

基于全动力学的双足机器人 摆动腿落地控制

(申请清华大学工学硕士学位论文)

培养单位：自动化系
学科：控制科学与工程
研究生：王海涛
指导教师：赵明国 研究员

二〇二〇年五月

Full Dynamics Optimization for Foot-landing Control of Bipedal Robots

Thesis Submitted to
Tsinghua University
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of

Master of Science

in
Control Science and Technology

by

Wang Haitao

Thesis Supervisor: Professor Zhao Mingguo

May, 2020

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名: _____

导师签名: _____

日 期: _____

日 期: _____

摘要

复杂环境中仿人双足机器人的运动控制一直是机器人行业的难点和挑战。和传统工业机械臂只追求位置精度的目标不同，仿人双足机器人在行走过程中的接触地形、外力干扰都不断变化，这些力干扰会严重影响机器人的平衡和稳定。而为了追求更好的动态表现和更佳的环境适应性能，人们开始研究力控制机器人的整体动力学优化控制问题。在摆动腿落地接触地面时，地面反力会对机器人本体产生的冲击尤为明显，因此关键是对地面冲击力进行分析建模，设计符合地面动力学的落地控制方法。

本文针对双足机器人落地冲击力控制问题进行了研究。研究可以分为双足机器人摆动腿落地后和地面的交互模型、基于地面接触动力学的全身状态估计、质心加速度抗扰性能指标和最优抗扰控制器以及机器人全身-地面动力学优化方法四个部分。并取得以下实验结果：

- 1、为了模拟不同地形的接触情况，本文选用了通用的二阶地面接触动力学模型，实现了对仿真中不同地面动态性能的模拟。
- 2、由于只能测量机器人本体到足端的相对位置和速度状态，而地面状态受到地面反力的影响。因此需要设计观测器实现对地面状态的估计，从而得到机器人在惯性坐标系下的运动状态。本文根据质心-地面交互动力学模型导出了地面状态的全维、降维观测器，实现了对地面状态以及机器人本体全状态的实时状态估计。
- 3、当摆动腿提前/滞后触地后，对应的虚拟腿输出的力作为输入，实现对质心轨迹误差的渐进收敛控制。并将反应人类体感舒适度的质心加速度二范数积分作为控制器抗扰性能指标，设计对应的 LQR 最优控制器。
- 4、为了将双足机器人落地控制模块和机器人步行控制方法结合，提出了全身动力学控制的改进版本：全身-地面动力学优化方法。将原有的接触面速度为零的约束替换为地面动力学模型。所设计的全身-地面动力学优化方法在仿真平台中进行了测试，验证了算法的有效性，对比传统方法，摆动腿落地的冲击力有效减小，同时质心的抗扰性能指标也有所提高。

关键词：落地冲击控制；全身地面控制；双足步行

Abstract

The humanoid locomotion control on rough terrain has always been a challenge for robotics researchers. Different from the traditional industrial manipulators that only pursue position accuracy, the legged robot should control the interaction force between the ground and robot carefully, otherwise, the disturbance wrench will seriously affect the balance and stability of the robot. In order to pursue better dynamic performance and stronger environmental adaptability, researchers began to study the whole dynamic optimization control of force-controlled robots. When the swinging leg touches the ground, the ground reaction force will have an obvious impact on the floating robot base. Therefore, the key is to analyze and model the ground impact force and design a ground control model that conforms to the ground dynamics.

This paper studies the control of landing impact force of biped robot. The research can be divided into four parts: the interaction model of the biped robot's swing legs and the ground, the estimation of the whole body state based on the ground contact dynamics, the LQR-based centroidal trajectory controller, and the robot's whole body-terrain dynamic optimization method. And we get the following experimental results:

1. In order to simulate the contact situation of different terrains, this paper selects a general second-order ground contact dynamics model to realize the simulation of different ground dynamic performance in the simulation.
2. Because only the relative position and speed state of the robot body to the sole can be measured, the ground state is affected by the ground reaction force. Therefore, it is necessary to design an observer to estimate the ground state, so as to obtain the motion state of the robot in the inertial coordinate system. In this paper, the full-dimensional and reduced-dimensional observers of the ground state are derived based on the centroid-ground interactive dynamic model, and the real-time state estimation of the ground state and the full state of the robot body is realized.
3. When the swing leg touches the ground in advance / lag, the force output by the corresponding virtual leg is used as an input to achieve the progressive convergence control of the centroidal trajectory error. The centroid acceleration two-norm integral, which reflects human somatosensory comfort, is used as the anti-interference performance index of the controller, and the corresponding LQR optimal controller is designed.

Abstract

4. In order to combine the landing control module of the biped robot and the walking control method of the robot, an improved version of the whole-body dynamics control: the whole-body-terrain dynamics optimization method is proposed. We replace the fixed foot-ground constraint with the ground dynamics model. The designed whole-body-terrain dynamics optimization method was tested in the simulation platform to verify the effectiveness of the algorithm. Compared with the traditional method, the impact force of the swing leg on the ground is effectively reduced, and the anti-disturbance performance index of the centroid is also improved.

Key Words: Foot-Landing Control; Whole Body-Terrain Control; Bipedal Walking

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 课题研究背景及意义	1
1.2 双足机器人研究现状	2
1.3 足式机器人落地柔顺控制研究现状	7
1.3.1 基于被动结构柔顺的力控制	8
1.3.2 主动柔顺控制	9
1.4 足式机器人全身控制方法现状	11
1.4.1 基于速度控制的全身控制方法的解析解.....	13
1.4.2 基于力矩控制的全身控制方法的解析解.....	14
1.4.3 基于速度控制的全身控制方法的优化解.....	14
1.4.4 基于力矩控制的全身控制方法的优化解.....	14
1.4.5 全身控制方法优缺点分析	15
1.5 论文主要内容和结构	15
1.5.1 论文的主要内容和贡献	15
1.5.2 论文的主要结构	16
第 2 章 全动力学模型	18
2.1 引言	18
2.2 双足机器人建模.....	18
2.2.1 双足机器人平台参数.....	18
2.2.2 双足机器人运动学计算	20
2.2.3 浮动基多刚体动力学	22
2.3 足-地面接触动力学模型	28
2.3.1 完全非弹性碰撞模型	28
2.3.2 弹簧阻尼碰撞模型	30
2.3.3 模型参数对冲击力影响分析	32
2.4 本章小结	37
第 3 章 全身状态估计方法	38
3.1 引言	38
3.2 足-地面接触模型状态观测器	38
3.2.1 全维状态观测器	40

目 录

3.2.2 降维状态观测器	42
3.3 融合地面信息的全身状态估计方法	45
3.4 本章小结	46
第 4 章 基于全身控制的质心轨迹跟踪及抗扰	47
4.1 引言	47
4.2 质心最优跟踪抗扰控制器设计	47
4.3 包含质心任务的全动力学优化控制	52
4.3.1 质心动力学	52
4.3.2 双足机器人质心轨迹规划	53
4.3.3 仅含等式约束的任务空间投影控制方法	54
4.3.4 含有不等式约束的任务空间优化控制方法	55
4.4 仿真实验和数据分析	61
4.4.1 仿真环境介绍	61
4.4.2 仿真实验	61
4.4.3 落地控制实验	64
4.5 本章小结	67
第 5 章 总结和展望	68
5.1 总结	68
5.2 展望	69
参考文献	70
致 谢	77
声 明	78
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	79

主要符号对照表

ZMP	零力矩点 (Zero Moment Point)
HZD	混合零动态 (Hybrid Zero Dynamics)
VMC	虚拟模型控制 (Virtual Model Control)
WBC	全身动力学控制 (Whole Body Control)
KKT	Karush-Kuhn-Tucker 条件
(L)QP	(线性) 二次优化 ((Linear) Quadratic programming)
HQP	分层二次优化 (Hierarchical Quadratic Programming)
LQR	线性二次控制器 (Linear-Quadratic Regulator)
CRBA	复合刚体动力学算法 (Composite Rigid-Body Algorithm)
RNEA	迭代牛顿欧拉动力学算法 (Recursive Newton-Euler Algorithm)
IMU	惯性测量单元 (Inertial Measure Unit)
SISO	单输入单输出系统
MIMO	多输入多输出系统
Q_c	能控性矩阵
Q_{ob}	能观性矩阵
$SO(3)$	三维特殊正交群 (Special Orthogonal Group)
$SE(3)$	三维特殊欧式群 (Special Euclidean Group)
$\mathfrak{so}(3)$	三维特殊正交群对应李代数 (Lie Algebra)
$\mathfrak{se}(3)$	三维特殊欧式群对应李代数 (Lie Algebra)
${}^i R_k$	坐标系 k 在于坐标系 i 下的姿态 (正交变换矩阵)
${}^i T_k$	坐标系 k 在于坐标系 i 下的构位 (齐次变换矩阵)
${}^i \mathcal{S}_k$	关节 k 的旋量轴在坐标系 i 下的向量表示
0_{\times}	向量到李代数的计算
$Ad_T()$	不同坐标系下的旋量变换矩阵 $\in \mathbf{R}^{6 \times 6}$
ζ	阻尼比 (阻尼和临界阻尼的比值)
μ	摩擦系数
K	刚度
B	阻尼
h	质心处的总动量 (Centroidal momentum)
$J(q)$	雅克比矩阵 (Jacobian)
$M(q)$	动力学中质量矩阵 (对称矩阵)

$C(q, \dot{q})$	动力学中关节速度产生的偏置力
$G(q)$	动力学中重力产生的偏置力
$A_g(q)$	质心总动量关于关节速度的雅克比矩阵
$\Delta(x^-)$	碰撞状态映射函数
\mathcal{F}	六维广义力
$c_{\mathcal{I}}$	惯量主轴向量
τ	机器人可驱动关节力矩
q_{float}	机器人浮动基广义坐标
q_{joint}	机器人可驱动关节广义坐标
q	机器人广义坐标
$\dot{X}_i = \mathcal{V}_i$	任务 i 的笛卡尔坐标系定义下的速度
DSP	双足支撑相 (Double Support Phase)
LSP	左腿支撑相 (Left Support Phase)
RSP	右腿支撑相 (Right Support Phase)
TD	落地阶段 (Touch Down)
LTD	左腿落地 (Left Touch Down)
RTD	右腿落地 (Right Touch Down)
FP	飞行相 (Flight Phase)

第1章 绪论

1.1 课题研究背景及意义

如果说以机械臂为代表的传统机器人替代的是人类上肢的操作能力，那么双足机器人有希望在未来超越人类灵活的移动能力和对地形的适应性。早在 1973 年，Waseda 大学就研制了第一款全尺寸的双足机器人 WABOT-1^[1]，此后随着机电自动化技术的不断发展，更多高性能的双足机器人被研发出来，以上世纪八十年代日本本田公司开发的 ASIMO 机器人^[2] 和最近十年美国 Boston Dynamics 团队研发的 Atlas^[3] 为代表的双足机器人在家庭服务行业和高动态运动能力方面一次次冲击着人们的想象力。但遗憾的是，即使是代表机器人最高水平的 ASIMO 和 Atlas，目前也只停留在小范围固定场合的表演以及排练好的演示视频中，离真正走入人类的生活还有一段距离。如何研制更稳定、更灵活、更安全的双足机器人成为了当前的热点研究方向，而这其中亟待解决的是保持动态行走的同时减少未知路面变化对机器人本体平衡的干扰。

由于双足机器人依靠双腿持续切换落足点完成行走的过程，路面的起伏会影响落足的动力学过程。为了减小真实路面和规划步态时的参考地面之间的误差带来的扰动，对于较大的起伏，比如台阶或者崎岖路面，有团队采用光学传感器^[4-5] 等估计当前地形并调整步态规划的方法；至于传感器误差量级的未知地形，需要通过摆动腿落地控制来减小对机器人本体的冲击力。本文讨论的重点也在于设计摆动腿柔顺控制器，提升机器人不依赖外部传感器的“盲”走能力。

在设计控制器时，从动力学的角度分析扰动来源：未知地面对双足机器人行走的干扰来自摆动腿和地面接触时的冲击力。当相对运动速度很低时，根据动量守恒定理，我们可以忽略碰撞产生的能量损耗以及地面冲击力对机器人运动的影响。由于早期的双足行走机器人没有控制地面碰撞干扰的方法，只能以非常低的速度行走。而随着技术的进步，人们希望双足机器人能够达到近似人类的行走速度，此时摆动腿在运动过程中提前或者滞后落地时的速度变大，足-地相对运动速度不可忽略。为了减小地面冲击力对质心运动的影响，需要研究足-地面在碰撞时的动力学特性来分析碰撞后足端受到的外力扰动，并设计合理的质心-足端控制器来减少地面反力对质心的冲击。

当自由运动的单刚体和地面接触时，碰撞后的刚体运动状态仅取决于接触产生的冲击力扰动，通过调整接触材料，能够一定程度上改变触地冲击力。实际的机器人足端刚体只是机器人整体受控制的动力学系统的一部分，会同时受到机器

人关节力控制器的影响，关节力也会反过来改变系统中每个刚体的运动状态。在行走控制中我们更关心机器人质心的运动状态，因此我们需要分析足端外力扰动对质心运动的影响。对于一般的位置控制机器人（关节刚度很大），如果足-地碰撞时继续沿着规划的落足轨迹控制，机器人整体可以等效为一个带有速度的自由刚体，碰撞产生的瞬时冲击力会改变机器人所有刚体（包括质心）在碰撞方向上的运动速度。而对于力控制机器人，如果在落足过程中质心到足端的等效刚度较低，那么碰撞只发生在足端的刚体和地面之间，而机器人质心的运动状态只会被虚拟阻抗控制器输出的力影响。这种在机器人内部建立虚拟阻抗来抵消部分外部干扰的柔顺控制方法最早是由 Hogan 提出的^[6]。

综上所述，足-地面接触动力学参数和足端相对地面速度决定了地面冲击力的初值，而机器人控制器输出关节力会同时影响接触过程以及质心的运动状态。本文通过对地面冲击力产生原因和控制过程的研究，设计出将双足机器人行走过程中足底接触力对质心的干扰降到最小的落地柔顺控制器。这项工作将能提升足式机器人对地形的适应能力，为双足机器人走出实验室，走向更多的工作环境提供理论依据和技术方法。

1.2 双足机器人研究现状

双足机器人的研究工作可以按照地区分成三条主线：亚洲、欧洲和北美。日本在二战后的经济腾飞期间，机器人技术也得到了飞速的发展，早稻田大学的加藤一郎（Kato）将塞尔维亚人 M.Vukobratovic 包含零力矩点（Zero Moment Point）的理论^[7]翻译成日文教材，并开发出了世界第一台全尺寸的双足机器人^[1]，他的学生高西淳夫（Takanishi）带领团队迭代了和真人行走动作非常接近的 WABIAN 系列机器人^[8]。ZMP 理论的日文版本和早稻田大学的大量研究内容也影响了大量同时期的日本足式机器人研究者，也促进了更多研究机构和商业公司开始双足机器人的研发，包括日本产业研究所（AIST）从 1998 年开始迭代直到现在的 HRP 系列仿人机器人^[9-11]，东京大学 JSK 实验室和商业化团队 SCHAFT 开发的主动散热大扭矩系列机器人（HRP3La-JSK^[12], S-One^[13] 和 JAXON^[14]），索尼公司设计的第一款能奔跑的商用机器人 QRIO^[15]，丰田公司为世博会开发的跑动速度 7km/h 拉提琴机器人 Partner^[16]，包括本田公司倾尽二十年心血从零到一开发出的演出效果惊艳，行走速度 3.6km/h, 跑动速度 9km/h, 但是价格昂贵的 ASIMO 机器人^[2,17-19]。

而 2011 年福岛核电站事故使得日本学者们将目光重新聚焦到机器人的实际灾难救援和陪护能力，在这之后无论是东京 JSK 实验室的 JAXON^[14]，AIST 研究所的 HRP-5P^[11]，丰田公司的遥操作陪护机器人 T-HR3^[20]，本田公司为灾难救援设

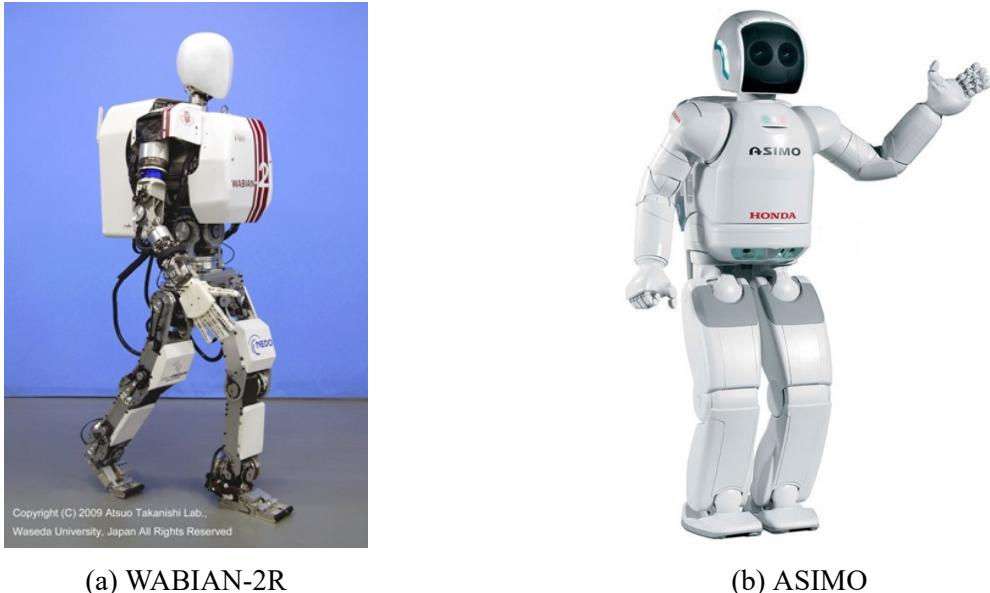
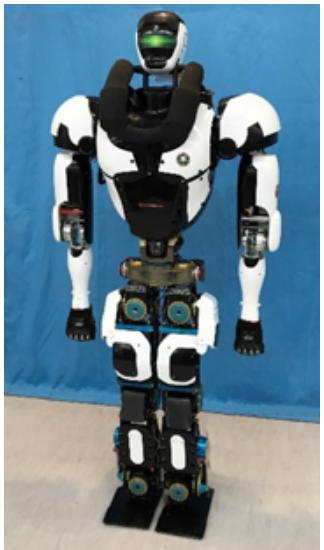


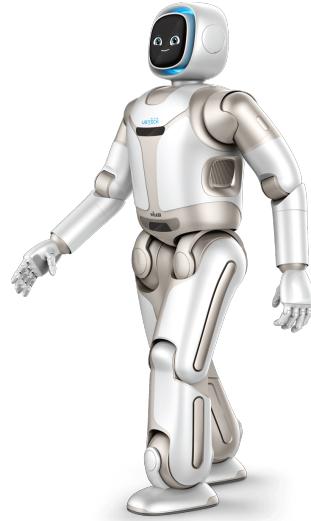
图 1.1 日本代表性双足机器人样机

计的力控机器人 E2-DR^[21] 以及川崎重工的 Kaleido^[22] 都倾向于更高扭矩，更好的力交互性能，更大操作空间以应对未知场景的复杂任务环境。亚洲除了日本之外，双足机器人较为发达的还有韩国和中国，除了受到日本成熟的 ZMP 理论的影响，也逐渐接受并使用欧美流行的在线动力学优化的方法设计控制器，研究方向逐渐从模仿人类实现快速行走转移到崎岖路面上的稳定行走和完成更复杂的操作任务上来。韩国 KAIST 实验室从 KHR 系列发展出的 HUBO 机器人能够以 1.25km/h 行走^[23]，而参加 Darpa 挑战赛并获得最终冠军的 DRC-HUBO+ 则更注重复杂场景地形的通过能力^[24]。国内的双足机器人研究机构也正在追赶世界先进水平，北京理工大学黄强教授从 2000 开始研制的汇童 BHR 系列^[25] 能够完成 2km/h 的行走和太极拳、乒乓球对打等复杂动作，目前的 BHR-6 在户外不平路面行走速度和稳定性上也有了较大的突破。浙大熊蓉教授和朱秋国老师带领的团队在悟空 I 机器人上实现了 2cm 起伏路面的行走^[26]，改进硬件后的悟空 II 具有更高的动态行走和奔跑能力，最高速度达到了 3.6km/h。清华大学联合优必选公司研制的 Walker 系列商用双足机器人达到了 2km/h 的行走速度并且具有开门倒水等操作能力^[27]。

欧洲在双足机器人的理论研究起步较早，ZMP 理论源自欧洲^[28]，在被动^[29]、欠驱动^[30] 周期行走的领域欧洲都有杰出的贡献。而全尺寸双足机器人硬件的制造和控制主要由德国，意大利，瑞士，法国，西班牙等国的学术研究机构完成，这些机构在设计双足机器人时普遍更强调机械设计创新或者驱动方式的创新。其中德国慕尼黑大学通过机械设计减小腿部惯量的 Johnnie^[31] 和 LoLa^[32]，并且能够完成 3km/h 的快速行走和 4cm 起伏路面的行走，德国宇航局 (DLR) 利用机械臂力控技术设计的双足机器人 TORO^[33]，能够实现全身力控制下的扰动恢复和不平路



(a) BHR-6, 2017



(b) Walker2, 2019

图 1.2 国内代表性双足机器人样机

面行走控制^[34]。意大利技术学院（IIT）设计了绳驱动关节的 iCub^[35]以及强调柔性关节的 COMAN^[36]等机器人，探索柔性关节下的平衡和行走控制问题。法国的 Aldebaran 机器人公司设计的 NAO 机器人大量用于竞赛和学术研究中^[37]，法国的 LAAS-CNRS 实验室和西班牙 PAL 公司合作设计的全尺寸力控机器人 TALOS^[38]也具有相当优越的平衡和力交互性能。



(a) 力控机器人 TORO (b) 线驱动机器人 iCub (c) 力控机器人 TALOS

图 1.3 欧洲代表性双足机器人样机

北美的双足机器人研究可以追溯到 1970 年，麻省理工学院（MIT）汇集了包括阻抗控制的提出者 Neville Hogan^[6]在内的一批计算机科学和电机控制的学者，

在基于机器人模型的轨迹优化等领域做出了许多贡献^[39]。MIT 的 Marc Raibert 教授在上世纪八十年代创立了著名的 Leg Lab，研制的平面双足机器人能够完成跑跳以及后空翻等高难度动作^[40]，Leg Lab 在 Marc Raibert 和 Gill Pratt 离开之后由 Jerry Pratt 带领进入第二个发展阶段，研制出基于串联弹性驱动关节的双足机器人“M2”^[41]。俄亥俄州立大学的华人教授郑元芳在 1986 年研制了美国第一台双足人形机器人 CURBI^[42]。犹他大学的 Stephen Jacobsen 在 1983 年创立了 Sarcos 公司，在为迪士尼乐园制作液压人形双足机器人的过程中组建了一支强大的研发团队。Sarcos 公司和 MIT 的 Atkeson 以及日本 ATR 实验室的 Mitsuo Kawato 合作，最终在 1997 年成功推出了液压人形双足平台“DB (Dynamic Brain)”^[43]。美国和日本学术界这样的合作一直持续到 2000 年之后，期间又研发了“CB/Hermes”和“Athena”两款机器人提供给院校进行学术研究，包括 Sang-Ho Hyon^[44], L.Righetti^[45], B.J. Stephens^[46]等一大批学者受益于该项目并在日本和欧洲创立了各自的实验室。



图 1.4 Sarcos 系列机器人

2005 年左右，和 Sarcos 项目类似的还有本田的 ASIMO 项目以及韩国的 HUBO 项目都对北美的研究机构开放了机器人硬件，促进了双足机器人技术从理论到实践的进步。同时期，康奈尔大学的 Andy Ruina 在 McGeer1990 年提出的 2D 被动行走理论^[47]基础上实现了 3D 行走样机的周期稳定行走^[48]，和传统基于 ZMP 理论的全驱动机器人相比具有极高的能量效率。而 Grizzle 则从非线性控制角度分析欠驱动双足周期行走问题，在 RABBIT 平面样机上验证了混合零动态（HZD）理论^[49]，也为后来的 3D 欠驱动 3D 样机 Cassie^[50] 和 DURUS^[51] 的行走控制奠定了理论基础。

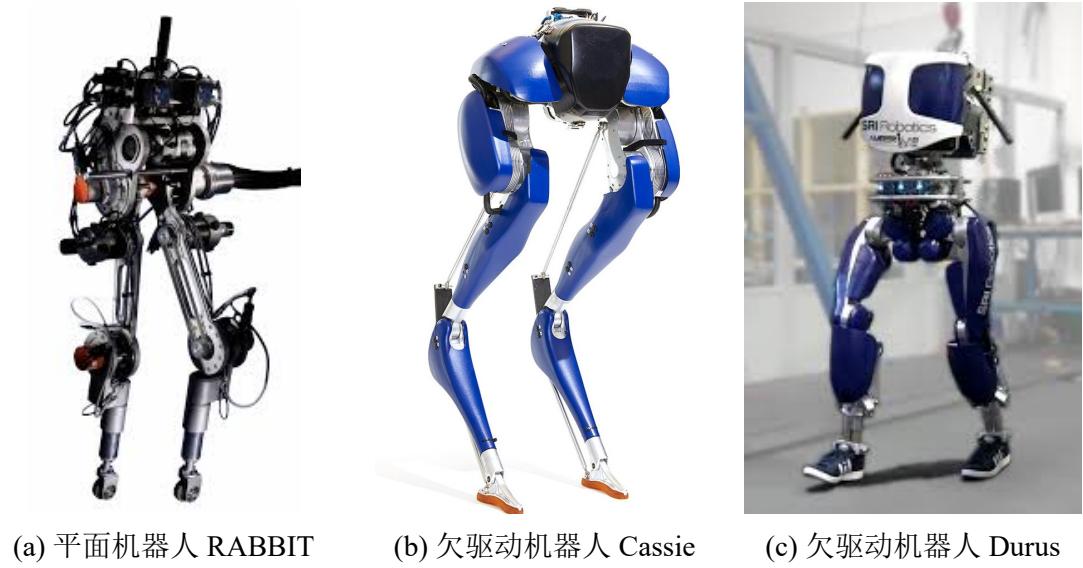


图 1.5 北美代表性双足机器人样机

2012 年 Gill Pratt 主持举办了美国国防部资助的机器人挑战赛 (DRC)，主要目的是为了验证并测试一款名为 Atlas 的液压双足机器人，同时也和全世界的机器人团队进行竞赛。Atlas 属于 Marc Raibert 创立的 Boston Dynamics 公司，原型是 2009 年以 BDI 闻名世界的 BigDog^[52] 为基础研发的作为化学防护服测试设备的 PetMan，其作为 Atlas 的原型在实验室内能够达到 4.8km/h 的行走速度^[53]。这次比赛中弗吉尼亚理工的 THOR 机器人^[54] 和 NASA 开发的 Valkyrie 机器人^[55] 的表现也非常亮眼，二者都基于串联弹性驱动关节设计，来实现力控柔顺适应外界干扰的能力。DRC 比赛中具有挑战性的地形环境和复杂的上身任务要求机器人具有较高的全身协调的动态性能，这使得机器人任务空间的动力学优化理论得到了广泛的应用^[56]，尽管如此，没有一支队伍能够在任意地形上很好的控制机器人稳定行走，直到现在这仍然是学术界探讨的热点问题。Boston Dynamics 公司在之后的几年对 Atlas 做了工程上的减重和优化，总重从 170kg 逐步优化到 80kg 以内！截至 2019 年已经实现了空翻、跑酷、体操等高难度动作^[57]；而基于浮动基的任务空间优化方法也在最近几年得到进一步完善，并在欠驱动双足机器人 Cassie^[58], Hume^[59] 和全驱动双足机器人 Digit^[60] 和 iCub^[61] 上得到了验证。

当我们回顾双足机器人这几十年的发展历史，尽管它具有复杂的动力学特性以及巨大的工程实现难度，尽管目前最好的科研成果还不足以支持机器人高效稳定的运行在人类生活的世界中，但它依然凭借着轮式机器人无可比拟的发展潜力吸引着一批又一批科学家和工程师从不同的角度试图攻克这一难题。我们创造双足机器人的最终目的是希望它能作为我们的助手和朋友，当机器人和我们生活在一起时，我们最需要考虑的就是安全问题。在实际环境中，我们不可避免的会和

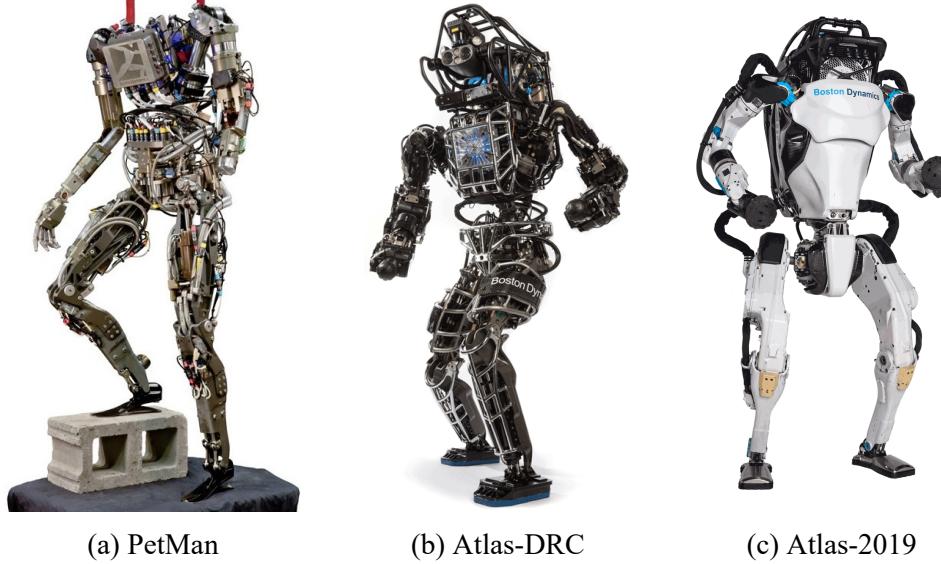


图 1.6 北美代表性双足机器人样机

身边的人或者机器人发生不可预测的接触，机器人需要学会在这些相互作用下选择是继续完成既定任务还是放弃任务来保持自身运动的平衡和稳定。因此目前双足机器人除了任务的完成能力之外，更重要的是对外界干扰的柔顺性或者说任务控制器的鲁棒性，本文的落地冲击力控制也是双足机器人控制中至关重要的一个环节。

1.3 足式机器人落地柔顺控制研究现状

人类在行走或者奔跑的时候，需要穿上一双柔软舒适的运动鞋，这是因为柔软富有弹性的鞋垫能够减小和地面接触的冲击力对骨骼和肌肉造成的损伤^[62]。研究表明，腿部肌肉、跟腱以及足弓在缓冲时能够承受的力有上限^[63-64]，因此需要利用足底的弹性材料来吸收部分的能量。针对双足机器人的行走落地控制问题，当落地接触材料的阻尼特别大时，碰撞过程可以认为是完全非弹性碰撞，碰撞将部分动能转化为接触阻尼消耗的内能。由于足端和与之固连的刚体和地面接触时速度将减小到零，此时碰撞产生的冲击力将非常大，因此被动理论和混合零动态理论均单独考虑了碰撞引起的机器人运动速度的瞬时变化^[47-49]，并采用极限环理论对行走的稳定性进行分析，从原理层面规避了对碰撞过程的控制。而对于基于主动步态的双足机器人来说，摆动腿落地时需要进行缓冲和柔顺控制，减少落地冲击对结构材料以及电子元器件的冲击，同时提高质心的控制效果。而减缓冲击的方式主要分为两种：被动柔顺方法和主动柔顺方法。

1.3.1 基于被动结构柔顺的力控制

一般在足底或者在关节处增加弹簧阻尼材料，阻尼器能够在一段时间内逐渐消耗碰撞产生的能量以及减小瞬间冲击力，而弹簧则可以将动能转化为势能储存，并在需要的时候重新转化为动能，提高能量的利用效率。美国 Boston Dynamics 团队的第一代 BigDog，如图1.7所示，采用的是对虚拟支撑腿长度的 PD 控制，足底直接和地面接触时产生较大的关节力，需要在足底增加弹簧阻尼结构来吸收冲击，减少对关节力的影响^[52]。

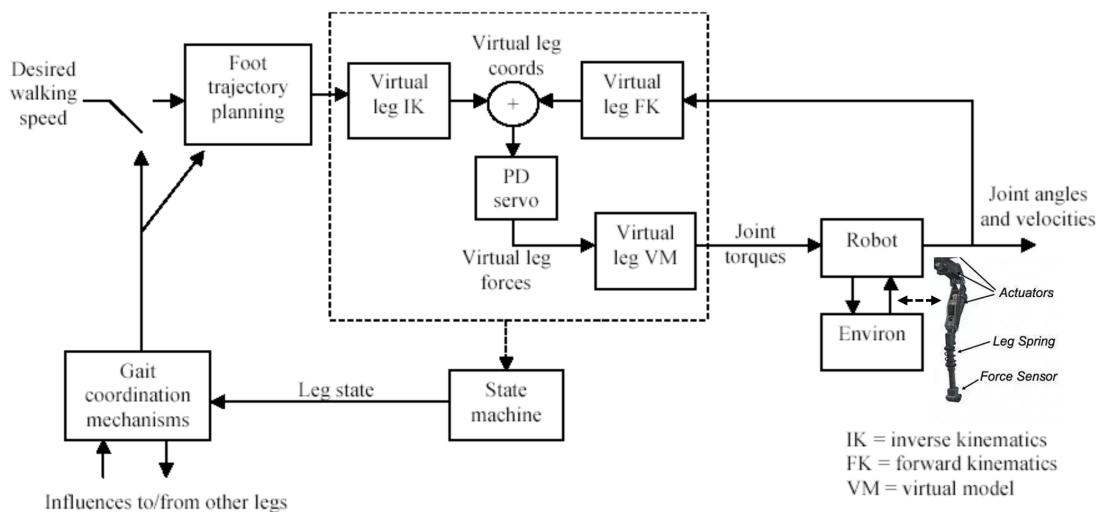


图 1.7 BigDog 被动柔顺控制框图^[52]

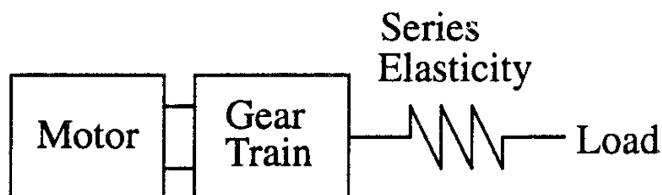


图 1.8 串联弹性驱动器^[41]

在双足机器人中，Waseda 大学早期曾经尝试在足底结构中加入弹性传动机构来适应不平路面^[65-66]，ASIMO^[2] 和 HRP 系列^[67] 则是在足底加入了一层缓冲材料，避免过大的冲击力损坏力传感器。Ames 团队在设计 DURUS 时为了减少 HZD 方法中摆动腿和地面碰撞时系统的能量损耗，在足底加入了被动的弹簧^[51]。在关节层面，加入弹簧一方面是利用弹簧的动力学特性对弹簧负载端的力进行精确的控制，另一方面则是利用了弹簧能够储存能量的优点，减少电机端输出功率的波动，减少周期行走中因为主动加速减速而导致的能量损耗。Gill Pratt 在 1995 年首

先提出这串联弹性驱动器的概念^[68]，并在之后的“M2”机器人上进行了验证，机器人具有较强的被动柔顺和吸收冲击的能力^[41]。被动弹性材料的引入会导致闭环控制系统的整体响应频率发生变化，容易在带有高频信号的干扰下产生不稳定的振荡，但仍能够通过在设计控制器时考虑频域的限制来避免系统振荡^[69-70]。

1.3.2 主动柔顺控制

相较于在系统中增加被动的柔性材料会降低整体闭环系统的带宽，主动柔顺方法指通过把系统模拟成一定的弹簧阻尼系统，达到末端能够对外力扰动做出一定的适应性运动的目的。

1.3.2.1 刚度控制

刚度控制^[71]由 Salisbury 在 1980 年提出，目标是要在工作空间（笛卡尔空间）建立末端位置到平衡点之间位置和力的关系，最终将机器人末端的力偏差体现在位置的偏差上，形成类似于弹簧的稳态效果。由于实际的位置环存在动态过程，主动刚度控制可以被证明是稳定的^[72]。

1.3.2.2 阻抗控制

Hogan 在 1985 年提出阻抗控制^[6]，实现了机械臂末端和环境进行柔顺的力和位置交互运动。阻抗控制可以认为是在刚度控制的基础上，增加了速度和加速度项，它更关心对系统动态性能的建模。通过类比机械阻抗建立等效的动力学方程，将一个可以力控的对象控制成参数任意给定的二阶系统，并具备对外力扰动的适应能力。

$$Z(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = Ms^2 + Bs + K \quad (1-1)$$

阻抗的动态过程的输入和输出是人为决定的，把实际接触力和末端当前的位置、速度作为输入量，和期望的末端位置速度做差，从公式(1-1)可以得出末端此时的期望加速度，并通过逆动力学的方法计算关节层面需要的力矩。

$$\begin{aligned} -F_{ext} &= M_d(\ddot{X} - \ddot{X}_d) + B_d(\dot{X} - \dot{X}_d) + K_d(X - X_d) \\ \rightarrow a_{cmd} &= \ddot{X} = \ddot{X}_d - M_d^{-1}(F_{ext} + B_d(\dot{X} - \dot{X}_d) + K_d(X - X_d)) \end{aligned} \quad (1-2)$$

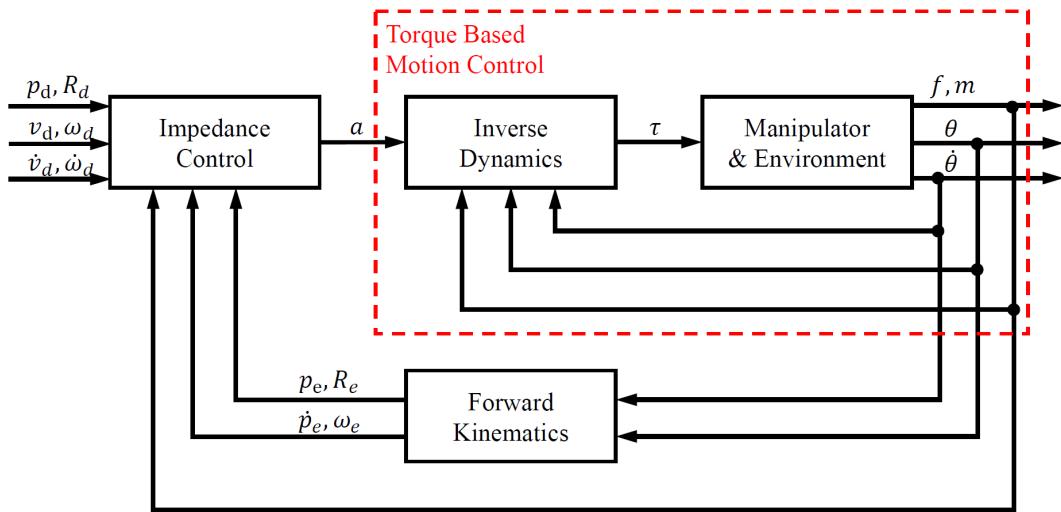


图 1.9 阻抗控制框图

1.3.2.3 导纳控制

由于实际大部分机器人的关节是位置控制，而阻抗控制方法在没有力控能力的情况下，使得阻抗控制对位置控制的机器人并不适用。但是我们可以将阻抗模型倒过来，将外力作为输入，将运动修正量作为给机器人的控制指令，于是就有了导纳控制的概念。因为导纳控制是将末端接触力信号转化为末端的运动，因此我们可以写出导纳控制器的传递函数如公式1-3，反映的是力误差到位置修正的传递过程。控制框图如图1.9所示：

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (1-3)$$

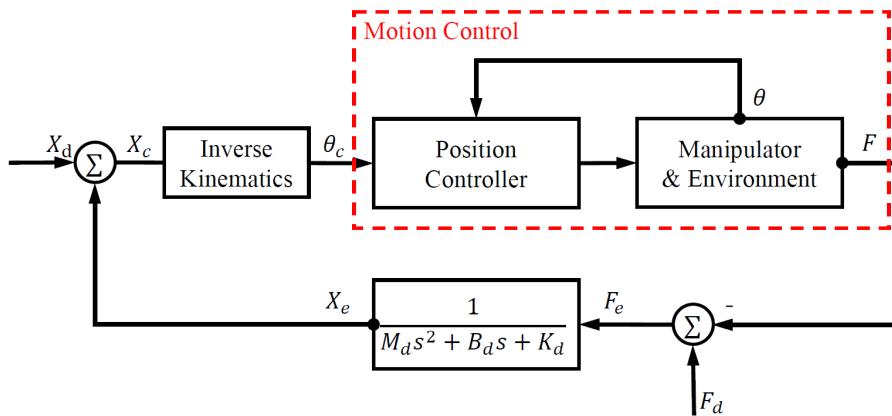


图 1.10 导纳控制框图

1.3.2.4 力/位置混合控制

在足式机器人落地控制过程中，由于摆动腿落足之后即形成稳定的接触约束，而我们更关心的是浮动基座的位置控制，摆动腿在触地过程中的具体支撑位置并不需要固定。那么可以由浮动基座位置的控制任务给出足端的部分维度上的接触力需求以及其他维度的位置约束。力位混合控制的思想在 1981 年由 Mason 首先提出^[73]，并由 Raibert 等人通过实验验证^[74]，由于任务空间存在一定的约束平面，使得末端的运动可以分为两个互补的正交子空间，被约束住的运动方向可以施加力，而另一个子空间则代表位移。通过对角元为 0 或 1 的选择矩阵 S 和 I-S，可以在两个子空间设计不同的位置和力的控制率，二者是解耦且互不干扰的。

1.3.2.5 主动柔顺在足式机器人中的应用

主动柔顺相较于被动柔顺可以具有更好的控制效果，本质上是在外环进行步态轨迹的位置控制而内环采用力控制实现柔顺。波士顿动力的在 BigDog 之后的 LS3 和 SpotMini 机器狗的设计上取消了被动的弹簧。瑞士团队通过在 StarETH 机器狗的实验对比，证实了主动阻抗控制躯干位置在落地冲击扰动下的收敛速度比利用 SEA 关节被动柔性的快^[75]。2001 年韩国汉阳大学的 JH Park 在解决摆动落地反弹以及适应地形的问题时，模仿人类行走时腿部肌肉紧绷松弛原理，提出了双足机器人行走的变阻抗控制方法，通过在落地冲击期间增大摆动腿等效阻尼达到吸收冲击力和适应地形的目的^[76]。2006 年 KAIST 团队基于单端口网络模型建立 HanSaRam-VI 机器人的足底力导纳控制器，减少了落地的冲击力^[77]。主动柔顺不仅可以用于落足点接触力的控制，同时可以控制双足行走过程中足底的力和力矩，保证 ZMP 始终在脚板内^[78-80]。国内的学者在主动柔顺的落地冲击控制问题上也做了对应的研究，国防科大的李长友提出了单腿的变阻抗柔顺控制模型^[81]，山东大学的柴汇在四足机器狗上实现了基于虚拟模型的足端阻抗控制^[82]，北京理工大学的 BHR-6 基于足端粘弹性模型实现了落地接触力的控制^[83]。

主动柔顺控制实际上建立了任务空间下位置和力之间的动态关系，通过测量传感器位置/力信号，得到末端需要控制的力/速度信号。而力/速度信号的控制也可以分为准静态的虚拟模型方法和全身控制方法。

1.4 足式机器人全身控制方法现状

一种较为简单的“全身”控制方法，即为在机器人本体内部建立虚拟模型(VMC)^[84]，认为足端到本体的动力学符合一定的虚拟模型，1.11 不考虑基座动态运动对任务的影响。VMC 虽然能够在一定程度上减少足端接触冲击力和对质心

位置的干扰，但由于没有考虑整个机器人模型，会在实际质心或者躯干的跟踪控制中引入误差。

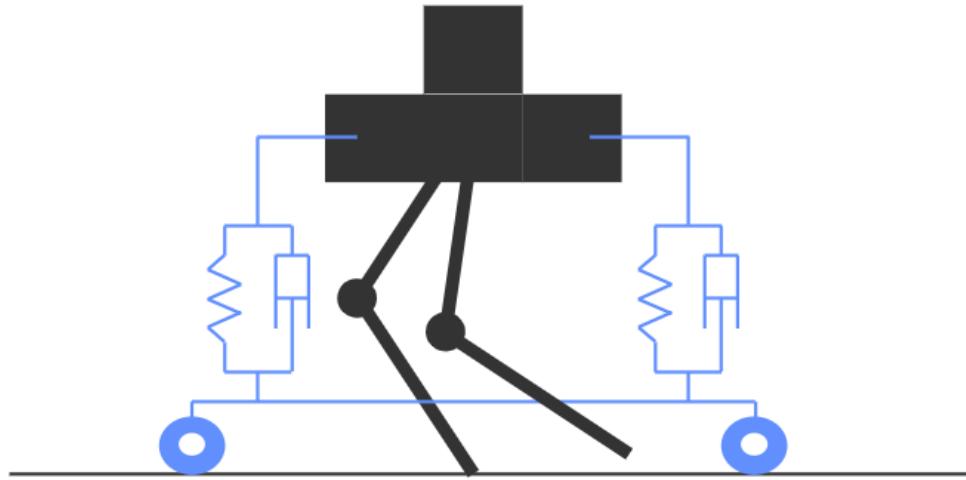


图 1.11 虚拟模型控制^[84]

全身控制方法（WBC）在足式机器人控制系统中得到了广泛的应用，和虚拟模型控制方法（VMC）中对控制模型的简化和准静态力映射的假设不同，WBC 依赖准确的运动学和动力学模型，严格的将实际系统表述为多输入多输出的状态方程。尤其是需要控制机器人同时完成多个任务时，由于运动学和动力学的耦合效应，基于准静态局部力映射的 VMC 方法不再适用，而 WBC 方法支持将一系列同时进行的任务（即使任务间存在潜在的冲突）进行闭环控制。WBC 方法的本质是将多个子任务的状态投影回到实际输入给机器人的关节空间进行控制量的分配和优化。

Kajita 在 2003 年首次利用 WBC 的思想，基于关节速度控制，实现了 HRP2 机器人整体动量和角动量控制的同时完成行走，踢球等全身运动^[86]。而 Sentis 在 2005 年提出了利用空间分解实现的全身分层控制框架，这是首个能够在和环境接触的同时解析地计算关节空间所需力矩的算法框架^[87]。此后，越来越多的全身控制算法在双足机器人上得到了验证。

WBC 根据子任务状态控制量的阶数可以分为运动学上的速度控制和含动力学的力控制；而根据在关节空间寻找最优输入的方法又可以分为解析方法和基于迭代优化的方法。尽管解析方法包含了广义逆的计算，属于无约束的最小二乘优化问题，但因为其无法处理带约束情况，同时计算速度更快，因此单独分为一类。

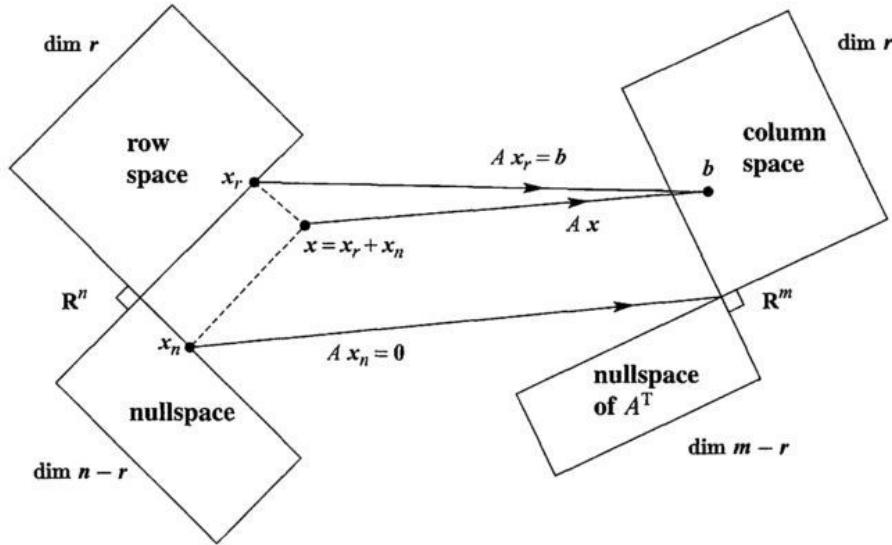


图 1.12 关节空间和任务空间的映射关系^[85]: $x = \dot{q} = \dot{q}_r + \dot{q}_n$, $A\dot{q} = A\dot{q}_r = b = \dot{x}_{task}$, $A\dot{q}_n = 0$

1.4.1 基于速度控制的全身控制方法的解析解

给定多个任务的期望位置: $X = [\dot{x}_1^T, \dot{x}_2^T, \dots, \dot{x}_k^T]^T$, 对应的控制器的速度输入为: $\dot{X} = K(X_{ref} - X)$ 。

而第 i 个任务空间的速度输入 $\dot{x}_i \in R^{r_i}$ 和关节空间速度 $\dot{q} \in R^n$ 之间存在转换关系 (雅克比矩阵)

$$\dot{x}_i = J_i \dot{q} \quad (1-4)$$

当同时出现多个任务时, 在关节的速度空间 $\dot{q} \in R^n$ 中, 有可能找到任意多满足任务空间速度的解, 也有可能找不到同时满足所有任务空间速度的解。当有多解时, 一种简单的广义逆的解:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \end{bmatrix}^\# \dot{X} \quad (1-5)$$

而当任务之间有冲突时, 则需要根据任务的重要程度划分优先级, 比如最重要的是始终保持支撑脚足底的接触任务, 其次是机器人的平衡 (质心的状态) 等等。在关节空间分为正交的各个子空间 (引用子空间投影的图), 分别计算带权重的伪逆^[88] 或者串级分层最小二乘投影^[89]:

$$\dot{q} = \tilde{J}_1^\# \dot{x}_1 + \tilde{J}_2^\# \dot{x}_2 + \cdots + \tilde{J}_k^\# \dot{x}_k \quad (1-6)$$

1.4.2 基于力矩控制的全身控制方法的解析解

由于速度和力的对偶关系，和基于速度的 WBC 类似，对于 k 个独立的末端力任务，他们和关节力都存在静力映射的关系。

$$\tau = \sum J_i^T F_i \quad (1-7)$$

可以根据任务的优先级或者权重计算尽量满足所有末端力任务的关节力矩。分层方法^[87]：

$$\tau = J_1^T F_1 + J_{2|1}^T F_2 + \cdots + J_{k|p(k)}^T F_k \quad (1-8)$$

权重方法^[90]：

$$\tau = \omega_1 J_1^T F_1 + \omega_2 J_2^T F_2 + \cdots + \omega_k J_k^T F_k \quad (1-9)$$

除了考虑末端的力任务之外，实际计算外力 F 时还需要考虑末端的加速度和等效惯性对力任务的影响^[87]。

1.4.3 基于速度控制的全身控制方法的优化解

相较于解析法，基于优化的方法能更灵活的处理空间分解和任务分层控制，同时根据 KKT 条件，优化的约束可以包括解析法无法处理的不等式约束^[91]，例如为了避免碰撞所增加的额外的末端速度范围，关节速度的上下限等区间约束。对于不同层级的任务，会先在最高优先级的约束下优化，得到的优化结果作为低优先级的约束继续优化，串级优化的缺点在于优化时间和任务分层的数量成正比例关系，即使是最简单的二次优化 (QP)，这种串级优化的速度仍然达不到实时。Escande 提出了一种 HQP 算法，对转换矩阵做正交分解的预处理，在不同任务层级同时采用 active search 方法进行迭代，实现了比串级 QP 更快的收敛速度^[92]。

1.4.4 基于力矩控制的全身控制方法的优化解

基于力矩的 WBC 优化方法同样能在解析法的基础上，增加关于优化变量的不等式约束，例如地面反力需要符合摩擦锥的约束，关节的力矩区间范围等，以及关

于浮动基动力学的等式约束。Salini 在 2009 年第一次使用线性二次优化问题解决仿真中足式机器人的任务控制问题，并在效用函数中使用权重来调节不同任务之间的优先级^[93]。Stephens 在 CB 机器人上使用基于 QP 的 WBC 的控制器实现了平衡抗扰的控制^[94]，而 Herzog 在 2014 年进一步实现了逆动力学分层优化的行走控制^[45]。

因为线性二次优化 (LQP) 的计算速度基本能够满足实时控制的要求，因此在 2013 年开始的 DARPA 挑战赛中，大部分基于力控硬件的队伍都采用了基于 QP 的全身多任务优化控制器^[95-99]。

1.4.5 全身控制方法优缺点分析

全身优化算法的主要优点是能够在保持严格物理接触约束下，将不同的任务空间（末端笛卡尔位置、末端姿态 SO3、关节任务、质心、末端力等）的控制任务统一投影到关节空间（关节速度、力矩）的控制上，并且能够按照优先级关系解决潜在冲突的控制任务。实际中的优先级划分基本上是离线人为定义，暂时无法做到在线根据当前可能冲突的任务进行动态的优先级调整。比如在行走过程中，和平衡相关的控制任务优先级最高，零空间严格分层算法^[87]会在保证平衡任务的零空间内寻找满足其他任务的解，计算耗时随着任务层数的增加而增长，实时性可能会受到影响。而基于权重的“分层”优化^[90]虽然计算相对简单，但是冲突的两个子任务都不会收敛到各自的期望轨迹上，各自都存在一定的误差，不能处理那些需要严格完成的任务。因此也有人提出了将零空间分层和权重分层混合的全身优化方法^[100]。

但是在实际机器人的应用过程中，机器人的建模误差和不同型号的通信延时差异等不确定性因素会对全身控制任务的误差稳定性带来较大的影响，尤其是对考虑动力学模型的全身力矩优化控制，底层力控模块的带宽和品质会限制最终各层任务的控制效果。

其次，基于 QP 优化的在线解算器往往采用迭代的方式来寻找接近最优解的次优解，其对计算资源仍然有一定的要求，因此在计算能力较弱的嵌入式平台有概率出现计算超时或者找不到解的情况。

1.5 论文主要内容和结构

1.5.1 论文的主要内容和贡献

本文的主要目的是解决双足机器人在不同路面下行走的摆动腿落地主动柔顺控制问题。主要研究内容为：利用双足机器人摆动腿和地面的交互模型，预测落

足之后的地面冲击力和足-地运动状态、根据地面交互模型融合传感器信号，提高状态估计精度、根据质心加速度抗扰性能指标，设计在外力冲击下质心抗扰的最优控制器、使用全身控制框架在仿真中实现全模型双足机器人的落地柔顺控制。

本文的主要贡献有以下三点：

1、通过分析足-地面接触过程，建立二阶足-地面接触模型，根据状态方程预测摆动腿落在已知参数路面上的地面反力响应曲线，同时根据实测的地面反力曲线对模型参数进行修正。

2、双足机器人浮动基的状态估计对传感器的精度较为依赖，通过足-地接触动态模型，设计状态观测器估计摆动腿落地时的机器人足端运动状态，和本体惯性传感器信号进行融合滤波，提高浮动基的估计精度。

3、将摆动腿的柔顺落地过程分为摆动腿轨迹控制阶段和落地接触稳定阶段，关键是在接触稳定阶段设计合适的质心-足底的力控制器，利用全身控制方法，实现质心轨迹的最优抗扰动控制器。

1.5.2 论文的主要结构

论文共分为五章，具体内容如下：

第一章介绍了摆动腿落地柔顺控制课题的研究背景和意义，并对和课题相关的行业现状和技术方案进行了综述；从双足机器人的研究历史、现状和未来发展方向中，能够得出足式机器人的主流发展方向会是机器人整体的力位置柔顺控制。总结了各种摆动腿柔顺控制方法和全身控制方法的优缺点，最后介绍了本文的主要内容和贡献点。

第二章通过分析足-地面接触过程，比较了几种常用的物体间接触模型，研究发现地面冲击力的大小和持续时间和足端触地速度、地面等效阻抗等参数有关。为了模拟不同地形的接触情况，本文选用了通用的二阶地面接触动力学模型，实现了对仿真中不同地面动态性能的模拟。

第三章通过设计观测器实现对地面状态的估计，从而得到机器人在惯性坐标系下的运动状态。根据质心-地面交互动力学模型导出了地面状态的全维、降维观测器，实现了对地面状态以及机器人本体全状态的实时状态估计。

第四章将反应人类体感舒适度的质心加速度二范数积分作为控制器抗扰性能指标，设计对应的LQR最优控制器。并通过全身-地面动力学优化方法设计双足机器人行走过程中的落地控制器。在仿真环境中进行算法的测试，验证了算法有效性的同时，对比虚拟模型的柔顺控制方法，有效减少了落地的冲击力和质心的抗扰能力。对算法的实时性也做了理论分析和仿真验证，实验结果证明了算法能够

在实际硬件上以 1000Hz 的频率实时控制双足机器人样机。

第五章是总结和展望，总结了本文的研究内容，并对未来的课题方向做出了一些预测。

第2章 全动力学模型

2.1 引言

双足机器人的规划和控制的前提是对系统的动力学建立完整且符合实际的模型。本文基于实际模型参数在 Chorenoid 仿真环境^[101] 中搭建了实验平台，用于测试并探索基于关节伺服控制的摆动腿落地柔顺控制算法。所使用的模型参考了本课题组参加 RoboCup 比赛的 Walker 双足机器人^[102]，具备足底力传感器和各个关节的位置、速度和力矩（电流）三环伺服控制接口。本章将简要介绍双足平台参数，并分析行走过程中的机器人浮动基多刚体模型的运动学和动力学计算过程，最后对足底的接触环境模型进行分析，为状态估计和控制器设计做准备。

2.2 双足机器人建模

2.2.1 双足机器人平台参数

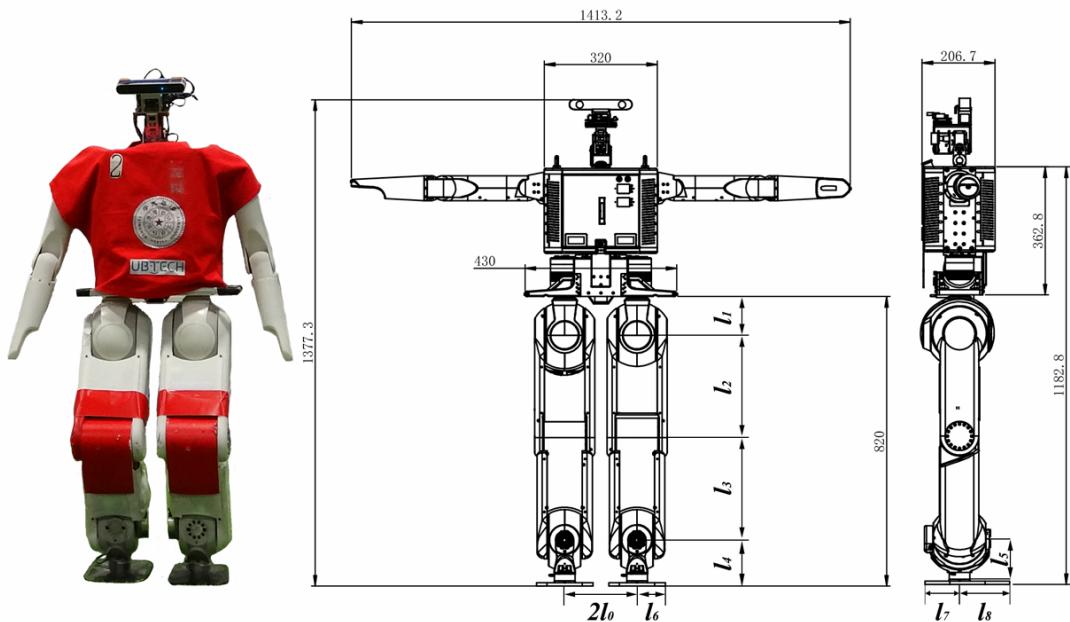


图 2.1 Walker 机器人结构示意图

Walker 机器人全身共有 22 个自由度。本文主要分析行走过程中的足式机器人动力学系统，因此讲包括头部、手臂、腰在内的共 10 个转动副的自由度锁定，认为上身仅有一个刚体构成。Walker 的每条腿的各个构件通过 6 个转动副连接。详细的运动学和动力学参数参见表2.1, 表2.2, 表2.3和表2.4。

表2.2中的符号标注在图2.1中，表示和机器人尺寸相关的数值。由于本文定义每个刚体的坐标系和连接该刚体和前一个刚体的关节初始坐标系重合（机器人坐标系可视化如图2.2），因此表2.4中的质心位置相对于刚体自身参考系，而质心处惯量指的是以质心为中心，坐标系和刚体坐标系无相对转动的各个主轴惯量。

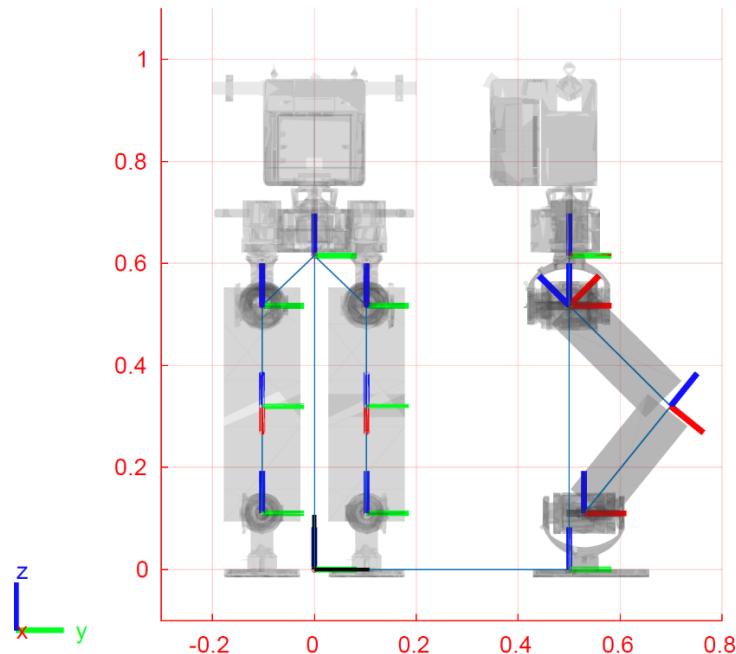


图 2.2 Walker 机器人仿真示意图

表 2.1 机器人构型参数

关节	Parent Link (P)	Child Link (C)	Axis	${}^P p_C$ (m)	${}^P R_C$
J_PelvisL	LinkBody	LinkPelvisL	RZ	$[0, l_0, -l_1]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_PelvisR	LinkBody	LinkPelvisR	RZ	$[0, -l_0, -l_1]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_Hip(L/R)	LinkPelvis(L/R)	LinkHip(L/R)	RX	$[0, 0, 0]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_Thigh(L/R)	LinkHip(L/R)	LinkThigh(L/R)	RY	$[0, 0, 0]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_Calf(L/R)	LinkThigh(L/R)	LinkCalf(L/R)	RY	$[0, 0, -l_2]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_Ankle(L/R)	LinkCalf(L/R)	LinkAnkle(L/R)	RY	$[0, 0, -l_3]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_Sole(L/R)	LinkAnkle(L/R)	LinkSole(L/R)	RX	$[0, 0, 0]^T$	$I_{3 \times 3}$
J_SoleEE(L/R)	LinkSole(L/R)	SoleEE(L/R)	Fixed	$[0, 0, -l_4]^T$	$I_{3 \times 3}$

表 2.2 机器人尺寸参数

长度	l_0	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
(m)	0.1025	0.0980	0.2700	0.2600	0.1250	0.1070	0.0750	0.0800	0.1270

2.2.2 双足机器人运动学计算

我们能够将 walker 机器人的构型通过树状的数据结构描述，节点代表刚体，而连接节点间的边代表关节，用特殊欧式群 ($SE(3)$) 表示每一个节点的相对根节点的位置和姿态 (${}^B T_i \in SE(3)$) 可以通过父节点的位置姿态 (${}^B T_{p(i)} \in SE(3)$) 和连接父节点的边代表的关节状态 θ_i 计算出来。

$${}^B T_i = {}^B T_{p(i)} {}^{p(i)} T_i(\theta_i) \quad (2-1)$$

从连接 $p(i)$ 和 i 节点的边 k 可以得到关节 k 在 i 节点坐标系下的旋量轴 (Screw Axis) ${}^i S_k$ ，利用指数积 (Product of Exponentials, PoE)^[103] 的形式可以得到每一条边所代表的齐次变换矩阵 ${}^{p(i)} T_i(\theta_i)$

$${}^{p(i)} T_i(\theta_i) = {}^{p(i)} T_i(0) e[{}^i S_k] \theta_i \quad (2-2)$$

旋量轴可以表示该关节的运动对坐标系产生的空间速度 (Spatial Twist) 的影响，其中李代数 $[{}^i S_k] \theta_i \in \mathfrak{se}(3)$ 表示子节点相对自身坐标系速度的叉积。

$$[{}^i S_k] = \begin{bmatrix} [\omega]_x & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

其中反对称阵 $[\omega]_x$ 代表叉乘的矩阵形式：

$$[\omega]_x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3, & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \in so(3) \quad (2-4)$$

由于关节 k 的坐标系和子节点 i 的坐标系重合 ($k=i$)，因此表2.3中的旋量轴 ${}^i S_i$ 只和该关节的 Axis 方向和运动形式有关：

当我们已知机器人的初始构型、各个关节的旋量轴表示和关节转动的角度，我们可以通过式2-1迭代寻找父节点，计算任意节点代表的刚体此时的位置和姿态 ($SE(3)$)。以计算足底 (SoleEE) 相对机器人本体 (LinkBody) 的变换矩阵为例：

$${}^B T_{EE} = {}^B T_5 {}^5 T_6(\theta_6) {}^6 T_{EE} = \left(\prod_{i=1}^6 {}^{i-1} T_i(\theta_i) \right)^6 T_{EE} = \left(\prod_{i=1}^6 {}^{i-1} T_i(0) e[{}^i S_i] \theta_i \right)^6 T_{EE} \quad (2-5)$$

表2.3 旋量轴和关节类型和运动方向关系

关节类型 (Axis)	RX	RY	RZ	PX	PY	PZ
旋量轴 ${}^i\mathcal{S}_i = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

式2-2和式2-5中的指数可以通过泰勒展开和三角函数表示为式2-6。

$$e^{[{}^i\mathcal{S}_k]\theta_i} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]_x\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

在式2-6中，可以用罗德里格公式（式2-7）计算指数积得到姿态变换矩阵 ($e^{[\omega]_x\theta} \in SO(3)$)，而式2-8表示 $G(\theta)$ 的结果。

$$e^{[\omega]_x\theta} = Rot(\omega, \theta) = I + \sin \theta [\omega]_x + (1 - \cos \theta)[\omega]_x^2 \quad (2-7)$$

$$G(\theta) = I\theta + (1 - \cos \theta)[\omega]_x + (\theta - \sin \theta)[\omega]_x^2 \quad (2-8)$$

$${}^i\mathcal{S}_i = [Ad_{iT_B}] {}^B\mathcal{S}_i \rightarrow [{}^i\mathcal{S}_i] = {}^i T_B [{}^B\mathcal{S}_i] {}^i T_B^{-1} \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} {}^B T_{EE} &= \left(\prod_{i=1}^6 {}^{i-1} T_i(0) e^{[{}^i\mathcal{S}_i]\theta_i} \right) {}^6 T_{EE} \\ &= \left(\prod_{i=1}^6 {}^{i-1} T_i(0) {}^i T_B e^{[{}^B\mathcal{S}_i]\theta_i} {}^B T_i \right) {}^6 T_{EE} \\ &= \left(\prod_{i=1}^6 e^{[{}^B\mathcal{S}_i]\theta_i} \right) {}^B T_{EE} (\vec{\theta} = 0) \end{aligned} \quad (2-10)$$

通过式2-9实现旋量轴在不同坐标系下的 Adjoint Map 变换，可以将式2-5整理成式2-10的形式。因此树状结构的机器人任意节点相对于基座的姿态矩阵（齐次变换矩阵）都可以表示成关节角度的 $\vec{\theta}$ 函数，该计算过程也称为正运动学（Forward Kinematics）。

由于机器人结构中的任意节点的位姿可以通过旋量轴和转动的角度以指数积的形式得到，本质上是对速度的积分，式2-11中：末端连杆相对于惯性系的广义速度（Spatial Twist） $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^6$ 是当前构型下更新后的关节旋量轴和各个轴的速度的乘积之和。

$${}^B\mathcal{V}_n = \underbrace{{}^B\mathcal{S}_1}_{J_{S_1}} \dot{\theta}_1 + \underbrace{\left[Ad_e[{}^B\mathcal{S}_1]_{\theta_1} \right] {}^B\mathcal{S}_2}_{J_{S_2}} \dot{\theta}_2 + \underbrace{\left[Ad_e[{}^B\mathcal{S}_1]_{\theta_1} e[{}^B\mathcal{S}_2]_{\theta_2} \right] {}^B\mathcal{S}_3}_{J_{S_3}} \dot{\theta}_3 + \dots \quad (2-11)$$

式2-11中的 J_{S_i} 代表当前位置第 i 个关节对应的旋量轴在基坐标系下的表示，和初始位置对应的旋量轴之间的变换关系只和前 $i - 1$ 个关节角度有关。并且每个关节代表的旋量轴都对应式2-12中 Jacobian 矩阵的一列：

$${}^B\mathcal{V}_n = \begin{bmatrix} J_{s_1} & J_{s_2} & \cdots & J_{s_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = {}^B J_n(\theta) \dot{\theta} \quad (2-12)$$

Jacobian 矩阵代表着关节的速度空间和任务的速度空间之间的线性变换，而 Jacobian 矩阵的转置则代表着速度的对偶空间：末端广义力和关节力矩所在的两个空间。可以通过准静态假设下末端和关节功率一致的原则导出式2-13：

$$\tau^T \dot{\theta} = \mathcal{F}_n^T {}^B\mathcal{V}_n = \mathcal{F}_n^T {}^B J_n(\theta) \dot{\theta} \rightarrow \tau = {}^B J_n^T(\theta) \mathcal{F}_n \quad (2-13)$$

2.2.3 浮动基多刚体动力学

足式机器人相较于固定基座的机械臂的区别在于具有浮动的基座，也即描述图2.3中的机器人物型一共需要所有 n 个可驱动关节和 6 个连接惯性参考系和机器人腰部连杆的虚拟关节 ($q \in SE(3) \times \mathbf{R}^n$)。

而浮动基的多刚体动力学的特别之处仅在于虚拟的关节没有实际的驱动力，因此需要用广义关节空间到可驱动关节空间的 Jacobian 矩阵 $S = [0_{n \times 6}, I_{n \times n}]$ 对力矩 $\tau \in \mathbf{R}^n$ 进行扩充，动力学方程中的驱动力为可驱动关节的力矩 τ 和接触产生的作用到机器人系统的广义外力（Wrench） \mathcal{F}_{ext} 。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = S^T \tau + \sum J_i^T(q) \mathcal{F}_{ext,i} \quad (2-14)$$

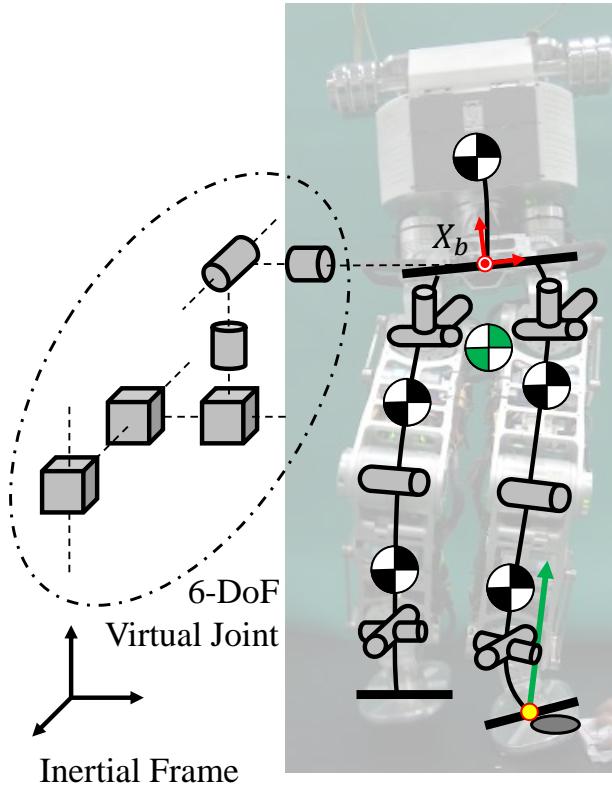


图 2.3 Walker 机器人模型

式2-14阐述了机器人在图2.3所示广义坐标下力和加速度之间的关系，对于一个动力学系统，输入为力矩和外力，而输出的是状态变量的导数，从 τ, \mathcal{F}_{ext} 计算 \ddot{q} 的过程也被成为正向动力学（Forward Dynamics），而当期望产生状态变量的导数去求取输入的关节的力矩和外力之和的过程被称为逆动力学（Inverse Dynamics）。等式左侧代表着广义坐标下的状态变量 (q, \dot{q}) 和广义坐标下关节力的关系，其中 $M : \mathbf{R}^{n+6} \mapsto \mathbf{R}^{(n+6) \times (n+6)}$ 是一个关于关节角 q 的正定对称矩阵（惯量矩阵），一般是可逆的。而 $C : \mathbf{R}^{n+6} \times \mathbf{R}^{n+6} \mapsto \mathbf{R}^{n+6}$ 是多刚体离心力和科里奥利力之和，是质量分布（关于 θ ）的速度 $(\dot{\theta})$ 二次型函数。 $G : \mathbf{R}^{n+6} \mapsto \mathbf{R}^{n+6}$ 为多刚体重力对各个关节的力矩之和。这三项可以通过拉格朗日方法建立如图2.3的广义坐标推导。

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{P}(q) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta} - \mathcal{P}(q) \rightarrow f = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (2-15)$$

式2-15为力和系统能量变化率（包含 M, C, G ）也即广义力的表达式，可以通过符号推导得到包含关节力和约束力作用在 $q \in \mathbf{R}^{n+6}$ 上的广义力。当我们需要单独求解关节力矩，去除约束力这部分时，拉格朗日方法需要选取独立的和系统自由度数量相同的广义坐标对动力学进行求解，而双足机器人和地面的约束情况始

终在变化，因此也需要根据约束情况改变广义坐标。本文将采用牛顿力学方法求解约束力和关节力之间的关系，并保持广义坐标定义在行走过程中的一致性。

分析式2-14的动力学系统，独立的状态变量 $q = [q_{float}^T, q_{joint}^T]^T \in \mathbf{R}^{n+6}$ 构成 $n+6$ 维的状态空间，而关节力矩输入变量 $q_{joint} \in \mathbf{R}^n$ 自由度只有 n 个，当主动控制的外力 \mathcal{F}_{ext} 的自由度小于 6 个时，系统的输入无法驱动所有的状态变量，因而此时机器人属于欠驱动系统。换句话说，在实际双足机器人行走过程中，并没有主动控制的外力能够作用在机器人上，但是机器人和地面存在一定的接触约束，接触的约束将原本独立的状态空间降维成更低维数的高维空间流形，本质上系统中独立的状态变量会随之减少。当接触的约束不足 6 个时，降维后的非线性动力学系统需要用输出反馈线性化的方法，对此时非线性系统中不可控制的内部动态（零动态）稳定性进行分析，同时对外部动态进行控制。

本文主要分析接触约束维数大于或等于 6 个，机器人动力学系统成为全驱动或者过驱动系统的情况。以单足脚掌接触地面为例，式2-16表示支撑腿末端固定时，末端速度 $\dot{X}_{sole} = 0$ 和加速度 $\ddot{X}_{sole} = 0$ 会将 \dot{q} 限制在雅克比矩阵的零空间内，从而实现降维。

$$J_{sole}(q) \dot{q} = \dot{X}_{sole} = 0 \rightarrow J_{sole}(q) \ddot{q} = \ddot{X}_{sole} - J_{sole}(q) \dot{q} = -J_{sole}(q) \dot{q} \quad (2-16)$$

我们可以通过复合刚体算法 (CRBA)^[104] 求解式2-14中的 $M(q)$ 矩阵，并且得到 \ddot{q} 的表达式（正动力学），将其代入式2-16中，可以得到无外界主动力下的接触反力和关节力矩之间的关系，如式2-17：

$$J_{sole}(q) M^{-1}(q) (S^T \tau + J_{sole}^T(q) \mathcal{F}_{sole} - C(q, \dot{q}) - G(q)) = -J_{sole}(q) \dot{q} \quad (2-17)$$

式2-18将式2-17写成 $Ax = b$ 的约束形式，其中 $A \in \mathbf{R}^{k \times (n+k)}$, $rank(A) = r$ ($r \leq k < (n+k)$)，因此矩阵 A 一定存在右零空间 $Null(A) = V_\perp \in \mathbf{R}^{(n+k) \times (n+k-r)}$ 满足 $\forall \alpha \in \mathbf{R}^{n+k-r}$, $A(V_\perp \alpha) = 0$ ，显然待求解变量 $[\tau^T, \mathcal{F}_{sole}^T]^T$ 的解空间大小和零空间大小一致，且解可以写成式2-19的形式：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_{sole} M^{-1} S^T & J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \tau \\ \mathcal{F}_{sole} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{-J_{sole} \dot{q} + J_{sole} M^{-1} (C + G)}_b \quad (2-18)$$

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \mathcal{F}_{sole} \end{bmatrix} = x = A^+ b + V_\perp \alpha \quad (2-19)$$

当足底约束雅克比行满秩时，例如 $J_{sole}(q) \in \mathbf{R}^{6 \times (n+6)}$, $\text{rank}(J_{sole}(q)) = 6$ ，能够证明矩阵 $J_{sole}(q) M^{-1}(q) J_{sole}^T(q)$ 满秩且可逆。式2-20说明此时约束力 \mathcal{F}_{sole} 可以表示为关节力矩 τ 和当前关节位置速度状态的函数: $\mathcal{F}_{sole} = \Phi_1(q, \dot{q})\tau + \Psi_1(q, \dot{q})$ ，而式2-14中不带约束的动力学方程可以转化为带接触约束的动力学方程式2-20，并且关节加速度能够表示为: $\ddot{q} = \Phi_2(q, \dot{q})\tau + \Psi_2(q, \dot{q})$ 。

$$\mathcal{F}_{sole} = - (J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T)^{-1} (J_{sole} \dot{q} + J_{sole} M^{-1} (S^T \tau - C(q, \dot{q}) - G(q))) \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{q} &= \left(\mathbf{I} - J_{sole}^T (J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T)^{-1} J_{sole} M^{-1} \right) (\mathbf{S}^T \tau - \mathbf{C} - \mathbf{G}) \\ &\quad - J_{sole}^T (J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T)^{-1} J_{sole} \dot{q} \end{aligned} \quad (2-21)$$

式2-21中, $(J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T)^{-1}$ 是操作空间下足端的等效惯量矩阵, 又记做 Λ_{sole} , 同时, J_{sole} 的动态一致广义逆^[56] (用 M 矩阵加权的右广义逆) $J_{sole}^{M,\dagger}$ 为 $M^{-1} J_{sole}^T (J_{sole} M J_{sole}^T)^{-1}$, 并且 $(\mathbf{I} - J_{sole}^T (J_{sole} M^{-1} J_{sole}^T)^{-1} J_{sole} M^{-1})$ 可以被简化为幂等矩阵 $N_{sole}^T = \mathbf{I} - J_{sole}^T (J_{sole}^{M,\dagger})^T$ 。而 $\mathbf{M} \ddot{q} - J_{sole}^T \Lambda_{sole} (0 - J_{sole} \dot{q}) = \mathbf{M} \ddot{q} - J_{sole}^T \Lambda_{sole} J_{sole} M^{-1} \mathbf{M} \ddot{q} = N_{sole}^T \mathbf{M} \ddot{q}$ 。

$$N_{sole}^T (\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{G}(q)) = N_{sole}^T S^T \tau \quad (2-22)$$

整理后得到包含约束的浮动基动力学方程式2-22: 也等效于在式2-14的两边同乘投影矩阵 N_{sole}^T , 根据式2-23中的属性可知 $N_{sole}^T J_{sole}^T \mathcal{F}_{sole} = 0$, 从而得到和式2-22相同的结果。

$$N_{sole}^T J_{sole}^T = J_{sole}^T - J_{sole}^T (J_{sole}^{M,\dagger})^T J_{sole}^T = J_{sole}^T (\mathbf{I} - (J_{sole} J_{sole}^T)^T)^T = 0 \quad (2-23)$$

由式2-23可知 $\text{rank}(N_{sole}^T) = \text{rank}(\text{Null}(J_{sole}))$, 机器人当前经过约束后的自由度由 J_{sole} 决定, 因此剩余自由度和接触约束的雅克比矩阵零空间维数相等。而剩余自由度是否可控则由式2-22决定, 等式左侧运动所需要的力是否能够通过关节

力矩经过投影矩阵 $\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T \in \mathbf{R}^{(n+6) \times n}$ 得到。由于 $rank(\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T) \leq rank(\mathbf{N}_{sole}^T)$, 因此可能会出现剩余自由度不完全可控的情况。当 $rank(\mathbf{N}_{sole}^T) = rank(\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T)$ 时, 剩余的自由度完全可控。反之则有不可控的自由度, 比如起跳后在空中飞跃的机器人, 因为没有接触约束 $\mathbf{N}_{sole}^T = I_{(n+6) \times (n+6)}$, 而 $rank(\mathbf{S}^T) = n < (n+6)$, 机器人存在 6 个不可控的自由度。而当四足机器人对角步态行进, 只有两个点足落在地面上时, $\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T = 11 < rank(\mathbf{N}_{sole}^T) = 12$, 出现了 1 个不可控的自由度。同时当 $rank(\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T) < n$ 时, 无论当前机器人是否完全可控, $\forall \tau \in Null(\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T)$, 都不影响当前机器人可控自由度的运动, 并且会在系统内部产生约束力 $\mathcal{F}_{internal}$ 。还是以四足对角步态为例, 虽然存在不可控的 1 个自由度, 但是在对角落足点之间, 存在 1 个自由度的和零空间力矩相关的内部约束力。本文对内部约束力不做过多的研究, 只给出式2-24作为带约束的浮动基机器人系统计算关节力的通解表达式。

$$\begin{aligned} \tau = & (\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T)^\dagger \mathbf{N}_{sole}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{G}(q)) \\ & + \left(\mathbf{I} - (\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T)^\dagger (\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T) \right) \tau_{int} \end{aligned} \quad (2-24)$$

根据动力学系统的输入输出关系, 本文将期望关节加速度 \ddot{q}_d 代入式2-24得到逆动力学系统的关节力矩 τ_{in} , 而系统此时的动力学方程为式2-22。能够得出 $\mathbf{N}_{sole}^T (\ddot{q} - \ddot{q}_d) = 0$, 也即通过逆系统的动态方程, 通过状态 q, \dot{q} 和期望的输出 \ddot{q} 反馈得到 τ , 将复杂的非线性带约束系统线性化, 进而将动力学系统从输入力矩 τ 转化为输入 \ddot{q} 的伪线性系统进行分析。

而进一步分析2-24, 其建立在足底的约束不会被打破为基础 ($\mathcal{F}_{sole} \in \mathbf{R}^k$), 将约束后自由度为 $n+6-k$ 的 \ddot{q} 作为解空间寻找符合任务约束的解。但实际情况中, 由于足底和地面并非固连, 接触面支持力存在单边约束 ($\mathcal{F}_\perp = \mathcal{F}_{sole} \cdot \hat{n}_{sole} > 0$), 同时地面摩擦力同样需要保持静摩擦的约束 $\mathcal{F}_\parallel \leq \mu \cdot \mathcal{F}_\perp$ 。同样的对于关节力矩, 也存在比如力矩限幅等必须满足的硬约束, 这些都会影响式2-24中默认保持的接触约束。也正因为如此, 对于浮动基机器人系统, 变量 $\ddot{q}, \mathcal{F}_{sole}, \tau$ 由于浮动基动力学约束和接触约束, 存在一个符合硬约束的解空间, 但该解空间不能保证不等式约束的成立, 所以不能直接消去接触约束力进行子任务的求解。类似式2-18, 我们建立未知变量 $x = [\ddot{q}^T, \tau^T, \mathcal{F}_{sole}^T]^T$ 的约束方程, 形式如式2-25。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{S}^T & -\mathbf{J}_{sole}^T \\ \mathbf{J}_{sole} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \tau \\ \mathcal{F}_{sole} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} - \mathbf{G} \\ 0 - \mathbf{J}_{sole} \dot{q} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

式2-25约束矩阵 $A \in \mathbf{R}^{(n+6+k) \times (2n+6+k)}$, 假设其行满秩, 则存在维数为 n 的零空间, 记组成 A 矩阵的零空间基向量构成的变换矩阵为 $V_{\perp} \in \mathbf{R}^{(2n+k+6) \times n}$, 满足 $\forall \alpha \in \mathbf{R}^n, A(V_{\perp}\alpha) = 0$, 最终张成符合约束的 x 的解空间可以表示为式2-26:

$$x = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \tau \\ \mathcal{F}_{sole} \end{bmatrix} = A^{\dagger} \begin{bmatrix} -\mathbf{C} - \mathbf{G} \\ 0 - \mathbf{J}_{sole} \dot{q} \end{bmatrix} + V_{\perp} \alpha \quad (2-26)$$

在解空间内代入不等式约束和最终的任务约束即可求得符合物理约束和任务要求的机器人的输入变量, 该部分将在本文第四章的全身动力学优化章节中进行进一步讨论。

总的来说, 浮动基多刚体动力学建立了可驱动关节加速度 \ddot{q}_{joint} 、浮动基加速度 \ddot{q}_{float} 、接触约束力 \mathcal{F}_{sole} 和关节力矩 τ 之间的非线性等式约束关系, 非线性源自方程中关于机器人当前状态 q, \dot{q} 的系数矩阵, 通过运动学公式2-12可以计算 $\mathbf{J}_{sole}(q)$, 而 $\mathbf{J}_{sole} \dot{q}$ 的计算依赖于运动学连杆加速度的计算, 可以向子节点迭代计算加速度 (参考式2-27), 得到 ${}^B\dot{\mathcal{V}}_{sole} = \mathbf{J}_{sole} \ddot{q} + \mathbf{J}_{sole} \dot{q}$, 将计算过程中的 \ddot{q} 置零即可。

$${}^B\dot{\mathcal{V}}_i = \underbrace{\left[Ad_i T_{i-1} \right] {}^B\dot{\mathcal{V}}_{i-1}}_{Parent Accel} + \underbrace{{}^i S_i \ddot{q}_i}_{Local Joint Accel} + \underbrace{\left[ad_B \mathcal{V}_i \right]^i S_i \dot{q}_i}_{Velocity Accel} \quad (2-27)$$

而涉及到动力学相关的计算需要提供较为准确的动力学参数, 如表2.4。可以使用复合刚体算法 (CRBA)^[104] 计算 $\mathbf{M}(q)$, 而矩阵 $\mathbf{C}(q, \dot{q})$ 和 $\mathbf{G}(q)$ 可以通过牛顿欧拉迭代 (RNEA)^[104] 的逆动力学数值算法计算。

表 2.4 机器人动力学参数

刚体 (L)	质量 (m) (kg)	质心位置 (${}^L r_{com}$) (m)	质心处惯量主轴 (${}^C I$) ($kg \cdot m^2$)
LinkBody	28.968	$[-0.030, 0.001, 0.178]^T$	$[0.228, 0.190, 0.111]^T$
LinkPelvis	0.750	$[-0.013, 0.000, 0.035]^T$	$[0.001, 0.003, 0.002]^T$
LinkHip	2.600	$[0.023, 0.003, 0.000]^T$	$[0.002, 0.003, 0.003]^T$
LinkThigh	4.390	$[0.007, 0.038, -0.095]^T$	$[0.045, 0.037, 0.014]^T$
LinkCalf	6.750	$[0.003, 0.033, -0.093]^T$	$[0.075, 0.069, 0.013]^T$
LinkAnkle	1.890	$[0.029, 0.001, 0.000]^T$	$[0.001, 0.002, 0.002]^T$
LinkSole	1.586	$[0.000, 0.000, -0.082]^T$	$[0.003, 0.006, 0.004]^T$

2.3 足-地面接触动力学模型

本文2.2小节中对双足机器人多刚体模型进行了讨论，并基于机器人和环境是刚性接触的假设（接触部位的速度、加速度为0）对状态变量进行约束，得到在约束子空间下的动力学模型。但是实际上，不同的地形材质会有不同的动力学特性，将地形考虑为刚性接触会使得机器人控制器的通用性受到限制。例如在刚性接触下的地面反力是关节力矩的函数，也意味着地面能够给予机器人本体无穷高带宽的力响应曲线，而实际中因为松软地面或者足底柔性材料会导致接触面存在有限的固有频率，继而影响机器人能够从环境中得到的支持力的频率特性。

2.3.1 完全非弹性碰撞模型

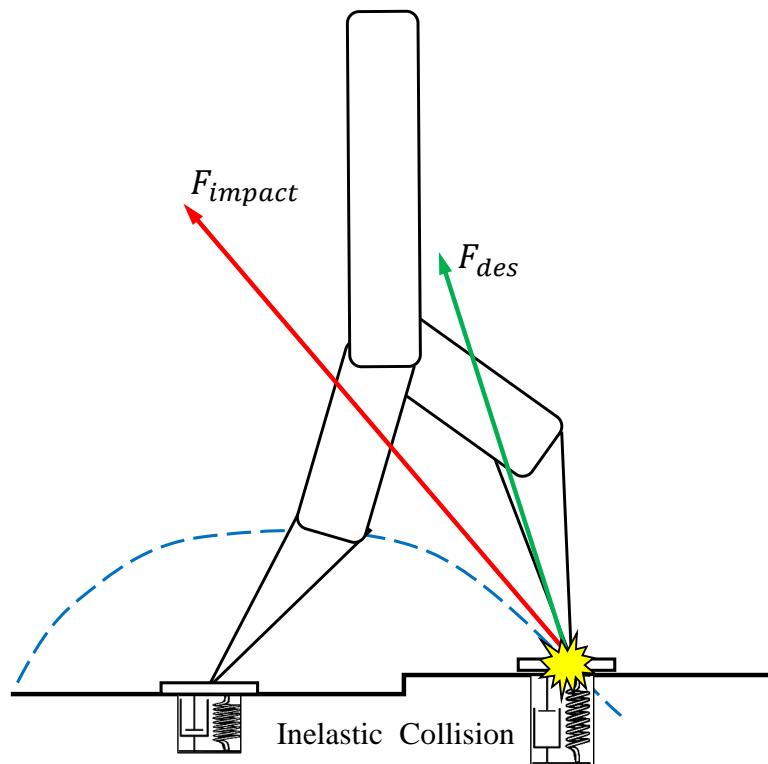


图 2.4 双足机器人落地碰撞示意图

如图2.4，双足机器人在落地时，由于地形起伏或者末端轨迹控制误差，足端和地面存在相对速度而导致产生碰撞。如果将地面建成刚性地面且阻尼很大，那么碰撞将在很短的一段时间内完成，同时足端的速度在碰撞后变为0，如式2-28中各个关节的速度产生突变，虽然碰撞前后关节位置保持不变，但是速度的映射是关于碰撞前关节位置速度 ($x = [q^T, \dot{q}^T]^T$) 的函数 $\Delta(x^-)$ 。

$$x^+ = \Delta(x^-) \quad (2-28)$$

式2-28中的状态映射函数可以采用 Grizzle 在研究混合零动态 (HZD) 方法时^[49] 使用的形式，基于落地瞬间足端速度为 0 (无反弹、无滑动) 以及碰撞时间可忽略的假设，式2-29成立 ($q^- = q^+ = q$)。由于 $\mathbf{M}(q)$ 和 $\mathbf{J}_{sole}(q)$ 均为满行秩矩阵，等式左侧的增广矩阵可逆，因此碰撞后的关节速度和碰撞的冲击力均可以计算。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(q) & -\mathbf{J}_{sole}^T(q) \\ \mathbf{J}_{sole}(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^+ \\ \delta\mathcal{F}_{sole} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(q)\dot{q}^- \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

式2-29适用于足端和地面均为刚体时的碰撞假设，从而将双足行走分为单足支撑的连续动力学阶段和碰撞的不连续阶段，并且只在连续动力学阶段进行控制。然而足端和地面的刚性接触会产生较大的落地接触力，这种高频的冲击力会对足式机器人的硬件产生不良的影响，在实际中需要加入减震吸收冲击的材料降低接触的刚度并且增大阻尼。类似的当地形柔软时，也会导致足端和地面接触产生力交互直至相对速度为 0 的时间无法忽略（图2.5中切换落足腿后振荡现象持续了一段时间）；另一方面，在实际中由于接触阻尼不是无限大，并且存在一定的弹性，使得先验的足端落地后不发生滑动和反弹的假设不成立；这些都会使得式2-29的计算会存在误差，并影响机器人控制器的稳定性。

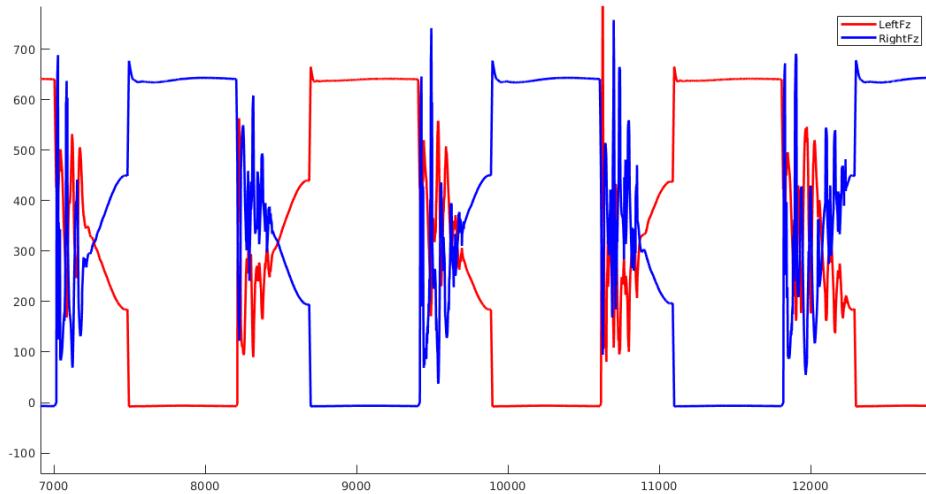


图 2.5 双足行走中足底力 F_z 曲线图

2.3.2 弹簧阻尼碰撞模型

因此我们需要建立足底和地面接触的动力学模型，分析不同接触模型以及不同参数对落地冲击控制的影响。例如图2.4中，将足底接触点的位置和接触力建模成了式2-30所示的弹簧阻尼系统：

$$\mathcal{F}_c = K(X_0 - X) - B\dot{X} \quad (2-30)$$

为了简单起见，本文研究一个典型的两质量块动力学系统的落地碰撞问题，如图2.6所示，大质量块代表机器人本体的重量 m_b kg，而足底拥有较小的质量 m_f kg，两质量块之间拥有一个自由度的关节，系统的输入是两质量块之间的作用力 $\mathbf{u} = F_{leg}$ 。并且将摆动腿落地时的冲击等效为足端触地时拥有向下的速度 v_0 ，而此时本体的质量的惯性速度为 0，并且处于期望的水平高度上。由于足底存在碰撞接触，机器人和地面会进行力的交互作用，直到系统完全稳定。在这个过程中，系统为了控制上身高度产生的控制量 F_{leg} 会受到足底接触模型的结构和参数的影响。

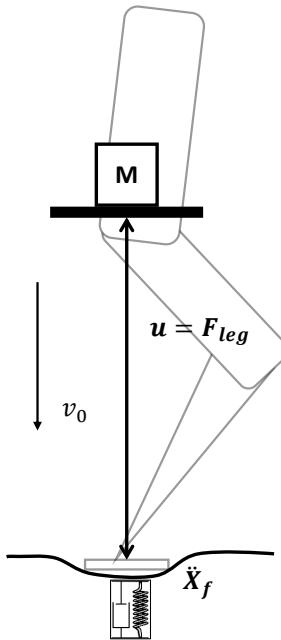


图 2.6 两质量块落地冲击问题

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c &= K(X_0 - X) - B(X)\dot{X}, X < 0 \\ B(X) &= \begin{cases} \frac{-X}{h}B_{max} & -X < h \\ B_{max} & -X \geq h \end{cases}, h > 0, B_{max} > 0 \end{aligned} \quad (2-31)$$

典型的弹簧阻尼系统会在接触瞬间产生力的阶跃冲击，这会对控制算法和仿真模拟带来较大的不稳定影响，因此常用的法向支持力的接触模型还有式2-31等弹簧变阻尼系统^[105-106]。这些动力学系统大多数都是无源的，并且当接触阻尼大于临界阻尼时，由足端接触注入的多余能量将会以内能的形式快速耗散，这也是ASIMO^[2]，HRP^[9]等机器人在足底结构中加入阻尼器的原因之一。

对图2.6所示模型建立广义坐标，本体质量在竖直方向高度为 x_b ，而本体到足端的平行关节位移（也即腿长）为 x_l ，关节正方向竖直向下，输入力大小为 u ，足端的位置为 $x_f = x_b - x_l$ ，并对系统进行受力分析得到式2-32：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_b &= \frac{1}{m_b}u - g \\ \ddot{x}_f &= \frac{1}{m_f}f(x_f, \dot{x}_f) - \frac{1}{m_f}u - g \\ \ddot{x}_l &= \ddot{x}_b - \ddot{x}_f = \left(\frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_f} \right) u - \frac{1}{m_f}f(x_f, \dot{x}_f)\end{aligned}\quad (2-32)$$

将式2-32整理成广义坐标 $q = [x_f, x_l]^T$ 下的标准动力学方程如式2-33：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_b + m_f & m_b \\ m_b & m_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(q)} \begin{bmatrix} \ddot{x}_f \\ \ddot{x}_l \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (m_b + m_f)g \\ m_b g \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(q)} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_f^T(q)} f(x_f, \dot{x}_f) \quad (2-33)$$

而关于状态变量 $x = [q^T, \dot{q}^T]^T$ 的状态方程如式2-34和式2-35。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \mathbf{M}^{-1} \left(S^T u + \mathbf{J}_f^T f(x_f, \dot{x}_f) - \mathbf{G} \right) \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_f} \\ \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_f} \end{bmatrix}}_B u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f(x_f, \dot{x}_f)}{m_f} - g \\ -\frac{f(x_f, \dot{x}_f)}{m_f} \end{bmatrix}}_{S(x)} \quad (2-35)$$

关于状态变量的方程: $\dot{x} = f(X, u) = Ax + Bu + S(x)$ 显然是非线性的, 并且输入的驱动变量不足以控制所有的自由度(欠驱动)。我们采用零动态理论分析该系统不可控的内部动态是否稳定。假设状态完全可观测, 并且控制输出变量 $y = x_b = x_f + x_l$, 对输出求导直到等式右侧出现 u ,

对于式2-35中的系统: $\ddot{y} = \ddot{x}_l + \ddot{x}_f = \frac{1}{m_b}u - g$, 通过对输出动态子系统进行反馈线性化, 我们能够通过输入 $u = m_b(g + v)$ 将输出的子系统动态方程转化为式2-37, 从而能够设计控制器跟踪期望的输出 y_d , 例如简单的PD跟踪控制器可以为式2-36:

$$v = \ddot{y}_d + k_p(y_d - y) + k_d(\dot{y}_d - \dot{y}), k_p > 0, k_d > 0, k_d = 2\sqrt{k_p} \quad (2-36)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (2-37)$$

再将输出误差 $y = y_d \rightarrow \ddot{x}_f + \ddot{x}_l = 0$ 时的稳态输入 $u = m_b(g + v \rightarrow 0) = m_bg$, 代入到式2-35中, 得到关于内部动态子系统的微分方程如式2-38:

$$\ddot{x}_f = \frac{1}{m_f}f(x_f, \dot{x}_f) - \frac{m_b + m_f}{m_f}g \quad (2-38)$$

由于接触动力学模型是自治系统(Autonomous System), 并且总能量由于阻尼的存在持续耗散, 例如式2-30和式2-31中, 状态 x_f, \dot{x}_f 对 \ddot{x}_f 的贡献系数 < 0 , 因而式2-38中关于内部动态 x_f 的子系统是渐进稳定的。

通过对两质量块模型的分析, 本文将欠驱动系统分为期望输出和内部动态两个部分, 也意味着在双足机器人落地时, 只需要控制本体质心的位置, 同时足底接触动态子系统的稳定性可以得到有效的保证。这一方法同样能够推广到带足地接触的全动力学模型系统的控制中。

2.3.3 模型参数对冲击力影响分析

以两质量块模型为例, 足式机器人摆动腿落地时质心和足端的轨迹跟踪均有误差, 而我们需要控制的主要目标是质心的轨迹以及摆动腿和地面的有效接触, 这对应前一节非线性系统控制分析中的输出轨迹控制和内部动态稳定性两个部分。其中质心轨迹的输出控制器采用式2-36所示的简单PD控制器时, 本体相对惯性系

的运动可以用弹簧阻尼系统表示。因此在摆动腿落地过程中足端和本体各自的弹簧阻尼系统参数均会影响落地冲击力 $u = F_{leg}$ 以及本体的加速度曲线。

基于状态全部可测量的假设，本文搭建了式2-35中动力学系统的 Simulink 仿真，对比了接触模型和输出控制器这两部分参数对控制过程的影响。

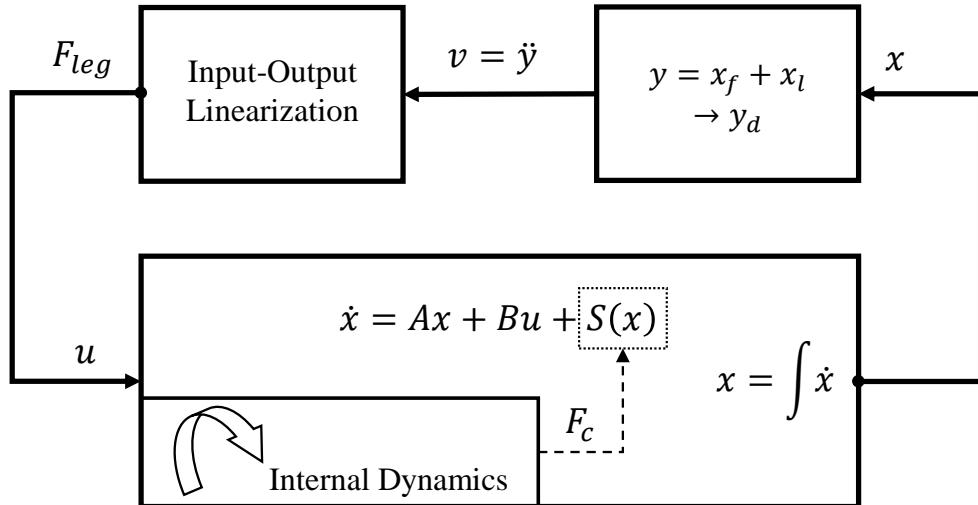


图 2.7 两质量块落地控制仿真框图

为了对比地形参数、控制器参数以及初始状态对足底力、关节力和本体加速度的影响，设计如表2.5所示的对比实验。其中系统的初始位置为 $x_f = 0$, $x_l = 1.0\text{ m}$, $x_b = 1.0\text{ m}$, 质量块 $m_b = 10\text{ kg}$, $m_f = 1\text{ kg}$ 。表2.5中第5组的变阻尼接触模型中阻尼饱和位置 $h = 0.01\text{ m}$ ，所有组别的接触模型参数中阻尼系数均大于临界阻尼 $2\sqrt{K}$ ，避免足端被弹起的情况，而所有组别的控制器阻尼均设计为临界阻尼，使得被控对象快速且平稳的达到平衡点。

表 2.5 对比实验参数

实验组别	接触模型参数	控制器刚度阻尼	$v_b (\text{m/s})$	$v_f (\text{m/s})$
1	$K = 2.5\text{e}4, B = 1\text{e}3$	$K_p = 900, K_d = 60$	-0.5	-0.8
2	$K = 2.5\text{e}4, B = 1\text{e}3$	$K_p = 900, K_d = 60$	0.0	-0.8
3	$K = 2.5\text{e}2, B = 1\text{e}2$	$K_p = 900, K_d = 60$	0.0	-0.8
4	$K = 2.5\text{e}4, B = 1\text{e}3$	$K_p = 100, K_d = 20$	-0.5	-0.8
5	$K = 2.5\text{e}4, B_{max} = 1\text{e}3$	$K_p = 900, K_d = 60$	-0.5	-0.8

实验中组1和组2的区别在于摆动腿落地时的本体轨迹跟踪是否有误差，从图2.8中的蓝色曲线不难发现，当本体轨迹跟踪没有误差时，即使摆动腿的落地速度不为0，反馈闭环后的输出动态并不会受到内部动态（足端状态）的影响，甚至

输入 $u = F_{leg}$ 也始终保持恒值，与此同时，内部动态则通过阻尼耗散掉落地时多余的 n 能量，最终也恢复静止。而红色曲线则代表落地时本体的状态和足端状态均有误差，此时输入才会根据本体的跟踪误差做出相应的反馈动作。在落地瞬间，本体的阻抗控制器产生了较大的力输入目标（4倍重力），因此需要调整落地时的控制器参数，以避免对机器人的本体冲击力过大的情况。同时对比足底接触力的曲线，能够发现在接触模型参数一致的情况下，落地瞬间在足底都会产生一个 $800N$ 的力脉冲信号，（红色曲线是蓝色力脉冲信号和本体控制的输入力信号的叠加），而力脉冲信号有几率对机器人足底的力传感器产生不可逆的危害，在无法减小落地速度的情况下，我们需要寻找能够减小力脉冲信号的参数。由于该力脉冲信号主要和落足时的足端速度和接触模型的阻尼系数有关，因此需要进一步分析其余几组的实验结果。

总之，组 1 和组 2 的对比能够说明 F_{leg} 只和本体的状态控制有关，和足端动态无关。而足端的接触力直接和足端状态有关，同时足端状态也会受到本体作用力的反力影响，受到内部动态和输出动态作用力的共同影响。

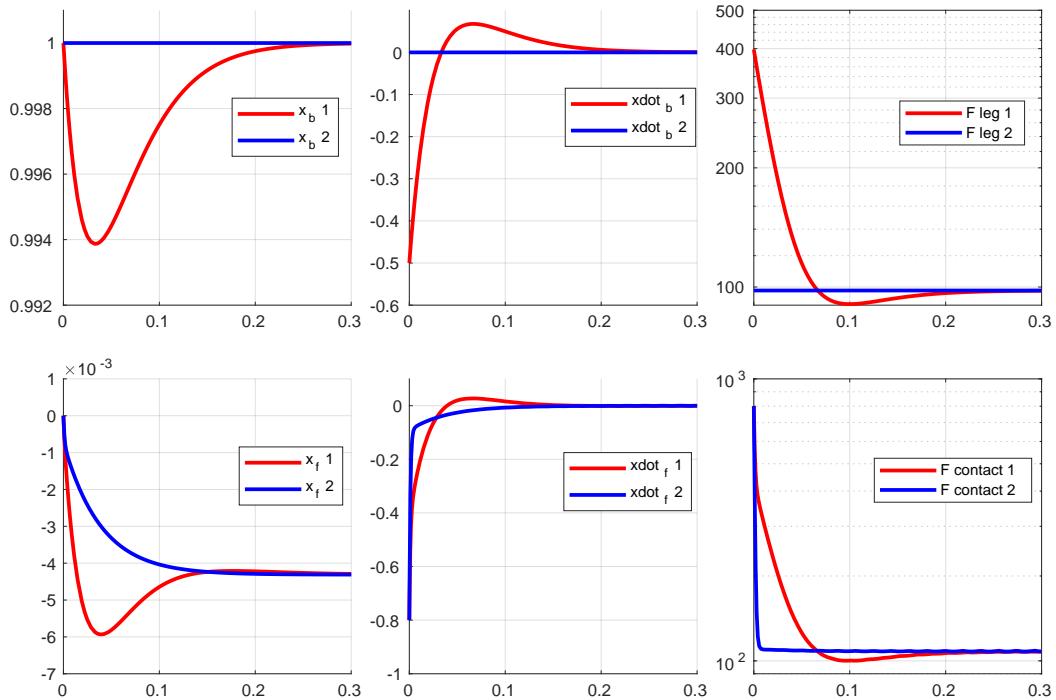


图 2.8 落地控制对比实验：(组 1-组 2, 本体速度的影响)

组 2 和组 3 的不同在于足端和地面接触的弹簧阻尼参数，组 3 的地面相对更加柔软。图2.9中可以看出，两组实验中本体的初始误差均为 0，并且对应的状态和控制输入也完全相同，这从侧面进一步验证了 F_{leg} 和足端动态无关的结论。而通

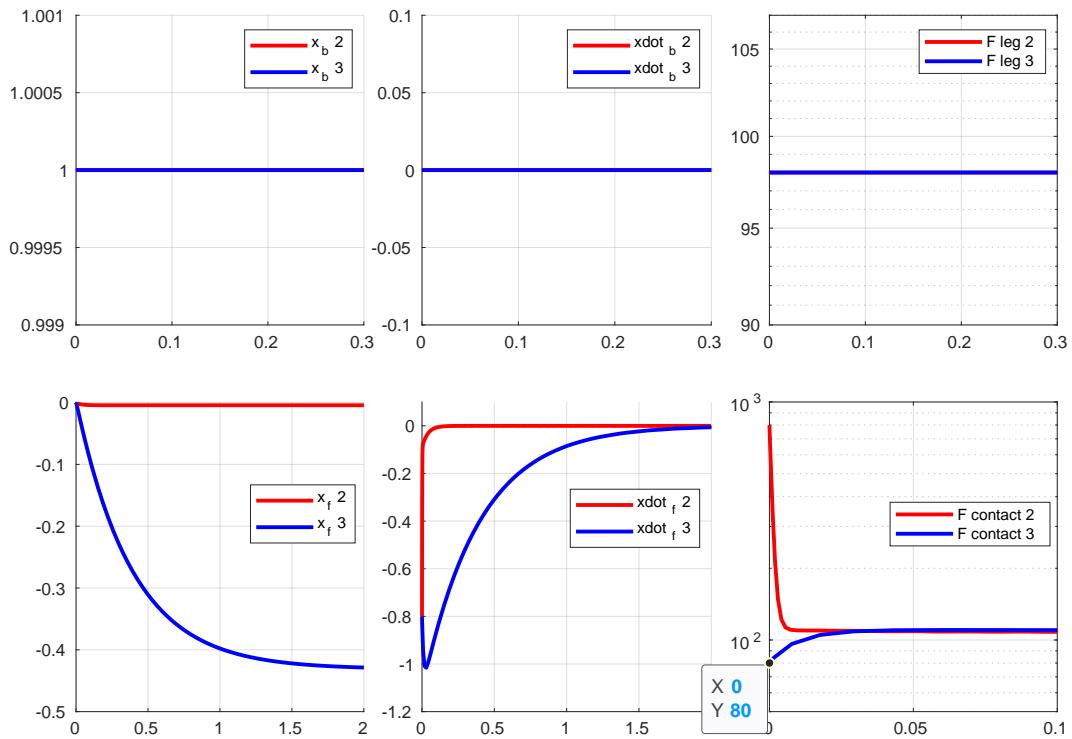


图 2.9 落地控制对比实验：(组 2-组 3，地形参数的影响)

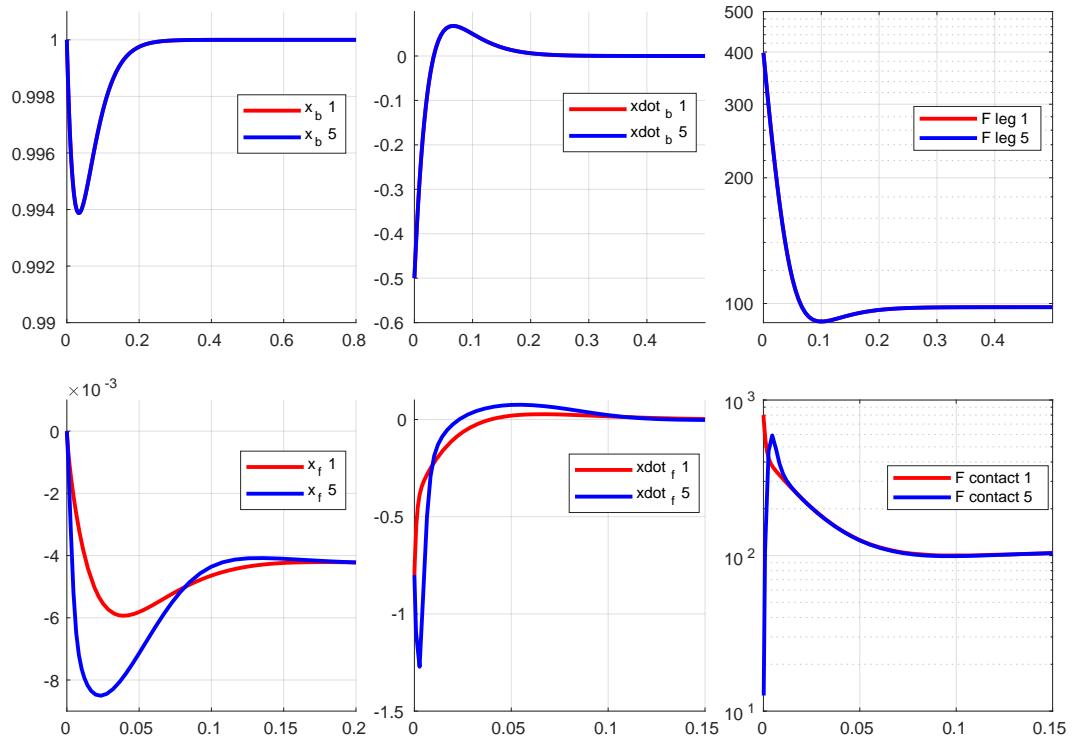


图 2.10 落地控制对比实验：(组 1-组 5，变阻尼地形的影响)

过减小足端的刚度和阻尼系数，能够减少落地时的足端力冲击，但是单纯的减小阻尼会导致足端到达稳态的时间延长，这对估计足端的状态是不小的挑战。

组1和组5的对比在于组5中阻尼系数是关于接触形变的函数。和组2以及组3中输出动态始终处于稳态不同，图2.10中的输出动态都有变化，但规律也完全一致（红色和蓝色曲线重叠），充分体现了足端接触动态不影响外部动态的特性。并且相比于组3减少阻尼和刚度来减小落地力脉冲的方法，组4的被动变阻尼接触显然兼顾了快速收敛和削平力脉冲的优点。Honda公司在ASIMO^[17]的足底弹簧阻尼器之外还包裹了一层柔软的弹性缓冲材料，通过串联阻尼和弹簧起到了变阻尼的效果。

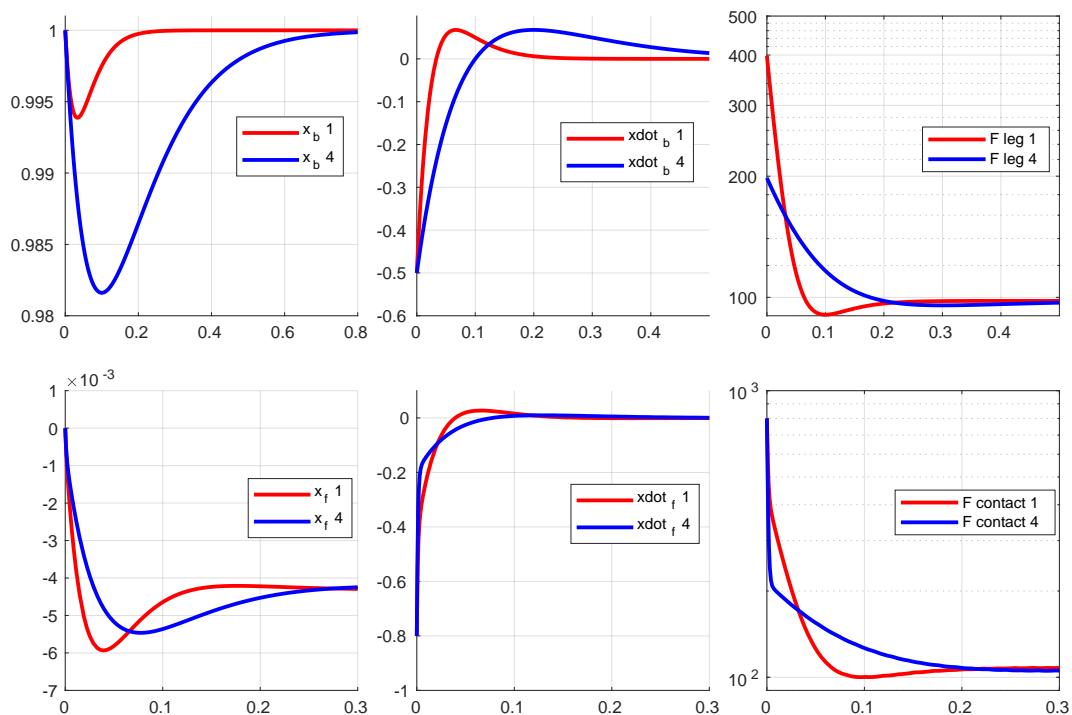


图 2.11 落地控制对比实验：(组 1-组 4，控制器参数的影响)

组1和组4只是在外部动态控制器的参数选择上有所不同，对比图2.11中本体的力轨迹和足端接触力轨迹，明显看出本体的位置控制刚度以及阻尼会直接影响落地时的冲击力，组4采用相对更低的阻抗系数，将落地冲击力减小了一半，但付出的代价是本体的轨迹控制误差相对更大，并且收敛到稳态的时间更长。

本文通过实验对比得出三个主要的结论：1、通过输出动态的控制能够隔离足端动态的影响。2、足端所受冲击力来自外部动态输入和地面接触模型，需要设计合理的接触材料吸收足-地接触的力脉冲。3、本体受到的冲击力只和外部动态控制器参数有关，需要在控制精度和冲击力波动之间做权衡。

2.4 本章小结

本章介绍了双足机器人 walker 的尺寸结构和动力学参数，基于旋量理论推导了 walker 的运动学和浮动基动力学计算方法。在接触约束不变的情况下，得到了满足约束的关节子空间和任务空间的线性映射关系，将机器人复杂的非线性动力学系统通过逆系统动态反馈控制实现伪线性化，进而能够将该控制问题转化为满足动力学约束和接触约束的子空间寻优问题。对足-地面接触模型的分析，进一步扩展了基于刚性接触约束的浮动基动力学方法，使其能够适应不同材质的地面接触模型。在机器人动力学和足-地模型的联合分析中，以两质量块模型落地为例，论证了机器人本体受到的冲击力主要来自于外部动态反馈控制器，并且地面接触属于内部动态，并不影响外部动态的控制。

实现外部动态的控制需要对包括接触状态在内的全状态进行准确的估计，本文第三章也将重点分析接触模型的状态估计问题。而质心控制器在冲击力和控制性能之间的权衡则是本文第四章的主要内容。

第3章 全身状态估计方法

3.1 引言

本章的研究内容基于第2章的包含足-地接触动力学的机器人全动力学模型，建立了基于足-地模型的状态观测器，首先以两质量块模型为例，分析并比较了几种不同类型的观测及性能。进而将该模型观测器融入浮动基的全身状态观测中，提出了融合地面接触模型的估计方法。

3.2 足-地面接触模型状态观测器

对于图2.6所示的两质量块模型，能够建立如式2-35的非线性状态方程，我们在前一章讨论了如式2-36的输出动态子系统的控制方法，在全状态反馈控制器的设计中要求得到当前机器人的所有状态 $x = [\dot{q}^T, q^T]^T$ 。然而由于没有直接的传感器可以直接测量到浮动基座相对惯性系的位置和姿态，因此浮动基的状态估计问题始终困扰着机器人研究者们。

浮动基座的姿态可以用安装在机器人本体上的陀螺仪以及加速度计等惯性传感器进行估计，并已经在无人机等领域取得了广泛的应用^[107]。而目前浮动基的绝对位置的快速实时估计一般通过运动学计算基座相对支撑足的相对位置（依赖于机器人和地面有良好接触的假设），但当地形起伏较大或者存在动态的变化时，因为无法实时测得足端的位置和姿态，只能使用基座的惯性传感器所测信号进行积分^[108]估计，浮动基座的状态估计精度因此受到限制，进而影响机器人的控制性能。也有研究团队采用视觉捕捉设备等外部传感器对基座位置进行实时地测量^[59]，这种方法将机器人的活动范围局限在视觉捕捉范围内，并不是最合理的方案。本文的工作将基于运动学计算和足-地面接触模型实现机器人全状态的观测，探索提高足式机器人的全身状态估计精度的方法。

为了探索足底接触力模型应用于状态估计的方案，本章依旧沿用如式2-35的动力学方程，因为基于输出子动态反馈的控制器输入为 $u = m_b g + \ddot{y}_{fb}$ ，因为输入带有平衡点处的力前馈，因此可以分析非线性系统在平衡点附近的近似线性系统（ x_b 处于任意位置均能够满足平衡点要求： $u_0 = m_b g, f(x_f, \dot{x}_f) = (m_b + m_f)g \rightarrow Bu_0 + S(x) = 0$ ）。同时由于地面接触模型是关于足底状态 x_f, \dot{x}_f 的非线性函数（如式2-31），考虑到该非线性函数只在碰撞初期存在一定的非线性，并且通过图2.10中的线性接触模型和非线性接触模型的对比不难发现，二者的区别不大。本文将足

底的接触模型近似为线性弹簧阻尼模型，并且将平衡点附近的动态力合并到状态方程的转移矩阵 \mathbf{A} 中，并得到如下的状态方程3-1 和输出方程3-2：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_f} & 0 & -\frac{B}{m_f} & 0 \\ \frac{K}{m_f} & 0 & \frac{B}{m_f} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_f} \\ \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_f} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \delta u \quad (3-1)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_f \\ x_l \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_l \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

我们在平衡点附近分析该系统的能观性，通过式3-3的能观性矩阵 Q_{ob} 的秩的情况来判定系统是否能观测：

$$Q_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{m_f} & 0 & \frac{B}{m_f} & 0 \\ \frac{K}{m_f} & 0 & \frac{B}{m_f} & 0 \\ -\frac{BK}{m_f^2} & 0 & \frac{Km_f - B^2}{m_f^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

由于 $\frac{K}{m_f} \frac{Km_f - B^2}{m_f^2} - \frac{B}{m_f} (-\frac{BK}{m_f^2}) = \frac{K^2}{m_f} > 0$ ，因此 $rank(Q_{ob}) = 4$ ，系统完全能观，也即该系统的全状态信息可以从输出观测得到。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (3-4)$$

3.2.1 全维状态观测器

设计如图3.1所示的全维状态观测器（Luenberger 观测器^[109]），其原理是构建和真实系统动力学结构一致的影子系统（式3-4），求取两个系统输出的误差量 $y_e = y - \hat{y}$ 作为影子系统的修正输入。因为当观测状态 \hat{x} 和实际状态 x 一致时，才认为估计误差收敛，因此需要分析误差 $x_e = x - \hat{x}$ 的稳定性和收敛速度，联立式3-1和式3-4可以得到式3-5所示的输出误差的动态方程。显然只要寻找合适的观测器增益反馈矩阵 L ，就能够合理设置误差的转移矩阵 A_e 的特征值的实部小于 0。这类似于 SISO 系统配置矩阵 $A - BK$ 极点的方法，由于观测器是控制器的对偶系统，并且矩阵 A_e 的特征值和 A^T 相同，因此观测器设计过程中的极点配置问题，可以等效为设计 (A^T, C^T) 控制对的状态反馈矩阵 L^T 问题。

$$\dot{x}_e = A\hat{x}_e + LCx_e = \underbrace{(A - LC)}_{A_e} x_e \quad (3-5)$$

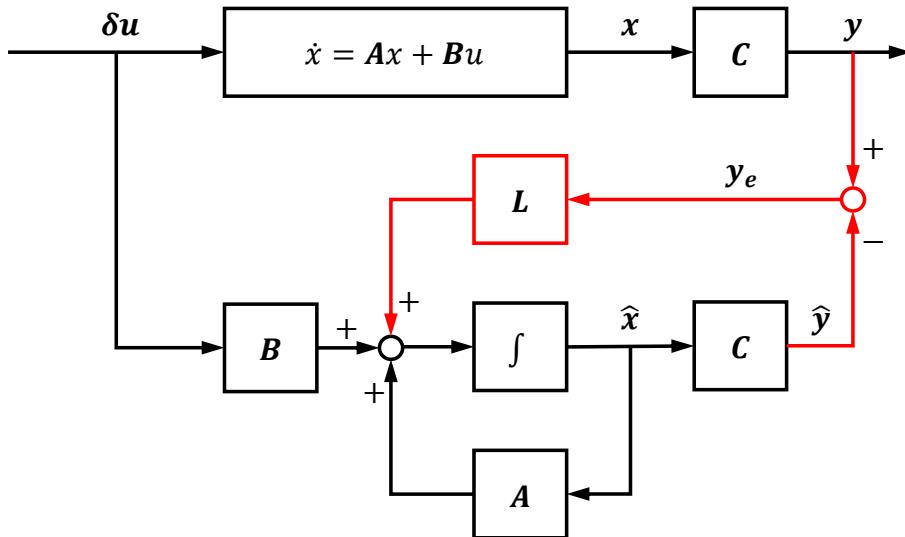


图 3.1 Luenberger 观测器全维状态观测器框图

SISO 系统的极点配置有标准的解法（能控标准型^[110]、Ackermann 方法^[111]等），MATLAB 中也有对应的极点配置函数如 `place` 和 `acker`，对于给定的 (A, B) 控制对，不同方法求得的反馈矩阵 K 关于期望极点 p 是唯一的。而对于 MIMO 系统的极点配置求得的 K 不是唯一的，因此对模型中的 L^T 反馈矩阵的设计也有较多的方法，本文通过向量 k ，使得 $(A^T, C^T k)$ 可控，配置该 SISO 问题的极点，得到反馈矩阵 L_k^T ，最终的反馈矩阵 $L^T = k L_k^T$ 。

取 $k = [1, 1]^T$, 控制对 $(A^T, C^T k)$ 的可控性矩阵 Q_c 如式3-6, 通过求矩阵的行列式不等于 0 得到矩阵 Q_c 满秩的条件: $\frac{K}{m_f} + 1 \neq \frac{B}{m_f} \rightarrow \text{rank}(Q_C) = 4$, 对于绝大部分地面参数, 该条件成立, 因此能够根据极点找到合适的矩阵 L 。

$$Q_c = \begin{bmatrix} C^T k, & A^T C^T k & (A^T)^2 C^T k & (A^T)^3 C^T k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{K}{m_f} & \frac{K}{m_f}(1 - \frac{B}{m_f}) & -\frac{K}{m_f}(\frac{K}{m_f} + \frac{B}{m_f}(1 - \frac{B}{m_f})) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{m_f} & \frac{K}{m_f} + \frac{B}{m_f}(1 - \frac{B}{m_f}) & (\frac{K}{m_f} - \frac{B^2}{m_f^2})(1 - \frac{B}{m_f}) - \frac{BK}{m_f^2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

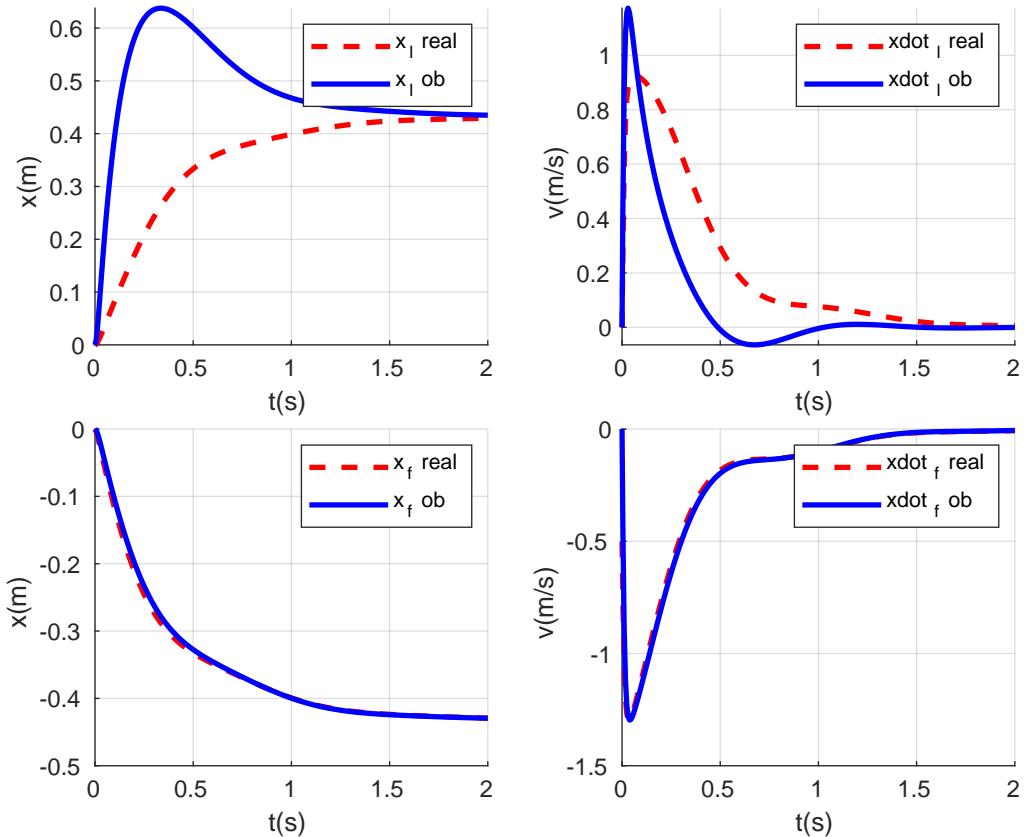


图 3.2 全维观测器状态估计结果

以地形参数 $K = 2.5e2, B = 1e2$ 为例, 质量参数同表2.5中实验组 1。因为对状态量中的 x_f, \dot{x}_f 的估计性能要求较高, 因此选择极点 $p = [-2, -5.0, -5.1, -100]^T$, 使用 `place(A', C'*k, p)` 得到部分反馈矩阵 $L_k^T = [-0.324, -9.752, -1.452, 21.85]$, 最终 L 矩阵满足式3-7。本文在对在初值扰动下的状态观测器性能进行仿真, 图3.2中可以看出估计器对于足端的状态估计精度较高, 但是对腿长的估计稍有误差, 但

最终能够恢复到稳态。通过选择不同的极点，全维状态估计器对于腿长相关状态 x_l, \dot{x}_l 和足底状态 x_f, \dot{x}_f 的估计效果各有偏差，之所以选择这组极点是考虑到本身腿长相关的状态从输出中直接可得，因此只需要保证足底状态的良好估计即可。

$$L = \begin{bmatrix} -0.3237 & -0.3237 \\ -9.7523 & -9.7523 \\ -1.4523 & -1.4523 \\ 21.8523 & 21.8523 \end{bmatrix}, \text{eig}(A - LC) = [-2, -5.0, -5.1, -100]^T \quad (3-7)$$

3.2.2 降维状态观测器

全维状态估计器的缺点在于需要观测所有维数的状态，对于两质量块的动力学系统，尚且能够通过极点配置找到合适的观测误差增益矩阵，当输入维数和输出维数升高后，观测的难度就会大大提升。不仅如此，从图3.2中可以看出，对有些可以直接观测到的变量依然存在误差，因此考虑使用降维观测器对足底不可测的状态进行估计，而腿长等状态直接用测量信息进行滤波即可。

将式3-1中的状态变量分为可测量的 $x_a = [x_l, \dot{x}_l]^T$ 和内部动态变量 $x_b = [x_f, \dot{x}_f]^T$ ，并重新整理得到式3-8。并且重新构造关于待估计变量 x_b 的状态方程如式3-9。

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_l \\ \dot{x}_l \\ x_f \\ \dot{x}_f \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{m_f} & \frac{B}{m_f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K}{m_f} & -\frac{B}{m_f} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_f} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_f} \end{bmatrix} \delta u \quad (3-8)$$

$$\dot{x}_b = \underbrace{\frac{A_{bb}}{A_b} x_b}_{y_b} + \underbrace{(A_{ba} x_a + B_b u)}_{u_b} \quad (3-9)$$

$$\underbrace{\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u}_{y_b} = \underbrace{\frac{A_{ab}}{C_b} x_b}_{y_b}$$

采用式3-4的状态观测器构造方法，可以得到估计值 \hat{x}_b 的动态方程（式3-10），

由于 y_b 中含有不可测的 \dot{x}_a , 无法直接对 x_b 进行观测, 因此需要估计 $w = x_b - Lx_a$, 整理出 \hat{x} 的动态方程如式3-11。降维状态观测器框图如图3.3所示, 显然对于 w 的动态方程也能整理成 $\dot{w} = \hat{A}w + \hat{B}x_a + \hat{F}u$ 的形式, 因此 w 的估计误差 $w_e = w - \hat{w}$ 是否收敛和矩阵 $\hat{A} = A_{bb} - LA_{ab}$ 的特征值有关, 通过找到令 \hat{A} 特征值实部均小于 0 的反馈矩阵 L , 即可得到观测误差收敛的降维观测器方程。

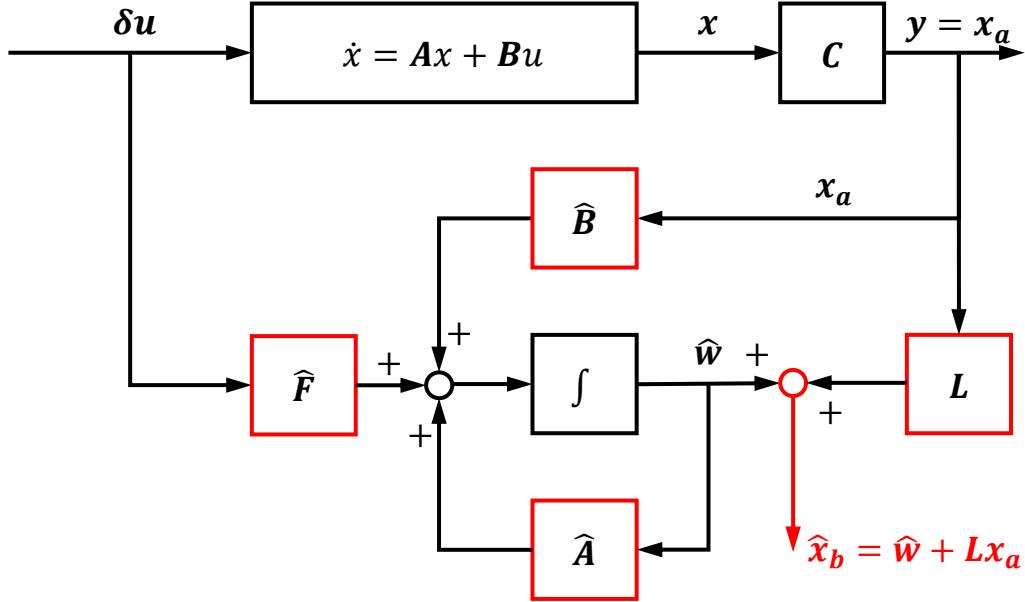


图 3.3 降维观测器框图

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_b &= A_b\hat{x} + u_b + L(y_b - C_b\hat{x}_b) \\ &= (A_{bb} - LA_{ab})\hat{x}_b + A_{ba}x_a + B_bu + L(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_au)\end{aligned}\tag{3-10}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{\dot{\hat{x}}_b - L\dot{x}_a}_{\hat{w}} &= (A_{bb} - LA_{ab})\hat{x}_b + (A_{ba} - LA_{aa})x_a + (B_b - LB_a)u \\ &= \underbrace{(A_{bb} - LA_{ab})}_{\hat{A}} \underbrace{(\hat{x}_b - Lx_a)}_{\hat{w}} \\ &\quad + \underbrace{((A_{bb} - LA_{ab})L + A_{ba} - LA_{aa})}_{\hat{B}} x_a \\ &\quad + \underbrace{(B_b - LB_a)u}_{\hat{F}}\end{aligned}\tag{3-11}$$

采用和全维观测器相同的模型参数和初始状态，控制对 (A_{bb}^T, A_{ab}^T) 首先需要满足能控性（显然成立），设计极点 $p = [-1, -10]^T$ ，使用 $\text{place}(A_{bb}^T, A_{ab}^T, k, p)$ 得到 L_k^T ，由于 A_{ab}^T 的第一列为 0，因此取 $k = [0, 1]^T$ 即可，得到 $L_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.41 & 3 \end{bmatrix}$ 考虑到 $x_b = w + Lx_a$ ，为了增强动态性能， L 的第一列不能为 0，因此在 L_0 上叠加一个单位阵，因此最终的 $L = L_0 + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.41 & 4 \end{bmatrix}$ ，此参数下的状态估计结果如图3.4，可以看到观测器同样很快收敛到了真实值上。

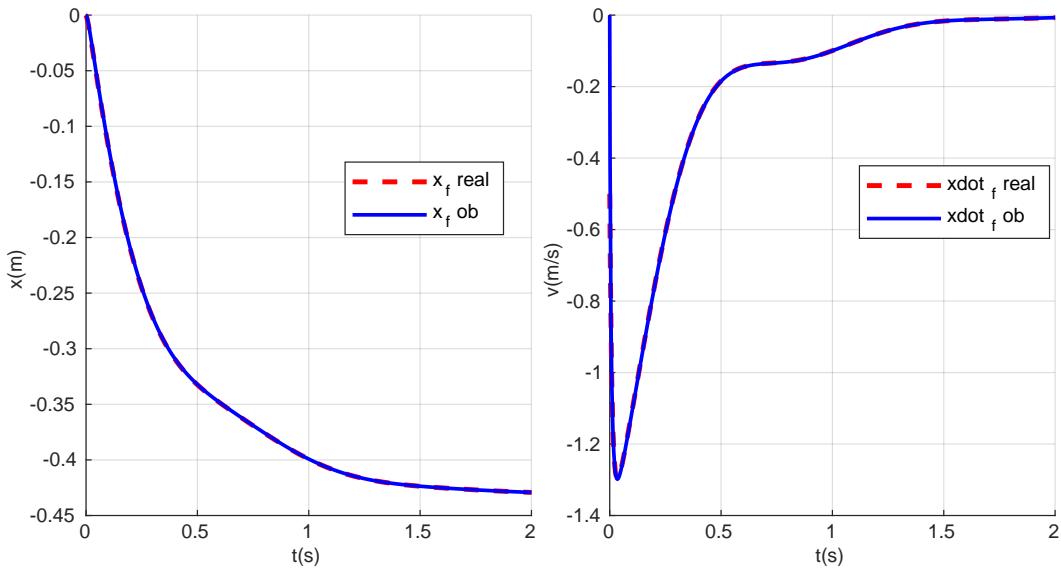


图 3.4 降维观测器估计结果

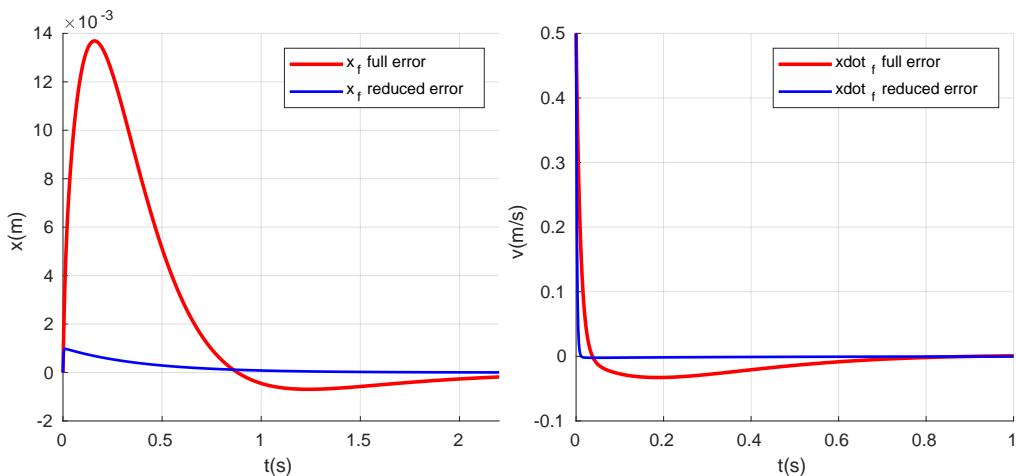


图 3.5 观测器估计结果误差对比

图3.5给出了两种观测器的估计误差的曲线，能够明显看出降维观测器相较于

全维观测器有更快的收敛速度，同时设计观测器需要考虑的维数更小。因此本文采用该降维观测器方法实现足端接触模型的状态估计。

3.3 融合地面信息的全身状态估计方法

图2.2所示的 Walker 机器人具有极高的运动自由度，而基于浮动基动力学的逆系统控制方法除了需要准确的模型参数之外，还需要实时反馈当前机器人的准确状态，这样才能确保实时给定的前馈力矩（式2-24）能够将系统局部线性化，进而实现任务空间轨迹的准确跟踪。机器人的全身状态估计问题的难点在于浮动基座的状态估计，由于没有直接测量的传感器，只能通过机器人和环境的接触动态过程以及惯性传感器信号进行融合。本体在惯性系下的位置和姿态估计问题是两个串联的问题，本体在惯性系下的位置取决于正运动学2-5和足端在惯性系下的姿态，而足端并没有惯性传感器能直接测量姿态，因此需要首先通过本体上的惯性传感器得到本体姿态，然后通过运动学解算（式2-5和式2-12）以及本体的加速度估计出本体在惯性系下的位置和速度。

本体姿态的估计依赖惯性元件，常用的惯性传感元件有测量角速度的陀螺仪、测量加速度的加速度计以及测量偏航角的地磁计。walker 机器人在本体躯干上安装了 Advanced Navigation 公司的 Orientus^[112] 惯性测量单元（IMU），该传感器通过对角速度、加速度和偏航角信号进行融合滤波，能够给出延时 0.3ms、误差在 1° 以内的姿态信息。也可以直接读取原始信号进行滤波，可以采用^[113] 中的方法对姿态角进行融合滤波。陀螺仪由于其能直接得到传感器坐标系下的角速度信号，并且角速度的测量对外力干扰不敏感，适合测量角度的动态信息，但是陀螺仪器件由于温度变化导致的校正偏差，导致直接使用角速度积分得到的姿态信息存在严重的漂移现象。需要使用加速度计测量重力在传感器坐标下的方向进行姿态的校正，对角速度的校正以及姿态矩阵的微分形式如式3-12。

$${}^B\hat{\omega}_B = {}^B\omega_{gyro} + k {}^B\omega_{error} \rightarrow {}^I\dot{R}_B = {}^I\hat{R}_B [{}^B\hat{\omega}_B]_x \quad (3-12)$$

式3-12中的 ${}^B\omega_{error}$ 为当前估计坐标系下的重力向量和实际加速度计测量得到的重力向量叉乘（式3-13）。由于没有考虑到除了重力以外的其他惯性力，当机器人进行高动态的运动时，加速度的噪声会对校正过程产生不良的干扰，需要对修正系数 k 做适当的减小，直到减小到 0（式3-14，可以取 $r_0 = 0.5, k_0 = 0.2$ ）。通过重力可以对和重力垂直的平面姿态进行校正，也即惯性系下的 Roll(x) 和 Pitch(y) 的角度，Yaw(z) 角度可以用地磁向量做类似的校正，由于 Yaw(z) 对机器人的平衡

控制影响不大，属于移动机器人的导航和定位问题，本文不做展开讨论。

$${}^B\omega_{error} = \frac{{}^B\alpha}{\|{}^B\alpha\|_2} \times {}^B\hat{R}_I e_z \quad (3-13)$$

$$k = \begin{cases} 0 & \|{}^B\alpha - g\|_2 > r_0 \|g\|_2 \\ k_0 - k_0 \frac{\|{}^B\alpha - g\|_2}{r_0 \|g\|_2} & \|{}^B\alpha - g\|_2 \leq r_0 \|g\|_2 \end{cases} \quad (3-14)$$

当躯干姿态已知时，通过运动学能够计算足端的姿态，由于双足机器人足底为一个平面，足端和地面的接触情况需要通过足底六维力传感器获取当前末端受到外力的情况进行判断：若机器人双足受到外力都很小，代表机器人此时在空中做自由落体运动，那么本体的位置按照匀加速模型积分得到。而当只有一只脚和地面接触时，此时将刚触发落地检测时的估计位置和速度作为足底状态初值，将机器人质心相对于足底的位置和速度作为已知状态 x_l, \dot{x}_l ，将质心控制器的期望力 $F = \dot{h} = M_{all}\ddot{x}_{com}$ 作为 F_{leg} ，代入图3.3中降维观测器，从而更新足端的运动状态，得知足端在惯性系中的运动状态后，浮动基的状态也能通过运动学求得。

3.4 本章小结

本章对双足机器人的状态估计问题做了相关的讨论，通过两质量块落地接触动力学，给出了基于全维和降维观测的足底接触状态观测器，并比较了二者的估计效果，降维观测器在极点配置、参数选择上更具优势。在实际机器人的估计问题上，首先将机器人的状态估计分为本体的姿态估计和足底的接触位置估计两部分，本体姿态估计融合了陀螺仪、加速度计等惯性传感器；而足底的接触位置估计中将机器人-环境之间的静力关系简化为质心-足端和环境交互的两质量块模型，结合第四章的全身控制器中的质心任务的力需求，使用降维观测器对足底的 z 方向的位置进行观测。将足底接触状态估计和本体位置姿态估计相融合改善了状态估计中对地形的估计效果，减少了因为规划导致的落地提前触地情况的出现。

第4章 基于全身控制的质心轨迹跟踪及抗扰

4.1 引言

本文第2章对于双足机器人行走摆动腿落地的动力学模型进行了分析，提出了输出动态反馈控制质心动态的方法，并且证明了足端接触动态的内部稳定性，本章将着重分析质心动态控制器的设计，在机器人行走的不同阶段根据二次抗扰动指标设计最优控制率。在给定质心控制率后，将期望的质心加速度作为双足机器人全身控制器的任务之一，在式2-26中关于 $\ddot{q}, \tau, \mathcal{P}_{sole}$ 所示的解空间内，使用关于任务误差的二次项作为指标进行优化求解。最终在 Choreonoid 软件中的机器人仿真平台对动力学优化算法进行验证，讨论并分析包含接触模型的全身控制算法在改善落地冲击方面的表现。

4.2 质心最优跟踪抗扰控制器设计

本文在分析实际机器人落地冲击力的控制问题时，首先将足端受到的冲击力和质心受到的冲击力分开讨论。第2章的理论分析和实验结果说明，足端和地面碰撞接触产生的力可以分为带有初速的足端和地面的接触力（阻尼一般较大，并且之和足底和地面的材质有关）和本体控制器对足端施加的反作用力（和质心的初速以及控制器参数相关）；而质心受到的冲击力则完全和质心控制率有关。因此除了调整足端的结构性刚度阻尼参数实现对部分冲击能量的吸收之外，最重要的是设计合理的质心控制器参数，在保证质心多余能量被迅速消耗（避免二次弹起）、尽快恢复稳定的同时，减小质心受到的加速度和力的冲击。

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{+\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (4-1)$$

将双足机器人落地时的初速度作为扰动，本节将提出一种描述抗扰性能的二次指标，并基于该指标设计最优跟踪抗扰控制器。由于2.7中将机器人的外部动态和内部动态通过动态反馈补偿分开，并且已经将质心跟踪误差的动态线性化为了式2-38所示的线性方程。因此本节的抗扰指标和最优控制器也将基于状态量 $x = [y_e, \dot{y}_e]^T$ 和系统输入 $u = \ddot{y} = \ddot{x}_b$ 设计。而该问题已经转化为典型的线性定常系统下二次最优控制（LQR）问题，由于该系统是可控的，期望的稳定状态 $x \rightarrow 0$ ，进一

步将问题描述为无限时间 LQR 问题。将包含对误差二次型以及对质心加速度二次型的积分作为指标，如式4-1。

由于线性系统控制器设计为： $u = -Kx = -[k_p, k_d]x$ ，对于给定的权重矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $R \in \mathbf{R}$ ，最优控制率如式4-2。其中非负定对称矩阵 P 是 riccati 代数方程^[114] 的解（式4-4）。最优的代价函数如式4-4，是关于矩阵 P 关于状态量初值 $x(t_0)$ 的二次型。

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t) \quad (4-2)$$

$$J^*(x(t_0), t_0, +\infty) = x^T(t_0)Px(t_0) \quad (4-3)$$

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4-4)$$

考虑到所求解的问题较为简单，可以解析的求解式4-4，考虑到对称矩阵性质，设 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$ $R = r \in \mathbf{R}$ ，得到方程式4-5，由于 P 非负定的性质， P 的所有顺序主子式非负 ($p_{11} \geq 0, p_{11}p_{22} \geq p_{12}^2 \rightarrow p_{12} \geq 0, p_{22} \geq 0$)。解得 P 关于 Q, R 的表达式4-6，以及最优反馈率 $K = R^{-1}B^TP$ 的表达式4-7。

$$\begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} - rp_{11} \\ p_{12}p_{22} - rp_{11} & p_{22}^2 - 2rp_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rq_{11} & rq_{12} \\ rq_{12} & rq_{22} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} p_{12} &= \sqrt{rq_{11}} \\ p_{22} &= \sqrt{rq_{22} + 2rp_{12}} \\ p_{11} &= p_{12}p_{22}/r - q_{12} \end{aligned} \quad (4-6)$$

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{p_{12}}{r} = \sqrt{\frac{q_{11}}{r}} \\ k_d &= \frac{p_{22}}{r} = \sqrt{\frac{q_{22}}{r} + \frac{2p_{12}}{r}} \\ r^2 k_d^2 &= p_{22}^2 = rq_{22} + 2r^2 k_p \end{aligned} \quad (4-7)$$

质心的最优抗扰控制中，参数 Q, R 的相对大小会影响代价函数中对能量消耗以及对轨迹误差收敛速度的权重，而且 Q 不可能取零矩阵（此时反馈系数为 0，导致系统发散），在该系统中 q_{12} 对反馈系数无贡献，因而不妨设 $R = r = 1$, $Q = diag(q_{11}, q_{22})$ 。 Q 的对角元越大，代表越看重控制的品质，而不关心机器人受到的冲击力（输入能量）；反之则会使得质心的冲击力更小。图4.1可视化了最优反馈率 K 中的阻尼比倒数 $\frac{1}{\zeta} = \frac{2\sqrt{k_p}}{k_d}$ 和 Q 的对角元素之间的关系，蓝色区域代表阻尼比倒数小于 1（阻尼过大），也即实际为过阻尼情况，红色区域为阻尼比倒数大于 1（阻尼过小），此时控制系统呈欠阻尼振荡状态。

从式4-1和式4-7也能分析出， Q 矩阵对角元素恰恰对应了位置误差和速度的误差的代价权重，显然当 q_{11} 相对更大时，更看重位置的误差，也即高刚度、低阻尼的特性，体现为红色区域；而 q_{22} 更大的蓝色区域则意味着对速度的误差更为看重。最终在选择控制率时，本文选择处于临界阻尼附近，也即图4.1中黄绿色区域的 Q 矩阵参数，在该区域一致的阻尼比下， Q 对应的权重越大则意味着更大的输入代价和更快的收敛速度，等价于产生更高增益的反馈控制率。

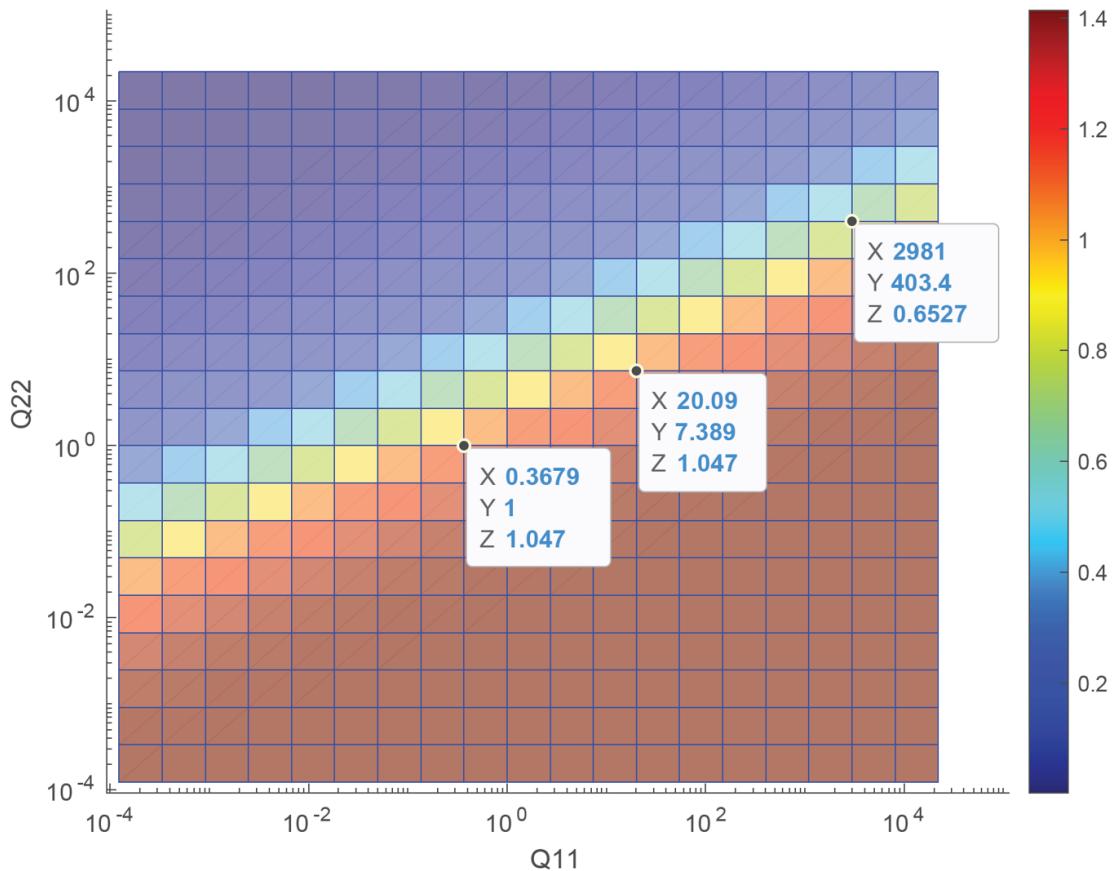


图 4.1 最优反馈率阻尼比倒数 $\frac{2\sqrt{k_p}}{k_d}$ 相对 $Q(1,1) - Q(2,2)$ 分布图

通过图4.1中黄红交界处的数据点进行曲线拟合，得到在临界阻尼情况下的对角矩阵 Q 近似满足式4-8。代入式4-7中，此时的阻尼比如式4-9，显然当 $r = 1$ 且 Q 满足式4-8时，阻尼比恒定为 1。因而在实际参数选择上，可以选取满足式4-8的矩阵 Q 固定阻尼比，同时设定 r 来调节阻尼比的具体大小。

$$q_{11} = 0.25q_{22}^2 \quad (4-8)$$

$$\zeta(r, q_{22}) = \frac{k_d}{2\sqrt{k_p}} = \frac{\sqrt{\frac{q_{22}}{r} + \frac{q_{22}}{\sqrt{r}}}}{2\sqrt{\frac{q_{22}}{2\sqrt{r}}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{r}} + 1}{2}} \quad (4-9)$$

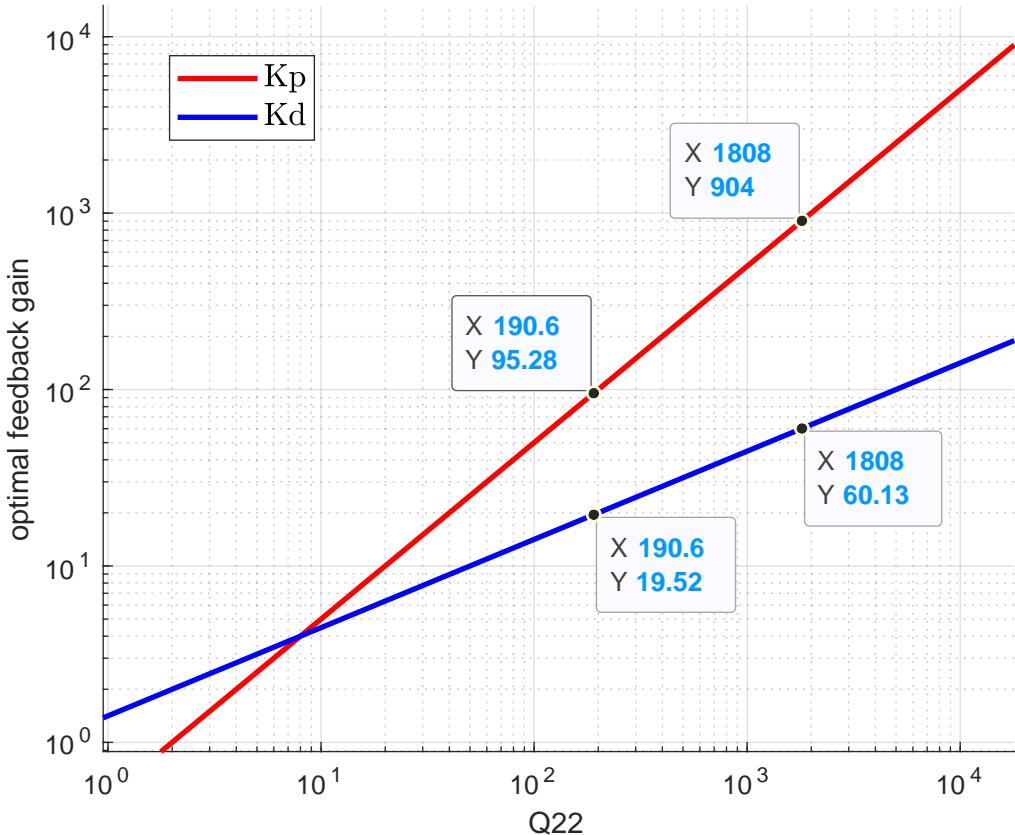


图 4.2 满足阻尼比 $\zeta = 1$ 的参数集合

图4.2中，满足阻尼比 $\zeta = 1$ 的反馈增益的对数和 q_{22} 的对数成线性关系（由式4-7亦可证），也即当固定 $r = 1, 4q_{11} = q_{22}^2$ 时，可以通过调节 q_{22} 来在质心位置追踪和减小冲击力之间做权衡。为了减少摆动腿落地带来的冲击，同时满足质心和足端的轨迹跟踪，我们将使用变阻抗系数的方式对从落体抗扰到质心恢复这一

过程进行过渡。当落地之后的一小段时间内，质心的速度较大时，我们采用较小的 q_{22} 来减少输入冲击力的突变，并且令 Q 在落地调整期内逐渐过渡到正常的保持位置轨迹跟踪的参数上来。图4.3中在落地调整期，通过 Q 的线性插值，将控制率从表2.5中组 4 过渡到组 1 的参数上，并且始终保持控制器为临界阻尼状态。

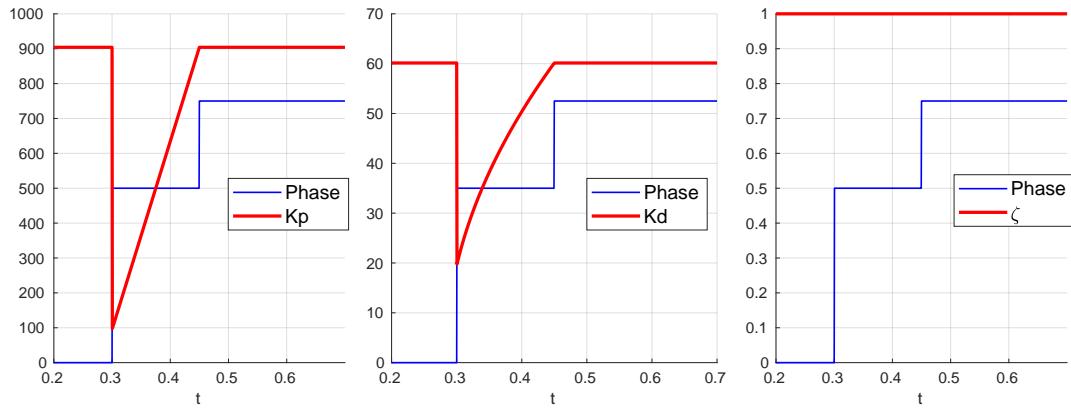


图 4.3 落地控制参数过渡轨迹 (Phase: 空中、落地调整、落地支撑)

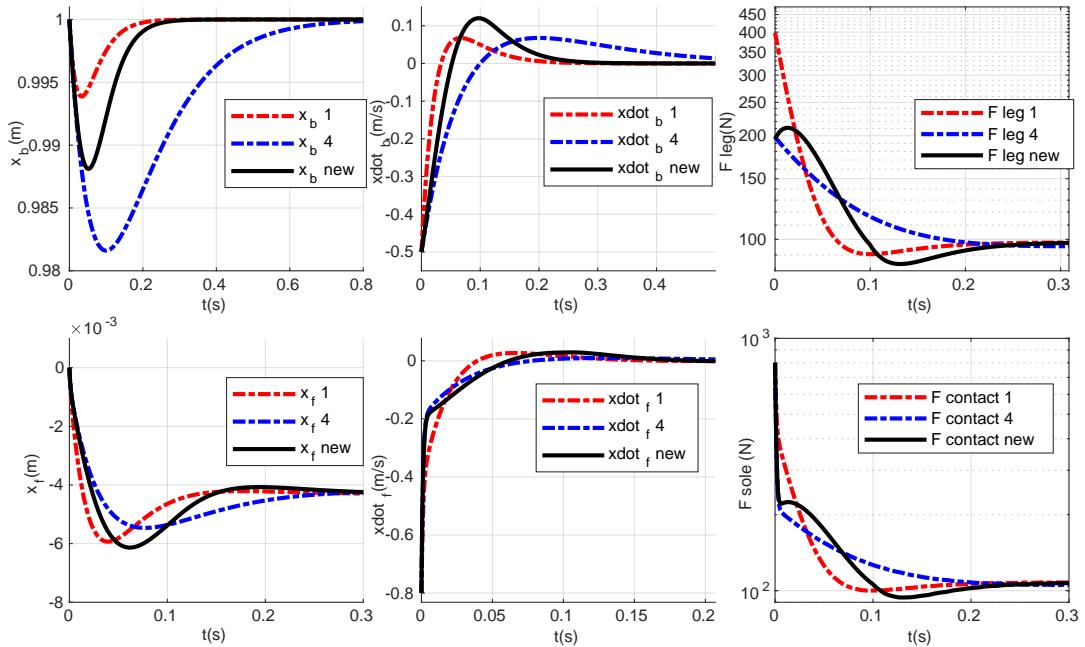


图 4.4 落地控制参数过渡实验结果 (对照图2.11)

如图4.4，过渡时间设置为检测到落地起的 0.1s 内，对比发现变阻抗过渡方案相比红色虚线落地瞬间的力冲击明显减小，同时在质心的控制品质上也较低阻抗控制器（蓝色虚线）效果好。

4.3 包含质心任务的全动力学优化控制

4.3.1 质心动力学

对于两质量模型的研究和分析有助于理解落地冲击力的来源以及对于质心的控制器设计方法。然而对于双足机器人来说，并没有直接作用于质心的输入和输出量，本节将对质心动力学以及带质心任务约束的全身控制方法做具体探讨。

$$p_G = \frac{\sum m_i p_i}{\sum m_i} \quad (4-10)$$

质心是机器人系统中一个特殊的物理量，代表着全部刚体的质量分布中心，式4-10中 p_i 代表第 i 个连杆的质心在参考系中的位置， m_i 则是该连杆的质量。根据虚功原理，作用在一个系统的外力之和与质心的加速度有关，而对于足式机器人的行走问题，机器人系统受到作用在质心上的重力以及地面对质心的作用力而产生运动，而当地面的反作用力离开支撑多边形时，机器人此时会绕着多边形边缘翻转，进入难以控制的欠驱动状态。因此，分析机器人质心的运动和地面反力之间的关系是非常有必要的。

基于质心的特殊性，Hyon^[115] 和 Ott^[116] 将机器人浮动基的广义坐标定义为质心的位置和基座的姿态，通过坐标变换将动力学方程中 $M(q)$ 矩阵对角化为质心动力学部分和带接触的动力学约束部分（式4-11， $q \in SE(3) \times \mathbf{R}^n, \tau \in \mathbf{R}^n$ ），解耦之后即可单独求解质心加速度和地面反力之间的关系，但缺点在于忽略了动力学约束部分对关节力矩的影响，因而只能用于准静态的平衡和慢速行走。

$$\begin{bmatrix} m_G I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_C \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_G g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S^T \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ J_c^T(q) \end{bmatrix} F_c \quad (4-11)$$

更常用的方法仍然是建立如式2-14的动力学方程，将质心替代浮动基座的位置作为一个特殊的末端进行控制。容易发现质心速度和总质量的乘积也就是机器人系统整体的动量之和。因此质心处线动量可以替代质心速度，作为控制质心轨迹的输入，而机器人的姿态则可以用系统整体的角动量进行控制^[86]。根据质心处线动量的表达式，式4-12给出质心速度关于广义坐标的雅克比矩阵 $J_G(q)$ 。

$$\dot{p}_G = \frac{\sum m_i J_i(q)}{m_G} \dot{q} = J_G(q) \dot{q} \quad (4-12)$$

质心处的总动量 h (centroidal momentum) 包含了机器人系统总线动量和总角动量, 不仅可以控制质心的位置, 还能通过角动量的控制增强机器人的平衡性能。由于质心总动量的导数 (4-13) 直接等于系统受到外界作用在质心处的合力, 因此式4-14是对式4-11中的质心加速度和外力之间联系的一种扩展, 这种将复杂的动力学单独剥离出总动量和外力间等式的方法也被称为质心动力学 (Centroidal Dynamics)。orin 等人给出了从关节速度投影到质心总动量的雅克比矩阵 A_G 以及偏置矩阵 $\dot{A}_G \dot{q}$ 的高效计算方法^[117]。

$$h = A_G \dot{q} \quad (4-13)$$

$$\dot{h} = A_G \ddot{q} + \dot{A}_G \dot{q} = \sum A d_{G T_i} \mathcal{F}_i \quad (4-14)$$

4.3.2 双足机器人质心轨迹规划

质心动力学不仅应用于双足机器人原地的平衡控制, 也能适用于将质心作为规划目标的大部分简单模型方法 (线性倒立摆^[102,118]、弹簧倒立摆^[58]等)。

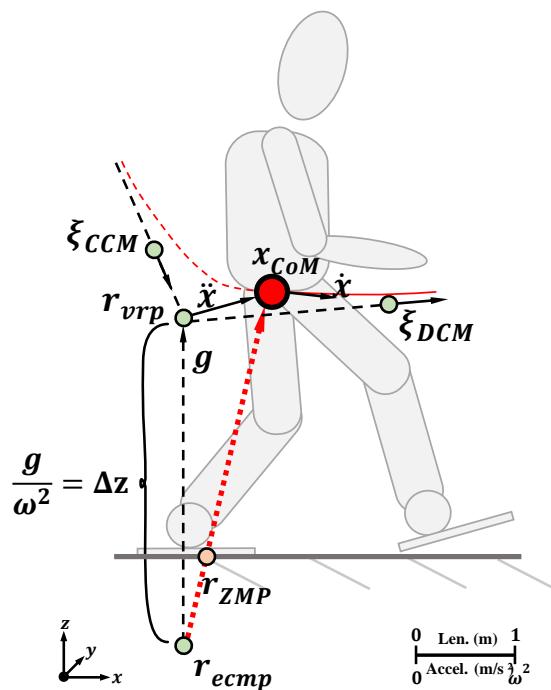


图 4.5 一种双足机器人质心规划算法^[102]

图4.5中, 质心受到重力和地面反力的作用, 而ZMP点实际上就是地面反力和足底的交点, 而当质心受到的合力产生的加速度与图中 r_{vvp} 点到质心 x_{CoM} 距离比例固定时(满足约束式4-15), 总能找到固定不动的点 r_{ecmp} , 使得地面反力经过该点指向质心。当 r_{ecmp} 点离地面足够近时, 即可使得按照式4-16产生的质心的运动符合ZMP平衡准则。

$$\ddot{x} = \omega^2(x - r_{vvp}) \quad (4-15)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} r_{vvp} \quad (4-16)$$

无论是机器人原地平衡站立还是行走控制, 轨迹规划器的目的都是产生一条质心轨迹, 当对应的质心加速度轨迹使得式4-14在接触力约束范围内始终有解, 才能继续讨论当实际质心偏离轨迹时的控制问题, 否则规划产生的轨迹是无法跟踪的。譬如机器人原地竖直站立时, 质心加速度为0, 足底需要提供质心受到的重力, 而该力显然能够通过支撑平面提供。

4.3.3 仅含等式约束的任务空间投影控制方法

在完成质心轨迹的规划之后, 设计控制器输出质心的加速度实现对质心位置和速度的跟踪。而机器人系统实际的输入定义在关节空间下的广义坐标 q , 也即质心任务空间的加速度需要投影到关节空间实现。

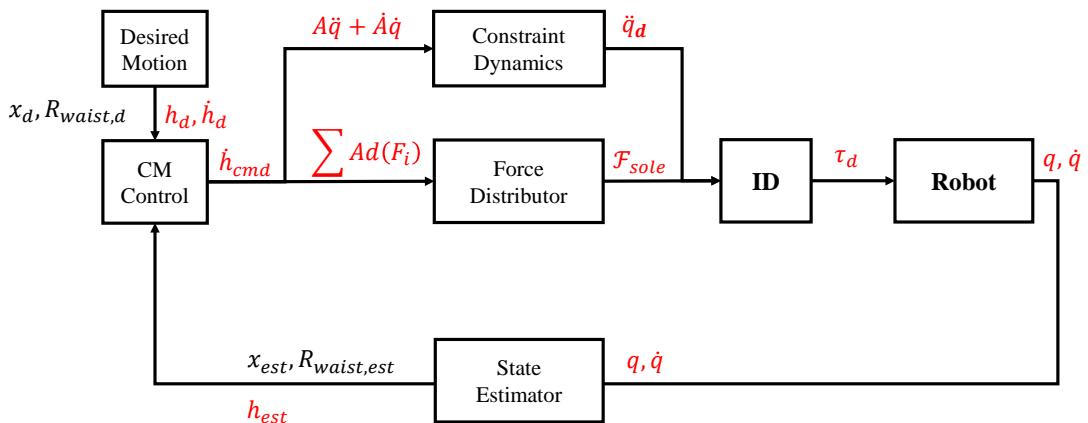


图 4.6 双足机器人原地双足站立控制框图

以图4.5中所示的双足机器人 walker 原地双脚站立平衡控制系统为例。首先需要分析关节空间满足基础约束后剩余的可控维数，以及质心速度和加速度是否能完全投影回到可控的子空间内。

足底和地面的接触约束 $\mathbf{J}_{sole} \in \mathbf{R}^{k \times (n+6)}$, $k = 12, n = 12$, $rank(\mathbf{J}_{sole}) = 12$ 。显然广义坐标下，接触约束零空间的维数是 6，并且 $rank(\mathbf{N}_{sole}^T \mathbf{S}^T) = rank(\mathbf{N}_{sole}^T) = 6 < n$, $\dot{\mathbf{q}}$ 空间下剩余可控自由度为 6，且存在 6 维的可控的内力。

由于足底的内力对原地平衡影响不大，双足的支持力相对质心控制器产生的 $\dot{\mathbf{h}}$ 是冗余的，而质心控制器产生的 $\dot{\mathbf{h}}$ 可能找不到满足 ZMP 条件的足底力，此时需要对 $\dot{\mathbf{h}}$ 做合理的限制得到 $\dot{\mathbf{h}}_{cmd}$ ，继而通过最小二乘即可实现力分配（图4.6中的 Force Distributor 模块）。而控制量 $\dot{\mathbf{h}}_{cmd} \in \mathbf{R}^6$ ，且和其他接触约束联立不降秩，由此对于任意的 $\dot{\mathbf{h}}_{cmd}$ 和给定的足底约束下，式4-17均能找到对应的关节加速度 $\ddot{\mathbf{q}}$ 。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_G \\ \mathbf{J}_{left} \\ \mathbf{J}_{right} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{h}}_{cmd} - \dot{\mathbf{A}}_G \dot{\mathbf{q}} \\ 0 - \dot{\mathbf{J}}_{left} \dot{\mathbf{q}} \\ 0 - \dot{\mathbf{J}}_{right} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

在得到满足控制器输出 $\dot{\mathbf{h}}_{cmd}$ 的关节角加速度和足底支撑力后，通过逆系统动力学方法得到所需要的关节前馈力矩，进而将系统反馈线性化为了一个假象输入为 $\dot{\mathbf{h}}_{cmd}$ 的线性系统，而使用如式4-18所示的质心位置和系统角动量的反馈控制器即可保证质心的稳定控制，并且能够兼容第4.2节中对于质心最优跟踪抗扰控制器参数的选取方法。

$$\dot{\mathbf{h}}_{cmd} = \dot{\mathbf{h}}_d + \mathbf{K}_p f_e(T_d, T_{act}) + \mathbf{K}_d (\mathbf{h}_d - \mathbf{h}_{est}) \quad (4-18)$$

4.3.4 含有不等式约束的任务空间优化控制方法

此外基于投影方法的任务空间控制方法需要满足投影之后的关节加速度在可行范围内，同时经过逆动态系统得到的前馈力矩同样在范围内。而这在实际中并不能完全保证。因此图4.6的控制器容易出现底层关节控制量饱和的情况，进而破坏逆动态系统控制器的反馈线性化条件，使得上层的质心控制器失效。基于优化的任务空间控制（WBC）能较好的解决不等式约束和等式约束同时存在的情况。

考虑性能指标可以设计为关于追踪误差以及控制量二范数的凸函数，任务空间和关节空间之间的等式约束以及力矩和关节加速度限幅的线性不等式约束都较为简单。而在限制 $\dot{\mathbf{h}}$ 满足摩擦约束时，需要每个力矢量满足式4-19 的锥约束，由

于二阶锥规划问题（SOCP）求解速度较慢，通过将摩擦锥缩小为棱锥可以得到近似的线性约束，进而将原问题转化为能快速求解的线性约束下二次凸优化问题（LQP）。对于纯力矢量，满足棱锥约束的力向量可以表示为图4.7中的基向量构成的仿射锥内（式4-20）。而ZMP约束等价于支撑多边形顶点受力均大于0，同时满足ZMP和摩擦锥约束的足端外力 \mathcal{F}_{sole} 可用 ρ 坐标系表示（式4-21），且约束简化为 $\rho \geq 0$ 。在 ρ 坐标系下，式4-14中足底作用在质心上的力和动量导数之间的等式约束可以表示为式4-22。

$$\|f_i - (n_{\perp} \cdot f_i)n_{\perp}\|_2 \leq \mu n_{\perp} \cdot f_i \quad (4-19)$$

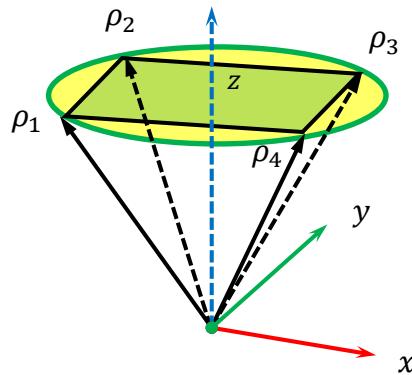


图 4.7 摩擦锥近似为线性锥约束

$$f_i = \sum_{j=0}^4 \rho_{i,j} f_{e,j} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{e,1}, f_{e,2}, f_{e,3}, f_{e,4} \end{bmatrix}}_{F_i} \rho_i \quad (4-20)$$

$$\rho_{i,j} \geq 0$$

$$\|f_{ei} - (n_{\perp} \cdot f_{ei})n_{\perp}\|_2 = \mu n_{\perp} \cdot f_{ei}, \text{rank}(F_i) = 3$$

$$\mathcal{F}_{sole} = \sum_{i=1}^m \begin{bmatrix} [{}^{sole}r_i] \times \\ I \end{bmatrix} f_i = \sum_{i=1}^m P_i F_i \rho_i = {}^{sole}Q \rho, \quad {}^{sole}Q \in \mathbf{R}^{6 \times 4m} \quad (4-21)$$

$$\dot{h}_{cmd} = {}^GQ\rho + \mathcal{F}_G \quad (4-22)$$

将质心动量导数的跟踪设为效用函数(式4-23)中的一部分,同时增加对优化变量 \ddot{q}, ρ 的惩罚项,避免出现奇异。

$$\mathcal{J}(\ddot{q}, \rho) = W_h \|\dot{h}_{opt} - \dot{h}_{ref}\|_2^2 + W_\rho \|\rho\|_2^2 + W_{\ddot{q}} \|\ddot{q}\|_2^2 \quad (4-23)$$

对于该优化指标,除了等式约束4-17,式4-22,以及不等式约束式4-20外,还有关节加速度范围和关节力矩范围,其中关节力矩尽管没有作为优化变量,但是其和关节加速度以及足底力之间存在等式约束式2-14,因此关节力矩限幅可以表示为式4-24中关于 \ddot{q}, ρ 的不等式约束。

$$\tau = \mathbf{S} (\mathbf{M} \ddot{q} + \mathbf{C} + \mathbf{G} - \mathbf{J}_{sole}^T Q_i \rho) \in [\tau_{min}, \tau_{max}] \quad (4-24)$$

对于给定的二次优化指标以及线性约束,由于不等式约束的存在,只能通过迭代寻找数值解,而开源QP求解器提供了稳定快速的求解算法(本文选用qpOASES^[119]),只需要将原优化问题和约束整理成如式4-25的标准QP问题,便可以得到原问题的最优解。

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^T H x + g^T x \\ \text{s.t.} \quad & l b_{Ax} \leq Ax \leq u b_{Ax} \\ & l b_x \leq x \leq u b_x \end{aligned} \quad (4-25)$$

以双足支撑相为例,式4-25中的优化变量及其范围(式4-26),效用函数中二次项和一次项系数矩阵(式4-27),以及关于 x 的线性约束方程系数 A 以及边界(式4-28)均能实时计算得到,

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \rho \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(18+32) \times 1} \\ l b_x &= \begin{bmatrix} -\ddot{q}_{max} \\ -\infty \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{50 \times 1} \quad u b_x = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{max} \\ \infty \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{50 \times 1} \end{aligned} \quad (4-26)$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 2(A_G^T W_h A_G + W_{\ddot{q}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2W_\rho \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{50 \times 50} \\ g &= \begin{bmatrix} 2(A_G^T W_h (\dot{A}_G \dot{q} - \dot{h}_{ref})) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{50 \times 1} \end{aligned} \quad (4-27)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_D &= \begin{bmatrix} A_G & -{}^{sole}\mathbf{Q}_l & -{}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ J_{sole,l} & 0 & 0 \\ J_{sole,r} & 0 & 0 \\ 0 & I_{16 \times 16} & 0 \\ 0 & 0 & I_{16 \times 16} \\ M & -J_{sole,l}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_l & -J_{sole,r}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_r \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{68 \times 50} \\
 lb_{A_D x} &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0}_{32 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} - \tau_{max} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{68 \times 1}, ub_{A_D x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \infty_{32 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} + \tau_{max} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{68 \times 1}
 \end{aligned} \tag{4-28}$$

而在单足支撑相，优化变量和代价函数均保持不变，但关于 x 的约束方程有所改变：因为摆动腿并没有摩擦锥和 ZMP 的约束 $\rightarrow \rho_{swing} \in \mathbf{R}$ ，同时摆动腿轨迹跟踪控制器会给出此时足端的期望力 $\rightarrow {}^{sole}\mathbf{Q}_{swing}\rho_{swing} = \mathcal{F}_{swing}$ 。而摆动腿的加速度为规划的加速度值 $\rightarrow \mathbf{J}_{sole,swing}\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{X}}_{swing} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,swing}\dot{\mathbf{q}}$ 。故在单腿支撑相以及摆动腿刚刚触地期间，均采用式4-29和式4-30所示的线性约束方程。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_L &= \begin{bmatrix} A_G & -{}^{sole}\mathbf{Q}_l & -{}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ 0 & 0 & {}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ J_{sole,l} & 0 & 0 \\ J_{sole,r} & 0 & 0 \\ 0 & I_{16 \times 16} & 0 \\ M & -J_{sole,l}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_l & -J_{sole,r}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_r \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{58 \times 50} \\
 lb_{A_L x} &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_r \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}}_r - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0}_{16 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} - \tau_{max} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{58 \times 1}, ub_{A_L x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_r \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}}_r - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \infty_{16 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} + \tau_{max} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{58 \times 1}
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_R &= \left[\begin{array}{ccc} A_G & -{}^{sole}\mathbf{Q}_l & -{}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ 0 & {}^{sole}\mathbf{Q}_l & 0 \\ J_{sole,l} & 0 & 0 \\ J_{sole,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{16 \times 16} \\ M & -J_{sole,l}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_l & -J_{sole,r}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_r \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{58 \times 50} \\
 lb_{A_R x} &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_l \\ \ddot{\mathbf{X}}_l - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0}_{16 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} - \tau_{max} \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{58 \times 1}, ub_{A_R x} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_l \\ \ddot{\mathbf{X}}_l - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ \infty_{16 \times 1} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} + \tau_{max} \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{58 \times 1}
 \end{aligned} \tag{4-30}$$

而在机器人腾空相 (FP) 以及腾空后落地一小段时间内, 机器人只受到重力的作用, 因而对足底力不再有摩擦锥的限制, 而只有足底位置和力之间的阻抗控制率起作用。此时的线性约束方程如式4-31。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_F &= \left[\begin{array}{ccc} A_G & -{}^{sole}\mathbf{Q}_l & -{}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ 0 & {}^{sole}\mathbf{Q}_l & 0 \\ 0 & 0 & {}^{sole}\mathbf{Q}_r \\ J_{sole,l} & 0 & 0 \\ J_{sole,r} & 0 & 0 \\ M & -J_{sole,l}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_l & -J_{sole,r}^T {}^{sole}\mathbf{Q}_r \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{48 \times 50} \\
 lb_{A_F x} &= \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_l \\ \mathcal{F}_r \\ \ddot{\mathbf{X}}_l - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}}_r - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} - \tau_{max} \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{48 \times 1}, ub_{A_F x} = \left[\begin{array}{c} \mathcal{F}_G - \dot{\mathbf{A}}v \\ \mathcal{F}_l \\ \mathcal{F}_r \\ \ddot{\mathbf{X}}_l - \dot{\mathbf{J}}_{sole,l} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{X}}_r - \dot{\mathbf{J}}_{sole,r} \dot{\mathbf{q}} \\ -\mathbf{C} - \mathbf{G} + \tau_{max} \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{48 \times 1}
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

双足机器人在运动过程中，为了跟踪期望的质心轨迹，由于足端和地面接触情况在不断变化，需要选择合适的约束矩阵进行优化控制，如图4.8所示，本文引入了状态机对质心优化控制器约束进行切换。在7个不同的状态中，摆动腿在空中以及落地后调整期间仅在控制器参数上有所不同（图4.3所示的参数过渡），可以使用同一约束形式进行优化，图中使用相同颜色表示（DSP: A_D , LSP、RTD: A_L , RSP、LTD: A_R , Flight, TD: A_F ）。

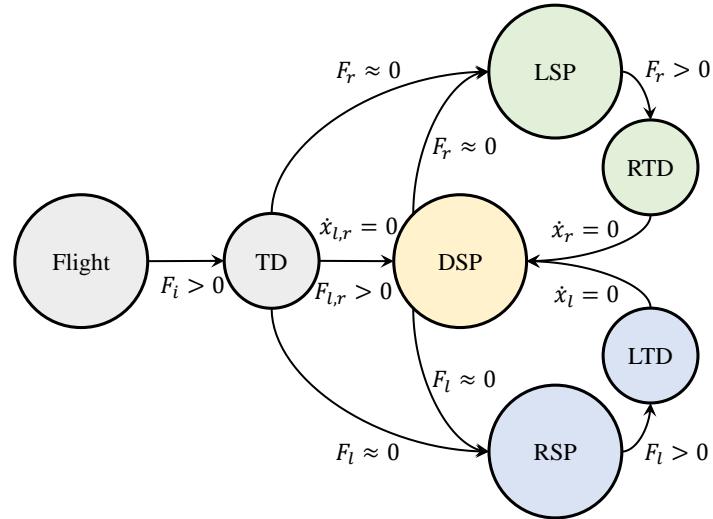


图 4.8 行走控制器状态机切换

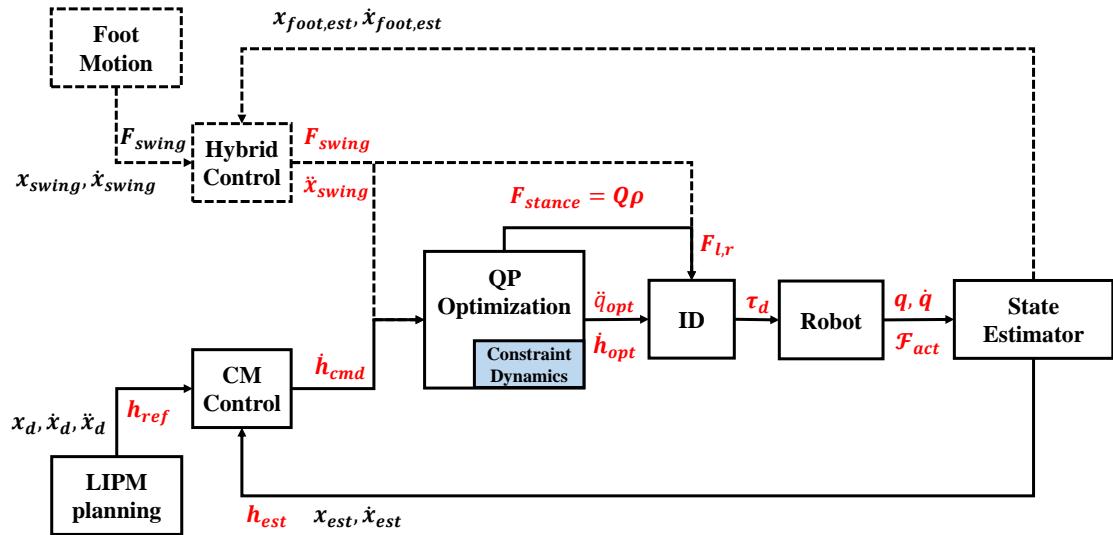


图 4.9 基于不等式约束优化的机器人行走控制框架

本文机器人行走抗扰控制的核心控制框架如图4.10所示，质心控制器（CM Control）和摆动腿轨迹控制器（Hybrid Control）的控制输出经过二次优化后得到符合动力学和接触约束的关节力矩输入 τ_d 。

4.4 仿真实验和数据分析

4.4.1 仿真环境介绍

本文采用开源的 Chorenoid^[101] 作为动力学仿真软件（如图4.10所示）。一方面，该软件具备高效的动力学引擎，完全能够满足仿真的精度和速度要求；另一方面，软件使用 C++ 编写，通过动态链接库实现动力学引擎和控制器算法联合仿真，因而用户能够方便的继承父类控制器并派生出自定义的控制类，重写相应的控制接口函数；另外，其对第三方 C++ 库的联合编译支持也较为友好，例如本文实验中编写的 WALKER_DYN_MODEL 类链接调用了 RBDL^[120] 作为多刚体动力学计算库，而 walkerQPsolver 类则调用了 qpOASES^[119] 作为二次优化求解库。

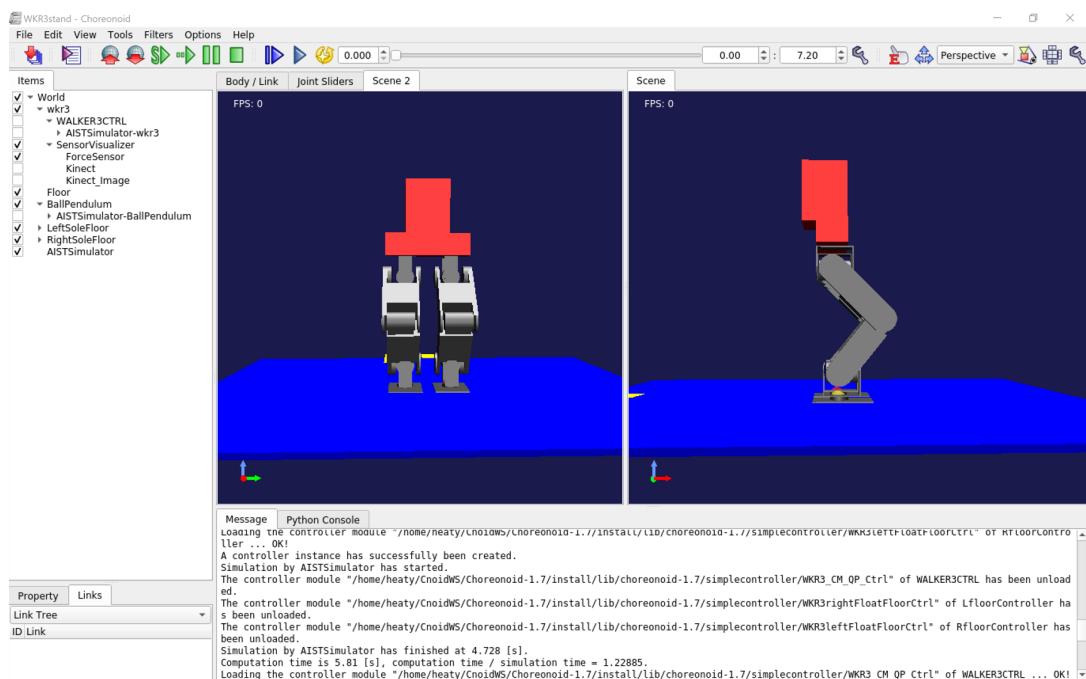


图 4.10 Chorenoid 仿真界面

4.4.2 仿真实验

本文将在仿真中对机器人施加以不同的扰动，测试全动力学优化的控制算法的稳定性和抗扰能力，按实验目的分为两类：原地平衡实验以及落地控制实验。

4.4.2.1 原地平衡抗扰实验

在机器人原地抗扰控制实验中，本文在仿真中通过一个重物摆从高处落向机器人模拟冲击扰动（如图4.10），并且对比了不采用全身控制的关节位置控制方案以及本节讨论的全身动力学优化的角动量控制方法。

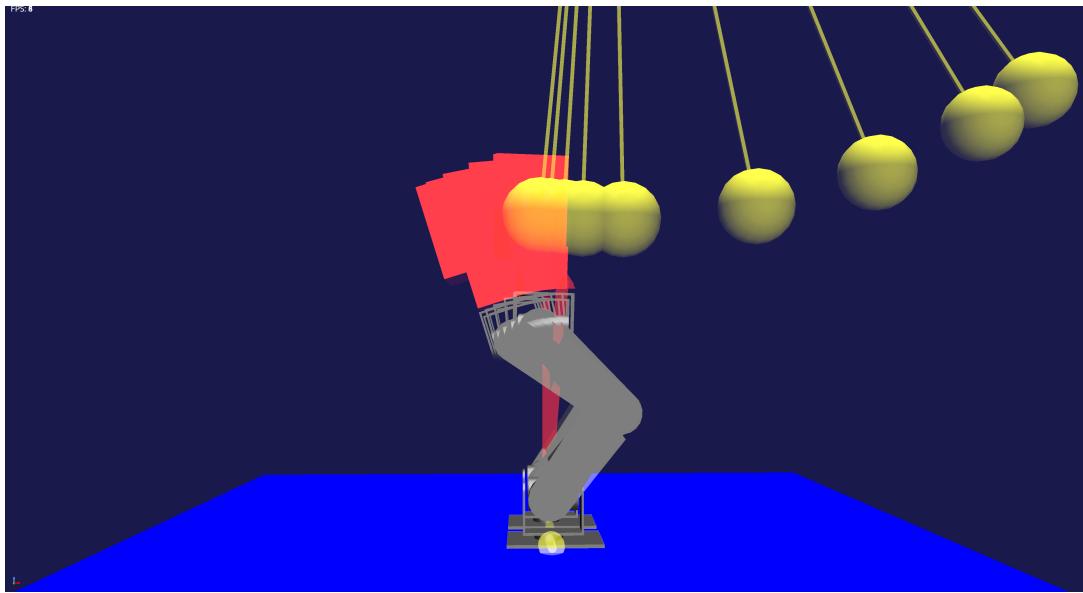


图 4.11 机器人模拟外力冲击扰动

图4.12为位置控制机器人上身受到冲击后的可视化效果图。摆球的质量是 $5kg$, 摆长 $2m$, 初始摆角为 $1.3rad$ 。假设球和机器人之间是非弹性碰撞, 则通过式4-32可得重物砸向机器人的瞬时冲量扰动为 $19.7Ns$ 。

$$\Delta P = m_{ball} v_{ball} = m_{ball} \sqrt{2gl(1 - \cos(\theta_0))} = 19.7 N \cdot s \quad (4-32)$$

在冲击第 $0s$ 时, 由于关节均为位置控制, 机器人整体可以看做一个刚体, 冲击带来的能量只能作用在足底绕边缘旋转的欠驱动自由度上; 数据中也能发现此时机器人开始向后倾倒, 质心的速度(红色箭头方向)约为 $0.4m/s$ (机器人动量变化和冲击扰动的冲量均近似等于 $20Ns$), 由于在倾倒过程中, 机器人仍然维持原地站立的关节角度, 此时质心相对足端边缘距离不变, 等价于一个无驱动的倒立摆。在冲击第 $0.4s$ 时, 质心高度达到最高点, 但仍然有 $-0.2m/s$ 的速度, 于是机器人开始加速倾倒。在第 $0.8s$ 时, 机器人上身倾角已经大于 $0.5 rad$, 机器人失控。从该实验的结果看, 足式机器人会因为接触状态不同而导致的动力学属性变化。在足端和地面完全贴合并满足 ZMP 条件的情况下, 可以对关节采用位置控制, 但当受到较大冲击扰动时, 位置控制关节控制增益较大, 无法吸收冲击能量, 导致足底接触约束被打破, 速度突变体现在欠驱动关节上, 引起机器人倾倒。

图4.13中机器人受到相同的摆球冲击扰动, 并采用全动力学优化的质心动量控制器。在第 $0s$ 时, 质心速度发生突变, 但方向和摆球撞击方向一致, 说明足底的接触约束并没有被打破, 观察右上角的质心 x 方向速度相位图发现此时质心速度已经达到最大(吸收动量和角动量之和大于 $20Ns$), 并开始减速。而当 $0.4s$ 时,

质心线速度和角速度均已经减速到0。而在1.2s时已经逐渐恢复初值的位置和姿态。该实验一方面体现了全身优化的关节力控制器，能够在满足接触约束的情况下，尽可能的吸收外界的扰动和冲击。也即控制器首先满足的是接触约束的保持，其次才是各个任务空间的控制任务。从实验现象上看，由于足底ZMP约束的存在，QP优化控制器使得x方向和pitch方向的等效阻抗均较小（对应图4.3中的低阻抗吸收冲击阶段），从而能够抵御更大的瞬时冲击。

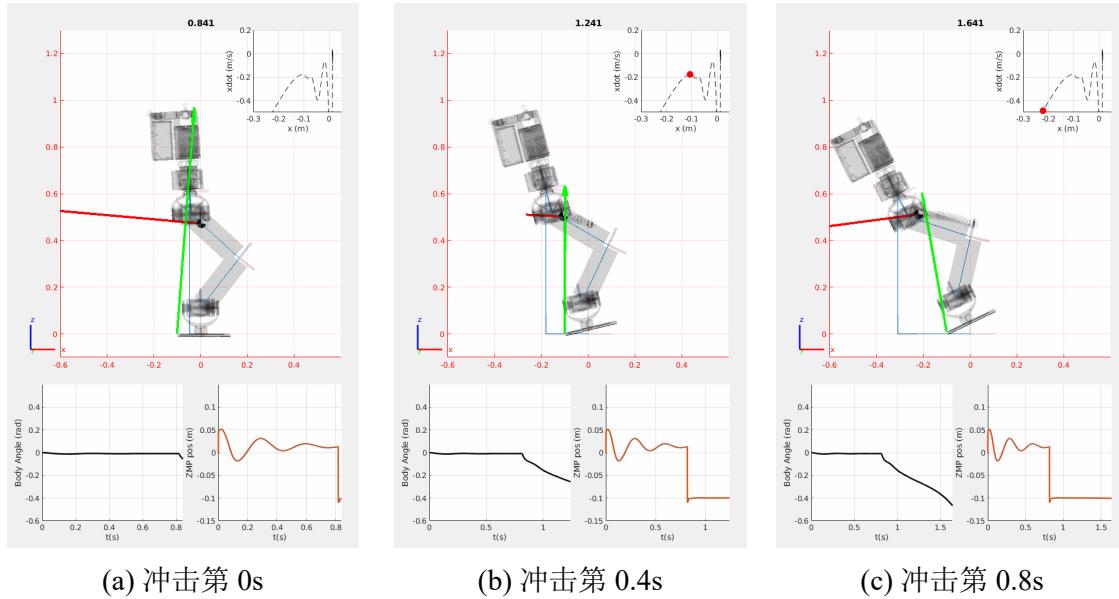


图 4.12 位置控制双足站立受到撞击扰动

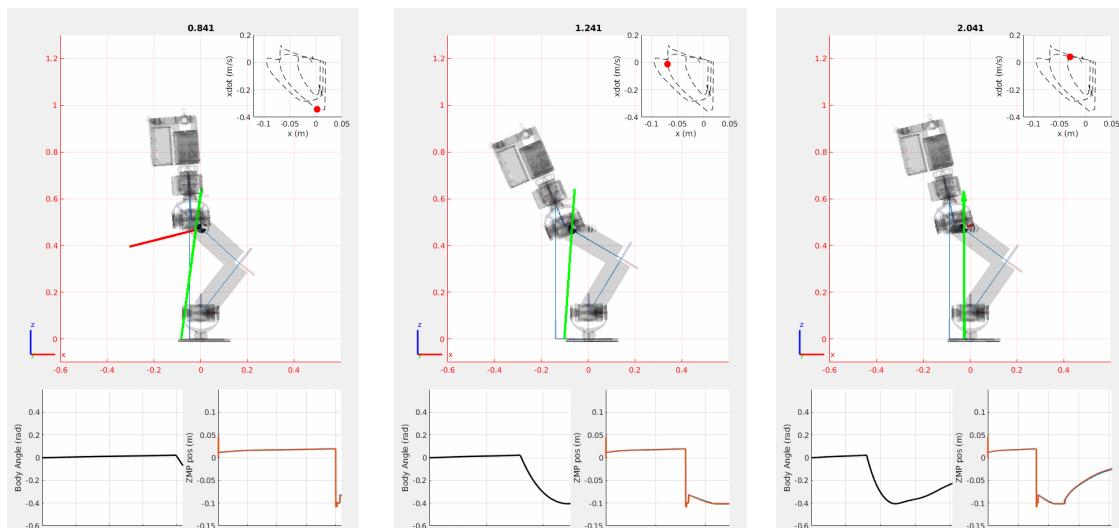


图 4.13 力矩控制双足站立受到撞击扰动

4.4.3 落地控制实验

在落地控制实验中，本文在仿真中将机器人从固定高度摔落（足端离地 0.1m），测试不同地面参数和质心控制器参数对摆动腿落地冲击的影响。图4.14为表4.1中第1组参数对应的结果。机器人在检测到落地时，切换足端相对质心的刚度系数，并逐渐过渡到质心控制器的刚度阻尼系数。

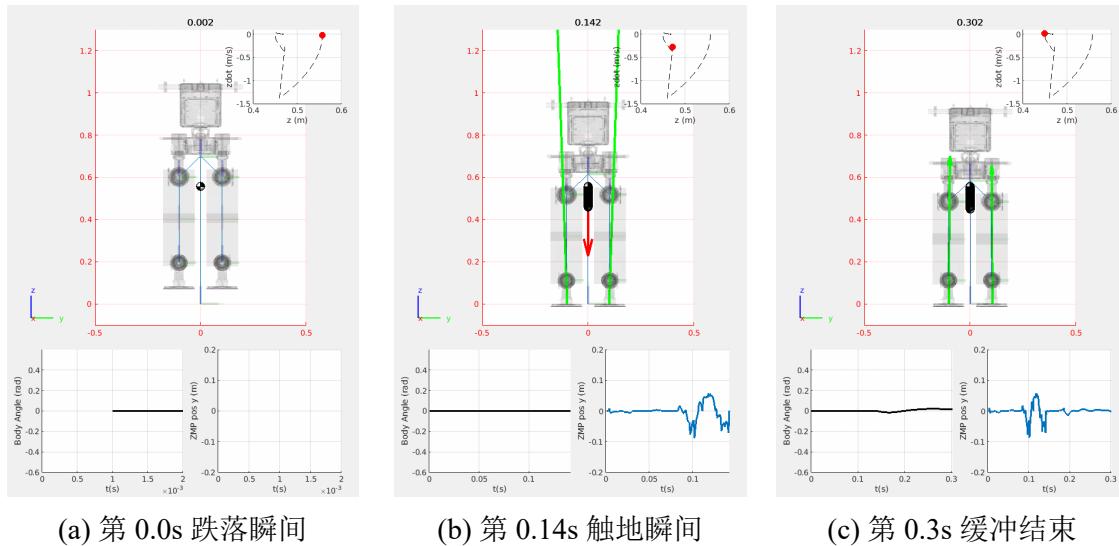


图 4.14 力控双足跌落冲击测试

表 4.1 对比实验参数

实验组别	接触模型参数	控制器刚度阻尼	$\Delta h (m)$
1	$K = 1e5, B = 5e3$	$K_p = 1e4, K_d = 1e3$	0.1
2	$K = 1e5, B = 5e3$	$K_p = 1e3, K_d = 1e2$	0.1
3	$K = 1e4, B = 5e2$	$K_p = 1e4, K_d = 1e3$	0.1
4	$K = 1e4, B = 5e2$	$K_p = 1e3, K_d = 1e2$	0.1

接触参数：对比组 1 和组 3 以及组 2 和组 4，图4.15和图4.16中可以明显对比出足底在不同接触情况下，落地瞬间质心受到的加速度扰动以及足底力冲击有明显的区别。地面材质越硬，对应足端和地面接触的冲击力就越大。

控制器参数：对比组 1 和组 2 以及组 3 和组 4 的实验结果，图4.15和图4.16中不是很明显，但仍然能够看到，低阻抗控制器（蓝色曲线）对应的加速度扰动和地面反力相较于高阻抗高跟踪精度控制器对应的扰动较小。图4.17能直接说明这一点，由控制器计算得到的此时对质心的作用力明显只跟控制器参数有关而与地面接触参数无关。

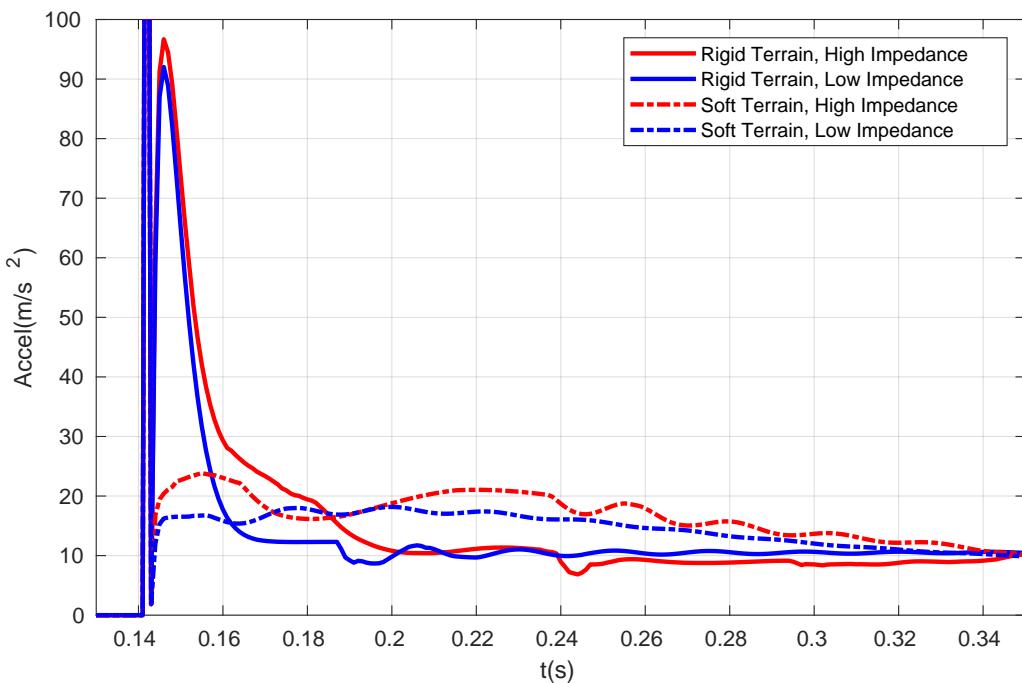


图 4.15 不同参数下机器人落地腰部加速度对比

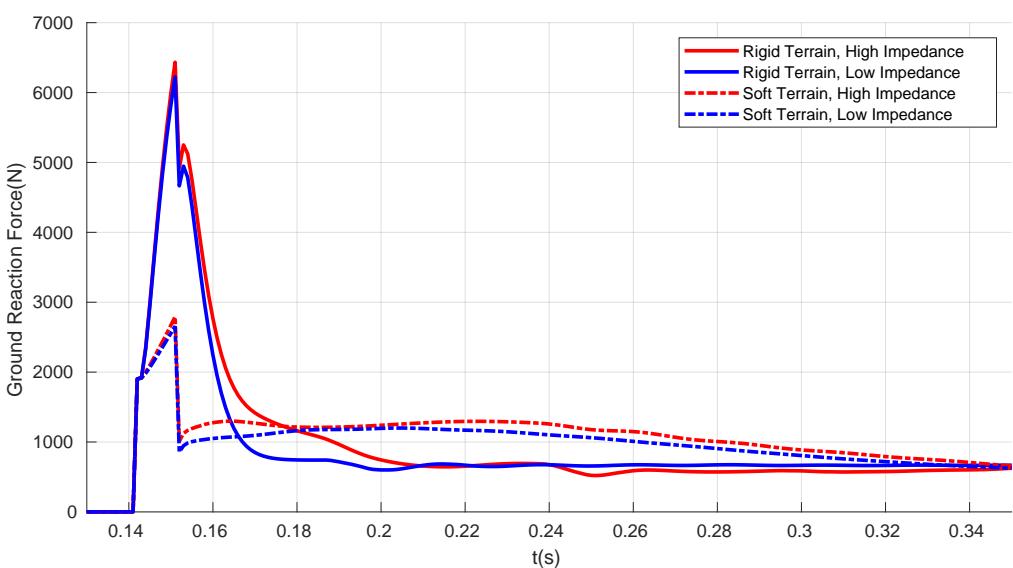


图 4.16 不同参数下机器人落地足底冲击力对比

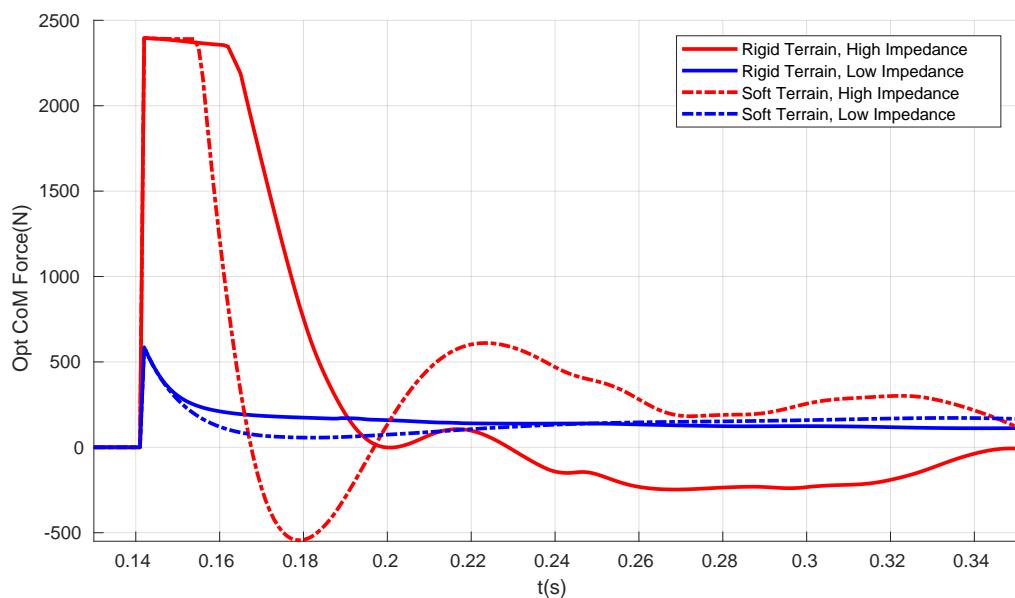


图 4.17 不同参数下二次优化控制器质心作用力

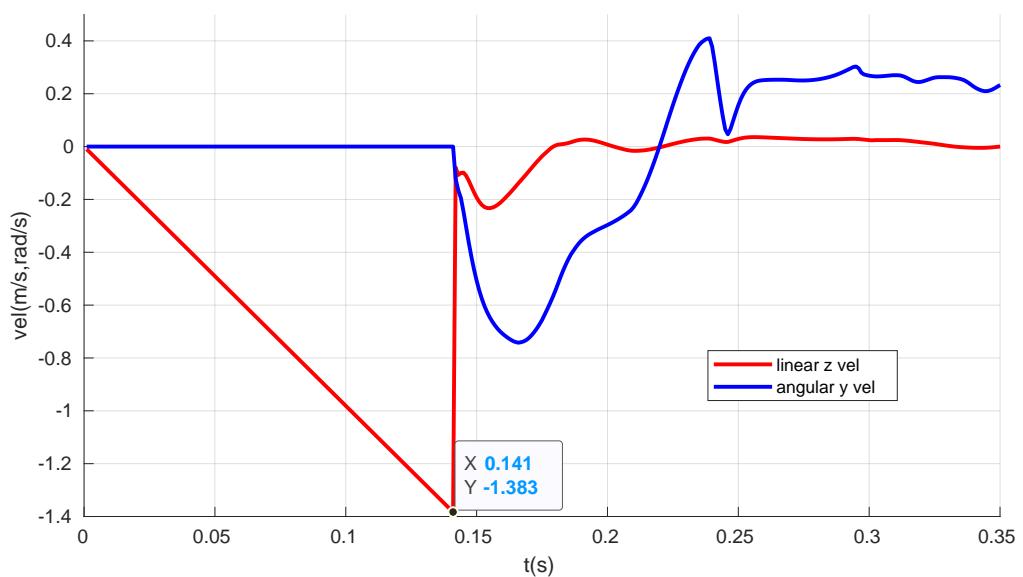


图 4.18 组 1 参数下的落地前后，机器人质心 z 轴线速度和 y 轴角速度曲线

总的来说，落地控制实验数据和原理仿真还是有一定的差距，主要有以下几个原因：

1. 原理仿真中假设机器人为两质量块，也即质心和足端两部分，而在仿真中地面也存在对应的质量，并会影响刚接触瞬间时的足底冲击力和质心加速度（例如图4.16中 0.14s 左右 2000N 大小的力冲击在接触刚度和阻尼变化时始终恒定）。从另一个角度来看，也是本文中对于接触模型实现的不够理想有关，当地面质量设置为很小时，仿真引擎较容易计算溢出。
2. 图4.18中在 0.14s 碰撞后，机器人质心 z 轴的速度已经发生了较大的变化，这和第2章中质心速度和地面接触无关，只和质心控制器参数相关的假设不符。原理仿真中假设机器人只在 z 轴运动，而实际仿真中机器人落地冲击瞬间，除了对质心产生冲击力外，还会产生角动量的变化，因而会有更多的能量在足端和地面接触时被消耗。

4.5 本章小结

本章推导了两质量块模型的最优跟踪抗扰控制器的设计方法和参数意义，并结合第2中外部动态控制器影响落地冲击力的结论，设计了落地初期较低阻抗的抑制冲击参数和落地后调整阶段高阻抗的跟踪参数，并通过解析求取 Riccati 方程得到恒定阻尼比下的参数过渡方法。阻抗参数在跟踪和抗扰之间过渡使得质心控制器能够更快地从落地冲击扰动中恢复，并且力扰动更小。

本章还推导了在不同接触状态下的全身动力学优化的质心控制器，相比于仅含有等式约束的任务空间投影方法，优化方法能够更好的解决状态变量存在限幅的情况。对于机器人行走中接触情况变化以及落地冲击的控制，本章设计了对应的状态机用于跟踪质心轨迹以及使用过渡参数抑制摆动腿落地时的扰动。

在实验部分，本章通过原地质心抗扰控制，验证了质心跟踪控制器在保持接触约束前提下的抗扰能力。而在落地控制实验中，实现了第3章中的状态估计模块，并部分验证了第2章中关于地面参数和控制器参数对于减小冲击力的结论。

第5章 总结和展望

5.1 总结

第1章中对足式机器人历史、当今前沿热点以及具体的技术路线进行了回顾和总结。从中我们可以发现，近些年来对于力控机器人的研究越来越多，而笔者认为力控和位置控制并没有严格的好与坏，广义上甚至并没有严格的力控制和位置控制的区分，研究者需要关注的是对于特定的任务应该采用哪条技术路线。本文所提到的位置控制指的是狭义上每个关节独立控制位置轨迹的机器人系统，它的缺点在于关节之间缺乏协调，无法在外力扰动下继续保持接触约束。而常见的位置控制机器人都会在足底安装六维力传感器，通过导纳控制来弥补柔顺性能不足的缺点，但是，六维力传感器不仅价格昂贵，而且容易损坏。但关节力控制下的机器人能够直接将关节力投影到任务空间，实现高动态性能的力交互动作，这是传统的位置控制机器人所无法达到的。因此力控方案较为适合高动态性能，需要和人与环境进行交互的场合，而这些都是足式机器人需要具备的技术。

本文基于仿真中力控制机器人系统，研究并分析了足式机器人落地冲击力的来源和抑制方法。第2章通过将机器人简化为两质量块模型，从理论推导和仿真验证两个角度得出了足底冲击力源自接触模型以及上身控制器两个部分，其中接触模型参数和足底材料以及地面材质均有关系，为了减小这部分冲击，通常采用柔性材料包裹足底，起到减震缓冲作用。第3章对状态估计问题进行了讨论，尤其是针对足端接触环境较为柔软时的质心状态估计问题，通过接触模型以及交互力的测量，可以估计此时地形的动态变化过程，减小了质心的控制误差。在摆动腿落地过程中，更大的力扰动往往来自于上身控制器。比如在接触瞬间，由于位置和速度误差导致的过大的控制力往往会适得其反，因此本文在第4章中对接触之后的调整阶段的参数过渡方法进行了讨论，使得质心控制器在摆动腿落地阶段能够兼顾跟踪和抗扰两项性能指标。为了能在全模型的机器人上实现对质心的跟踪和控制，第4还讨论了基于全动力学的二次优化和控制方法，将任务空间控制需求和关节空间的输入构成等式约束，将保持接触约束的力条件等价为待优化足底力的边界条件，通过最小化质心加速度的跟踪误差，实现对机器人模型中质心的实时控制。对于摆动腿切换以及落地控制期间的约束变化，也采用了状态机对不等式结构和控制参数进行切换和过渡，最终通过逆动态系统控制的方法得到关节力矩输入，实现了双足机器人在仿真中的落地冲击扰动下的质心跟踪和冲击力优化的目标。

5.2 展望

随着力控技术的不断发展，我们有理由期待未来足式机器人能够真正走进我们的生活，成为我们家庭的好帮手。而本文也仅仅是在前人对全身控制研究基础上的一点微小的工作，探索接触模型对冲击力的影响具有一定的研究价值，不仅体现在减震抗扰这方面，在现在应用较为广泛的四足机器人上，比较突出的一个问题是行走过程中的噪声，而声音的来源则是接触碰撞时的振动。通过研究合适的接触材料，从理论上是能减小甚至消除行走时的声音的，当足式机器人能够像猫一样在暗夜中悄无声息地前行，那么其应用范围势必得到进一步的提升。本文对全身控制器也做了相当一部分的探讨，基于此实现的质心主动控制器虽然能实现在约束条件下对期望轨迹的跟踪，但是对任务进行主动的控制往往是低效率的，尤其是针对足式机器人在周期性行走的过程，依靠主动关节实现任务空间的加减速，相当大一部分能量以内能的形式被耗散。希望未来优化和控制技术进一步发展，能通过在驱动器或者足端加入被动的储能元件，提高足式机器人行走时的能量效率。

针对本文的研究工作，也存在一定的局限和不足。比如在足端接触模型上存在诸多的假设和近似，通过将非线性模型近似为二阶模型对第3章中的状态进行估计，在实际实验中会引入较大的估计误差。而对于传感器的噪声，碍于时间和精力的因素，本文也没有更多细节上的讨论。

最后较为遗憾的一点，虽然本文在仿真中使用的是全力控模型，但在实际工程实践上，仍然能够调整位置伺服关节的前馈电流以及三环的参数，实现一定程度上的伪力控。但由于 COVID-19 疫情的关系，在最后一个学期仅能通过仿真来研究机器人的控制问题，这让本文的工作显得稍稍有些逊色。期待实验室的师弟们能够继续在力控和全身控制的道路上向前探索，为机器人技术的发展做出属于清华人的贡献！

参考文献

- [1] Kato I. Development of wabot 1. *Biomechanism*, 1973, 2:173-214.
- [2] Hirai K, Hirose M, Haikawa Y, et al. The development of honda humanoid robot // Proceedings. 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 98CH36146): volume 2. IEEE, 1998: 1321-1326.
- [3] Boston Dynamics. Atlas [EB/OL]. 2019[2020-05-01]. <https://www.bostondynamics.com/atlas>.
- [4] Fankhauser P, Bjelonic M, Bellicoso C D, et al. Robust rough-terrain locomotion with a quadrupedal robot // 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2018: 1-8.
- [5] Whitman E, Fay G C. Terrain aware step planning system. Google Patents, 2020.
- [6] Hogan N. Impedance control: An approach to manipulation: Part i—theory. 1985.
- [7] Vukobratović M. Legged locomotion robots and anthropomorphic mechanisms. Mihailo Pupin Institute, 1975.
- [8] Ogura Y, Aikawa H, Shimomura K, et al. Development of a new humanoid robot wabian-2 // Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. IEEE, 2006: 76-81.
- [9] Hirukawa H, Kanehiro F, Kaneko K, et al. Humanoid robotics platforms developed in hrp. *Robotics and Autonomous Systems*, 2004, 48(4):165-175.
- [10] Isozumi T, Akachi K, Hirata M, et al. Development of humanoid robot “hrp-2” . *Journal of the Robotics Society of Japan*, 2004, 22(8):1004-1012.
- [11] Kaneko K, Kaminaga H, Sakaguchi T, et al. Humanoid robot hrp-5p: An electrically actuated humanoid robot with high-power and wide-range joints. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2019, 4(2):1431-1438.
- [12] Urata J, Nakanishi Y, Okada K, et al. Design of high torque and high speed leg module for high power humanoid // 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2010: 4497-4502.
- [13] Ito Y, Nozawa S, Urata J, et al. Development and verification of life-size humanoid with high-output actuation system // 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2014: 3433-3438.
- [14] Kojima K, Karasawa T, Kozuki T, et al. Development of life-sized high-power humanoid robot jaxon for real-world use // 2015 IEEE-RAS 15th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids). IEEE, 2015: 838-843.
- [15] Kuroki Y, Fujita M, Ishida T, et al. A small biped entertainment robot exploring attractive applications // 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 03CH37422): volume 1. IEEE, 2003: 471-476.
- [16] Takagi S. Toyota partner robots. *Journal of the Robotics Society of Japan*, 2006, 24(2):208-210.
- [17] Shigemi S, Kawaguchi Y, Yoshiike T, et al. Development of new asimo. *Honda R and D Technical Review*, 2006, 18(1):38.

- [18] Takenaka T, Matsumoto T, Yoshiike T. Real time motion generation and control for biped robot-1 st report: Walking gait pattern generation // 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2009: 1084-1091.
- [19] Takenaka T, Matsumoto T, Yoshiike T, et al. Real time motion generation and control for biped robot-2 nd report: Running gait pattern generation // 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2009: 1092-1099.
- [20] Ackerman E. Toyota gets back into humanoid robots with new t-hr3. IEEE Spectrum, 2017.
- [21] Yoshiike T, Kuroda M, Ujino R, et al. Development of experimental legged robot for inspection and disaster response in plants // 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2017: 4869-4876.
- [22] Kawasaki. Kaleido [EB/OL]. 2020[2020-05-01]. <https://robotics.kawasaki.com/ja1/xyz/en/2003-02/index.htm>.
- [23] Park I W, Kim J Y, Lee J, et al. Mechanical design of humanoid robot platform khr-3 (kaist humanoid robot 3: Hubo) // 5th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, 2005. IEEE, 2005: 321-326.
- [24] Lim J, Lee I, Shim I, et al. Robot system of drc-hubo+ and control strategy of team kaist in darpa robotics challenge finals. Journal of Field Robotics, 2017, 34(4):802-829.
- [25] Huang Q, Yu Z, Chen X, et al. Historical developments of bhr humanoid robots. Advances in Historical Studies, 2019, 8(1):79-90.
- [26] Yi J, Zhu Q, Xiong R, et al. Walking algorithm of humanoid robot on uneven terrain with terrain estimation. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 13(1):35.
- [27] UBTECH. Ubtech walker: New! humanoid robot features [EB/OL]. (2019-11-17)[2020-05-01]. <https://www.youtube.com/watch?v=ypsnpNujnAw>.
- [28] Vukobratovic M, Juricic D. Contribution to the synthesis of biped gait. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1969(1):1-6.
- [29] Wisse M. Essentials of dynamic walking; analysis and design of two-legged robots. 2004.
- [30] Chevallereau C, Abba G, Aoustin Y, et al. Rabbit: A testbed for advanced control theory. 2003.
- [31] Lohmeier S, Loffler K, Gienger M, et al. Computer system and control of biped "johnnie" // IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004: volume 4. IEEE, 2004: 4222-4227.
- [32] Buschmann T, Lohmeier S, Ulbrich H. Humanoid robot lola: Design and walking control. Journal of physiology-Paris, 2009, 103(3-5):141-148.
- [33] Englsberger J, Werner A, Ott C, et al. Overview of the torque-controlled humanoid robot toro // 2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. IEEE, 2014: 916-923.
- [34] Mesesan G, Englsberger J, Garofalo G, et al. Dynamic walking on compliant and uneven terrain using dcm and passivity-based whole-body control // IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. 2019.
- [35] Metta G, Natale L, Nori F, et al. The icub humanoid robot: An open-systems platform for research in cognitive development. Neural Networks, 2010, 23(8-9):1125-1134.
- [36] Tsagarakis N G, Morfey S, Cerdà G M, et al. Compliant humanoid coman: Optimal joint stiffness tuning for modal frequency control // 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2013: 673-678.

-
- [37] Gouaillier D, Hugel V, Blazevic P, et al. Mechatronic design of nao humanoid // 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2009: 769-774.
 - [38] Stasse O, Flayols T, Budhiraja R, et al. Talos: A new humanoid research platform targeted for industrial applications // 2017 IEEE-RAS 17th International Conference on Humanoid Robotics (Humanoids). IEEE, 2017: 689-695.
 - [39] An C H, Atkeson C G, Hollerbach J M. Model-based control of a robot manipulator. MIT press, 1988.
 - [40] Raibert M H. Legged robots that balance. MIT press, 1986.
 - [41] Robinson D W, Pratt J E, Paluska D J, et al. Series elastic actuator development for a biomimetic walking robot // 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (Cat. No. 99TH8399). IEEE, 1999: 561-568.
 - [42] Zheng Y F, Shen J. Gait synthesis for the sd-2 biped robot to climb sloping surface. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(1):86-96.
 - [43] Atkeson C G, Hale J G, Pollick F, et al. Using humanoid robots to study human behavior. IEEE Intelligent Systems and their applications, 2000, 15(4):46-56.
 - [44] Cheng G, Hyon S H, Morimoto J, et al. Cb: A humanoid research platform for exploring neuroscience. Advanced Robotics, 2007, 21(10):1097-1114.
 - [45] Herzog A, Righetti L, Grumminger F, et al. Balancing experiments on a torque-controlled humanoid with hierarchical inverse dynamics // 2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2014: 981-988.
 - [46] Stephens B J, Atkeson C G. Dynamic balance force control for compliant humanoid robots // 2010 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems. IEEE, 2010: 1248-1255.
 - [47] McGeer T, et al. Passive dynamic walking. I. J. Robotic Res., 1990, 9(2):62-82.
 - [48] Collins S, Ruina A, Tedrake R, et al. Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers. Science, 2005, 307(5712):1082-1085.
 - [49] Grizzle J W, Abba G, Plestan F. Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects. IEEE Transactions on automatic control, 2001, 46(1):51-64.
 - [50] Gong Y, Hartley R, Da X, et al. Feedback control of a cassie bipedal robot: Walking, standing, and riding a segway // 2019 American Control Conference (ACC). IEEE, 2019: 4559-4566.
 - [51] Hereid A, Cousineau E A, Hubicki C M, et al. 3d dynamic walking with underactuated humanoid robots: A direct collocation framework for optimizing hybrid zero dynamics // 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2016: 1447-1454.
 - [52] Raibert M, Blankespoor K, Nelson G, et al. Bigdog, the rough-terrain quadruped robot. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2):10822-10825.
 - [53] Nelson G, Saunders A, Neville N, et al. Petman: A humanoid robot for testing chemical protective clothing. Journal of the Robotics Society of Japan, 2012, 30(4):372-377.
 - [54] Hopkins M A, Griffin R J, Leonessa A, et al. Design of a compliant bipedal walking controller for the darpa robotics challenge // 2015 IEEE-RAS 15th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids). IEEE, 2015: 831-837.

- [55] Radford N A, Strawser P, Hambuchen K, et al. Valkyrie: Nasa's first bipedal humanoid robot. *Journal of Field Robotics*, 2015, 32(3):397-419.
- [56] Khatib O, Sentis L, Park J, et al. Whole-body dynamic behavior and control of human-like robots. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2004, 1(01):29-43.
- [57] Boston Dynamics. More parkour atlas [EB/OL]. (2019-09-24)[2020-05-01]. https://www.youtube.com/watch?v=_sBBaNYex3E.
- [58] Apgar T, Clary P, Green K, et al. Fast online trajectory optimization for the bipedal robot cassie. // *Robotics: Science and Systems*. 2018.
- [59] Kim D, Zhao Y, Thomas G, et al. Stabilizing series-elastic point-foot bipeds using whole-body operational space control. *IEEE Transactions on Robotics*, 2016, 32(6):1362-1379.
- [60] Agility Robotics. Agility robotics 2019 year in review [EB/OL]. (2019-12-31)[2020-05-01]. <https://www.youtube.com/watch?v=U-bkAecZvYw>.
- [61] Nori F, Traversaro S, Eljaik J, et al. icub whole-body control through force regulation on rigid non-coplanar contacts. *Frontiers in Robotics and AI*, 2015, 2:6.
- [62] Nigg B M, Cole G K, Brüggemann G P. Impact forces during heel-toe running. *Journal of applied biomechanics*, 1995, 11(4):407-432.
- [63] Minetti A E. Using leg muscles as shock absorbers: theoretical predictions and experimental results of drop landing performance. *Ergonomics*, 1998, 41(12):1771-1791.
- [64] Ker R, Bennett M, Bibby S, et al. The spring in the arch of the human foot. *Nature*, 1987, 325 (6100):147-149.
- [65] Yamaguchi J, Kinoshita N, Takanishi A, et al. Development of a dynamic biped walking system for humanoid-development of a biped walking robot adapting to the humans' living floor // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation: volume 1*. IEEE, 1996: 232-239.
- [66] Hashimoto K, Sugahara Y, Ohta A, et al. Realization of stable biped walking on public road with new biped foot system adaptable to uneven terrain // *The First IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics*, 2006. BioRob 2006. IEEE, 2006: 226-231.
- [67] Kanehira N, Kawasaki T, Ohta S, et al. Design and experiments of advanced leg module (hrp-2l) for humanoid robot (hrp-2) development // *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems: volume 3*. IEEE, 2002: 2455-2460.
- [68] Pratt G A, Williamson M M. Series elastic actuators // *Proceedings 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human Robot Interaction and Cooperative Robots: volume 1*. IEEE, 1995: 399-406.
- [69] Grandia R, Farshidian F, Ranftl R, et al. Feedback mpc for torque-controlled legged robots. *arXiv preprint arXiv:1905.06144*, 2019.
- [70] Laurenzi A, Kanoulas D, Hoffman E M, et al. Whole-body stabilization for visual-based box lifting with the coman+ robot // *2019 Third IEEE International Conference on Robotic Computing (IRC)*. IEEE, 2019: 445-446.
- [71] Salisbury J K. Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates // *1980 19th IEEE conference on decision and control including the symposium on adaptive processes*. IEEE, 1980: 95-100.

- [72] Kazerooni H, Waibel B, Kim S. On the stability of robot compliant motion control: Theory and experiments. 1990.
- [73] Mason M T. Compliance and force control for computer controlled manipulators. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1981, 11(6):418-432.
- [74] Raibert M H, Craig J J. Hybrid position/force control of manipulators. 1981.
- [75] Hutter M, Gehring C, Bloesch M, et al. Starleth: A compliant quadrupedal robot for fast, efficient, and versatile locomotion // Adaptive Mobile Robotics. World Scientific, 2012: 483-490.
- [76] Park J H. Impedance control for biped robot locomotion. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2001, 17(6):870-882.
- [77] Kim Y D, Lee B J, Ryu J H, et al. Landing force control for humanoid robot by time-domain passivity approach. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(6):1294-1301.
- [78] Joe H M, Oh J H. Balance recovery through model predictive control based on capture point dynamics for biped walking robot. Robotics and Autonomous Systems, 2018, 105:1-10.
- [79] Sygulla F, Wittmann R, Seiwald P, et al. Hybrid position/force control for biped robot stabilization with integrated center of mass dynamics // 2017 IEEE-RAS 17th International Conference on Humanoid Robotics (Humanoids). IEEE, 2017: 742-748.
- [80] Kajita S, Morisawa M, Miura K, et al. Biped walking stabilization based on linear inverted pendulum tracking // 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2010: 4489-4496.
- [81] 李长友. 液压驱动步行机器人变阻抗柔顺落足控制研究 [硕士学位论文]. 国防科技大学, 2017.
- [82] 柴汇. 液压驱动四足机器人柔顺及力控制方法的研究与实现 [博士学位论文]. 山东大学, 2016.
- [83] Li Q, Yu Z, Chen X, et al. Contact force/torque control based on viscoelastic model for stable bipedal walking on indefinite uneven terrain. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2019, 16(4):1627-1639.
- [84] Pratt J, Chew C M, Torres A, et al. Virtual model control: An intuitive approach for bipedal locomotion. The International Journal of Robotics Research, 2001, 20(2):129-143.
- [85] Strang G, Strang G, Strang G, et al. Introduction to linear algebra: volume 3. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1993.
- [86] Kajita S, Kanehiro F, Kaneko K, et al. Resolved momentum control: Humanoid motion planning based on the linear and angular momentum // Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003)(Cat. No. 03CH37453): volume 2. IEEE, 2003: 1644-1650.
- [87] Sentis L, Khatib O. Synthesis of whole-body behaviors through hierarchical control of behavioral primitives. International Journal of Humanoid Robotics, 2005, 2(04):505-518.
- [88] Gienger M, Toussaint M, Goerick C. Whole-body motion planning—building blocks for intelligent systems // Motion Planning for Humanoid Robots. Springer, 2010: 67-98.
- [89] Mansard N, Khatib O, Kheddar A. A unified approach to integrate unilateral constraints in the stack of tasks. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(3):670-685.

- [90] Moro F L, Gienger M, Goswami A, et al. An attractor-based whole-body motion control (wbmc) system for humanoid robots // 2013 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids). IEEE, 2013: 42-49.
- [91] Kanoun O, Lamiraux F, Wieber P B. Kinematic control of redundant manipulators: Generalizing the task-priority framework to inequality task. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, 27(4):785-792.
- [92] Escande A, Mansard N, Wieber P B. Hierarchical quadratic programming: Fast online humanoid-robot motion generation. *The International Journal of Robotics Research*, 2014, 33 (7):1006-1028.
- [93] Salini J, Barthélemy S, Bidaud P. Lqp controller design for generic whole body motion // Mobile Robotics: Solutions and Challenges. World Scientific, 2010: 1081-1090.
- [94] Stephens B. Push recovery control for force-controlled humanoid robots [D]. Carnegie Mellon University, The Robotics Institute, 2011.
- [95] Del Prete A, Romano F, Natale L, et al. Prioritized optimal control // 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2014: 2540-2545.
- [96] Dai H, Valenzuela A, Tedrake R. Whole-body motion planning with centroidal dynamics and full kinematics // 2014 IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. IEEE, 2014: 295-302.
- [97] Feng S, Whitman E, Xinjilefu X, et al. Optimization-based full body control for the darpa robotics challenge. *Journal of Field Robotics*, 2015, 32(2):293-312.
- [98] Koolen T, Bertrand S, Thomas G, et al. Design of a momentum-based control framework and application to the humanoid robot atlas. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2016, 13 (01):1650007.
- [99] Hopkins M A, Leonessa A, Lattimer B Y, et al. Optimization-based whole-body control of a series elastic humanoid robot. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2016, 13(01): 1550034.
- [100] De Lasas M, Mordatch I, Hertzmann A. Feature-based locomotion controllers. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2010, 29(4):1-10.
- [101] Nakaoka S. Choreonoid: Extensible virtual robot environment built on an integrated gui framework // 2012 IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII). IEEE, 2012: 79-85.
- [102] Wang H, Tian Z, Hu W, et al. Human-like zmp generator and walking stabilizer based on divergent component of motion // 2018 IEEE-RAS 18th International Conference on Humanoid Robots (Humanoids). IEEE, 2018: 1-9.
- [103] Brockett R W. Robotic manipulators and the product of exponentials formula // Mathematical theory of networks and systems. Springer, 1984: 120-129.
- [104] Featherstone R. Rigid body dynamics algorithms. Springer, 2014.
- [105] Silva F M, Machado J A T. Goal-oriented biped walking based on force interaction control // Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164): volume 4. IEEE, 2001: 4122-4127.
- [106] Peasgood M, Kubica E, McPhee J. Stabilization of a dynamic walking gait simulation. 2007.

- [107] Leishman R C, Macdonald J C, Beard R W, et al. Quadrotors and accelerometers: State estimation with an improved dynamic model. *IEEE Control Systems Magazine*, 2014, 34(1):28-41.
- [108] Henze B, Roa M A, Ott C. Passivity-based whole-body balancing for torque-controlled humanoid robots in multi-contact scenarios. *The International Journal of Robotics Research*, 2016, 35(12):1522-1543.
- [109] Luenberger D. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6):596-602.
- [110] Luenberger D. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(3):290-293.
- [111] Ackermann J. Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum [J/OL]. *Automatisierungstechnik*, 1972, 20(1-12):297 - 300. <https://www.degruyter.com/view/journals/auto/20/1-12/article-p297.xml>.
- [112] Advanced Navigation. Orientus [EB/OL]. 2020[2020-05-01]. <https://www.advancednavigation.com/product/orientus>.
- [113] Mahony R, Hamel T, Pflimlin J M. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group. *IEEE Transactions on automatic control*, 2008, 53(5):1203-1218.
- [114] Willems J. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6):621-634.
- [115] Hyon S H, Hale J G, Cheng G. Full-body compliant human–humanoid interaction: balancing in the presence of unknown external forces. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, 23(5):884-898.
- [116] Ott C, Roa M A, Hirzinger G. Posture and balance control for biped robots based on contact force optimization // 2011 11th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots. IEEE, 2011: 26-33.
- [117] Wensing P M, Orin D E. Improved computation of the humanoid centroidal dynamics and application for whole-body control. *International Journal of Humanoid Robotics*, 2016, 13(01): 1550039.
- [118] Kajita S, Kanehiro F, Kaneko K, et al. Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point // 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 03CH37422): volume 2. IEEE, 2003: 1620-1626.
- [119] Ferreau H J, Kirches C, Potschka A, et al. qpoases: A parametric active-set algorithm for quadratic programming. *Mathematical Programming Computation*, 2014, 6(4):327-363.
- [120] Felis M L. Rbdl: an efficient rigid-body dynamics library using recursive algorithms. *Autonomous Robots*, 2017, 41(2):495-511.

致 谢

我有幸在本科和硕士学习期间从事足式机器人的研究，在赵明国研究员带领下的清华大学机器人实验室和机器人火神队伍中锻炼提高自己的学术和工程能力。赵老师对待学术严谨认真的态度、对问题精辟独到的见解以及对未知坚持探索的勇气是实验室宝贵的财富，也是我需要穷极一生去领悟和学习的。

在深圳优必选科技有限公司北京分公司的合作研究期间，承蒙董浩、徐喆、郭宜劫、王家俊、王岳嵩、鞠笑竹等算法研究员的热心指导与帮助，加深了我对机器人学科的理解和认识。而机器人硬件相关的实验则幸有北研所工程师黑光军、李海雷、张伟宁等工程师相助才能顺利高效地进行。感谢深圳优必选总部的刘益彰、葛立刚、陈春玉、安昭辉等前辈在 walker 系列机器人上做出的杰出工作，让我对算法和工程结合有了更深刻的领悟。感谢腾讯 Robotics X 实验室给予的暑期实习机会，锻炼了我在攻克工程难题时的团队协作能力。

感谢帮助过我的实验室师兄邓卡、何家瑞、余永超、张学恒、田中元，他们是实验室项目的领路人也是我学习生活中解惑人。感谢师弟李沛阳、陈巍、黄松睿、蔡文汉、陆恺在组会探讨学术和工程问题时不吝分享自己独到的见解。感谢本科同学荣良子、龙腾、乔畅、董尔群、金晟、董泽华、邸研、段永杰、张子函、王晨辉等好兄弟，在我读研期间能够经常组织聚会，一起交流学习和生活上的问题。

感谢我的同门博士生，台湾同胞王启伦，他作为实验室大哥一样的存在，不仅科研刻苦努力，而且爱好广泛，尤其是体育锻炼和科研工作两不误的态度，需要我在日后的工作中不断的去实践。感谢我的同门兼室友张荣格陪伴我度过本科和硕士一共四年的美好时光，从共同参加 RoboCup 比赛，到参与 walker 仿人项目研发，乃至一起去南山滑雪，这些是我人生中最美好的回忆。

感谢我的家人在我求学期间的养育之恩，希望他们都能身体健康，永远幸福！

最后感谢我一生的伴侣胡梦茜，这六年来对我无微不至的关怀和坚定不移的支持让我有了继续向前冲的勇气和自信！

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： _____ 日 期： _____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

1995 年 08 月 22 日出生于浙江省宁海县。

2013 年 9 月考入清华大学自动化系自动化专业，2017 年 7 月本科毕业并获得工学学士学位。

2017 年 9 月免试进入清华大学自动化系攻读工学硕士学位至今。

发表的学术论文

- [1] Wang H, Tian Z, Hu W, Zhao M. Human-Like ZMP Generator and Walking Stabilizer Based on Divergent Component of Motion. International Conference on Humanoid Robots (Humanoids), 2018, 82-87. (EI 收录, 检索号:20191006589456.)
- [2] Wang H, Zhao M. A robust biped gait controller using step timing optimization with fixed footprint constraints. International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2017, 1787-1792. (EI 收录, 检索号:20182905570514.)