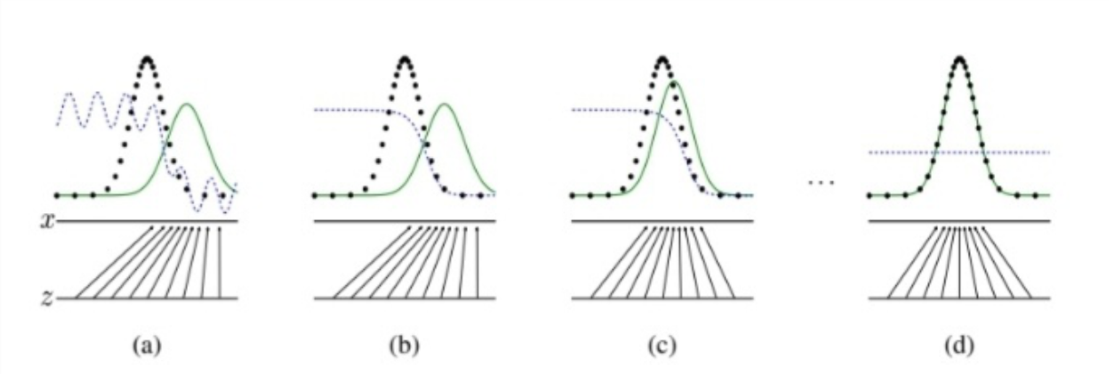
사전에 알아야할 개념

- 이미지에 대한 확률 분포 ⇒ 사람의 얼굴에도 통계적인 평균치 존재
- 다 변수 확률 분포

- 생성모델이란? 실존하진 않지만 있을 법한 이미지를 생성할수 있는 모델 의미
  ⇒ 통계적인 모델로 만들수 있다.

  목표: 이미지 데이터의 분포를 근사하는 G를 만드는것이 생성 모델의 목표



시간이 지나면서 생성모델 G가 원본데이터 분포를 학습

— : 생성모델 분포, — : 원래 데이터 분포

학습이 잘 되었다면 통계적으로 평균적인 특징을 가지는 데이터 생성

GAN

- 생성자와 판별자 두개의 네트워크를 활용한 생성 모델
- 목적 함수를 통해 생성자는 이미지 분포를 학습 할 수 있다.

$$\min_G \max_D V(D, G) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}\sim p_{\text{data}}(\boldsymbol{x})}[\log D(\boldsymbol{x})] + \mathbb{E}_{\boldsymbol{z}\sim p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})}[\log(1 - D(G(\boldsymbol{z})))].$$

생성자: $G(z)$ = new data instance ⇒ 학습이 다 된후에 사용

판별자: $D(x)$ = Probability : (Real : 1 ~ Fake : 0) ⇒ 생성자가 학습을 잘 시킬수 있도록 도와줌

목적함수 식 해석

$\min_G \max_D$: 생성자는 ⇓ (G), 판별자는 ⇑ (D)

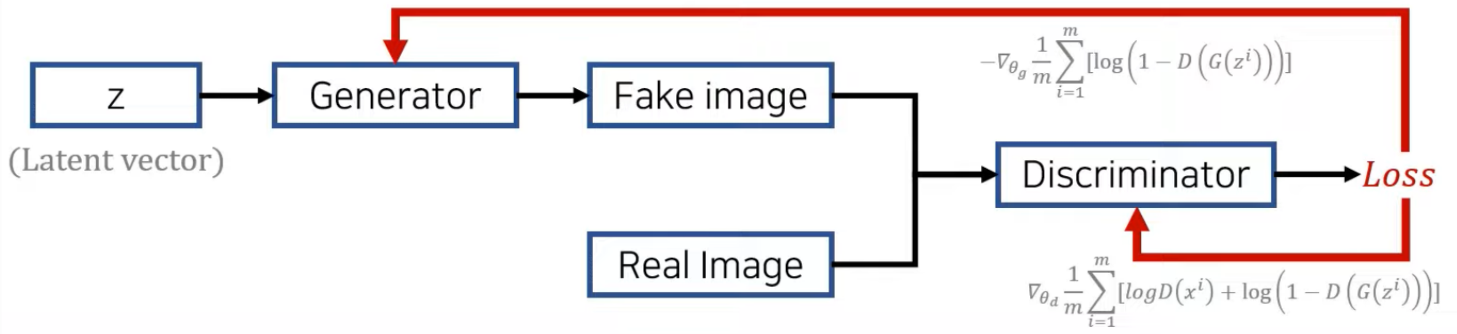
P_{data} : 원본 데이터의 분포

$E_{x\sim P_{data}(x)}[\log D(x)]$: 원본 데이터에서 x 하나의값을 꺼내서 D에 넣고 log를 씌운 값의 기댓값

$P_z(z)$: noise 의 분포

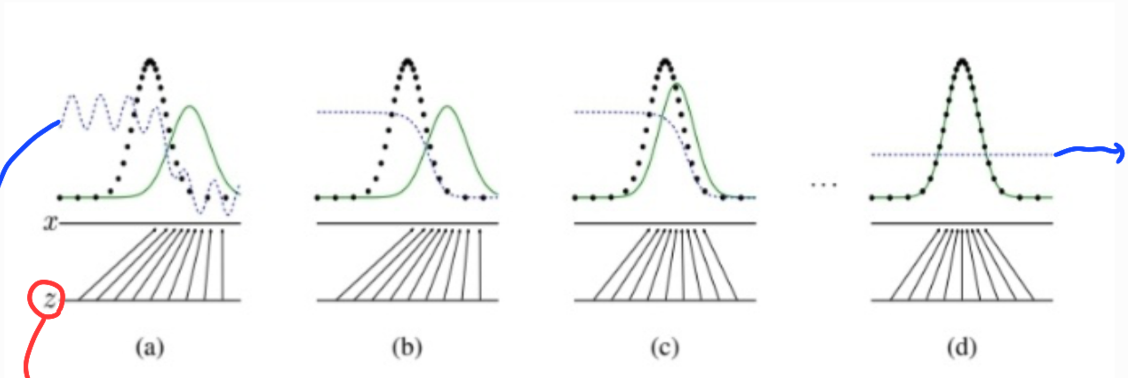
$E_{z\sim P_z(z)}[\log(1-D(G(z)))]$: 노이즈에서 랜덤하게 z를 뽑고 생성자 G에 넣고 그 가짜 이미지를 D에 넣는다.
이 값에서 1을 빼주고 log를 씌운 것의 기댓값

$\log(D(x))$ 에대해선 1을 반환할수 있도록 학습, $G(z)$ 에대해선 0을 반환할수 있도록 학습



GAN의 수렴 과정

- 목표 $P_g \to P_{data}$, $D(G(z)) \Rightarrow \frac{1}{2}$ ⇒ 생성자가 내보낸 가짜이미지를 D는 더이상 구분 못함



→ $\frac{1}{2}$로 수렴

매번 z를 샘플링해서 생성자 x에 넣음. z의 domain에서 x의 domain으로 매핑

판별 모델의 분포

: 학습이 완료된 후 검은색(= original image)가 아닌 초록색(= 생성모델) 상에 있는 데이터는 new image

$P_g \to P_{data}$ 수렴 증명

- Global Optimality

명제: $$D_G^*(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{data}(\boldsymbol{x})}{p_{data}(\boldsymbol{x}) + p_g(\boldsymbol{x})}$$ ⇒ G : fixed

$$V(G,D) = E_{x \sim P_{data}(x)}[\log D(x)] + E_{z \sim p(z)}[\log(1 - D(G(z)))]$$ ⋯ 목적함수

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$V(G,D) = \int_{\boldsymbol{x}} p_{\text{data}}(\boldsymbol{x}) \log(D(\boldsymbol{x}))dx + \int_{z} p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) \log(1 - D(g(\boldsymbol{z})))dz$$
$$= \int_{\boldsymbol{x}} p_{\text{data}}(\boldsymbol{x}) \log(D(\boldsymbol{x})) + p_g(\boldsymbol{x}) \log(1 - D(\boldsymbol{x}))dx$$

⇓

$f(y) = a\log y + b\log(1-y)$ ⇒ $[0,1]$에 $\frac{a}{a+b}$에서 극대값 가짐

- Global probability

명제: $p_g = p_{data}$ (생성자의 분포는 원본 분포를 따라간다)

$$
\begin{aligned}
C(G) &= \max_D V(G,D) \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}[\log D_G^*(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z}[\log(1-D_G^*(G(z)))] \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}[\log D_G^*(x)] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}[\log(1-D_G^*(x))] \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log \frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right]
\end{aligned}
$$

$$D_G^*(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}$$

$$= E_{x\sim p_{data}(x)}\left[\log \frac{2\times p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + E_{x\sim p_g(x)}\left[\log \frac{2\times p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] - \log(4)$$

$$= KL\left(p_{data} \,\|\, \frac{p_{data}(x)+p_g(x)}{2}\right) + KL\left(p_g \,\|\, \frac{p_{data}(x)+p_g(x)}{2}\right) - \log(4)$$

$$KL(p_{data}\|p_g) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{data}(x)\log\left(\frac{p_{data}(x)}{p_g(x)}\right)dx$$

$$= 2\times JSD(p_{data}\|p_g) - \log(4)$$

$\Downarrow$

min JSD = 0

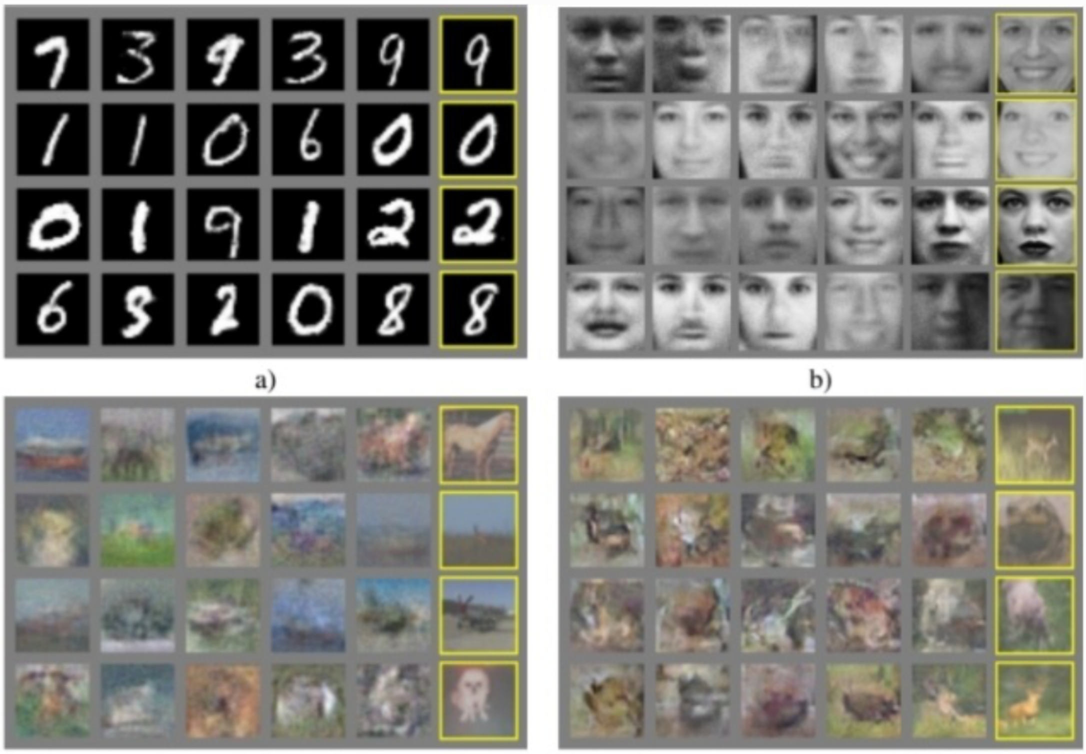
$$JSD(p\|q) = \frac{1}{2}KL\left(p\,\|\,\frac{p+q}{2}\right) + \frac{1}{2}KL\left(q\,\|\,\frac{p+q}{2}\right)$$

↳ Distance matrix로 사용 가능

if $p_{data} == p_g$ 일때 JSD는 0 ⇒ 최소값으로 $-\log(4)$ 값을 얻음

global optimal

Experiments



a) b) c) d)

=> 이미지는 Random 하게 선택한 이미지이다.

=> train set을 기억하는 것이 아니다.

Model	MNIST	TFD
DBN [3]	138 ± 2	1909 ± 66
Stacked CAE [3]	121 ± 1.6	$\mathbf{2110 \pm 50}$
Deep GSN [6]	214 ± 1.1	1890 ± 29
Adversarial nets	$\mathbf{225 \pm 2}$	$\mathbf{2057 \pm 26}$

=> 다른 모델들에 비해 뛰어나다

=> 이미지가 sharp하게 나온다.

=> latent space 상에서 선형적으로 interpolate 해서 sampling 한 이미지

=> 1~5 까지 있을법한 이미지가 나옴