Algebra liniowa i geometria analityczna

Wersja 1.5 (26.09.2022)

Dawid Popławski

Spis treści

Informacje

Plik ten był przygotowywany pod użytek prywatny, dlatego sposób przedstawienia tu informacji jest bardzo subiektywny. Nie jest to opracowanie sylabusa przedmiotu, lecz zlepek 90% informacji z działów kursu "Algebra liniowa z geometrią analityczną (MAEW00110)" przedstawionych przez Dr hab. Mariusza Grecha jako potrzebnych do zaliczenia przedmiotu w semestrze zimowym (2021/2022) na kierunku "Informatyczne Systemy Automatyki". Dokument ten nie jest publikacją naukową i nigdy nie powinien być traktowany z pełną ufnością. Nie udostępnie pliku .tex, jeżeli ktoś miałby chęć rozwinięcia informacji tu zaprezentowanych lub poinformowania o błędach które znalazł, kontakt jest na każdej stronie. Na githubie zawsze będzie znajdować się najnowsza wersja. Zagadnienia z geometrii analitycznej potrzebują solidnej poprawki. Jak mówiłem są to zagadnienia, które były potrzebne na egzamin mojego rocznika. To co będzie na zaliczeniu zależy od waszego Wykładowcy.

Logarytmy

$\mathbf{log}_a(1) = 0$

$\mathbf{log}_a(a) = 1$

$\mathbf{log}_a(a^k) = k$

$\mathbf{log}_a(x^k) = k \cdot log_a(x)$

$a^{\mathbf{log}_a(x)} = x$

$\mathbf{log}_a(x \cdot y) = \mathbf{log}_a(x) + \mathbf{log}_a(y)$

$\mathbf{log}_a(\frac{x}{y}) = \mathbf{log}_a(x) - \mathbf{log}_a(y)$

$\mathbf{log}_a(b) = \frac{\mathbf{log}_c(b)}{\mathbf{log}_c(a)}$

$\mathbf{log}_a(b) = \frac{1}{\mathbf{log}_b(a)}$

Potęgi i pierwiastki

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$(\frac{a}{b})^{-x} = (\frac{b}{a})^x$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Newton

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} = 1$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{0}} = \binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\binom{\mathbf{n-k}}{\mathbf{p-k}} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k+1}} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Siedem wierszy trójkąta Pascala
jako współczynniki dwumianowe.

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n = 0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n = 1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n = 2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n = 3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n = 4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n = 5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n = 6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Siedem wierszy trójkąta Pascala.

Liczby zespolone

$z = x + yi \rightarrow$ Postać kartezjańska (algebraiczna)

$\overline{z} = x - yi \rightarrow$ Sprzężenie

$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \rightarrow$ Moduł liczby zespolonej

$z^n = |z|^n \cdot (\cos\varphi \cdot n + \sin\varphi \cdot n \cdot i) \rightarrow$ Wzór Moivre'a

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \rightarrow$ Postać trygonometryczna

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}), k = 0, 1, 2, ..., n-1$

$\omega_k = \omega_{k-1} \cdot (\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n})$
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow$ Równanie okręgu,

r $\rightarrow$ promień, S(a,b) $\rightarrow$ środek okręgu

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\mathbf{e}^{i\varphi} \rightarrow$ Postać wykładnicza

i^{-5}	$-i$
i^{-4}	1
i^{-3}	i
i^{-2}	-1
i^{-1}	$-i$
i^{0}	1
i^{1}	i
i^{2}	-1
i^{3}	$-i$
i^{4}	1
i^{5}	i

Własności modułu

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
- $|z|^n = |z^n|$, dla n $\in \mathbb{N}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, dla $z_2 \neq 0$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |zi| = ||z||$
- $|z|^2 = z\overline{z}$

Własności liczby zespolonej

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2Im(z)$
- $Re(\overline{z}) = Re(z)$
- $Im(\overline{z}) = -Im(z)$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, dla $z_2 \neq 0$

Własności postaci tryg.

- $|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$
- $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
- $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$
- $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Własności argumentu

- $Arg(z) = \varphi$
- $Arg(\overline{z}) = 2\pi - arg(z)$
- $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2k\pi$
- $Arg(z^n) = n \cdot Arg(z) + 2k\pi$
- $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2) + 2k\pi$

Tożsamości tryg.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

Inne

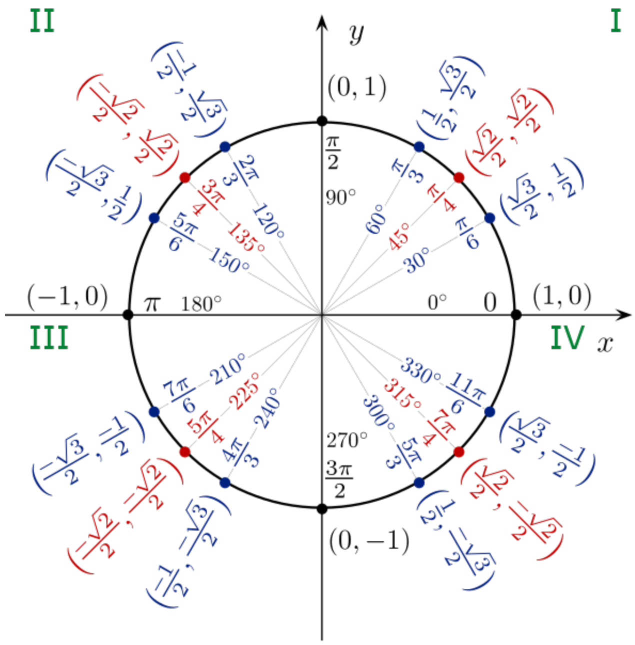
- $Re(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$
- $Im(\frac{z_1}{z_2}) = \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$
- $Re(z_1 \cdot z_2) = x_1x_2 - y_1y_2$
- $Im(z_1 \cdot z_2) = x_1y_2 + y_1x_2$

gdzie $k = 0$ lub $k = -1$
(dobrane tak, żeby argument iloczynu należał do przedziału $[0, 2\pi]$)

Wzory redukcyjne

- $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(2k\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\textbf{parzyste}) = 1$
- $\cos(\textbf{nieparzyste}) = -1$
- $\sin(\textbf{całkowite}) = 0$

	Ćwiartki				
	I	II		III	IV
$\cos\varphi$	+	-		-	+
$\sin\varphi$	+	+		-	-
φ	α_0	$\pi - \alpha_0$		$\pi + \alpha_0$	$2\pi - \alpha_0$
	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\lvert\cos\varphi\rvert$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\lvert\sin\varphi\rvert$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$
- $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$
- $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- $\mathrm{arc\,tg}(-x) = -\mathrm{arc\,tg}\, x$
- $\mathrm{arc\,ctg}(-x) = \pi - \mathrm{arc\,ctg}\, x$

Macierze

Macierz dopełnień

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det(B)$$

Własności

1. Na głownej przekątnej plusy,
2. W każdym wierszu na przemian $\pm$.

Macierz odwrotna

Macierz odwrotną można policzyć jedynie, gdy:

1. Macierz jest kwadratowa,
2. $det(A) \neq 0$.

Jeśli macierz A^{-1} istnieje to macierz A nazywamy odwracalną.

Własności

- $I^{-1} = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(cA)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}, c \rightarrow$ stała.
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$

Metoda dopełnień algebraicznych

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (A^D)^T$$

Spełnia równanie: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Wzór na macierz odwrotną do macierzy stopnia 2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana (bezwyznacznikowa)

1. Rozszerzamy o macierz jednostkową i przekształcamy $\mathbf{A^{-1}} = [\mathbf{A}|\mathbf{I}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}] = \mathbf{B}$,
2. Wykonujemy przekształcania lewej strony do macierzy jednostkowej jedynie poprzez operacje elementarne na wierszach. Każde przekszatłcenie wykonujemy równocześnie na stronie prawej.

Rząd macierzy

Wektor - macierz jednowierszowa/jednokolumnowa.

Rząd macierzy to **liczba liniowo niezależnych** wierszy lub kolumn (wektorów).

1. Laplace'em wykreślamy do skutku za każdym wykreśleniem do wyniku dodając jeden.

Zasady rzędu macierzy

$$\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}_{2\times2} \neq 0 \implies rz\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}_{2\times2} = 2$$

$$\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}_{2\times2} = 0 \implies rz\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}_{2\times2} = 1$$

$$\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}_{n\times n} = 0 \implies rz\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}_{n\times n} < n$$

$$\begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}_{n\times n} \neq 0 \implies rz\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}_{n\times n} = n$$

$$rz\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$rz\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$rz\begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 0 & 15 \end{bmatrix} = 1$$

Własności rzędu macierzy

1. Rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej.
2. Rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n.
3. $rz(A^T) = rz(A)$
4. Jeżeli zamienimy dwa wiersze/kolumny między sobą miejscami to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.
5. Jeśli wykreślimy wiersz/kolumnę złożoną z samych zer to rząd nie ulegnie zmianie.

Własności iloczynu

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
3. $(m \times n)(n \times k) = (m \times k), \quad m,n \rightarrow$ wymiary macierzy

---

Własności transpozycji

1. $(AB)^T = B^T A^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(cA)^T = cA^T, \quad c \rightarrow$ stała.
4. $(A + B)^T = A^T + B^T$
5. $(A^K)^T = (A^T)^K, \quad K \in \mathbb{N}$

Własności potęgowania

1. $A^0 = I_k, \quad k \to$ wymiar macierzy A
2. $A^{n+1} = A \cdot A^n, \quad$ dla całkowitego nieujemnego n.
3. $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$
4. $A^n = A \cdot A \cdot ... \cdot A$
5. $A^{-n} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot ... \cdot A^{-1} = (A^{-1})^n$

Własności wyznacznika

1. $det(A) = det(A^T)$
2. $det(A) = det(A^{-1}), \quad det(A) \neq 0$
3. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
4. $det(A^n) = (det(A^1))^n, \quad n \in \mathbb{N}$
5. $det(a \cdot A) = a^n \cdot det(A), \quad n \to$ stopień macierzy.
6. Wyznacznik macierzy trójkątnej i diagonalnej jest równy iloczynowi elementów na głownej przekątnej.
7. Jeżeli w macierzy A zamienimy miejscami dwa wiersze/kolumny to $det(A) = -det(A)$.
8. Jeżeli w macierzy A jest wiersz/kolumna złożona z samych zer to $det(A) = 0$.
9. Jeżeli w macierzy A są jednakowe wiersze/kolumny to $det(A) = 0$.
10. Jeżeli wiersz/kolumnę macierzy A pomnożymy przez a, powstanie macierz B, której wyznacznik to $a \cdot det(A)$.
11. Wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli do pewnego wiersza/kolumny dodamy inny wiersz/kolumnę, który może być (nie musi) pomnożony przez $a \neq 0$.
12. Jeżeli $det(A)$ rozbijemy na $det(B) + det(C)$ i suma jednej kolumny/wiersza obu wyznaczników bedzie taka sama jak w $det(A)$, podczas gdy reszta wierszy/kolumn będzie identyczna w obu wyznacznikach, to $det(A) = det(B) + det(C)$, ale $A \neq B + C$.
13. Iloczyn wartości własnych macierzy jest równy wyznacznikowi tej macierzy.

Minory

Minor główny – wyznacznik (*może być ich kilka*) macierzy stworzony poprzez wykreślenie wierszy i kolumn o tej samej pozycji.

Wiodący minor główny – wyznacznik (*może być ich kilka*) macierzy stworzony poprzez wykreślenie ostatnich wierszy i kolumn.

Ślad macierzy

Suma elementów na głownej przekątnej macierzy kwadratowej.

Własności śladu

1. $tr(A \cdot B \cdot C) = tr(B \cdot C \cdot A) = tr(C \cdot A \cdot B)$ – cykliczna zmiana

Macierz osobliwa/nieosobliwa

Macierz kwadratowa **A** jest *osobliwa*, gdy $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

Macierz kwadratowa **A** jest *nieosobliwa*, gdy $\mathbf{det}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{0}$.

Macierz diagonalna

Jest to macierz kwadratowa, która posiada poza przekątna same zera. $diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, gdzie $d_i = a_{ii}$.

$$D_4 = diag(2, 0, -5, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mnożenie/dodawanie/odejmowanie macierzy diagonalnych wykonujemy na głownej przekątnej jak na zwykłych liczbach.

Wartość wyznacznika macierzy diagonalnej jest równa iloczynowi wyrazów na głównej przekątnej.

Macierz jednostkowa

Macierz kwadratowa, która posiada na przekątnej jedynki i poza przekątną same zera.

Macierz jednostkowa jest macierzą diagonalną, której wszystkie elementy stojące na przekątnej są równe 1, czyli:

$$I_n = diag(1, 1, ..., 1)$$

Macierz jednostkowa jest elementem neutralnym dla mnożenia macierzy.

Macierz trójkątna (schodkowa)

Macierzą trójkątną określa się macierz kwadratową w której wszystkie współczynniki pod główną przekątną lub nad główną przekątną są równe zero.

Aby obliczyć wyznacznik macierzy trójkątnej należy pomnożyć wyrazy na głównej przekątnej macierzy.

Szczególnym przypadkiem macierzy trójkątnej jest macierz diagonalna oraz macierz jednostkowa.

Macierz ortogonalna

Macierz rzeczywistą **A** nazywa się *ortogonalną*, jeżeli spełnia warunek:

$$AA^T = I = A^T A$$

Macierz symetryczna/asymetryczna

Macierz rzeczywistą **A** nazywa się **symetryczną**, jeżeli spełnia warunek: $A = A^T$

Macierz rzeczywistą **A** nazywa się **antysymetryczną**, jeżeli spełnia warunek: $A = -A^T$

Wektory i wartości własne macierzy

Wektor własny – wektor, który po przekształceniu poprzez odwzorowanie macierzą pozostaje taki sam ($\lambda = 1$), jest równoległy do wejściowego wektora, prosta równoległa do tego wektora jest **kierunkiem własnym macierzy**.

Wektor własny może się najwyżej przeskalować o skalar λ:

- wydłużyć ($\lambda > 1$),
- skrócić ($\lambda \in (0, 1)$),
- powiększać i obracać ($\lambda < -1$) – nie jest to już wektor własny,
- zmieniać zwrot ($\lambda < 0$) – nie jest to już wektor własny.

Wartość własna (λ) – skalar o jaki przeskalował się wektor.

$\overrightarrow{w} = A \cdot \overrightarrow{x}$ – przekształcenie wektora $\overrightarrow{x}$ przez odwzorowanie macierzą A.

Wynika z tego:

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

Pewien wektor $\overrightarrow{v}$ jest wektorem własnym macierzy A, jezeli dla pewnej wartosci własnej λ zachodzi powyższa równość.

$$A\overrightarrow{v} - \lambda\overrightarrow{v} = 0$$

$$(A - I\lambda)\overrightarrow{v} = 0$$

Stwierdzamy, że (ponieważ $\overrightarrow{v} \neq 0$)

$$det(A - I\lambda) = 0$$

Wyliczanie wartości własnych

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$$

1. Liczymy wyznacznik A_λ – **równanie charakterystyczne macierzy**.
2. Przyrównujemy wynik do zera i wyliczamy Lambdy. W wyniku dostajemy **wartości własne macierzy**.
3. Pierwiastki podstawiamy kolejno do równania $A_\lambda X = 0$, gdzie $X \to$ wektor (macierz jednokolumnowa, złożona z niewiadomych np. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$). Rozwiązaniem będzie pewien zbiór wektorów X, z których każdy można nazwać **wektorem własnym**.

Własności związane z wartościami własnymi

1. Jeżeli macierz górno lub dolno trójkątna podniesiona jest do potęgi n, to spełnione jest równanie $A_\lambda^n = A^n - \lambda \cdot I$.
2. Wyznacznik macierzy A_λ^n (równanie charakterystyczne macierzy) górno lub dolno trójkątnej , to iloczyn wartości na głównej przekątnej. Po uproszczeniu i przyrównaniu równania do zera dostajemy wartości własne macierzy.

Twierdzenie Cayleya Hamiltona

Twierdzenie mówi, że macierz spełnia swoje równanie charakterystyczne.

Jeżeli obliczymy równanie charakterystyczne macierzy, po podstawieniu za λ naszej macierzy i przemnożeniu wyrazu wolnego przez macierz jednostkową jesteśmy wstanie obliczyć macierz do **odpowiednio** dużej potęgi.

Natomiast, jeżeli przemnożymy równanie charakterystyczne macierzy A obustronnie przez A^{-1} jesteśmy w stanie wyprowadzić wzór na macierz odwrotną. Zakładając, że $det(A) \neq 0$.

Równanie charakterystyczne macierzy 2×2:

$\lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A) = 0,$ tr(A) – ślad macierzy A.

$\lambda^2 = tr(A) \cdot \lambda - det(A)$ – z tego równania wyliczamy potęgi podstawiając rekurencyjnie.

Diagonalizacja macierzy

$$A^n = W \cdot \Lambda^n \cdot W^{-1}$$

$\Lambda \rightarrow$ Macierz diagonalna, składająca się na głównej przekątnej (diagonalnej) z **wartości własnych**.

$W \rightarrow$ Macierz zawierająca jako kolumny **wektory własne**, które kolejnością odpowiadają wartościom własnym z macierzy diagonalnej.

Własności

1. Iloczyn wartości własnych macierzy jest równy wyznacznikowi tej macierzy.
2. Ślad to suma wartości własnych.
3. **Macierzy nie można zdiagonalizować, jeżeli jedna z wartości własnych jest krotna!**

Układy równań liniowych

Układ równań można rozwiązać poniższymi metodami.

$$X = A^{-1} \cdot B, \qquad \text{gdzie } B \rightarrow \text{wektor wyrazów wolnych}$$

Twierdzenia Kroneckera-Capellego

1. Wyznaczamy macierz **A** układu równań liniowych.
2. Wyznaczmy **macierz uzupełnioną A|B układu równań liniowych** (*zawiera wszystkie współczynniki układu, a jej ostatnią kolumną są wyrazy wolne tego układu*).
3. Liczymy rzędy normalnie, albo według poniższego rozkładu dla macierzy kwadratowych.
   - Jeżeli $det(x) \neq 0 \implies rz(x) =$ rozmiarowi macierzy.
   - Jeżeli $det(x) = 0 \implies rz(x) <$ rozmiaru macierzy.
     - Liczymy wyznaczniki minorów **WIODĄCYCH** i zapętlamy trzeci krok.
4. Następnie stwierdzamy:
   - Jeżeli $\mathbf{rz}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{rz}(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, to układ jest sprzeczny (nie ma rozwiązań).
   - Jeżeli $\mathbf{rz}(\mathbf{A}) = \mathbf{rz}(\mathbf{A}|\mathbf{B})$, to układ jest oznaczony (posiada przynajmniej jedno rozwiązanie).
     - Jeżeli, $\mathbf{rz}(\mathbf{A}) = \mathbf{rz}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathbf{n}$ (liczba niewiadomych) → układ ma dokładnie jedno rozwiązanie,
     - Jeżeli, $\mathbf{rz}(\mathbf{A}) = \mathbf{rz}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathbf{r} < \mathbf{n}$ (liczba niewiadomych) → układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $\mathbf{n} - \mathbf{r}$ parametrów.

Twierdzenie Cramera

$$x_i = \frac{W_i}{W}$$

$W = det(A)$ - jest to wyznacznik macierzy współczynników układu. Jest to tzw. wyznacznik główny.

W_i - jest to wyznacznik z macierzy, która powstaje z macierzy A, przez zastąpienie kolumny współczynników niewiadomej x_i przez kolumnę wyrazów wolnych.

Zasady

1. liczba **niewiadomych = liczba równań**,
2. $det(A) \neq 0$.

Jeżeli natomiast:

- $det(A) = 0$ i $W_i = 0$ (*dla każdego i*) - układ równań liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- $det(A) = 0$ i istnieje $W_i \neq 0$ - układ równań liniowych jest sprzeczny.

Metoda eliminacji Gaussa

1. Tworzymy macierz trójkątno-dolną (schodkowo-dolną).
2. Jeżeli ostatni wiersz bez wyrazu wolnego zawiera same zera:
   - Jeżeli **wyraz wolny** w ostatnim wierszu $= 0$ → wykreślamy wiersz i liczymy niewiadome od dołu tworząc nowy układ równań,
   - Jeżeli **wyraz wolny** w ostatnim wierszu $\neq 0$ → układ jest sprzeczny.
3. Możliwe przekształcenia elementarne tylko na wierszach.
4. Kolumny można zamieniać miejscami (po obu stronach!) pamiętając o pozycji niewiadomej. Podczas zapisywania równań uwzględniamy zmiany.

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

1. Doprowadzamy macierz do postacji jednostkowej $\mathbf{X} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] \rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{C}] = \mathbf{C}$, gdzie $B \rightarrow$ kolumna wyrazów wolnych, $C \rightarrow$ wartości niewiadomych,
2. Możliwe przekształcenia elementarne tylko na wierszach.
3. Kolumny można zamieniać miejscami pamiętając o pozycji niewiadomej. Podczas odczytywania wyniku od góry zapisujemy kolejność niewiadomych tak jak zostały zamienione czytając od lewej po kolumnach.

Wielomiany

Podzielność wielomianu

Liczba **a** jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) \iff W(a) = 0$.

Liczba **a** jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $W(x) \iff$:

1. $W(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^k$,
   k → krotność pierwiastka.
2. Nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$.

Twierdzenie o równości wielomianów

Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach.

Twierdzenie o dzieleniu wielomianów

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$R(x)$ wyznaczamy rozwijając wielomian przez który dzielimy obniżając potęgę o jeden.

Twierdzenie o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $\mathbf{W(x)}$ przez dwumian $(\mathbf{x-a})$ jest równa $\mathbf{W(a)}$.

Twierdzenie Bézouta

Wielomian $\mathbf{W(x)}$ jest podzielny przez dwumian $(\mathbf{x-a})$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba **a** jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Jeżeli wielomian ma wszystkie współczynniki całkowite, to można wyznaczyć jego pierwiastki całkowite oraz wymierne.

Jeżeli $\mathbf{W(x)}$ ma pierwiastek wymierny, który mozna zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\mathbf{\frac{p}{q}}$, to **p** jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a **q** jest dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze.

Jeżeli $\mathbf{W(x)}$ ma pierwiastek całkowity **p**, to **p** jest dzielnikiem wyrazu wolnego.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynnikach rzeczywistych.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu

Kazdy wielomian stopnia **n** ma co najwyżej **n** pierwiastków.

Twierdzenie o sumie współczynników

Dla każdego wielomianu $\mathbf{W(x)}$ suma współczynników to $\mathbf{W(1)}$.

Geometria analityczna

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z], \vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$$

Operacje na wektorach

Dodawanie wektorów

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] + [b_x, b_y, b_z] = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$

Odejmowanie wektorów

$$\vec{a} - \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] - [b_x, b_y, b_z] = [a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z]$$

Mnożenie wektorów

$$k \cdot \vec{a} = [k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z]$$

Wektor jednostkowy

$(\vec{a})^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}[a_x, a_y, a_z]$ – Wersor wektora (Wektor jednostkowy o długości = 1)

Własności wektorów

$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z] = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – wersory po osiach

$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$ – Długość wektora

Wektory $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ są kolinearne (równoległe) wtedy i tylko wtedy, gdy: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

Wektory $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ i $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Cechy wektora

- Kierunek wektora – wektory mają ten sam kierunek gdy są równoległe (kolinearne),
- Zwrot wektora – w którą strone wektor jest skierowany,
- Wektory są równe, gdy mają taki sam kierunek, zwrot i długość.
- Wektor przeciwny do $\vec{a}$ to $-\vec{a}$
- Suma wektorów = przekątna równoległoboku zbudowanego na nich
- Różnica wektorów $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
- Mnożenie wektorów = Zwiększanie długości
- Punkty leżą na jednej prostej, gdy ich wektory są równoległe.

Iloczyn skalarny wektorów

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \circ [b_x, b_y, b_z] = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Wzory związane z iloczynem skalarnym

$$\cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ – Kąt pomiędzy wektorami}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{|\vec{a}|^2} \text{ – długość wektora}$$

Własności iloczynu skalarnego

- Iloczyn skalarny jest liczbą.
- $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \circ \vec{b} = 0$

Iloczyn wektorowy wektorów

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\measuredangle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \times [b_x, b_y, b_z] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Własności iloczynu wektorowego

- Iloczyn wektorowy jest wektorem.
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Dwa wektory są kolinearne (równoległe) wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- Wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ma zwrot taki, że trójka $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ ma orientację zgodną z orientacją przestrzeni (reguła prawej dłoni)

Iloczyn mieszany wektorów

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Własności iloczynu mieszanego

- Iloczyn mieszany wektorów jest liczbą
- Zamiana kolejności pary wektorów w iloczynie nieparzystą ilość razy zmienia znak iloczynu, a parzystą ilość razy nie zmienia.
- Trzy wektory są komplanarne (leżą na jednej płaszczyźnie) wtedy i tylko wtedy, gdy: $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

Pola i objętości figur

$P_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ – Pole równoległoboku

$P_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ – Pole trójkąta

$V = |\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$ – Objętość równoległościanu

$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})|$ – Objętość czworościanu (ostrosłupa)

Płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Wyznaczanie ogólnego równania płaszczyzny

Aby wyznaczyć **równanie ogólne płaszczyzny** potrzebne są:

1. Wektor do niej prostopadły (wektor normalny), jego współrzędny to trzy niewiadome w równaniu (A,B,C).
2. Punkt na niej leżący.

Równanie parametryczne (*punkt A przez który przechodzi płaszczyzna i dwa wektory, do których płaszczyzna jest równoległa*)

$\pi(x, y, z) = A + s(WEKTOR1) + t(WEKTOR2)$ i to zamieniamy na układ równań.

Przy wyznaczaniu kąta pomiędzy płaszczyznami pomijamy znak i bierzemy kąt ostry.

Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Równanie odcinkowe płaszczyzny

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \text{gdzie } a, b, c \text{ – współrzędne przecięcia z osiami}$$

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Odległość między płaszczyznami

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+c^2}}$$

Proste

Równanie kanoniczne (*kierunkowe*)

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

Równanie parametryczne

$$\begin{cases} x = v_x t + x_0 \\ y = v_y t + y_0 \\ z = v_z t + z_0 \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Równanie krawędziowe

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Wzajemne położenie prostych:

1. Czy proste mają punkty wspólne,
2. Kąt pomiędzy prostymi (równoległość, prostopadłość…).

Odległość punktu $A(x_0, y_0, z_0)$ od prostej $\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$:

$$d(A, l) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|} \text{ odleglosc punktu od prostej}$$

Odległość pomiędzy prostymi równoległymi

Liczymy wzorem na odległość punktu od prostej.

Odległość pomiędzy prostymi skośnymi

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \circ \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$$

Rzut punktu na płaszczyzne

1. Jeżeli nie mamy podanego wektora w którym kierunku mamy rzucać punkt, rzucamy go w kierunku wektora normalnego do płaszczyzny.
2. Wyznaczamy równanie parametryczne prostej przechodzącej przez rzucany punkt i płaszczyzne w kierunku wybranego wektora.
3. Niewiadome z równania podstawiamy do równania płaszczyzny i wyliczamy t.
4. Podstawiamy t i mamy wyliczony rzut punktu.

Rzut prostokątny prostej na płaszczyzne

Każdy punkt z prostej upuszczamy na płaszczyzne. Wyznaczamy równanie tej prostej.

1. Wyznaczamy równanie płaszczyzny do której należy prosta rzucana.
   (a) Wyznaczamy wektor normalny (prostopadły) płaszczyzny na która rzucamy i wektor kierunkowy rzucanej prostej.
   (b) Mnożymy wektorowo wektor normalny i wektor kierunkowy i wyniku dostajemy wektor normalny (prostopadły) do płaszczyzny wyznaczanej.
   (c) Wyznaczamy byle jaki punkt leżący na prostej rzucanej.
   (d) Wyznaczam rówanie ogólne płaszczyzny podstawiam wyznaczony punkt i licze D.
2. Rzutem prostej na płaszczyzne jest równanie krawędziowe obu płaszczyzn.

Rzut punktu na prostą

1. Jeżeli nie mamy podanego wektora w którym kierunku mamy rzucać punkt, rzucamy go w kierunku wektora normalnego do prostej.
2. Wyznaczamy równanie parametryczne prostej przechodzącej przez rzucany punkt w kierunku wybranego wektora i prostej na którą rzucamy.
3. Mamy dwa układy równań, przyrównujemy je do siebie i wyliczamy współrzędne.
4. Podstawiamy wyniki i mamy wyliczony rzut punktu.