

Лабораторная работа №7

Векторная графика. Трансформация векторных объектов. Аффинные преобразования

Цели лабораторной работы:

1. Познакомится с инструментами трансформации векторных изображений.
2. Научиться подбирать параметры трансформации векторных изображений.
3. Научиться представлять параметры трансформаций в виде матриц аффинных преобразований и вычислять результирующие матрицы преобразований.

Теоретический минимум:

В этой лабораторной работе названия инструментов и пунктов меню будут приводиться на примере свободно распространяемого векторного редактора Inkscape. В большинстве других векторных редакторов присутствуют аналогичные инструменты, отличающиеся названием и организацией управления ими.

Аффинное преобразование плоскости – отображение плоскости в себя, при котором параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Свойства аффинного преобразования:

1. Аффинное преобразование взаимно однозначное, кроме того:
 - a. преобразование, обратное к аффинному, также является аффинным;
 - b. композиция аффинных преобразований также является аффинным преобразованием.
2. При аффинном преобразовании векторы преобразуются следующим образом:
 - a. равные векторы — в равные;
 - b. коллинеарные — в коллинеарные, причем отношение коллинеарных векторов сохраняется;
 - c. неколлинеарные — в неколлинеарные.
3. При аффинном преобразовании сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок.
4. При аффинном преобразовании площадь любого параллелограмма изменяется в одном и том же отношении, т.е. умножается на одно и то же число (называемое коэффициентом искажения площади).

Примерами аффинных преобразований являются: сдвиг (параллельный перенос), масштабирование, зеркальное отражение, поворот, скос. Эти преобразования реализованы в виде инструментов трансформации в большинстве приложений для работы с компьютерной графикой.

Аффинное преобразование может быть задано в виде матрицы преобразования координат, при котором для каждой точки с исходными координатами (x, y) будет построена точка с координатами (x', y') :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Преобразование задается значениями только в первых двух строках матрицы. Последняя строка всегда содержит значения $(0, 0, 1)$.

Матрицы для основных аффинных преобразований:

1. **Сдвиг** (параллельный перенос)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где dx – смещение точки по оси x , а dy – смещение точки по оси y .

2. **Масштабирование** (растяжение/сжатие)

$$\begin{bmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & ay & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где ax – коэффициент масштабирования по оси x , а ay – коэффициент масштабирования по оси y . При значениях коэффициентов больше 1 происходит растяжение изображения по соответствующей координате, а при значениях коэффициентов от 0 до 1 – сжатие.

Отрицательные значения коэффициентов соответствуют зеркальному отражению изображения относительно одной или обеих осей координат.

3. **Поворот**

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где φ – угол поворота.

4. **Скос**

Скос вдоль оси x –

$$\begin{bmatrix} 1 & ctg(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Скос вдоль оси y –

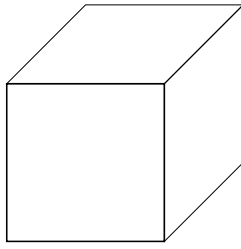
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ctg(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где θ – угол скоса.

Исходя из свойства 1b, композиция аффинных преобразований также будет аффинным преобразованием. Это значит, что если над одним и тем же объектом были последовательно проведены преобразования с матрицами A , B и C , то совокупность этих преобразований можно выразить одной матрицей $R = C \times B \times A$. Обратите внимание на то, что порядок записи матриц в формуле обратный к порядку применения операций преобразования.

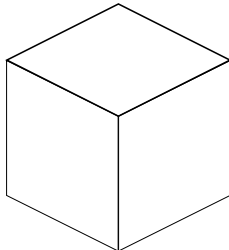
Порядок выполнения работы.

1. Создайте квадрат с длиной стороны 100 мм так, чтобы его нижний левый угол имел координаты (0,0), то есть располагался в нижнем левом углу листа. Квадрат должен иметь черную обводку, толщиной 1 px и прозрачную заливку.
2. Создавая дубликаты (Меню-Edit-Duplicate) квадрата, полученного на шаге 1 и используя только численно задаваемые параметры на вкладках в окне трансформаций (Меню-Object-Transform), постройте фигуру (куб), приведенную ниже:



При построении куба можно использовать только создание дубликата и численно задаваемые трансформации даже для перемещения объектов (нельзя перетаскивать объекты «мышкой» вручную).

3. Для каждой из построенных на шаге 2 граней запишите в отчет параметры трансформации дубликата, которыми получена соответствующая грань (включая параметры смещений).
4. Для каждой из построенных на шаге 2 граней для каждой трансформации, описанной на шаге 3, напишите матрицы преобразований. Для каждой грани перемножьте матрицы ее трансформаций в порядке, обратном порядку применению трансформаций и получите общую матрицу трансформации для создания отдельной грани. Например, если вы сначала применяли масштабирование (задаваемое матрицей A), затем снос (задаваемый матрицей B), а затем сдвиг (задаваемый матрицей C), то результирующая матрица будет вычисляться как $R=C*B*A$.
5. Удалите грани, построенные на шаге 2, и постройте их заново, применяя полученные результирующие матрицы к дубликатам исходного квадрата с помощью вкладки «Matrix» в окне трансформаций. Таким образом, вы проверите правильность построения отдельных и результирующей матриц.
6. Повторите шаги 1-5 для построения куба в изометрической проекции:



Все трансформации также осуществляйте на основе дубликатов исходного квадрата со стороной 100 мм, левый нижний угол которого имеет координаты (0,0). Обратите внимание, что в этом случае все три грани потребуют для построения трансформации дубликатов исходного квадрата.

7. Отчет должен включать в себя для обеих фигур описание последовательности трансформаций для построения каждой грани с указанием значений параметров трансформаций (включая смещения) и все построенные матрицы преобразований: матрицы каждой трансформации и результирующие матрицы для построения каждой грани.
8. В процессе защиты будьте готовы по требованию преподавателя построить с помощью трансформаций в Inkscapе любую грань куба в любой из приведенных проекций и объяснить, как рассчитать для этой грани матрицу преобразований.