VAE

Auto-Encoding Variational Bayes

Image generator

김영민 김지수 이다인

INDEX

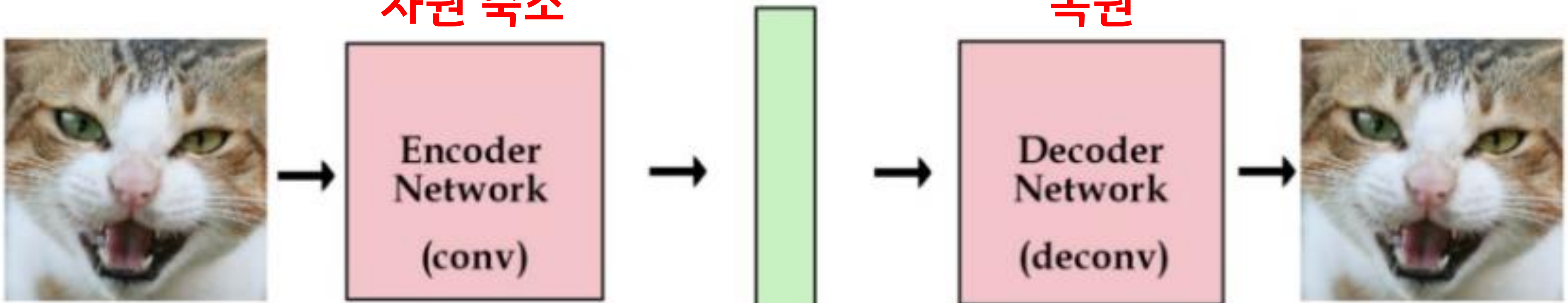
1. AE vs VAE
2. generative model
3. Decoder
4. Encoder / Variational Inference
5. ELBO(Evidence LowerBOund)
6. Loss function
7. RESULT

AE란?

Auto-Encoder

차원 축소

복원



고차원의
Input data

Input data에
가까운 데이터로 복원

Encoding 목적

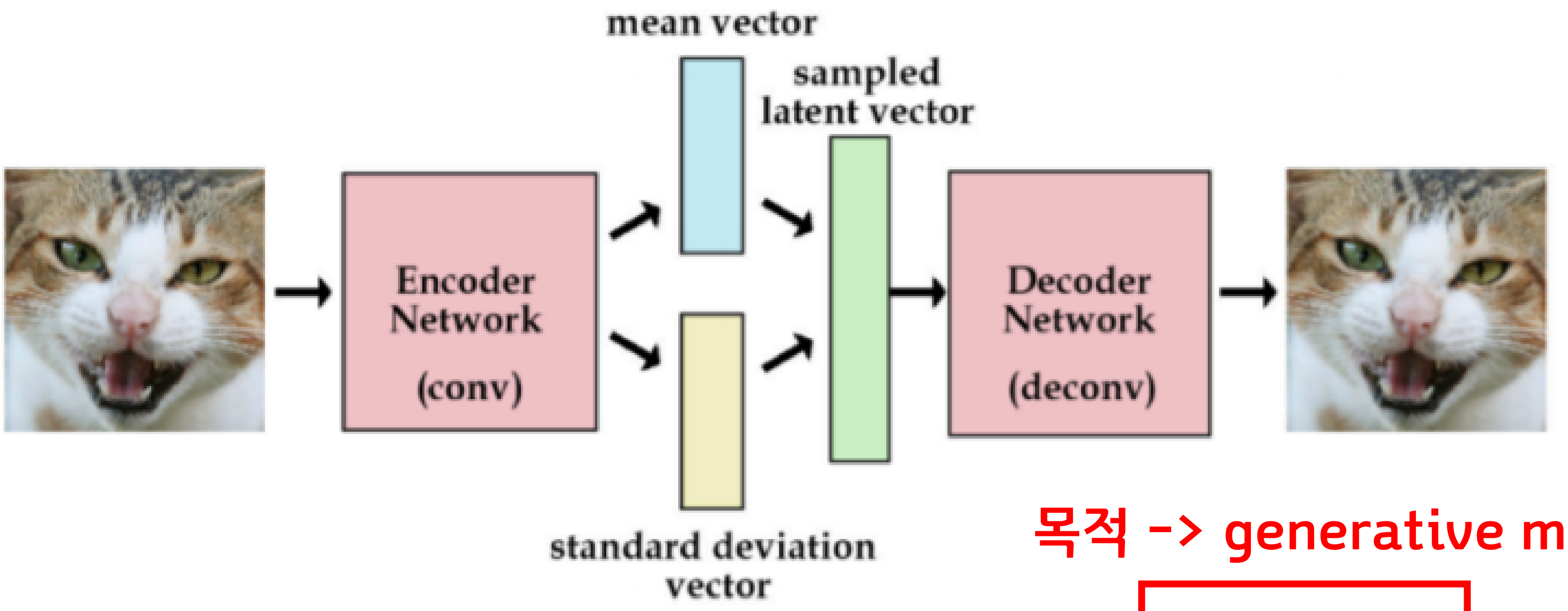
Data가 가진 수십, 수백개의 변수로부터 정말 중요한 몇가지의 변수를 extraction하는 것

Decoding

다시 입력 data에 가까운 고차원 데이터로 복원

VAE란?

Variational Auto-Encoder



목적 -> generative model

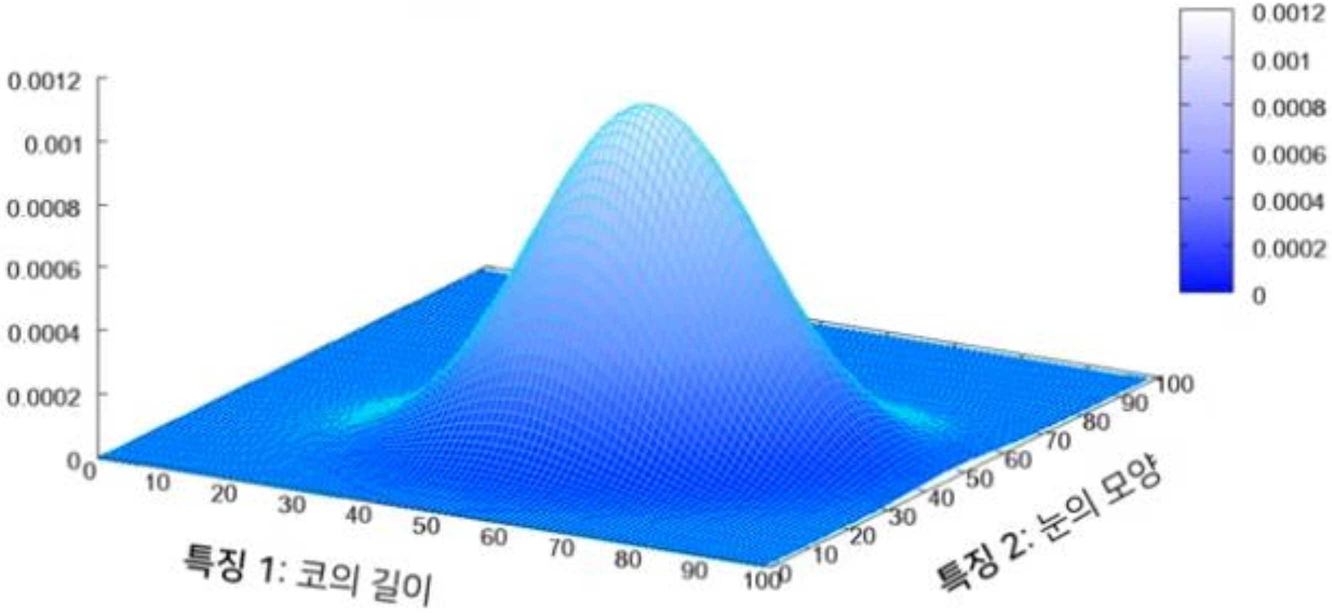
Encoding

Decoder에 어떤 입력
latent variable z를 넣을지 학습

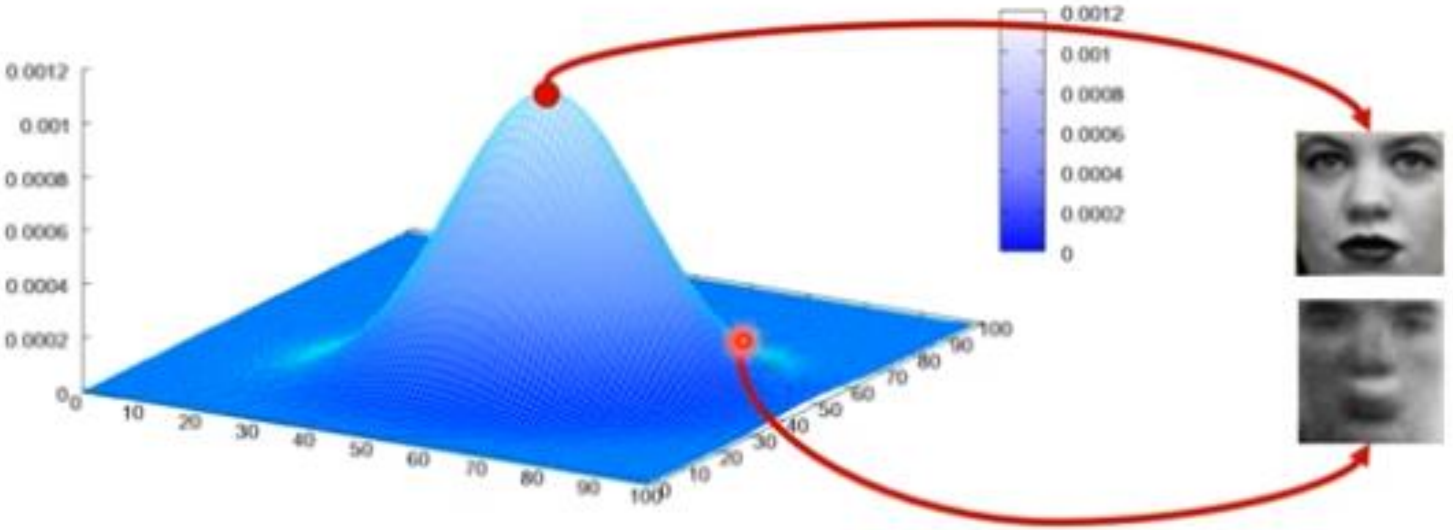
Decoding

입력 데이터와 유사한
새로운 데이터 생성

Generative Model이란?

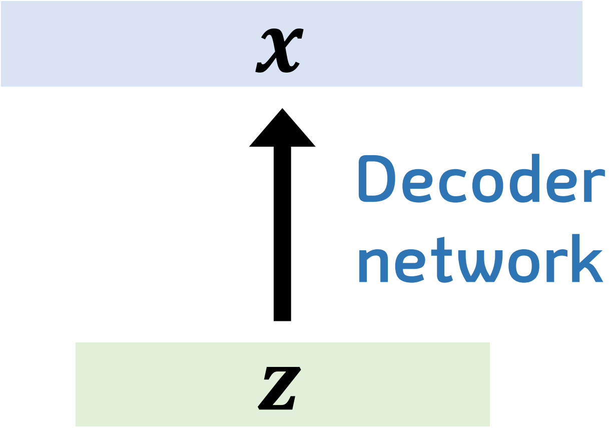


입력 데이터의
분포를 잘 근사하는 모델을 생성



Decoder

Decoder



z latent variable의 확률분포

$$p_\theta(z)$$

z가 given일 때 x의 확률분포

$$p_\theta\left(x|z^{(i)}\right)$$

어떻게 학습?

네트워크의 출력값이 있을 때
우리가 원하는 정답 x가 나올 확률이 높길바람

= x의 likelihood를 최대화하고 싶다

Maximize

$$p_\theta(x) = \int p_\theta(z)p_\theta(x|z)dz$$

Encoder/ Variational Inference

$$p_\theta(x) = \int p_\theta(z)p_\theta(x|z)\,\boxed{dz}$$

Intractable to compute p(x|z) for every z

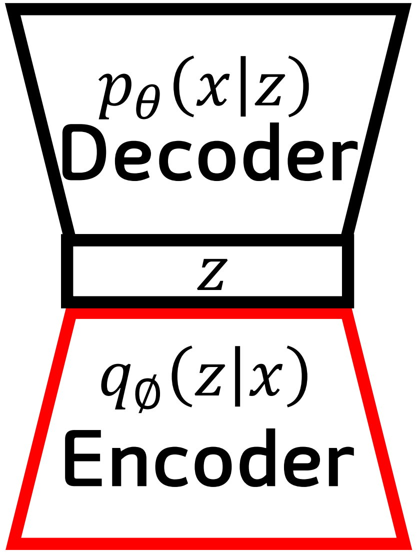
Simple gauusian prior

Decoder neural network

Intractable

$$p_\theta(z|x) = p_\theta(x|z)p_\theta(z)/\boxed{p_\theta(x)}$$

Variational Inference



Encoder 등장

-> 실제 $p_\theta(z|x)$를 가장 근사화하는 네트워크
(p는 true값, q는 추정값)

ELBO

$$\log p_\theta(x^{(i)}) = E_{z\sim q_\emptyset(z|x^{(i)})}\left[\log p_\theta(x^{(i)})\right]$$

Bayes' Rule

$$= E_z\left[\log \frac{p_\theta(x^{(i)}|z)p_\theta(z)}{p_\theta(z|x^{(i)})}\right]$$

$$= E_z\left[\log \frac{p_\theta(x^{(i)}|z)p_\theta(z)}{p_\theta(z|x^{(i)})}\frac{q_\emptyset(z|x^{(i)})}{q_\emptyset(z|x^{(i)})}\right]$$

Monte-carlo method
&
KL divergence

$$= E_z\left[\log p_\theta(x^{(i)}|z)\right] - E_z\left[\log \frac{q_\emptyset(z|x^{(i)})}{p_\theta(z)}\right] + E_z\left[\log \frac{q_\emptyset(z|x^{(i)})}{q_\emptyset(z|x^{(i)})}\right]$$

$$= E_z\left[\log p_\theta(x^{(i)}|z)\right] - D_{KL}(q_\emptyset(z|x^{(i)})||\ p_\theta(z)) + D_{KL}(q_\emptyset(z|x^{(i)})||\ p_\theta(z|x^{(i)}))$$

***참고**

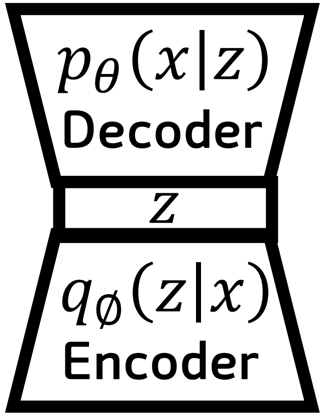
Monte-carlo approximation $E_{p(x)}[f(x)] = \int f(x)p(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), x_i \sim p(x)$

KL-divergence $KL(P||Q)=\sum P(x)\log\frac{P(x)}{Q(x)}$

ELBO

$$\underset{\mathcal{L}(x^{(i)},\theta,\emptyset)}{\boxed{E_z\left[logp_\theta\left(x^{(i)}|z\right)\right] - D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)||\ p_\theta(z)\right)}} + \underbrace{D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)||\ p_\theta\left(z|x^{(i)}\right)\right)}_{\geq 0}$$

Maximize



ELBO : $E_z\left[logp_\theta\left(x^{(i)}|z\right)\right] - D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)||\ p_\theta(z)\right)$

Loss Function

$$\underbrace{E_z\left[\log p_\theta\left(x^{(i)}|z\right)\right]}_{} - \underbrace{D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)||\ p_\theta(z)\right)}_{} + \underbrace{D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)||\ p_\theta\left(z|x^{(i)}\right)\right)}_{}$$

Reconstruction term

- 이상적인 샘플링 함수로부터 얼마나 잘 복원을 했는가

Regularlization term

- 이상적인 샘플링 함수가 최대한 prior과 같도록 만들어줌
- 여러 샘플중에서 prior과 유사한 값을 샘플링하도록 조건 부여

두 확률분포 사이의 거리

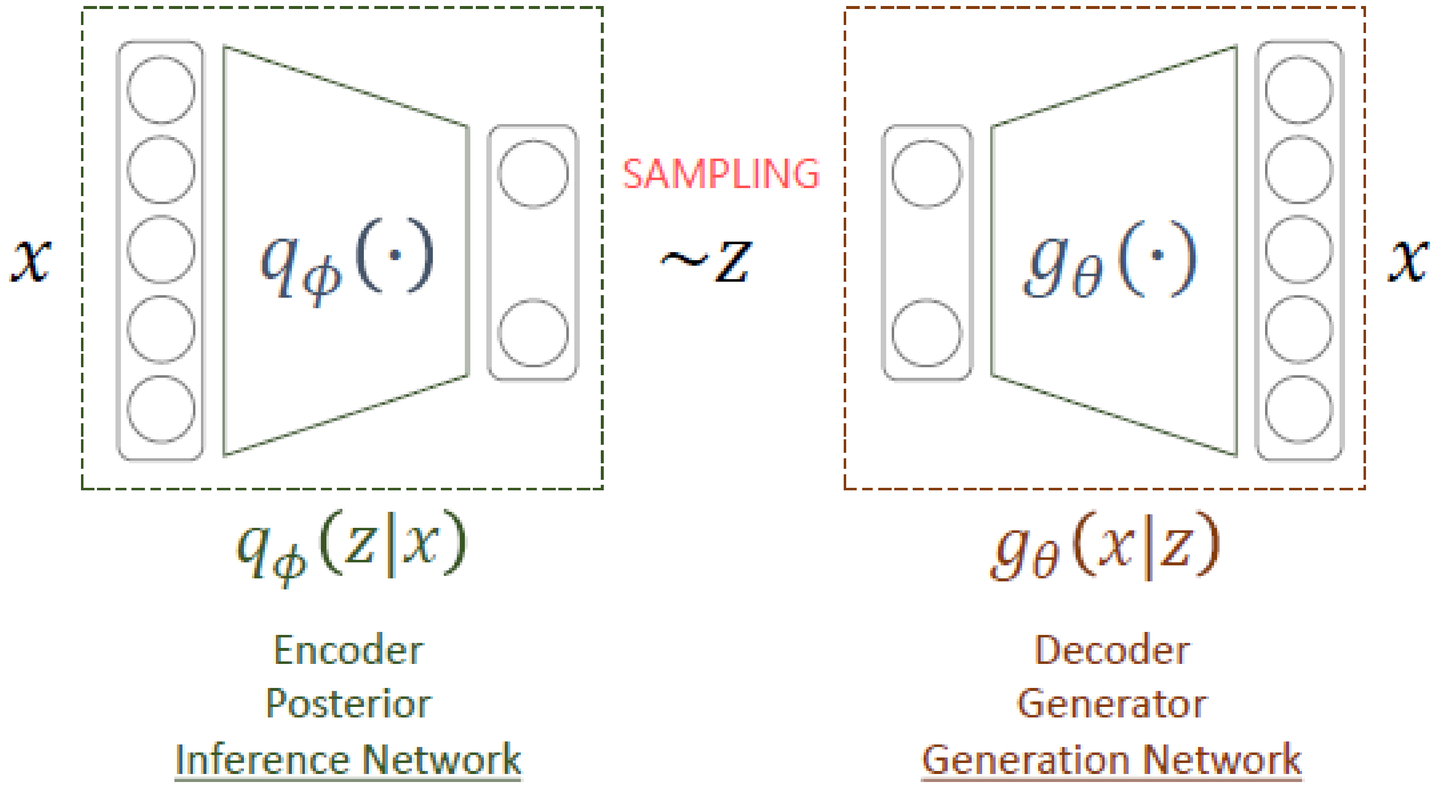
- 이상적인 샘플링 함수 $q_\emptyset\left(z|x^{(i)}\right)$와 샘플링 함수 $p_\theta\left(z|x^{(i)}\right)$의 거리

Final Optimization Problem

$$\arg\min_{\phi,\theta} \sum_i -\mathbb{E}_{q_\phi(z|x_i)}\left[\log\left(p(x_i|g_\theta(z))\right)\right] + KL\left(q_\phi(z|x_i)||p(z)\right)$$

Loss Function

$$\arg\min_{\phi,\theta} \sum_i \underbrace{-\mathbb{E}_{q_\phi(z|x_i)}\left[\log\left(p(x_i|g_\theta(z))\right)\right] + KL\left(q_\phi(z|x_i)\|p(z)\right)}_{L_i(\phi,\theta,x_i)}$$



Loss Function

$$\mathrm{L_i}(\emptyset, \theta, \mathrm{x_i}) = \underbrace{E_z\left[log p_\theta\left(x^{(i)} | \mathrm{g}_\theta(z)\right)\right]}_{\text{Reconstruction Error}} - \underbrace{D_{KL}\left(q_\emptyset\left(z \middle| x^{(i)}\right) || \ p_\theta(z)\right)}_{\text{Regularlization}}$$

Reconstruction Error

- 현재 샘플링용 함수에 대한 negative log likelihood
- $\mathrm{x_i}$에 대한 복원 오차 (AutoEncoder 관점)

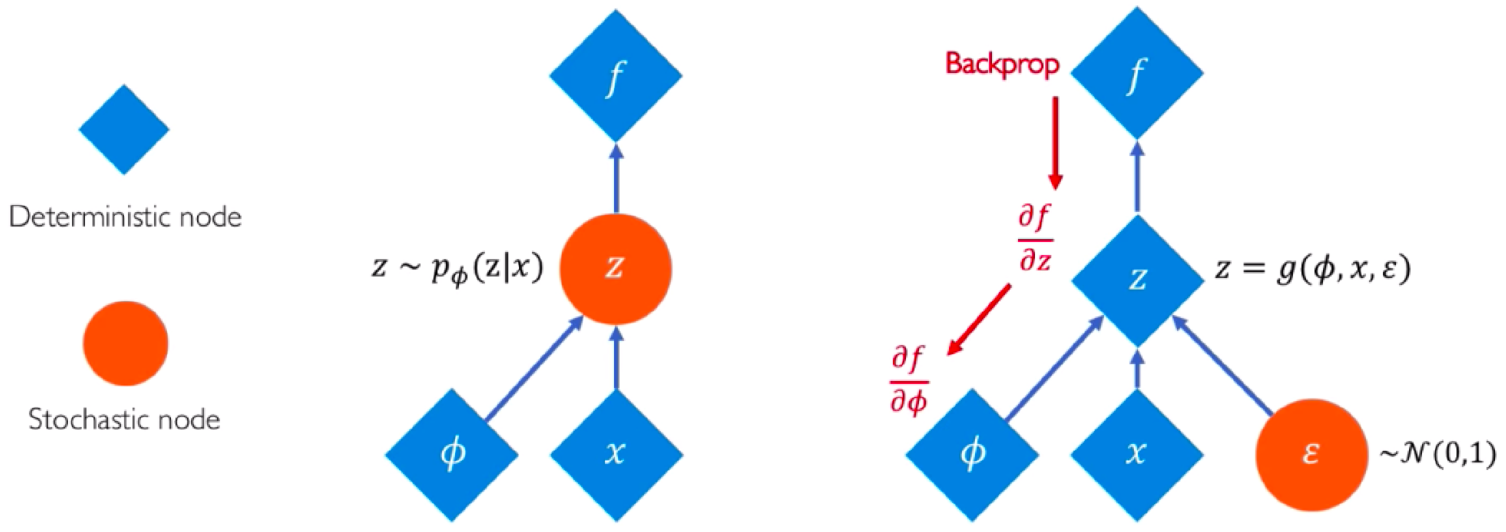
Regularlization

- 현재 샘플링용 함수에 대한 추가 조건
- 샘플링의 용의성/생성 데이터에 대한 통제성을 위한 조건을 prior에 부여하고 이와 유사해야 한다는 조건을 부여

$\mathrm{g}_\theta(z)$: 원 데이터에 대한 likelihood
$q_\emptyset\left(z \middle| x^{(i)}\right)$: Variational infernce를 위한 approximation class 중 선택
$p_\theta(z)$: 다루기 쉬운 확률 분포 중 선택

Loss Function

Reparameterization Trick



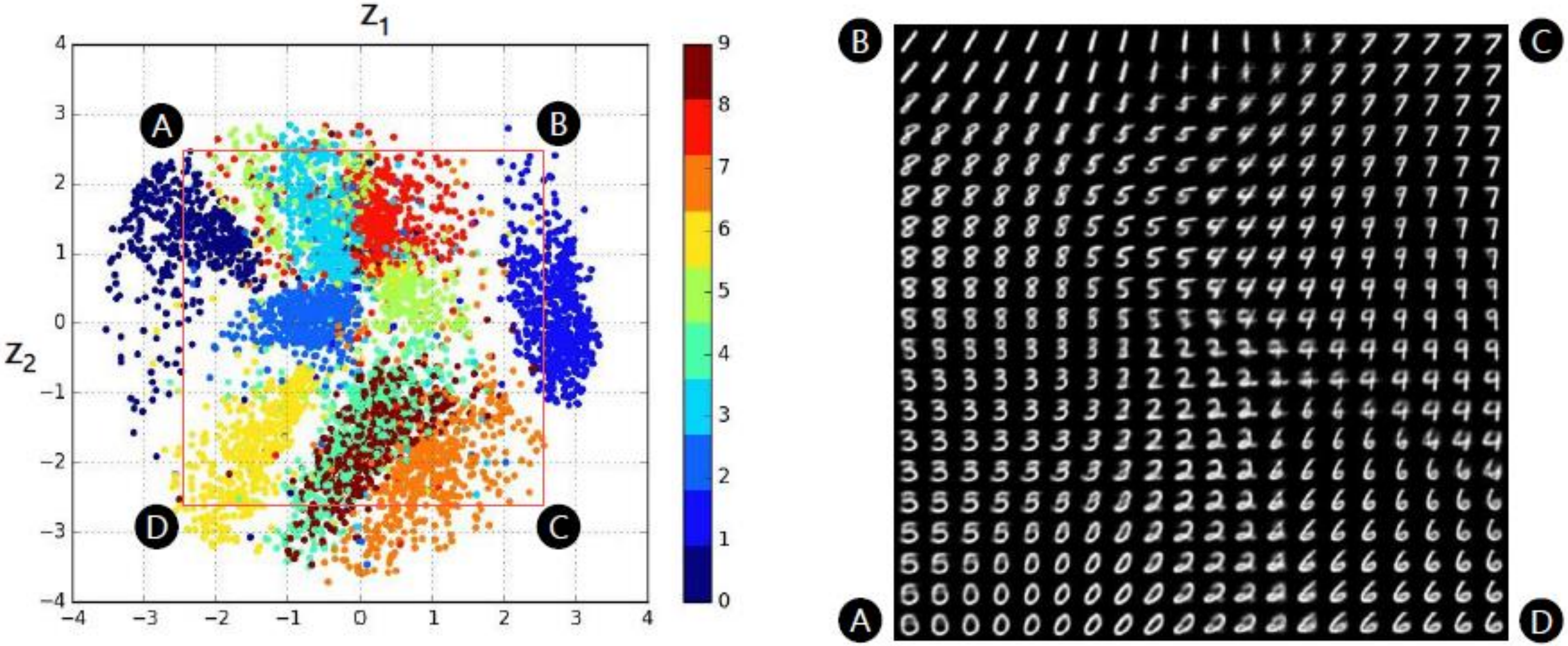
Original form

Reparametrized form

$$x \sim N(\mu_\phi + \sigma_\phi^2)$$

$$x = \mu_\phi + \sigma_\phi^2 * \epsilon$$
$$\epsilon \sim N(0,1)$$

RESULT



감사합니다 ^^