



Politechnika Gdańska
Wydział Elektroniki,
Telekomunikacji i Informatyki



Katedra:	Architektury Systemów Komputerowych
Imię i nazwisko dyplomanta:	Wojciech Pasternak
Nr albumu:	137361
Forma i poziom studiów:	Stacjonarne jednolite studia magisterskie
Kierunek studiów:	Informatyka

Praca dyplomowa magisterska

Temat pracy:
Obliczanie zer wielomianów

Kierujący pracą:
dr hab. inż. Robert Janczewski

Zakres pracy:
Obliczanie pierwiastków wielomianów i porównanie służących do tego struktur

Gdańsk, 2016

Spis treści

1	Przegląd literatury	1
1.1	Wielomiany	1
1.1.1	Definicja	1
1.1.2	Podstawowe działania na wielomianach	1
1.1.3	Dodatkowe twierdzenia dotyczące wielomianów	7
1.2	Eliminacja pierwiastków wielokrotnych	9
1.3	Twierdzenie Sturma	11
1.4	Biblioteka Mpir	13
1.4.1	Podstawowe informacje	13
1.4.2	Instalacja	15
1.4.3	Operacje na liczbach całkowitych	16
1.4.4	Operacje na liczbach wymiernych	20
2	Opis rozwiązania	23
2.1	Podział na moduły	23
2.1.1	Statyczna biblioteka	23
2.1.2	Aplikacja konsolowa	24
2.1.3	Testy jednostkowe	24
2.2	Główne klasy	25
2.2.1	CharsConstants	25
2.2.2	StringManager	26
2.2.3	Parser	27
2.2.4	Number	27
2.2.5	Polynomial	30
2.3	Główne funkcje	34
2.3.1	Metody klasy Parser	34

Rozdział 1

Przegląd literatury

1.1 Wielomiany

1.1.1 Definicja

Definicja 1 *Wielomianem zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie:*

$$W(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1.1)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in R, n \in N$

Liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu, natomiast n nazywamy stopniem wielomianu.

Szczególnym przypadkiem wielomianu jest jednomian.

Definicja 2 *Jednomianem zmiennej rzeczywistej x nazywamy wielomian, który posiada co najwyżej jeden wyraz niezerowy i określamy wzorem:*

$$W(x) = ax^n, \text{ gdzie } a \in R, n \in N \quad (1.2)$$

Można, więc rozumieć wielomian jako skończoną sumę jednomianów. Jednomianem stopnia zerowego jest stała, pojedyncza liczba rzeczywista, która w szczególności może być zerem.

Definicja 3 *Wielomianem zerowym nazywamy, wielomian wyrażony wzorem:*

$$W(x) = 0 \quad (1.3)$$

W dalszej części, jeżeli nie zaznaczymy inaczej, mówiąc wielomian, będziemy mieli na myśli pewien wielomian, nie będący wielomianem zerowym.

1.1.2 Podstawowe działania na wielomianach

Na wielomianach, tak jak na liczbach możemy wykonywać podstawowe działania. Należą do nich: porównywanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, a także obliczanie reszty z dzielenia

oraz NWD (największego wspólnego dzielnika). Jako, że wielomian zmiennej x możemy traktować jak funkcję jednej zmiennej, możemy także policzyć z niego pochodne.

Porównywanie wielomianów

Porównywanie należy do najbardziej elementarnych działań na wielomianach. Wymaga ono zwykłego porównania kolejnych współczynników, a jego długość trwania, zależy od ich liczby. Zapoznajmy się z twierdzeniem dotyczącym operacji porównywania wielomianów.

Twierdzenie 1 *Dwa wielomiany uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia, a ich kolejne współczynniki są równe.*

Powyższe twierdzenie nie jest złożone, nie mniej w celu pełnego zrozumienia, zilustrujmy je przykładem.

Przykład 1 *Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .*

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

Wielomiany W_1 oraz W_2 są równe wtedy i tylko wtedy gdy $\forall i \in N \ a_i = b_i$.

Można zauważyć, potencalny wpływ reprezentacji wielomianu na szybkość operacji porównania. Gdy mamy do czynienia z wielomianem, w którym uwzględniamy każdy współczynnik, także gdy jest on zerowy, złożoność czasowa porównania jest liniowa względem stopnia wielomianu. Natomiast w przypadku, gdy pomijamy wszystkie zerowe współczynniki wielomianu, złożoność również jest liniowa, ale tym razem względem liczby niezerowych współczynników wielomianów. Jak widać, w sytuacji, gdy stopień wielomianu jest znacznie większy od liczby zerowych współczynników, reprezentacja wielomianu ma niebagatelne znaczenie.

Dodatkowo, podobnie jak w przypadku porównywania liczb i sprawdzania kolejnych bitów, operacja porównania kończy się w momencie stwierdzenia, że porównywane współczynniki są różne lub porównaliśmy ze sobą już wszystkie współczynniki. Wynika z tego, że zakładając stały czas porównywania dwóch liczb, będącymi współczynnikami wielomianów, operacja porównania różnych wielomianów nigdy nie jest dłuższa od stwierdzenia, że porównywane wielomiany są równe.

Suma wielomianów

Dodawanie to kolejne elementarne działanie na wielomianach, które nie wymaga wykonywania skomplikowanych obliczeń.

Twierdzenie 2 *Aby dodać dwa wielomiany, należy dodać ich wyrazy podobne.*

Podobnie jak w przypadku porównywania czas dodawania wielomianów jest liniowy, a ich reprezentacja ma zasadniczy wpływ na liczbę operacji dodawania. Pokażmy zastosowanie powyższego twierdzenia na przykładzie.

Przykład 2 Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \quad (1.5)$$

Zdefiniujmy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) + W_2(x)$. Wówczas:

$$W_3(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + a_n + b_n \quad (1.6)$$

Na powyższym przykładzie łatwo zaobserwować, że stopień sumy dwóch wielomianów nie może być większy od większego ze stopni dodawanych wielomianów. Znajduje to potwierdzenie w twierdzeniu, dotyczącym stopnia sumy wielomianów.

Twierdzenie 3

$$\deg(W_1 + W_2) \leq \max(\deg(W_1), \deg(W_2)) \quad (1.7)$$

W przedstawionym twierdzeniu, należy uwagę na operator mniejsze równe. W przypadku gdy oba te wielomiany są tego samego stopnia, o przeciwnym współczynniku przy najwyższej potędze, to stopień ten będzie mniejszy.

Różnica wielomianów

Odejmowanie to operacja bliźniacza do dodawania, nie tylko w przypadku liczb, ale także w przypadku wielomianów. By pokazać olbrzymie podobieństwo tych operacji, zacznijmy od zapoznania się z definicją wielomianu przeciwnego.

Definicja 4 Wielomianem przeciwnym nazywamy wielomian, którego wszystkie współczynniki są przeciwne do danych.

Spójrzmy na poniższy przykład, pokazujący, że dla każdego wielomianu można bardzo prosto zdefiniować wielomian przeciwny, zmieniając znak wszystkich jego współczynników.

Przykład 3 Mamy dany wielomian W_1 .

$$W_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1.8)$$

Zdefiniujmy drugi wielomian: $W_2(x) = -W_1(x)$. Wówczas:

$$W_2(x) = -a_0x^n + (-a_1)x^{n-1} + \dots + (-a_{n-1})x + (-a_n) \quad (1.9)$$

Wiemy już, czym jest wielomian przeciwny. Przedstawmy teraz twierdzenie mówiące jak odejmować od siebie wielomiany.

Twierdzenie 4 Aby obliczyć różnicę wielomianów W_1 i W_2 , należy dodać ze sobą wielomiany W_1 i $-W_2$, czyli wielomian przeciwny do wielomianu W_2 .

Jak widać, przedstawione twierdzenie potwierdza analogię obliczania różnicy i sumy wielomianów. Spójrzmy na przykład, pokazujący jak obliczać różnicę wielomianów, potrafiąc już je do siebie dodawać.

Przykład 4 Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

Zdefiniujmy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) - W_2(x)$. Wówczas:

$$W_3(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n \quad (1.11)$$

Warto zauważyć, że wielomianem neutralnym ze względu na dodawanie i odejmowanie jest wielomian $W(x) = 0$. Oznacza to, że po dodaniu lub odjęciu wielomianu neutralnego, dostaniemy wynik, będący danym wielomianem.

Iloczyn wielomianów

Mnożenie to kolejna operacja zaliczająca się do podstawowych działań na wielomianach. Jego zasady przypominają nieco zwykłe mnożenie. Dokonujemy przemnożenia odpowiednich wyrazów, z tą różnicą, że w tym przypadku po prostu dodajemy wartości potęg dla odpowiednich współczynników. Zapoznajmy się z twierdzeniem, mówiącym dokładnie jak należy obliczać iloczyn wielomianów.

Twierdzenie 5 Aby pomnożyć dwa wielomiany, należy wymnożyć przez siebie wyrazy obu wielomianów, a następnie dodać do siebie wyrazy podobne.

Jak wynika z przedstawionej definicji poza mnożeniem dwóch liczb, mnożenie wielomianów w części polega na redukcji wyrazów podobnych, czyli operacji bazującej na dodawaniu. Spójrzmy na przykład, pokazujący jak definiuje się wielomian, będący iloczynem dwóch wielomianów.

Przykład 5 Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned} \quad (1.12)$$

Zdefiniujmy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) * W_2(x)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} W_3(x) &= (a_0b_0)x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^{n+m-2} + \dots \\ &\quad + (a_{n-2}b_m + a_{n-1}b_{m-1} + a_nb_m)x^2 + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x + a_nb_m \end{aligned} \quad (1.13)$$

Można zauważyć, że po wymnożeniu wszystkich współczynników wielomianu liczba wyrazów iloczynu wynosi $(n+1)(m+1)$. Po dokonaniu redukcji wyrazów podobnych liczba ta ulega zmniejszeniu do wartości $n+m+2$. Oznacza to zmianę liczby wyrazów z wartości kwadratowej, do

wartości liniowej względem stopni wielomianów. Liczba wyrazów podobnych, po przemnożeniu dwóch wielomianów jest symetryczna względem wykładników potęg poszczególnych współczynników. Można zauważyć, że skrajne wyrazy posiadają tylko po jednym wyrazie potęgi, a zbliżając się do współczynników o środkowych indeksach, liczba ta wzrasta, aż do wartości równej połowie stopnia otrzymanego wielomianu.

Widzimy, że czas operacji mnożenia wielomianów jest kwadratowy, względem stopni mnożonych przez siebie czynników. Należy zauważyć, że jeżeli użyjemy reprezentacji wielomianu, w których posiadamy informację tylko o jego niezerowych współczynników, to czas operacji mnożenia będzie nadal kwadratowy, jednak względem liczby tych współczynników. Dla wielomianów wysokich stopni, w których zaledwie kilka współczynników jest niezerowych różnica ta może być negatywna i w skrajnych przypadkach czas operacji może zmniejszyć się z kwadratowego, do czasu stałego.

Na podstawie powyższego przykładu, możemy także zaobserwować, że stopień wielomianu, będącego iloczynem dwóch wielomianów niezerowych, jest standardowo równy sumie stopni tych wielomianów. Wyjątkiem jest sytuacja gdy jeden z czynników jest wielomianem zerowym. Wówczas wynik takiej operacji również będzie wielomianem zerowym. Fakt ten znajduje potwierdzenie w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 6

$$\begin{aligned} \deg(W_1 * W_2) &= \deg(W_1) + \deg(W_2), \text{ dla } W_1(x) \neq 0, W_2(x) \neq 0 \\ W_3(x) &= W_1(x) * W_2(x) = 0, \text{ w pozostałych przypadkach} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Z powyższego twierdzenia można zauważyć, że stopień otrzymanego wielomianu nigdy nie będzie wyższy od dwukrotności większego ze stopni mnożonych wielomianów.

Iloraz wielomianów

Dzielenie to zdecydowanie najtrudniejsza z elementarnych operacji na wielomianach. Aby dobrze zrozumieć jego zasady zapoznajmy się z definicją podzielności wielomianów oraz dzielnika wielomianu.

Definicja 5 Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że spełniony jest warunek $W(x) = P(x) * Q(x)$. Wówczas: wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$, zaś wielomian $P(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Bardzo ważnym aspektem obliczania ilorazu wielomianów jest reszta z dzielenia. Spójrzmy na poniższą definicję.

Definicja 6 Wielomian $R(x)$ nazywamy resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że spełniony jest warunek $W(x) = P(x) * Q(x) + R(x)$.

Łatwo zauważyć analogię w wyżej przedstawionych wzorach. Różnią się one właśnie wielomianem $R(x)$, czyli resztą z dzielenia. Gdy jest ona wielomianem zerowym, to znaczy, że mamy do czynienia z dzieleniem bez reszty i mówimy o podzielności dwóch wielomianów. Spórzmy na przykład, w którym zdefiniowane zostały dwa wielomiany, będące ilorazem i resztą z dzielenia dwóch wielomianów.

Przykład 6 *Mamy dane wielomian W oraz wielomian P .*

$$\begin{aligned} W(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ P(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned} \quad (1.15)$$

Zdefiniujemy wielomian: $Q(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$ oraz $R(x) = W(x) \bmod P(x)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} Q(x) &= c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \dots + c_{n-m-1}x + c_{n-m}, \text{ gdzie } c_0 \neq 0 \\ R(x) &= d_0x^{n-m-1} + d_1x^{n-m-2} + \dots + d_{n-m-2}x + d_{n-m-1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Zwróćmy uwagę na potęgi stojące przy najwyższych potęgach wielomianów $Q(x)$ oraz $R(x)$. Widzimy, że stopień ilorazu wielomianów jest zawsze równy różnicy stopni wielomianów, będących dzielnią i dzielnikiem. Najważniejszym aspektem jest jednak fakt, że stopień reszty z dzielenia wielomianów jest zawsze mniejszy od stopnia ilorazu. Nie można natomiast ustalić jego wartości, bez dokładnej znajomości wielomianów W i P . W przykładzie podkreślony został fakt, że współczynnik stojący przy x , o potęgę $n - m - 1$ może być zerem. To samo tyczy się także kolejnych współczynników. Gdy wszystkie one są zerami, to znaczy, że mamy do czynienia z resztą, będącą wielomianem zerowym. Oznacza to wówczas, że wielomian W jest podzielny przez wielomian P . Poniżej znajduje się twierdzenie, o stopniach wielomianów, będących ilorazem i resztą z dzielenia.

Twierdzenie 7

$$\deg(W_1 \bmod W_2) < \deg(W_1/W_2) = \deg(W_1) - \deg(W_2) \quad (1.17)$$

Jak widać, twierdzenie potwierdza nasze obserwacje i wnioski dotyczące stopni obu wielomianów.

Pochodna wielomianu

Wielomiany jako przykład funkcji ciągłej, pozwalają na obliczanie pochodnych. By przekonać się, że jest to przykład jednej z prostszych operacji na wielomianach, zapoznajmy się z definicją.

Definicja 7 *Dany jest wielomian W , określony wzorem $W(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Pochodną wielomianu W nazywamy wielomian W' i wyrażamy wzorem:*

$$W(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} \quad (1.18)$$

Widzimy, że powstały wielomian powstał poprzez pomnożenie wartości każdego z współczynników przez stojącą przy danym wyrazie potęgę, a następnie obniżenie jej wartości o jeden. W ten

sposób potęgi wszystkich wyrazów wielomianu obniżają się. Wyjątkiem jest tutaj potęga o wartości zero, czyli stała. Pochodna z funkcji stałej jest zawsze równa zero, dlatego została pominięta w powyższym wzorze. O stopniu pochodnej wielomianu mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 8

$$\begin{aligned} \deg(W') &= \deg(W) - 1, \text{ dla } \deg(W) > 0 \\ W(x) &= 0, \text{ w pozostałych przypadkach} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Jak widać dla wszystkich wielomianów, nie będących stałą liczbową, stopień ich pochodnej ulega zmniejszeniu o jeden. Czas operacji obliczania pochodnej wielomianu jest porównywalny, z obliczaniem sumy wielomianów, gdyż wystarczy, że dokonamy jednokrotnego obliczania każdego z współczynników.

1.1.3 Dodatkowe twierdzenia dotyczące wielomianów

Istnieje mnóstwo twierdzeń dotyczących wielomianów. Zapoznajmy się z tymi, które ułatwią nam znajdowanie pierwiastków wielomianów. Zapoznajmy się z pierwszym twierdzeniem, mówiącym o możliwości zamienienia dowolnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, w wielomian o współczynnikach całkowitych.

Twierdzenie 9 *Dowolny wielomian $W_1(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0}$, o współczynnikach wymiernych, można przekształcić w wielomian $W_2(x) = k * W_1(x)$, o współczynnikach całkowitych i tych samych pierwiastkach, co wielomian W . Wówczas:*

$$k = m * NWW(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n), \text{ gdzie } m \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

Twierdzenie to oznacza, że przy dysponując wyłącznie współczynnikami, będącymi liczbami całkowitymi, jesteśmy w stanie przedstawić dowolny wielomian o współczynnikach wymiernych. Przejdźmy teraz do twierdzenia, mówiącego o wartości wielomianu w danym punkcie.

Twierdzenie 10 *Jeżeli wielomian $W(x)$ podzielimy przez dwumian $x - x_0$, to reszta z tego dzielenia jest równa wartości tego wielomianu dla $x = x_0$.*

W szczególnym przypadku reszta ta może być równa zero. Oznacza to, że liczba x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wynika z tego bezpośrednio kolejne twierdzenie, znane jako twierdzenie Bezout.

Twierdzenie 11 (Bezout) *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$.*

Dodatkowo zapoznajmy się jeszcze z krótkim dowodem poprawności powyższego twierdzenia.

Dowód Jeżeli liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W , to wielomian ten możemy wyrazić jako iloczyn dwumianu $x - x_0$ oraz pewnego wielomianu Q : $W(x) = (x - x_0) * Q(x)$. Wyznaczając z

tego wyrażenia wielomian Q , otrzymujemy $Q(x) = \frac{W(x)}{x-x_0}$. Widzimy zatem, że dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - x_0$, otrzymujemy bez reszty, wielomian $Q(x)$.

Przejdźmy teraz, to twierdzenia mówiącego o pierwiastkach wielokrotnych, bazującego na twierdzeniu Bezout.

Twierdzenie 12 *Liczba x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.*

Dowód poprawności jest analogiczny, jak dla twierdzenia Bezout. Jedyną różnicą jest to, że wielomian W przedstawiamy jako: $W(x) = (x - x_0)^k * Q(x)$. Zapoznajmy się z twierdzeniem, mówiących o możliwej wartości pierwiastków, o ile są one całkowite.

Twierdzenie 13 *Dany jest wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, o współczynnikach całkowitych. Jeżeli wielomian W posiada pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego a_0 .*

Przejdźmy teraz do twierdzeń mówiących o możliwości rozłożenia wielomianu na czynniki.

Twierdzenie 14 *Każdy wielomian $W(x)$ nie będący wielomianem zerowym jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.*

Oznacza to, że każdy wielomian stopnia co najmniej trzeciego jest rozkładalny na czynniki. Z powyższego twierdzenia wynika kolejne, mówiące, że rozkład ten jest zawsze jednoznaczny.

Twierdzenie 15 *Niezerowy wielomian, o współczynnikach rzeczywistych, jest jednoznacznie rozkładalny na czynniki liniowe lub nierozkładalne czynniki kwadratowe, o współczynnikach rzeczywistych.*

Oznacza to, że nie da się rozłożyć jednego wielomianu na czynniki, na dwa różne sposoby, tzn. tak, by istniał chociaż jeden czynnik (lub jego proporcjonalny odpowiednik), nie występujący w drugim rozkładzie. Ważnym aspektem, wynikającym z powyższego twierdzenia jest mowa, o tym że nie wszystkie wielomiany da się rozłożyć na czynniki liniowe, o współczynnikach całkowitych. Spójrzmy na pokazujący to przykład.

Przykład 7 *Mamy dany wielomian $W(x) = x^3 - 1$. Rozłożmy go na czynniki. Wiemy, że pierwiastkiem tego wielomianu jest $x_0 = 1$, zatem możemy przedstawić wielomian W jako iloczyn wielomianu $x - 1$ oraz drugiego wielomianu.*

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 - 1 = x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = (x - 1)x^2 + (x - 1)x + x - 1 = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ \Delta &= 1^2 - 4 * 1 * 1 = 1 - 4 = -3 < 0 - \text{brak pierwiastków rzeczywistych} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Jak widać drugi z czynników jest właśnie przykładem nierozkładalnego czynnika kwadratowego, o współczynnikach rzeczywistych.

Powyższy czynnik da się rozłożyć na dwa czynniki liniowe, o współczynnikach zespolonych. W pracy tej będziemy jednak mówić wyłącznie o współczynnikach rzeczywistych, najczęściej zawężając jeszcze zbiór potencjalnych współczynników, do liczb wymiernych. Przejdźmy do kolejnego twierdzenia, wynikającego bezpośrednio z dwóch poprzednich.

Twierdzenie 16 *Każdy wielomian stopnia nieparzystego, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.*

Oznacza to, że każdy wielomian stopnia nieparzystego jesteśmy w stanie przedstawić jako iloczyn dwóch czynników, z których jeden jest czynnikiem liniowym, a drugi czynnikiem stopnia parzystego, który z kolei być może da się dalej rozłożyć, na wielomiany, o mniejszych stopniach.

1.2 Eliminacja pierwiastków wielokrotnych

Ważnym aspektem obliczanie zer wielomianów jest eliminacja pierwiastków wielokrotnych. Jest ona niezbędna, by móc skorzystać z metody Sturmy. Zapoznajmy się z twierdzeniem dotyczącym krotności pierwiastków pochodnej wielomianu.

Twierdzenie 17 *Jeżeli liczba jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W , to jest pierwiastkiem $(k-1)$ -krotnym pochodnej tego wielomianu.*

By lepiej zrozumieć twierdzenie, spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 8 *Mamy dany wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Obliczmy teraz kolejne pochodne wielomianu W .*

$$\begin{aligned} W'(x) &= 3x^2 + 2 * 2x + 1 = 3x^2 + 4x + 1 \\ W^{(2)}(x) &= 2 * 3x + 4 = 6x + 4 \\ W^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Obliczmy teraz pierwiastki wielomianu W i jego kolejnych pochodnych.

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2 \\ x_1 &= 0, \quad k_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad k_2 = 2 \\ W'(x) &= 3x^2 + 4x + 1 \\ \Delta &= 4^2 - 4 * 3 * 1 = 16 - 12 = 4 \\ \sqrt{\Delta} &= 2 \\ x_1 &= \frac{-4-2}{2*3} = \frac{-6}{6} = -1, \quad k_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-4+2}{2*3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \quad k_2 = 1 \\ W^{(2)}(x) &= 6x + 4 = 6(x + \frac{2}{3}) \\ x_1 &= -\frac{2}{3}, \quad k_1 = 1 \\ W^{(3)}(x) &= 6 \quad - \text{ brak pierwiastków} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Jak widać powyższy przykład potwierdza zastosowanie przedstawionego twierdzenia. Widzimy, że krotność wszystkich pierwiastków ulega zmniejszeniu o jeden, w kolejnej pochodnej. Dodatkowo możemy zauważyć, że pochodna może zawierać także pierwiastki, których nie miał dany wielomian. Ma to miejsce w przypadku, gdy wielomian, posiada przynajmniej dwa różne pierwiastki. Potwierdza to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 18 *Liczba nowych pierwiastków pochodnej wielomianu W' (takich których nie posiadał wielomian W) jest równa liczbie różnych pierwiastków wielomianu pomniejszonej o jeden.*

By dowieść powyższego twierdzenia przeprowadźmy rozumowanie dowodzące jego poprawności.

Dowód Zdefiniujmy wielomian: $W(x) = (x-x_1)^{k_1} * (x-x_2)^{k_2} * \dots * (x-x_{m-1})^{k_{m-1}} * (x-x_m)^{k_m}$. Przyjmijmy, że wielomian W jest stopnia n i posiada m różnych pierwiastków, gdzie $1 \leq m \leq n$, $k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+k_m = n$. Zdefiniujmy wielomian $P(x) = (x-x_1)*(x-x_2)*\dots*(x-x_{m-1})*(x-x_m)$, w którym każdy z pierwiastków wielomianu W występuje dokładnie jeden raz. Pierwiastków jest m , zatem wielomian P jest stopnia m . Dzieliąc wielomian W przez wielomian P , otrzymujemy bez reszty wielomian $Q(x) = (x-x_1)^{k_1-1} * (x-x_2)^{k_2-1} * \dots * (x-x_{m-1})^{k_{m-1}-1} * (x-x_m)^{k_m-1}$, który posiada każdy z pierwiastków wielomianu W , krotności pomniejszonej o jeden. Skoro krotność każdego z m pierwiastków uległa zmniejszeniu o jeden, to stopień wielomianu Q w stosunku do wielomianu W zmniejszył się o m . Stopień wielomianu Q jest więc równy $n-m$. Na mocy twierdzenia wiemy także, że wielomian $Q(x)$ jest podzielny również przez wielomian W' , stopnia $n-1$. Zatem wielomian W' możemy przedstawić jako iloczyn wielomianu Q oraz innego wielomianu: $W'(x) = Q(x) * V(x)$. Wielomian V , zawiera wszystkie pierwiastki W' , których nie posiadał wielomian W . Łatwo policzyć, że stopień wielomianu V jest równy: $\deg(V) = \deg(W') - \deg(Q) = (n-1) - (n-m) = n-1-n+m = m-1$. Jak widać, właśnie udowodniliśmy, że stopień ten jest równy liczbie różnych pierwiastków wielomianu W pomniejszonej o jeden.

Spróbujmy teraz skorzystać z przedstawionego twierdzenia w przykładzie dokonującym eliminacji pierwiastków wielokrotnych.

Przykład 9 *Dany jest wielomian W , określony wzorem: $W(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$. Dokonajmy eliminacji pierwiastków wielokrotnych dla wielomianu W . Obliczamy pochodną wielomianu.*

$$\begin{aligned} W'(x) &= 6 * x^5 - 4 * 6x^3 - 3 * 4x^2 + 2 * 9x + 12 = \\ &= 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 6(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Obliczmy teraz resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian W' .

$$\begin{array}{r} x \\ \hline x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 : (x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \\ \hline - x^6 + 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x \\ \hline - 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x \end{array} \quad (1.25)$$

Kluczowa jest wartość reszty z dzielenia. Gdyby otrzymana reszta z dzielenia była wielomianem zerowym, to pochodna wielomianu byłoby równocześnie $NWD(W, W')$. W tym przypadku tak jednak nie jest, więc wykonujemy analogiczną operację z tą różnicą, że nową dzielną jest dotychczasowy dzielnik, a reszta z wielomianu jest nowym dzielnikiem. Tę operację wykonujemy tak długo, jak otrzymana reszta jest niezerowego stopnia. W przypadku gdy jest ona jednocześnie wielomianem zerowym, to podobnie jak wyżej, aktualny dzielnik, jest naszym $NWD(W, W')$. W przypadku gdy otrzymana reszta jest niezerowym wielomianem stopnia zerowego, to największym wspólnym dzielnikiem wielomianów jest pewna niezerowa stała.

1.3 Twierdzenie Sturma

Przeanalizujmy na początek sposób konstruowania ciągu Sturma dla wielomianu W . Pierwszym wyrazem ciągu jest sam wielomian W . Z kolei drugim wyrazem jest pochodna wielomianu W . Kolejne wyrazy ciągu Sturma wyznaczamy obliczając resztę z ilorazu dwóch poprzednich wyrazów. Dzieje się to do uzyskania pierwszej reszty wielomianu, będącą wielomianem stopnia zerowego. Za każdym razem dzieląc wielomian stopnia n , przez wielomian stopnia m , gdzie $m < n$, mamy gwarancję, że wielomian będący resztą tego ilorazu będzie stopnia mniejszego niż m . Korzystając z tego faktu, wiemy, że liczba wyrazów ciągu Sturma dla wielomianu W jest nie większa od $\deg(W)+1$.

Definicja 8 Ciągami Sturma dla wielomianu W nazywamy ciąg wielomianów: X_0, X_1, X_2, \dots , takich że $X_0 = W$, $X_1 = W'$, a kolejne wyrazy definiuje się jako wielomian przeciwny to reszty z dzielenia dwóch poprzednich wyrazów, przy czym ostatnim wyrazem ciągu Sturma jest pierwszy wielomian stopnia zerowego.

Wiemy już jak definiować ciąg Sturma. Przeanalizujmy teraz jaki wpływ ma uzyskany ciąg Sturma na obliczanie pierwiastków wielomianu. By to zrobić, zapoznajmy się z kolejną definicją, mówiącą o liczbie zmian znaków ciągu Sturma.

Definicja 9 Liczbą zmian znaków ciągu Sturma dla wielomianu $W(x)$ w punkcie x , obliczamy zliczając liczbę zmian pomiędzy kolejnymi wyrazami, pomijając te o wartości równej zero w punkcie x . Liczbę zmian znaku w punkcie $x = x_0$ definiujemy jako wartość funkcji $Z(x_0)$.

Wiemy już jak obliczać liczbę zmian ciągu Sturma. Sprawdźmy zatem, jak przekłada się ona na liczbę pierwiastków w danym przedziale.

Twierdzenie 19 Jeżeli wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych, to liczba pierwiastków rzeczywistych w przedziale $a < x \leq y$, jest równa $Z(a) - Z(b)$.

W ogólności twierdzenie Sturma można zastosować dla przedziału $(-\infty, +\infty)$, dopuszczając w ciągu Sturma wartości niewłaściwe $+\infty$ oraz $-\infty$. Wówczas $Z(-\infty)$ będzie oznaczać liczbę zmian znaków w ciągu $W(-\infty), W_1(-\infty), W_2(-\infty), \dots, W_m(-\infty)$, zaś $Z(+\infty)$ liczbę zmian w ciągu $W(+\infty), W_1(+\infty), W_2(+\infty), \dots, W_m(+\infty)$.

Twierdzenie 20 *Liczba różnych pierwiastków rzeczywistych wielomianu $W(x)$ jest równa $Z(-\infty) - Z(+\infty)$.*

Stosując twierdzenie Sturma dla coraz mniejszych przedziałów możliwe jest wyznaczenie pierwiastków wielomianu z dowolną dokładnością. Sposób ten określony jest mianem metody Sturma. Twierdzenie Sturma jest bardzo mocnym środkiem używanym do znajdowania pierwiastków w określonym przedziale. Może być używana nie tylko dla wielomianów, ale dowolnej różniczkowalnej funkcji ciągłej. Zapoznajmy się z twierdzeniem, mówiącym o ograniczeniach dotyczących maksymalnej liczby zmian znaków dla Ciąg Sturma.

Twierdzenie 21 *Liczba zmian znaków ciągu Sturma dla wielomianu $W(x)$ jest mniejsza od liczby wyrazów tego ciągu i nie większa od stopnia wielomianu $W(x)$.*

Można, więc zauważyć, że warunkiem wystarczającym i jednocześnie koniecznym do tego by wielomian $W(x)$ stopnia n , posiadający wyłącznie pierwiastki jednokrotne, posiadał n pierwiastków rzeczywistych jest to by wartość ciągu Sturma wynosiła n dla $x = -\infty$ oraz 0 dla $x = +\infty$.

Warto zauważyć, że dla liczb dostatecznie dużych, co do wartości bezwzględnej, z uwzględnieniem wartości niewłaściwych $+\infty$ oraz $-\infty$ liczba zmian znaków zależy wyłącznie od współczynnika stojącego przy najwyższej potęgze wielomianu. Znajduje to potwierdzenie w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 22 *Jeżeli współczynnik stojący przy najwyższej potęgze wielomianu jest większy od 0, to wartość tego wielomianu jest większa od zera w punkcie $x = +\infty$ oraz mniejsza od zera w punkcie $x = -\infty$. Z kolei, gdy współczynnik stojący przy najwyższej potęgze wielomianu jest mniejszy od 0, to wartość tego wielomianu jest mniejsza od zera w punkcie $x = +\infty$ oraz większa od zera w punkcie $x = -\infty$.*

Na podstawie powyższego twierdzenia można zauważyć, że nie ma potrzeby wyliczania wartości wyrazów ciągu sturma dla wartości niewłaściwych, tzn. $x = -\infty$ oraz $x = +\infty$. Dzieje się tak dlatego, że wartość wielomianu nie jest ważna, a istotny jest jedynie znak. Fakt ten ma duży wpływ na optymalizację obliczeń, gdyż dla wielomianów wysokich stopni ograniczamy się jedynie do sprawdzenia znaku przy najwyższej potęgze, pomijając wykonywanie potęgowania, mnożenia i sumowania kolejnych wyrazów wielomianu. Jeżeli zależy nam, na obliczeniu wartości wielomianu, dla odpowiednio dużych x , będącego ilorazem dwóch wielomianów, możemy skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 23 *Dany jest wielomian $W_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, gdzie $a_0 \neq 0$, stopnia n oraz wielomian $W_2(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, gdzie $b_0 \neq 0$, stopnia $n-1$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \frac{a_0}{b_0}$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = -\frac{a_0}{b_0}$.*

Jak widać jesteśmy w stanie ustalić znak, a nawet dokładną wartość, największego współczynnika wielomianu, będącego ilorazem dwóch innych wielomianów, wykonując proste dzielenie dwóch liczb, będących odpowiednio najwyższymi współczynnikami wielomianów - dzielnej i dzielnika.

1.4 Biblioteka Mpir

1.4.1 Podstawowe informacje

Wstęp

Mpir jest przykładem biblioteki napisanej w języku C, pozwalającą operować na liczby o dowolnej wielkości i dokładności. Jej celem było dostarczenie narzędzia dla arytmetyki na liczbach, które nie są wspierane przez podstawowe typy wbudowane w języku C.

Kluczowy jest fakt, że biblioteka ta została zoptymalizowana w taki sposób, by w zależności od potrzeb używać odmiennych algorytmów. Stało się tak dlatego, że algorytm działania na małych liczbach z niewielką precyzją jest prosty i znacznie różni się od wymyślnej metody, używanej w przypadku wielkich liczb, z setkami cyfr po przecinku.

Warto zauważyć, że optymalizacja kodu odbywa się także w zależności od rodzaju procesora, na którym są wykonywane obliczenia. Biblioteka przeznaczona dla procesorów Intel i7 dostarcza inny kod niż dla procesora Pentium 4 lub Athlon. Dzięki temu, z pewnością, działa w sposób bardziej wydajny, kosztem wygody programistów, którzy jej używają. Nie są oni w łatwy sposób zapewnić optymalnego działania programu, niezależnie od sprzętu na którym jest on uruchamiany, co może znacznie utrudnić proces powstawania nowego oprogramowania, bazującego na bibliotece mpir.

Licencja

Biblioteka mpir jest przykładem wolnego oprogramowania, charakteryzującego się kilkoma podstawowymi założeniami. Pierwszą z nich jest wolność pozwalająca użytkownikowi na uruchamianie programu, w dowolnym celu. Drugą jest jego analiza oraz dostosowywania go do swoich potrzeb. Kolejną cechą jest możliwość dowolnego rozpowszechnianie kopii programu. Ostatnią zaś jest udoskonalanie programu i publiczne rozprowadzanie własnych ulepszeń, z których każdy będzie mógł skorzystać.

Nazewnictwo i typy

Biblioteka mpir posiada odpowiedniki dla wszystkich podstawowych typów liczbowych, które są charakterystyczne dla języka C. Odpowiednikiem typów całkowitych jest typ `mpz_t`, zaś odpowiednikiem liczb zmiennoprzecinkowych, typu `float`, jest `mpq_t`. Dla liczb całkowitych możemy łatwo zdecydować, czy interesuje nas liczba ze znakiem, czy bez niego. Oba przypadki posiadają prawie identycznie nazwane funkcje. Jedyną różnicą jest to, że dla zmiennych ze znakiem występuje przyrostek `si`, od wyrazu angielskiego wyrazu `signed`, a dla zmiennych bez znaku przyrostek `ui`, od wyrazu `unsigned`. Typ `mpq_t` daje użytkownikowi możliwość zdefiniowania dowolnej liczby, dającej się przedstawić w postaci ułamka, czyli dowolnej liczby wymiernej. Ograniczenie to spowodowane jest faktem, iż liczba taka składa się z dwóch liczb typu `mpz_t`. Pierwsza z nich jest licznikiem, a druga mianownikiem.

Funkcje

W bibliotece przyjęto konwencję charakterystyczną, dla języka C, polegającą na tym, że zarówno argumenty wejściowe jak i wyjściowe funkcji są przekazywane za pomocą referencji do funkcji, która zazwyczaj jest typu void, czyli nie zwraca żadnej wartości. Warto zauważyć, że argumenty wyjściowe są podawane przed wejściowymi. Stało się tak poprzez zachowanie analogii do operatora przypisania, w którym to zmienna wynikowa znajduje się po lewej stronie. W bibliotece mpir zmienna po zadeklarowaniu nie jest natychmiastowo gotowa do użycia, ponieważ wymaga inicjalizacji, przydzielającej jej miejsce w pamięci. Możemy to zrobić poprzez wywołanie odpowiedniej funkcji init, w argumencie podając odpowiednią zmienną. Analogicznie, aby zwolnić zajmowany, przez zmienną, obszar pamięci należy wywołać funkcję clear. Istnieją także funkcje realokujące, czyli zwiększające lub zmniejszające, zajmowany obszar. Użycie ich jest jednak opcjonalne, gdyż zmiana rozmiaru jest automatycznie wykrywana. Raz zainicjalizowaną zmienną, można używać dowolną liczbę razy. Twórcy biblioteki zalecają unikanie nadmiernego korzystania z funkcji init i clear, ponieważ są to operacje czasochłonne i zbyt duża liczba ich wywołań może mieć negatywny wpływ na wydajność naszego programu.

Zarządzanie pamięcią

Biblioteka mpir, alokując w pamięci nowe obiekty, stara się minimalizować wielkość, zajmowaną przez nie, miejsca. Dodatkowa pamięć jest przyznawana dopiero, kiedy jej aktualna wielkość jest niewystarczająca. W przypadku zmiennych typów `mpz_t` i `mpq_t`, raz zwiększony rozmiar danej zmiennej nigdy nie zostanie zmniejszony. Zazwyczaj jest to najlepsza praktyka, ponieważ częsta alokacja pamięci ma niekorzystny wpływ na wydajność programu. Jeżeli aplikacja potrzebuje zmniejszyć zajmowane przez daną zmienną miejsce, można dokonać realokacji albo całkowicie zwolnić, zajmowane przez nią miejsce. Dodatkowo kolejne zwiększania rozmiaru przeznaczonego na poszczególne zmienne może powodować zauważalny spadek wydajności lub fragmentację danych. Nie da się uniknąć, jeżeli chcemy zaalokować więcej miejsca dla danej zmiennej, w momencie, gdy w jej sąsiedztwie znajdują się już inne zmienne. Wówczas zależnie od implementacji mamy do czynienia z jedną z dwóch wariantów. W pierwszym przypadku, alokujemy nowe miejsce w pamięci, uzupełniając odpowiednio jego wartość, a następnie zwalniamy wcześniej zajmowane miejsce. Alternatywą jest pozostawienie zajmowanej już pamięci i przydzielenie dodatkowej w innym miejscu. W takim przypadku jesteśmy zmuszeni do odpowiedniego zarządzania nieciągłymi fragmentami pamięci, co również może mieć bardzo negatywny wpływ na wydajność aplikacji. Z kolei, zmienne typu `mpf_t` mają niezmienny rozmiar, zależny od wybranej precyzji.

Warto zauważyć, że biblioteka standardowo do alokowania pamięci domyślnie używa funkcji `malloc`, ale możliwe jest także korzystanie z funkcji `alloca`. Pierwszy alokator zajmuje się tylko przydzieleniem pamięci, a użytkownik musi sam pamiętać, o jego zwolnieniu, w odpowiednim momencie. Z kolei, drugi z nich zdejmuje tę odpowiedzialność ze strony programisty i sam dba o zwolnienie pamięci, gdy jest ona już nie używana.

Kompatybilność

Poza kilkoma wyjątkami, biblioteka mpir jest kompatybilna z odpowiednimi wersjami biblioteki gmp. Dodatkowo, jej twórcy starają się nie usuwać istniejących już funkcji. W przypadku, gdy któraś przestanie być rekomendowana, zostaje po prostu zaznaczona jako przestarzała, ale jej implementacja nie przestaje istnieć w kolejnych wydaniach biblioteki. Dzięki temu program, bazujący na starszej wersji biblioteki, zadziała też na nowszej edycji.

Wydażność

Dla małych liczb, narzut na korzystanie z biblioteki może być znaczący w porównaniu do typów prostych. Jest to nieuniknione, ale celem biblioteki jest próba znalezienia złotego środka pomiędzy wysoką wydażnością, zarówno dla małych, jak i dużych liczb.

Operacje w miejscu

Operacje obliczania wartości bezwzględnej i negacji danej liczby są bardzo szybkie, gdy obliczane są w miejscu, tzn. wtedy, gdy zmienna wejściowa jest również zmienną wyjściową. Wówczas nie ma potrzeby alokacji i zwalniania pamięci, a cała funkcja sprowadza się do ustawienia odpowiedniego bitu, mówiącego o znaku liczby. Według specyfikacji biblioteki mpir, zauważalny powinien być także zysk, w przypadku operacji dodawania, odejmowania i mnożenia w miejscu. W momencie, gdy drugim argumentem jest nieduża liczba całkowite operację te są nieskomplikowane i bardzo szybkie.

1.4.2 Instalacja

Instalacja biblioteki mpir jest różna w zależności od systemu operacyjnego. W systemach unixowych instalacja polega na zbudowaniu i instalacji, korzystając ze źródeł. Pod windowssem jest ona równie łatwa i przebiega analogicznie, o ile używamy cygwina lub mingw. Są to narzędzia, które zapewniają, programom działającym pod systemem Windows, funkcjonalność przypominającą system Linux. Bardziej skomplikowane będzie użycie biblioteki bez wyżej wymienionych narzędzi, ale warto zaznaczyć, że biblioteka ta może być budowana z użyciem Microsoft Visual Studio, począwszy od wersji 2010, korzystając z programu o nazwie yasm assembler. Dodatkowo korzystanie z biblioteki różni się w zależności od tego czy potrzebujemy jej statyczną (mpir/lib) czy dynamiczną (mpir/dll) wersję.

Aby używać biblioteki mpir w naszym programie musimy do naszego programu dodać następującą linię:

```
#include <mpir.h>
```

Pozwoli ona nam na używanie wszystkich funkcji i typów, które udostępnia dla nas biblioteka. Dodatkowo wymagana jest kompilacja z dołączeniem naszej biblioteki, poprzez dodanie opcji -lmpir, np.:

```
gcc myprogram.c -lmpir
```

Jeżeli chcemy skorzystać z biblioteki, wspierającej język C++ dodatkowo musimy dodać także opcję `-mpirxx`, np.:

```
g++ myprogram.cc -lmpirxx -lmpir
```

1.4.3 Operacje na liczbach całkowitych

W niniejszym podrozdziale, omówię podstawowe funkcje liczbowe, które mają zastosowanie, zarówno dla liczb całkowitych typu `mpz_t`, jak i rzeczywistych typu `mpq_t`.

Funkcje inicjalizujące

```
void mpz_init (mpz_t integer)
```

Alokuje w pamięci miejsce na zmienną `integer` i ustawia jej wartość na 0.

```
void mpz_clear (mpz_t integer)
```

Zwalnia miejsce zajmowaną przez zmienną. Funkcja ta powinna być używana dla każdej zmiennej, w momencie, gdy nie ma już potrzeby, by z niej korzystać.

```
void mpz_realloc2 (mpz_t integer, mp_bitcnt_t n)
```

Zmienia rozmiar zajmowanego przez zmienną miejsca. Funkcja jest używana z wartością `n`, większą od aktualnej, by zagwarantować zmiennej określone miejsce w pamięci. Z drugiej strony, zostaje wywołana z wartością mniejszą, jeżeli chcemy zmniejszyć liczbę zajmowanego przez zmienną miejsca. Gdy nowy rozmiar jest wystarczający by pomieścić aktualną wartość zmiennej, to zostaje ona zachowana. W przeciwnym razie zostanie ona ustawiona na 0. Istnieje również przestarzała funkcja `mpz_realloc`, ale jej użycie jest niezalecane. Nie została usunięta, by zachować kompatybilność wsteczną.

Funkcje przypisania

```
void mpz_set (mpz_t rop, mpz_t op)
```

Pozwala na przypisanie wartości tych samów typów. Wartość zmiennej `op` jest ustawiana jako `rop`. Jest to równoważnik operatora przypisania.

```
void mpz_set_sx (mpz_t rop, intmax_t op)
```

Pozwala na przypisanie zmiennej typu całkowitego do wartości typu `mpz_t`.

```
void mpz_set_d (mpz_t rop, double op)
```

Zapisuje wartość typu `double` do zmiennej typu `mpz_t`.

```
void mpz_set_q (mpz_t rop, mpq_t op)
```

Pozwala na rzutowanie liczby rzeczywistej, typu `mpq_t` do zmiennej `mpz_t`. Gdy wartość `mpq_t` nie jest liczbą całkowitą, zostaje ona zaokrąglona w dół, poprzez obcięcie jej części ułamkowej.

```
int mpz_set_str (mpz_t rop, char *str, int base)
```

Konstruuje liczbę typu `mpz_t`, na podstawie podanego łańcucha znaków, reprezentującego daną wartość. Zmienna `base` mówi o podstawie podanej liczby. Dopuszcza się występowanie białych znaków, które są ignorowane. Z kolei zmienna `base` dopuszcza 0 oraz wartości z zakresu (2; 61). Gdy jest ona równa 0, podstawowa zostaje ustalona, bazując na początkowych znakach. Dla prefixów `0x` oraz `0X`, reprezentacja liczby zostaje ustalona jako szesnastkowa. Gdy jest ona równa `0b` lub `0X`, to liczba ta jest binarna, a gdy rozpoczyna się od zera, a drugi znak jest inny od wymienionych, to zostaje uznana za liczbę oktalną. W pozostałych wypadkach jest to liczba dziesiętna. Kolejne wartości dziesiętne od 10 do 35 są reprezentowane jako litery od `a` do `z`, przy czym nie ma rozróżnienia ze względu na wielkość liter. W przypadku wyższych wartości podstawy, wielkość liter ma znaczenia, przy czym liczby od 10 do 35 reprezentowane są przez duże litery, a liczby od 36 do 61 przez małe. Funkcja dokonuje weryfikacji, czy podany ciąg znaków w całości reprezentuje poprawną liczbę. Jeżeli tak, to zwraca ona wartość 0. W przeciwnym wypadku jest to 1.

```
void mpz_swap (mpz_t rop1, mpz_t rop2)
```

Używana jest do zamiany wartości pomiędzy dwoma zmiennymi typu `mpz_t`. Jej użycie jest rekomendowane, ze względów wydajnościowych. W przypadku braku tej funkcji, potrzebaby zmiennej tymczasowej. W tym celu musiała by ona na początku zostać zaalokowana w pamięci, a na końcu zwolniona. Obie operacje są czasochłonne i zaleca się minimalizować ich użycie, więc użycie zoptymalizowanej funkcji służącej do zamiany wartości dużych liczb wydaje się zdecydowanie najlepszą i najszybszą opcją.

Funkcje konwersji

```
intmax_t mpz_get_sx (mpz_t op)
```

Zwraca zmienną typu `int`, a znak liczby zostaje przepisany. Jeżeli wartość jest poza zakresem liczb typu `int`, to rzutowanie następuje poprzez pozostawienie najmniej znaczącej części. Powoduje to, że funkcja w wielu przypadkach może okazać się bezużyteczna.

```
double mpz_get_d (mpz_t op)
```

Pozwala rzutować typ `mpz_t` na zmienną typu `double`. Jeżeli jest to konieczne, stosowane jest zaokrąglenie. W przypadku, gdy eksponent jest za duży, zwrócony wynik jest zależny od danego systemu. Jeżeli jest dostępna, zwrócona może być wartość nieskończoności.

```
char * mpz_get_str (char *str, int base, mpz_t op)
```

Zwraca ciąg znaków reprezentujących liczbę `op`, o podstawie danej w parametrze o nazwie `base`. Funkcja ta jest analogiczna do `mpz_set_str`. Jeżeli parametrem `str` jest `NULL`, to ciąg

znaków zostaje zwrócony przez funkcję. W przeciwnym razie funkcja umieszcza go pod adresem, na który wskazuje zmienna `str`. Należy zadbać o to, by bufor, do zapisania rezultatu funkcji, był wystarczający. Powinien on być 2 bajty dłuższy niż długość zwróconej liczby w danym systemie liczbowym. Pierwszy bajt służy na wpisanie ewentualnego znaku minus, natomiast drugi na znak

0' kończący łańcuch znaków. Długość zasadniczej części liczbowej można pobrać używając funkcji `mpz_sizeinbase (op, base)`, w której podajemy daną liczbę oraz podstawę.

Funkcje arytmetyczne

```
void mpz_add (mpz_t rop, mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Ustawia wartość `rop` jako sumę `op1` i `op2`.

```
void mpz_sub (mpz_t rop, mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Ustawia wartość `rop` jako różnicę `op1` i `op2`.

```
void mpz_mul (mpz_t rop, mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Ustawia wartość `rop` jako iloczyn `op1` i `op2`.

```
void mpz_addmul (mpz_t rop, mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Oblicza wartość iloczynu czynników `op1` i `op2`, a następnie zwiększa `rop` o otrzymany wynik. Tożsame z wykonaniem działania $rop = rop + op1 * op2$.

```
void mpz_submul (mpz_t rop, mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Oblicza wartość iloczynu czynników `op1` i `op2`, a następnie zmniejsza `rop` o otrzymany wynik. Tożsame z wykonaniem działania $rop = rop - op1 * op2$.

```
void mpz_neg (mpz_t rop, mpz_t op)
```

Jako rezultat ustawia liczbę przeciwną do danej. Gdy `rop` i `op` są tą samą zmienną to mamy do czynienia z przykładem operacji w miejscu. Wówczas cała funkcja jest bardzo szybka, gdyż opiera się tylko na zmianie bitu, mówiącego o znaku danej liczby.

```
void mpz_abs (mpz_t rop, mpz_t op)
```

Funkcja w swoim działaniu jest bardzo podobna do funkcji `mpz_neg`. Jediną różnicą jest to, że bit znaku nie zostaje zanegowany, a ustawiony tak, by wskazywał na wartość nieujemną.

Funkcje dzielenia

Używając niżej wymienionych funkcji należy pamiętać, że dzielenie przez 0, zarówno w przypadku obliczania wartości ilorazu, jak i reszty z dzielenia jest nielegalne. W przypadku, gdy wystąpi taka sytuacja, biblioteka zachowa się jak w przypadku dzielenia przez 0, dla liczb typu `int`, tzn. skończy działanie funkcji, rzucając odpowiedni wyjątek.

```
void mpz_tdiv_q (mpz_t q, mpz_t n, mpz_t d)
```

Funkcja oblicza iloraz z liczb n i d . Litera przed 'div' w nazwie funkcji mówi, o jej zachowaniu w przypadku, gdy rezultat nie jest liczbą całkowitą. Symbol 't' ('truncate'), oznacza obcięcie części ułamkowej. Zalecany użyciem jest przypadek, gdy nie ma znaczenia wartość reszty z dzielenia.

```
void mpz_tdiv_r (mpz_t r, mpz_t n, mpz_t d)
```

Oblicza wartość reszty z dzielenia liczb n i d . Podobnie jak w funkcji `mpz_tdiv_q`, mamy do czynienia z przypadkiem obcięcia ewentualnej części ułamkowej ilorazu. Oznacza to, że zwracana reszta zawsze będzie tego samego znaku co zmienna n . Rekomendowana, gdy wartość ilorazu z dzielenia nie jest istotna.

```
void mpz_tdiv_qr (mpz_t q, mpz_t r, mpz_t n, mpz_t d)
```

Łączy w sumie dwie powyższe funkcje. Ze względów wygody i wydajności, zaleca się jej użycie wówczas, gdy potrzebujemy obliczyć zarówno iloraz, jak i resztę z dzielenia. Ważne jest by pamiętać, że przekazane argumenty q i r , muszą być referencjami do różnych zmiennych. W przeciwnym razie, działanie funkcji będzie nie poprawne, a wynik najprawdopodobniej błędny.

Oprócz wyżej wymienionych funkcji, istnieją także ich odpowiedniki, o odmiennym zachowaniu w kwestii zaokrąglania części ułamkowej ilorazu. Pierwszym z nich jest grupa funkcji, posiadająca w nazwie 'cdiv', gdzie litera 'c' ('ceil') oznacza sufit. Powoduje to, że w razie potrzeby, iloraz zostanie zaokrąglony w górę. Wówczas otrzymana reszta r będzie przeciwnego znaku do liczby d . Funkcjami z tej grupy są: `mpz_cdiv_q`, `mpz_cdiv_r` oraz `mpz_cdiv_qr`. Drugim odpowiednik jest grupa funkcji, posiadająca w nazwie 'fdiv', gdzie 'f' ('floor') oznacza podłogę. W tym przypadku, w razie potrzeby wynik zostanie zaokrąglony w dół. Reszta r będzie w tym przypadku tego samego znaku co liczba d . Przykładami funkcji z tej grupy są: `mpz_fdiv_q`, `mpz_fdiv_r` oraz `mpz_fdiv_qr`. Zauważmy, że we wszystkich trzech przypadkach zostaje spełnione równanie: $n = q * d + r$, gdzie $0 \leq |r| < |d|$.

```
int mpz_divisible_p (mpz_t n, mpz_t d)
```

Funkcja sprawdza, czy d dzieli liczbę n . Jeżeli nie, to zwracana 0, w przeciwnym razie zwraca wartość różną od zera.

```
void mpz_divexact (mpz_t q, mpz_t n, mpz_t d)
```

Oblicza iloraz z dzielenia liczb n przez d . Działa poprawnie tylko w przypadku, gdy n jest podzielna przez d . By to sprawdzić można użyć funkcji `mpz_divisible_p`. Jest znacznie szybsza niż pozostałe funkcje, umożliwiające obliczanie ilorazu z dzielenia. Dlatego zawsze, gdy wiemy, że spełniony jest powyższy warunek, użycie tej funkcji jest wysoko rekomendowane.

Funkcje porównania

```
int mpz_cmp (mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Porównuje wartości dwóch liczb. Zwraca wartość dodatnią, gdy $op1 > op2$, ujemną, gdy $op1 < op2$, oraz 0, gdy obie wartości są równe.

```
int mpz_cmpabs (mpz_t op1, mpz_t op2)
```

Porównuje wartość bezwzględną dwóch liczb. Zwraca wartość dodatnią, gdy $|op1| > |op2|$, ujemną, gdy $|op1| < |op2|$, oraz 0, gdy obie wartości są równe lub przeciwne.

```
int mpz_sgn (mpz_t op)
```

Określa znak danej liczby. Zwraca 1 dla wartości dodatnich, -1 dla ujemnych oraz 0 w przypadku zera. Należy zwrócić uwagę, że w obecnej implementacji `mpz_sgn` jest makrem i rozpatruje dany argument wielokrotnie.

Pozostałe funkcje

```
void mpz_pow_ui (mpz_t rop, mpz_t base, mpir_ui exp)
```

Podnosi liczbę `base` do potęgi `exp`.

```
void mpz_sqrt (mpz_t rop, mpz_t op)
```

Oblicza pierwiastek całkowity dla danej liczby. W przypadku, gdy wynik nie jest liczbą całkowitą, część ułamkowa zostaje obcięta.

```
void mpz_sqrtrem (mpz_t rop1, mpz_t rop2, mpz_t op)
```

Jest bardzo podobna do funkcji `mpz_sqrt`. Poza obliczeniem wartości pierwiastka z danej liczby, zwraca także różnicę pomiędzy daną liczbą, a kwadratem tego pierwiastka. Wartości zwracane można określić równaniem:

$$\begin{aligned} Rop1 &= \sqrt{op} \\ Rop2 &= op - (\sqrt{rop1})^2 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Zauważmy, że jeżeli $rop2 = 0$, to $rop1$ jest pierwiastkiem kwadratowym z op .

1.4.4 Operacje na liczbach wymiernych

W tym podrozdziale, rozpatrzę funkcje dla zmiennych typu `mpq_t`. Skupię się w nim na funkcjach, które nie występują dla liczb całkowitych typu `mpz_t`, opisanych w poprzednim podrozdziale lub ich implementacja znacząco się różni, od już przedstawionej. Na początku warto zaznaczyć, że zmienne `mpq_t` reprezentują wyłącznie liczby wymierne. Jest to spowodowane ich implementacją. Każda liczba typu `mpq_t` składa się z dwóch liczb całkowitych typu `mpz_t`, reprezentujących licznik i mianownik.

```
void mpq_init (mpq_t dest_rational)
```

Funkcja alokuje miejsce w pamięci i inicjuje wartość danej liczby, ustawiając licznik na 0 i mianownik na 1.

```
void mpq_canonicalize (mpq_t op)
```

Znajduje wspólne dzielniki licznika i mianownika, skracając ułamek. Dodatkowo zapewnia, że mianownik jest liczbą dodatnią, w razie potrzeby, mnożąc licznik i mianownik przez liczbę -1.


```
int mpq_set_str (mpq_t rop, char *str, int base)
```

Tworzy liczbę na podstawie wartości podanej jako łańcuch znaków. Jej wartość podawana jest w postaci najpierw licznik, a następnie mianownik, na zasadach podobnym jak w funkcji `mpz_set_str`. Obie liczby oddziela znak operatora dzielenia `'/'`. Funkcja zwraca wartość 0, w przypadku, gdy cały łańcuch wejściowy jest poprawny oraz -1 w innym przypadku. Jeżeli argument `base` jest równy 0, to format liczbowy, dla licznika i mianownika, jest ustalany osobno. Oznacza to, że możemy podać liczby w dwóch różnych formatach, np. „0xFF/256”. Warto zauważyć, że funkcja `mpq_canonicalize` nie jest wołana automatycznie, więc jeżeli podaliśmy ułamek, który chcemy skrócić, to musimy pamiętać o jej wywołaniu.

```
char * mpq_get_str (char *str, int base, mpq_t op)
```

Funkcja zwracająca liczbę w postaci ułamka, tzn. licznik i mianownik, oddzielony znakiem kreski ułamkowej. Jest analogiczna do funkcji `mpz_get_str`. Bufor wyjściowy, w którym chcemy umieścić rezultat funkcji powinien być, wystarczający i wynosić $mpz_sizeinbase(mpq_numref(op), base) + mpz_sizeinbase(mpq_denref(op), base) + 3$. Jeden dodatkowy bajt w porównaniu do funkcji `mpz_get_str`, spowodowany jest koniecznością umieszczenia w buforze kreski ułamkowej.

Rozdział 2

Opis rozwiązania

2.1 Podział na moduły

Aplikacja została podzielona na trzy główne moduły: statyczna biblioteka, aplikacja konsolowa oraz testy jednostkowe. Każdy z nich został zawarty w osobnym projekcie, stworzonym w programie Microsoft Visual Studio 2015. Moduły te zostały ze sobą odpowiednio powiązane, razem tworząc solucje. Pomiędzy modułami występują jasno określone zależności. Aplikacja konsolowa i projekt testowy są od siebie całkowicie niezależne, więc zmiany i błędy w jednym z nich, nie mają wpływu na drugi. Obie te części zależą od biblioteki statycznej, bezpośrednio się do niej odwołując. Aplikacja konsolowa udostępnia interfejs użytkownika do wspomnianej funkcjonalności, a framework testowy weryfikuje jej poprawność. Dodatkowo oba projekty są zależne od biblioteki mpir, która musi być dołączana w sposób dynamiczny, poprzez dodanie odpowiedniego pliku typu dll.

2.1.1 Statyczna biblioteka

Styczna biblioteka zawiera wszystkie logiczne aspekty projektu, posiada odpowiednie klasy, zdefiniowane funkcje i zaimplementowane algorytmy, gotowe do wykorzystania i przetestowania. To w tej części projektu są zaprojektowane klasy pomocnicze - CharsConstants i StringManager oraz klasa Number, pozwalająca na łatwe korzystanie z dużych liczb wymiernych. Ta ostatnia jest warstwą pośrednią pomiędzy biblioteką mpir a pozostałymi częściami projektu. Klasa ta, jako jedyna zależy w bezpośredni sposób od implementacji wspomnianej biblioteki. Innymi słowy, nawet w przypadku bardzo radykalnych zmian w bibliotece mpir, jest to jedyna klasa, wymagająca zmiany. Jest to bardzo wygodny i bezpieczny sposób, na całkowite uniezależnienie pozostałej części od implementacji innego projektu, na którego kierunek rozwoju programista pozostaje bez wpływu.

Moduł zawiera także najważniejszą część projektu, czyli klasy umożliwiające wykonanie działań na wielomianach. Istnieją dwie takie klasy - PolynomialMap i PolynomialVector, używające odpowiednio mapy i tablicy, do przetrzymywania struktury wielomianów. Dla obu takich klas została zdefiniowana klasa abstrakcyjna Polynomial, która implementuje wspólne funkcje, a także

definiuje interfejs dla klas pochodnych. Działanie obu klas jest analogiczny, ale zostało zaimplementowane w odmienny sposób, co ma zasadniczy wpływ na wydajność rozwiązania, dla konkretnych typów wielomianów.

Część ta jest zależna od odpowiednio skompilowanej biblioteki mpir. W przeciwieństwie do aplikacji konsolowej i frameworku testowego, wystarczająca jest jej statycznie dołączana wersja. Warto zaznaczyć, że wersja ta jest inna dla różnych komputerów. Jest ona zależna od rodzaju procesora, ponieważ jej kod assemblerowy został zoptymalizowany, pod jego konkretny typ. Może to powodować różnice w wydajności biblioteki, ale nie powinno mieć żadnego wpływu na jej deterministyczne zachowanie. Dlatego jej działanie zawsze powinno być przewidywalne i takie samo, niezależne od rodzaju platformy, na której jest używana.

2.1.2 Aplikacja konsolowa

Aplikacja konsolowa pozwala, w łatwy, dla użytkownika, sposób, na tworzenie wielomianów i obliczanie wartości ich pierwiastków w zadanym przedziale. Użytkownik podaje odpowiednie dane wejściowe z linii poleceń, a te są następnie przetwarzane. Otrzymane wyniki są wypisywane na standardowe wyjście w przystępny sposób, tzn. w systemie dziesiętnym i z określoną precyzją.

Warto zaznaczyć, że użytkownik może wprowadzać wielomiany w dowolny sposób. Mogą być one, zarówno w postaci sumy kolejnych współczynników, jak i skomplikowanych iloczynów, składających się z poszczególnych wielomianów. Jedynym ograniczeniem jest to, by wyrażenie było poprawne składniowo oraz zawierało wyłącznie całkowite współczynniki i naturalne potęgi. Nie powinno być to jednak przeszkodą, w obliczaniu pierwiastków dla skomplikowanych wielomianów. Należy bowiem pamiętać, że każdy wielomian o współczynnikach wymiernych, a tylko takie będziemy rozważać w niniejszej pracy, da się przedstawić przy pomocy proporcjonalnych liczb całkowitych. Odpowiednie ułamki zwykle, zawsze możemy w ten sposób zamienić, wyciągając z danego wielomianu czynnik, będący odwrotnością najmniejszej wspólnej wielokrotności, wszystkich współczynników. Jako, że czynnik ten będzie stałą, to przy obliczaniu pierwiastków, można go po prostu pominąć, gdyż nie ma on na nie żadnego wpływu.

Użytkownik może korzystać z aplikacji tak długo, jak będzie sobie tego życzył. Zapytanie o kolejne wielomiany przeprowadzone są w pętli i trwają, dopóki użytkownik nie wprowadzi ciągu znaków, odpowiedzialnego za wyjście z programu. Szczegółowe informacje, o tym jak korzystać z aplikacji są podane w jego instrukcji.

2.1.3 Testy jednostkowe

Testy jednostkowe umożliwiają użytkownikowi sprawdzenie, czy określona funkcjonalność działa bezbłędnie. Zgodnie z ich założeniami, są w nich zdefiniowane podstawowe testy, weryfikujące różne przypadki testowe. W tym przypadku jest nieco inaczej, ponieważ w postaci testów jednostkowych, zostały zawarte również bardziej skomplikowane testy funkcjonalne. Wśród nich znajdują się też takie, które testują główne zadanie projektu, czyli dla wielomianu, tworzonego na podstawie otrzymanego wejścia w postaci łańcucha znaków, potrafią, z określoną precyzją, znaleźć jego wszystkie

pierwiastki rzeczywiste.

Jako środowisko testowe wybrany został framework wbudowany w narzędzie Microsoft Visual Studio 2015. Rozważana była też biblioteka o nazwie Google Test. Jej istotną zaletą, była przenośność, pomiędzy platformami, ale ostatecznie koncepcja ta została odrzucona. Spowodowane było to faktem, iż cały projekt pisany był w Visual Studio, a łatwość i wygoda, uruchamiania tam testów jednostkowych jest bardzo duża. Dzięki temu wyborowi, każda, nawet najmniejsza zmiana, mogła być bardzo szybka przetestowana, bez potrzeby wprowadzania jakichkolwiek dodatkowych zmian, co znacznie przyspieszało proces implementacji i weryfikacji przyjętego rozwiązania.

2.2 Główne klasy

2.2.1 CharsConstants

Klasa CharsConstants została zaimplementowana w celu zapewnienia większej czytelności kodu. Ważnym aspektem było zdefiniowane i łatwe rozpoznawanie wszystkich, mogących występować w łańcuchu wejściowym, legalnych znaków. Takie podejście ogranicza możliwość popełnienia prostych, a trudnych do wykrycia błędów w przetwarzaniu otrzymanego tekstu, np. literówki. W przypadku, gdy są zdefiniowane odpowiednio stałe i funkcji, ewentualna literówka, skończy się zasygnalizowaniem błędu już na etapie kompilacji. Przypadek taki jest sygnalizowany i łatwy do naprawienia, dzięki czemu programista nie musi zastanawiać się dlaczego, poprawny, wydałoby się, kod nie działa. Poniżej przedstawiam strukturę klasy, wraz ze zdefiniowanymi w niej stałymi i statycznymi metodami.

```
class CharsConstants
{
    static const char Space = ' ';
    static const char Tab = '\t';
    static const char NewLine = '\n';
    static const char LeastDigit = '0';
    static const char GreatestDigit = '9';
    static const char LeastUppercase = 'A';
    static const char GreatestUppercase = 'Z';
    static const char LeastLowercase = 'a';
    static const char GreatestLowercase = 'z';

public:
    static const char Plus = '+';
    static const char Minus = '-';
    static const char Mul = '*';
    static const char Div = '/';
    static const char Exp = '^';
    static const char OpeningParenthesis = '(';
```

```
static const char ClosingParenthesis = ')';
static const char Var = 'x';

static int CharToInt(char c);
static bool IsDigit(char c);
static bool IsLetter(char c);
static bool IsUppercase(char c);
static bool IsLowercase(char c);
static bool IsWhitespace(char c);
static bool IsPlus(char c);
static bool IsMinus(char c);
static bool IsMul(char c);
static bool IsDiv(char c);
static bool IsExp(char c);
static bool IsOpeningParenthesis(char c);
static bool IsClosingParenthesis(char c);
static bool IsVar(char c);
static bool IsOperator(char c);
static bool IsLegalValue(char c);
static bool IsLegalOpeningOperator(char c);
};
```

2.2.2 StringManager

Klasa StringManager oferuje przydatne funkcje, na łańcuchach znaków. Wykorzystywana jest w metodach klasy Parser, w celu łatwiejszej jego implementacji oraz zwiększenia czytelności. Poniżej deklaracja klasy StringManager i udostępnianych przez nią metod.

```
class StringManager
{
public:
    static string EmptyString();
    static bool IsEmptyString(string s);
    static char ReturnLastChar(string s);
    static bool LastCharIsADigit(string s);
    static bool LastCharIsALetter(string s);
    static bool LastCharIsADigitOrALetter(string s);
    static bool LastCharIsAdigitOrALetterOrAParenthesis(string s);
    static int FindFirst(string s, char c);
    static int FindLast(string s, char c);
    static string Substr(string s, int first, int last);
    static vector<string> Split(string s, string operators);
```

```
static int FindClosingParenthesis(string s);  
static string ParenthesisContent(string s);  
};
```

2.2.3 Parser

Parser Klasa umożliwiająca użytkownikom podanie wielomianów poprzez standardowe wejście. Składa się tylko z dwóch metod. Zadaniem pierwszej z nich jest unifikacja wielomianu podanego na wejściu. Drugą metodą klasy jest tworzenie obiektu, reprezentującego wielomian. Metoda `UniformInputString` jest wykonywana zawsze na początku funkcji `ConvertToPolynomial`. Następnie na podstawie otrzymanego wyniku, funkcja ta dokonuje kolejnych obliczeń. Argument `type`, mówi o tym jakie typu wielomian ma zostać stworzony wewnątrz funkcji. Zwracana referencja wskazuje na obiekt wybranego typu. Dla wartości 0 lub 1, wybierany jest odpowiedni typ - `PolynomialMap` lub `PolynomialVector`. Poniżej, krótka definicja klasy `Parser` oraz jej metod.

```
class Parser  
{  
    string UniformInputString(string s);  
    Polynomial& ConvertToPolynomial(string inputS, int type = 0);  
};
```

2.2.4 Number

Klasa `Number` stanowi warstwę pośrednią pomiędzy klasą wielomianu, a wykorzystaniem typów liczbowych, z biblioteki `mpir`. Została ona stworzona, by uniezależnić implementacje wielomianów od wykorzystanego sposobu reprezentacji dużych liczb. Dzięki temu jakakolwiek zmiana w udostępnianych przez bibliotekę `mpir`, klasach i funkcjach, wymaga zmiany kodu aplikacji, tylko w jednym miejscu. Ma to niebagatelny wpływ na łatwość utrzymania aplikacji. Dodatkowo, wprowadzając metody opakowujące funkcje biblioteczne, możliwe jest automatyczne wykonanie dodatkowych operacji i stworzenie nowych funkcji, ułatwiających tworzenie klas i zwiększających czytelność kodu. Narzut czasowy związany z koniecznością wywoływania funkcji pośrednich został oceniony jako niewielki, a ich wpływ na przeprowadzone testy i otrzymane rezultaty jako pomijalny. Zapoznajmy się teraz z definicją klasy `Number`.

```
class Number  
{  
public:  
    mpq_t value;  
    explicit Number();  
    explicit Number(double value);  
    Number(const Number &bigNumber);  
    ~Number();
```

```
Number Neg();
Number Abs();
Number Copy();
void SetMaxNegativeValue();
void SetMaxValue();
bool IsPlusInfinity();
bool IsMinusInfinity();
bool IsInfinity();
bool IsVerySmallValue();
bool IsZero();
int IsInVector(vector<Number> v);

bool operator == (Number bigNumber);
bool operator != (Number bigNumber);
bool operator > (Number bigNumber);
bool operator < (Number bigNumber);
bool operator >= (Number bigNumber);
bool operator <= (Number bigNumber);
Number operator = (Number bigNumber);
Number operator + (Number bigNumber);
Number operator - (Number bigNumber);
Number operator * (Number bigNumber);
Number operator / (Number bigNumber);
Number operator ^ (int power);
Number operator += (Number bigNumber);
Number operator -= (Number bigNumber);
Number operator *= (Number bigNumber);
Number operator /= (Number bigNumber);
Number operator ^= (int power);
bool operator == (double value);
bool operator != (double value);
bool operator > (double value);
bool operator < (double value);
bool operator >= (double value);
bool operator <= (double value);
Number operator = (double value);
Number operator + (double value);
Number operator - (double value);
Number operator * (double value);
Number operator / (double value);
Number operator += (double value);
```



```

        Number operator -= (double value);
        Number operator *= (double value);
        Number operator /= (double value);
        string ToString();
        void Print();
    }

```

Jak widać, przeciążone zostały wszystkie przypadne, w przypadku liczb, operatory, zarówno dla klasy `Number` jak i dla typu `double`. W języku C++ wszystkie wbudowane typy liczbowe - `int`, `long` oraz `float`, można łatwo zrzutować na ten zmienną typu `double`. Wynika, z tego, że przy pomocy powyższych operatorów, jesteśmy w stanie w łatwy sposób, dokonać dowolnego działania na dużych liczbach, niezależnie od typu drugiego operandu. Wyjątkiem jest operator potęgowania, dla którego możliwe jest podniesienie do dowolnej potęgi, pod warunkiem, że jej wartość jest liczbą naturalną.

Klasa posiada tylko jeden element – obiekt typu `mpq_t`, reprezentujący właściwą liczbę wymierną. W klasie zostały zdefiniowane podstawowe funkcje, takie jak obliczenie wartości bezwzględnej oraz liczby przeciwnej. W celu zwiększenia czytelności i łatwiejszej implementacji, zostały przeciążone wszystkie przydatne operatory. Rozpatrzmy dwa przykłady użycia biblioteki `mpir` – pierwszy z bezpośrednim użyciem dostępnych funkcji i drugi z wykorzystaniem klasy `Number`.

```

mpq_t simple_function(int a, int b)
{
    mpq_t value1, value2, value3, value4;
    mpq_inits(value1, value2, value3, value4);
    mpq_set_d(value1, (double) a);
    mpq_set_d(value2, (double) b);

    mpq_mul(value3, value1, value2);
    if (mpq_cmp(value1, value2) > 0)
        mpq_add(value4, value1, value3);
    else
        mpq_add(value4, value2, value3);

    mpq_clears(value1, value2, value3);
    return value4;
}

mpq_t simple_function_with_Number(int a, int b)
{
    Number& number1 = new Number(a);
    Number& number2 = new Number(b);
    Number& number3 = new Number(a*b);
    Number& number4 = new Number();
}

```

```
    if (number1 > number2)
        number4 = number1 + number3;
    else
        number4 = number2 + number3;

    delete(number1);
    delete(number2);
    delete(number3);
    return number4;
}
```

Łatwo zauważyć, że w drugim przypadku kod jest zdecydowanie czytelniejszy. Poprzez przeciążenie operatorów, operacje na dużych liczbach wymiernych wyglądają identycznie jak działania na wbudowanych typach liczbowych. Dzięki temu, wyeliminowano bezpośrednie wywoływanie funkcji bibliotecznych. Ich użycie, pomimo charakterystycznych nazwa, zawsze wymagało chwili zastanowienia nad kolejno przekazywanymi argumentami. W przypadku nieskomplikowanych funkcji, stosunkowo duży narzut związany jest z koniecznością inicjalizowania referencji i zwalniania miejsca, przez obiekty na które wskazują. Nie stanowi to jednak sporej zmiany, w stosunku do przykładu pierwszego, w którym, na początku funkcji nastąpiły deklaracja i inicjalizacja zmiennych, a na końcu ich zwolnienie z pamięci.

2.2.5 Polynomial

Klasa Polynomial to klasa abstrakcyjna, posiadająca zdefiniowane wszystkie funkcje, niezbędne do znalezienia pierwiastków danego wielomianu. Jest ona klasą bazową dla klas PolynomialMap i PolynomialVector, reprezentujących wielomiany, przy pomocy odpowiedniej struktury. Pierwsza z nich bazuje na mapie, czyli strukturze opartej na parach (klucz, wartość). Klucze muszą być różnowartościowe, co umożliwia jednoznaczne znalezienie wartości dla dowolnego z nich. Pozwala to na posiadanie informacji wyłącznie o niezerowych współczynnikach wielomianu. Druga z nich bazuje na wektorze, jako przykładzie tablicy, której kolejne elementy są położone w pamięci operacyjnej obok siebie. Pierwszy element tablicy to współczynnik wielomianu, stojący przy potędze zerowej, a następne wartości to współczynniki, stojące przy kolejnych, coraz to wyższych potęgach. Dzięki temu dostęp do dowolnego wyrazu wielomianu jest bardzo szybki. Jednocześnie jednak, konieczne jest przetrzymywanie informacji o wszystkich współczynnikach wielomianu, stojących przy kolejnych potęgach, od potęgi zerowej, aż do najwyższej potęgi z niezerowym współczynnikiem, równej stopniowi wielomianu.

Klasa Polynomial posiada zarówno już napisane metody, jak i takie, które zostały tylko zaprojektowane i oznaczone jako czysto wirtualne, czyli konieczne do zaimplementowania w klasie dziedziczącej. Do tego pierwszego zbioru zalicza się część metod, która nie odnosi się do konkretnej struktury wielomianu. Dzięki temu, w klasach podrzędnych nie ma konieczności ponownego ich pisania. Posiadanie jednej implementacji zamiast dwóch pozwalało na łatwiejszą i dużo sprawniej-

są konstrukcję obu klas dziedziczących. Spore zmiany projektowe i niewielkie korekty wystarczyło wprowadzić tylko raz, zamiast niepotrzebnie je powielać. Niestety, w przypadku sporej części funkcji, mimo bardzo zbliżonej implementacji, nie było możliwe ich połączenie i umieszczenie w klasie bazowej. Spowodowane to było koniecznością odwołań do konkretnego typu danych, w którym zostały umieszczone wyraża wielomianu. Uogólnione są natomiast wszystkie pozostałe funkcje, w tym także te, które posiadają wywołania funkcji czysto wirtualnych. W przypadku tym, zastosowany został polimorfizm, czyli jeden z paradygmatów programowania obiektowego. Pozwala on odwoływać się do zdefiniowanej metody, bez znajomości jej implementacji. Wywołana funkcja zadziała różnie, zależnie od typu obiektu, na którym zostanie wykonana. Z punktu widzenia poprawnego działania klasy `Polynomial`, bez znaczenia jest implementacja operatora przypisania, o ile spełnia on swoją rolę. W ten sposób możliwe jest działanie na obiekcie wielomianu, niezależnie, czy bazuje on na tablicy, czy mapie.

W języku C++, by można zastosować polimorfizm, poszczególne metody muszą operować na wskaźnikach lub referencjach. Nie możliwe jest użycie tego mechanizmu w przypadku przekazywaniu obiektów poprzez wartość. Wytlumaczenie tego jest bardzo proste i opiera się na zmiennym rozmiarze obiektów klas pochodnych. Uniemożliwia to odwołanie się do danego obiektu, póki nie znamy jego dokładnego typu. Inaczej jest w przypadku referencji i wskaźników, ponieważ ich rozmiar jest stały, a zmieniać się może jedynie ich wartość, czyli miejsce w pamięci, do którego się odwołują.

Z uwagi na powyższy fakt, w programie wszystkie obiekty klasy `Polynomial` są przekazywane poprzez referencję. By referencję, można przekazywać pomiędzy funkcjami, obiekt na który wskazuje, musi zostać stworzony dynamicznie. Można to zrobić poprzez użycie, znanej z języka C, funkcji `malloc`, alokującej miejsce w pamięci lub typowego dla języka C++, operatora `new`. W przeciwnym wypadku, zmienna będzie widoczna tylko w miejscu, w którym zostanie stworzona, np. wewnątrz funkcji. Próba odwołania się do takiej wartości, w miejscu, w którym zmienna nie jest widoczna, skończy się błędem czasu wykonania i komunikatem o naruszeniu dostępu. Stanie się tak, ponieważ referencja w takim przypadku będzie dalej istnieć, ale obiekt, na który wskazuje, już nie. Takie błędy często są popełniane przez niedoświadczonych programistów, a próba ich lokalizacji i znalezienia przyczyny, na pierwszy rzut oka, nie jest oczywista. W momencie, gdy skorzystamy z dynamicznego tworzenia obiektu, będzie on istniał tak długo, dopóki nie zostanie jawnie usunięty w kodzie programu lub aplikacja nie skończy swojego działania, zwalniając przy tym całą zajmowaną pamięć. Kiedy nie wszystkie stworzone obiekty zostają usunięte, dochodzi do tzw. wycieków pamięci. W zależności od ich rozmiarów i czasu działania aplikacji, ich konsekwencje mogą być bardzo różne. W skrajnym wypadku, może dojść do wyczerpania całej dostępnej pamięci. Gdy zaczyna jej brakować, system operacyjny zapisuje jej ostatnio nieużywaną część na dysku, by w razie potrzeby móc ją odczytać. Z uwagi na to, że pamięć operacyjna jest wielokrotnie szybsza od dysków twardych, taka operacja powoduje gigantyczne opóźnienia w pracy komputera. Gdy szybkość kolejnych alokacji pamięci jest większa, niż jej zrzucanie na dysk, w pewnym momencie komputer ulegnie całkowitemu zawieszeniu. Wówczas jedynym wyjściem jest, często bardzo niepożądany, restart systemu. Bezpiecznym rozwiązaniem jest ustalenie limitu na wykorzystanie przez pojedynczą aplikację. Może to znacznie ułatwić debugowanie i znalezienie ewentualnego błędu, a także zabezpieczyć użytkownika przed uruchomieniem złośliwego oprogramowania, mającego na

celu doprowadzenie do wspomnianej wyżej sytuacji.

Poniżej przedstawiam definicję klasy abstrakcyjnej Polynomial. Wyróżnić w niej można kolejne sekcje - zmienne klasy, konstruktory, funkcje i operatory. Te ostatnie możemy podzielić pomiędzy te, które posiadają implementacje w klasie abstrakcyjnej Polynomial oraz te, które zostały zdefiniowane jako czysto wirtualne i konieczne jest ich nadpisanie w klasie pochodnej.

```
class Polynomial
{
public:
    MAP m;
    VECTOR v;
    bool isNew = true;
    int type = 0;
    string inputS = "";
    vector<Number> roots;
    int id = 0;

    explicit Polynomial();
    explicit Polynomial(Number number);
    ~Polynomial();

    virtual Polynomial& CreatePolynomial() = 0;
    virtual Polynomial& CreatePolynomial(Number number) = 0;
    virtual void Clear() = 0;
    virtual bool IsZero() = 0;
    virtual int Size() = 0;
    virtual int PolynomialDegree() = 0;
    virtual Number Value(int power) = 0;
    virtual pair<Polynomial&, Polynomial&> \
        DividePolynomials(Polynomial& p1, Polynomial& p2) = 0;
    virtual void SetNumberValue(int power, Number number) = 0;
    virtual int NumberOfChangesSign(Number a) = 0;
    virtual Polynomial& NegativePolynomial() = 0;
    virtual Polynomial& Derivative() = 0;
    virtual Number PolynomialValue(Number a) = 0;
    virtual string ToString() = 0;
    virtual void SturmClear() = 0;
    virtual int TheLowestNonZeroValue() = 0;

    virtual bool operator==(Polynomial& p2) = 0;
    virtual Polynomial& operator = (Polynomial& p2) = 0;
    virtual Polynomial& operator + (Polynomial& p2) = 0;
```

```

virtual Polynomial& operator - (Polynomial& p2) = 0;
virtual Polynomial& operator * (Polynomial& p2) = 0;

virtual VECTOR VectorValuesExceptValueOfPolynomialDegree(int degree) \
    { return {}; };
virtual MAP MapValuesExceptValueOfPolynomialDegree(int degree) \
    { return {}; };

bool Set(string s);
bool IsNew();
PAIR ValueOfPolynomialDegree();

bool ValueEquals(int power, Polynomial& p2);
void SetValue(int power, int value);
void Add(int power, Number number);
void Sub(int power, Number number);
PAIR Mul(int power1, Number number1, int power2, Number number2);
PAIR Div(int power1, Number number1, int power2, Number number2);
Polynomial& Nwd(Polynomial& p1, Polynomial& p2);
Polynomial& PolynomialAfterEliminationOfMultipleRoots();
void Normalize();
Number CoefficientValue(PAIR pair1, Number a);
Number NextNumberFromRange(Number a, Number b);
int NumberOfRoots(Number a, Number b);
int AddNextRoot(Number x);
vector<Number> FindRoots(Number a, Number b);
void PrintRoots(double a, double b);

bool operator!=(Polynomial& p2);
Polynomial& operator / (Polynomial& p2);
Polynomial& operator % (Polynomial& p2);
Polynomial& operator ^ (int power);
Polynomial& operator += (Polynomial& p2);
Polynomial& operator -= (Polynomial& p2);
Polynomial& operator *= (Polynomial& p2);
Polynomial& operator /= (Polynomial& p2);
Polynomial& operator %= (Polynomial& p2);
Polynomial& operator ^= (int power);
void Print();
void PrintInput();
};

```

2.2.6 PolynomialMap

2.2.7 PolynomialVector

2.3 Główne funkcje

2.3.1 Metody klasy Parser

UniformInputString

```
inline string Parser::UniformInputString(string s)
```

Zadaniem funkcji jest ujednolicenie podanego na wejściu, wtaki sposób, był jednoznaczny i łatwy do dalszego przetworzenia. Jako argument przyjmuje ona pojedynczy obiekt klasy string. Po dokonaniu odpowiednich operacji, jako rezultat, zwraca również typ string. Użycie jej ma na celu ułatwienie przetwarzania w kolejnym etapie, w którym na podstawie podanego ciągu znaków, tworzony będzie obiekt wielomianu. Głównym zadaniem funkcji, jest weryfikacja, czy ciąg znaków podanych na wejściu reprezentuje poprawny składniowo wielomian. Sprawdzana jest liczba nawiasów otwierających i zamykających oraz fakt, czy w każdym miejscu wyrażenia liczba otwartych nawiasów jest nie mniejsza niż liczba nawiasów zamkniętych. Dodatkowo sprawdzane jest, czy na sąsiednich miejscach nie występują dwa operatory. Poprawne wyrażenie nigdy nie kończy się operatorem, a zaczynać może się tylko minusem, literałem, cyfrą lub nawiasem otwierającym. W czasie unifikacji wyrażenia, ignorowane są wszystkie występujące w nim białe znaki. Warto zaznaczyć, że dopuszczalny jest tylko jeden znak, reprezentujący zmienną wielomianu. Nie ma ograniczeń co do wartości tego znaku, może być to znak 'a', 'x' lub jakikolwiek inny, ale powinniśmy zadbać, by w całym wyrażeniu występował on w tej samej postaci. Sporym ułatwieniem w interfejsie jest brak konieczności wpisywania operatorów mnożenia ('*') i potęgowania ('^') w oczywistych miejscach. Z punktu widzenia aplikacji, wyrażenia $4x$ oraz $4*x$ są identyczne. Podobnie jest w przypadku x^3 oraz x^3 . Funkcja analizuje wyrażenie i zwraca je w odpowiedniej postaci. Dla przykładu wyrażenia x^3+2x^2+3x+1 , x^3+2x^2+3x+1 zostaną zamienione w $x^3+2*x^2+3*x+1$.

ConvertToPolynomial

```
inline Polynomial& Parser::ConvertToPolynomial(string inputS, int type)
```

Funkcja ma na celu stworzenie wielomianu na podstawie wartości znakowej i zwrócenie odpowiedniej referencji. W zależności od parametru type, wielomian reprezentowany jest przez jeden z dwóch rodzajów struktur. Pierwszą z nich jest wektor - począwszy od wyrazu stojącego przy najwyższej potędze, reprezentowane są wszystkie współczynniki, także zerowe. Drugim jest mapa - która posiada informacje tylko o niezerowych współczynnikach.

Na początku funkcji wykonywana jest metoda UniformInputString. Jeżeli zwróci ona pustą wartość, to funkcja przerywa swoje działanie, zwracając pusty obiekt wielomianu. W przeciwnym wypadku następuje iteracja po kolejnych znakach łańcucha wejściowego. Ze względu na kolejność

wykonywania działań, w funkcji występują trzy obiekty wielomianów. Pierwszy z nich posiada informacje o aktualnie przetwarzanym fragmencie wejścia. Drugi mówi o wartości fragmentu wielomianu, który wystąpił przed znakiem mnożenia lub dzielenia, stanowiąc, obok aktualnego wielomianu, drugi operand, dla wskazanej operacji. Z kolei, trzeci jest analogiczny i mówi, o wartości drugiego operandu, dla dodawania i odejmowania. Wszystkie działania zostają dokonywane w momencie, gdy natrafimy na operator.

W przypadku, gdy mamy do czynienia, ze znakiem nawiasu otwierającego, zostaje wyszukany odpowiedni nawias zamykający, a na wewnętrznym zakresie jest wywoływana rekurencyjnie ta sama funkcja. Zwracana wartość zapisywana jest jako aktualny element, a wskaźnik zostaje przesunięty na kolejny. Gdy aktualnie przetwarzanym znakiem jest potęgowanie zachowanie funkcji jest analogiczne. Wielomian zostaje podniesiony do odpowiedniej potęgi, otrzymana wartość zapisana, a wskaźnik ustawiony na kolejny element, występujący po wykładniku.

W przypadku pozostałych operatorów działanie funkcji jest nieco odmienne. Spowodowane jest to faktem, że trafiając na dany operator, nie znamy jeszcze jego obu argumentów, a jedynie pierwszy z nich. Drugi jest nieznany, a dodatkowo sam w sobie może zawierać operatory z wyższym priorytetem, np. w przypadku wielomianu $x+3*2$ potrzebujemy najpierw obliczyć wartość wyrażenia $3*2$ i dopiero wówczas uzyskany wynik zsumować z pierwszym operandem, równym x . Fakt ten, dopiero w momencie natrafienia na dany operator, narzuca wykonywanie poprzedniego działania. Uwaga ta dotyczy się jednak tylko natrafienia na znaki dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, ponieważ, jak zostało wspomniane wcześniej, operator potęgowania i nawiasy posługują się osobnym algorytmem. Zachowanie to, można porównać do działania stosu, na którym mogą leżeć tylko dwa argumenty. Pierwszym z nich jest operacja dodawania, a drugim mnożenia. Za pomocą nich można przedstawić także odejmowanie i dzielenie, zatem funkcje te nie będą przeze mnie rozpatrywane osobno. Operator mnożenia jest traktowany jako działanie z wyższym priorytetem, a dodawania z niższym. Oznacza to, że aby wykonać sumowanie, należy zadbać o to by ewentualna operacja mnożenia została wykonana wcześniej. Tak więc, w momencie natrafienia na znak mnożenia lub dzielenia, wystarczy przemnożyć lub podzielić przez siebie dwa operandy. W momencie dodawania, sytuacja jest bardziej skomplikowana. Zostaje wykonane sprawdzenie, czy odłożony został operator mnożenia. Jeżeli tak, to wartość aktualnego elementu zostaje przemnożona przez zapisany argument, w przeciwnym razie pozostaje bez zmian. Następnie, wynik operacji zostaje dodany lub odjęty od zapisanego argumentu. W momencie, gdy zakończymy iterowanie po całym łańcuchu wejściowym, należy zadbać o ewentualne wykonanie mnożenia oraz dzielenia, czyniąc to analogicznie jak w momencie rozpatrywania znaku dodawania lub odejmowania.

Bibliografia

- [1] E.J. Barbeau. *Polynomials*. Problem Books in Mathematics. Springer New York, 2003.
- [2] D. Buell. *Algorithmic Number Theory: 6th International Symposium, ANTS-VI, Burlington, VT, USA, June 13-18, 2004, Proceedings*. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [3] R.L. Burden, J.D. Faires, and A.M. Burden. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.
- [4] L.N. Childs. *A Concrete Introduction to Higher Algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [5] T. Granlund and G.D. Team. *Gnu MP 6.0 Multiple Precision Arithmetic Library*. Samurai Media Limited, 2015.
- [6] W. Kryszewski. *Wykład analizy matematycznej, cz. 1: Funkcje jednej zmiennej*. Number pkt 1. Wydawnictwo Naukowe UMK, 2014.
- [7] D.S. Malik. *Data Structures Using C++*. Cengage Learning, 2009.
- [8] Polskie Towarzystwo Matematyczne. *Wiomości matematyczne*. Number t. 10-11. Państwowe Wydawn. Naukowe., 1968.
- [9] J.M. McNamee. *Numerical Methods for Roots of Polynomials* -. Number pkt 1 in Studies in Computational Mathematics. Elsevier Science, 2007.
- [10] T. Mora. *Solving Polynomial Equation Systems I: The Kronecker-Duval Philosophy*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2003.
- [11] V. Pan. *Structured Matrices and Polynomials: Unified Superfast Algorithms*. Birkhäuser Boston, 2012.
- [12] W. Sierpiński and A. Mostowski. *Zasady algebry wyższej, z przypisem Andrzeja Mostowskiego Zarys teorii Galois*. Monografie Matematyczne. Nakładem Polskiego Tow. Matematycznego, 1951.
- [13] Mieczysław (1918-2007) Warmus and Józef (1927-) Łukaszewicz. *Metody numeryczne i graficzne*. cz. 1.