nie jest zbieżny bezwzględnie, ale w ogóle jest zbieżny, nazywamy szeregiem „warunkowo zbieżnym”.