Analiza Matematyczna 2.3A

Wersja 2.1 (28.09.2022)

Dawid Popławski

Spis treści

Informacje

Plik ten był przygotowywany pod użytek prywatny, dlatego sposób przedstawienia tu informacji jest bardzo subiektywny. Nie jest to opracowanie sylabusa przedmiotu, lecz zlepek 90% informacji z działów kursu "Analiza matematyczna 2.3A (MAEW21111W)" przedstawionych przez Dr Joanne Jureczko jako potrzebnych do zaliczenia przedmiotu w semestrze letnim (2021/2022) na kierunku "Informatyczne Systemy Automatyki". Dokument ten nie jest publikacją naukową i nigdy nie powinien być traktowany z pełną ufnością. Nie udostępnie pliku .tex, jeżeli ktoś miałby chęć rozwinięcia informacji tu zaprezentowanych lub poinformowania o błędach które znalazł, kontakt jest na każdej stronie. Na githubie zawsze będzie znajdować się najnowsza wersja. Jak mówiłem są to zagadnienia, które były potrzebne na egzamin mojego rocznika. To co będzie na zaliczeniu zależy od waszego Wykładowcy.

Równania różniczkowe jednorodne I rzędu o zmiennych rozdzielonych

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0 \iff F(x, y, y') = 0$$

x - zmienna niezależna,

y - zmienna zależna (funkcja zależna od x)

$y' = \frac{dy}{dx}$

Schemat rozwiązania

1. Przekształcamy równanie tak, aby:
   $(\textit{związek z } y) \cdot \mathbf{dy} = (\textit{związek z } x) \cdot \mathbf{dx}$
   Używając:
   - Mnożenie,
   - Dzielenie,
   - Wyciąganie przed nawias,

   Pamiętamy, że musi tu być **mnożenie przez zmienne** rozdzielone nie dzielenie.
2. Całkujemy obie strony i wyznaczamy y.

- $ln|y| = ln|x| + C_1 \quad /e^{(...)} \leftarrow$ Postać uwikłana
- $e^{ln|y|} = e^{ln|x|+C_1}$
- $|y| = e^{C_1} \cdot |x|$
- $y = C_2 \cdot |x| \leftarrow$ Postać jawna

$\sin(a) = b \quad / \arcsin(...)$ $a = \arcsin(b)$	$\arcsin(a) = b \quad / \sin(...)$ $a = \sin(b)$
$\cos(a) = b \quad / \arccos(...)$ $a = \arccos(b)$	$\arccos(a) = b \quad / \cos(...)$ $a = \cos(b)$
$\mathrm{tg}(a) = b \quad / \mathrm{arc\,tg}(...)$ $a = \mathrm{arc\,tg}(b)$	$\mathrm{arc\,tg}(a) = b \quad / \mathrm{tg}(...)$ $a = \mathrm{tg}(b)$
$\mathrm{ctg}(a) = b \quad / \mathrm{arc\,ctg}(...)$ $a = \mathrm{arc\,ctg}(b)$	$\mathrm{arc\,ctg}(a) = b \quad / \mathrm{ctg}(...)$ $a = \mathrm{ctg}(b)$

Własności

- Pochodna musi występować, reszta składników nie.
- Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja: $\mathbf{y = d(x)}$
- **Rozwiązanie ogólne** (*całka ogólna*): $y = d(x, C)$ - rodzina rozwiązań (funkcji) różniących się o stałą.
- **Rozwiążanie szczególne** (*całka szczególna*) - Jedna konkretna funkcja wybrana z rozwiązania ogólnego.
- $C_1 \cdot (-1) = C_2, \quad C \in \mathbb{R}$
- $\pm\sqrt{a} \cdot (-1) = \pm\sqrt{a}, \quad a \in \mathbb{R}$
- Jeżeli wyjdzie nam dzielenie przez zmienne rozdzielone, wtedy: $\frac{y}{dy} = \frac{x}{dx} \implies \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Znajdź rozwiązanie równania z warunkiem początkowym $y(x) = y$ (*Zagadnienie Cauchy'ego*)

1. Szukamy rozwiązania ogólnego,
2. Podstawiamy do ogólnego warunek początkowy i wyznaczamy stałą C,
3. Podstawiamy stałą C do rozwiązania ogólnego i dostajemy rozwiązanie szczególne, które jest naszą odpowiedzią.

Sprowadzalne równania różniczkowe jednorodne I rzędu

Trzeba pamiętać, że można tu wykonywać przekształcenia, które sprowadzą nam równanie do tej postaci.

- Związek może być przemnożony przez liczbę,
- Wyciaganie przed nawias (*np. największej potegi w typie II*), może sprowadzić równanie do danej postaci,
- Jeden związek może mieć c = 0 a drugi np. c = 2. W takim wypadku wyrazu wolnego nie bierzemy pod uwagę.

Typ I - $y' = f(ax + by + c)$

Związek $ax + by$ musi istnieć i być taki sam wszędzie. C może być równe 0.

Schemat rozwiązania

1. Podstawiamy t pod związek $ax + by + c$,
2. Z (1) wyznaczamy $y = ...$,
3. Z (2) wyznaczamy $y' = ...$ (*zostanie tu związek t'*),
4. W równaniu wejściowym podstawiamy (3) pod $\frac{dy}{dx}$ oraz t we wszystkich możliwich związkach,
5. Liczymy równanie ziennych rozdzielonych po $\frac{dt}{dx}$ i wyznaczamy t,
6. Przyrównujemy wyliczone t do podstawienia z (1) i wyznaczamy y.

Typ II - $y' = f(\frac{y}{x})$

Schemat rozwiązania

1. Podstawiamy t pod związek $f(\frac{y}{x})$,
2. Z (1) wyznaczamy $y = ...$,
3. Z (2) wyznaczamy $y' = ...$ (*zostanie tu związek t'*),
4. W równaniu wejściowym podstawiamy (3) pod $\frac{dy}{dx}$ oraz t we wszystkich możliwich związkach,
5. Liczymy równanie ziennych rozdzielonych po $\frac{dt}{dx}$ i wyznaczamy t,
6. Przyrównujemy wyliczone t do podstawienia z (1) i wyznaczamy y.

Własności

- $\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$
- $\frac{y^2}{x^2} = (\frac{y}{x})^2$
- $x = \sqrt{x^2}$
- $\ln(y) - \ln(x) = \ln(\frac{y}{x})$
- Wszystkie związki z "x" i z "y" muszą być związane w sposób $\frac{y}{x}$,
- Podzielenie przez "x" może sprowadzić nam pewne szczególne równanie do tego typu.

Typ III - $y' = f(\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2})$

Schemat rozwiązania

- Jeśli $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \neq 0$
  1. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 & = & 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 & = & 0 \end{cases}$$

Mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x & = & \alpha \\ y & = & \beta \end{cases}$$

  2. Podstawiamy:
     - $x = u + \alpha$,
     - $y = v + \beta$,
     - $dx = du$,
     - $dy = dv$.
  3. A więc mamy $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ i przechodzimy na równanie typu II - $y' = f(\frac{v}{u})$.

- Jeśli $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = 0$
  1. Wyciągamy a_1, a_2 przed nawias ze składników x i y i przechodzimy na równanie typu I - $y' = f(ax + by + c)$.

Własności pomocne przy warunkach początkowych

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos(...)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(...)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- $ln(1) = 0$
- $cos(0) = 1$
- $sin(0) = 0$

Równania różniczkowe liniowe niejednorodne I rzędu

Typ I - $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$

Schemat rozwiązania (*metoda uzmienniania stałej*)

1. Rozwiązujemy równanie **jednorodne** o zmiennych rozdzielonych $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$.
2. Uzmienniamy stałą $C(x)$,
3. Z (2) wyznaczamy $y = (...)$,
4. Z (3) wyznaczamy $y' = (...)$,
5. Do równania wejściowego wstawiamy (3) i (4) . $C(x)$ **MUSI** się skrócić (*czasami trzeba przekształcić*).
6. Wyznaczamy $C'(x)$.
7. Całkujemy obie strony.
8. Wyznaczone $C(x)$ wstawiamy do (2) i mamy rozwiązanie $y = (...)$.

Typ II (*Równanie Bernoulliego*) - $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)y^n$

Schemat rozwiązania

1. Podstawiamy: $z = y^{1-n}$,
2. Z (1) wyznaczamy $y = (...)$,
3. Z (2) wyznaczamy $y^n = (...)$,
4. Z (2) wyznaczamy $y' = (...)$, (εzε *jest* ***funkcją złożoną*** *np.* $y = z^2 \rightarrow y' = 2z \cdot z'$
5. Podstawiamy wszystko do równania wejściowego,
6. Dzielimy całe równanie przez związek przemnożony przez εz'ε aby wyjść na równanie - $p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = r(x)$,
7. Zawsze wychodzimy na równanie liniowe niejednorodne I rzędu (Typ I).

Równania różniczkowe nieliniowe I rzędu

Równania zupełne

$$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$$

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Własności

- Spełniony musi być warunek: $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$

Schemat rozwiązania

1. Tworzymy układ równań i całkujemy **wybrane** równanie aby dotrzeć do funkcji $\varepsilon F \varepsilon$:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} & = & P(x,y) & / \int (...)dx \\ \frac{dF}{dy} & = & Q(x,y) & / \int (...)dy \end{cases}$$

2. Po całkowaniu, zależnie od zmiennej, dostajemy:
   - $F(x,y) = \int (...)dx + \varphi(y)$
   - $F(x,y) = \int (...)dy + \varphi(x)$
3. Następnie z otrzymanego równania licze pochodną po odpowiedniej zmiennej:
   - $F(x,y) = \int (...)dx + \varphi(y) \quad / \frac{d}{dy}$
     - $\frac{dF}{dy} = (...) + \varphi'(y)$
   - $F(x,y) = \int (...)dy + \varphi(x) \quad / \frac{d}{dx}$
     - $\frac{dF}{dx} = (...) + \varphi'(x)$
4. Cofamy się do układu równań (1) i przyrównuje odpowiednie równania,
5. Jeden składnik **ZAWSZE** się skróci i w wyniku dostajemy $\varphi'(...) = (...)$,
6. Całkujemy (5), dostając w wyniku $\varphi(...) = (...) + C$,
7. Wstawiamy (6) do (2) i dostajemy $F(x,y) = (...) + C$,
8. Wynikem końcowym jest równanie $C = (...)$.

Czynnik całkujący - sprowadzanie do równania różniczkowego zupełnego

Jeżeli $\frac{dQ}{dx} \neq \frac{dP}{dy}$

Schemat rozwiązania (*Szukanie czynnika cąłkującego* $\mu(x, y)$)

1. Jeśli związek

   $\frac{1}{Q}(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx})$ jest funkcją tylko zmiennej εxε,

   - Wtedy $\mu(x, y) = \mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q}(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx})dx}$.

2. Jeśli związek $\frac{1}{P}(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy})$ jest funkcją tylko zmiennej y

   - Wtedy $\mu(x, y) = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy})dy}$.

3. Za stałą C, którą otrzymalismy po całkowaniu bierzemy dowolną liczbę rzeczywistą np. 1.
4. Mnożymy równanie wejściowe obustronnie przez czynnik całkujący $\mu(x, y)$,
5. Otrzymujemy równanie zupełne.

Równania liniowe niejednorodne II rzędu o stałych współczynnikach

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

Metoda przewidywań

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne:
   - $ay'' + by' + cy = 0$
2. Układamy równanie charakterystyczne:
   - $ar^2 + br + c = 0$
3. Liczymy deltę i zależnie od niej wyznaczamy rozwiązanie równania jednorodnego:
   - $\Delta > 0 \quad y_j = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$
   - $\Delta = 0 \quad y_j = C_1 \cdot e^{r_{1,2} \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r_{1,2} \cdot x}$
   - $\Delta < 0 \quad y_j = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x) \qquad r_1 = \alpha - \beta i \qquad r_2 = \alpha + \beta i$
4. Bierzemy pod uwagę $r(x)$ i określamy postać główną y_p:

$r(x)$	y_p
$W(x)$	[P. ogólna] tego samego stopnia
$W(x) \cdot e^{ax}$	$[P.O.] \cdot e^{ax}$
$W(x) \cdot \sin ax + W(x) \cdot \cos ax$	$[P.O.] \cdot \sin ax + [P.O.] \cdot \cos ax$
$W(x) \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + W(x) \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$	$[P.O.] \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + [P.O.] \cdot e^{ax} \cdot \cos bx$

   - $[P.O.]$ wielomianu 0 stopnia $\rightarrow y_p = A$,
   - $[P.O.]$ wielomianu I stopnia $\rightarrow y_p = Ax + B$,
   - $[P.O.]$ wielomianu II stopnia $\rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$.

   Jeżeli $r(x)$ nie znajduje się w tabelce, rozbijamy prawą stronę na kilka części i rozptrujemy je osobno. Po wyliczeniu należy je zsumować.

   Składniki z wyznaczonego y_p **NIE MOGĄ** zawierać się w żaden sposób w składnikach y_j!

   Jeżeli się zawieraja, zwiększamy stopień wielomianu o jeden stopień.

   Jeżeli $r(x) = 0$, y_j jest rozwiązaniem.
5. Z (4) wyznaczamy $y'_p = (...)$,
6. Z (5) wyznaczamy $y''_p = (...)$,
7. Wstawiamy (4),(5),(6) do równania wejściowego,
8. Porównujemy wielomiany z (7) i wyznaczamy stałe z (4),
9. Wstawiamy obliczone stałe do (4) i mamy rozwiązanie przewidywane $y_p = (...)$,
10. Odpowiedzią jest suma wyników: $y = y_j + y_p$.

Warunki początkowe *[y=(...)], [y'=(...)]*:

1. Z (10) wyznaczamy $y' = (...)$,
2. Pod (10) i w wyliczonej pochodnej wstawiamy warunki początkowe,
3. Obliczamy układ równań, którego wyniki to C_1 i C_2,
4. Podstawiamy wyliczone stałe do wyniku $y = (...)$.

Metoda uzmienniania stałych (*uniwersalna*)

Schemat

1. Wyliczamy y_j dokładnie tak jak w metodzie przewidywań,
2. Uzmienniamy stałe,
3. Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot (...) + C_2'(x) \cdot (...) & = & 0 \\ C_1'(x) \cdot (...)' + C_2'(x) \cdot (...)' & = & \frac{r(x)}{a} \end{cases}$$

4. Rozwiązujemy układ równań wyznaczając $C_1(x)$ i $C_2(x)$,
   - Korzystamy tutaj z twierdzenia Cramera,
   - Bedziemy musieli tutaj całkować, aby pozbyć się pochodnych.
5. Podstawiamy wyliczone stałe do (2).

Pochodna funkcji zespolonej

Banalna.

1. i traktujemy jako liczbę stałą,
2. Pochodną liczymy z normalnymi zasadami po zmiennej t.

Całka funkcji zespolonej

Zmiennej rzeczywistej

1. Całkę oznaczoną najczęściej rozbijamy z sumy/różnicy aby mieć dwie całki.
2. i traktujemy jako stałą liczbę (przed całkę),
3. Od podstawienia góry odejmujemy dół.
4. Jeżeli używamy podstawiania to musimy zmienić granice w których liczymy całke w podstawieniu za t wstawiamy obie granice.

Przydatne wzory

- $\cos t + i \cdot \sin t = e^{it}$

Zmiennej zespolonej

Liczymy całkę krzywoliniową na podanym przedziale.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,dt$$

Holomorficzność funkcji

Zbadać, czy funkcja $f(z)$ jest holomorficzna

Schemat

1. Podstawiamy $z = x + yi$,
2. Przyrównujemy $u + vi = f(x + yi)$,
3. Przrównujemy części rzeczywiste i urojone obu stron równania;
   - $Re(u + vi) = Re(x + yi)$,
   - $Im(u + vi) = Im(x + yi)$.
4. Sprawdzamy Równania Cauchy'ego-Riemanna:
   - $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$,
   - $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$.
5. Jeżeli pochodnę cząstkowe sa odpowiednio równe, funkcja jest holomorficzna.

Znajdź funkcję holomorficzną

Schemat

1. Funkcja holomorficzna wyrażona jest wzorem $u + vi$,
2. Będziemy mieli podane u lub v,
3. Z podanego czynnika liczymy pochodne cząstkowe,
4. Równanie Cauchy'ego-Riemanna musi być spełnione, aby funkcja była holomorficzna,
5. Z wyliczonych pochodnych cząstkowych liczymy całki po odpowiednich zmiennych, aby równanie było spełnione.
6. Łączymy winiki.

Przykład

$$u = x^2 - y^2 + 2x, \qquad u + vi = ?, \qquad v = ?$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 = \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = -2y = -\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dy} = \int \frac{du}{dx} dy = 2x \int dy + 2 \int dy = 2xy + 2y$$

$$\frac{dv}{dx} = \int \frac{du}{dy} dx = 2y \int dx = 2xy$$

Teraz przyrównujemy postacie i dostajemy $v = 2xy + 2y$.
Przyrównujemy, czyli łączymy je. W tym przypadku $\frac{dv}{dx}$ zawierał się w $\frac{dv}{dy}$.

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + i(2xy + 2y) = x^2 - y^2 + 2x + 2xyi + 2iy = (x + yi)^2 + 2x + 2yi = z^2 + 2z$$

Transformata Laplace'a i odwrotna Transformata Laplace'a

$$F(s) = L(f) = L[f(t)]$$

Schemat

Transformatą Laplace'a możemy rozwiązywać równania różniczkowe.

1. Nakładamy transformate na obie strony równania,
2. Sprowadzamy do postaci $L[y] = (...)$, $\quad / L^{-1}[...]$,
3. Mamy wynik $y = L^{-1}[...]$,
4. Liczymy transformatę odwrotną i gotowe.

Wzory

$$L[1] = \frac{1}{s} \qquad L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$
$$L[e^{a\cdot t}] = \frac{1}{s-a} \qquad L[e^{a\cdot t} \cdot t^n] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$
$$L[\sin(\beta \cdot t)] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad L[e^{a\cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)] = \frac{\beta}{(s-a)^2+\beta^2}$$
$$L[\cos(\beta \cdot t)] = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad L[e^{a\cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t)] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\beta^2}$$

$$L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot L[f(t)]'^{\cdot n}$$

Własności transformaty (*również odwrotnej*)

- $L[a \cdot f(t)] = a \cdot L[f(t)]$
- $L[f_1 + f_2] = L[f_1] + L[f_2]$
- $L[a \cdot f_1 + b \cdot f_2] = a \cdot L[f_1] + b \cdot L[f_2]$

Własności transformaty z pochodnej

- $L[f'(t)] = s \cdot L[f(t)] - f(0^+)$
- $L[f''(t)] = s^2 \cdot L[f(t)] - s \cdot f(0^+) - f'(0^+)$
- $L[f'''(t)] = s^3 \cdot L[f(t)] - s^2 \cdot f(0^+) - s \cdot f'(0^+) - f'(0^+)$

Splot funkcji - $f_1(t) \star f_2(t)$

$$f_1(t) \star f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Własności

- $f_1(t) \star f_2(t) = f_2(t) \star f_1(t)$
- $[f1(t) \star f2(t)] \star f3(t) = f1(t) \star [f2(t) \star f3(t)]$
- $[f1(t) + f2(t)] \star f3(t) = f1(t) \star f3(t) + f2(t) \star f3(t)$

Twierdzenie Borela

- $L[f_1(t) \star f_2(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)]$
- $L^{-1}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = f_1(t) \star f_2(t) = L{-}1[f_1(t)] \star L{-}1[f_2(t)]$

Przydatne wzory

Iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

Z twierdzenia Borela korzystamy np. przy wyliczaniu transformaty, jeżeli nie da się rozłożyć ułamka na ułamki proste.

Zbieżność ciągów

Schemat

1. Liczymy granice,
   - Jak mamy sume/różnicę to liczymy granice z obu wyrazów osobno i łączymy wynik.
2. Jeżeli zbiega do liczby (zespolonej lub rzeczywistej) jest zbieżny.

Przydatne własności

- $n! = (n-1)! \cdot n$
- $n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$
- $n! = (n-3)! \cdot (n-2)! \cdot (n-1)$
- $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$
- $(n+2)! = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)$
- $(n+3)! = n! \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$

Szereg Maclaurina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + ..., \quad \text{dla} |x| < 1$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ..., \quad \text{dla} x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \quad \text{dla} x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..., \quad \text{dla} |x| < 1$$

1. Mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
2. Musimy doprowadzić go do postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$
3. Liczymy granicę $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,
4. Jeżeli granica równa się λ:
   (a) Promień zbieżności: r = $\frac{1}{\lambda}$
   (b) Przedział zbieżności: $(-r, r)$ -> *"Mam nadzieję"*
5. Musimy sprawdzić co dzieje się w przedziale (*Czy krańce należą do przedziału*):
   (a) Pod x wstawiamy krańce przedziałów ($-r$ *i* r) i badamy zbieżności.
      - Jeżeli jest zbieżny na krańcu domykamy nawias z odpowiedniej strony,
      - Jeżeli jest rozbieżny na krańcu otwieramy nawias z odpowiedniej strony.

Własności

- Jeżeli granica szeregu zbiega do 0:
  - Promień zbieżności: inf
  - Przedział zbieżności: $(-\inf, \inf)$
- Jeżeli granica szeregu zbiega do ∞:
  - Promień zbieżności: 0
  - Jest rozbieżny dla $x \neq 0$