Nonlinear Hamiltonian analysis of the novel Poincaré gauge theories

W.E.V. Barker,[1,2,*] A.N. Lasenby,[1,2,†] M.P. Hobson,[1,‡] and W.J. Handley[1,2,§]

[1]*Astrophysics Group, Cavendish Laboratory, JJ Thomson Avenue, Cambridge CB3 0HE, UK*

[2]*Kavli Institute for Cosmology, Madingley Road, Cambridge CB3 0HA, UK*

PACS numbers: 04.50.Kd, 04.60.-m, 04.20.Fy, 98.80.-k, 90.80.Es

I. INTRODUCTION

Break quadratic action down using irreducible projection operators (IPOs) with respect to $\mathrm{SO}(1,3)$ – six for curvature and three for torsion. We write this as

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{T}} = {} & {m_{\mathrm{p}}}^2 \hat{\beta}_I \mathcal{T}^i_{\ jk} \, {}^I\mathcal{P}_i^{\ jk}{}_l^{\ nm} \mathcal{T}^l_{\ nm} \\ & + \hat{\alpha}_I \mathcal{R}^{ij}_{\ \ kl} \, {}^I\mathcal{P}_{ij}^{\ \ kl}{}_{nm}^{\ \ op} \mathcal{R}^{nm}_{\ \ op} + L_{\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{1}$$

Some definitions follow from this, for the parallel momenta

$$J^{-1} \hat{\pi}_i^{\ \overline{k}} = 4 {m_{\mathrm{p}}}^2 \hat{\beta}_I \, {}^I\mathcal{P}_i^{\ \perp\overline{k}}{}_n^{\ mo} \mathcal{T}^n_{\ mo} \,, \tag{2a}$$

$$J^{-1} \hat{\pi}_{ij}^{\ \ \overline{k}} = 4 \hat{\alpha}_I \, {}^I\mathcal{P}_{ij}^{\ \ \perp\overline{k}}{}_{mo}^{\ \ pq} \mathcal{R}^{mo}_{\ \ pq}. \tag{2b}$$

Next we project out $\mathrm{O}(3)$ irreps using n_i to break Lorentz symmetry (not really broken because of lapse and shift). Next we evaluate Poisson brackets between these. The following very useful identities for this process in ADM are not given in the literature:

$$\begin{gathered} \frac{\partial n_k}{\partial b^i_{\ \mu}} = -n_i h_{\overline{k}}^{\ \mu}, \quad \frac{\partial h_j^{\ \nu}}{\partial b^i_{\ \mu}} = -h_i^{\ \nu} h_j^{\ \nu}, \\ \frac{\partial b}{\partial b^i_{\ \nu}} = b h_i^{\ \nu}, \quad \frac{\partial J}{\partial b^k_{\ \nu}} = J h_{\overline{k}}^{\ \nu} \end{gathered} \tag{3}$$

Template for the Poisson matrix of PICs:

$$\begin{array}{c|cccccccccc|} & \varphi & \hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp} & {}^{\mathrm{P}}\varphi & \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\perp\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{P}}\varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

* [*] wb263@cam.ac.uk
* [†] a.n.lasenby@mrao.cam.ac.uk
* [‡] mph@mrao.cam.ac.uk
* [§] wh260@cam.ac.uk

II. KLEIN-GORDON THEORIES

From general considerations, the novel
Case 20:

$$\begin{array}{c|ccccc|} & \varphi_{\perp} & \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{4}$$

Case 24:

$$\begin{array}{c|cccc|} & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \pi & \cdot & \pi & \pi \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{5}$$

Case 25:

$$\begin{array}{c|cccccc|} & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp} & \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \pi \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{6}$$

Case 26:

$$\begin{array}{c|cccccccc|} & \varphi & \varphi_{\perp\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp} & \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\perp\overline{k}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \pi \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{7}$$

Case 28:

$$\begin{array}{c|cccccc|} & \varphi & \varphi_{\perp\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_{\perp} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\ \varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\perp\overline{k}} & \cdot & \pi & \cdot & \pi & \pi & \pi \\ \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \pi & \cdot & \pi & \pi \\ \varphi_{\perp} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \pi & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \pi & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{8}$$

Case 32:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & \varphi & \varphi_\perp & \hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \vec{\varphi}_{\overline{k}} & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\
\varphi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_\perp & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hat{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vec{\varphi}_{\overline{k}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
{}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{9}$$

test Case:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_\perp & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} \\
\tilde{\varphi}_{\overline{kl}} & \pi + \hat{\hat{\pi}}_{\overline{kl}} & \hat{\hat{\pi}}_{\overline{kl}} & \pi \quad \pi + \hat{\pi}_\perp + {}^{\mathrm{P}}\hat{\pi} + \hat{\hat{\pi}}_{\perp\overline{kl}} + \vec{\hat{\pi}}_{\overline{k}} + \tilde{\hat{\pi}}_{\perp\overline{kl}} + {}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_{\overline{klo}} \\
\varphi_\perp & \hat{\hat{\pi}}_{\overline{kl}} & \vec{\hat{\pi}}_{\overline{k}} + \tilde{\hat{\pi}}_{\perp\overline{kl}} + {}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_{\overline{klo}} & \cdot \\
\tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \pi & \cdot & \cdot \\
{}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \pi + \hat{\pi}_\perp + {}^{\mathrm{P}}\hat{\pi} + \hat{\hat{\pi}}_{\perp\overline{kl}} + \vec{\hat{\pi}}_{\overline{k}} + \tilde{\hat{\pi}}_{\perp\overline{kl}} + {}^{\mathrm{T}}\hat{\pi}_{\overline{klo}} & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{10}$$

III. WITH WITTEN'S GRAVITON

Case 3:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & \varphi & \hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_\perp & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\
\varphi & \cdot & \partial b + A & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \partial b + A & \cdot & \pi & \pi & \pi \\
\varphi_\perp & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot \\
{}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{11}$$

Case 17:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & \varphi & \hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \varphi_\perp & {}^{\mathrm{P}}\varphi & \tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & {}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} \\
\varphi & \cdot & \partial b + A & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hat{\varphi}_{\overline{kl}} & \partial b + A & \cdot & \pi & \pi & \pi & \pi \\
\varphi_\perp & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
{}^{\mathrm{P}}\varphi & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\tilde{\varphi}_{\perp\overline{kl}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
{}^{\mathrm{T}}\varphi_{\overline{klo}} & \cdot & \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{12}$$

ACKNOWLEDGMENTS