

2021-BJCUP

5. 同步蜡烛

Synchronised Candles

2021-CUP

01
问题陈述与分析
Analysis of the problem

02
预实验与模拟
Pre-Experiment and Simulation

03
理论解释
Theory and Model

04
正式实验
Experiment and Result

05
总结与拓展
Summary and Prospect

06
参考文献与致谢
Reference and Thanks

01

课题综述

Experiment introduction



当几支**彼此邻近**的蜡烛燃烧时，可以观察到振荡的火焰。**两个**这样的振荡可以相互耦合，导致同相或反相同步（取决于蜡烛组之间的距离）。解释并探究这种现象。

相关实验：

- 1948年，*Chamberlin*等人首次利用成像技术对蜡烛火焰的**非线性振荡**行为进行了介绍和分析。
- 2009年，*Kitahata*根据燃烧振子距离的不同发现了两种同步模式。并提出了**以热辐射为主导作用的耦合理论**模型。
- 2015年，*Forrester*观察到了许多具有不同空间间隔和排列**拓扑**的振荡模式。
- 2016年，*Okamoto*等人基于**涡流和分岔理论**对这些模式形成的机制给出了解释。发现了4种截然不同的振荡模式，即完全同步（*in - phase*）、部分同步（*partial in - phase*）、锁相同步（*Rotation*）和振幅死亡（*death*）

题目分析：

- 现象：随蜡烛间距的改变，耦合方式也发生改变
- 因素：蜡烛数目、距离、排列的拓扑结构、密排模式、不对称性等等
- What we do?
提出相应的理论解释和给出实验结果！

02

预实验与模拟

Pre-Experiment and Simulation



2 预实验——对蜡烛振荡行为的探究

2021-CUPT



实验现象：

一根蜡烛燃烧时，是稳定燃烧；三根蜡烛一组同时燃烧时，是振荡燃烧。

两组三支蜡烛，可以相互耦合，产生同相和反相同步，这取决于两组蜡烛之间的距离。

2021-CUPT

03

理论解释

Theory and Model



蜡烛的燃烧的三个条件：可燃物、氧化剂和温度

- **可燃物**：灯芯通过毛细作用向火焰供给蜡油；

影响燃烧亮度的因素：蜡烛数目N
N越大，燃烧亮度越亮

- 我们提出经验公式：亮度 \propto 蜡烛数目N

- **氧化剂**：空气中的氧气

影响燃烧的因素：供氧速率、需氧量
这直接反映在蜡烛的数量（N）上！
蜡烛数量越多，振荡频率下降

- 我们提出经验公式： $\nu \propto -N$ ①

（基于所有蜡烛都紧密排列的基础上）

- **温度**：温度的变化应该通过传热过程相互作用。

在两个振荡器之间有三种可能的传热形式：热扩散、对流和辐射



蜡烛的燃烧的三个条件——温度

热扩散 通常空气的扩散常数 $a = 10\text{mm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, 对于实验中相距 10mm 的尺度, 其扩散所需的特征时间约为 10s 。

相比于本次实验中振荡的特征时间 $t = 0.1\text{s}$, 热扩散不占重要作用。

热辐射 $j^* = \varepsilon \sigma T^4$

热对流 对流很可能只是通过带走燃烧区域的热量来降低温度 $\sim \Delta T$

3.2 理论模型——对单振子进行数学建模

2021-CUPT

几点假设：

- I. 蜡烛燃烧时石蜡由固态变成气态，并与空气相中的氧气反应
- II. 我们认为石蜡的量充足，石蜡气体的供应速率恒定
- III. 氧气从蜡烛燃烧的周围空气中供应，热量通过对流而不是扩散传送。

构造以下方程：

$$C \frac{dT}{dt} = \omega_1 \left[\overset{\text{对流传热}}{h(T_0 - T)} + \overset{\text{燃烧产热}}{\beta a n} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right] - \overset{\text{辐射能量损失}}{\sigma T^4} \quad (1)$$

$$\frac{dn}{dt} = \omega_2 \left[\overset{\text{氧气流动}}{k(n_0 - n)} - \overset{\text{燃烧消耗}}{a n} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right] \quad (2)$$

其中 $T(t)$ 是火焰的温度， $n(t)$ 是空气中氧的浓度

$C, R, E, T_0, n_0, h, k, \beta, \sigma$ 均为常量，分别对应于比热、气体常数、活化能、外部温度、外部氧气浓度、对流热流、对流供氧速率、单位体积石蜡燃烧产生的热量和 Stefan - Boltzmann 常数

2021-CUPT

*[1] Oscillation and synchronization in the combustion of candles.[J]. Journal of Physical Chemistry A, 2009, 113(29):8164-8.

3.2 理论模型——对单振子进行数学建模

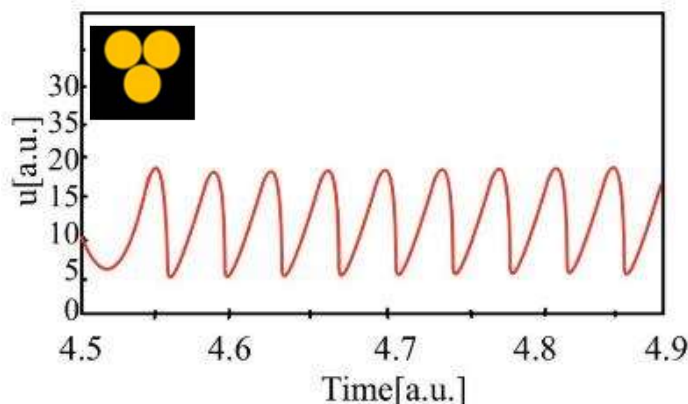
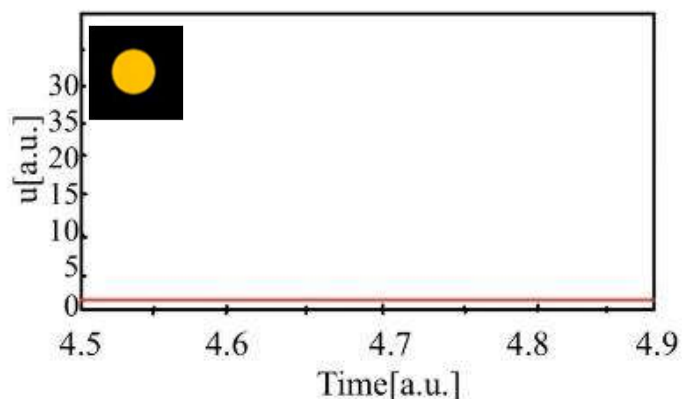
2021-CUPT

无量纲化: $u = c \frac{T - T_0}{T_0}$ $v = \frac{n}{n_0}$ $\tau = \omega_2 k t$ $c = \frac{E}{RT_0}$ $\varepsilon = \frac{Ck\omega_2}{h\omega_1}$ $a_v = \frac{a}{k} \exp(-c)$ $\sigma_0 = \frac{\sigma c T_0^3}{G\omega_2 k}$ $a_u = \frac{\beta c n_0 a}{T_0 h} \exp(-c)$

得无量纲方程:
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-u + a_u v \exp\left(\frac{u}{1 + u/c}\right) \right] - \sigma_0 \left(1 + \frac{u}{c} \right)^4 \quad (3)$$

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v - a_v v \exp\left(\frac{u}{1 + u/c}\right) \quad (4)$$

代入参数得以下图像:



最终所得数据显示:
当 $a = 0.5$, 即1根蜡烛时, 温度的时间序列保持恒定, 蜡烛稳定燃烧;
当 $a = 37$, 即3根蜡烛时, 时间序列表现出振荡行为。

2021-CUPT

*数学方程来自参考文献: [1] Oscillation and synchronization in the combustion of candles.[J]. Journal of Physical Chemistry A, 2009, 113(29):8164-8. *数学方程的解以及作图是自己计算得到, 并非来自参考文献

3.2 理论模型——两个相同振荡器

2021-CUPT

热辐射作为一个重要因素，采用辐射耦合，进行数学建模，探究其定性影响

引入耦合项：

$$C \frac{dT}{dt} = \omega_1 \left[h(T_0 - T) + \beta a n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right] - \sigma T^4 \quad (1)$$

$$\frac{dn}{dt} = \omega_2 \left[k(n_0 - n) - a n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \right] \quad (2)$$



$$C \frac{dT_i}{dt} = \omega_1 \left[h(T_0 - T_i) + \beta a n_i \exp\left(-\frac{E}{RT_i}\right) \right] - \sigma \left(\frac{\mu}{L^2} T_j^4 - T_i^4 \right) \quad (5)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \omega_2 \left[k(n_0 - n_i) - a n_i \exp\left(-\frac{E}{RT_i}\right) \right] \quad (6)$$

μ 是常数对应于气体中的光吸收率

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-u_i + a_u v_i \exp\left(\frac{u_i}{1 + u_i / c}\right) \right] - \sigma_0 \left(1 + \frac{u_i}{c} \right)^4 + \sigma_0 \mu_0 \left(1 + \frac{u_j}{c} \right)^4 \quad (7)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = 1 - v_i - a_v v_i \exp\left(\frac{u_i}{1 + u_i / c}\right) \quad (8)$$

$$\mu_0 = \mu / L^2$$

无量纲化

2021-CUPT

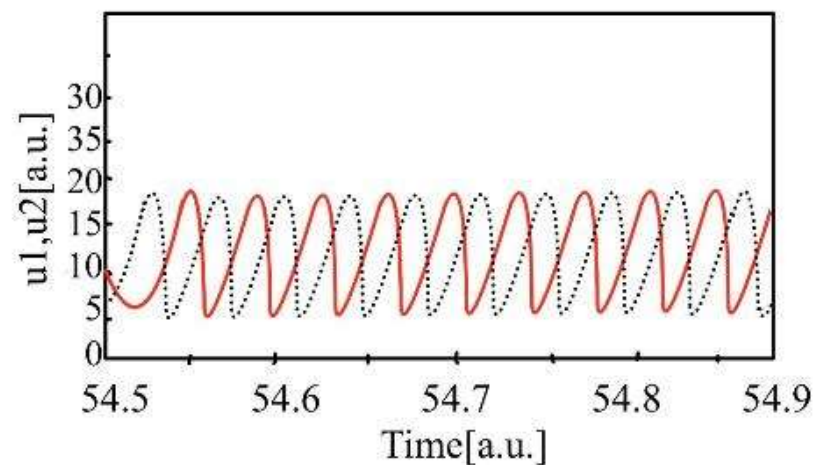
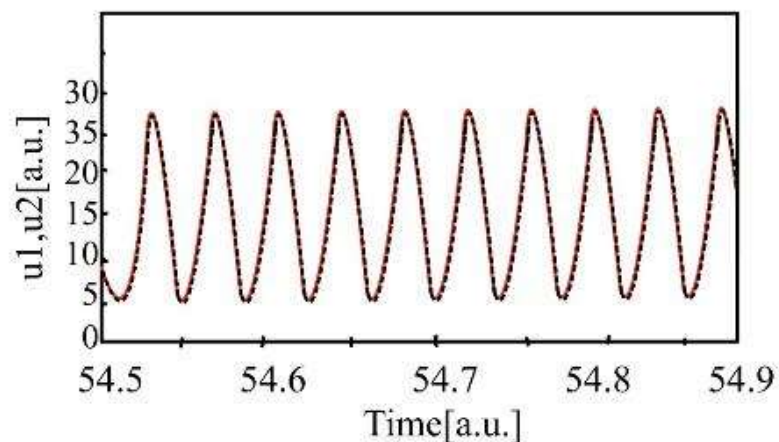
*数学方程来自参考文献：[1] Oscillation and synchronization in the combustion of candles.[J]. Journal of Physical Chemistry A, 2009, 113(29):8164-8.

12

3.2 两个相同振荡器

2021-CUPT

代入参数得以下图像



我们使用无量纲方程进行计算，最终所得数据显示：

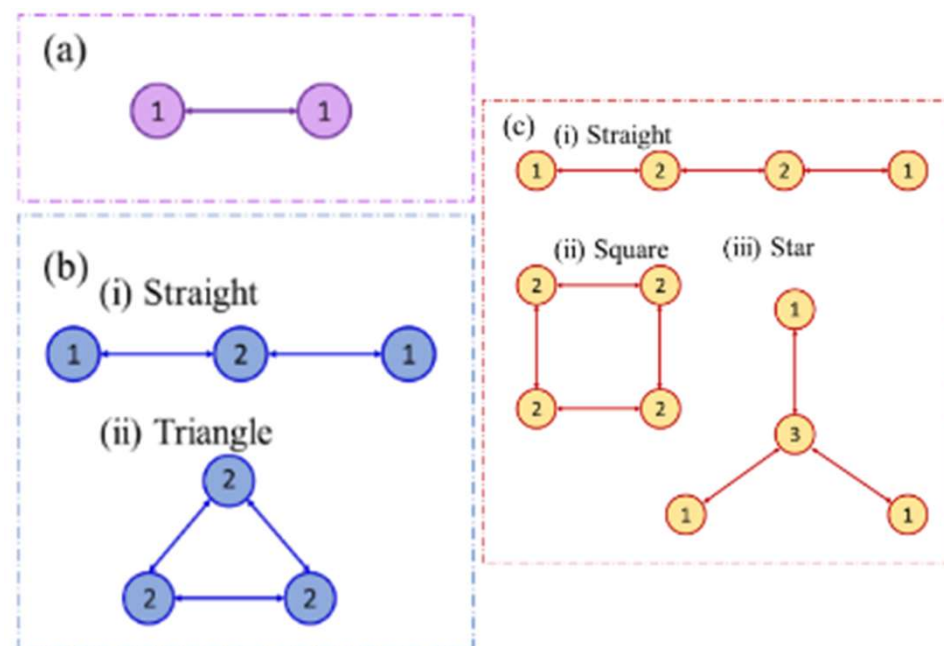
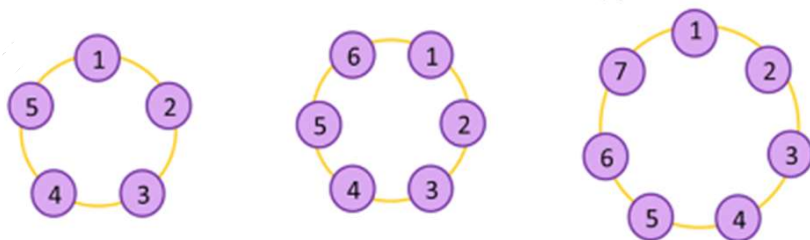
当两个振子 L 之间的距离较小时，两个振荡器呈现同相耦合，此时 $\frac{\mu}{L^2} = 0.5$ 。

当 L 较大时，它们表现出反相耦合，此时 $\frac{\mu}{L^2} = 0.5$ 。

除了“单振荡器”“两个振荡耦合”，我们接下来尝试多振子间的耦合情况，并发现其规律：

振荡器在网络拓扑中排列的方式的数量取决于系统中相互作用的振荡器的数量，为方便多振子的研究，我们用一个振子的度（degree）表示它的相邻连接数。

将振荡器数量从4个增加到12个，对于给定的振子数，我们研究了两种拓扑结构，如闭环（三角形、正方形和环形）和开环（线性和星形）网络。



闭环拓扑具备的对称保护，我们认为此时其频率不会单一地随着数目发生线性变化

在明亮火焰的正外部形成环形涡流汇集到中部相互影响，
我们猜想其频率会和其密堆积指数相关，

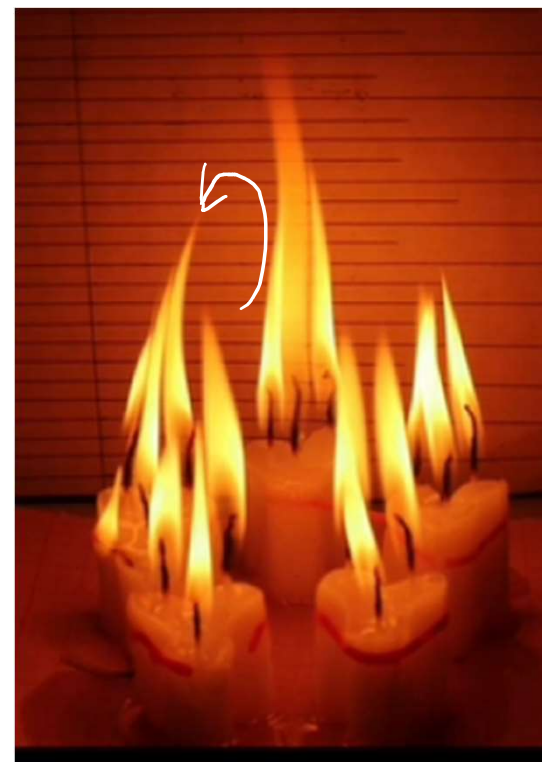
定义密堆积指数 $\rho = n\pi r^2 / \pi R^2 \propto 1/n$

——我们尝试通过改变网络中振子的数量并将它们置于相同的拓扑排列中来研究这些振子的耦合行为。

预期结果：

- 频率与密堆积指数呈正相关
(其中 κ 和 δ 为待定系数)

$$\nu = \kappa\rho + \delta \quad (3)$$



04

正式实验

Experiment and Result



4 正式实验——研究器材

2021-CUPT

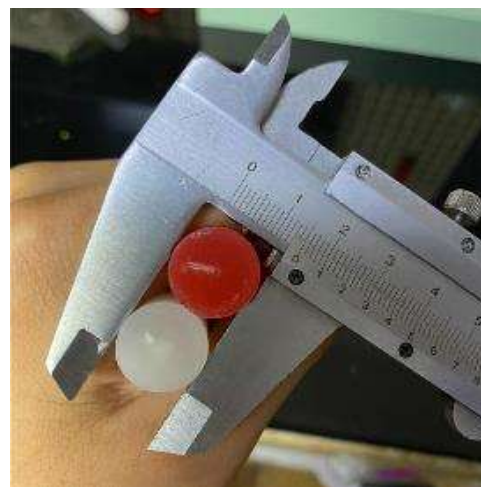
研究材料与器材：

实验小蜡烛（直径1.5cm，高7.5cm）、摄像机

实验注意事项：

实验是在室内环境中进行的，没有环境光和外部空气流动；视频要等火焰稳定振荡后再进行录制；

后期调整时都统一将速度改为20%，方便对比。



2021-CUPT

- ①单振荡器：数量



验证公式： $\nu \propto -N$

- ②两个相同振荡器：只有直线形排列



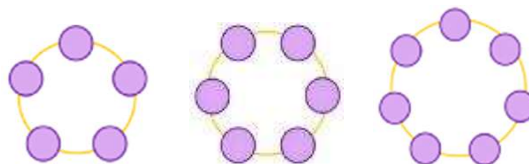
通过改变振子之间的距离，调节元件振子之间的耦合强度，验证距离对蜡烛振荡的影响

- ③两个不同振荡器：不对称性



通过不对称性，进一步验证热辐射在耦合中的重要作用

- ④多个相同振荡器：环形结构

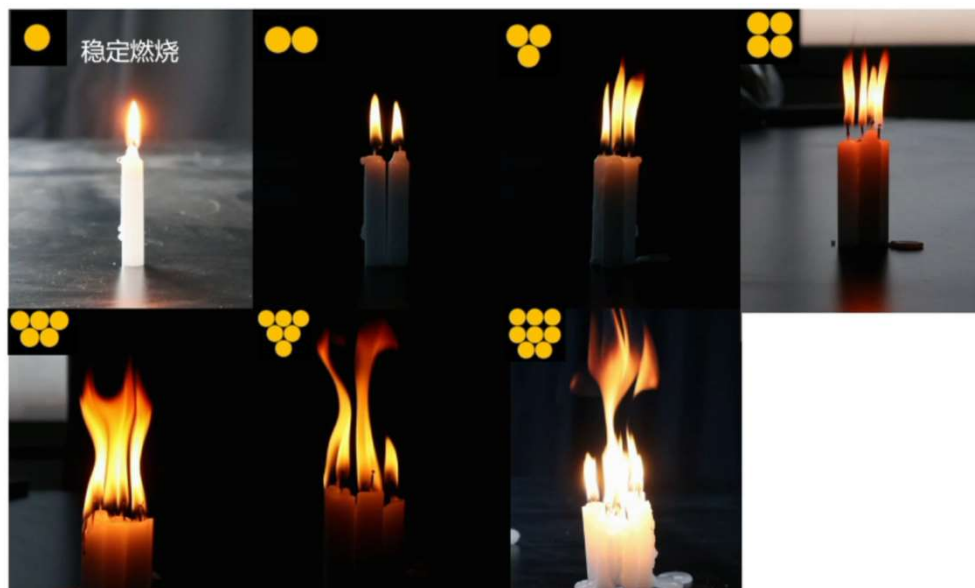


验证公式： $\nu = \kappa\rho + \delta$

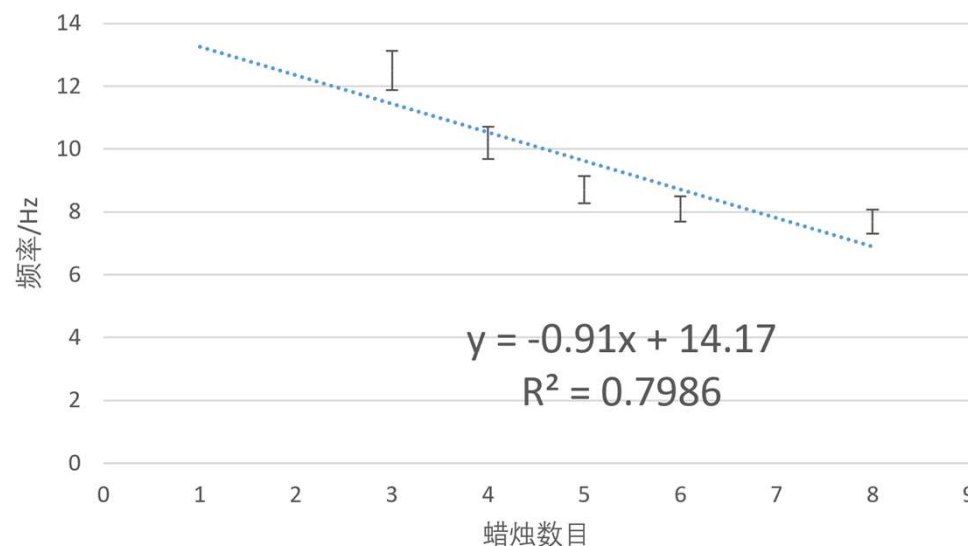
4.1 正式实验①——验证单振荡器 $\nu \propto -N$

2021-CUPT

1. 单振荡器（数量）



- 对于单根蜡烛，火焰稳定燃烧，不会出现明显的振荡；
- 对于2支一组的蜡烛，火焰的亮度略有增加，偶尔会出现微小的波动，但既不稳定也不明显；
- 对于包含3根以上的一组蜡烛，火焰表现出规则的振荡，并且具有大小不一但稳定的幅度和频率。



- 火焰振荡频率与单组中蜡烛数量的关系
- 得到频率与蜡烛数目呈线性负相关

$$\nu \propto -N$$

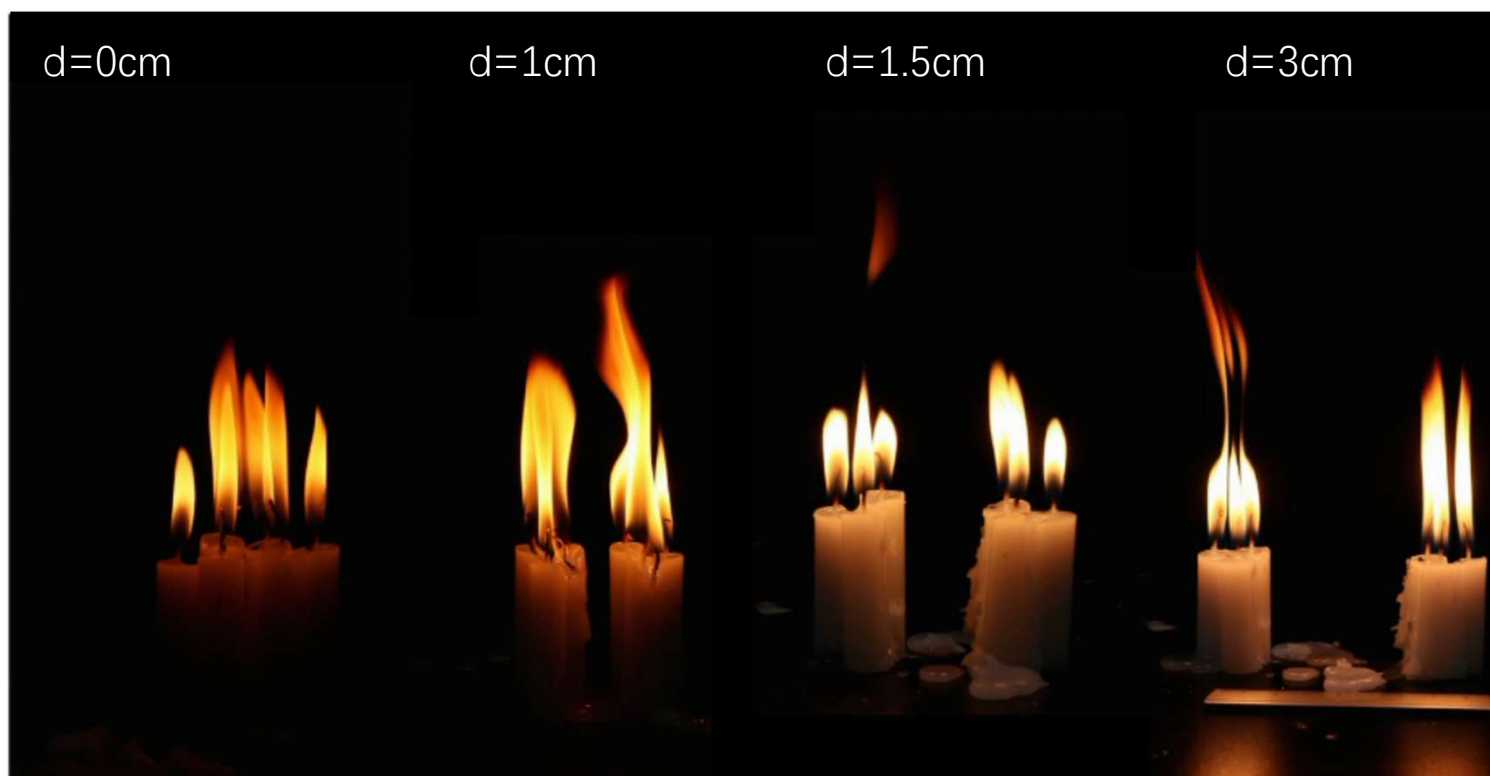
实验结果与理论符合！

4.2 正式实验②——两个振荡器耦合方式与距离的关系

2021-CUPT

设蜡烛最近表面和表面之间的距离为 d :

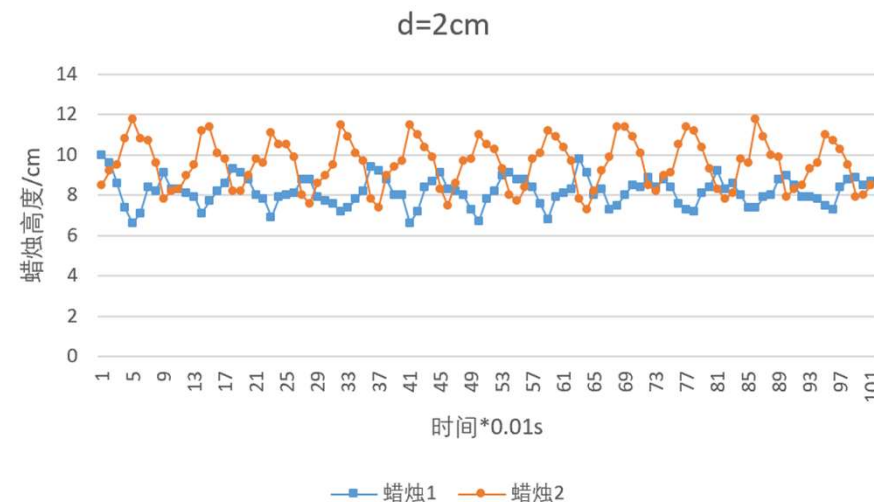
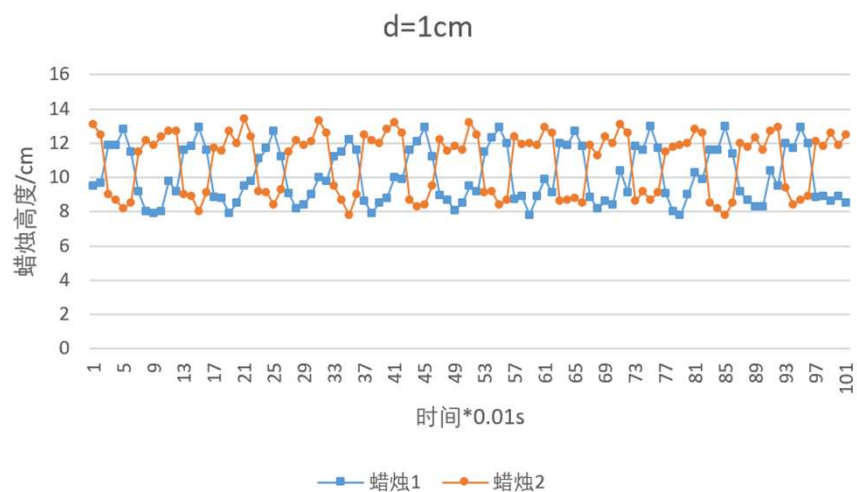
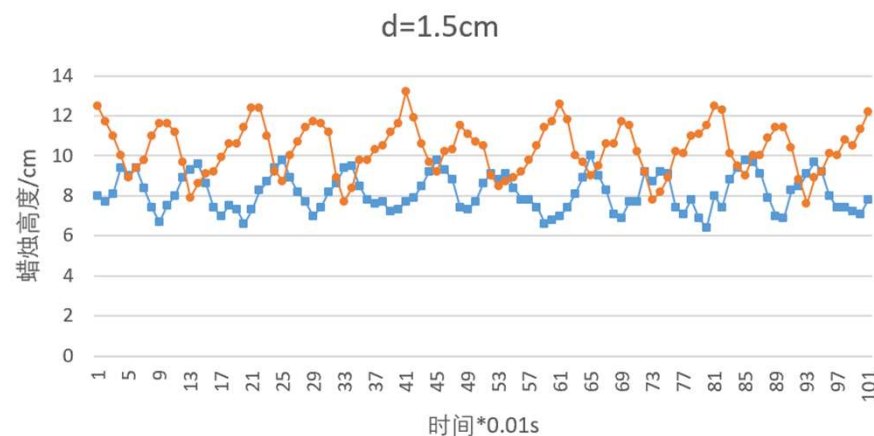
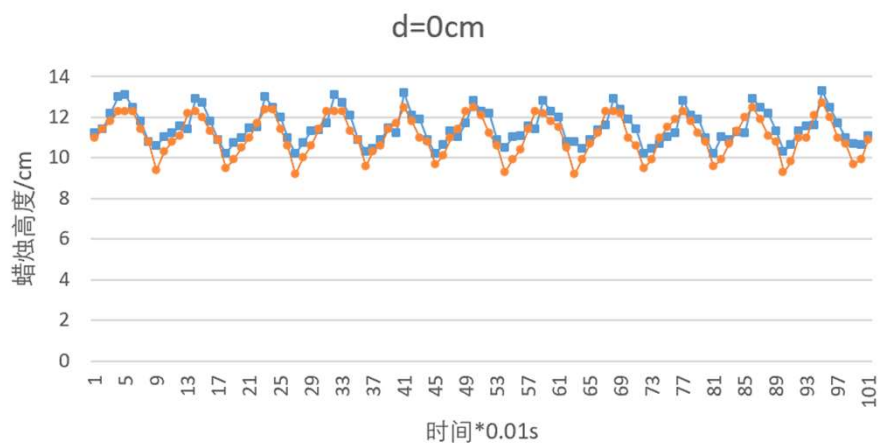
同相同步($d \leq 0.5$)、振幅死亡($0.75 < d < 1.25$)、反相同步($1.5 < d \leq 3.5$)和去同步($d > 3.5$)。这些状态在时间上是渐近稳定的。



实验结果与数学建模的情况符合!

4.2 正式实验②——两个振荡器耦合方式与距离的关系

2021-CUPT



振荡周期
 $T_0=0.1s$
 $T_1=0.11s$
 $T_{1.5}=0.11s$
 $T_2=0.1s$

验证之前所说！
本实验蜡烛振子的特征时间为0.1s，否认了扩散带来的影响

2021-CUPT

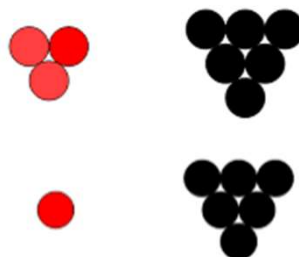
火焰高度变化的时间序列图

4.2 正式实验③——两个不对称振荡器之间的耦合

2021-CUPT

研究两个不同振荡器

$\left\{ \begin{array}{l} 3+6 \\ 1+6 \end{array} \right.$



近同相位同步 (0mm - 15mm)

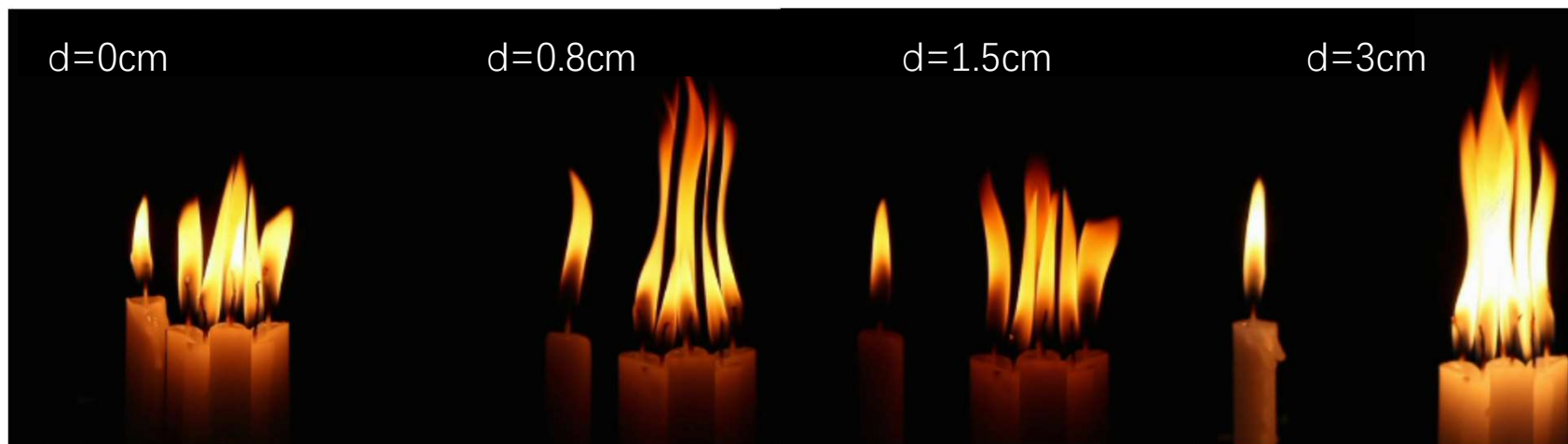
近反相位同步 (15mm - 25mm)

非相干振荡 ($\geq 25\text{mm}$)

两个不同振荡器 and 对称系统类似，也呈现相位随距离改变的现象，但此时同步时相位差不再=0

4.2 正式实验——两个不对称振荡器之间的耦合

2021-CUPT



15 mm ~ 25 mm之间：同相位/反相位耦合 > 35毫米：耦合变得非常弱。

“1+6”模式与“3+6”类似，但不对称性带来的影响会更强烈。

理论解释：与对称情况相比，“3”和“6”的有效辐射范围是不相同的，出现了辐射范围的重叠区域不对称的情况，不对称结构会引起不完全同相位振荡和反相位振荡，较弱的振荡器将从属于较强的振荡器；“1+6”同理

——进一步证实两个蜡烛之间耦合是热辐射起主要作用！

4.3 正式实验④——验证环形振荡器 $\nu = \kappa\rho + \delta$

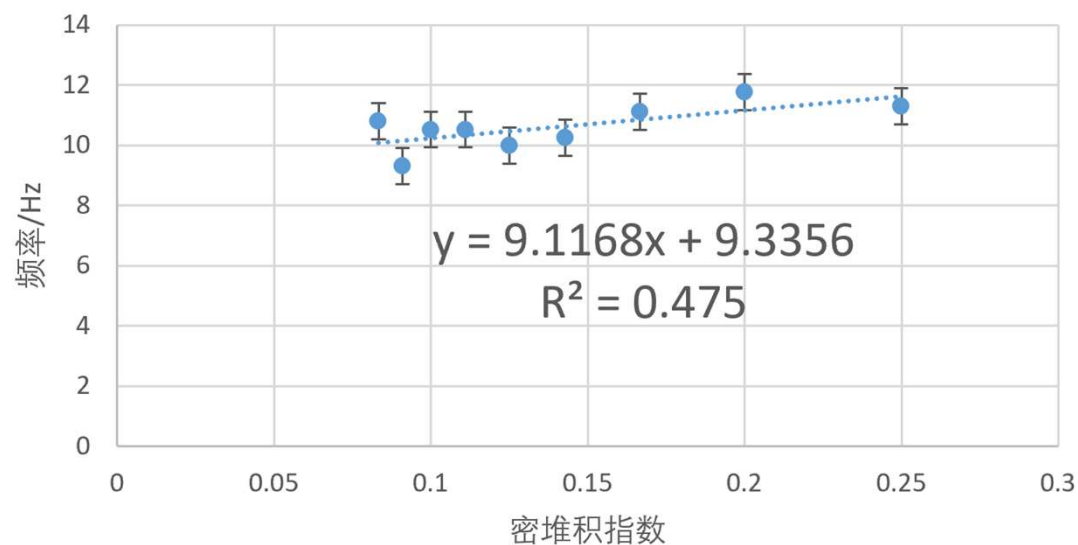
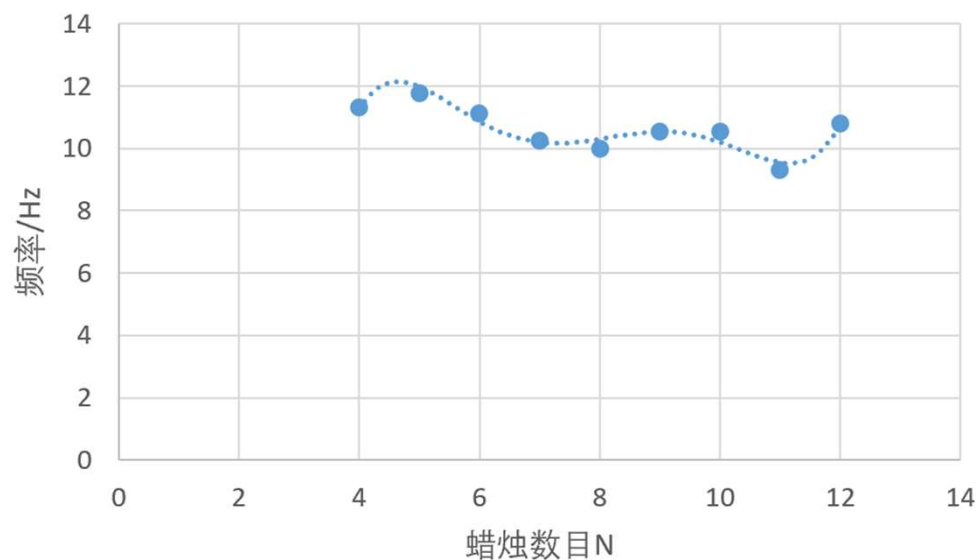
2021-CUPT



2021-CUPT

4.3 正式实验④——验证环形振荡器 $\nu = \kappa\rho + \delta$

2021-CUPT



$$\nu = 9.1168\rho + 9.3356$$

实验结果与理论符合！

05

总结与拓展

Summary and Prospect



研究结论——反映了实验与理论的一致性！

$$\nu \propto -N$$

- 在**单振荡器**的情况下，随着蜡烛数的增加，亮度增加，频率逐渐降低

将提出的**数学模型与热辐射理论**得到验证

- **两个相同振荡器**，随距离增大依次出现同相同步、反相同步、不相干
- **两个蜡烛不对称耦合**时，振荡会出现相移。

$$\nu = \kappa\rho + \delta$$

- 研究**闭环结构**中，蜡烛的振荡频率与密堆积指数的关系并说明拓扑闭环的稳定结构中，数量并非频率的主导因素，需考虑气流集中的影响，采用密堆积指数

1、一组三支蜡烛的振荡属于**极限环振荡**（自持振荡）



当振荡受到气流等外界因素的干扰时，振荡会被调制或停止一小段时间，但在干扰消除后会重新启动。

2、**非线性科学**

从耦合摆运动到抑制冠状病毒传播，集体互动体现了包括物理和生物学在内的各个科学层次的相互交织。

3、**拓扑**对最小振子网络带来的影响

拓扑依赖的结果可以推广到其他系统，如**电网、神经元网络、湍流中的涡相互作用和捕捉动力学**。国家电网和电网的稳定高度依赖于各种关键基础设施的同步。健康的大脑具有稀疏的连通性，而癫痫病人的大脑具有丰富的连通性，其模块结构在脑细胞的功能组织中发挥着作用。此外，湍流中涡旋的相互作用决定了其整体动力学。

4、火焰燃烧的控制与应用

在化学领域，我们可以研究反应物浓度复杂周期性变化对结果的影响，林业工作者可以据此通过精心设计新的防火措施，因为蔓延的野火的向前脉动是常见的，因为这揭示了一个潜在的未探索的灭火方向。目前对耦合扩散火焰相互作用的分析对研究实际燃烧系统(如家用燃烧器、燃气涡轮发动机和火箭发动机)中观察到的多重火焰的动力学可能有所启示。

对于这些耦合振荡系统的研究，可以帮助人们更深入地理解同步、涌现等非线性动力学行为。此外，对于火焰燃烧的控制，以及如何避免火焰爆燃和不稳定，在工程领域具有重要的研究价值和广泛的应用前景。

06

参考文献与致谢

Reference and Thanks



- [1] Oscillation and synchronization in the combustion of candles.[J]. Journal of Physical Chemistry A, 2009, 113(29):8164-8.
- [2] Forrester Derek Michael. Arrays of coupled chemical oscillators.[J]. Scientific reports, 2015, 5.
- [3] Okamoto, Keiko & Kijima, Akifumi & Umeno, Yoshitaka & Shima, Hiroyuki. (2016). Synchronization in flickering of three-coupled candle flames. Scientific Reports. 6. 36145. 10.1038/srep36145.
- [4] Nagamine Y , Otaka K , Zuiki H , et al. Mechanism of Candle Flame Oscillation: Detection of Descending Flow above the Candle Flame[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2017, 86(7):074003.
- [5] Ting Chen, Xiao Guo, Ji Jia, Jinghua Xiao. Frequency and Phase Characteristics of Candle Flame Oscillation[J]. Scientific Reports, 2019, 9(1).
- [6] Dange S , Pawar S A , Manoj K , et al. Role of buoyancy-driven vortices in inducing different modes of coupled behaviour in candle-flame oscillators[J]. AIP Advances, 2019, 9(1):015119.
- [7] Manoj Krishna, Pawar Samadhan A, Dange Suraj, Mondal Sirshendu, Sujith R I, Surovyatkina Elena, Kurths Jürgen. Synchronization route to weak chimera in four candle-flame oscillators.[J]. Physical review. E, 2019, 100(6-1).

2021-BJCUP

THANKS

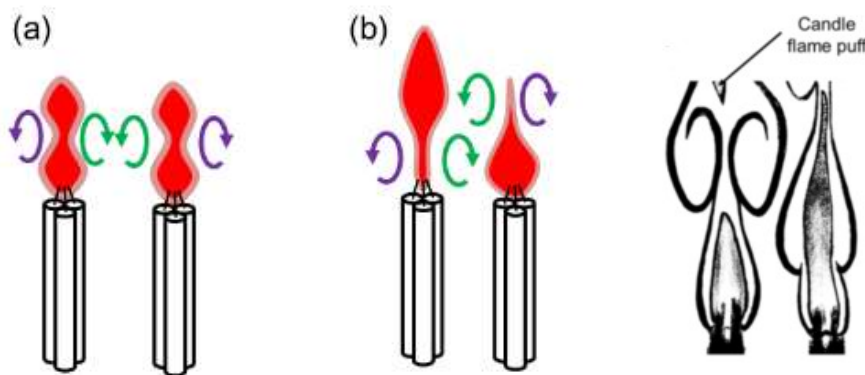
2021-CUP

3.1 理论解释——涡流理论

2021-CUPT

振子耦合现象的解释：

根据基于涡流的理解，进一步推断成对蜡烛火焰的同步振荡是涡流和火焰表面之间相互作用的结果。一个火焰产生的涡流扰动另一个火焰的表面，反之亦然；因此，两个相邻火焰之间的交替扰动将导致耦合蜡烛火焰的同步。

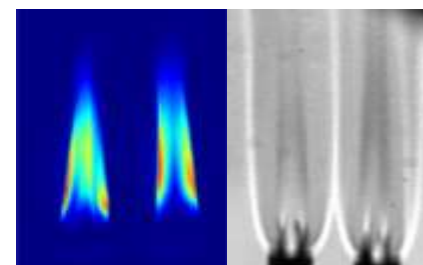


同向耦合：

当两个蜡烛火焰振荡器彼此非常接近时，我们注意到它们的振荡是同相耦合模式，相位差大约为0度，这是由于它们的火焰动力学相似。

振幅死亡：

在逐渐增加振子之间的距离时，两个振荡器的振荡停止。这种现象被称为振幅死亡（*Amplitude death*）



反向耦合：

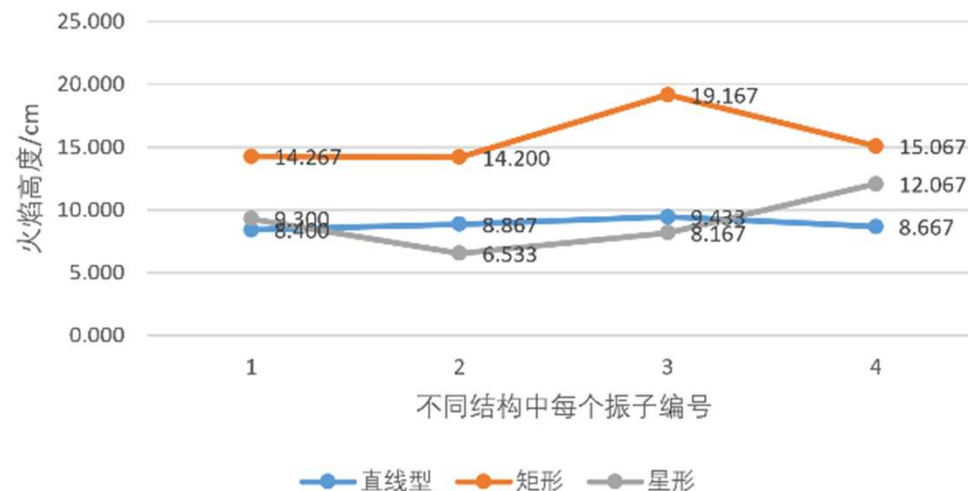
随着振子间距的进一步增加，我们观察到火焰在两个蜡烛火焰振子中从振幅死亡状态恢复其振荡行为。但其具有180度的相位差，称为反相耦合。

2021-CUPT

*[6] Dange S , Pawar S A , Manoj K , et al. Role of buoyancy-driven vortices in inducing different modes of coupled behaviour in candle-flame oscillators[J]. AIP Advances, 2019, 9(1):015119. 33

4.3 正式实验——3/4个相同振荡器之间的耦合

2021-CUPT



由图表可以看到，

- (i) 对于3个振子：直线形结构，只有两个振子频率相近，发生同步；三角形结构，三个振子频率相近，都发生同步。
- (ii) 对于4个振子：矩形（闭环结构）的火焰高度要比星形和直线形（开环结构）更高。

实验与理论相符！

三角形结构形成闭环拓扑，具有很强的对称性，使其可以保持三个振子的全局同步——Clustering；而直线形结构中心振子的度为2，每个外围振子的度为1，不对称使得无法出现全局同步——Weak chimera；受到对称性保护的闭环结构会更稳定，燃烧过程不易受到外界干扰，从而火焰更高。

2021-CUPT

*此拓扑理论为自己提出，且为定性解释，故未给出误差分析

4.4 正式实验——四个相同振荡器之间的耦合

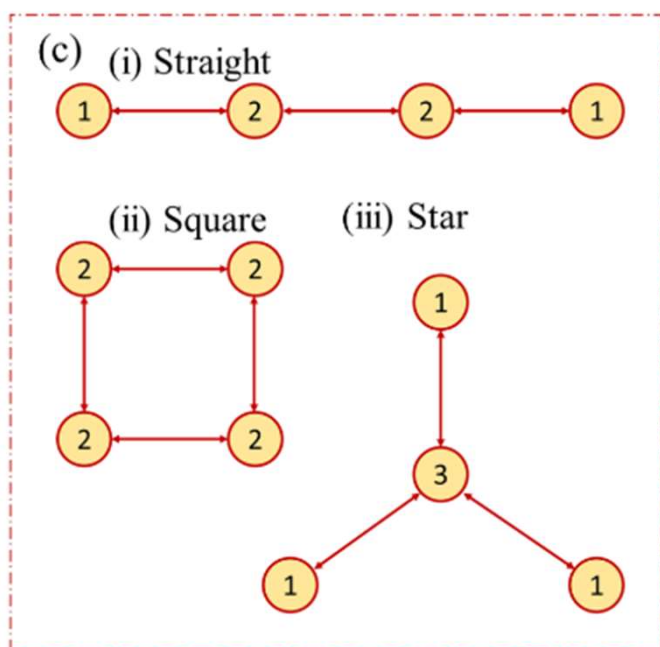
2021-CUPT

当蜡烛数量增加到4时，可能的拓扑排列也增多

星形

直线形

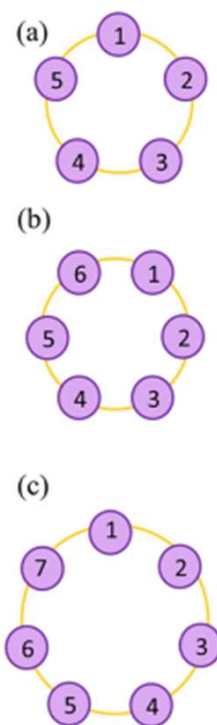
矩形



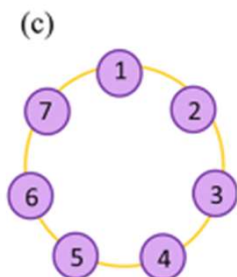
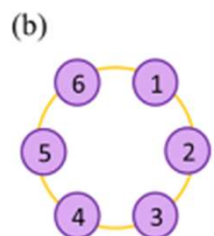
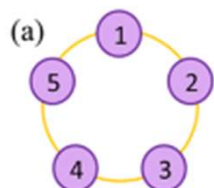
2021-CUPT

*此处变速设置为0.2x

固定link distance



在网络中，由于振子与它们最近的邻居局部耦合，所有的振子都具有2度。



从图表中可以看出：

- 如果网络中的振荡器数量是偶数，则在振荡器之间存在clustering形式的全局同步，其中相邻的振荡器被锁定在180度相移，而交替的振荡器被锁定在0度相移；
- 在含 $N > 3$ 的奇数振子的环形网络中，全局同步的存在；
- 由偶数振子组成的网络所表现出的动力学与由奇数振子组成的网络所表现出的动力学不同！

实验与理论解释相符！

在 $d = 3$ 时，由于相邻振荡器的交替旋涡脱落，相邻的振荡器有呈现反相位同步的趋势。如果网络中的振荡器数量是偶数，则在振荡器之间存在clustering形式的全局同步，其中相邻的振荡器被锁定在180度相移，而交替的振荡器被锁定在0度相移。因此，只有当振荡器的数量为偶数而不是奇数时，环形网络才能在此 d 值处保持全局同步；