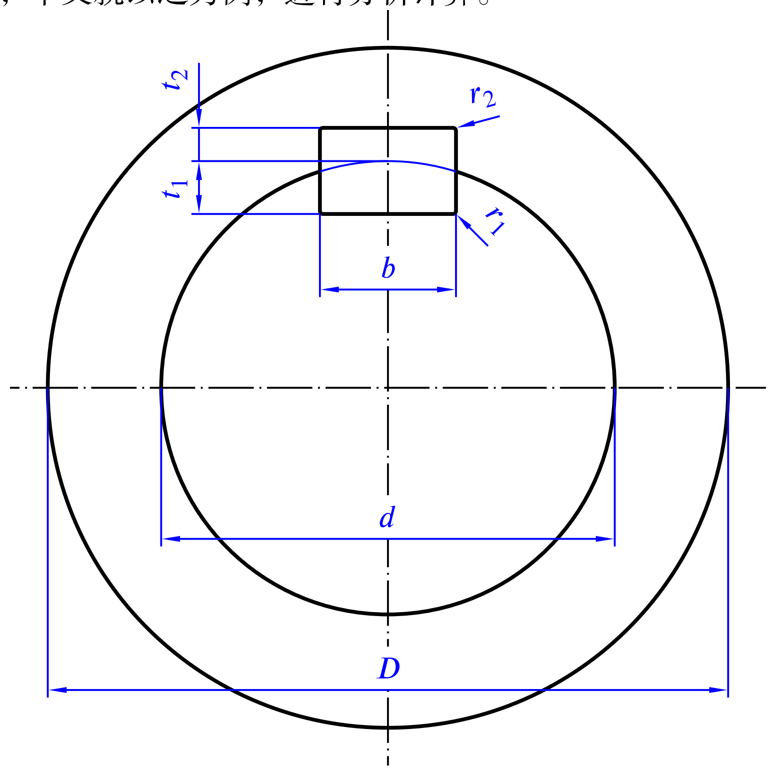
等扭转强度的轴毂平键联接

1 问题描述

在设计轴毂联接时，如何确定毂的壁厚似乎没有明确的方法。在没有其他信息的情况下，如果毂的强度不低于轴，至少毂不会是一个薄弱环节。本文就按此思路，从相对容易计算的扭转强度入手，确定强度与轴相等的毂的尺寸，为设计提供某种参考。平键联接是最为简单而广泛使用的轴毂联接方式，本文就以之为例，进行分析计算。



带键槽的轴与毂的截面如上图，尺寸一般按标准确定。我国的平键标准是米制单位下通行的标准，本文就针对此标准进行分析。标准对直径 6–500 mm 的轴规定了平键和键槽的尺寸。平键截面的高度 h 在宽度 $b \le 6$ 时与之相等，随着 b 增大，h/b 很快降至约 0.6，而后逐渐降至 0.5。键的宽度随轴径以阶梯的形式变化，总的趋势是与轴径的比值随轴径的增大减小。b/d 在 0.42–0.2 之间。键槽深度 t_1、t_2 的取值在于使得轴和毂与键的接触高度接近。$t_1 + t_2$ 略大于 h，留有间隙。t_1/d 在 0.25–0.06 之间，t_2/d 在 0.19–0.04 之间。标准中对键槽圆角给出的是一个范围，与 h 最为相关，r_{min}/h 在 0.05–0.02 之间，r_{max}/h 在 0.08–0.03 之间。

2 计算方法

2.1 基础理论

本文将轴和毂的扭转简化为按等截面杆的扭转计算。根据弹性力学理论，此问题可以通过泊松方程求解。具体的推导见相关书籍，这里只简述方法。将坐标系设为杆长方向为 z 轴，截面平行于 xy 平面。引入应力函数 ϕ，截面上的剪应力可由 ϕ 表示为

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

而 ϕ 应满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

其中 G 为材料的剪切模量，θ 为杆在单位长度上的扭转角。而边界条件为 ϕ 在边界上为常数。在求解区域为单连通的情况，也就是杆是无孔的，这个常数可任意选取，为了方便可取为 0。合剪应力的值

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

而截面传递的总转矩为

$$M_\mathrm{t} = 2 \iint \phi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

总转矩与最大剪应力之比

$$W_\mathrm{t} = \frac{M_\mathrm{t}}{\tau_\mathrm{max}}$$

只和截面几何相关，与物理量无关，因为分式上下均正比于 $G\theta$。这个比值反映了截面为这一形状的杆承载转矩的能力，称为截面的抗扭模量。对其计算时可以令 $G\theta = 1$。

举最为简单的例子，对于半径为 r 的圆截面，泊松方程的解为

$$\phi = \frac{1}{2}(r^2 - x^2 - y^2)$$

求得剪应力 $\tau_{xz} = -y$、$\tau_{yz} = x$。合剪应力的值 $\tau = \sqrt{x^2 + y^2}$，正比于到中心的距离，方向沿圆周方向，最大值 $\tau_\mathrm{max} = r$。总转矩 $M_\mathrm{t} = \frac{\pi}{2} r^4$。所以抗扭模量

$$W_\mathrm{t} = \frac{\pi}{2} r^3$$

这与材料力学中的结果相同。

对于非圆截面，机械设计书籍中也会给出一些典型形状的抗扭模量，就比如带键槽的截面，但其中的计算是简单地依照材料力学的假定，认为剪应力正比于到中心的距离，并非依照实际的应力分布。后面再引入应力集中系数，反映实际应力分布对结果的影响。其实现在使用有限元等方法计算偏微分方程已非常方便，完全可以通过解泊松方程的方法准确地分析截面应力分布。

对于带孔的截面，前面的方法还需稍做扩展。应力函数 ϕ 在孔边需要合适的值，能使得在孔边上

$$\int \tau \,\mathrm{d}s = G\theta \int x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x$$

一种思路是，将孔和实体视为两种材料，前者的剪切模量远小于后者，这样求解域仍是单连通的，又达成将孔洞处“挖空”的效果。但这样两种材料交界的突变需要比较精细的网格，才能达到较好的计算精度。所以最好还是比照前人用“薄膜比拟”求解此问题的方法，通过试算来确定 ϕ 在孔边的值。因为应力值与 ϕ 在孔边的值是线性关系，取不同的值做若干次试算后，通过解线性方程组，便可将试算结果做线性组合以满足上式。本文所处理的情形只有一个孔，只需两次试算即可。

2.2 具体实现

本文使用有限元软件 FreeFEM 来求解泊松方程，得到截面的抗扭模量。FreeFEM 是一款开源软件，用一种类似 C++ 的语言，统一地处理有限元分析的整个流程。软件的文档中有求解泊松方程的例子，稍加改写就可求解本文的问题。例子中还提到了网格自适应优化，本问题正可利用这一方法。问题的对称性可以减少计算量。应力函数 ϕ 在带键槽的截面上是左右对称的，所以可以将截面的一半作为求解域，积分求总转矩 M_t 时再乘上 2 即可。

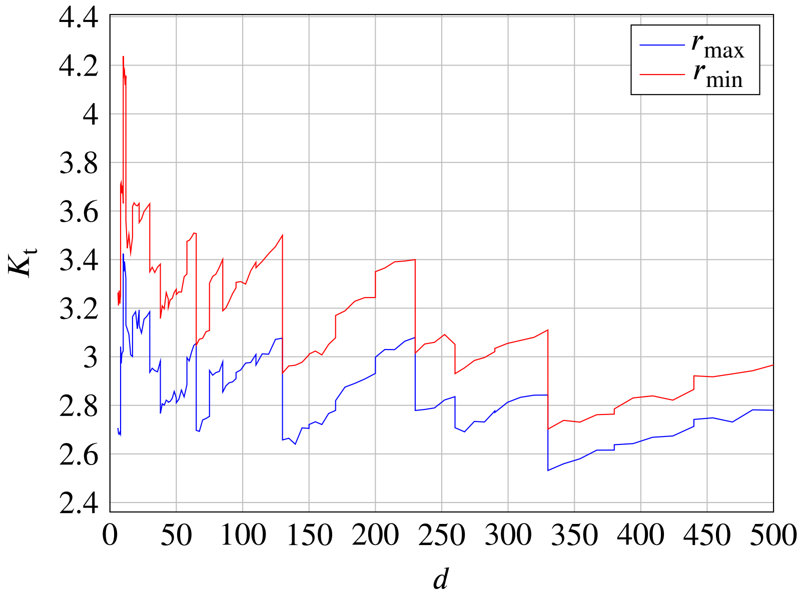
键槽尺寸按阶段变化，为了捕捉变量随轴径的变化，本文在每个阶段取样 5 个点。上个阶段的终点加 0.01 作为第 1 点，本阶段的终点作为第 5 点，中间按等比数列加入 3 个点。轴径一般在优先数系中选取，这些数值往往不在前述取样点中，它们也被加入计算。在每个点，先计算轴的截面抗扭模量，再设计输入为直径比 D/d、输出为毂与轴的截面抗扭模量差值的函数，使用数值方法求出函数的零点。本文使用 Python 获取 FreeFEM 的结果，用 scipy.optimize 中的函数得到等强度的直径比。

显然，这里所说的等强度，是在轴和毂的许用应力相同的情况下。本文希望将此种情况下得到的结果归纳为较为简单的估算公式，方便实际使用。如果两者的许用应力相差不大，也可以利用这个结果做类比。如果相差较大，则还需要另行分析。归纳出估算公式也就是做某种曲线拟合，而且出于使估算结果偏保守的考虑，拟合的曲线虽然要接近数据，但不应低于数据。此种要求的拟合可以转为二次规划问题，于是又用到了 quadprog 模块。

3 结果与分析

3.1 轴的应力集中系数

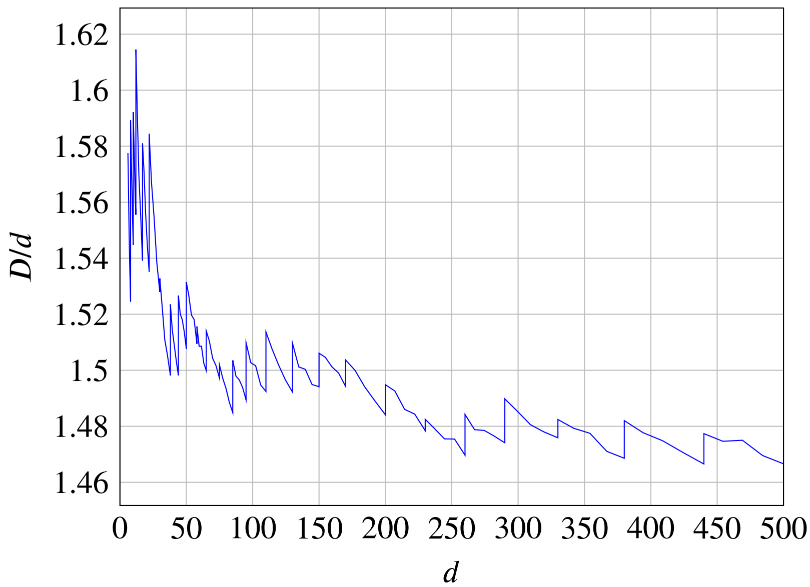
计算过程中，首先算出了轴的截面抗扭模量。将无键槽的轴的抗扭模量除以这一步得到的抗扭模量，便得到了在相同转矩下，带键槽轴的最大剪应力相对无键槽轴的最大剪应力的倍数，也就是带键槽轴相对无键槽轴的扭转应力集中系数 K_t，反映了键槽对轴抗扭能力的削弱。下图是圆角半径最大和最小时应力集中系数随轴径的变化。



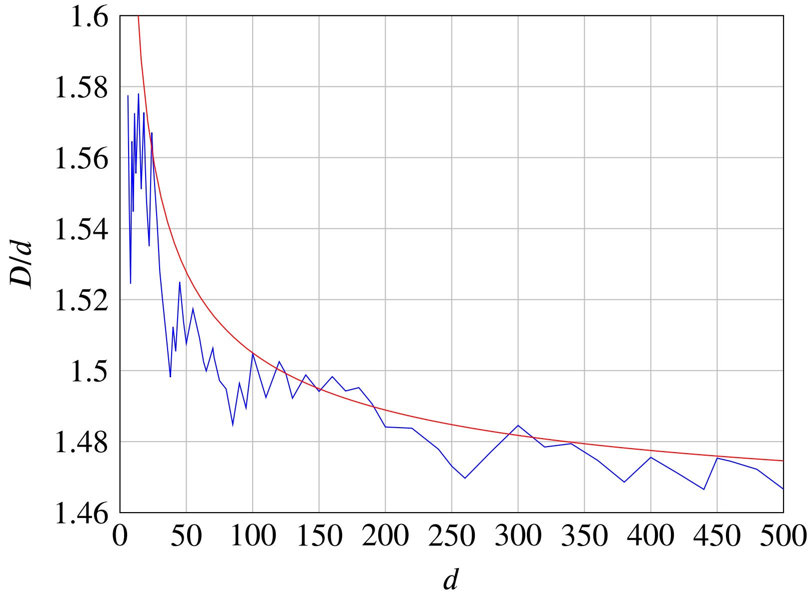
轴径较小时键槽的宽度和深度相对较大，所以应力集中系数也较大，而宽度和深度是阶梯状变化的，所以数据会出现跳变。键槽的圆角较大时，应力集中系数较低。进一步的分析表明，其他条件相同的情况下，$1/K_t$ 与圆角半径近似成线性关系，所以两条曲线的形状很相似，像是同一条曲线变换而成。圆角半径取中间的值时，可以利用 $1/K_t$ 进行线性插值，得到应力集中系数的值。

3.2 等强度的直径比

圆角半径的大小会影响应力集中，但如果轴和毂的圆角半径相等，两者受到的影响很接近，抗扭模量的比值几乎不变。所以这里只按 $r_1 = r_2 = \frac{r_{max}+r_{min}}{2}$ 求等扭转强度的直径比，结果见下图。



可以看到，数据有很强的波动，但大体的趋势是随轴径增大而减小。锯齿形的顶点一般正是在键槽尺寸刚进入下一阶段时。如果只通过这些极大点做拟合，结果会太过保守，毕竟一般不会采用这样的轴径。下图中轴径只在优先数系中取值，数据的波动不那么强，数值也显得略低。



可以根据图中红色的拟合曲线估算等强度的直径比，也就是取

$$D/d = \begin{cases} 0.55d^{-0.5} + 1.45, & d \geq 18 \\ 1.58, & d < 18 \end{cases}$$

这条曲线仅在少数点会小于数据，且差值不超过 0.005，但在有些地方会给

出较大的裕度。如果还希望估算方法更简单，可以粗略地取

$$D/d = \begin{cases} 1.5, & d \geq 75 \\ 1.6 - 0.0013d, & d < 75 \end{cases}$$

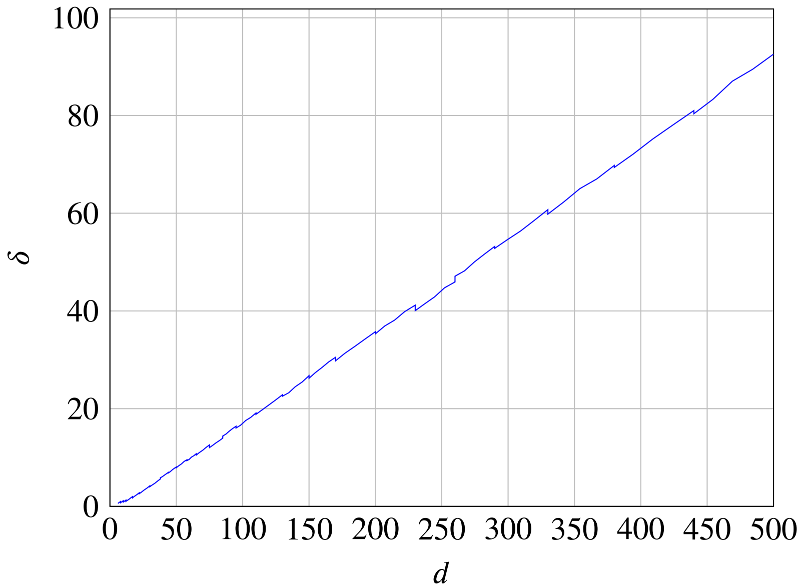
直径比的偏差对毂与轴的相对强度的影响是可以估计的。两者相对强度与直径比呈三次多项式关系，在强度比接近于 1 时，斜率约为 5–7。也就是说，直径比变动 0.01，毂的强度变动 5–7%。键槽尺寸相对较大，一般就是轴径较小时，此斜率较大。如果轴和毂有不同的许用应力，也可以根据此斜率来调整直径比。

3.3 最小壁厚

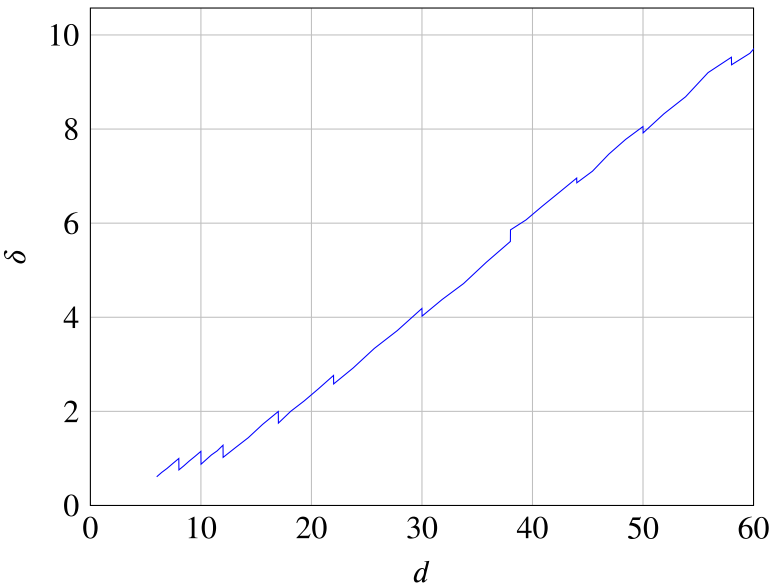
直径比与轴径的关系不是那么规律，如果换一个量，关系会更明显。键槽的角至外圆是毂的壁厚最小的地方，不考虑圆角，此厚度为

$$\delta = \frac{D}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} + t_2\right)^2}$$

从前面等强度的直径比，可以算得相应的 δ，它随 d 的变化见下图。可以看到，除了些许波动，两者呈很强的线性关系。



下面的图将上图左下角局部放大，锯齿形波动才更容易看到。和前一小节不同，锯齿形的顶点往往是在每个阶段的最后，键槽的尺寸在下一阶段增大，需要的壁厚反而稍微减小。又可以看出，20 以内的数据线性关系不是那么强，而且变化的趋势与轴径更大时相比更为平缓。



通过对上述数据中锯齿形的顶点进行拟合，可以得到偏保守的取值公式

$$\delta = \begin{cases} 0.19d - 1.4, & d \geq 20 \\ (d+1)/9, & d < 20 \end{cases}$$

δ/d 变化 0.01 也就是 D/d 变化 0.02，所以前述直径比与相对强度的关系也可以用来估计最小壁厚变化对相对强度的影响。

4　余论

《彼得森应力集中系数》[2] 是关于应力集中问题的经典著作，其中有一节讨论带键槽的轴，汇总了关于这一问题的前人研究，主要是光弹性法得到的结果。有作者尝试用与本文类似的方法使用有限元计算带键槽轴的扭转应力集中系数 [5]，修正前书中的近似公式。其实对于此问题，以今日计算机的算力，在已经建立了有限元模型的情况下，直接做精确计算其实比查图表或是套用近似公式更方便。

应力集中对静强度有影响，但主要影响疲劳强度，所以本文的结果也是主要针对扭转疲劳强度。本文没考虑抗弯强度，因为和扭转的情况不同，等截面杆在弯曲时不产生应力集中，应力集中只发生在截面发生变化处，相对比较安全，而毂的键槽一般不像轴上的有收尾，更为安全。键的挤压产生的影响是应当考虑的，但是这样需要做接触分析，计算上还没想到简易的方法。另外，这里只分析了单键槽的情况，双键槽对轴的削弱更甚于毂，所以等强度的壁厚会比单键槽时稍微低一点。

讨论毂的壁厚的文献较少。在德国平键计算标准 [3] 的评价方法中，壁厚较小时，键的接触应力在长度方向的分布更为平均，有利于联接强度。标

准中又写到当 $d/D < 0.6$ 时可以不核算毂的强度，不过其引用的德语文献大多难以获取，具体的思路和核算方法难以得知。综合了一些德语文献的文章 [4] 认为，在交变扭矩下，$d/D > 0.7$ 时毂是相对薄弱环节。本文考虑的因素虽然单一，计算的结果倒恰好落在前面两个数字之间。可是如果看国内外的较为紧凑的联轴器的尺寸，则本文给出的数值仍然偏保守。

参考文献

[1] 铁摩辛柯, 古地尔著; 徐芝纶译. (2013). 弹性理论. 高等教育出版社.

[2] Pilkey, W. D., Pilkey, D. F., Bi, Z. (2020). *Peterson's stress concentration factors*. John Wiley & Sons.

[3] DIN 6892:2012-08, *Mitnehmerverbindungen ohne Anzug — Passfedern — Berechnung und Gestaltung*.

[4] Kœchlin, S., Dehmani, H., Kulcsár, G. (2018). *Strength of a pinion-motor shaft connection: Computational and experimental assessment*. Procedia engineering, 213, 477-487.

[5] Pedersen, N. L. (2010). *Stress concentrations in keyways and optimization of keyway design*. The journal of strain analysis for engineering design, 45(8), 593-604.