

Repetitorium. z matematyki dla studentów pierwszego roku



Janina Płaskonka, Karol Selwat



seria wydawnicza

Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witolda w Legnicy



Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

Janina Płaskonka
Karol Selwat

**Repetytorium z matematyki
dla studentów pierwszego roku**

Legnica 2010

Recenzent:

prof. zw. dr hab. Tadeusz Galanc

Korekta:

Krystyna Gajaszek, Waldemar Gajaszek

Projekt okładki:

Adam Chamera

Redakcja techniczna, układ typograficzny, skład i łamanie:

Waldemar Gajaszek, Halina Kawa

Stowarzyszenie na Rzecz Rozwoju

Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy

„Wspólnota Akademicka”

ul. Sejmowa 5A, 59–220 Legnica

tel. (076) 723 21 20, tel./fax (076) 723 29 04

www.wa.legnica.edu.pl

Wydawca:

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

ul. Sejmowa 5A, 59–220 Legnica

tel. (076) 723 22 80 do 83

pwsz@pwsz.legnica.edu.pl

www.pwsz.legnica.edu.pl

© Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy

Wszystkie prawa zastrzeżone. Żadna część tej publikacji nie może być powielana ani rozpowszechniana za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych bez uprzedniego wyrażenia zgody przez wydawcę.

Druk ukończono we wrześniu 2010 r.

ISBN 978-83-61389-84-2

Wstęp

Książka *Repetytorium z matematyki dla studentów pierwszego roku* jest podręcznikiem pomocniczym do przedmiotów matematycznych dla studentów pierwszego roku oraz maturzystów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki dla poziomu rozszerzonego. Prezentuje ona te zagadnienia matematyczne z zakresu szkoły ponadgimnazjalnej, których znajomość jest potrzebna do rozumienia wykładu i ćwiczeń z przedmiotów matematycznych na studiach oraz na maturze z matematyki na poziomie rozszerzonym. Zagadnienia te w większości nie występują w standardach wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym. Pojawiają się one zaś w standardach wymagań egzaminacyjnych dla poziomu rozszerzonego. Dlatego też większość absolwentów szkół ponadgimnazjalnych, którzy zostali przyjęci na pierwszy rok studiów pierwszego stopnia, nie posiada wiedzy i umiejętności z zakresu wspomnianych zagadnień. Sytuacja taka znacznie utrudnia, a czasami wręcz uniemożliwia tym absolwentom rozumienie treści matematycznych prezentowanych na zajęciach podczas studiów wyższych. Wskutek tego wzmiarkowani absolwenci nie mogą aktywnie uczestniczyć w tych zajęciach i tym samym nie mogą osiągnąć oczekiwanych efektów uczenia się.

W opisywanej książce teorię ograniczono do niezbędnego minimum, w szczególności pominięto dowody twierdzeń i wzorów. Przedstawione przykłady ilustrują kluczowe pojęcia oraz zastosowania ważniejszych twierdzeń. Pierwszy rozdział książki omawia elementy logiki matematycznej. Drugi rozdział poświęcono elementom teorii mnogości. Trzeci rozdział przedstawia takie zagadnienia jak: silnia, symbol Newtona, dwumian Newtona, indukcja matematyczna. W czwartym rozdziale omówiono elementy rachunku wektorowego i geometrii analitycznej na płaszczyźnie. Następne rozdziały poświęcono na przedstawienie podstaw teorii funkcji oraz na omówienie poszczególnych klas funkcji elementarnych: funkcji trygonometrycznych, wielomianowych, wymiernych, wykładniczych i logarytmicznych. Zaprezentowano również metodykę rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną. W następnej części podano krótki wstęp do teorii ciągów i ich granic. W kolejnym rozdziale zawarto elementy analizy matematycznej funkcji rzeczywistych jednej zmiennej rzeczywistej. Ostatni rozdział poświęcono elementom kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

Rozdział 1

Elementy logiki matematycznej

1.1. Zdania

Na lekcjach języka polskiego tworzymy i poznajemy różne rodzaje zdań. Zdania bywają pytające, wykrzyknikowe, proste czy złożone. W logice matematycznej również używamy pojęcia „zdanie”, ale znaczenie jego jest inne niż w gramatyce.

Definicja

Zdaniem w sensie logiki matematycznej nazywamy wyrażenie oznajmujące, o którym możemy powiedzieć, że jest ono prawdziwe lub fałszywe (wyrażenie, któremu można przypisać jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę lub fałsz).

Zdania proste w matematyce oznaczać będziemy małymi literami alfabetu p, q, r, s..., prawdę oznaczymy wartością 1, a fałsz 0.

Na przykład zdanie „Wrocław jest stolicą Polski” jest zdaniem fałszywym, więc jego wartość logiczna wynosi 0, zdanie „Słonie są ssakami” jest prawdziwe, więc jego wartością logiczną jest 1. Zdanie „Zamknij okno!” nie jest zdaniem, bo nie możemy określić, czy jest ono prawdziwe, czy fałszywe.

Powyżej zostały podane zdania proste. Podobnie jak w języku polskim, w logice zdania proste możemy łączyć spójnikami i otrzymamy wówczas zdania złożone. W logice matematycznej używamy następujących spójników: „i”, „lub”, „jeżeli... to...”, „wtedy i tylko wtedy, gdy...”, „nieprawda, że...”. Symbole odpowiadające powyższym spójnikom oraz nazwy zdań złożonych zbudowanych przy ich użyciu zostaną przedstawione w poniższej tabeli:

Tabela 1.1. Spójniki logiczne

Spójnik logiczny	Symbol logiczny	Nazwa zdania złożonego
i	\wedge	koniunkcja
lub	\vee	alternatywa
Jeżeli..., to...	\Rightarrow	implikacja
Wtedy i tylko wtedy, gdy...	\Leftrightarrow	równoważność
Nieprawda, że...	\neg	zaprzeczenie (negacja)

Omówimy teraz poszczególne spójniki logiczne.

1.1.1. Koniunkcja

Zajmować się będziemy zdaniem: „Zbyszek ma psa i kota”. Zdanie to składa się z dwóch zdań prostych:

p: „Zbyszek ma psa”

q: „Zbyszek ma kota”

połączonych ze sobą spójnikiem „i”. Zdanie to nazywamy koniunkcją zdań prostych p oraz q i zapisujemy $p \wedge q$.

Zdanie będące koniunkcją dwóch zdań prostych będzie prawdziwe, gdy oba zdania proste są prawdziwe. Gdyby którekolwiek zdanie proste było fałszywe (tzn. „Zbyszek nie ma psa”, lub „Zbyszek nie ma kota”), to całe zdanie złożowe byłoby również fałszywe.

Tabelka wartości logicznych koniunkcji dwóch zdań prostych jest więc następująca:

Tabela 1.2. Wartości logiczne koniunkcji

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Koniunkcja jest zatem tylko raz prawdziwa, wtedy gdy oba zdania proste są prawdziwe.

1.1.2. Alternatywa

Zajmować się będziemy się obecnie zdaniem „Kupię sobie nowy płaszcz lub buty”. Zdanie złożone składa się tu z dwóch zdań prostych:

p: „Kupię sobie nowy płaszcz”,

q: „Kupię sobie buty”

połączonych ze sobą spójnikiem lub. Zdanie to nazywać będziemy alternatywą zdań p oraz q, co zapisujemy $p \vee q$.

Zdanie to uważać będziemy za prawdziwe, gdy kupimy tylko płaszcz lub kupimy tylko buty, ale również wtedy, gdy kupimy płaszcz oraz buty. Zdanie to będzie fałszywe tylko w przypadku, gdy nie kupimy ani płaszcza, ani butów.

Tabelka wartości logicznych alternatywy dwóch zdań prostych jest więc następująca:

Tabela 1.3. Wartości logiczne alternatywy

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Alternatywa jest więc tylko raz fałszywa, wtedy gdy oba zdanie są fałszywe.

1.1.3. Implikacja

Zdanie „Jeżeli rozwiążesz te zadania, to dostaniesz się na studia” jest implikacją dwóch zdań prostych:

p: „Rozwiążesz te zadania”,
q: „Dostaniesz się na studia”,

co symbolicznie zapisujemy $p \Rightarrow q$. Zdanie p nazywane jest poprzednikiem implikacji, a zdanie q jest następcą.

Zastanówmy się, jaką wartość logiczną będzie miała implikacja w zależności od tego, jakie wartości przyjmują zdania proste.

W którym przypadku będziemy niezadowoleni? Oczywiście wówczas, gdy rozwiążemy zadania i nie dostaniemy się na studia. Nietrudno zatem stwierdzić, że jeśli poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy, to implikacja również jest fałszywa. W przypadku gdy nie rozwiążemy zadań, to możemy się spodziewać, że na studia się nie dostaniemy, ale również dobrze możemy się na nie dostać. Oba przypadki mogą się zdarzyć. W żadnym razie nie możemy czuć się pokrzywdzeni, gdy na studia w tej sytuacji się nie dostaniemy.

Wobec powyższego tabelka wartości logicznych dla implikacji wygląda następująco:

Tabela 1.4. Wartości logiczne implikacji

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Jak nietrudno zauważyc, implikacja jest tylko raz fałszywa, gdy jej poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy, czyli gdy z prawdziwej premisski wynika fałszywy wniosek.

W zdaniu zapisanym w postaci implikacji $p \Rightarrow q$ zdanie p jest warunkiem wystarczającym dla q, zdanie q jest warunkiem koniecznym dla p.

1.1.4. Równoważność

Zdanie „Liczba jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy jej cyfra jedności jest 5 lub 0” składa się z następujących zdań prostych:

p: „liczba jest podzielna przez 5”,
q: „jej cyfrą jedności jest 5 lub 0”.

Takie zdanie złożone nazywać będziemy równoważnością zdań prostych p i q i oznaczać będziemy $p \Leftrightarrow q$.

Oczywiście nietrudno stwierdzić, że równoważność dwóch zdań prostych będzie prawdziwa, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną, tzn. oba są prawdziwe lub oba fałszywe.

Tabela wartości logicznych zdania złożonego dla równoważności jest następująca:

Tabela 1.4. Wartości logiczne równoważności

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.1.5. Zaprzeczenie zdania

Zdanie „Nieprawda, że ludzie żyją na Marsie” jest zaprzeczeniem zdania p: „Ludzie żyją na Marsie”. Zaprzeczenie zdania oznaczamy $\sim p$. Oczywiście nasze zdanie p jest zdaniem fałszywym, więc jego zaprzeczenie jest zdaniem prawdziwym. Możemy więc stwierdzić, że zdanie p oraz jego negacja $\sim p$ mają przeciwnie wartości logiczne. W poniższej tabeli przedstawiamy wartości logiczne dla negacji zdania:

Tabela 1.5. Wartości logiczne negacji

p	$\sim p$
0	1
1	0

1.2. Prawa logiczne

Jeśli chcemy przeprowadzić poprawny i logiczny tok rozumowania czy postępowania w jakiejś sprawie, musimy znać przynajmniej podstawowe prawa logiczne (zwane prawami rachunku zdań bądź tautologiami).

Definicja

Prawem rachunku zdań (tautologią) nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań tworzących.

Zapoznamy się w tym momencie z niektórymi tautologiami, a część z nich udowodnimy.

Tabela 1.6. Podstawowe prawa logiczne

$p \vee \sim p$	Przykład 1. Wyłączonego środka
$\sim(p \wedge \sim p)$	Przykład 2. Sprzeczności
$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	Przykład 3. Podwójnego przeczenia
$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	Przykład 4. Idempotencja koniunkcji
$(p \vee p) \Leftrightarrow p$	Przykład 5. Idempotencja alternatywy
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	I prawo De Morgana
$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	II prawo De Morgana
$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$	Przemienność alternatywy
$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$	Łączność alternatywy
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$	Przemienność koniunkcji
$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$	Łączność koniunkcji
$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$	Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$	Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Przykład 6. Przechodniość implikacji
$[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$	Przykład 7. Zaprzeczenie implikacji
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	Równoważność implikacji prostej i przeciwniejszej

$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$	Równoważność implikacji odwrotnej i przeciwniej
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$	Zamiana równoważności na koniunkcję implikacji prostej i odwrotnej

Jedną z metod dowodzenia praw logiki matematycznej jest metoda zero-jedynkowa. Wykorzystując wszystkie możliwe wartości zdań prostych występujących w zdaniu złożonym, ocenia się wartość całego zdania.

Przykład

Udowodnimy powyższą metodą I prawo De Morgana.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W trakcie uzupełniania tabeli wartościami logicznymi korzystaliśmy z wcześniej podanych tabelek dla alternatywy, negacji, koniunkcji oraz równoważności.

W ostatniej kolumnie otrzymaliśmy same jedynki, co świadczy o tym, że niezależnie od tego, jakie wartości logiczne przyjmują zdania proste p i q , całe zdanie złożone jest prawdziwe, zatem jest to tautologia.

1.3. Formy zdaniowe

Wyrażenie „ x jest liczbą nieparzystą” nie jest zdaniem, gdyż nie jesteśmy w stanie określić jego wartości logicznej tak długo, póki nie dowiemy się, czym jest x . Bywają sytuacje, gdy to wyrażenie jest zupełnie bez sensu, np. gdy w miejsce x wstawimy słowo „małpa”. Wyrażenie to staje się zdaniem, gdy zastąpimy x konkretną wartością.

Definicja

Formą zdaniową zmiennej x nazywamy wyrażenie zawierające zmienną x , które staje się zdaniem w sensie logiki matematycznej dopiero po zastąpieniu x nazwą pewnego elementu.

Zbiór elementów, które po podstawieniu w miejsce x dadzą sensowne wyrażenie, nazywamy dziedziną danej formy zdaniowej. Wszystkie elementy z dziedziny, które po podstawieniu w miejsce x dadzą zdanie prawdziwe, tworzą zbiór elementów spełniających daną formę zdaniową.

Formy zdaniowe zmiennej x oznaczać będziemy $p(x)$, $q(x)$ itd., jej dziedzinę odpowiednio $D_{p(x)}$, $D_{q(x)}$ itd. Zbiór elementów spełniających daną formę zdaniową $p(x)$ oznaczamy $\{x: p(x)\}$.

Przykład

Dana jest forma zdaniowa zmiennej x $p(x)$: $x^2 - 4 = 0$. Dziedziną jej jest zbiór liczb rzeczywistych, $D_{p(x)} = \mathbf{R}$. Wyznaczyć zbiór elementów spełniających tę formę zdaniową.

Aby ze zbioru liczb rzeczywistych wybrać te, które spełniają formę zdaniową, wystarczy rozwiązać równanie $x^2 - 4 = 0$. Nietrudno zauważyć, że równość ta jest prawdziwa, gdy $x = 2$ lub $x = -2$. Zatem $\{x: p(x)\} = \{-2, 2\}$.

1.4. Kwantyfikatory

W matematyce często używamy wyrażeń: „dla każdego $x\dots$ ”, czy „istnieje takie x , że...”. Wyrażenia te nazywane są kwantyfikatorami, odpowiednio ogólnym i szczegółowym, które pozwalają zastosować skróty w zapisie.

Definicja

Wyrażenie *dla każdego $x\dots$* nazywamy kwantyfikatorem ogólnym i zapisujemy go \forall_x (można spotkać oznaczenie Λ_x).

Definicja

Wyrażenie *istnieje takie x , że...* nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym i zapisujemy go \exists_x (można spotkać oznaczenie \vee_x).

Przykład

Zdanie: „istnieje liczba rzeczywista spełniająca równanie $x^2 - 3x = 0$ z użyciem symbolu kwantyfikatora zapiszemy: $\exists_{x \in \mathbf{R}} x^2 - 3x = 0$.

Uwaga

Forma zdaniowa jednej zmiennej poprzedzona kwantyfikatorem staje się zdaniem.

Aby zaprzeczać zdania z kwantyfikatorem, posłużymy się następującym przykładem. Weźmy pod uwagę następujące zdanie: „Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny”. Zanegowaniem tego zdania będzie wskazanie przynajmniej jednej liczby rzeczywistej, której kwadrat będzie ujemny. Zatem zaprzeczeniem powyższego zdania będzie: „Istnieje liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu da wartość ujemną”. Możemy więc wyciągnąć następujące wnioski:

Wniosek

Zaprzeczeniem zdania „dla każdego x zachodzi $p(x)$ ” jest zdanie „istnieje takie x , dla którego nie zachodzi $p(x)$ ”, czyli $\sim \forall_x p(x) \Leftrightarrow \exists_x \sim p(x)$.

Wniosek

Zaprzeczeniem zdania „istnieje takie x , że $p(x)$ ” jest zdanie „dla każdego x nie zachodzi $p(x)$ ”, czyli $\sim \exists_x p(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim p(x)$.

Kwantyfikatory mają ogromne znaczenie w formułowaniu twierdzeń matematycznych. Twierdzenia zapisywane z użyciem kwantyfikatora mają najczęściej formę zdaniową zapisaną w postaci implikacji, czyli: $\forall_x p(x) \Rightarrow q(x)$. Taka postać nosi nazwę twierdzenia prostego, w którym $p(x)$ jest jego założeniem, a $q(x)$ – tezą.

Wykorzystując wiedzę związaną z prawami rachunku zdań, możemy mówić o twierdzeniu odwrotnym, czyli: $\forall_x q(x) \Rightarrow p(x)$, twierdzeniu przeciwnym, czyli: $\forall_x \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ oraz twierdzeniu przeciwnostawnym: $\forall_x \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$.

Należy pamiętać, że jeżeli twierdzenie proste jest prawdziwe, to nie zawsze znaczy, że twierdzenie odwrotne jest prawdziwe. Tak jest w przypadku np. twierdzenie Talesa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa. Jeśli natomiast zajmować się będziemy twierdzeniem prostym: „Jeśli liczba jest podzielna przez 10, to jest podzielna przez 2”, które jest prawdziwe, to twierdzenie do niego odwrotne: „Jeśli liczba jest podzielna przez 2, to jest podzielna przez 10” jest oczywiście fałszywe (np. 4 jest podzielne przez 2, ale nie jest podzielne przez 10).

W przeciwnieństwie do definicji twierdzenia matematyczne muszą być udowodnione. Twierdzenie matematyczne możemy dowodzić, stosując metodę wprost lub metodę nie wprost.

Metoda wprost polega na tym, że przyjmujemy za prawdziwe wszystkie założenia i, wykorzystując znane nam oraz udowodnione twierdzenia, prowadzimy logiczne rozumowanie, za pomocą którego wykazujemy prawdziwość tezy.

Metoda nie wprost polega na tym, że zakładamy fałszywość tezy dowodzonego twierdzenia i poprzez wykorzystywanie znanych i udowodnionych

twierdzeń pokazujemy, że doprowadzi nas to do sprzeczności z założeniem. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nasze twierdzenie jest prawdziwe.

1.5. Zadania

1. Czy podane wyrażenia są zdaniami logicznymi?:
 - a) Wczoraj padał deszcz.
 - b) Zamknij okno!
 - c) 8 jest liczbą pierwszą.
 - d) Czy lubisz śpiewać?.
 - e) X jest liczbą dodatnią.
 - f) Istnieje liczba, której kwadrat jest ujemny.
 - g) Liczba przekątnych pięciokąta jest równa liczbie jego boków.
 - h) $(x - y)^2 = (y - x)^2$.
2. Oceń wartość logiczną następujących zdań:
 - a) 8 jest liczbą pierwszą.
 - b) Istnieje liczba, której kwadrat jest ujemny.
 - c) Liczba przekątnych pięciokąta jest równa liczbie jego boków.
 - d) $(x - y)^2 = (y - x)^2$.
 - e) Każdy trapez jest równoległobokiem.
 - f) Trójkąt o bokach 12, 16, 20 jest prostokątny.
 - g) 1 jest liczbą pierwszą.
 - h) Chiny są krajem europejskim.
 - i) Długość wysokości czworościanu foremnego o boku 2 jest liczbą niewymierną.
3. Oceń wartość logiczną zdania złożonego, określając najpierw wartości logiczne zdań prostych:
 - a) W Polsce uprawia się kawę oraz cytrusy.
 - b) 5 jest liczbą złożoną lub pierwszą.
 - c) $\sqrt{2} > 1$ lub $\sqrt{3^2 + 4^2} = 7$.
 - d) Każdy trójkąt ma trzy osie symetrii oraz środek symetrii.
 - e) Jan Kochanowski napisał „Treny” i Adam Mickiewicz napisał „Lalkę”.
 - f) Jan Kochanowski napisał „Treny” lub Adam Mickiewicz napisał „Lalkę”.
 - g) Jeżeli 3 jest dzielnikiem 5, to 7 jest liczbą parzystą.
 - h) Jeżeli $\sqrt{2} > 1$, to $(-1)^3 > 0$.

- i) $\sqrt{(-2)^2} = -2 \Leftrightarrow 2 = -2.$
- j) Trapez jest równoleglobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy ma dwie pary boków równoległych.
4. Znajdź taką liczbę całkowitą, która po podstawieniu w miejsce x sprawi, że równość będzie prawdziwa:
- $x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = x,$
 - $\sqrt[3]{x} < 0 \vee x \neq 3,$
 - $x \leq 0 \wedge x \leq 0,$
 - x jest liczbą pierwszą $\Leftrightarrow x \neq 7,$
 - $\sqrt{x^2} = x \Rightarrow |x| = 3.$
5. Wiadomo, że zdanie $p \wedge q$ jest prawdziwe. Oceń wartość logiczną zdania: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q).$
6. Wiadomo, że zdanie p jest fałszywe. Oceń wartość logiczną poniższych zdań:
- $(p \wedge q) \Rightarrow p,$
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p,$
 - $[(p \Rightarrow q) \vee p] \Leftrightarrow (q \wedge p).$
7. Udowodnij prawa rachunku zdań znajdujące się w tabeli 1.7 na stronie 9.
8. Czy podane wyrażenia są prawami logicznymi?
- $(p \vee q) \Rightarrow p,$
 - $[\neg (\neg p \vee \neg q)] \Leftrightarrow (p \wedge q),$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow q,$
 - $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$
9. Wyznacz zbiór elementów spełniających podaną formę zdaniową:
- $p(x): \sqrt{x} = 1 \wedge (x - 1)(x - 4) = 0,$
 - $p(x): 2x + 3 > 0 \wedge x^2 > 2,$
 - $p(x): \frac{x-1}{x+1} > 0 \vee x < 0,$
 - $p(x): \sqrt{x} = 1 \vee (x - 1)(x - 4) = 0.$
10. Poprzedź daną formę zdaniową zmiennej rzeczywistej x kwantyfikatorem tak, aby powstało zdanie prawdziwe:
- $(x + 2)^2 = x^2 + 2,$
 - $x^2 < x,$
 - $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3,$
 - $x^2 > 0.$

11. Oceń wartość logiczną podanych zdań oraz znajdź ich zaprzeczenia:

- a) $\forall_{x \in R} x^2 + 1 > 0,$
- b) $\exists_{x \in R} x^2 - 1 > 0,$
- c) $\forall_{x \in R} x + 1 > 0,$
- d) $\exists_{x \in R} x^2 \leq 0,$
- e) $\forall_{\in R} (x^3 + 1 > 0 \vee x > 0),$
- f) $\exists_{x \in R} (x^2 + 1 > 0 \wedge x - 3 = 0).$

Rozdział 2

Elementy teorii mnogości

2.1. Zbiory

W dotychczasowej edukacji matematycznej spotykaliśmy się z pojęciem zbioru. Wyróżnialiśmy zbiór liczb rzeczywistych, naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych, zbiory figur płaskich, w tym zbiory prostokątów, trójkątów, wielokątów foremnych itp.

Zbiór nie jest definiwalny, gdyż jest to pojęcie pierwotne w matematyce.

Zbiory oznaczać będziemy wielkimi literami alfabetu, a ich elementy małymi literami.

Chcąc zapisać, że „ a jest elementem zbioru A ”, będziemy używać zapisu symbolicznego $a \in A$, jeśli „element a nie należy do zbioru B ”, zapiszemy $a \notin B$.

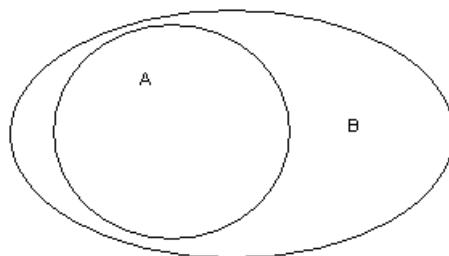
Uwaga

Zbiór, który nie posiada żadnego elementu, nazywać będziemy zbiorem pustym i oznaczać symbolem \emptyset .

Definicja

Zbiór A zawiera się w zbiorze B (inaczej mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B), jeśli wszystkie elementy zbioru A są jednocześnie elementami zbioru B .

Fakt, że A jest podzbiorem B zapisujemy symbolicznie $A \subset B$.



Rysunek 2.2. Graficzna ilustracja zawierania zbiorów

Definicja

Dwa zbiory A i B są równe (co symbolicznie zapiszemy $A = B$), jeśli A jest podzbiorem B oraz jednocześnie B jest podzbiorem A , zatem:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

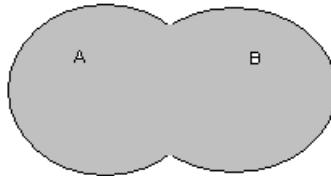
2.2. Działania na zbiorach

Na zbiorach możemy wykonywać różne działania.

Definicja

Sumą zbiorów A oraz B nazywać będziemy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów oznaczamy symbolicznie $A \cup B$. Więc:

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

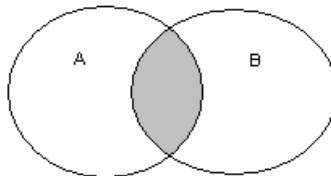


Rysunek 2.1. Graficzna ilustracja sumy zbiorów

Definicja

Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A oraz B nazywać będziemy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i należą do zbioru B . Iloczyn zbiorów symbolicznie oznaczamy $A \cap B$. Zatem:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$



Rysunek 2.3. Graficzna ilustracja iloczynu zbiorów

Definicja

Dwa zbiory, których iloczyn jest zbiorem pustym, nazywamy *rozłącznymi*.

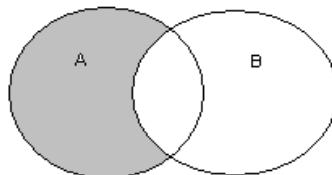
Definicja

Różnicę zbiorów A oraz B nazywać będziemy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A i jednocześnie nie należą do zbioru B. Różnicę zbiorów symbolicznie oznaczamy $A \setminus B$. Zatem:

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B).$$

Uwaga

Różnicę zbiorów możemy również zapisywać w postaci: $A - B$.



Rysunek 2.2. Graficzna ilustracja różnicy zbiorów

Definicja

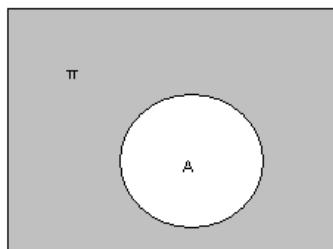
Niech A będzie dowolnym zbiorem przestrzeni Π . Dopełnieniem zbioru A nazywamy zbiór równy różnicy przestrzeni oraz zbioru A, oznaczamy go A^c ($A^c = \Pi - A$). Zatem:

$$(x \in A^c) \Leftrightarrow (x \in \Pi \wedge x \notin A).$$

Uwaga

Nietrudno zauważyć, że zbiór w sumie z jego dopełnieniem dają całą przestrzeń oraz zbiór i jego dopełnienie są zbiorami rozłącznymi, czyli:

$$A \cup A^c = \Pi \text{ oraz } A \cap A^c = \emptyset.$$



Rysunek 2.3. Graficzna ilustracja dopełnienia zbioru

2.3. Prawa rachunku zbiorów

W teorii mnogości możemy sformułować analogiczne do praw logicznych prawa dotyczące rachunku zbiorów. Przedstawimy je w postaci tabeli.

Tabela 2.1. Prawa rachunku zbiorów

$A \cup A = A$	
$A \cap A = A$	
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	I prawo De Morgana dla zbiorów
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	II prawo De Morgana dla zbiorów
$A \cup B = B \cup A$	Przemienność dodawania zbiorów
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Łączność dodawania zbiorów
$A \cap B = B \cap A$	Przemienność iloczynu zbiorów
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Łączność iloczynu zbiorów
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Rozdzielność iloczynu zbiorów względem ich sumy
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Rozdzielność sumy zbiorów względem ich iloczynu

Przykład

Udowodnimy teraz I prawo De Morgana.

Niech $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \sim(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)$. Korzystając z praw logiki matematycznej, mamy: $\sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)$. Zatem: $x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$. Z równoważności zapisów wynika zatem: $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$, co dowodzi, że: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

2.4. Zbiór liczb rzeczywistych

W tym miejscu omówimy podzbiory zbioru liczb rzeczywistych.

Definicja

Zbiorem liczb naturalnych nazywamy zbiór $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definicja

Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Uwaga

Liczby całkowite ujemne oznaczamy \mathbb{Z}_- , a dodatnie \mathbb{Z}_+ . Zachodzi więc zależność:

$$\mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}.$$

Definicja

Liczبę nazywać będziemy *wymierną*, gdy można ją przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0$. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy W .

Uwaga

Każda liczba wymierna da się zapisać w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego.

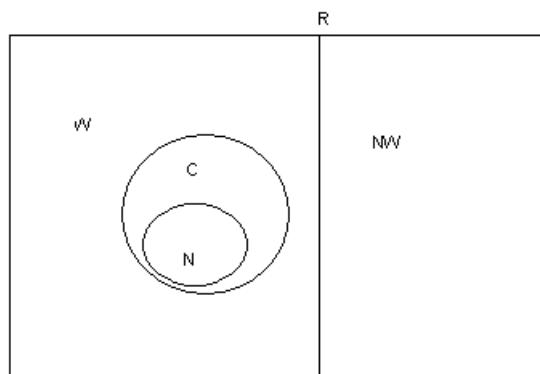
Definicja

Liczبę, która nie jest liczbą wymierną, nazywamy *niewymierną*. Zbiór liczb niewymiernych oznaczamy NW .

Wszystkie wymienione zbiory są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych (\mathbb{R}).

Miedzy podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych zachodzą następujące relacje zawierania: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset W \subset \mathbb{R}$ oraz: $NW \subset \mathbb{R}$.

Ponadto: $W \cup NW = \mathbb{R}$ oraz: $W \cap NW = \emptyset$.



Rysunek 2.4. Zbiór liczb rzeczywistych

2.5. Zadania

1. Wyznacz zbiory:
 - a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$,
 - b) $\mathbb{Z} \cap W$,
 - c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$,
 - d) $\mathbb{Z} \cap NW$,
 - e) $(\mathbb{Z} - NW) \cap \mathbb{R}$.
2. Wskaż zdania prawdziwe, uzasadniając odpowiedź:
 - a) Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.
 - b) Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.
 - c) Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną.
 - d) Każda liczba niewymierna jest liczbą rzeczywistą.
 - e) Istnieje liczba wymierna, która jest jednocześnie niewymierną.
 - f) Istnieje liczba wymierna, która nie jest liczbą naturalną.
 - g) Istnieją dwie liczby niewymierne, których suma jest liczbą wymierną.
 - h) Istnieją dwie liczby niewymierne, których iloczyn jest liczbą wymierną.
 - i) Iloczyn dwóch liczb niewymiernych jest zawsze liczbą wymierną.
3. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A oraz B, a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$, jeśli:
 - a) $A = \langle -1, 3 \rangle, B = \langle 2, 5 \rangle$,
 - b) $A = \langle -3, 1 \rangle, B = (0, 2)$,
 - c) $A = (-\infty, 3), B = \langle -1, +\infty \rangle$.
4. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A° oraz B° , a następnie wyznacz zbiory: $A^\circ \cup B^\circ, A^\circ \cap B^\circ, A^\circ - B^\circ, B^\circ - A^\circ$, jeśli:
 - a) $A = \langle -1, 3 \rangle, B = \langle 2, 5 \rangle$,
 - b) $A = \langle -3, 1 \rangle, B = (0, 2)$,
 - c) $A = (-\infty, 3), B = \langle -1, +\infty \rangle$.
5. Wyznacz zbiory: $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$, jeśli:
 - a) $A = \{x \in \mathbb{N}: x < 3\}, B = \{x \in \mathbb{N}: x \geq 3\}$,
 - b) $A = \{x \in \mathbb{R}: x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{N}: x < 1\}$,
 - c) $A = \{x \in \mathbb{R}: x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{N}: x < 2\}$.

6. Niech przestrzeń X będzie zbiorem wszystkich czworokątów. A niech będzie zbiorem wszystkich trapezów, B – zbiorem wszystkich równoległoboków, C – zbiorem prostokątów. Znajdź zbiory:
- $(A \cap B) \cap C$,
 - $(A \cap B') \cap C$,
 - $A^c \cap (B \cap C)$,
 - $(A \cap B) \cap C^c$.
7. Wykaż, że liczba $\sqrt{7}$ jest liczbą niewymierną.
8. Sprawdź, czy podane równości są prawdziwe:
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
 - $A \cup (A \cap B) = A$,
 - $A \cap (A \cup B) = B$,
 - $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$.

Rozdział 3

Dwumian Newtona

3.1. Indukcja matematyczna

W matematyce możemy się spotkać z twierdzeniami, w których mowa jest o liczbach naturalnych. Takie twierdzenia dowodzimy z wykorzystaniem zasady indukcji matematycznej.

Twierdzenie (zasada indukcji matematycznej)

Niech będzie dane pewne twierdzenie, w którym mowa jest o liczbach naturalnych. Jeżeli:

- twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej n_0 ,
 - dla dowolnej liczby naturalnej k ($k \geq n_0$) – z prawdziwości tego twierdzenia dla liczby k wynika jego prawdziwość dla liczby $k + 1$,
- to mówimy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n takiej, że $n \geq n_0$.

Przykład

Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej, wykażemy, że:

$$\forall_{n \in N} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Sprawdzamy, czy twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 0$.

$$L = 1 \text{ oraz } P = (0 + 1)^2 = 1, \text{ więc } L = P$$

Przechodzimy do drugiego kroku, czyli z prawdziwości:

$$\forall_{k \in N} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Wykażemy, że prawdziwa jest zależność:

$$\forall_{k \in N} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) + [2(k + 1) + 1] = [(k + 1) + 1]^2,$$

czyli po wykonaniu działań:

$$\forall_{k \in N} 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) + (2k + 3) = (k + 2)^2.$$

Dowód:

$$L = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) + (2k + 3) = (k + 1)^2 + (2k + 3) =$$

(po zastosowaniu założenia, że dla k twierdzenie jest prawdziwe)

$$= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k + 2)^2 = P$$

(po wykonaniu działań oraz zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia).

Pokazaliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 0$, a następnie przy założeniu, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby, k wykażaliśmy prawdziwość twierdzenia dla $k+1$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Przykład

Wykorzystując zasadę indukcji matematycznej, wykażemy, że:

$$\forall_{n \in N} \text{ liczba postaci } 10^n + 4^n - 2 \text{ jest podzielna przez 3.}$$

Sprawdzamy, czy twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 1$.

$$L = 10 + 4 - 2 = 12 = 3 \cdot 4, \text{czyli liczba jest podzielna przez 3.}$$

Przechodzimy do drugiego kroku, czyli z prawdziwości:

$$\forall_{k \in N} 10^k + 4^k - 2 = 3t, t \in N$$

wykażemy, że prawdziwa jest zależność:

$$\forall_{k \in N} 10^{k+1} + 4^{k+1} - 2 = 3u, u \in N.$$

Dowód:

$$L = 10^{k+1} + 4^{k+1} - 2 = 10 \cdot 10^k + 4 \cdot 4^k - 2 =$$

(z własności działań na potęgach o wykładnikach naturalnych)

$$= 4 \cdot 10^k + 4 \cdot 4^k - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 10^k - 2 + 4 \cdot 2 =$$

$$= 4(10^k + 4^k - 2) + 3 \cdot 2 \cdot 10^k + 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3t + 3 \cdot 2 \cdot 10^k + 3 \cdot 2 =$$

(po zastosowaniu założenia, że dla k twierdzenie jest prawdziwe)

$$= 3(4t + 2 \cdot 10^k + 2) = 3u.$$

Pokazaliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 1$, a następnie przy założeniu, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby k , wykażaliśmy prawdziwość twierdzenia dla $k+1$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

3.2. Silnia

Rozdział ten rozpoczniemy od wprowadzenia niektórych pojęć związanych ze zbiorem liczb naturalnych.

Zaczniemy od policzenia iloczynu kolejnych liczb naturalnych dodatnich:

$$\begin{aligned}1 \cdot 2 &= 2 \\1 \cdot 2 \cdot 3 &= 6 \\1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 24 \\1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 &= 120 \\1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 &= 720\end{aligned}$$

Nietrudno zauważyc, że każda kolejna wartość iloczynu rośnie szybko. Ze względu na długość takiego zapisu postanowiono wprowadzić symbol zastępujący długi zapis iloczynu kolejnych liczb naturalnych. Symbol ten to $n!$ (czytamy: n silnia).

Definicja

$$\begin{aligned}0! &= 1 \\1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n &= n!, n \in \mathbb{N}_+\end{aligned}$$

3.3. Symbol Newtona

Definicja

Symbolem Newtona nazywamy liczbę postaci:

$${n \choose k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ gdzie } n, k \in \mathbb{N} \text{ oraz } n \geq k.$$

Symbol Newtona czytamy „ n po k ”. Symbol Newtona jest zawsze liczbą dodatnią.

Twierdzenie

Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to:

$${n \choose 0} = 1, {n \choose 1} = n, {n \choose 2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}, {n \choose n} = 1.$$

Dowód:

Wykorzystując definicje symbolu Newtona oraz silni, mamy:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Analogicznie mamy:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$$

Natomiast:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} = n$$

oraz

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Twierdzenie

Jeżeli $n, k \in N$ oraz $n \geq k$, to $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dowód:

Bezpośrednio z definicji dwumianu Newtona mamy:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Twierdzenie

Jeżeli $n, k \in N$ oraz $n \geq k + 1$, to $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Dowód:

Wykorzystując definicję symbolu Newtona oraz wykonując kolejne działania, mamy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!}{n! \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)!} + \\ &+ \frac{n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\
 &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

co kończy dowód.

3.4. Dwumian Newtona

W dotychczasowej nauce matematyki korzystaliśmy wielokrotnie ze wzorów skróconego mnożenia.

Pamiętamy, że:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\
 (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

Chcąc wyznaczyć wzór skróconego mnożenia dla $(a+b)^4$, możemy skorzystać z faktu, że:

$$(a+b)^4 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^2$$

lub

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b).$$

Wykonując działania (z wykorzystaniem jednej z powyższych równości), otrzymamy:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Postępując analogicznie, moglibyśmy wyznaczyć rozwinięcie wyrażenia $(a+b)^n$ dla dowolnego n naturalnego.

Twierdzenie (wzór dwumianowy Newtona)

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi równość:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n
 \end{aligned}$$

3.5. Zadania

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest równość:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest równość:

$$1+11+111+\dots+\underbrace{111\dots11}_{n \text{ jedynek}}=\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10).$$

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest równość:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest równość:

$${n \choose 0} + {n \choose 1} + {n \choose 2} + \dots + {n \choose n} = 2^n.$$

3. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej liczba postaci $n^3 + 5n$ jest podzielna przez 6.

4. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej liczba postaci $2^{6n+1} + 9^{n+1}$ jest podzielna przez 11.

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ prawdziwa jest nierówność: $n^2 > 2n + 1$.

6. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej prawdziwa jest nierówność: $2^n > n!$.

7. Doprowadź do jak najprostszej postaci, podaj założenia:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}$,

b) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!}$,

c) $\frac{(2n-1)!(n+2)!}{n!(2n+2)!}$,

d) $\frac{(2n-k-2)!(2n-k-1)!}{(2n-k)!(2n-k-3)!}$.

8. Oblicz, korzystając z definicji symbolu Newtona:

a) $\binom{10}{3}$,

b) $\binom{8}{4}$,

c) $\frac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$.

9. Oblicz:

a) $\frac{\binom{24}{6}}{\binom{24}{19}}$,

b) $\frac{\binom{4}{3} \cdot \left(\binom{27}{11} + \binom{27}{15} \right)}{\binom{28}{15}}$.

10. Doprzedź do jak najprostszej postaci, podaj założenia:

a) $\frac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}}$,

b) $\frac{\binom{4n}{4n-2}}{\binom{4n-1}{4n-3}}$,

c) $\frac{\binom{4n}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}{\binom{4n-1}{4n-3} + \binom{4n-1}{4n-2} + \binom{4n}{4n-1}}$.

11. Oblicz n:

a) $n + \binom{n}{2} = 15$,

b) $\binom{n+2}{5} = 56$,

c) $\binom{2n-3}{2n-5} + \binom{2n-3}{2n-4} = 15$.

12. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz w postaci sumy:

a) $(x+3)^6$,

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8, x \neq 0$,

- c) $(2x - 1)^5$,
- d) $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4, x \neq 0$.

- 13. Wyznacz piąty wyraz rozwinięcia wyrażenia $\left(2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{12}$.
- 14. W rozwinięciu $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7, x \neq 0$ wyznacz współczynnik przy x^2 .
- 15. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}\right)^{12}$, w którym nie występuje x.

Rozdział 4

Elementy rachunku wektorowego i geometrii analitycznej

4.1. Wektory

Definicja

Wektorem o początku w punkcie A i końcu w punkcie B nazywamy uporządkowaną parę punktów A i B. Wektor o początku w punkcie A i końcu B oznaczamy \overrightarrow{AB} . Współrzędne wektora \overrightarrow{AB} w układzie kartezjańskim obliczamy ze wzoru:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A], \text{ gdzie } A(x_A, y_A), B = (x_B, y_B).$$

Przykład

Wyznaczyć współrzędne wektora \overrightarrow{AB} , jeśli: A(−2,3), B(3, −4).

Skorzystamy ze wzoru powyżej, czyli:

$$\overrightarrow{AB} = [3 - (-2), -4 - 3] = [5, -7].$$

Definicja

Odległość punktów A i B nazywamy *długością wektora* \overrightarrow{AB} i oznaczamy $|\overrightarrow{AB}|$. Długość wektora \overrightarrow{AB} obliczać będziemy ze wzoru:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Długość odcinka AB jest równa długości wektora \overrightarrow{AB} .

Przykład

Obliczyć długość wektora \overrightarrow{AB} , jeśli: A(−2,3), B(3, −4).

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{74}.$$

Definicja

Zwrotem wektora \overrightarrow{AB} nazywamy zwrot półprostej AB. Dwa wektory mają

ten sam kierunek, jeśli proste wyznaczone przez te wektory mają ten sam kierunek (są równoległe).

Definicja

Dwa wektory nazywamy *równymi*, jeżeli mają ten sam kierunek i zwrot oraz równe długości. W prostokątnym układzie współrzędnych dwa wektory równe mają identyczne odpowiednie współrzędne.

Definicja

Dwa wektory nazywamy *przeciwnymi*, jeśli mają równe długości i ten sam kierunek, ale przeciwe zwroty. Wektor przeciwny do wektora \overrightarrow{AB} oznaczamy $-\overrightarrow{AB}$ lub \overrightarrow{BA} . Wektory możemy również oznaczać małymi literami: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ itp.

Definicja

Sumą dwóch wektorów $\vec{u} = [x_1, y_1], \vec{v} = [x_2, y_2]$ nazywamy wektor: $\vec{w} = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$. Różnicą wektorów \vec{u} oraz \vec{v} nazywamy sumę wektora \vec{u} oraz wektora przeciwnego do \vec{v} .

Definicja

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początek i koniec pokrywają się. Wektor zerowy nie ma ani kierunku, ani zwrotu.

Twierdzenie

Własności dodawania wektorów:

- a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (przemienność),
- b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$ (łączność),
- c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
- d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Definicja

Iloczynem wektora niezerowego przez liczbę $\lambda \neq 0$ nazywamy wektor: $\lambda \cdot \vec{u} = [\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1]$ o kierunku wektora \vec{u} , długości równej $|\lambda| \cdot |\vec{u}|$ i zwrocie tym samym co wektor \vec{u} , jeśli $\lambda > 0$, a zwrocie przeciwnym, gdy $\lambda < 0$.

Twierdzenie

Własności mnożenia wektora przez liczbę:

- a) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$,
- b) $\delta(\lambda \cdot \vec{u}) = (\delta \cdot \lambda) \cdot \vec{u}$,

- c) $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$,
d) $(\lambda + \delta) \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \delta \cdot \vec{u}$.

Definicja

Iloczynem skalarnym wektora niezerowego \vec{u} i wektora niezerowego \vec{v} nazywamy liczbę równą iloczynowi długości tych wektorów przez cosinus kąta zawartego między nimi, czyli: $\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$, gdzie φ – miara kąta między wektorami. Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = [x_1, y_1]$ oraz $\vec{v} = [x_2, y_2]$ obliczamy ze wzoru:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2.$$

Twierdzenie

Jeżeli iloczyn skalarny wektora niezerowego \vec{u} i wektora niezerowego \vec{v} jest równy zero, to te wektory są do siebie prostopadłe.

Niech dany będzie wektor \overrightarrow{AB} oraz punkt C (leżący między A i B).

Definicja

Stosunkiem podziału wektora \overrightarrow{AB} (odcinka AB) nazywamy liczbę k, taką że:

$$|\overrightarrow{AC}| = k \cdot |\overrightarrow{CB}|$$

Znając współrzędne punktów A (x_A, y_A) oraz B (x_B, y_B), możemy wyznaczyć współrzędne punktu C (x_C, y_C) ze wzorów:

$$x_C = \frac{x_A + k \cdot x_B}{1+k}, \quad y_C = \frac{y_A + k \cdot y_B}{1+k}.$$

W szczególnym przypadku, gdy C jest środkiem wektora (odcinka), tzn. $k=1$, wówczas:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego końców.

4.2. Proste

Definicja

Równanie postaci: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ nazywamy *równaniem ogólnym prostej na płaszczyźnie*.

Twierdzenie

Dwie proste:

$$k: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ oraz } l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są równoległe ($k \parallel l$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0.$$

Twierdzenie

Dwie proste:

$$k: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ oraz } l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są prostopadłe ($k \perp l$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

Twierdzenie

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej $k: Ax + By + C = 0$ obliczać będziemy ze wzoru:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Definicja

Równanie postaci: $y = ax + b$ nazywamy *równaniem kierunkowym prostej na płaszczyźnie*.

Współczynnik $a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem, jaki tworzy prosta z dodatnią półosią osi OX. Współczynnik ten nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.

Przykład

Dana jest prosta $l: x - 2y + 8 = 0$ oraz dwa punkty $A(2, -5)$ i $B(3, -1)$.

Wyznaczyć współrzędne punktu P należącego do prostej l tak, aby leżał on w równych odległościach od punktów A oraz B.

Skoro punkt P ma należeć do prostej l , to spełnia on równanie tej prostej.

Przedstawmy ją w postaci kierunkowej:

$$\begin{aligned} l: & x - 2y + 8 = 0 \\ l: & y = \frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

Niech: $P(x, y) = \left(x, \frac{1}{2}x + 4\right)$ oraz $A(2, -5)$ i $B(3, -1)$.

Zatem:

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{(2-x)^2 + \left(-5 - \frac{1}{2}x - 4\right)^2}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(3-x)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}x - 4\right)^2}$$

Ponieważ: $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$, więc z równości:

$$\sqrt{(2-x)^2 + \left(-5 - \frac{1}{2}x - 4\right)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}x - 4\right)^2}$$

otrzymamy, że: $x = -2\frac{1}{2}, y = 2\frac{3}{4}$.

Odpowiedź:

Szukany punkt $P\left(-2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$.

Twierdzenie

Dwie proste:

$$k: y = a_1x + b_1 \text{ oraz } l: y = a_2x + b_2$$

są równoległe ($k \parallel l$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2.$$

Twierdzenie

Dwie proste:

$$k: y = a_1x + b_1 \text{ oraz } l: y = a_2x + b_2$$

są prostopadłe ($k \perp l$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 + 1 = 0.$$

Twierdzenie

Kąt między prostymi przecinającymi się możemy policzyć ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2} \right|.$$

4.3. Okrąg i koło

Definicja

Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu długości r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od środka O jest równa r ($r > 0$).

W prostokątnym układzie współrzędnych obieramy punkt O (a, b). Okrąg będą tworzyć wszystkie punkty A (x, y) płaszczyzny, które będą spełniały warunek: $|OA| = r$.

Obliczymy współrzędne wektora $\overrightarrow{OA} = [x - a, y - b]$.

Długość tego wektora obliczymy, wykorzystując poznany wzór na długość wektora:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

więc:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r.$$

Obie strony tego równania są nieujemne, więc podnosząc obie strony do potęgi drugiej, otrzymamy:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Otrzymana równość jest postacią kanoniczną równania okręgu.

Wykonując działania oraz redukując wyrazy podobne, możemy sprowadzić to równanie do postaci: $x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Równanie to jest postacią ogólną okręgu o środku O(a, b) i promieniu długości r, gdzie:

$$r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}, \text{ jeśli } A^2 + B^2 - 4C > 0 \text{ oraz: } a = -\frac{A}{2} \text{ i } b = -\frac{B}{2}.$$

Definicja

Kolem o środku w punkcie O i promieniu długości r nazywamy zbiór

wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od środka O jest nie większa od r ($r > 0$).

Opierając się na powyższej definicji, łatwo wykazać, że nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

opisuje koło o środku $O(a, b)$ i promieniu długości r ($r > 0$).

Przykład

Określić wzajemne położenie okręgu o: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ oraz prostej $l: 2x + 3y + 4 = 0$.

Sprawdźmy okrąg do postaci kanonicznej. Z równania: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ otrzymamy:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1.$$

Jest to zatem okrąg o środku w punkcie $O(2, -3)$ i promieniu $r = 1$. Obliczymy teraz odległość środka tego okręgu od prostej l :

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Ponieważ odległość środka tego okręgu od prostej l jest mniejsza od długości promienia, więc prosta jest sieczną okręgu, czyli przecina ją w dwóch różnych punktach.

4.4. Zadania

1. Oblicz obwód trójkąta o wierzchołkach $A(-4, 2), B(0, -1), C(3, 3)$.
2. Na osi odciętych znajdź punkt oddalony o 5 od punktu $A(1, 2)$.
3. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-1, 4), B(-4, 0), C(3, 1)$. Znajdź kąt pomiędzy wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A i bokiem AC.
4. Dane są punkty $A(2, 0), B(-1, -4)$. Na prostej o równaniu $y = 2x + 2$ wyznacz taki punkt C, aby trójkąt ABC był trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej AB.

5. Na osiach współrzędnych znajdź punkty oddalone o 15 od punktu $A(-5, 9)$.
6. Znajdź promień i środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A(-1, 6), B(3, -2)$ i $C(-4, -3)$.
7. Znajdź promień i środek okręgu przechodzącego przez punkt $A(2, -1)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych.
8. Dane są dwa przeciwnie wierzchołki kwadratu $A(4, -1)$ i $B(-3, 0)$. Wyznacz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków.
9. Daną są środki boków trójkąta $A_1(-2, -1), B_1(-2, -4), C_1(3, 0)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.
10. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A(-2, 2), B(4, -2), C(0, 3)$.
11. Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $A(-1, 6), B(3, -2)$ i $C(-4, -3)$.
 - a) Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka.
 - b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C.
 - c) Oblicz pole tego równoległoboku.
12. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(-2, 2)$ i tworzącej z dodatnią półosią osi OX kąt $\frac{3}{4}\pi$.
13. Dane są równania boków trójkąta:

$$\begin{aligned} AB: & 2x - y + 2 = 0, \\ BC: & x - y = 0, \\ AC: & x + y - 2 = 0. \end{aligned}$$
 - a) Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta.
 - b) Oblicz pole tego trójkąta.
 - c) Sprawdź, czy jest to trójkąt: ostrokątny, rozwartokątny czy prostokątny.
14. Znajdź punkt A' symetryczny do punktu $A(-2, 4)$ względem prostej o równaniu $x + 2y - 2 = 0$.
15. Znajdź środek okręgu opisanego na trójkącie, którego bokami są osie układu współrzędnych i prosta o równaniu: $3x - 4y - 5 = 0$.

16. Znajdź środek okręgu wpisanego w trójkąt, którego boki zawarte są w prostych o równaniach:

$$x + y + 12 = 0, 7x + y = 0, 7x - y + 28 = 0.$$

17. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia prostych o równaniach:

$$3x + 4y - 5 = 0, 2x + y - 3 = 0$$

oraz punkt $P(1,1)$.

Rozdział 5

Podstawy teorii funkcji

5.1. Podstawowe definicje

Na wstępie rozdziału przypomnijmy podstawowe definicje i oznaczenia dotyczące teorii funkcji.

Definicja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przypisuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y .

Zbiór X nazywamy zbiorem argumentów lub dziedziną funkcji f i oznaczamy zwyczajowo przez D_f . Natomiast zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f . Zapis $y = f(x)$ czytamy „ y jest wartością funkcji f dla argumentu x ”. Zapis $f: X \rightarrow Y$ odczytujemy „funkcja f ze zbioru X w zbiór Y ”.

Definicja

Jeśli zarówno dziedzina, jak i przeciwdziedzina danej funkcji są podzbiorami zbioru wszystkich liczb rzeczywistych, to daną funkcję nazywamy *funkcją rzeczywistą* (lub *liczbową*) jednej zmiennej rzeczywistej.

Jeśli funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej jest podana wyłącznie za pomocą wzoru, to wyznaczamy jej *dziedzinę naturalną* jako zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których działania we wzorze funkcji są wykonalne.

Przykład

Wyznaczmy dziedzinę naturalną funkcji rzeczywistej zadanej wzorem $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$.

Zauważmy, że wyrażenie $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$ jest dobrze określone wtedy i tylko wtedy, gdy mianownik tego wyrażenia jest różny od 0. Założymy zatem,

że $x^2 - 9 \neq 0$. Rozkładając prawą stronę na czynniki, otrzymujemy $(x - 3)(x + 3) \neq 0$. Ponieważ iloczyn danych wyrażeń jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy każde z tych wyrażeń jest niezerowe, otrzymujemy koniunkcję $x - 3 \neq 0 \wedge x + 3 \neq 0$. Zatem ostatecznie nasze założenie przyjmuje postać $x \neq 3 \wedge x \neq -3$. W konsekwencji argumentami danej funkcji mogą być dowolne liczby rzeczywiste z wyłączeniem -3 oraz 3 . Zapisujemy to w postaci

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}.$$

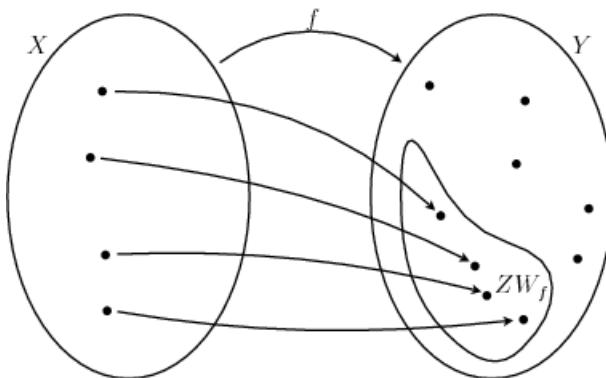
Definicja

Zbiór wartości ZW_f funkcji f to podzbiór przeciwdziedziny tej funkcji, zdefiniowany następująco

$$ZW_f = \{y \in Y : (\exists x \in D_f) y = f(x)\}.$$

Zatem do zbioru wartości funkcji f należy każdy z elementów przeciwdziedziny tej funkcji, który jest faktyczną wartością funkcji f dla jakiegoś argumentu z dziedziny tej funkcji.

Odmienność zbioru wartości funkcji od jej przeciwdziedziny przedstawiono na poniższym rysunku.



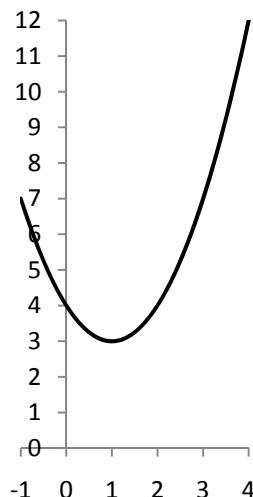
Rysunek 5.1. Zbiór wartości a przeciwdziedzina funkcji

Przykład

Wyznaczmy zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 4$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Aby wyznaczyć zbiór wartości danej funkcji, wykonamy najpierw szkic jej wykresu. Przypomnijmy, że do naszkicowania paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej potrzebne są nam takie dane jak: znak współczyn-

nika przy x^2 , miejsca zerowe (lub informacja o ich braku) oraz współrzędne wierzchołka paraboli. Współczynnik przy x^2 jest dodatni, zatem ramiona paraboli będą skierowane ku górze. Wyróżnik danej funkcji kwadratowej wynosi $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$, zatem ta funkcja nie posiada miejsc zerowych i w konsekwencji parabola wykresu leży ponad osią Ox . Wierzchołek paraboli ma współrzędne określone wzorami $x_w = \frac{-b}{2a}$, $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$, które w naszym przypadku wynoszą $x_w = 1$, $y_w = 3$. Szkic wykresu danej funkcji jest przedstawiony na kolejnym rysunku.



Rysunek 5.2. Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 4$

Po zrzutowaniu prostopadłym wykresu funkcji na osią Oy (inaczej: po rozpatrzeniu wszystkich drugich współrzędnych punktów wykresu) widzimy, że funkcja ta przyjmuje jako swoje wartości wszystkie liczby rzeczywiste nie mniejsze niż 3. Zatem otrzymaliśmy szukany zbiór wartości danej funkcji: $ZW_f = \{3, +\infty\}$.

Definicja

Mówimy, że funkcja f i funkcja g są *tożsamościowo równe*, jeśli dziedziny tych funkcji są identyczne oraz dla każdego argumentu wartości tych funkcji są równe, tzn. jeśli

$$D_f = D_g = D \wedge (\forall x \in D) f(x) = g(x).$$

Fakt, że funkcje f i g są tożsamościowo równe, zapisujemy $f \equiv g$.

5.2. Podstawowe własności funkcji

W dalszym ciągu zakładamy, że mamy do czynienia z funkcjami rzeczywistymi jednej zmiennej rzeczywistej. Przypomnimy podstawowe własności takich funkcji.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją „na” zbiór Y* , jeśli przeciwdziedzina i zbiór wartości tej funkcji są zbiorami równymi, tzn. jeśli każdy element przeciwdziedziny jest wartością funkcji f dla jakiegoś argumentu tej funkcji.

Definicja

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w zbiorze $A \subseteq X$ *różnowartościowa*, jeśli dla różnych argumentów z tego zbioru wartości tej funkcji są różne. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Równoważnie możemy powiedzieć, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w zbiorze $A \subseteq X$ *różnowartościowa*, jeśli w tym zbiorze funkcja f przyjmuje te same wartości wyłącznie dla identycznych argumentów. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Definicja

Jeśli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją „na” zbiór Y oraz różnowartościową w całym zbiorze X , to funkcję f nazywamy *funkcją wzajemnie jednoznaczną* ze zbioru X na zbiór Y .

Przykład

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = x^5 - 3$, określoną na całym zbiorze liczb rzeczywistych. Jak łatwo sprawdzić, $ZW_f = \mathbb{R}$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Prawdziwe są kolejne równości

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \\ x_1^5 - 3 &= x_2^5 - 3, \\ x_1^5 &= x_2^5, \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Zatem pokazaliśmy, że dana funkcja jest różnowartościowa w zbiorze \mathbb{R} . W konsekwencji funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x^5 - 3$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną ze zbioru \mathbb{R} na zbiór \mathbb{R} .

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją ograniczoną z dołu*, jeśli jej zbiór wartości ZW_f jest ograniczony z dołu, tzn. jeśli

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \geq m.$$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją ograniczoną z góry*, jeśli jej zbiór wartości ZW_f jest ograniczony z góry, tzn. jeśli

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \leq M.$$

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy *funkcją ograniczoną*, jeśli jest ograniczona zarówno z dołu, jak i z góry.

Przykład

Przypomnijmy, że zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 4$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest równy $ZW_f = \langle 3, +\infty \rangle$. Ponieważ zbiór ten jest ograniczony z dołu, np. przez liczbę 3, to dana funkcja jest funkcją ograniczoną z dołu. Zbiór wartości nie jest ograniczony z góry, zatem dana funkcja nie jest ograniczona z góry.

Definicja

Mówimy, że *funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ rosnąca*, jeśli wraz ze wzrostem argumentów z tego przedziału wartości tej funkcji rosną. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)].$$

Definicja

Mówimy, że *funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ nierosnąca*, jeśli wraz ze wzrostem argumentów z tego przedziału wartości tej funkcji nie rosną. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)].$$

Definicja

Mówimy, że *funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ malejąca*, jeśli wraz ze wzrostem argumentów z tego przedziału wartości tej funkcji maleją. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)].$$

Definicja

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ niemalejąca, jeśli wraz ze wzrostem argumentów z tego przedziału wartości tej funkcji nie maleją. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)].$$

Definicja

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ stała, jeśli dla każdej pary argumentów z tego przedziału wartości tej funkcji są takie same. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x_1, x_2 \in A) [f(x_1) = f(x_2)].$$

Definicja

Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest w przedziale $A \subseteq X$ monotoniczna, jeśli jest w tym przedziale rosnąca, nierosnąca, malejąca, niemalejąca lub stała.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją parzystą, jeśli dla każdego argumentu wartość tej funkcji dla argumentu przeciwnego do danego jest równa wartości funkcji dla argumentu danego. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x \in X) [-x \in X \wedge f(-x) = f(x)].$$

Warto zauważyć, że wykres funkcji parzystej jest figurą symetryczną względem osi Oy .

Przykład

Jak łatwo sprawdzić, funkcjami parzystymi są na przykład funkcje potęgowe o wykładnikach parzystych, np. $f(x) = x^2, f(x) = x^4$ itd.

Definicja

Funkcję $f: X \rightarrow Y$ nazywamy funkcją nieparzystą, jeśli dla każdego argumentu wartość tej funkcji dla argumentu przeciwnego do danego jest przeciwna do wartości funkcji dla argumentu danego. Fakt ten zapisujemy

$$(\forall x \in X) [-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)].$$

Wykres funkcji nieparzystej jest figurą symetryczną względem punktu $O(0,0)$ układu współrzędnych.

Przykład

Jak łatwo sprawdzić, przykładami funkcji nieparzystych są funkcje potęgowe o wykładnikach nieparzystych, np. $f(x) = x^3, f(x) = x^5$ itd.

Własności parzystości i nieparzystości funkcji nie są własnościami dopełniającymi się, tzn. funkcja, która nie jest parzysta, nie musi automatycznie być nieparzysta, i na odwrotnie. Ponadto funkcja tożsamościowo równa 0 jest zarówno parzysta, jak i nieparzysta.

Definicja

Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest *funkcją okresową*, jeśli istnieje taka liczba niezerowa T , że dla dowolnego argumentu funkcji dodanie do niego tej liczby nie zmienia wartości funkcji. Fakt ten zapisujemy

$$(\exists T \neq 0)(\forall x \in X)[(x + T) \in X \wedge f(x + T) = f(x)].$$

Każdą liczbę T o własnościach podanych w definicji funkcji okresowej nazywamy *okresem* tej funkcji. Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni funkcji, to nazywa się go jej *okresem podstawowym* lub *zasadniczym*. Warto zauważyć, że wykres funkcji okresowej o okresie T jest figurą „powtarzalną”. Wystarczy narysować fragment tego wykresu na przedziale długości równej okresowi funkcji, a następnie skopiować ten fragment na całą dziedzinę funkcji, systematycznie przesuwając go równolegle w lewo o wektor $[-T, 0]$ i w prawo o wektor $[T, 0]$.

Przykład

Klasycznymi przykładami funkcji okresowych są funkcje trygonometryczne, które zostaną przedstawione w podrozdziale 6.3.

5.3. Działania na funkcjach

Na danych funkcjach możemy wykonywać pewne operacje zwane działaniami na funkcjach. Funkcje możemy dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić, składać oraz odwracać.

Definicja

Jeżeli $D_f = D_g = D$, to sumą funkcji f i g nazywamy funkcję $f + g$, określoną wzorem $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dla każdego $x \in D$.

Definicja

Jeżeli $D_f = D_g = D$, to różnicą funkcji f i g nazywamy funkcję $f - g$, określoną wzorem $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dla każdego $x \in D$.

Definicja

Jeżeli $D_f = D_g = D$, to iloczynem funkcji f i g nazywamy funkcję $f \cdot g$, określoną wzorem $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ dla każdego $x \in D$.

Definicja

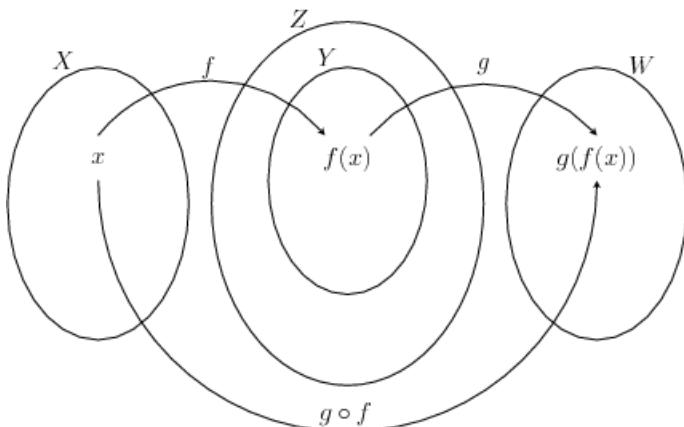
Jeżeli $D_f = D_g = D$, to ilorazem funkcji f i g nazywamy funkcję $\frac{f}{g}$, określoną wzorem $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dla każdego $x \in D \setminus \{x: g(x) = 0\}$.

Definicja

Dane są funkcje $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Z \rightarrow W$, przy czym $Y \subseteq Z$. Złożeniem funkcji g oraz f nazywamy funkcję $g \circ f: X \rightarrow W$, zdefiniowaną wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Zapis $g \circ f$ odczytujemy „ g złożone z f ”. Zwyczajowo funkcję f nazywamy funkcją wewnętrzną, a funkcję g nazywamy funkcją zewnętrzną złożenia $g \circ f$.



Rysunek 5.3. Złożenie funkcji

Przykład

Rozpatrzmy dwie funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = x^4$ z dziedzinami naturalnymi, tj. $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

Wyznaczmy wzory złożen $f \circ g$ oraz $g \circ f$. Z definicji mamy

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4) = \sin(x^4),$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^4.$$

Definicja

Dana jest wzajemnie jednoznaczna funkcja $f: X \rightarrow Y$. Funkcję odwrotną f^{-1} do funkcji f definiujemy wzorem

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \text{ dla dowolnego } x \in X.$$

Jak łatwo zauważyc, dziedziną funkcji odwrotnej jest zbiór wartości (przeciwzdiedzina) funkcji danej, zaś zbiorem wartości (przeciwzdiedziny) funkcji odwrotnej jest dziedzina funkcji danej.

Przykład

Wiemy już, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x^5 - 3$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną ze zbioru \mathbb{R} na zbiór \mathbb{R} . Wyznaczmy wzór funkcji odwrotnej do tej funkcji.

Z definicji otrzymujemy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = x^5 - 3 \text{ dla dowolnego } x \in \mathbb{R}.$$

Z równania $y = x^5 - 3$ wyznaczamy zmienną x i otrzymujemy $x = \sqrt[5]{y+3}$. Zatem szukany wzór funkcji odwrotnej do danej to

$$f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y+3} \text{ dla dowolnego } y \in \mathbb{R}.$$

5.4. Zadania

1. Wyznacz dziedzinę naturalną funkcji:

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8}$,
- b) $f(x) = \frac{3x}{(x-1)(x+2)(2x+4)}$,
- c) $f(x) = \frac{9}{x^2 - 6x + 9}$,
- d) $f(x) = 5\sqrt{3 - 2x}$,
- e) $f(x) = \frac{5x-3}{\sqrt{6+8x}}$.

2. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

- a) $f(x) = x^2 + 2$, gdzie $D_f = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
- b) $f(x) = 2x - 4$, gdzie $D_f = (-5, 7)$,
- c) $f(x) = 2x^2 - 1$, gdzie $D_f = (-2, 4)$,
- d) $f(x) = 2x^2 - 1$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$,
- e) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, gdzie $D_f = \mathbb{R}$.

3. Uzasadnij, że poniższe funkcje są różnowartościowe:

- a) $f(x) = 5x + 4$,
- b) $f(x) = -6x + 2$,
- c) $f(x) = \frac{5}{x-1}$,
- d) $f(x) = \frac{2+x}{x+1}$,
- e) $f(x) = 3\sqrt{x-5}$.

4. Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{3}{x}$:

- Zadania*
- a) jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 0)$,
 - b) jest malejąca w zbiorze $(0, +\infty)$,
 - c) nie jest monotoniczna w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. Zbadaj parzystość i nieparzystość funkcji:

- a) $f(x) = 3\sqrt{2-x}$,
- b) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 6x^2$,
- c) $f(x) = \frac{x}{3x^3-2}$.

6. Wyznacz wzory złożień $f \circ g$ oraz $g \circ f$ dla następujących par funkcji:

- a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$,
- b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$,
- c) $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

7. Uzasadnij, że następujące funkcje są wzajemnie jednoznaczne ze zbioru X na zbiór Y , a następnie znajdź funkcje odwrotne do tych funkcji, jeśli:

- a) $f(x) = x^2, X = (0,5), Y = (0,25),$
- b) $f(x) = x^5 - 6, X = \langle -2,2 \rangle, Y = \langle -38,24 \rangle,$
- c) $f(x) = \sqrt{x+4}, X = \langle -4,0 \rangle, Y = \langle 0,2 \rangle.$

Rozdział 6

Trygonometria

6.1. Miara łukowa kąta

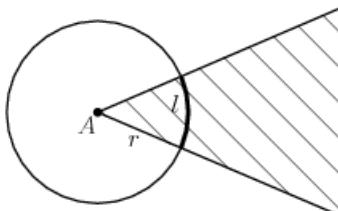
Definicja

Na płaszczyźnie *kątem* nazywamy dwie półproste o wspólnym początku wraz z jedną z figur wyciętych z płaszczyzny przez te półproste. Każdą z tych półprostych zwiemy *ramieniem kąta*. Wspólny początek ramion kąta nazywamy jego *wierzchołkiem*. Figurę wyciętą z płaszczyzny przez ramiona kąta nazywamy *wnętrzem kąta*.

Definicja

Rozważmy kąt o wierzchołku O oraz okrąg o środku O i dowolnym promieniu r . *Miarą łukową kąta* nazywamy stosunek długości łuku będącego częścią wspólną okręgu i wnętrza kąta do długości promienia tego okręgu. Jeśli długość łuku oznaczymy przez l , to dostaniemy zależność

$$\text{miara łukowa kąta} = \frac{l}{r}.$$



Rysunek 6.1. Miara łukowa kąta

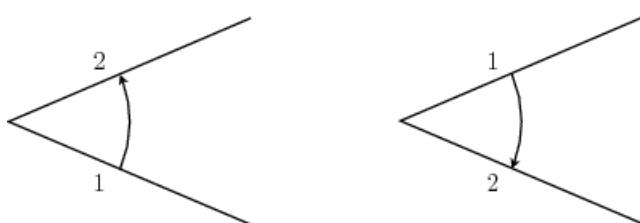
Kąt, którego miara łukowa wynosi 1, nazywamy *radianem* i oznaczamy skrótnie rad. Przeliczanie miary stopniowej kąta na jego miarę łukową i odwrotnie odbywa się zgodnie ze wzorami

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \text{ rad}, \quad \alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \right)^\circ.$$

Często pomijamy wyrażenie rad i podajemy jedynie wartość liczbową miary łukowej, np. miara łukowa kąta półpełnego wynosi π , miara łukowa kąta pełnego wynosi 2π itd.

Definicja

Kątem skierowanym (zorientowanym) nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą półprostą zwiemy *ramieniem początkowym kąta*, drugą natomiast *ramieniem końcowym kąta*. Mówimy, że *kąt jest skierowany ujemnie*, jeśli ramiona tego kąta są uporządkowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara; w przeciwnym wypadku mówimy o *kącie skierowanym dodatnio*.



Rysunek 6.2. Kąt skierowany dodatnio i kąt skierowany ujemnie

Definicja

Miara łukowa kąta skierowanego dodatnio jest równa mierze łukowej tego kąta rozważanego bez uwzględniania porządku ramion. *Miara łukowa kąta skierowanego ujemnie* jest liczbą przeciwną do miary łukowej tego kąta rozważanego bez uwzględniania porządku ramion.

Zauważmy, że dla kątów skierowanych miara łukowa jest liczbą z przedziału $[-2\pi, 2\pi]$.

Pojęcie kąta skierowanego można uogólnić. Rozpatrzmy kąt skierowany z „ruchomym” ramieniem końcowym. Założmy, że ramię końcowe „obróciło się” o kąt skierowany o mierze α , a następnie jeszcze o całkowitą wielokrotność 2π . Otrzymujemy w ten sposób kąt przystający (tzn. o tym samym wierzchołku i ramionach) do kąta skierowanego o mierze α . Postępując analogicznie, możemy otrzymać nieskończoność wiele kątów skierowanych przystających do danego, które stanowią uogólnienie tego kąta. Przyjmujemy zatem, że każdy kąt skierowany ma nieskończoność wiele miar, które można zapisać w postaci $\alpha + k \cdot 2\pi$, gdzie $\alpha \in (0, 2\pi)$ i $k \in \mathbb{Z}$, przy czym α nazywamy *miarą główną* uogólnionego kąta skierowanego.

Zauważmy, że dla uogólnionych kątów skierowanych miara łukowa jest dowolną liczbą rzeczywistą. W dalszym ciągu pod pojęciem kąt skierowany będziemy rozumieli uogólniony kąt skierowany.

6.2. Trygonometria kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Przypomnijmy definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Definicja

Niech w trójkącie prostokątnym dany będzie kąt ostry α . Wtedy: *sinusem kąta α* nazywamy stosunek długości przyp prostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwp prostokątnej, *cosinusem kąta α* nazywamy stosunek długości przyp prostokątnej przyległej do kąta α do przeciwp prostokątnej, *tangensem kąta α* nazywamy stosunek długości przyp prostokątnej przeciwległej do kąta α do przyp prostokątnej przyległej do kąta α , *cotangensem kąta α* nazywamy stosunek długości przyp prostokątnej przyległej do kąta α do przyp prostokątnej przeciwległej do kąta α .

Powysze funkcje trygonometryczne kąta ostrego α oznaczamy odpowiednio: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tg \alpha$ oraz $\ctg \alpha$.

Przypomnijmy tabelę wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów:

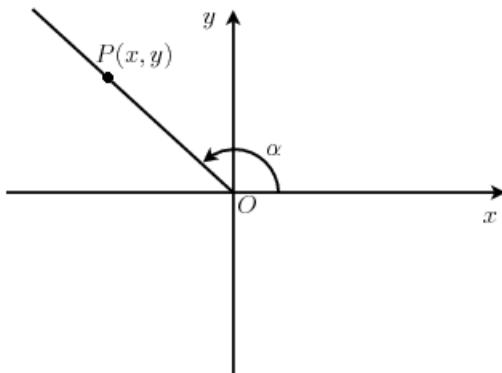
Tabela 6.1. Wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów

α	$0^\circ = 0$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje
$\ctg \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6.3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Dana jest dowolna liczba rzeczywista α , której przypisujemy kąt skierowany $\sphericalangle \alpha$ umieszczony w układzie współrzędnych w ten sposób, że jego ramię początkowe pokrywa się z dodatnią częścią osi Ox (patrz rysunek 6.3). Na

ramieniu końcowym kąta obieramy dowolny punkt $P(x, y)$, różny od $O(0,0)$.



Rysunek 6.3. Kąt skierowany w układzie współrzędnych

Definicja

Sinusem α nazywamy iloraz rzędnej punktu P przez jego odległość od początku układu współrzędnych:

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cosinusem α nazywamy iloraz odciętej punktu P przez jego odległość od początku układu współrzędnych:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tangensem α nazywamy iloraz rzędnej punktu P przez jego odciętą. Jeśli $x = 0$, to $\operatorname{tg} \alpha$ nie istnieje:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

Cotangensem α nazywamy iloraz odciętej punktu P przez jego rzędną. Jeśli $y = 0$, to $\operatorname{ctg} \alpha$ nie istnieje:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

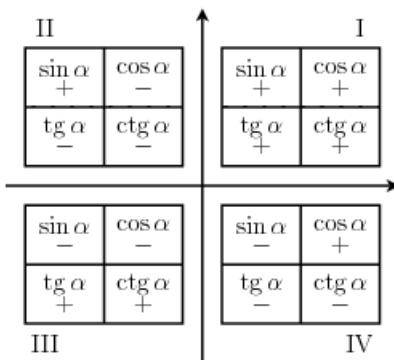
Uwaga

Powyższe definicje nie zależą od wyboru punktu P na końcowym ramieniu kąta.

Na bazie powyższych definicji określamy cztery funkcje rzeczywiste jednej zmiennej rzeczywistej, zwane *funkcjami trygonometrycznymi*:

- a) sinus: $\alpha \rightarrow \sin \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,
- b) cosinus: $\alpha \rightarrow \cos \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$,
- c) tangens: $\alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- d) cotangens: $\alpha \rightarrow \operatorname{ctg} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych mogą być ujemne, dodatnie lub równe zero w zależności od tego, w której ćwiartce układu leży końcowe ramię kąta skierowanego α . Znaki wartości funkcji trygonometrycznych przedstawiono na kolejnym rysunku.

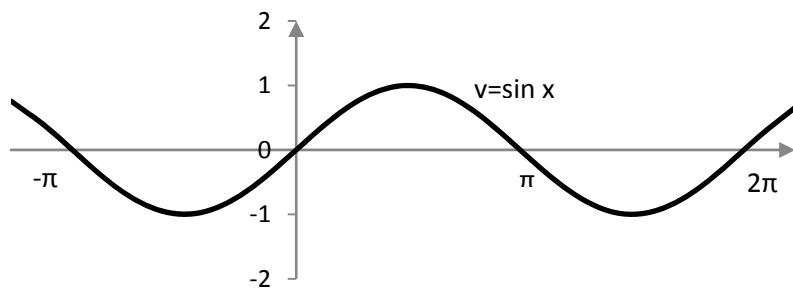


Rysunek 6.4. Znaki wartości funkcji trygonometrycznych

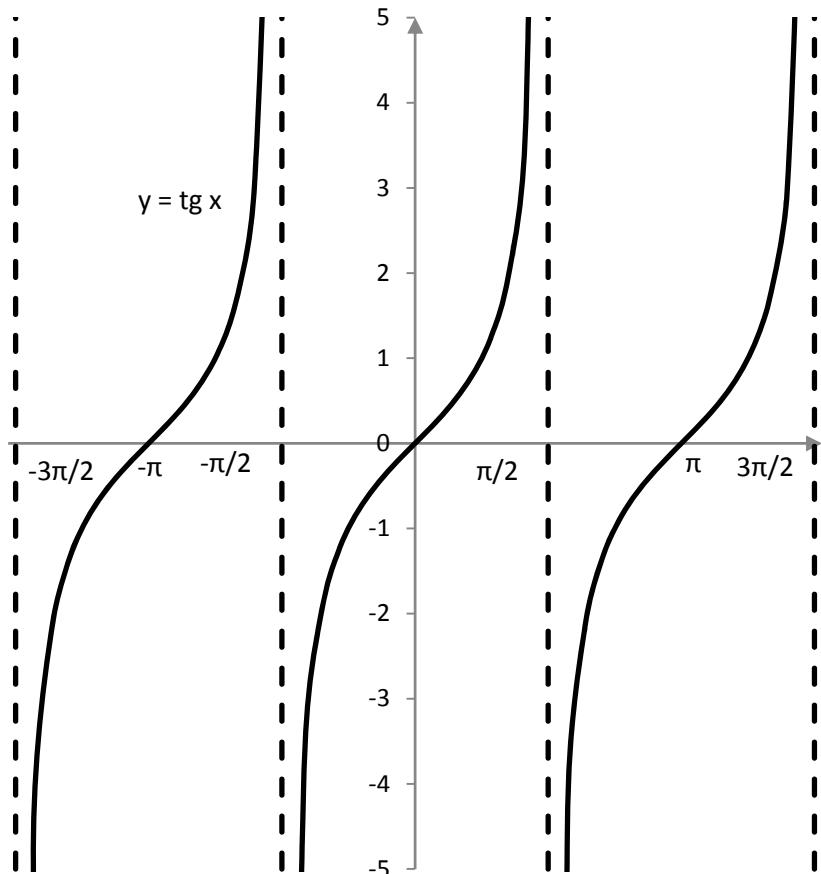
Znaki wartości funkcji trygonometrycznych można również zapamiętać dzięki następującemu wierszykowi:

*Wartości funkcji trygonometrycznych:
w pierwszej ćwiartce wszystkie są dodatnie,
w drugiej – tylko sinus,
w trzeciej – tangens i cotangens,
a w czwartej – cosinus.*

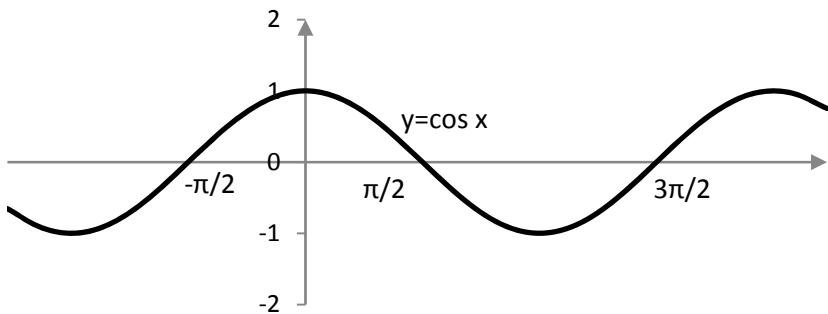
Na kolejnych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji trygonometrycznych.



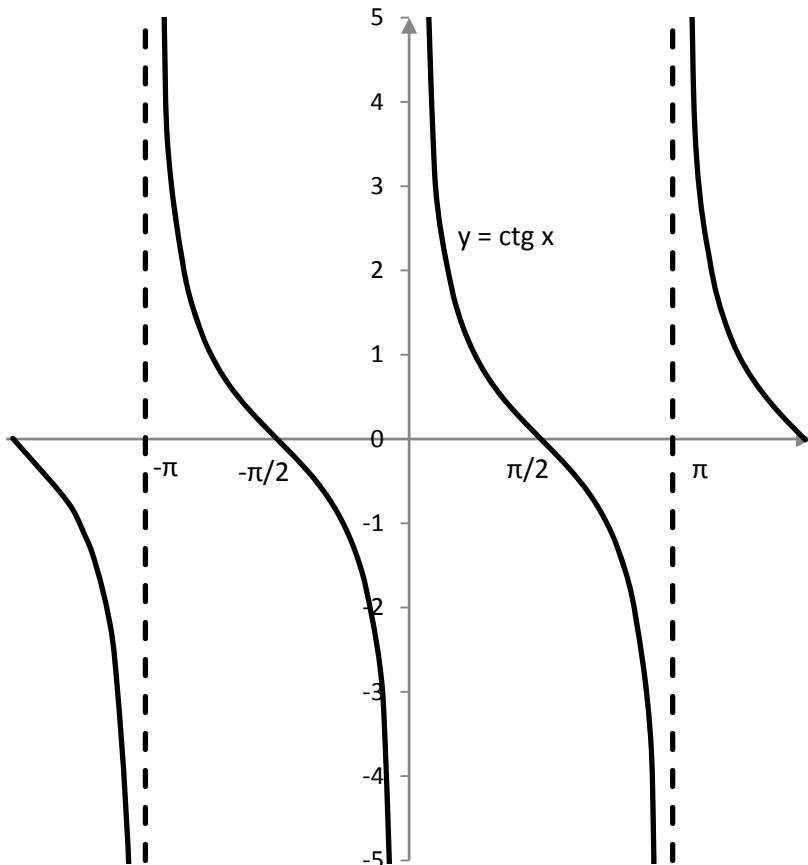
Rysunek 6.5. Wykres funkcji sinus



Rysunek 6.6. Wykres funkcji tangens



Rysunek 6.7. Wykres funkcji cosinus



Rysunek 6.8. Wykres funkcji cotangens

Twierdzenie

Funkcje sinus, tangens i cotangens są funkcjami nieparzystymi, zaś funkcja cosinus jest funkcją parzystą, tzn. prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Twierdzenie

Wszystkie funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi. Okresem podstawowym funkcji sinus oraz cosinus jest liczba 2π , natomiast okresem podstawowym funkcji tangens oraz cotangens jest liczba π . W szczególności dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 2k\pi) &= \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \cos(\alpha + 2k\pi) &= \cos \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) &= \operatorname{ctg} \alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

6.4. Podstawowe wzory trygonometryczne

Na wstępnie przypomnijmy cztery podstawowe tożsamości trygonometryczne.

Twierdzenie

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1, \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Przykład

Wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ oraz $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

Podstawiając $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ do wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy kolejno równości:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4},$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ostatnia równość wynika z przedostatniej oraz z faktu, że dla $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ mamy $\cos \alpha < 0$. Podstawiając powyższe wartości sinusa i cosinusa do wzorów $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{3}.$$

Spośród wszystkich wzorów trygonometrycznych warto wyróżnić tzw. *wzory redukcyjne*, które m.in. pozwolą nam na zapisanie wartości funkcji trygonometrycznych dla pewnych (zazwyczaj dużych) argumentów za pomocą innych (zazwyczaj mniejszych) argumentów. Wzory redukcyjne przedstawia tabela 6.2, gdzie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tabela 6.2. Wzory redukcyjne

	I ćwiartka	II ćwiartka		III ćwiartka		IV ćwiartka	
x	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Uwaga

Wszystkie wzory redukcyjne są prawdziwe dla $\alpha \in \mathbb{R}$ przy odpowiednich zastrzeżeniach dla funkcji tangens i cotangens.

Przykład

Obliczmy wartości wyrażeń $\cos\left(\frac{26\pi}{3}\right)$ oraz $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$. Korzystając z okresowości funkcji cosinus oraz wzoru $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, mamy

$$\cos\left(\frac{26\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi \cdot 4 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Korzystając z nieparzystości funkcji tangens oraz wzoru $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

Inne wzory trygonometryczne można znaleźć np. w tablicach matematycznych¹.

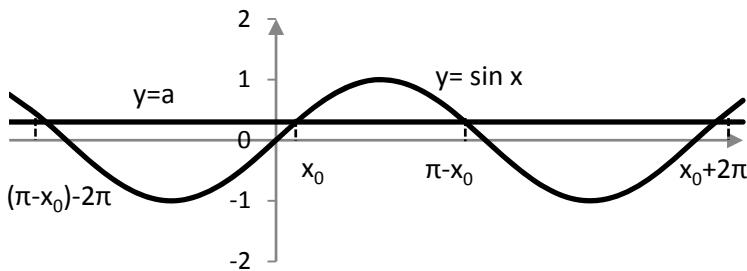
6.5. Równania i nierówności trygonometryczne

Definicja

Równaniem trygonometrycznym będziemy nazywali równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu będącym argumentem funkcji trygonometrycznej. *Nierównością trygonometryczną* będziemy nazywali nierówność, w której niewiadoma występuje tylko w wyrażeniu będącym argumentem funkcji trygonometrycznej.

Rozpatrzmy równanie $\sin x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Dziedziną tego równania jest zbiór \mathbb{R} . Równanie to ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \langle -1, 1 \rangle$. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = a$, $x \in \mathbb{R}$. Wykresy tych funkcji przedstawia Rysunek 6.9.

¹ A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2007.

Rysunek 6.9. Ilustracja graficzna równania $\sin x = a$

Widzimy, że dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, które można wygodnie zapisać w postaci dwóch nieskończonych serii. Niech x_0 oznacza najmniejsze dodatnie rozwiązanie danego równania. Pierwszą serię rozwiązań, generowaną przez x_0 , zapisujemy jako

$$x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Drugą serię rozwiązań, generowaną przez $\pi - x_0$, zapisujemy jako

$$x = \pi - x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ostatecznie rozwiązaniem równania $\sin x = a$ jest zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}: \exists_{k \in \mathbb{Z}} (x = x_0 + 2k\pi \vee x = \pi - x_0 + 2k\pi)\}.$$

Podobnie otrzymujemy, że rozwiązaniem równania $\cos x = a$, gdzie $a \in \langle -1, 1 \rangle$, jest zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}: \exists_{k \in \mathbb{Z}} (x = x_0 + 2k\pi \vee x = -x_0 + 2k\pi)\},$$

gdzie x_0 jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem tego równania.

Rozpatrzmy równanie $\operatorname{tg} x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Dziedziną tego równania jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Równanie to ma rozwiązanie dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$. Po naszkicowaniu we wspólnym układzie współrzędnych wykresów funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ oraz $g(x) = a$ stwierdzamy, że w tym przypadku mamy jedną nieskończonąację serię rozwiązań:

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

gdzie x_0 jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem danego równania.

Podobnie jak dla tangensa otrzymujemy, że zbiorem rozwiązań równania $\operatorname{ctg} x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, jest zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}: \exists_{k \in \mathbb{Z}} (x = x_0 + k\pi)\},$$

gdzie x_0 jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem danego równania.

Przykład

Rozwiążmy równania:

a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 1.$

ad a)

Po wprowadzeniu podstawienia $\alpha = 2x - \frac{\pi}{3}$ otrzymujemy równanie $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Ponieważ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, to rozwiązania tego równania są postaci

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązania danego równania są postaci

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

ad b)

Po wprowadzeniu podstawienia $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}$ otrzymujemy równanie $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Ponieważ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, to rozwiązania tego równania są postaci

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązania danego równania są postaci

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{3\pi}{8} + k\pi,$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Przykład

Rozwiążmy nierówność $\sin x \geq \frac{1}{2}$. Dziedziną tej nierówności jest zbiór \mathbb{R} . Rozwiążemy ją, korzystając z ilustracji graficznej równania $\sin x = a$ (patrz Rysunek 6.9). Przyjmując $a = \frac{1}{2}$, otrzymujemy $x_0 = \frac{\pi}{6}$ oraz $\pi - x_0 = \frac{5\pi}{6}$. Posługując się wykresem, możemy odczytać, że w zbiorze rozwiązań danej nierówności zawiera się m.in. przedział $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$. Uwzględniając okresowość funkcji sinus otrzymujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x \geq \frac{1}{2}$ jest suma nieskończoność wielu przedziałów mających postać $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} \left(x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right) \right).$$

Przykład

Rozwiążmy nierówność $\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dziedziną tej nierówności jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Przypomnijmy, że $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ oraz $\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Z wykresu funkcji cotangens (patrz Rysunek 6.8) odczytujemy, że w zbiorze rozwiązań danej nierówności zawiera się m.in. przedział $(-\frac{\pi}{3}, 0)$. Uwzględniając okresowość funkcji cotangens, dostajemy, że zbiorem rozwiązań danej nierówności jest suma nieskończoność wielu przedziałów postaci $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, tzn.

$$\operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{Z}} \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, k\pi \right) \right).$$

6.6. Zadania

1. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli:

- a) $\cos x = \frac{24}{25}$ oraz $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,
- b) $\sin x = -\frac{5}{13}$ oraz $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$,
- c) $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$ oraz $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$,
- d) $\operatorname{ctg} x = \frac{11}{60}$ oraz $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Oblicz:

- a) $\sin \frac{23\pi}{4}$,
- b) $\cos \left(-\frac{13\pi}{6}\right)$,
- c) $\operatorname{tg} \frac{215\pi}{6}$,
- d) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

3. Rozwiąż równania:

- a) $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- b) $\cos \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
- c) $\operatorname{tg} \left(4x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3}$,
- d) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

4. Rozwiąż układy równań przy założeniu że $x \in (0, 2\pi)$:

- a) $\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$
- d) $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

5. Rozwiąż nierówności:

- a) $\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- b) $\cos 5x > -\frac{1}{2}$,
- c) $\operatorname{tg}(3x - 1) < \frac{\sqrt{3}}{3}$,
- d) $\operatorname{ctg} 2x > 1$.

Rozdział 7

Wielomiany

W znanych nam wyrażeniach algebraicznych wyróżnimy grupę jednomianów.

Definicja

Jednomianem zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję określona wzorem

$$f(x) = ax^n, \text{ gdzie } n \in N, a \in R.$$

Uwaga

Liczba n określa nam stopień jednomianu. Jednomiany będą podobne, jeśli są tego samego stopnia.

Definicja

Wielomianem jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in R$ oraz $n \in N_+$.

Liczby $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu, zaś n nazywamy stopniem wielomianu.

Wielomian jednej zmiennej jest zatem sumą jednomianów jednej zmiennej. Poszczególne jednomiany w wielomianie nazywać będziemy wyrazami wielomianu.

Jednomiany (wyrazy) podobne w wielomianie redukujemy w ten sposób, że wykonujemy działania na liczbach, a część literową przepisujemy bez zmiany.

Wielomiany zapisujemy w postaci uporządkowanej, tzn. według rosnących wykładników potęg zmiennej x .

Twierdzenie

Dwa wielomiany zmiennej rzeczywistej x są równe, gdy są tego samego stopnia i mają identyczne współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x .

Przykład

Wyznaczyć wartość parametrów a, b i c tak, aby wielomiany:

$$W(x) = x^4 + (a - b + 2)x^3 - (a + b)x^2 + cx - 4 \text{ oraz}$$

$$Q(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$$

były równe. Należy zauważyć, że wielomian $Q(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ można zapisać (po wykorzystaniu wzoru skróconego mnożenia) w postaci: $Q(x) = x^4 - 4$.

Korzystając z twierdzenia o równości wielomianów, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a - b + 2 = 0 \\ -(a + b) = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy, że: $a = -1$, $b = 1$ oraz $c = 0$.

7.1. Działania na wielomianach

Wielomiany zmiennej rzeczywistej x możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Aby dodać dwa wielomiany zmiennej rzeczywistej x, należy dodać ich wyrazy podobne, a następnie wielomian uporządkować.

Przykład

Dane są wielomiany:

$$W(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 7 \text{ oraz}$$

$$P(x) = -12x^4 - x^3 + 4x^2 - 3.$$

Wyznaczyć $W(x) + P(x)$.

$$W(x) + P(x) = (3x^4 - 2x^3 + 4x - 7) + (-12x^4 - x^3 + 4x^2 - 3)$$

$$W(x) + P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 7 - 12x^4 - x^3 + 4x^2 - 3$$

$$W(x) + P(x) = -9x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x - 10.$$

Różnicę wielomianów $W(x) - P(x)$ możemy zapisać w postaci $W(x) + (-P(x))$, więc różnica dwóch wielomianów jest sumą pierwszego z nich oraz wielomianu przeciwnego do drugiego. Wielomian przeciwny do danego powstaje w ten sposób, że wszystkie jego współczynniki są liczbami przeciwnymi do danych.

Przykład

Dane są wielomiany:

$$W(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 7 \text{ oraz}$$

$$P(x) = -12x^4 - x^3 + 4x^2 - 3.$$

Wyznaczyć $W(x) - P(x)$.

$$W(x) - P(x) = (3x^4 - 2x^3 + 4x - 7) - (-12x^4 - x^3 + 4x^2 - 3)$$

$$W(x) - P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x - 7 + 12x^4 + x^3 - 4x^2 + 3$$

$$W(x) - P(x) = 15x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x - 4.$$

Aby pomnożyć wielomian przez wielomian, należy pomnożyć każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu, a następnie wykonać redukcję wyrazów podobnych i uporządkować wielomian.

Przykład

Dane są wielomiany:

$$W(x) = 3x^4 - 2x^3 \text{ oraz}$$

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 3.$$

Wyznaczyć $W(x) \cdot P(x)$.

$$W(x) \cdot P(x) = (3x^4 - 2x^3)(x^3 + 4x^2 - 3)$$

$$W(x) \cdot P(x) = 3x^7 + 12x^6 - 9x^4 - 2x^6 - 8x^5 + 6x^3$$

$$W(x) \cdot P(x) = 3x^7 + 10x^6 - 8x^5 - 9x^4 + 6x^3$$

Dzielenie wielomianów jest podobne do dzielenia liczb całkowitych.

Definicja

Wielomian $W(x)$ nazywamy *podzielnym przez niezerowy wielomian $P(x)$* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że spełniony jest warunek: $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$.

Wielomian $Q(x)$ nazywamy *ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$* . W takiej sytuacji powiemy, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Przykład

Podzielić wielomian $W(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15$ przez wielomian $P(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + 5 \\
 \hline
 (x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15) : (x^2 - 2x + 3) \\
 \hline
 -x^4 + 2x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 = -4x^3 + 13x^2 - 22x + 15 \\
 \hline
 4x^3 - 8x^2 + 12x \\
 \hline
 = 5x^2 - 10x + 15 \\
 \hline
 -5x^2 + 10x - 15 \\
 \hline
 = = 0
 \end{array}$$

Definicja

Pierwiastek wielomianu, to taki argument, dla którego wartość wielomianu jest równa zeru, czyli jest to taka liczba x_0 , że spełniony jest warunek $W(x_0) = 0$.

Twierdzenie

Niech $W(x)$ i $P(x)$ będą wielomianami, przy czym $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Istnieją dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$ takie, że:

$$W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x).$$

Wielomian $R(x)$ nazywany jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ oraz jej stopień jest mniejszy niż stopień $P(x)$.

Jeśli $R(x)$ jest wielomianem zerowym, to mówimy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $P(x)$.

Przykład

Obliczyć resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20$ przez wielomian $Q(x) = x + 1$.

Jeśli wielomian $W(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20$ podzielimy przez wielomian $Q(x) = x + 1$ i w wyniku otrzymamy jakiś wielomian $P(x)$ oraz resztę $R(x)$, to znaczy, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

czyli:

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 3x - 20 = P(x) \cdot (x + 1) + R(x)$$

Ponieważ równość powyższa jest prawdziwa dla każdego $x \in R$, więc:

$$(-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 20 = P(-1) \cdot (-1 + 1) + R(x).$$

Zatem: $R(x) = 25$.

Twierdzenie

Jeżeli wielomian $W(x)$ podzielimy przez dwumian $x - x_0$, to reszta z tego dzielenia jest równa wartości wielomianu dla $x = x_0$.

Twierdzenie (Bezout)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$. Wielomian $W(x)$ można zatem zapisać w postaci iloczynowej $W(x) = (x - x_0)Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem.

Przykład

Znajdź wielomian stopnia trzeciego, którego pierwiastkami są 1, 2, 3.

Gdy skorzystamy z postaci iloczynowej, zadanie to okaże się dość proste, bo jednym z przykładów takiego wielomiany jest:

$$W(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$W(x) = (x^2 - x - 2x + 2)(x - 3)$$

$$W(x) = x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 2x^2 + 6x + 2x - 6$$

$$W(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Twierdzenie

Liczba x_0 jest n -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^n$, a nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{n+1}$.

Przykład

Dla jakich wartości parametrów a oraz b liczba 2 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 + (a - 2)x^3 + bx^2 + (a + b)x + 4$?

Ponieważ 2 jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej:

$$\begin{aligned} W(x) &= (x - 2)^2(x^2 + mx + k) \\ W(x) &= (x^2 - 4x + 4)(x^2 + mx + k) \\ W(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4mx^3 - 4mx^2 + 4mx + kx^2 - 4kx + 4k \\ W(x) &= x^4 + (m - 4)x^3 + (4 - 4m + k)x^2 + (-4k + 4m)x + 4k, \end{aligned}$$

Ale:

$$W(x) = x^4 + (a - 2)x^3 + bx^2 + (a + b)x + 4.$$

Z równości wielomianów otrzymamy:

$$\begin{cases} m - 4 = a - 2 \\ 4 - 4m + k = b \\ -4k + 4m = a + b \\ 4k = 4 \end{cases}$$

Rozwiązujeając układ równań, mamy:

$$\begin{cases} k = 1 \\ m - a = 2 \\ -4m - b = -5 \\ 4m - a - b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ m - a = 2 \\ 4m + b = 5 \\ 3m - b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ m - a = 2 \\ 4m + b = 5 \\ 7m = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ m - a = 2 \\ 4m + b = 5 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ a = -1 \\ b = 1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Zatem dla $a = -1$ i $b = 1$ liczba 2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu. Ponadto mamy:

$$W(x) = (x - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Twierdzenie

Każdy wielomian $W(x)$ nie będący wielomianem zerowym jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.

Przykład

Rozłożyć na czynniki wielomian $W(x) = x^4 + 4$.

Wielomian $W(x) = x^4 + 4$, jak nietrudno zauważyc, nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ale na podstawie powyższego twierdzenie możemy go rozłożyć na czynniki.

$$\begin{aligned} W(x) &= x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ W(x) &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ W(x) &= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) \\ W(x) &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

Każdy wielomian stopnia n może mieć nie więcej jak n pierwiastków.

Twierdzenie

Rozkład wielomianu niezerowego o współczynnikach rzeczywistych na czynniki liniowe lub nieroziadalne czynniki kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych jest jednoznaczny.

Przykład

Rozłożyć na czynniki następujące wielomiany:

- a) $W(x) = 3x^3 - 12x^2 + 15x,$
- b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 27x - 54,$
- c) $W(x) = x^4 - 16,$

ad a)

Do rozłożenia na czynniki pierwszego wielomianu zastosujmy metodę wyłączania wspólnego dzielnika przed nawias:

$$W(x) = 3x^3 - 12x^2 + 15x = 3x(x^2 - 4x + 5)$$

Wyrażenie $x^2 - 4x + 5$ jest nieroziągalne na czynniki, gdyż wyróżnik $\Delta < 0$.

ad b)

Zastosujemy obecnie metodę grupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^4 - 2x^3 + 27x - 54 = x^3(x - 2) + 27(x - 2) \\ W(x) &= x^3(x - 2) + 27(x - 2) = (x - 2)(x^3 + 27). \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyc, że wyrażenie $x^3 + 27$ rozkłada się na czynniki (wykorzystując wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów), czyli:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9),$$

zatem:

$$W(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

ad c)

W kolejnym przykładzie dwukrotnie wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$W(x) = x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Twierdzenie

Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (*ułamek nieskracalny*) różna od zera jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych (żaden ze współczynników a_n oraz a_0 nie jest równy zero), to p jest dzielniem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Uwaga

Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe.

Twierdzenie

Jeżeli liczba całkowita p różna od zera jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych (współczynnik a_n jest równy 1), to p jest dzielniem wyrazu wolnego a_0 .

Przykład

Rozłożyć na czynniki wielomian:

$$W(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 14x - 8.$$

Wielomian ma współczynniki całkowite, więc jeśli będzie miał pierwiastek wymierny, to będzie on ze zbioru: $\{-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$.

Obliczymy wartość wielomianu dla kolejnych liczb z tego zbioru – te liczby, dla których wartość wielomianu będzie równa zero są jego pierwiastkami wymiernymi.

W praktyce poszukujemy jednego pierwiastka, a następnie dzielimy wielomian przez odpowiedni dwumian (na mocy twierdzenia Bezouta). Następnie otrzymany iloraz i resztę rozłożymy na czynniki.

Zauważmy, że w naszym przykładzie:

$$W(1) = 2 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 0.$$

Wielomian jest zatem podzielny przez dwumian $x - 1$, czyli po podzieleniu mamy:

$$W(x) = (x - 1)(2x^3 - x^2 - 6x + 8).$$

Postępujemy teraz analogicznie z wielomianem $P(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 8$.

Wielomian ma współczynniki całkowite, więc jeśli będzie miał pierwiastek wymierny, to będzie on ze zbioru: $\{-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\}$.

Obliczajmy:

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 8 = 0,$$

więc liczba -2 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Po podzieleniu wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x + 2$ otrzymujemy:

$$W(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 - 5x + 4).$$

Wielomian $2x^2 - 5x + 4$ jest nierozkładalny na czynniki, gdyż wyróżnik $\Delta < 0$, więc jest to ostateczna postać iloczynowa wielomianu $W(x)$.

7.2. Wykresy niektórych wielomianów

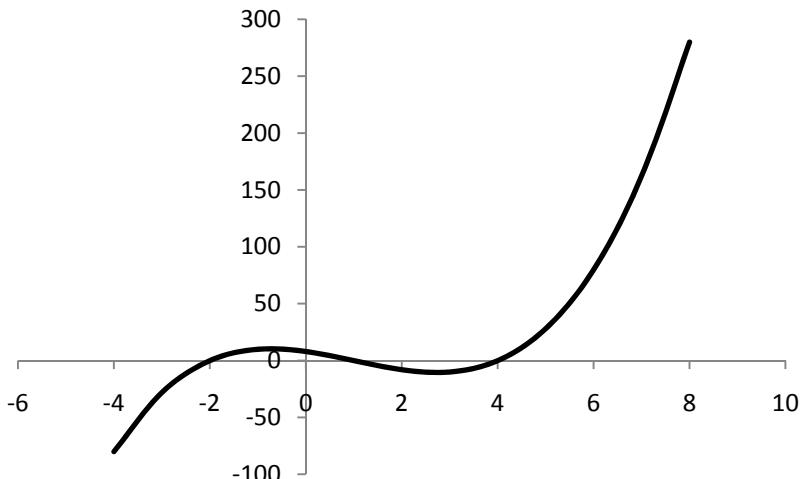
Znamy już wykresy niektórych wielomianów. Wykresami wielomianów stopnia zerowego czy pierwszego jest prosta. Wykresem wielomianu stopnia drugiego jest parabola. Aby zobaczyć jak wyglądają wykresy wielomianów stopnia wyższego jak 2, przeanalizujemy kilka przykładów.

Przykład

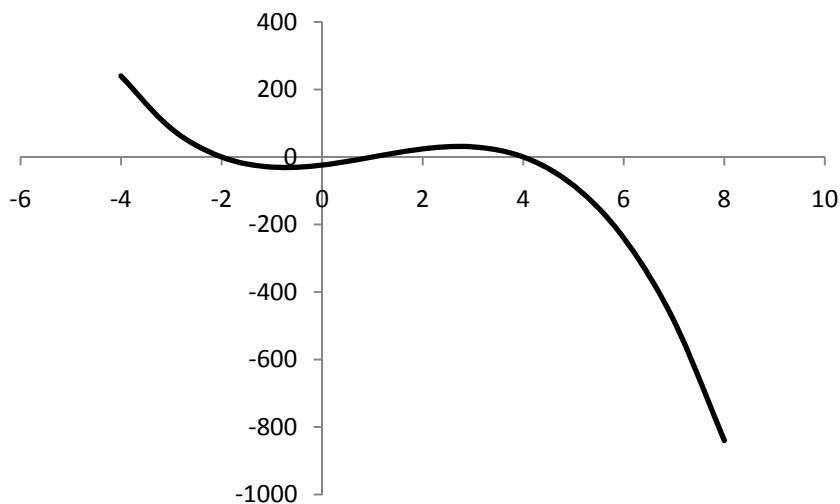
Wykonać wykres wielomianu podanego w postaci iloczynowej:

- a) $W(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$,
- b) $W(x) = -3(x - 1)(x + 2)(x - 4)$,
- c) $W(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 4)$,
- d) $W(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2(x - 4)$.

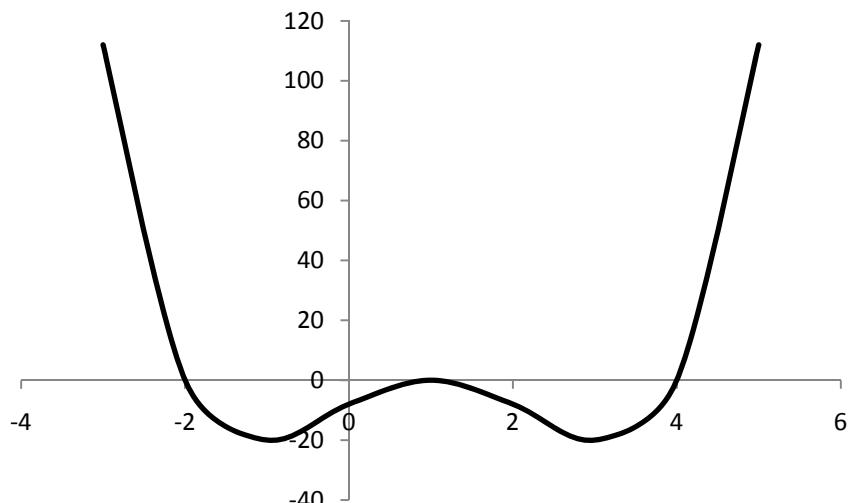
Wykonując wykres, należy zwrócić uwagę na współczynnik przy najwyższej potędze (jeśli jest dodatni, to rozpoczynamy wykres z prawej strony od góry, w przeciwnym przypadku od dołu) oraz na krotności pierwiastków wielomianu (przy parzystokrotnym pierwiastku nie następuje zmiana znaku wartości wielomianu).



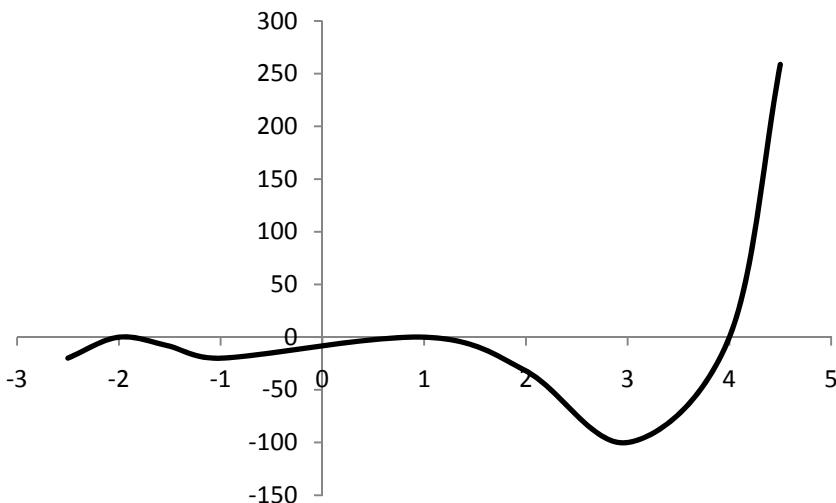
Rysunek 7.1. Wykres wielomianu $W(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$



Rysunek 7.2. Wykres wielomianu $W(x)=-3(x-1)(x+2)(x-4)$



Rysunek 7.3. Wykres wielomianu $W(x)=(x-1)^2(x+2)(x-4)$



Rysunek 7.4. Wykres wielomianu $W(x)=(x-1)^2(x+2)^2(x-4)$

7.3. Równania wielomianowe

Definicja

Równanie postaci $W(x) = 0$, gdzie

$W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ oraz $a_n \neq 0$ nazywamy *równaniem wielomianowym stopnia n*.

Aby rozwiązać równanie wielomianowe, należy znaleźć wszystkie jego pierwiastki lub wykazać, że wielomian nie ma pierwiastków.

Rozwiązyując równanie, będziemy posługiwać się poznanymi metodami rozkładu wielomianu na czynniki możliwe najniższego stopnia, a następnie skorzystamy z własności iloczynu (iloczyn jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z jego czynników jest zerem).

Przykład

Rozwiązać równanie $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

Rozłożymy wielomian $x^3 - x^2 - x + 1$ na czynniki z wykorzystaniem metody grupowania wyrazów.

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 1).$$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia mamy:

$$(x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1),$$

zatem:

$$(x - 1)^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0,$$

czyli:

$$x = 1 \vee x = -1.$$

Równanie to ma zatem dwa pierwiastki 1 i -1, przy czym 1 jest jego po-dwójnym pierwiastkiem.

7.4. Nierówności wielomianowe

Definicja

Nierówność postaci

$$W(x) < 0 \text{ lub } W(x) > 0, \text{ lub } W(x) \leq 0 \text{ lub } W(x) \geq 0,$$

gdzie

$$W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \text{ oraz } a_n \neq 0$$

nazywamy nierównością wielomianową stopnia n .

Rozwiązać nierówność $W(x) < 0$, to znaczy odpowiedzieć na pytanie: „Dla jakich argumentów x wielomian $W(x)$ przyjmuje wartości ujemne?”. W pozostałych przypadkach będziemy pytali o wartości dodatnie, niedodatnie czy nieujemne.

Rozwiązywanie nierówności będziemy, podobnie jak w przypadku równań, rozpoczynali od rozłożenia wielomianu na czynniki możliwie najniższego stopnia. Znak iloczynu będzie uzależniony od znaku poszczególnych czynników.

Przykład

Rozwiązać nierówność:

$$x^3 - 7x - 6 < 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że $W(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$. Możemy zatem wielomian $x^3 - 7x - 6$ podzielić przez dwumian $x + 1$.

Po podzieleniu mamy:

$$(x + 1)(x^2 - x - 6) < 0.$$

Wielomian $x^2 - x - 6$ rozłożymy na czynniki, wyliczając wyróżnik

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{2} = 3,$$

czyli:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3).$$

Nierówność nasza przyjmuje postać:

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) < 0.$$

Po zastosowaniu siatki znaków mamy:

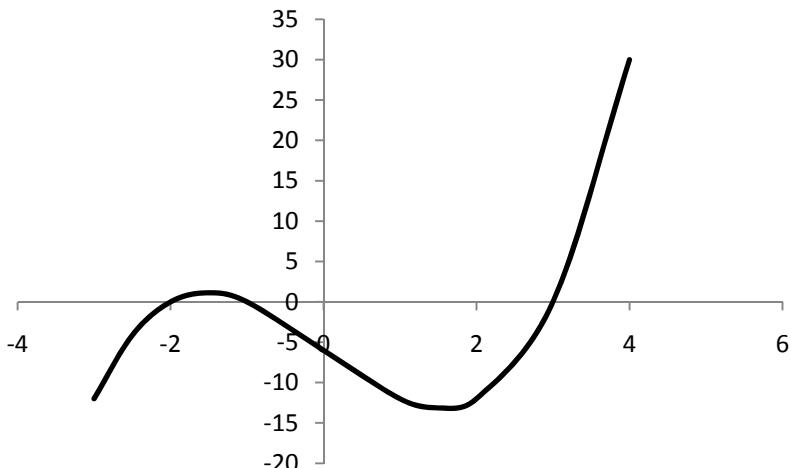
	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x + 2$	–	0	+		+		+
$x + 1$	–		–	0	+		+
$x - 3$	–		–		–	0	+
$W(x)$	–	0	+	0	–	0	+

Zbiór rozwiązań nierówności odczytujemy z tabelki:

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3).$$

Drugim sposobem rozwiązyania nierówności jest po rozłożeniu wielomianu na czynniki odczytanie rozwiązania na podstawie szkicu wykresu wielomianu.

Wykres wielomianu $W(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$ ma postać:



Rysunek 7.5. Wykres wielomianu $W(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$

Z powyższego wykresu wynika, że rozwiązaniami nierówności jest:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3).$$

7.5. Zadania

1. Wyznacz współczynniki a, b, c, d tak, aby wielomiany $W(x)$ oraz $Q(x)$ były równe, jeśli:
 - a) $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x + 4$ oraz $Q(x) = (x^2 + cx + d)^2$,
 - b) $W(x) = x^5 - x^4 + ax^3 + bx^2 + 4x - 2$ oraz $Q(x) = (x^2 + cx + 2)(x^3 - 3x + d)$.
2. Wyznacz współczynniki a, b, c wielomianu

$$W(x) = x^5 + ax^2 + bx + c,$$

wiedząc, że: $W(-1) = 1, W(0) = 1$ oraz $W(1) = -1$.

3. Oblicz sumę wszystkich współczynników oraz wyraz wolny wielomianu:

$$W(x) = (x^{15} - 12x^7 + 1)^{10}(3x^{17} - 4x^{13} + 1)^{19}.$$

4. Wykonaj działania na wielomianach:
 - a) $(x^4 - 3x^3 - x + 4) + (3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 5)$,
 - b) $(x^4 - 3x^3 - x + 4) - (3x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 5)$,
 - c) $(x^4 - 3x^3 - x + 4)(3x^4 - 5x^2 - 5)$.
5. Podziel wielomiany:
 - a) $(x^3 - 8x^2 + 15x - 8):(x - 3)$,
 - b) $(x^8 + x^7 - 2x^2 + x - 1):(x^5 - x^2 + x - 1)$,
 - c) $(2x^5 - 2):(x - 1)$.
6. Nie wykonując dzielenia, wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 16x + 20$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 7x + 10$.
8. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x + 3$ wynosi 1, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez $x + 1$ wynosi 3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x^2 + 4x + 3$.

9. Dla jakiej wartości parametru a wielomian

$$W(x) = x^4 - (a-1)(a+1)x^3 + (a+1)^2x^2 - 3(a+1)x - 7$$

jest podzielny przez dwumian $Q(x) = x - 1$?

7. Wykaż, że liczba 1 jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^5 - 7x^3 + 11x^2 - 6x + 1.$$

8. Rozłóż na czynniki możliwie najniższych stopni wielomiany:

- a) $x^3 - 5x^2 - x + 5$,
- b) $x^3 + 27$,
- c) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$,
- d) $x^4 + x^2 + 1$,
- e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

9. Rozwiąż równania:

- a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$,
- b) $x^3 - 3x - 2 = 0$,
- c) $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 12x + 40 = 0$,
- d) $24x^3 - 2x^2 - 5x + 1 = 0$,
- e) $\frac{3}{2}x^3 + x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$,
- f) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$.

10. Udowodnij, że nie istnieje liczba rzeczywista spełniająca równanie:

$$+5x^2 - 12x + 9 = 0.$$

11. Rozwiązać nierówności:

- a) $x(x-1)(x-2) < 0$,
- b) $(x+1)^2(x-5)^5(x+5) > 0$,
- c) $x^3 - 12x + 16 > 0$,
- d) $-x^3 - 5x^2 + x + 5 \leq 0$,
- e) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 > 0$,
- f) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 36x - 36 \leq 0$.

12. Wykaż, że nierówność $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ jest spełniona dla każdego x rzeczywistego.

Rozdział 8

Funkcje wymierne

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci: $F(x) = \frac{W(x)}{Q(x)}$, gdzie $W(x)$ oraz $Q(x)$ są wielomianami. Funkcja wymierna jest zatem ilorazem dwóch wielomianów. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem pierwiastków mianownika wyrażenia wymiernego, czyli: $D_F = R - \{zbiór miejsc zerowych Q(x)\}$.

Uwaga

Mianownik nie może być wielomianem zerowym, bo wtedy dziedzina jest zbiorem pustym.

Uwaga

Wyrażenia zapisane w postaci $\frac{W(x)}{Q(x)}$ nazywać będziemy ułamkami algebraicznymi.

8.1. Działania na ułamkach algebraicznych

Podobnie jak ułamki zwykłe ułamki algebraiczne możemy: skracać, rozszerzać, dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Skrócić ułamek algebraiczny, to znaczy licznik i mianownik podzielić przez to samo wyrażenie różne od zera.

Przykład

Skrócić ułamek $\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$.

Na początek określmy dziedzinę

$$x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 2$$

Przy takich założeniach rozłożymy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)}.$$

W liczniku i mianowniku występuje ten sam czynnik, więc podobnie jak w ułamkach zwykłych możemy go skrócić:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3},$$

czyli:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{x+2}{x+3}.$$

Rozszerzyć ułamek algebraiczny, to znaczy licznik i mianownik pomnożyć przez to samo wyrażenie różne od zera.

Przykład

Rozszerzyć ułamek $\frac{3x+1}{x+2}$ tak, aby w mianowniku otrzymał $x^2 - 4$.

Ponieważ $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, więc licznik i mianownik ułamka będziemy mnożyć przez $x-2$. Zakładamy jednocześnie, że $x \neq -2 \wedge x \neq 2$.

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 6x + x - 2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}.$$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych wykonujemy podobnie jak dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych.

Przykład

Wykonać działania:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{x^2 - 2x} + \frac{1}{3x^2 - 12}, \\ & \frac{4}{x^2 - 2x} - \frac{1}{3x^2 - 12}. \end{aligned}$$

Na początek rozkładamy na czynniki mianowniki obu ułamków

$$\frac{4}{x^2 - 2x} + \frac{1}{3x^2 - 12} = \frac{4}{x(x-2)} + \frac{1}{3(x^2-4)} = \frac{4}{x(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)(x+2)}.$$

Musimy założyć, że żaden z mianowników nie może być równy zero, zatem:

$$x \neq 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2$$

Wyznaczamy najmniejszy wspólny mianownik:

$$\text{NWW}(x^2 - 2x, 3x^2 - 12) = 3x(x-2)(x+2).$$

Rozszerzamy ułamki tak, aby miały wyznaczony wspólny mianownik:

$$\frac{4}{x(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)(x+2)} = \frac{4 \cdot 3(x+2)}{3x(x-2)(x+2)} + \frac{1 \cdot x}{3x(x-2)(x+2)}.$$

Następnie dodajemy do siebie liczniki, mianowniki pozostawiając bez zmiany:

$$\frac{4 \cdot 3(x+2)}{3x(x-2)(x+2)} + \frac{1 \cdot x}{3x(x-2)(x+2)} = \frac{12x + 24 + x}{3x(x-2)(x+2)} = \frac{13x + 24}{3x(x-2)(x+2)},$$

gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

W przykładzie drugim po sprowadzeniu do wspólnego mianownika odejmujemy od licznika licznik, mianownik pozostawiając bez zmiany, czyli:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x(x-2)} - \frac{1}{3(x-2)(x+2)} &= \frac{4 \cdot 3(x+2)}{3x(x-2)(x+2)} - \frac{1 \cdot x}{3x(x-2)(x+2)} \\ \frac{4 \cdot 3(x+2)}{3x(x-2)(x+2)} - \frac{1 \cdot x}{3x(x-2)(x+2)} &= \frac{12x + 24 - x}{3x(x-2)(x+2)} = \frac{11x + 24}{3x(x-2)(x+2)}, \end{aligned}$$

gdzie oczywiście jak w poprzednim przykładzie $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$.

Mnożenie ułamków algebraicznych wykonujemy w ten sposób, że licznik pierwszego z nich mnożymy przez licznik drugiego i mianownik pierwszego mnożymy przez mianownik drugiego. Kolejnym krokiem jest skrócenie otrzymanego ułamka.

Przykład

Wykonaj mnożenie ułamków $\frac{3-x}{x-2} \cdot \frac{2-x}{x-3}$. Podaj konieczne założenia.

$$\frac{3-x}{x-2} \cdot \frac{2-x}{x-3} = \frac{(3-x)(2-x)}{(x-2)(x-3)} = \frac{[-(x-3)][-(x-2)]}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = 1,$$

gdzie $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Dzielenie ułamków algebraicznych zastępujemy mnożeniem dzielnej przez odwrotność dzielnika, a następnie skracamy otrzymany ułamek.

Przykład

Wykonaj dziennie ułamków $\frac{4}{2x+x^2} : \frac{4x^2-4}{4x+2x^2}$. Podaj konieczne założenia.

$$\begin{aligned}
 & \frac{4}{2x+x^2} \cdot \frac{4x^2-4}{4x+2x^2} = \frac{4}{x(2+x)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{2x(2+x)} = \\
 & = \frac{4}{x(2+x)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{2x(2+x)} = \frac{4}{x(2+x)} \cdot \frac{4(x-1)(x+1)}{2x(2+x)} = \\
 & = \frac{4}{x(2+x)} \cdot \frac{2x(2+x)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{4 \cdot 2x(2+x)}{x(2+x) \cdot 4(x-1)(x+1)} = \\
 & = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1},
 \end{aligned}$$

gdzie $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 0, 1\}$.

8.2. Funkcja homograficzna

Przykładem funkcji wymiernej jest poznana funkcja postaci:

$$f(x) = \frac{a}{x}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Jest to funkcja proporcjonalności odwrotnej, której wykresem jest hiperbola.

Definicja

Funkcje postaci $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a \neq 0$ oraz $ad - cb \neq 0$, nazywamy *funkcją homograficzną*. Dziedziną tej funkcji jest $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ jest przykładem funkcji homograficznej.

Przykład

Narysować wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, a następnie omówić jej własności.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór: $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

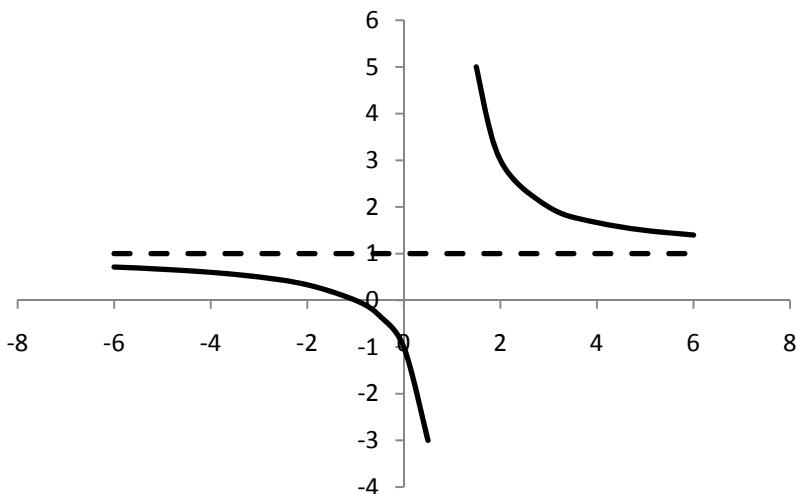
Przekształcimy teraz wyrażenie:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Zatem:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{2}{x}$ o wektor $\vec{v} = [1, 1]$.

Rysunek 8.1. Wykres funkcji homograficznej $f(x) = (x+1)/(x-1)$

Właściwości funkcji:

- dziedzina funkcji $x \in \mathbb{R} - \{1\}$,
- funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = -1$,
- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-1, 1)$,
- funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $(1, +\infty)$ (funkcja nie jest rosnąca w sumie przedziałów),
- funkcja jest różnowartościowa,
- prosta o równaniu $x = 1$ jest asymptotą pionową funkcji, a prosta o równaniu $y = 1$ jest asymptotą poziomą funkcji.

8.3. Równania i nierówności wymierne

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci $\frac{W(x)}{Q(x)} = 0$, gdzie $W(x)$ oraz $Q(x)$ są wielomianami oraz $Q(x) \neq 0$, nazywamy *równaniem wymiernym z nie-wiadomą x* .

Dziedziną równania wymiernego jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem tych, które są miejscami zerowania wielomianu $Q(x)$.

Aby rozwiązać równanie wymiernie będziemy postępować następująco:

- określamy dziedzinę równania,

- b) rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki,
- c) mnożymy obie strony równania przez najmniejszą wspólną wielokrotność wszystkich mianowników,
- d) wyznaczamy zbiór rozwiązań otrzymanego równania wielomianowego,
- e) formułujemy odpowiedź po uwzględnieniu dziedziny równania.

Przykład

Rozwiązać równanie:

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{3x-4}{x^2-1}$$

Określamy dziedzinę równania:

$$x-1 \neq 0 \wedge x+1 \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0,$$

czyli:

$$D: x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Przystępujemy do rozwiązania:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{3x-4}{x^2-1} \\ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{3x-4}{(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony równania przez $(x-1)(x+1)$:

$$\begin{aligned} 3(x+1) - 2(x-1) &= 3x-4 \\ 3x+3 - 2x+2 &= 3x-4 \\ -2x &= -9 \\ x &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$x = \frac{9}{2} \in D,$$

zatem jest to rozwiązanie naszego równania.

Definicja

Każdą z nierówności $\frac{W(x)}{Q(x)} > 0, \frac{W(x)}{Q(x)} < 0, \frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{W(x)}{Q(x)} \leq 0$, gdzie $W(x)$ oraz $Q(x)$ są wielomianami oraz $Q(x) \neq 0$, nazywamy *nierównością wymienną z niewiadomą x* .

Dziedziną nierówności wymiernej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem tych, które są miejscami zerowania wielomianu $Q(x)$.

Aby rozwiązać nierówność wymierną, będziemy postępować następująco:

- określamy dziedzinę nierówności,
- rozkładamy na czynniki wszystkie mianowniki,
- doprowadzamy nierówność do takiej postaci, w której po jednej stronie nierówności będzie zero,
- wykonujemy działania na ułamkach algebraicznych w taki sposób, aby doprowadzić do postaci $\frac{W(x)}{Q(x)}$,
- mnożymy obie strony nierówności przez $[Q(x)]^2$,
- wyznaczamy zbiór rozwiązań otrzymanej nierówności wielomianowej,
- formułujemy odpowiedź po uwzględnieniu dziedziny nierówności.

Przykład

Rozwiązać nierówność:

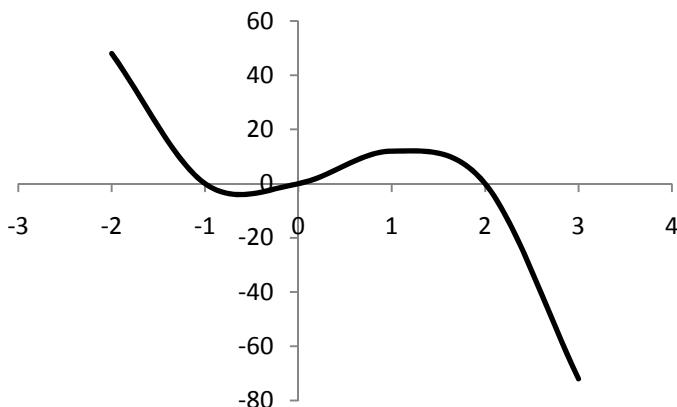
$$\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+2}{x-2}.$$

Określamy dziedzinę nierówności:

$$x+1 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \\ D: x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

Przystępujemy do rozwiązywania nierówności:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} &\leq \frac{x+2}{x-2} \\ \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x-2} &\leq 0 \\ \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} - \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{(x-1)(x-2) - (x+2)(x+1)}{(x+1)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x^2 - x - 2x + 2 - (x^2 + 2x + x + 2)}{(x+1)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{x^2 - x - 2x + 2 - x^2 - 2x - x - 2}{(x+1)(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{-6x}{(x+1)(x-2)} &\leq 0 \Leftrightarrow -6x(x+1)(x-2) \leq 0 \end{aligned}$$



Rysunek 8.2. Wykres wielomianu $W(x)=-6x(x+1)(x-2)$

Korzystając z wykresu wielomianu, otrzymujemy:

$$x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę nierówności, mamy:

$$x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty).$$

8.4. Zadania

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

- a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+5x+6}$,
- b) $f(x) = \frac{x^4+3x^2-2}{x^2+4x+5}$,
- c) $f(x) = \frac{x^3+4x^2-6x-2}{x^3-3x^2-6x+8}$.

2. Sprowadź do wspólnego mianownika:

- a) $\frac{2x-3}{x+2}$ oraz $\frac{x-5}{x-3}$,
- b) $\frac{2}{x^2-2x-3}$ oraz $\frac{3}{x^2+4x+3}$,
- c) $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ oraz $\frac{2x-1}{x^2+5x+4}$,
- d) $\frac{x^2}{x^3-1}$ oraz $\frac{x}{x^4-1}$.

3. Wykonaj działania:

- $-\frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-4x+4}$,
- $\frac{1}{x^3-27} + \frac{-2x}{x^2-6x+9}$,
- $\frac{2}{x^3-3x^2-4x+12} - \frac{2x-1}{x^2+4x+4}$,
- $\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{2x-3} + \frac{x-1}{x+3}$,
- $\frac{x^2-x-12}{x^2-6x+9} \cdot \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$,
- $\frac{x^3+x^2-5x+3}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+2x-3}$,
- $\left(\frac{x}{xy+y^2} + \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{y}{x^2-xy} \right) : \left(\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3} \right)$.

4. Skróć wyrażenia:

- $\frac{x^3-2x^2}{2x^3y^2-x^4y}$,
- $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$,
- $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$,
- $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$,
- $\frac{a^3-a^2b+ab^2}{b^3+a^3}$.

5. Wyznacz a i b tak, aby do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x} + b$ należały punkty $A(1,3)$ oraz $B(2,2)$.

6. Narysuj wykresy funkcji:

- $y = \frac{1}{x} + 2$,
- $y = \frac{1}{x-2}$,
- $y = \frac{1}{x+3} - 4$,
- $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

7. Narysuj wykresy funkcji:

- a) $y = \frac{1}{|x|}$,
- b) $y = \frac{|x|}{x-1}$,
- c) $y = \frac{|x-1|}{|x+1|}$,
- d) $y = \frac{2|x|-3}{3|x|-2}$,
- e) $y = \frac{|x+1|-x}{|x-2|+3}$.

8. Napisz wzór funkcji homologicznych o dziedzinie $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ i zbiocie wartości $ZW = \mathbb{R} \setminus \{b\}$.

- a) $a = 1, b = 0$,
- b) $a = -2, b = 3$,
- c) $a = -3, b = -1$.

9. Rozwiąż równania:

- a) $\frac{x^2-7x+6}{x^2+3x-2} = 0$,
- b) $\frac{x^2+12x+11}{x^3+11x^2-x-11} = 0$,
- c) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{2}{x^2-5x+6}$,
- d) $\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{2}{x^2-3x+2}$,
- e) $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{x^2+10x}{x^4-1} - \frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}$,
- f) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 6(x + \frac{1}{x})$.

10. Rozwiąż równanie:

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$$

11. Rozwiąż nierówności:

- a) $x < \frac{1}{x}$,
- b) $\frac{1+x}{1-x} > 1$,
- c) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0$,
- d) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1}$,

$$\text{e)} \frac{x^5+3x^4-x-3}{16x^4-1} > 0,$$

$$\text{f)} \frac{x^2+3x+5}{x^2-2x+4} < 0,$$

$$\text{g)} \frac{x^2+x+3}{2x^2-4x+3} > 0.$$

12. Rozwiąż nierówności:

$$\text{a)} \frac{x-3}{x+1} \leq 0,$$

$$\text{b)} \frac{x^2+4x+6}{x+4} \geq 3,$$

$$\text{c)} \frac{10x+8}{x+2} \geq \frac{5x-17}{x-3}.$$

13. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$\text{a)} f(x) = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}},$$

$$\text{b)} f(x) = \frac{1-3x}{\sqrt{2-\frac{3x+1}{x-2}}}.$$

Rozdział 9

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

9.1. Przykłady

Na początku przypomnimy, że:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, \text{ dla } x < 0 \\ x, \text{ dla } x \geq 0 \end{cases}$$

Wyznaczanie zbioru rozwiązań równań i nierówności z wartością bezwzględną z wykorzystaniem powyższej zależności przedstawimy na przykładach.

Postępując analogicznie, można rozwiązać inne zadania.

Przykład

Rozwiązać równanie metodą algebraiczną:

$$||x - 3| + 2| = 3.$$

Ponieważ: $|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \vee x = -3)$,

$$\begin{aligned} \text{więc: } ||x - 3| + 2| = 3 &\Leftrightarrow (|x - 3| + 2 = 3 \vee |x - 3| + 2 = -3) \\ &|x - 3| = 1 \vee |x - 3| = -5. \end{aligned}$$

Z definicji modułu wynika, że równość: $|x - 3| = -5$ jest fałszywa.

$$|x - 3| = 1 \Leftrightarrow (x - 3 = 1 \vee x - 3 = -1)$$

Zatem:

$$x = 4 \vee x = 2.$$

Odpowiedź:

Zbiorem rozwiązań równania $||x - 3| + 2| = 3$ są $x \in \{2,4\}$.

Przykład

Rozwiązać równanie:

$$2|x + 1| + |x - 1| = 1.$$

Zauważmy, że:

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1, \text{ dla } x < -1 \\ x + 1, \text{ dla } x \geq -1 \end{cases}$$

oraz:

$$|x - 1| = \begin{cases} -x + 1, \text{ dla } x < 1 \\ x - 1, \text{ dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązywanie równania sprowadza się do trzech przypadków:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} x < -1 \\ 2(-x - 1) + (-x + 1) = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < -1 \\ -2x - 2 - x + 1 = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < -1 \\ -3x = 2 \end{cases} \\ & \begin{cases} x < -1 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ponieważ $-\frac{2}{3} > -1$, więc w tym przypadku równanie nie ma rozwiązań.

$$\begin{aligned} 2. \quad & \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ 2(x + 1) + (-x + 1) = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ 2x + 2 - x + 1 = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ponieważ $-2 < -1$, więc w tym przypadku równanie nie ma rozwiązań.

$$\begin{aligned} 3. \quad & \begin{cases} x \geq 1 \\ 2(x + 1) + (x - 1) = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 2 + x - 1 = 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ponieważ $0 < 1$, więc w tym przypadku równanie nie ma rozwiązań.

Odpowiedź:

Równanie to jest równaniem sprzecznym, nie ma rozwiązań.

Przykład

Rozwiązać nierówność:

$$|x| - 3 \leq 1.$$

Zauważmy, że:

$$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Podaną nierówność można zatem sprowadzić do postaci:

$$-1 \leq |x| - 3 \leq 1.$$

Zatem:

$$2 \leq |x| \leq 4,$$

co jest równoważne:

$$\begin{cases} |x| \leq 4 \\ 2 \leq |x| \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq x \vee x \leq -2 \end{cases}$$

Nietrudno wyznaczyć część wspólną obu warunków.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in (-4, -2) \cup (2, 4)$.

Przykład

Rozwiązać nierówność:

$$x^2 - |5x - 3| - x < 2.$$

Ponieważ:

$$|5x - 3| = \begin{cases} 5x - 3 \text{ dla } x \geq \frac{3}{5} \\ 3 - 5x \text{ dla } x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie nierówności sprowadza się do dwóch przypadków:

$$\begin{cases} x^2 - (5x - 3) - x < 2 \text{ dla } x \geq \frac{3}{5} \\ x^2 - (3 - 5x) - x < 2 \text{ dla } x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Przypadek 1.

dla $x \geq \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}x^2 - (5x - 3) - x &< 2 \\x^2 - 6x + 1 &< 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= 36 - 4 = 32 \\ \sqrt{\Delta} &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{3}{5} \\ x \in (3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \end{array} \right..$$

Uwzględniając oba warunki, mamy: $x \in \left(\frac{3}{5}, 3 + 2\sqrt{2} \right)$.

Przypadek 2.

dla $x < \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned}x^2 - (3 - 5x) - x &< 2 \\x^2 + 4x - 5 &< 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= 16 + 20 = 36 \\ \sqrt{\Delta} &= 6\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 6}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < \frac{3}{5} \\ x \in (-5, 1) \end{array} \right..$$

Uwzględniając oba warunki mamy: $x \in \left(-5, \frac{3}{5} \right)$.

W zadaniu mieliśmy do czynienia z alternatywą dwóch warunków, więc rozwiązanie jest sumą uzyskanych rozwiązań obu warunków: $x \in \left(-5, \frac{3}{5} \right) \cup \left(\frac{3}{5}, 3 + 2\sqrt{2} \right)$, co w konsekwencji daje rozwiązanie nierówności: $x \in (-5, 3 + 2\sqrt{2})$.

Przykład

Rozwiązać równanie $\frac{4|x|-3}{x} = x$. Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R} - \{0\}$. Jak

wiadomo, $|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$. Uwzględniając dziedzinę równania, otrzymamy zatem dwa przypadki:

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{x} = x & \text{lub} \\ x > 0 & \begin{cases} \frac{-4x-3}{x} = x \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Przypadek 1.

Rozwiążemy równanie: $\frac{4x-3}{x} = x$. Po wymnożeniu obu stron przez x mamy: $4x - 3 = x^2$, które jest równoważne równaniu:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Obie uzyskane liczby są większe od zera, więc spełniają również drugi warunek koniunkcji.

Przypadek 2.

Rozwiążemy równanie: $\frac{-4x-3}{x} = x$. Po wymnożeniu obu stron przez x mamy:

$$-4x - 3 = x^2,$$

które jest równoważne równaniu:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

Obie uzyskane liczby są mniejsze od zera, więc spełniają również drugi warunek koniunkcji.

Odpowiedź:

Rozwiązania tego równania to liczby: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -3$.

Przykład

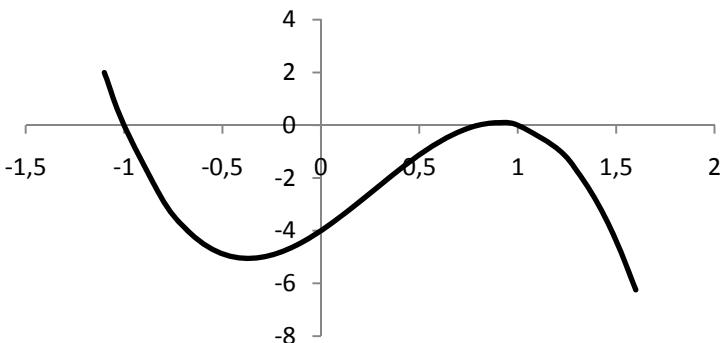
Rozwiąż nierówność: $\left| \frac{x^2-5x+3}{x^2-1} \right| < 1$.

Nierówność tę najlepiej rozwiązać tak:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} < 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} < 1 \\ \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} > -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Rozwiążemy pierwszą nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} &< 1 \\ \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} &< \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} &< 0 \\ \frac{-5x + 4}{x^2 - 1} &< 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-5x + 4)(x^2 - 1) < 0 \\ x \neq 1 \wedge x \neq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (-5x + 4)(x - 1)(x + 1) < 0 \\ x \neq 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}. \end{aligned}$$



Rysunek 9.1. Wykres wielomianu $W(x) = (-5x+4)(x-1)(x+1)$

Jak widać z wykresu, rozwiązaniem powyższej nierówności jest zbiór:

$$x \in \left(-1, \frac{4}{5}\right) \cup (1, +\infty).$$

Druga nierówność:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} &> -1 \\
 \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} + 1 &> 0 \\
 \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} &> 0 \\
 \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} &> 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 5x + 2)(x^2 - 1) < 0 \\ x \neq 1 \wedge x \neq -1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Aby rozłożyć na czynniki wyrażenie: $2x^2 - 5x + 2$, obliczymy wyróżnik

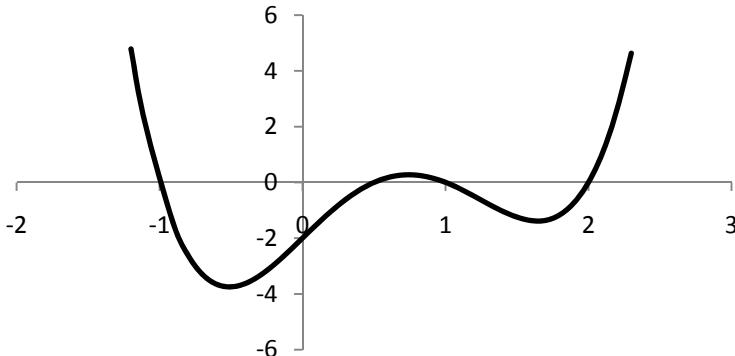
$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 3}{4} = 2.$$

Wobec powyższych rachunków nierówność przyjmuje postać:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)(x - 1)(x + 1) > 0.$$



Rysunek 9.2. Wykres wielomianu $W(x)=2(x-1/2)(x-2)(x-1)(x+1)$

Jak widać z wykresu, rozwiązaniem powyższej nierówności jest zbiór:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty).$$

Otrzymaliśmy zatem, że:

$$\begin{cases} x \in \left(-1, \frac{4}{5}\right) \cup (1, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty) \end{cases}.$$

Odpowiedź:

$$x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) \cup (2, +\infty).$$

9.2. Zadania

1. Rozwiąż równania:
 - a) $||x| - 6| = 4$,
 - b) $||x - 3| + 2| = 3$,
 - c) $||3 - 2x| + 1| = 4$.

2. Rozwiąż równania metodą algebraiczną i graficzną:
 - a) $|x - 1| + |x + 3| = 4$,
 - b) $|x + 2| = 7 - |x|$,
 - c) $6 - |4 - x| = |2 - 3x|$.

3. Rozwiąż nierówności:
 - a) $|2|x - 1| - 3| \leq 5$,
 - b) $|3 - |x + 5|| \leq 1$,
 - c) $|3 - |x - 2|| > 2$.

4. Rozwiąż nierówności metodą algebraiczną i graficzną:
 - a) $|x - 3| < x + 3$,
 - b) $2|x| + x < 4$,
 - c) $|x| + 2x \geq 2$.

5. Rozwiąż nierówności:
 - a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} > 5 - |x|$,
 - b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} \leq 6$,
 - c) $|x - 1| + \sqrt{4x^2 - 20x + 25} < 9$.

6. Rozwiąż równania:

- a) $2x^2 - |x| - 15 = 0$,
- b) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$,
- c) $x^2 + |x - 1| = 0$,
- d) $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$,
- e) $x|x| + |2x - 3| = 4$.

7. Rozwiąż graficznie równania:

- a) $|x^2 - 6x + 21| = x^2 - 6x + 21$,
- b) $|x^2 - 4| = 4 - x^2$,
- c) $|x^2 - 6x| = 6x - x^2$.

8. Rozwiąż równania:

- a) $|x^2 - 4| + |x^2 - 5| = 1$,
- b) $|x^2 - 3| - |x^2 - 9| = 7$,
- c) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 3$.

9. Rozwiąż równania:

- a) $|x^3 - 4x| = x^3 - 4x$,
- b) $4|x| - |x|^3 = 0$,
- c) $\frac{|x+2|}{x^2+x-2} - \frac{2}{|x+1|} = -\frac{3}{4}$,
- d) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$.

10. Rozwiąż nierówności:

- a) $x^2 - 7|x| + 10 \leq 0$,
- b) $x^2 - 3|x| - 4 \leq 0$,
- c) $x^2 + 4|x| + 3 > 0$.

11. Rozwiąż nierówności:

- a) $|x^2 - 4x| < 4$,
- b) $|x^2 - 6x| < 9$,
- c) $|x^2 - 6x - 1| > 6$.

12. Rozwiąż nierówności:

- a) $|x^3 - 1| < x^2 + x + 1$,
- b) $|x^4 + 10x^2 - 1| < 10$,
- c) $|x^3 - 4x| < x^3 - 4x$,
- d) $4|x| - |x|^3 \leq 0$,
- e) $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 3$.

Rozdział 10

Funkcja wykładnicza

10.1. Podstawowe definicje

W nauce matematyki spotkaliśmy się z funkcjami potęgowymi. W funkcjach tych był ustalony wykładnik potęgi, a zmieniała się podstawa.

Obecnie będziemy się zajmować funkcjami, w których zmieniać się będzie wykładnik potęgi, a podstawa będzie stała. Aby zapewnić, by dziedzina takiej funkcji była zbiorem liczb rzeczywistych, musimy założyć, że podstawa potęgi musi być liczbą dodatnią i różną od zera.

Definicja

Funkcję $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ nazywamy *funkcją wykładniczą o podstawie a*.

Uwaga

Podstawa funkcji wykładniczej nie może być 1, gdyż $1^x = 1$, czyli mielibyśmy do czynienia w tym przypadku z funkcją stałą, a taka jest funkcją liniową, a nie szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej.

Przykład

Narysujemy wykres funkcji $f(x) = 2^x$, a następnie wykres $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

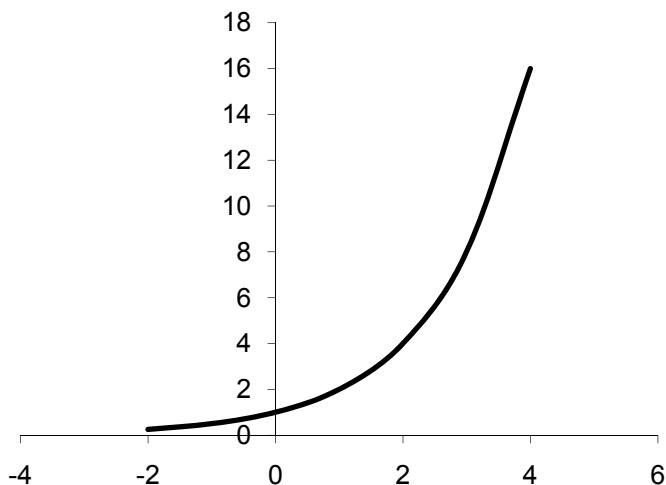
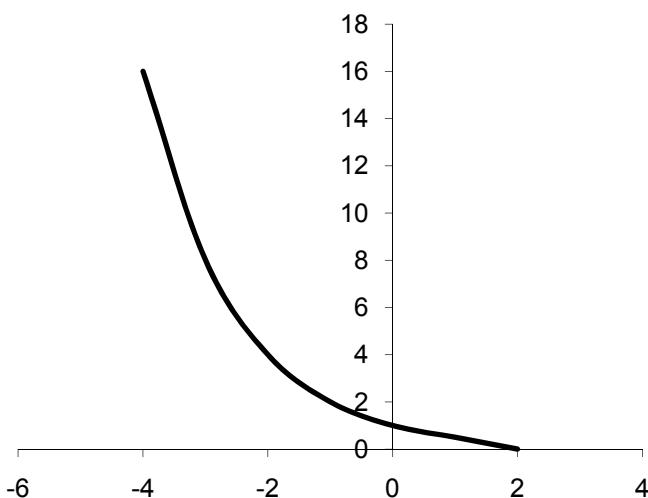
W tym celu ułożymy sobie tabelki wartości funkcji dla niektórych argumentów:

Tabela 10.1. Niektóre wartości funkcji $f(x)=2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Tabela 10.2. Niektóre wartości funkcji $f(x)=(1/2)^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	16	8	4	2	1	0,5	0,25

Rysunek 10.1. Wykres funkcji $f(x)=2^x$ Rysunek 10.2. Wykres funkcji $f(x)=(1/2)^x$

Analizując powyższe wykresy, widzimy wyraźnie, że funkcja wykładnicza jest funkcją ciągłą określoną na zbiorze liczb rzeczywistych o wartościach rzeczywistych dodatnich.

Nietrudno zauważyć, że jeśli podstawa $a > 1$, to funkcja wykładnicza jest rosnąca, a dla $a \in (0,1)$ funkcja wykładnicza jest malejącą. Każda funkcja wykładnicza postaci $f(x) = a^x$ jest różnowartościowa.

10.2. Równania wykładnicze

Równaniem wykładniczym będziemy nazywać takie równanie, w którym niewiadoma występuje tylko w wykładniku potęgi.

Przy rozwiązywaniu równań wykładniczych będziemy korzystali z poniższego twierdzenia oraz z własności funkcji wykładniczej.

Twierdzenie

Jeśli $a, b \in \mathbb{R}_+$ oraz $m, n \in \mathbb{R}$, to:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, \\ a^m : a^n &= a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n}, \\ a^m \cdot b^m &= (a \cdot b)^m, \\ \frac{a^m}{b^m} &= \left(\frac{a}{b}\right)^m, b \neq 0. \end{aligned}$$

Przykład

Rozwiązać równanie $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^x = 49$.

Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Nietrudno zauważyć, że: $49 = 7^2$ oraz $\frac{1}{\sqrt{7}} = 7^{-\frac{1}{2}}$. Z powyższego otrzymujemy:

$$\left(7^{-\frac{1}{2}}\right)^x = 7^2.$$

Z własnością potęg o wykładnikach rzeczywistych mamy:

$$7^{-\frac{1}{2}x} = 7^2.$$

Z różnowartościowości funkcji wykładniczej wynika, że jeśli podstawy równości są takie same, to również muszą być równe wykładniki, czyli:

$$-\frac{1}{2}x = 2, \text{ więc } x = -4.$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest $x = -4$.

Przykład

Rozwiązać równanie: $256^{\frac{1}{x^2-4}} \cdot \left(\frac{8}{2^{x+1}}\right)^{\frac{1}{x+2}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$.

Należy rozpocząć od dziedziny. Wyrażenia występujące w mianowniku nie mogą być równe zero. Zatem:

$$x^2 - 4 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0 \wedge x + 2 \neq 0$$

Dziedziną tego równania jest: $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Wszystkie liczby występujące w podstawie przedstawimy w postaci potęgi liczby 2.

$$\begin{aligned}(2^8)^{\frac{1}{x^2-4}} \cdot \left(\frac{2^3}{2^{x+1}}\right)^{\frac{1}{x+2}} &= (2^2)^{\frac{1}{x-2}} \\ 2^{\frac{8}{x^2-4}} \cdot (2^{3-x-1})^{\frac{1}{x+2}} &= 2^{\frac{2}{x-2}} \\ 2^{\frac{8}{x^2-4}} \cdot 2^{\frac{2-x}{x+2}} &= 2^{\frac{2}{x-2}} \\ 2^{\frac{8}{x^2-4} + \frac{2-x}{x+2}} &= 2^{\frac{2}{x-2}}\end{aligned}$$

Skoro doprowadziliśmy do tego, że mamy jednakowe podstawy, więc z równości wynika, że:

$$\begin{aligned}\frac{8}{x^2-4} + \frac{2-x}{x+2} &= \frac{2}{x-2} \\ \frac{8}{(x-2)(x+2)} + \frac{(2-x)(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ \frac{8 + (2-x)(x-2) - 2(x+2)}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ \frac{8 - x^2 + 4x - 4 - 2x - 4}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ \frac{-x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)} &= 0 \\ -x^2 + 2x &= 0 \\ -x(x-2) &= 0 \\ x = 0 \text{ lub } x = 2.\end{aligned}$$

Ponieważ $x = 2 \notin D$, więc jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = 0$.

Przykład

Rozwiązać równanie: $3^{x+1} - 3^{x-2} = \frac{26}{9}$.

Równanie to jest określone dla każdej liczby rzeczywistej. Należy zauważać, że:

$$\begin{aligned} 3^{x+1} - 3^{x-2} = \frac{26}{9} &\Leftrightarrow 3^x \cdot 3 - \frac{3^x}{3^2} = \frac{26}{9} \\ 3^x \cdot \left(3 - \frac{1}{9}\right) &= \frac{26}{9} \\ 3^x \cdot \frac{26}{9} &= \frac{26}{9}, \end{aligned}$$

więc:

$$3^x = 1, \text{czyli } x = 0.$$

Przykład

Rozwiązać równanie: $2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$.

Równanie to jest określone dla każdej liczby rzeczywistej. Uprościmy podane równanie:

$$\begin{aligned} 2^{2x} \cdot 2 - 33 \cdot \frac{2^x}{2} + 4 &= 0 \\ 2 \cdot 2^{2x} - \frac{33}{2} \cdot 2^x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz podstawienie: $2^x = t, t > 0$.

Nasze równanie sprowadza się zatem do postaci równania kwadratowego o niewiadomej t.

$$\begin{aligned} 2t^2 - \frac{33}{2}t + 4 &= 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 33t + 8 = 0 \\ \Delta &= 961, \sqrt{\Delta} = 31 \\ t_1 &= \frac{1}{4}, t_2 = 8. \end{aligned}$$

Wracając do podstawienia, otrzymamy:

$$2^x = \frac{1}{4} \text{ lub } 2^x = 8.$$

Stąd rozwiązaniami naszego równania są:

$$x_1 = -2, x_2 = 3.$$

10.3. Nierówności wykładnicze

Przy rozwiązywaniu nierówności wykładniczych będziemy wykorzystywali własności potęg o wykładnikach rzeczywistych oraz różnowartościowość i monotoniczność funkcji wykładniczej.

Zauważmy, że:

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x > a^y \Rightarrow x > y \\ a^x < a^y \Rightarrow x < y \\ a^x = a^y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^x > a^y \Rightarrow x < y \\ a^x < a^y \Rightarrow x > y \\ a^x = a^y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe, będziemy rozwiązywać nierówności wykładnicze.

Przykład

Rozwiązać nierówność: $8(\sqrt{8})^{x-3} > \left(\frac{2\sqrt{2}}{8}\right)^{x+1}$.

Sprowadzamy obie strony nierówności do tej samej podstawy:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{x-3} &> \left(\frac{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^{x+1} \\ 2^{3+\frac{3}{2}(x-3)} &> \left(2^{\frac{3}{2}-3}\right)^{x+1} \\ 2^{3+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}} &> \left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{x+1} \\ 2^{\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}} &> 2^{-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}} \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} &> -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ 3x &> 0, \text{ więc } x > 0. \end{aligned}$$

Przykład

Rozwiązać nierówność: $3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$.

Należy zauważyć, że:

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1} \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^2 + 7^x < 4 \cdot \frac{7^x}{7} + 34 \cdot \frac{3^x}{3}$$

$$\begin{aligned}
 3^x \cdot 3^2 - 34 \cdot \frac{3^x}{3} &< 4 \cdot \frac{7^x}{7} - 7^x \\
 3^x \left(9 - \frac{34}{3}\right) &< 7^x \left(\frac{4}{7} - 1\right) \\
 3^x \left(-\frac{7}{3}\right) &< 7^x \left(-\frac{3}{7}\right) \\
 \frac{3^x}{3^2} &> \frac{7^x}{7^2} \\
 3^{x-2} &> 7^{x-2} \\
 \frac{3^{x-2}}{7^{x-2}} &> 1 \\
 \left(\frac{3}{7}\right)^{x-2} &> 1
 \end{aligned}$$

$$x - 2 < 0 \text{ więc } x < 2.$$

Przykład

Rozwiązać nierówność: $4^x < 3 \cdot 2^x + 4$.

Zauważmy, że:

$$4^x < 3 \cdot 2^x + 4 \Leftrightarrow 2^{2x} < 3 \cdot 2^x + 4.$$

Wprowadzając pomocniczą zmienną $t = 2^x, t > 0$ mamy:

$$t^2 < 3t + 4,$$

$$t^2 - 3t - 4 < 0$$

$$\Delta = 25, \sqrt{\Delta} = 5$$

$$t_1 = -1, t_2 = 4, \text{ więc } t \in (-1, 4)$$

$$2^x \in (-1, 4) \Leftrightarrow -1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < 4 \\ 2^x > -1 \end{cases}.$$

Druga nierówność jest zawsze prawdziwa, bo funkcja wykładnicza $y = 2^x$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Z pierwszej nierówności mamy:

$$2^x < 4 \Leftrightarrow 2^x < 2^2 \Leftrightarrow x < 2.$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem nierówności jest:

$$x \in (-\infty, 2).$$

10.4. Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2^{x-1} + 3$. Omów własności tej funkcji.
2. Naszkicuj wykres funkcji $y = |2^{x+1} - 3|$. Omów własności tej funkcji.
3. Rozwiąż równanie: $(0,5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$.
4. Rozwiąż równanie: $\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}-1} = 0,4^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}$.
5. Rozwiąż równanie: $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14$.
6. Rozwiąż równanie: $5 \cdot 2^{3x} + 8^x - 2 \cdot 4^{1,5x} = 16$.
7. Rozwiąż równanie: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 = 0$.
8. Rozwiąż równanie: $(0,5)^{-x} - 4^{x+2} = 0$.
9. Rozwiąż równanie: $2^{3x} - 2^{2x+3} - 2^{x+4} + 128 = 0$.
10. Rozwiąż równanie: $\frac{3^x+2}{3^x+3} = \frac{3^x-2}{3^x-3}$.
11. Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x-1}$.
12. Rozwiąż nierówność: $3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$.
13. Rozwiąż nierówność: $3^{x^2} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$.
14. Rozwiąż nierówność: $2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 \geq 0$.
15. Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 > 0$.
16. Rozwiąż nierówność: $5 \cdot 2^x - 4^{x+1} + 8^x - 2 \geq 0$.
17. Rozwiąż nierówność: $5^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots} \geq 125^{\frac{x+1}{x}}$.

Rozdział 11

Funkcja logarytmiczna

Funkcja wykładnicza postaci $y = a^x$, dla $a > 0$ oraz $a \neq 1$ jest funkcją różnowartościową, zatem wynika z tego, że istnieje dla każdej dodatniej liczby b jedna taka liczba rzeczywista c , dla której $a^c = b$. Liczbę tę nazywać będziemy logarymem przy podstawie a z liczby b .

Definicja

Logarymem liczby dodatniej b przy podstawie a ($a > 0$ oraz $a \neq 1$) nazywamy taką liczbę rzeczywistą c , że $a^c = b$.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1 \text{ i } b > 0.$$

Uwaga

a – podstawa logarytmu ($a > 0$ i $a \neq 1$),

b – liczba logarytmowana ($b > 0$),

c – logarytm liczby b przy podstawie a .

11.1. Własności logarytmów

Twierdzenie

Jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0$ i $n \in \mathbb{R}$, to:

- a) $\log_a a = 1$,
- b) $\log_a 1 = 0$,
- c) $\log_a a^n = n$,
- d) $a^{\log_a b} = b$.

Twierdzenie

Jeżeli $a, b > 0, a \neq 1, x, y, z > 0$ i $n \in \mathbb{R}$, to:

- a) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$,
- b) $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$,
- c) $\log_a x^n = n \log_a x$,
- d) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (wzór na zamianę podstawy logarytmu),
- e) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

Przykład

Oblicz: $\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.

Zauważmy, że: $8 = 2^3$ oraz $81 = 3^4$. Zatem:

$$\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81 = \log_{\sqrt{3}} 2^3 \cdot \log_4 3^4 = 3 \log_{\sqrt{3}} 2 \cdot 4 \log_4 3 = 12 \log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_4 3$$

Wykorzystując wzór na zamianę podstawy logarytmu, sprowadzimy oba logarytmy do podstawy 2.

$$\begin{aligned} 12 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_4 3 &= 12 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{3}} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 12 \cdot \frac{1}{\log_2 3^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2} = \\ &= 12 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{2 \log_2 2} = 12 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 12. \end{aligned}$$

Czyli:

$$\log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81 = 12.$$

Definicja

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci

$$y = \log_a x, \text{ gdzie } x > 0, a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

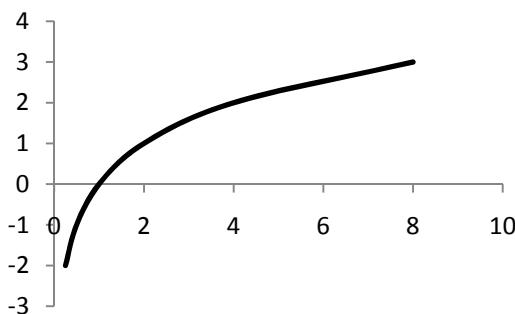
Przykład

Narysujemy wykres funkcji $y = \log_2 x$, a następnie wykres $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

W tym celu ułożymy tabelki wartości funkcji dla niektórych argumentów.

Tabela 11.1. Niektóre wartości funkcji $f(x)=\log_2 x$

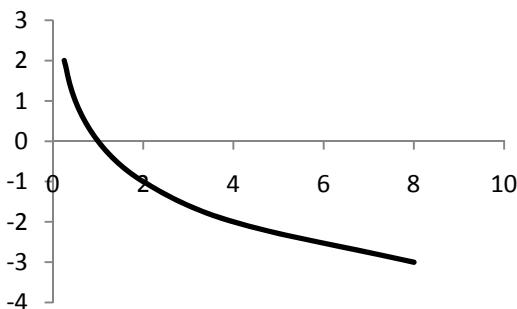
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3



Rysunek 11.1. Wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$

Tabela 11.2. Niektóre wartości funkcji $f(x)=\log_{1/2}x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	2	1	0	-1	-2	-3

**Rysunek 11.2. Wykres funkcji $f(x)=\log_{1/2}x$**

Analizując powyższe wykresy, widzimy wyraźnie, że funkcja logarytmiczna jest funkcją ciągłą określoną na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich o wartościach rzeczywistych.

Nietrudno zauważyć, że jeśli podstawa $a > 1$, to funkcja logarytmiczna jest rosnąca, a dla $a \in (0,1)$ funkcja logarytmiczna jest malejącą. Każda funkcja logarytmiczna postaci $y = \log_a x$ jest różniczkowalna.

Uwaga

Zauważmy, że dla $x, y > 0$ mamy:

$$a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a y \Rightarrow x > y \\ \log_a x < \log_a y \Rightarrow x < y \\ \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

oraz:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a y \Rightarrow x < y \\ \log_a x < \log_a y \Rightarrow x > y \\ \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \end{cases}$$

Z powyższego oraz z własności logarytmów będziemy korzystać przy rozwiązywaniu równań i nierówności logarytmicznych.

11.2. Równania logarytmiczne

Przykład

Rozwiązać równanie: $\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$.

Korzystając bezpośrednio z definicji logarytmu, mamy:

$$\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0 \Leftrightarrow \log_3(\log_2 x) = 4^0$$

$$\log_3(\log_2 x) = 1.$$

Ponownie stosujemy definicję logarytmu

$$\log_2 x = 3^1 \Leftrightarrow \log_2 x = 3.$$

Czyli:

$$x = 2^3,$$

więc:

$$x = 8.$$

Przykład

Rozwiązać równanie: $\log_2(x + 2) + \log_2(x + 14) = 6$.

Rozpoczniemy od określenia dziedziny tego równania. Podstawy logarytmów są równe 2, więc są dodatnie i różne od zera. Należy zatem założyć, że:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x + 14 > 0 \end{cases}$$

Z powyższego po rozwiązyaniu obu nierówności i wyznaczeniu ich części wspólnej otrzymamy dziedzinę równania:

$$D: x \in (-2, \infty).$$

Przystąpimy teraz do rozwiązywania równania. Korzystając z własności logarytmów, mamy:

$$\log_2(x + 2) + \log_2(x + 14) = 6 \Leftrightarrow \log_2(x + 2)(x + 14) = 6.$$

Po zastosowaniu definicji logarytmu otrzymamy:

$$(x + 2)(x + 14) = 2^6 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 14) = 64.$$

Otrzymaliśmy więc równanie kwadratowe, które przyjmuje postać:

$$x^2 + 16x - 36 = 0$$

$$\Delta = 400, \sqrt{\Delta} = 20$$

$$x_1 = -18, x_2 = 2.$$

Musimy jeszcze sprawdzić, które z rozwiązań należy do dziedziny.

Po uwzględnieniu dziedziny jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = 2$.

Przykład

Rozwiązać równanie: $\frac{1}{5-4 \log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$.

Rozpoczniemy od określenia dziedziny tego równania. Podstawy logarytmów są równe 10, więc są dodatnie i różne od zera. Należy zatem założyć, że:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x > 0 \\ 5 - 4 \log x \neq 0 \\ 1 + \log x \neq 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} x > 0 \\ -4 \log x \neq -5 \Leftrightarrow \log x \neq \frac{5}{4} \\ \log x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 10^{\frac{5}{4}} \\ x \neq 10^{-1} \end{cases}. \end{aligned}$$

Uwzględniając wszystkie trzy warunki, mamy:

$$D: x \in \mathbb{R}_+ - \left\{ \frac{1}{10}, 10^{\frac{5}{4}} \right\}.$$

Wprowadzając pomocniczą zmienną $t = \log x$, $t \in \mathbb{R}$, mamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3 \\ & \frac{1 \cdot (1+t)}{(5-4t)(1+t)} + \frac{4 \cdot (5-4t)}{(5-4t)(1+t)} = 3 \\ & \frac{1+t+20-16t}{(5-4t)(1+t)} - 3 \cdot \frac{(5-4t)(1+t)}{(5-4t)(1+t)} = 0 \\ & \frac{1+t+20-16t}{(5-4t)(1+t)} - \frac{3(5+5t-4t-4t^2)}{(5-4t)(1+t)} = 0 \\ & \frac{21-15t}{(5-4t)(1+t)} - \frac{-12t^2+3t+15}{(5-4t)(1+t)} = 0 \\ & \frac{12t^2-18t+6}{(5-4t)(1+t)} = 0 \\ & 12t^2-18t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \\ & \Delta=1, \sqrt{\Delta}=1 \\ & t_1=\frac{1}{2}, t_2=1. \end{aligned}$$

Zatem:

$$\log x = \frac{1}{2} \text{ lub } \log x = 1$$

$x = 10^{\frac{1}{2}}$ lub $x = 10^1$, co daje nam:

$$x = \sqrt{10} \text{ lub } x = 10.$$

Nietrudno sprawdzić, że oba uzyskane rozwiązania należą do dziedziny tego równania, więc są jego rozwiązaniami.

11.3. Nierówności logarytmiczne

Przykład

Rozwiązać nierówność logarytmiczną: $\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) > -2$.

Rozpoczniemy od określenia dziedziny nierówności. Podstawa logarytmu jest równa $\frac{1}{2}$, więc jest dodatnia i różna od zera. Należy zatem założyć, że:

$$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4,$$

czyli:

$$D: x \in (4, \infty).$$

Przystąpimy teraz do rozwiązania nierówności.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 4) > -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x - 4) > \log_{\frac{1}{2}}4$$

Wykorzystując fakt, że funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa oraz przy podstawie będącej ułamkiem właściwym jest malejąca, otrzymujemy:

$$x - 4 < 4 \Leftrightarrow x < 8$$

Uwzględniając dziedzinę tej nierówności, otrzymujemy rozwiązanie:

$$x \in (4, 8).$$

Przykład

Rozwiązać nierówność logarytmiczną: $\log^2(x - 1) - 2 \log(x - 1) > 0$.

Rozpoczniemy od określenia dziedziny nierówności. Podstawa logarytmu jest równa 10, więc jest dodatnia i różna od zera. Należy zatem założyć, że:

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1,$$

czyli:

$$D: x \in (1, \infty).$$

Przystąpimy teraz do rozwiązywania nierówności. Wprowadzając pomocniczą zmienną $t = \log(x - 1)$, $t \in \mathbb{R}$, mamy:

$$t^2 - 2t > 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 2,$$

więc:

$$t \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty).$$

Korzystając z podstawienia, mamy:

$$\begin{aligned} \log(x - 1) &< 0 \text{ lub } \log(x - 1) > 2 \\ x - 1 &< 1 \text{ lub } x - 1 > 100 \\ x &< 2 \text{ lub } x > 101, \end{aligned}$$

czyli:

$$x \in (-\infty, 2) \cup (101, \infty).$$

Pozostaje jeszcze uwzględnienie dziedziny naszej nierówności:

$$\begin{cases} x \in (1, \infty) \\ x \in (-\infty, 2) \cup (101, \infty) \end{cases}$$

Rozwiązaniem naszej nierówności jest zatem: $x \in (1, 2) \cup (101, \infty)$.

Przykład

Rozwiązać nierówność logarytmiczną: $\log_x(2x + 1) > 1$.

Rozpoczniemy od określenia dziedziny nierówności.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

czyli:

$$D: x \in (0, 1) \cup (1, \infty).$$

Przystąpimy teraz do rozwiązywania nierówności. Należy zauważyć, że:

$$\log_x(2x + 1) > 1 \Leftrightarrow \log_x(2x + 1) > \log_x x$$

Teraz należałoby opuścić logarytmy, ale w tym miejscu musimy rozpatrzyć dwa przypadki.

Przypadek 1.

dla $x \in (0, 1)$

$$\log_x(2x + 1) > \log_x x \Leftrightarrow 2x + 1 < x,$$

czyli:

$$x < -1.$$

Uwzględniając początkowe założenia dla tego przypadku, mamy:

$$x \in \emptyset.$$

Przypadek 2.

dla $x \in (1, \infty)$

$$\log_x(2x + 1) > \log_x x \Leftrightarrow 2x + 1 > x,$$

czyli:

$$x > -1.$$

Uwzględniając początkowe założenia dla tego przypadku, mamy:

$$x \in (1, \infty).$$

Biorąc pod uwagę oba przypadki, otrzymujemy rozwiązanie tej nierówności:

$$x \in (1, \infty).$$

11.4. Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = \log_2(x - 2) + 3$. Omów własności tej funkcji.
2. Naszkicuj wykres funkcji $y = |\log_2(x + 2) - 3|$. Omów własności tej funkcji.
3. Oblicz wartość wyrażenia: $\log_{25} 12$, wiedząc, że $\log_5 4 = a$ oraz $\log_5 3 = b$.
4. Oblicz wartość wyrażenia: $16^{\log_2 \sqrt[4]{2} + \log_4 3}$.

5. Rozwiąż równanie: $\log_5[3 + \log_4(\log_2 x + 10)] = 1$.

6. Rozwiąż równanie: $\log_x \frac{x+2}{x} = 1$.

7. Rozwiąż równanie:

$$\log 5 + \log(x + 10) = 1 - \log(2x - 1) + \log(21 - 20).$$

8. Rozwiąż równanie: $\frac{\log x}{\log(x+1)} = -1$.

9. Rozwiąż równanie: $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$.

10. Rozwiąż równanie: $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 8 = 0$.

11. Rozwiąż równanie: $\frac{3}{\log x - 1} = \log x + 1$.

12. Rozwiąż równanie: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{16x} 2$.

13. Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{5}}(3x - 4) < -2$.

14. Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{5}}(2x + 1) < \log_{\frac{1}{5}}(16 - x^2) + 1$.

15. Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{4}}(2 - x) > \log_{\frac{1}{4}}\frac{2}{x+1}$.

16. Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$.

17. Rozwiąż nierówność: $-2\log_4^2 x + 3\log_4 x - 1 > 0$.

18. Rozwiąż nierówność: $\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 0$.

19. Rozwiąż nierówność: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.

Rozdział 12

Ciągi liczbowe

Szczególnym przypadkiem funkcji liczbowych są ciągi liczbowe.

Definicja

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję liczbową określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich lub na dowolnym podzbiорze tego zbioru. *Wyrazami ciągu* nazywamy wartości tej funkcji.

Przykładami ciągów liczbowych są znane ze szkoły ponadgimnazjalnej ciągi arytmetyczny i geometryczny. Zgodnie ze standardami wymagań egzaminacyjnych uczniów zdający egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym umie rozwiązywać zadania, w których: wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym, bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny czy geometryczny, stosuje wzór na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym.

12.1. Podstawowe własności ciągów

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy *rosącym* (*od pewnego momentu*), jeśli istnieje liczba naturalna $n_0 \geq 1$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ każdy wyraz ciągu jest większy od wyrazu poprzedniego, tzn.

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_{n+1} > a_n.$$

Jeśli ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_{n+1} \geq a_n,$$

to mówimy, że jest *niemalejący* (*od pewnego momentu*).

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy *malejącym* (*od pewnego momentu*), jeśli istnieje liczba naturalna $n_0 \geq 1$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ każdy wyraz ciągu jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, tzn.

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_{n+1} < a_n.$$

Jeśli ciąg (a_n) spełnia warunek

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_{n+1} \leq a_n,$$

to mówimy, że jest *nierosnący (od pewnego momentu)*.

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy *stałym (od pewnego momentu)*, jeśli istnieje liczba naturalna $n_0 \geq 1$ taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ każdy wyraz ciągu jest równy wyrazowi poprzedniemu, tzn.

$$\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_{n+1} = a_n.$$

Jak łatwo zauważyc, ciąg stały jest ciągiem równocześnie niemalejącym i nierosnącym.

Definicja

Ciągi niemalejące i nierosnące nazywamy ciągami *monotonicznymi*.

Zauważmy, że powyższe definicje ciągów monotonicznych są zgodne z definicjami funkcji monotonicznych. Definicje ciągu ograniczonego z góry, ograniczonego z dołu oraz ograniczonego są szczególnymi przypadkami odpowiednich definicji funkcji ograniczonych i dlatego nie będziemy ich tutaj przytaczać.

Przykład

Zbadajmy monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 + 3n + 2$.

Obliczmy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnego $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 + 3(n+1) + 2 - (n^2 + 3n + 2) = \\ &= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 2 - n^2 - 3n - 2 = 2n + 4 > 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} a_{n+1} > a_n,$$

czyli ciąg $a_n = n^2 + 3n + 2$ jest rosnący.

Przykład

Zbadajmy monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Wyznaczamy wartość ilorazu wyrazu następnego przez wyraz bieżący:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \div \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Ponieważ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{n}{n+1} < 1$, to również $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$, zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

i w konsekwencji

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 1} a_{n+1} < a_n.$$

Ciąg $a_n = \frac{n!}{n^n}$ jest ciągiem malejącym.

12.2. Granica ciągu liczbowego

Definicja

Jeśli w danym ciągu nieskończonym pominiemy tylko skończoną liczbę wyrazów, to o pozostałych wyrazach mówimy *prawie wszystkie wyrazy ciągu*.

Sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu” jest w wielu przypadkach równoważne sformułowaniu „wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca”.

Definicja

Ciąg (a_n) ma granicę właściwą g ($g \in \mathbb{R}$), jeśli dla każdej liczby dodatniej ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby g , tzn. jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna $n_0 \geq 1$, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Fakt, że liczba g jest granicą ciągu (a_n) , zapisujemy symbolicznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

lub

$$a_n \rightarrow g \text{ przy } n \rightarrow \infty.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Definicja

Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$, jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna $n_0 \geq 1$, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi nierówność $a_n > \varepsilon$, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 a_n > \varepsilon.$$

Definicja

Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$, jeśli dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna $n_0 \geq 1$, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ zachodzi nierówność $a_n < -\varepsilon$, tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 a_n < -\varepsilon.$$

Ciąg, który ma granicę, nazywamy *ciągiem zbieżnym*.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny posiada tylko jedną granicę.

Twierdzenie

Ciąg zbieżny do granicy właściwej jest ciągiem ograniczonym.

Twierdzenie

Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny do granicy właściwej.

12.3. Podstawowe metody obliczania granic ciągów

Przedstawimy teraz parę twierdzeń, które pozwolą nam wyznaczać granice ciągów.

Twierdzenie

Ciąg stały o wyrazie ogólnym $a_n = g$ jest zbieżny do granicy g , tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g = g.$$

Twierdzenie

Jeśli $a_1 \in \mathbb{R}, |q| < 1$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 q^n = 0.$$

Twierdzenie

Jeśli $a \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0.$$

Twierdzenie (o arytmetyce granic właściwych ciągów)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ są zbieżne do granic właściwych, to:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ o ile } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, b_n \neq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \text{ o ile } a_n \geq 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$$

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{4n^3 + 5n^2 - 7}$.

Jeśli w liczniku i mianowniku wyłączymy przed nawias najwyższą potęgę n z mianownika (u nas n^3), to korzystając z powyższych twierdzeń, otrzymamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 5}{4n^3 + 5n^2 - 7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(4 + \frac{5n^2}{n^3} - \frac{7}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{4 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}} \\ &= \frac{1 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy granicę ciągu $a_n = \frac{5 \cdot 2^{2n} - 7}{6 \cdot 4^n + 8}$.

Korzystając z powyższych twierdzeń, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^{2n} - 7}{6 \cdot 4^n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 4^n - 7}{6 \cdot 4^n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \left(5 - \frac{7}{4^n} \right)}{4^n \left(6 + \frac{8}{4^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 7 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n}{6 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n} = \frac{5 - 0}{6 + 0} = \frac{5}{6}.$$

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $a_n = \sqrt{2n^2 - 3n} - \sqrt{2n^2 - 5}$.

Wykorzystując wzór $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2 - 3n} - \sqrt{2n^2 - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 - 3n} - \sqrt{2n^2 - 5})(\sqrt{2n^2 - 3n} + \sqrt{2n^2 - 5})}{\sqrt{2n^2 - 3n} + \sqrt{2n^2 - 5}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2 - 3n})^2 - (\sqrt{2n^2 - 5})^2}{\sqrt{2n^2 - 3n} + \sqrt{2n^2 - 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n - (2n^2 - 5)}{\sqrt{2n^2 - 3n} + \sqrt{2n^2 - 5}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + 5}{\sqrt{2n^2 - 3n} + \sqrt{2n^2 - 5}} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-3 + \frac{5}{n})}{n\left(\sqrt{2 - \frac{3}{n}} + \sqrt{2 - \frac{5}{n}}\right)} = \frac{-3 + 0}{\sqrt{2 - 0} + \sqrt{2 - 0}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeśli $a > 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Dane są trzy ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$. Jeśli

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$
- b) $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \geq 1} \forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} a_n \leq b_n \leq c_n,$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{5^n + 7^n + 11^n}$.

Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ prawdziwe są nierówności

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{11^n} &\leq \sqrt[n]{5^n + 7^n + 11^n} \leq \sqrt[n]{11^n + 11^n + 11^n}, \\
11 &\leq \sqrt[n]{5^n + 7^n + 11^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 11^n}, \\
11 &\leq \sqrt[n]{5^n + 7^n + 11^n} \leq 11\sqrt[n]{3}.
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 11 = 11 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} 11\sqrt[n]{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 11 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 11,$$

to na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n + 11^n} = 11.$$

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę właściwą równą 0, to

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ gdy $a_n > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$ gdy $a_n < 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą, zaś $b \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{a_n} = 0.$$

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$, to

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$, o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$, o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < 0$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$, to

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$, o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$, o ile $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < 0$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $a_n = 5n^5 - 3n^2 - 7n + 1$.

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^5 = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n^3} - \frac{7}{n^4} + \frac{1}{n^5} \right) = 5,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^5 - 3n^2 - 7n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(5 - \frac{3}{n^3} - \frac{7}{n^4} + \frac{1}{n^5} \right) = +\infty.$$

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 3n - 1}{-2n^2 + 7n + 12}$.

Najpierw w liczniku i mianowniku wyłączymy przed nawias najwyższą potęgę n z mianownika (u nas n^2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 5n^2 + 3n - 1}{-2n^2 + 7n + 12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3n^2 - 5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^2}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n^2 - 5 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-2 + \frac{7}{n} + \frac{12}{n^2}} = -\frac{1}{2},$$

to otrzymujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 5n^2 + 3n - 1}{-2n^2 + 7n + 12} = -\infty.$$

12.4. Liczba e

Rozpatrzmy ciąg (e_n) o wyrazie ogólnym $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Korzystając np. z zasady indukcji matematycznej, możemy pokazać, że ciąg ten jest rosnący i ograniczony. W konsekwencji prawdziwe jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ciągiem zbieżnym do granicy właściwej.

Definicja (liczby e)

Granicę ciągu $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oznaczamy literą e , tzn.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczبę e nazywamy inaczej *liczbą Eulera* lub *liczbą Napiera*. Liczba e jest liczbą niewymierną. Jej rozwinięcie dziesiętne jest zatem nieskończone nieokresowe, a w przybliżeniu do dziesięciu miejsc po przecinku wynosi

$$e \approx 2,7182818284.$$

Definicja

Funkcję wykładniczą o podstawie e , tzn. funkcję $f(x) = e^x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nazywamy *funkcją eksponentycjalną*.

Definicja

Logarytm o podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy \ln :
 $\ln b = \log_e b$ dla $b > 0$.

Definicja

Funkcję logarytmiczną o podstawie e nazywamy *funkcją logarytm naturalny*:

$$f(x) = \ln x, \quad \text{gdzie } x > 0.$$

Twierdzenie

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$, to wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Przykład

Obliczmy granicę ciągu $b_n = \left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)^{n^3-1}$.

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)^{n^3-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{n^3-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{n^3-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{n^3} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{-n^3} \right]^{-1} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ponieważ ciąg $a_n = -n^3$ jest zbieżny do $-\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{-n^3} = e \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n^3}\right)^{-1} = 1.$$

Ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)^{n^3-1} = e^{-1} \cdot 1^{-1} = \frac{1}{e}.$$

12.5. Zadania

1. Zbadaj monotoniczność ciągów:

- a) $a_n = 5 - \frac{3}{n}$,
- b) $a_n = \frac{n+2}{n+4}$,
- c) $a_n = 3 - \frac{1}{2-3n}$,
- d) $a_n = \frac{4n+2}{n+5}$.

2. Oblicz granicę ciągu:

- a) $a_n = \frac{n^2 - 3n + 6}{2n^2 + 4n - 7},$
- b) $a_n = \frac{7n(2n+1)}{3n^2 + 5n - 1},$
- c) $a_n = \frac{(\sqrt{2n}-2)(\sqrt{2n}+2)}{(3\sqrt{n}+4)^2},$
- d) $a_n = \sqrt{\frac{5n^3 - 6n}{2n^3 + 6n - 2}}.$

3. Oblicz granicę ciągu:

- a) $a_n = \frac{8^n - 3}{3 - 8^{n-1}},$
- b) $a_n = \frac{4^n + 1}{6 \cdot 4^n + 5},$
- c) $a_n = \frac{(2 \cdot 3^n - 1)^2}{(3^n + 2^n)^2},$
- d) $a_n = \frac{81^n + 9}{(3^{2n} - 3)(3^{2n} + 3)}.$

4. Oblicz granicę ciągu:

- a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1},$
- b) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n},$
- c) $a_n = \sqrt{4n^2 - 2} - \sqrt{4n^2 + 3},$
- d) $a_n = \sqrt{3n^2 + 5n - 1} - \sqrt{3n^2 + n + 3}.$

5. Oblicz granicę ciągu:

- a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n},$
- b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{5}{6}\right)^n + 1} + \left(\frac{6}{5}\right)^n,$
- c) $a_n = \frac{\cos n}{2n^2 - 1},$
- d) $a_n = \frac{3n^2 \cdot \sin(n^2)}{5n^2 + 4n - 1}.$

6. Oblicz granicę ciągu:

- a) $a_n = 3n^2 - 5n + 7,$
- b) $a_n = 6n^4 - 5n^3 + 2n^2 + 4n - 9,$
- c) $a_n = \frac{-3n^5 - 8n^3 + 19}{-8n^2 + 7n - 10},$
- d) $a_n = \frac{6n^5 - 2n^4 + 9n^2 - 6}{(3n^2 - 3)^2},$
- e) $a_n = \sqrt{3n} - \sqrt{2n + 4},$
- f) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n + 5}.$

7. Oblicz granicę ciągu:

a) $b_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n,$

b) $b_n = \left(\frac{n+7}{n}\right)^{n+5},$

c) $b_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-n},$

d) $b_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2}\right)^{3n^2}.$

Rozdział 13

Elementy analizy matematycznej

13.1. Granica funkcji

Pojęcie granicy ciągu liczbowego jest szczególnym przypadkiem pojęcia granicy funkcji liczbowej.

Definicja

Sąsiedztwem $S(x_0)$ o promieniu $\delta > 0$ punktu x_0 nazywamy zbiór
 $S(x_0) = S(x_0; \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

Przedział $(x_0 - \delta, x_0)$ nazywamy *sąsiedztwem lewostronnym*, zaś przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ nazywamy *sąsiedztwem prawostronnym* punktu x_0 .

Definicja (Heinego granicy funkcji w punkcie)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0 . Mówimy, że funkcja f ma granicę w punkcie x_0 , jeśli dla każdego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach $x_n \in S(x_0)$ i zbieżnego do x_0 ciąg wartości $f(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym.

Jeśli ciąg $f(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym do granicy właściwej g , to mówimy, że funkcja f ma granicę właściwą g w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g.$$

Jeśli ciąg $f(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym do granicy niewłaściwej $+\infty$ (lub $-\infty$), to mówimy, że funkcja f ma granicę niewłaściwą $+\infty$ (lub $-\infty$) w punkcie x_0 , co zapisujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \left(\text{lub } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{odpowiednio} \right).$$

Symbolicznie definicję granicy funkcji w punkcie można zapisać następująco:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall_{(x_n)} [x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g],$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall_{(x_n)} [x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty],$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall_{(x_n)} [x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty].$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = x^2 + 3x - 1$ w punkcie $x_0 = 2$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór \mathbb{R} . Weźmy zatem dowolny ciąg argumentów (x_n) , którego wyrazy $x_n \in S(2)$ i który jest zbieżny do liczby 2. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 + 3x_n - 1) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 + 3(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) - 1 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 9.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 1) = 9.$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4}$ w punkcie $x_0 = -2$.

Rozłożymy najpierw mianownik danej funkcji na czynniki:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0, \\ x^2 &= t, t \geq 0, \\ t^2 - 5t + 4 &= 0, \\ \Delta &= 25 - 16 = 9, \sqrt{\Delta} = 3, t_1 = \frac{5-3}{2} = 1, t_2 = \frac{5+3}{2} = 4, \\ (x^2 = 1 \vee x^2 = 4) &\Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = -2), \\ x^4 - 5x^2 + 4 &= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że dziedziną danej funkcji jest zbiór

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Teraz rozłożymy na czynniki licznik danej funkcji:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= 0, \\ x^2 &= t, \\ t^2 - 3t - 4 &= 0, \\ \Delta &= 9 + 16 = 25, \sqrt{\Delta} = 5, t_1 = \frac{3-5}{2} = -1, t_2 = \frac{3+5}{2} = 4, \\ t^2 - 3t - 4 &= (t+1)(t-4), \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= (x^2 + 1)(x^2 - 4), \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= (x^2 + 1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Zatem przy założeniu $x \in \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$ możemy zapisać, że

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{(x^2 + 1)(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}.$$

Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) , którego wyrazy $x_n \in S(-2) \cap D_f$ i który jest zbieżny do liczby -2 . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 1}{(x_n - 1)(x_n + 1)} = \frac{(-2)^2 + 1}{(-2 - 1)(-2 + 1)} = \frac{5}{3}.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{5}{3}.$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{5}{x^4}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że $x_n \in S(0)$ oraz zbieżny do 0 . Ponieważ $x_n^4 > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^4} = +\infty.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{x_n^4} = (\lim_{n \rightarrow \infty} 5) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^4}) = +\infty.$$

Ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x^4} = +\infty.$$

Uwaga

Jeśli w definicji Heinego granicy funkcji f w punkcie x_0 zastąpimy sąsiedztwo $S(x_0)$ tego punktu przez jego sąsiedztwo lewostronne lub prawostronne, to otrzymamy definicję granicy jednostronnej w punkcie x_0 , odpowiednio lewostronnej, co oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x),$$

albo prawostronnej, co oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Przykład

Obliczmy jednostronne granice funkcji $f(x) = \frac{x^3}{x|x|}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Jak łatwo zauważać $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Najpierw wyznaczmy granicę lewostronną. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do lewostronnego sąsiedztwa punktu 0 i zbieżny do 0 . Ponieważ $x_n < 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{x_n |x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{x_n(-x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{x|x|} = 0.$$

Teraz obliczymy granicę prawostronną. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do prawostronnego sąsiedztwa punktu 0 i zbieżny do 0. Ponieważ $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{x_n |x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{x_n \cdot x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x|x|} = 0.$$

Twierdzenie

Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją obie granice jednostronne tej funkcji w tym punkcie i są one sobie równe. Wówczas granica w punkcie jest równa granicom jednostronnym w tym punkcie.

Przykład

Z poprzedniego przykładu wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x|x|} = 0.$$

Definicja (Heinego granicy funkcji w plus nieskończoności)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w przedziale $(a, +\infty)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę w plus nieskończoności, jeśli dla każdego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach $x_n \in (a, +\infty)$ i zbieżnego do $+\infty$, ciąg wartości $f(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym.

Symbolicznie definicję granicy funkcji w plus nieskończoności można zapisać następująco:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall_{(x_n)} [x_n \in (a, +\infty) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A].$$

W powyższym zapisie symbol A może oznaczać zarówno liczbę rzeczywistą g (mówimy wtedy o granicy właściwej), jak i $+\infty$ lub $-\infty$ (mówimy wtedy o granicy niewłaściwej).

Definicja (Heinego granicy funkcji w minus nieskończoności)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej w przedziale $(-\infty, a)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f ma granicę w minus nieskończoności, jeśli dla każdego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach $x_n \in (-\infty, a)$ i zbieżnego do $-\infty$, ciąg wartości $f(x_n)$ jest ciągiem zbieżnym.

Symbolicznie definicję granicy funkcji w minus nieskończoności można zapisać następująco:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall_{(x_n)} [x_n \in (-\infty, a) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A],$$

gdzie symbol A ma takie samo znaczenie jak w definicji granicy funkcji w plus nieskończoności.

Przykład

Obliczmy granice funkcji $f(x) = \frac{x+3}{2x^2-5x-3}$ w plus i minus nieskończoności.

Najpierw ustalmy dziedzinę danej funkcji. Mamy

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 3 &= 0, \\ \Delta &= 25 - (-24) = 49, \sqrt{\Delta} = 7, \\ x_1 &= \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3. \end{aligned}$$

Zatem

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, 3 \right\}.$$

Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) , którego wyrazy $x_n \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ i który jest zbieżny do $-\infty$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3}{2x_n^2 - 5x_n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n} + \frac{3}{x_n^2}}{2 - \frac{5}{x_n} - \frac{3}{x_n^2}} = \frac{0 + 0}{2 - 0 + 0} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{2x^2-5x-3} = 0.$$

Weźmy teraz dowolny ciąg argumentów (x_n) , którego wyrazy $x_n \in (3, +\infty)$ i który jest zbieżny do $+\infty$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3}{2x_n^2 - 5x_n - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n} + \frac{3}{x_n^2}}{2 - \frac{5}{x_n} - \frac{3}{x_n^2}} = \frac{0 + 0}{2 - 0 + 0} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{2x^2 - 5x - 3} = 0.$$

13.2. Podstawowe metody obliczania granic funkcji

W dalszym ciągu granice funkcji będziemy wyznaczać nie bezpośrednio z definicji Heinego (co w wielu przypadkach byłoby skomplikowane), ale z wykorzystaniem różnych twierdzeń mówiących o tych granicach. Warto zauważyć, że metodyka wyznaczania granic funkcji w plus lub minus nieskończoności jest podobna do metodyki wyznaczania granic ciągów.

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest stała w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 , tzn. dla każdego $x \in S(x_0)$ zachodzi $f(x) = c$ dla pewnej ustalonej liczby rzeczywistej c , to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c.$$

Uwaga

Powyższe twierdzenie jest prawdziwe również w przypadkach granic jednostronnych w punkcie oraz granic w plus lub minus nieskończoności.

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 oraz dla każdego $x \in S(x_0)$ mamy $f(x) = x$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0.$$

Twierdzenie (o arytmetyce granic właściwych funkcji w punkcie)

Jeśli funkcje f oraz g mają granice właściwe w punkcie x_0 , to:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$

$$d) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ o ile } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0,$$

$$e) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ o ile } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ oraz } f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in S(x_0)$$

Uwaga

Twierdzenie o arytmetyce granic właściwych funkcji jest prawdziwe również w przypadkach granic jednostronnych w punkcie oraz granic w plus lub minus nieskończoności.

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15}$ w punkcie $x_0 = 5$.

Rozkładając mianownik danej funkcji na czynniki, otrzymujemy

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3).$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} - \{3, 5\}$, czyli funkcja ta jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu 5. Rozkładając ponadto licznik danej funkcji na czynniki, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x - 5)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 5}{x - 3} = \frac{5 + 5}{5 - 3} = \frac{10}{2} = 5.$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zauważmy, że $D_f = (-4, 0) \cup (0, 1)$, czyli dana funkcja jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu 0. Stosując wzór $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{4+x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)(\sqrt{4+x} + 2)}{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)(\sqrt{1-x} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1-x) - 1)(\sqrt{4+x} + 2)}{((4+x) - 4)(\sqrt{1-x} + 1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(\sqrt{4+x} + 2)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{4+x} + 2)}{(\sqrt{1-x} + 1)} = \\
 &= \frac{-(\sqrt{4+0} + 2)}{\sqrt{1-0} + 1} = -2.
 \end{aligned}$$

Twierdzenie

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} x &= -\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0 \text{ dla } a \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 7}{3x^2 + 2x + 1}$ w plus i minus nieskończoności.

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R}$. Po wyłączeniu x^2 przed nawias w liczniku i mianowniku, mamy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

Postępując analogicznie, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x - 7}{3x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{3}.$$

Twierdzenie

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x &= 0, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1.
 \end{aligned}$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{\sin^2 2x}{8x^2}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1,$$

to mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{8x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)(\sin 2x)}{2 \cdot 2x \cdot 2x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Jeśli $a > 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = \frac{3^x - 5^x}{3x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{3x} &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1 - (5^x - 1)}{x} \right) = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{3} (\ln 3 - \ln 5) = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy:

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Dane są trzy funkcje f, g i h , określone w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0 . Jeśli

- a) $\forall_{x \in S(x_0)} f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$,

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g.$$

Uwaga

Twierdzenie o trzech funkcjach jest prawdziwe również w przypadkach granic jednostronnych w punkcie oraz granic w plus lub minus nieskończoności.

Przykład

Obliczmy granice funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ w plus i minus nieskończoności.

Najpierw obliczmy granicę danej funkcji w plus nieskończoności. Zauważmy, że skoro $x \rightarrow +\infty$, to bez utraty ogólności możemy założyć, że $x > 0$. Ponieważ zbiór wartości funkcji sinus jest przedziałem $(-1, 1)$, to otrzymujemy kolejno dla dowolnego $x > 0$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1, \\ \frac{-1}{x} &\leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

to na mocy twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Uwaga

Wartości granic funkcji elementarnych, takich jak np. funkcje potęgowe, funkcje trygonometryczne, funkcje wykładnicze czy funkcje logarytmiczne, odczytujemy z ich wykresów.

Przykład

Z wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = 2^x$ odczytujemy, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

Twierdzenie (o granicy funkcji złożonej)

Jeśli funkcja f ma granicę właściwą w punkcie x_0 i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0, \quad f(x) \neq u_0 \text{ dla dowolnego } x \in S(x_0)$$

oraz funkcja g ma granicę właściwą w punkcie u_0 i

$$\lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = g,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g.$$

Uwaga

Twierdzenie o granicy funkcji złożonej można uogólnić na przypadki pozostały typów granic funkcji.

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $h(x) = \sin^2 x$ w punkcie $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Zauważmy, że $h(x) = (g \circ f)(x)$, gdzie $f(x) = \sin x$, $g(u) = u^2$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2} \text{ oraz } \sin x \neq \frac{1}{2} \text{ w sąsiedztwie punktu } \frac{\pi}{6},$$

a ponadto

$$\lim_{u \rightarrow \frac{1}{2}} u^2 = \frac{1}{4},$$

to ostatecznie

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Przykład

Obliczmy granicę funkcji $h(x) = \sin 2^x$ w minus nieskończoności.

Zauważmy, że $h(x) = (g \circ f)(x)$, gdzie $f(x) = 2^x$, $g(u) = \sin u$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0, 2^x \neq 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R} \text{ oraz } \lim_{u \rightarrow 0} \sin u = 1,$$

to otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin 2^x = 1.$$

13.3. Ciągłość funkcji

Definicja

Otoczeniem $O(x_0)$ o promieniu $\delta > 0$ punktu x_0 nazywamy zbiór

$$O(x_0) = O(x_0; \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Przedział $(x_0 - \delta, x_0)$ nazywamy *otoczeniem lewostronnym*, zaś przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ nazywamy *otoczeniem prawostronnym* punktu x_0 .

Definicja (funkcji ciągłej w punkcie)

Dana jest funkcja f określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 . Mówimy, że *funkcja f jest ciągła w punkcie x_0* , jeśli ma w tym punkcie granicę właściwą oraz zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uwaga

Jeśli w definicji funkcji f ciągłej w punkcie x_0 zastąpimy otoczenie $O(x_0)$ tego punktu przez jego otoczenie lewostronne lub prawostronne, zaś granicę funkcji f w punkcie x_0 przez jej granicę lewostronną lub prawostronną w tym punkcie, to otrzymamy definicję funkcji *jednostronne ciągłej w punkcie x_0* , odpowiednio *lewostronne lub prawostronne*.

Twierdzenie

Funkcja f , określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 , jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie.

Przykład

Zbadajmy ciągłość funkcji f zadanej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3} & \text{dla } x \leq 2, \\ \frac{x+4}{x+2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

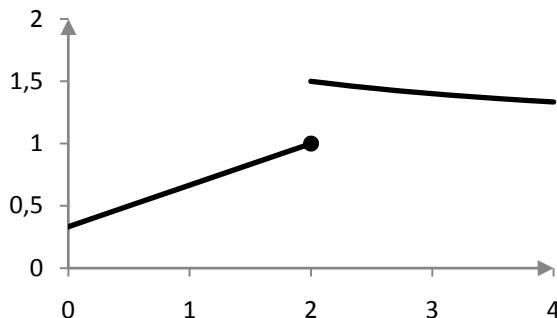
w punkcie $x_0 = 2$.

Obliczmy granice jednostronne tej funkcji w punkcie 2. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{3} = \frac{2+1}{3} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{x+2} = \frac{2+4}{2+2} = \frac{3}{2}.$$

Ponieważ granice jednostronne są różne, to nie istnieje granica danej funkcji w punkcie $x_0 = 2$ i tym samym ta funkcja nie jest ciągła w tym punkcie. Graficznie przedstawia się to jako „rozerwanie wykresu” danej funkcji w punkcie $x_0 = 2$ (patrz rysunek 13.1).



Rysunek 13.1. „Rozerwanie wykresu” przykładowej funkcji w punkcie nieciągłości

Równocześnie zauważmy, że $f(2) = 1$, a zatem

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2),$$

czyli dana funkcja jest lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Oczywiście nie jest w tym punkcie prawostronnie.

Definicja

Funkcja f jest *ciągła w przedziale otwartym* (a, b) , jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

Funkcja f jest *ciągła w przedziale domkniętym* $\langle a, b \rangle$, jeśli jest ciągła w przedziale (a, b) oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie $x_0 = a$ i lewostronnie ciągła w punkcie $x_0 = b$.

Analogicznie definiujemy funkcje ciągłe w przedziałach jednostronnie domkniętych.

Przykład

Pokażemy, że funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0, a \neq 1$, jest funkcją ciągłą w zbiorze $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Trzeba pokazać, że dana funkcja jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, tzn. że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Jeśli zapiszemy $x = x_0 + h$, to otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0+h} = \lim_{h \rightarrow 0} (a^{x_0} \cdot a^h) = a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} a^h = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0},$$

co kończy dowód.

Definicja

Mówimy, że *funkcja f jest ciągła*, jeśli jest ciągła w każdym podprzedziale swojej dziedziny.

Przykład

Z powyższego przykładu wnioskujemy, że funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, jest funkcją ciągłą.

13.4. Podstawowe własności funkcji ciągłych

Przedstawimy tutaj parę podstawowych twierdzeń o funkcjach ciągłych.

Twierdzenie

Suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie rosnąca (lub malejąca) i ciągła w pewnym przedziale X . Wówczas w odpowiednim przedziale $Y = f(X)$ wartości tej funkcji istnieje funkcja odwrotna f^{-1} , która także jest rosnąca (odpowiednio malejąca) i ciągła.

Twierdzenie

Każda funkcja elementarna jest funkcją ciągłą. Przypomnijmy, że do funkcji elementarnych zaliczamy m.in. wielomiany, funkcje wymierne, funkcje trygonometryczne, funkcje wykładnicze oraz funkcje logarytmiczne.

Przykład

Zbadajmy, dla jakich wartości parametrów a oraz b ($a, b \in \mathbb{R}$) funkcja f , zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + 6 & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{dla } x \in (1, 2) \\ bx^2 - 1 & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

jest ciągła w zbiorze \mathbb{R} .

Najpierw zbadamy ciągłość danej funkcji w punkcie $x_0 = 1$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax + 6) = 2a + 6, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x+1) = -2, \\ f(1) &= 2a + 6. \end{aligned}$$

Zatem aby dana funkcja był ciągła w punkcie $x_0 = 1$, musi być

$$\begin{aligned} 2a + 6 &= -2, \\ a &= -4. \end{aligned}$$

Teraz zbadamy ciągłość danej funkcji w punkcie $x_0 = 2$. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -3, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx^2 - 1) = 4b - 1, \\ f(2) &= 4b - 1. \end{aligned}$$

Zatem aby dana funkcja był ciągła w punkcie $x_0 = 2$, musi być

$$\begin{aligned} 4b - 1 &= -3, \\ b &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem aby zapewnić ciągłość danej funkcji w punktach 1 oraz 2, powinna ona mieć wzór

$$f(x) = \begin{cases} -8x + 6 & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x^2 - 1}{1 - x} & \text{dla } x \in (1, 2) \\ -\frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja zadana powyższym wzorem jest ciągła w przedziale $(-\infty, 1)$ (jako funkcja liniowa), w przedziale $(1, 2)$ (jako funkcja wymierna), w przedziale $(2, +\infty)$ (jako funkcja kwadratowa) oraz oczywiście w punktach 1 oraz 2. Zatem jest funkcją ciągłą w zbiorze \mathbb{R} .

Odpowiedź:

Funkcja zadana podanym wzorem jest ciągła w zbiorze \mathbb{R} dla $a = -4$ oraz $b = -\frac{1}{2}$.

Twierdzenie (Weierstrassa o osiąganiu kresów)

Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ osiąga w tym przedziale swoją wartość najmniejszą m i największą M , tzn. istnieją liczby $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$ takie, że $f(x_1) = m$ oraz $f(x_2) = M$.

Przykład

Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ w przedziale domkniętym $\langle 2, e^2 \rangle$.

Funkcja f jest ilorazem funkcji $y = x$ przez funkcję $y = \ln x$, z których każda jest funkcją ciągłą w przedziale $(0, +\infty)$. Zatem funkcja f jest ciągła w przedziale $(0, +\infty)$, a tym bardziej w przedziale $\langle 2, e^2 \rangle$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że istnieją liczby $x_1, x_2 \in \langle 2, e^2 \rangle$ takie, że $f(x_1) = m$ oraz $f(x_2) = M$, gdzie m to najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 2, e^2 \rangle$, natomiast M to największa wartość tej funkcji w tym przedziale. Żeby wyznaczyć x_1, x_2, m oraz M , trzeba użyć metod rachunku różniczkowego funkcji, a dokładniej zastosować procedurę wyznaczania ekstremów globalnych funkcji. Procedurę tę przedstawimy w części pt. *Ekstrema lokalne*.

13.5. Pochodna funkcji

Kolejne części poświęcimy na omówienie podstaw rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Kluczowym pojęciem rachunku różniczkowego jest pojęcie pochodnej funkcji.

Definicja

Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 . Niech $h \neq 0$ będzie liczbą spełniającą warunek $x_0 + h \in O(x_0)$. Wyrażenie

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 , odpowiadającym zmianie h argumentu.

Definicja (pochodnej funkcji w punkcie)

Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 . Niech $h \neq 0$ będzie liczbą spełniającą warunek $x_0 + h \in O(x_0)$. Jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

to granicę tę nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy $f'(x_0)$. O funkcji f mówimy wtedy, że jest *różniczkowalna w punkcie x_0* . Jeśli powyższa granica nie istnieje bądź jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

Uwaga

Zamiast oznaczenia $f'(x_0)$ można używać również oznaczeń

$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad \text{lub} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Uwaga

Jeśli w definicji pochodnej funkcji f w punkcie x_0 zastąpimy otoczenie $O(x_0)$ tego punktu przez jego otoczenie lewostronne lub prawostronne, zaś granicę ilorazu różnicowego przez jego granicę lewostronną lub prawostronną, to otrzymamy definicję *pochodnej jednostronnej funkcji f w punkcie x_0* , odpowiednio *lewostronnej* lub *prawostronnej*. Te pochodne jednostronne będziemy oznaczać odpowiednio $f'_-(x_0)$ oraz $f'_+(x_0)$.

Twierdzenie

Funkcja f , określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 , jest różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne jednostronne tej funkcji w tym punkcie oraz zachodzi równość

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Wówczas

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Przykład

Zbadajmy różniczkowalność funkcji $f(x) = 2x|x|$ w punkcie $x_0 = 0$.

Najpierw wyznaczymy iloraz różnicowy danej funkcji w danym punkcie:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{2h|h| - 0}{h} = 2|h|.$$

Teraz wyznaczamy granice jednostronne tego ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} 2|h| = \lim_{h \rightarrow 0^-} -2h = 0 = f'_-(0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} 2|h| = \lim_{h \rightarrow 0^+} 2h = 0 = f'_+(0).$$

Widzimy zatem, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2|h| = 0.$$

W konsekwencji dana funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 = 0$ oraz $f'(0) = 0$.

Twierdzenie

Jeśli funkcja f , określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 , jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest ciągła w tym punkcie.

Wniosek

Jeśli funkcja f , określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 , nie jest ciągła w punkcie x_0 , to nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Przykład

Przypomnijmy, że funkcja f zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3} & \text{dla } x \leq 2 \\ \frac{x+4}{x+2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$. Zatem ta funkcja nie jest również różniczkowalna w tym punkcie.

Definicja

Funkcja f jest *różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b)* , jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

Funkcja f jest *różniczkowalna w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$* , jeśli jest różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz istnieją jej pochodna prawostronna w punkcie $x_0 = a$ i pochodna lewostronna w punkcie $x_0 = b$.

Analogicznie definiujemy funkcje różniczkowalne w przedziałach jednostronne domkniętych.

Definicja (funkcji pochodnej)

Niech A będzie maksymalnym zbiorem tych argumentów x_0 funkcji f , dla których istnieje $f'(x_0)$. *Funkcją pochodną funkcji f* nazywamy funkcję $f': A \rightarrow \mathbb{R}$, która każdemu argumentowi x_0 przypisuje liczbę $f'(x_0)$.

W dalszym ciągu zbiór A występujący w definicji funkcji pochodnej będziemy oznaczali zwyczajowo $D_{f'}$, (dziedzina funkcji pochodnej).

Uwaga

Funkcję pochodną f' funkcji f można również oznaczać $\frac{df(x)}{dx}$ lub $\frac{df}{dx}$.

Przykład

Wyznaczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0, a \neq 1$.

Dziedziną danej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$. Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Obliczamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0} \cdot \ln a.$$

Zatem $f'(x_0) = a^{x_0} \cdot \ln a$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$. Stąd

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1, \quad D_{f'} = \mathbb{R}.$$

W kolejnej tabeli zebraliśmy wzory na funkcje pochodne ważniejszych funkcji elementarnych (tabela 13.1). Jeśli w ostatniej kolumnie nie ma żadnych uwag, oznacza to, że dziedzina funkcji oraz dziedzina funkcji pochodnej są identyczne i wynoszą $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.

Tabela 13.1. Funkcje pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

Funkcja	Funkcja pochodna	Uwagi
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$c \in \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	D_f i $D_{f'}$, zależą od $\alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, D_f = D_{f'} = (0, +\infty)$

Funkcja	Funkcja pochodna	Uwagi
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = D_{f'} = (0, +\infty)$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

13.6. Podstawowe metody obliczania pochodnych funkcji

Ponieważ wyznaczanie funkcji pochodnej danej funkcji tylko z użyciem definicji może być skomplikowane, poniżej przedstawimy parę twierdzeń dotyczących wyznaczania funkcji pochodnych.

Twierdzenie

Dane są funkcje f i g . Dla każdego $x \in D_f \cap D_g$, prawdziwe są następujące równości:

- a) $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
- b) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
- c) $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$,
- d) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
- e) $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, przy założeniu $g(x) \neq 0$.

Wzór d) nazywamy *wzorem na pochodną iloczynu*, zaś wzór e) zwiemy *wzorem na pochodną ilorazu*.

Przykład

Wyznaczmy funkcje pochodne następujących funkcji:

- a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x - 9$,
- b) $f(x) = (-2x^2 + 5x - 1)(x^3 + 2)$,
- c) $f(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 4x^2 + 1}$.

ad a)

Zauważmy, że $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= [5x^3 - 3x^2 + 7x - 9]' = 5[x^3]' - 3[x^2]' + 7[x]' - [9]' = \\ &= 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 15x^2 - 6x + 7. \end{aligned}$$

ad b)

Oczywiście $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(-2x^2 + 5x - 1)(x^3 + 2)]' = \\ &= [-2x^2 + 5x - 1]' \cdot (x^3 + 2) + (-2x^2 + 5x - 1) \\ &\quad \cdot [x^3 + 2]' = \\ &= (-4x + 5) \cdot (x^3 + 2) + (-2x^2 + 5x - 1) \cdot 3x^2 = \\ &= -4x^4 - 8x + 5x^3 + 10 - 6x^4 + 15x^3 - 3x^2 = \\ &= -10x^4 + 20x^3 - 3x^2 - 8x + 10. \end{aligned}$$

ad c)

Przy założeniu $x^3 - 4x^2 + 1 \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{3x^2}{x^3 - 4x^2 + 1} \right]' = \\ &= \frac{[3x^2]' \cdot (x^3 - 4x^2 + 1) - 3x^2 \cdot [x^3 - 4x^2 + 1]'}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{6x(x^3 - 4x^2 + 1) - 3x^2(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x - 9x^4 + 24x^3}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeśli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x , zaś funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g(x)$, to funkcja złożona $f \circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x oraz

$$[f \circ g]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykład

Wyznaczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = \cos^3 x$.

Oczywiście $D_f = \mathbb{R}$. Zauważmy, że $f = h \circ g$, gdzie $h(u) = u^3$ oraz $g(x) = \cos x$. Ponieważ $h'(u) = 3u^2$ oraz $g'(x) = -\sin x$, to z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x) = -3 \sin x \cos^2 x.$$

Zauważmy jeszcze, że $D_f = \mathbb{R}$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej można także stosować do obliczania funkcji pochodnej funkcji złożonej z więcej niż dwóch funkcji.

Przykład

Wyznaczmy funkcję pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin^2 x}$.

Jak łatwo zauważyc $D_f = \mathbb{R}$. Mamy $f = h \circ g$, gdzie $h(u) = e^{u^2}$ oraz $g(x) = \sin x$. Ponadto $h = k \circ l$, gdzie $k(z) = e^z$ oraz $l(u) = u^2$. Oczywiście $k'(z) = e^z$ oraz $l'(u) = 2u$. Wyznaczmy najpierw $h'(u)$:

$$h'(u) = k'(l(u)) \cdot l'(u) = k'(u^2) \cdot 2u = e^{u^2} \cdot 2u = 2ue^{u^2}.$$

Pamiętając, że $g'(x) = [\sin x]' = \cos x$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) = h'(\sin x) \cdot \cos x = 2 \sin x e^{\sin^2 x} \cdot \cos x = \\ &= 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Łatwo zauważamy, że $D_f = \mathbb{R}$.

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej).

Dana jest funkcja f rosnąca (lub malejąca) i różniczkowalna w przedziale X oraz taka, że $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in X$. Wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w odpowiednim przedziale $Y = f(X)$ wartości funkcji f . Ponadto dla dowolnego $y = f(x)$ prawdziwa jest równość

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przykład

Wyznaczmy funkcję pochodną funkcji odwrotnej do funkcji $f(x) = x^5 - 3$, określonej na przedziale $(0, +\infty)$.

Łatwo sprawdzić, że dana funkcja jest w przedziale $(0, +\infty)$ rosnąca. Ponadto jest ona w tym przedziale różniczkowalna oraz

$$f'(x) = [x^5 - 3]' = 5x^4,$$

czyli dla dowolnego $x \in (0, +\infty)$ zachodzi $f'(x) \neq 0$. Zatem z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej funkcja odwrotna do danej jest różniczkowalna w przedziale $Y = f((0, +\infty)) = (-3, +\infty)$ oraz

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{5x^4}.$$

Ponieważ

$$y = x^5 - 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{y+3},$$

to ostatecznie otrzymujemy

$$[f^{-1}]'(y) = \frac{1}{5(\sqrt[5]{y+3})^4} \text{ dla dowolnego } y \in (-3, +\infty).$$

13.7. Zastosowania pochodnych

Poniżej przedstawimy parę podstawowych zastosowań rachunku różniczkowego.

13.7.1. Prosta styczna do wykresu funkcji

Uwaga

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 interpretujemy geometrycznie jako współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$.

Definicja

Dana jest funkcja f określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 i różnickowalna w tym punkcie. *Prostą styczną* do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą задaną równaniem

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład

Wyznaczmy równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ w punkcie $P(x_0, 1)$.

Zauważmy, że $D_f = \langle 0, 2 \rangle$. Najpierw wyznaczmy x_0 :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sqrt{2x_0 - x_0^2} = 1, \\ 2x_0 - x_0^2 &= 1, \\ -x_0^2 + 2x_0 - 1 &= 0, \\ \Delta &= 4 - 4 = 0, \end{aligned}$$

$$x_0 = -\frac{2}{-2} = 1.$$

Teraz wyznaczmy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = [\sqrt{2x - x^2}]' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot [2x - x^2]' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Mamy $D_{f'} = (0, 2)$. Obliczamy $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1 - 1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}} = 0.$$

Zatem szukane równanie prostej stycznej to

$$\begin{aligned} y - 1 &= 0 \cdot (x - 1), \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy współrzędne takiego punktu A , że prosta styczna do wykresu funkcji $f(x) = \ln(1 - 2x)$ w punkcie A jest równoległa do prostej $k: 5x + 2y = 0$.

Mamy oczywiście $D_f = (-\infty, \frac{1}{2})$. Najpierw zapiszmy prostą k w postaci kierunkowej:

$$k: 2y = -5x,$$

$$k: y = -\frac{5}{2}x.$$

Zatem współczynnik kierunkowy szukanej prostej stycznej powinien wynosić $-\frac{5}{2}$.

Wyznaczmy teraz funkcję pochodną funkcji f :

$$f'(x) = [\ln(1 - 2x)]' = \frac{1}{1 - 2x} \cdot [1 - 2x]' = \frac{-2}{1 - 2x},$$

przy czym $D_{f'} = D_f = (-\infty, \frac{1}{2})$. Trzeba znaleźć takie $x_0 \in (-\infty, \frac{1}{2})$, które spełnia równość

$$f'(x_0) = -\frac{5}{2}.$$

Mamy zatem

$$\frac{-2}{1 - 2x_0} = \frac{-5}{2},$$

$$-5 + 10x_0 = -4,$$

$$x_0 = \frac{1}{10}.$$

Obliczmy jeszcze $f(x_0)$:

$$f(x_0) = \ln\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{10}\right) = \ln\frac{4}{5}.$$

Zatem szukany punkt A ma współrzędne $A\left(\frac{1}{10}, \ln\frac{4}{5}\right)$.

13.7.2. Funkcja pochodna a monotoniczność funkcji

Twierdzenie (Lagrange'a)

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$ oraz różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) , to istnieje taki punkt $x_0 \in (a, b)$, że

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Lagrange'a jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Dana jest funkcja f różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) . Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ mamy:

- a) $f'(x) = 0$, to funkcja f jest stała w przedziale (a, b) .
- b) $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b) ,
- c) $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b) .

Przykład

Wyznaczmy otwarte przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{-x^2+5x+4}{x^2-5x+4}$.

Na początek ustalmy dziedzinę danej funkcji. Zakładamy, że $x^2 - 5x + 4 \neq 0$. Mamy

$$\Delta = 25 - 16 = 9, \sqrt{\Delta} = 3, x_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1, x_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4.$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} - \{1, 4\}$.

Zauważmy, że

$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{-(x^2 - 5x - 4) + 8}{x^2 - 5x + 4} = -1 + \frac{8}{x^2 - 5x + 4}$$

(co uprości obliczenie funkcji pochodnej). Zatem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[-1 + \frac{8}{x^2 - 5x + 4} \right]' = \frac{0 \cdot (x^2 - 5x + 4) - 8(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \\ &= \frac{-16x + 40}{(x^2 - 5x + 4)^2}. \end{aligned}$$

Oczywiście $D_{f'} = D_f$. Ponieważ $(x^2 - 5x + 4)^2 > 0$ dla każdego $x \in D_{f'}$, więc

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-16x + 40}{(x^2 - 5x + 4)^2} > 0 \Leftrightarrow (-16x + 40 > 0 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right), \\ f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{-16x + 40}{(x^2 - 5x + 4)^2} < 0 \Leftrightarrow (-16x + 40 < 0 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right) \cup (4, +\infty). \end{aligned}$$

Zatem funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $\left(1, \frac{5}{2}\right)$, natomiast jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$ oraz $(4, +\infty)$.

13.7.3. Ekstrema lokalne funkcji

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ *minimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie $O(x_0)$ punktu x_0 takie, że

$$O(x_0) \subseteq D_f \text{ oraz } \forall_{x \in O(x_0)} f(x) \geq f(x_0).$$

Definicja

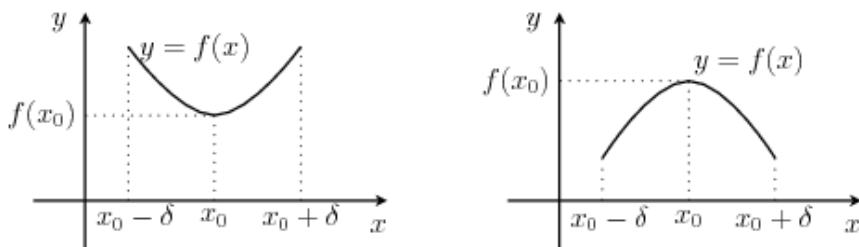
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ *maksimum lokalne*, jeśli istnieje otoczenie $O(x_0)$ punktu x_0 takie, że

$$O(x_0) \subseteq D_f \text{ oraz } \forall_{x \in O(x_0)} f(x) \leq f(x_0).$$

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ *ekstremum lokalne*, jeśli ma tam minimum lub maksimum lokalne.

Interpretację geometryczną minimum i maksimum lokalnego funkcji przedstawia Rysunek .



Rysunek 13.2. Minimum lokalne funkcji i maksimum lokalne funkcji

Twierdzenie (Fermata)

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Uwaga

Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w tych punktach, w których jest różniczkowalna i jej pochodna wynosi zero, albo w tych punktach, w których funkcja jest określona, ale jej pochodna nie istnieje. Wymienione punkty nazywamy *punktami krytycznymi* tej funkcji (albo inaczej punktami „podjrzymi o ekstremum”).

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $O(x_0)$ punktu x_0 , ciągła w punkcie x_0 oraz różniczkowalna w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ tego punktu. Niech ponadto x_0 będzie punktem krytycznym tej funkcji. Jeżeli:

- a) funkcja pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0 ,
- b) funkcja pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z ujemnego na dodatni, to funkcja f ma minimum lokalne w punkcie x_0 ,
- c) funkcja pochodna f' nie zmienia znaku w punkcie x_0 , to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0 .

Uwaga

Zdanie „funkcja pochodna f' zmienia w punkcie x_0 znak z dodatniego na ujemny” można zapisać symbolicznie:

$$\exists_{\delta>0} [\forall_{x \in (x_0-\delta, x_0)} f'(x) > 0 \wedge \forall_{x \in (x_0, x_0+\delta)} f'(x) < 0].$$

Analogicznie zapisujemy pozostałe sformułowania z powyższego twierdzenia.

Przykład

Wyznaczmy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = |x - 5|$.

Wiemy, że $D_f = \mathbb{R}$. Funkcję f możemy równoważnie zapisać jako

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{dla } x \in (-\infty, 5), \\ x - 5 & \text{dla } x \in (5, +\infty). \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty, 5), \\ 1 & \text{dla } x \in (5, +\infty) \end{cases}$$

oraz że w punkcie $x_0 = 5$ dana funkcja jest ciągła i nie jest różniczkowalna. Zatem jedynym punktem krytycznym funkcji f jest punkt $x_0 = 5$. Ponieważ funkcja pochodna f' zmienia w tym punkcie znak z ujemnego na dodatni, to funkcja f ma w punkcie $x_0 = 5$ minimum lokalne równe $f(5) = 0$.

Przykład

Wyznaczmy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = (1 - x^2) \cdot \sqrt{x + 1}$.

Jak łatwo sprawdzić $D_f = (-1, +\infty)$. Obliczmy pochodną danej funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [1 - x^2]' \cdot \sqrt{x + 1} + (1 - x^2) \cdot [\sqrt{x + 1}]' = \\ &= -2x\sqrt{x + 1} + (1 - x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} = \\ &= \frac{-4x(x + 1) + 1 - x^2}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{-5x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{x + 1}}. \end{aligned}$$

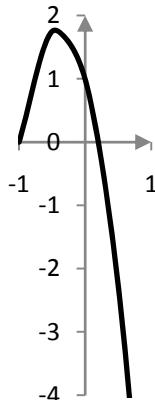
Zatem $D_{f'} = (-1, +\infty)$. Punkt $x_0 = -1$ jest wprawdzie punktem krytycznym, ale z oczywistych względów nie może być ekstremum lokalnym danej funkcji. Wyznaczmy zatem miejsca zerowe funkcji pochodnej:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-5x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{x + 1}} = 0 \Leftrightarrow (-5x^2 - 4x + 1 = 0 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\left(x = \frac{1}{5} \vee x = -1 \right) \wedge x \in D_{f'} \right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

W konsekwencji drugim (i ostatnim) punktem krytycznym danej funkcji jest $x_0 = \frac{1}{5}$. Ponieważ dla $x \in (-1, +\infty)$ mamy $2\sqrt{x + 1} > 0$, to znak funkcji pochodnej zależy wyłącznie od znaku jej licznika, tzn. funkcji $g(x) =$

$-5x^2 - 4x + 1$. Po przeanalizowaniu wykresu funkcji g (patrz Rysunek), otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}f'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{5}\right), \\f'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{5}, +\infty\right).\end{aligned}$$



Rysunek 13.3. Szkic wykresu funkcji $g(x) = -5x^2 - 4x + 1$

Zatem w punkcie $x_0 = \frac{1}{5}$ funkcja f ma lokalne maksimum równe

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{24\sqrt{30}}{125}.$$

13.7.4. Ekstrema globalne

Definicja

Minimum globalnym funkcji w zbiorze A nazywamy najmniejszą wartość tej funkcji w tym zbiorze.

Definicja

Maksimum globalnym funkcji w zbiorze A nazywamy największą wartość tej funkcji w tym zbiorze.

Definicja

Ekstremum globalnym funkcji w zbiorze A nazywamy jej minimum lub maksimum globalne w tym zbiorze.

Nas będzie interesował przypadek, gdy zbiór A jest przedziałem domkniętym, zaś dana funkcja jest funkcją ciągłą. Z twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów wiemy, że w tym przypadku funkcja przyjmuje swoje ekstrema globalne dla pewnych argumentów z danego przedziału. O tym, jak znaleźć te argumenty i jak znaleźć wartości ekstremów globalnych, mówi następujący fakt.

Fakt

Aby wyznaczyć ekstrema globalne funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, należy:

- 1) wyznaczyć punkty krytyczne danej funkcji w przedziale otwartym (a, b) ,
- 2) obliczyć wartości funkcji w tych punktach krytycznych,
- 3) obliczyć wartości funkcji na końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ (tzn. $f(a)$ i $f(b)$),
- 4) spośród obliczonych w punktach 2) i 3) wartości funkcji należy wybrać liczbę najmniejszą (jest ona szukanym minimum globalnym) oraz liczbę największą (jest ona szukanym maksimum globalnym).

Przykład

Wyznaczmy ekstrema globalne funkcji $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ w przedziale domkniętym $\langle 2, e^2 \rangle$.

Zakładając, że $(x > 0 \wedge \ln x \neq 0)$, otrzymujemy, że $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Wyznaczmy funkcję pochodną danej funkcji:

$$f'(x) = \left[\frac{x}{\ln x} \right]' = \frac{[\ln x] \cdot 1 - x \cdot [\ln x]'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

- 1) Ponieważ $D_{f'} = D_f$, to punktów krytycznych funkcji f szukamy jedynie wśród miejsc zerowych jej pochodnej. Mamy

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1 = 0 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\ln x = 1 \wedge x \in D_{f'}) \Leftrightarrow x = e. \end{aligned}$$

Oczywiście $e \in (2, e^2)$. Zatem jedynym punktem krytycznym danej funkcji w przedziale $\langle 2, e^2 \rangle$ jest $x_0 = e$.

- 2) Obliczamy wartość funkcji w punkcie krytycznym:

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e.$$

3) Obliczamy wartości danej funkcji na końcach przedziału $\langle 2, e^2 \rangle$:

$$f(2) = \frac{2}{\ln 2},$$

$$f(e^2) = \frac{e^2}{\ln e^2} = \frac{e^2}{2 \ln e} = \frac{e^2}{2}.$$

4) Przy użyciu kalkulatora sprawdzamy, że $e < \frac{2}{\ln 2} < \frac{e^2}{2}$.

Zatem minimum globalne danej funkcji w przedziale $\langle 2, e^2 \rangle$ wynosi e (dla $x = e$), natomiast maksimum globalne danej funkcji w tym przedziale jest równe $\frac{e^2}{2}$ (dla $x = e^2$).

13.8. Całka nieoznaczona

Do tej pory wyznaczaliśmy funkcję pochodną podanej funkcji. Obecnie zajmiemy się zagadnieniem znajdowania funkcji, jeśli mamy daną jej funkcję pochodną. Zagadnienie takie nazywamy *calkowaniem*.

Definicja

Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale A , jeśli dla każdego $x \in A$ zachodzi równość

$$F'(x) = f(x).$$

Uwaga

Jeśli przedział A jest jednostronnie lub obustronnie domknięty, to pochodną $F'(x)$ na końcach należących do tego przedziału rozumiemy jako odpowiednią pochodną jednostronną.

Przykład

Jak łatwo sprawdzić, funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 2x$ jest np. funkcja $F(x) = x^2$, zaś funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \cos x$ jest np. $F(x) = \sin x$.

Definicja

Jeśli dana funkcja f ma funkcję pierwotną F w przedziale A , to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna* w przedziale A .

Twierdzenie

Jeśli funkcja jest ciągła w danym przedziale, to jest w tym przedziale całkowalna.

Wniosek

Każda funkcja elementarna jest całkowalna w dowolnym podprzedziale swojej dziedziny.

Twierdzenie

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f w przedziale A . Wtedy każda funkcja pierwotna funkcji f jest postaci $F(x) + C$, gdzie C jest pewną liczbą rzeczywistą.

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f w pewnym przedziale będziemy nazywać zbiór jej wszystkich funkcji pierwotnych w tym przedziale. Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$. Zatem

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f , C jest dowolną liczbą rzeczywistą, zwaną *stałą całkowania*. Funkcję f zwiemy *funkcją podcałkową*, zmienną x zwiemy *zmienną całkowania*, zaś dx nazywamy *różniczką zmiennej całkowania*.

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych przedstawia tabela 13.2, gdzie zawsze $C \in \mathbb{R}$. Jeśli w ostatniej kolumnie nie ma żadnych uwag, to przyjmujemy że $x \in \mathbb{R}$.

Tabela 13.2. Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Funkcja i jej całka nieoznaczona	Uwagi
$\int 0 dx = C$	
$\int 1 dx = x + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x$ zależy od α

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$x \neq 0$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1$
$\int e^x dx = e^x + C$	
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	
$\int \cos x dx = \sin x + C$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

13.9. Podstawowe metody wyznaczania całek nieoznaczonych

Przedstawimy teraz parę twierdzeń, które ułatwiają nam wyznaczanie całek nieoznaczonych.

Twierdzenie (o liniowości całki nieoznaczonej).

Jeśli funkcje f i g są całkowalne w pewnym przedziale $A \subseteq D_f \cap D_g$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, to

$$\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int f(x) dx + \beta \cdot \int g(x) dx.$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 2x - 9$.

Mamy

$$\begin{aligned}
 & \int (5x^3 - 7x^2 + 2x - 9) \, dx = \\
 &= 5 \int x^3 \, dx - 7 \int x^2 \, dx + 2 \int x \, dx - 9 \int 1 \, dx = \\
 &= 5 \cdot \frac{x^4}{4} - 7 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 9 \cdot x + C = \\
 &= \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + x^2 - 9x + C.
 \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = \frac{-x^4 + 13x^2 - 36}{x^2 - x - 6}$.

Najpierw rozłożymy na czynniki wielomiany, które znajdują się w liczniku i mianowniku danej funkcji.

$$\begin{aligned}
 W(x) &= x^2 - x - 6, \\
 \Delta &= 1 - (-24) = 25, \sqrt{\Delta} = 5, x_1 = \frac{1-5}{2} = -2, x_2 = \frac{1+5}{2} = 3, \\
 x^2 - x - 6 &= (x+2)(x-3).
 \end{aligned}$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

$$\begin{aligned}
 V(x) &= -x^4 + 13x^2 - 36, \\
 t &= x^2, \\
 V(t) &= -t^2 + 13t - 36, \\
 \Delta &= 169 - 144 = 25, \sqrt{\Delta} = 5, t_1 = \frac{-13-5}{-2} = 9, t_2 = \frac{-13+5}{-2} = 4, \\
 (x^2 = 9 \vee x^2 = 4) &\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 3 \vee x = -2 \vee x = 2), \\
 -x^4 + 13x^2 - 36 &= -(x+3)(x-3)(x+2)(x-2).
 \end{aligned}$$

W konsekwencji mamy

$$\begin{aligned}
 \int \frac{-x^4 + 13x^2 - 36}{x^2 - x - 6} \, dx &= \int \frac{-(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-3)} \, dx = \\
 &= \int -(x+3)(x-2) \, dx = \int -(x^2 - 2x + 3x - 6) \, dx = \\
 &= \int (-x^2 - x + 6) \, dx = \\
 &= - \int x^2 \, dx - \int x \, dx + 6 \int 1 \, dx = \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + C.
 \end{aligned}$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe funkcje pochodne w pewnym przedziale $A \subseteq D_f \cap D_g$, to

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $h(x) = x \cos x$.

Jeśli przyjmiemy

$$f(x) = x \text{ oraz } g'(x) = \cos x,$$

to otrzymamy

$$f'(x) = 1 \text{ oraz } g(x) = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Wybieramy tę funkcję pierwotną, dla której $C = 0$, tzn. $g(x) = \sin x$. Stosując twierdzenie o całkowaniu przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $h(x) = (5x - x^2) \sin x$.

Przyjmijmy, że

$$f(x) = 5x - x^2 \text{ oraz } g'(x) = \sin x.$$

Wtedy

$$f'(x) = 5 - 2x \text{ oraz } g(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Wybieramy $g(x) = -\cos x$. Z twierdzenia o całkowaniu przez części mamy

$$\begin{aligned} \int (5x - x^2) \sin x dx &= (5x - x^2)(-\cos x) - \int (5 - 2x)(-\cos x) dx = \\ &= -5x \cos x + x^2 \cos x - \int (-5 \cos x + 2x \cos x) dx = \\ &= -5x \cos x + x^2 \cos x + 5 \int \cos x dx - 2 \int x \cos x dx = \\ &= -5x \cos x + x^2 \cos x + 5 \sin x - 2(x \sin x + \cos x) + C = \\ &= (x^2 - 5x - 2) \cos x + (-2x + 5) \sin x + C. \end{aligned}$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeśli funkcja $g: (a, b) \rightarrow (A, B)$, gdzie $g(x) = t$, ma ciągłą funkcję pochodną g' w przedziale (a, b) oraz funkcja f jest ciągła w przedziale (A, B) , to

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $h(x) = \operatorname{ctg} x$.

Wiemy, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ prawdziwa jest równość $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Zastosujmy podstawienie $t = \sin x$, a właściwie $t(x) = \sin x$. Wtedy $t'(x) = \cos x$, co można zapisać również jako $\frac{dt}{dx} = \cos x$. Po przekształceniu ostatniej równości otrzymujemy $dt = \cos x dx$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C \\ &= \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $h(x) = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3 - 1}$.

Mamy

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3 - 1} dx &= \int \sqrt[4]{x^3 - 1} \cdot x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^3 - 1 \\ \frac{dt}{dx} = 3x^2 \\ \frac{1}{3} dt = x^2 dx \end{array} \right\} = \int \sqrt[4]{t} \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15} \sqrt[4]{t^5} + C \\ &= \frac{4}{15} \sqrt[4]{(x^3 - 1)^5} + C. \end{aligned}$$

Przykład

Wyznaczmy całkę nieoznaczoną funkcji $h(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$.

Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^3 x}{x} dx &= \int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln^4 x + C. \end{aligned}$$

13.10. Całka oznaczona

Definicja

Dana jest funkcja f ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ (gdzie $a < b$) oraz jej dowolna funkcja pierwotna F . Całką oznaczoną od a do b (albo całką oznaczoną na przedziale $\langle a, b \rangle$) funkcji f nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$. Całkę oznaczoną zapisujemy jako $\int_a^b f(x) dx$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Liczby a i b nazywamy odpowiednio *dolną i górną granicą całkowania*. Często różnicę $F(b) - F(a)$ oznaczamy też symbolem $[F(x)]_a^b$.

Uwaga

W oryginalnym podejściu Bernharda Riemanna, twórcy teorii całki oznaczonej, całkę oznaczoną funkcji ograniczonej (niekoniecznie ciągłej) na przedziale domkniętym definiuje się w sposób bardziej skomplikowany. Równość występująca w powyższej definicji pojawia się dopiero jako tzw. *wzór Newtona-Leibniza*.

Definicja – c.d.

Przyjmujemy dodatkowo, że

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ dla dowolnego } a \in \mathbb{R},$$

$$2) \text{ jeśli } b < a, \text{ to } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Przykład

Wyznaczmy całkę oznaczoną funkcji $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ na przedziale $(1, e)$.

Wiemy, że

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{1}{4} \ln^4 x + C.$$

Mamy zatem

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left[\frac{1}{4} \ln^4 x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}.$$

13.11. Podstawowe metody obliczania całek oznaczonych

Podamy teraz parę twierdzeń, które ułatwiają obliczanie całek oznaczonych.

Twierdzenie (o addytywności całki oznaczonej względem przedziału całkowania)

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziale (a, b) oraz $a < c < b$, to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Przykład

Obliczmy całkę oznaczoną funkcji $f(x) = x|3-x|$ na przedziale $(1,4)$.

Zauważmy, że

$$|3-x| = \begin{cases} -3+x & \text{dla } x > 3 \\ 3-x & \text{dla } x \leq 3 \end{cases}.$$

Zatem

$$f(x) = \begin{cases} x(3-x) = -x^2 + 3x & \text{dla } x \leq 3 \\ x(-3+x) = x^2 - 3x & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_1^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{1}{3}3^3 + \frac{3}{2}3^2 \right) - \left(-\frac{1}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 \right) + \left(\frac{1}{3}4^3 - \frac{3}{2}4^2 \right) - \left(\frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 \right) = \\
&= \left(-9 + \frac{27}{2} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{64}{3} - 24 \right) - \left(9 - \frac{27}{2} \right) = 5\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\int_1^4 x|3-x| dx = 5\frac{1}{6}.$$

Twierdzenie (o liniowości całki oznaczonej)

Jeśli funkcje f i g są całkowalne w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Przykład

Obliczmy całkę oznaczoną funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2}$ w przedziale $\langle e, e^2 \rangle$.

Ponieważ

$$\frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2} = x - 3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

to

$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2} dx &= \int_e^{e^2} x dx - 3 \int_e^{e^2} 1 dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} dx = \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \right]_e^{e^2} - 3[x]_e^{e^2} + [\ln|x|]_e^{e^2} - \left[\frac{-1}{x} \right]_e^{e^2} = \\
&= \frac{(e^2)^2}{2} - \frac{e}{2} - 3(e^2 - e) + \ln e^2 - \ln e - \left(\frac{-1}{e^2} - \frac{-1}{e} \right) = \\
&= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e - 3e^2 + 3e + 2 - 1 + e^{-2} - e^{-1} = \\
&= \frac{1}{2}e^4 - 3e^2 + \frac{5}{2}e + 1 - e^{-1} + e^{-2}.
\end{aligned}$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej)

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe funkcje pochodne w przedziale $\langle a, b \rangle$, to

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej)

Jeśli funkcja $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle A, B \rangle$, gdzie $g(x) = t$, $g(a) = A$, $g(b) = B$, jest funkcją „na” i ma ciągłą funkcję pochodną g' w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle A, B \rangle$, to

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_A^B f(t) dt.$$

13.12. Podstawowe zastosowania całek

W tej części przedstawimy kilka podstawowych zastosowań całek.

Twierdzenie (geometryczna interpretacja całki oznaczonej)

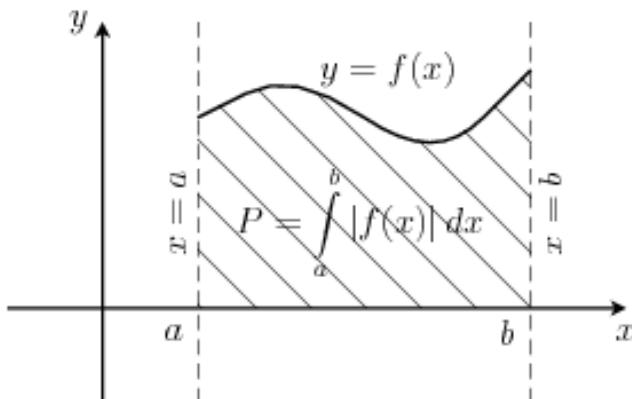
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$, to pole P obszaru ograniczonego wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem

$$P = \int_a^b |f(x)| dx.$$

W przypadku, gdy funkcja f jest dodatkowo nieujemna w przedziale $\langle a, b \rangle$, mamy oczywiście

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Geometryczną interpretację całki oznaczonej przedstawia Rysunek 13.4.



Rysunek 13.4. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Przykład

Obliczmy pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$, osią Ox oraz prostymi $x = -4$ i $x = 0$.

$D_f = (-\infty, 0)$. Zauważmy, że $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -1, 0 \rangle$ oraz $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$.

Ponadto

$$\begin{aligned} \int (1 - \sqrt{-x}) dx &= \begin{cases} t = -x \\ dt = -dx \\ -dt = dx \end{cases} = \int (1 - \sqrt{t})(-dt) = - \int 1 dt + \int \sqrt{t} dt = \\ &= -t + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -t + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = x + \frac{2}{3}\sqrt{-x^3} + C. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} P &= \int_{-4}^0 |1 - \sqrt{-x}| dx = \int_{-4}^{-1} |1 - \sqrt{-x}| dx + \int_{-1}^0 |1 - \sqrt{-x}| dx = \\ &= \int_{-4}^{-1} -(1 - \sqrt{-x}) dx + \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{-x}) dx = \\ &= - \int_{-4}^{-1} (1 - \sqrt{-x}) dx + \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{-x}) dx = \\ &= - \left[x + \frac{2}{3}\sqrt{-x^3} \right]_{-4}^{-1} + \left[x + \frac{2}{3}\sqrt{-x^3} \right]_{-1}^0 = \\ &= - \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{-(-1)^3} - (-4) - \frac{2}{3}\sqrt{-(-4)^3} \right) + 0 + \frac{2}{3}\sqrt{-0^3} \\ &\quad - (-1) - \frac{2}{3}\sqrt{-(-1)^3} = 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$, osią Ox oraz prostymi $x = -4$ i $x = 0$ wynosi 2.

Twierdzenie

Niech $a < b$. Pole obszaru między krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Przykład

Obliczmy pole obszaru między krzywymi $y = -x^2 - 2x$ oraz $y = x^2 + 4x$.

Ustalmy najpierw pierwsze współrzędne punktów wspólnych tych krzywych. Mamy

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x &= x^2 + 4x, \\ -2x^2 - 6x &= 0, \\ -2x(x + 3) &= 0. \\ x = 0 \vee x &= -3. \end{aligned}$$

Zatem przyjmiemy $a = -3$ oraz $b = 0$. Łatwo sprawdzić, że dla dowolnego $x \in (-3, 0)$ zachodzi $-x^2 - 2x \geq x^2 + 4x$. Ponadto

$$\begin{aligned} \int (-2x^2 - 6x) \, dx &= -2 \int x^2 \, dx - 6 \int x \, dx = -2 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^2}{2} + C = \\ &= -\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + C. \end{aligned}$$

Szukane pole wynosi zatem

$$\begin{aligned} P &= \int_{-3}^0 |-x^2 - 2x - (x^2 + 4x)| \, dx = \int_{-3}^0 (-x^2 - 2x - (x^2 + 4x)) \, dx = \\ &= \int_{-3}^0 (-2x^2 - 6x) \, dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-3}^0 = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - \frac{2}{3}(-3)^3 - 3(-3)^2 = \frac{2}{3}(-27) + 27 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Pole obszaru między krzywymi $y = -x^2 - 2x$ oraz $y = x^2 + 4x$ wynosi 9.

Twierdzenie

Jeśli punkt materialny porusza się ze zmienną prędkością $v(t) = |\overrightarrow{v(t)}|$, to droga przebyta przez ten punkt w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ wyraża się wzorem

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt.$$

Twierdzenie

Jeżeli zmienna siła $F(x) = |\overrightarrow{F(x)}|$ działa równolegle do osi Ox , to praca wykonana przez tę siłę od punktu $x = a$ do punktu $x = b$ wyraża się wzorem

$$W = \int_a^b F(x) \, dx.$$

Przykład

Z lecącego samolotu wyrzucono kamień pionowo w dół z prędkością początkową 1 m/s. Jaką drogę przebył ten kamień w ciągu pierwszych pięciu sekund lotu?

Wiemy, że prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem $v(t) = v_0 + at$, gdzie t to upływ czasu od chwili początkowej, v_0 to prędkość początkowa, zaś a to stała wartość przyspieszenia. W naszym przypadku $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Szukana droga wynosi zatem

$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 v(t) \, dt = \int_0^5 (1 + 9,81t) \, dt = \left[t + \frac{9,81t^2}{2} \right]_0^5 = 5 + \frac{9,81 \cdot 5^2}{2} = \\ &= 127,625 \text{ [m].} \end{aligned}$$

Odpowiedź:

W ciągu pierwszych pięciu sekund lotu kamień przebył 127,625 metra.

Osoby zainteresowane innymi zastosowaniami całek odsyłamy do innych pozycji bibliograficznych².

² Na przykład: M. Gewert, Z. Skoczyłas, *Analiza matematyczna I. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007; W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.

13.13. Zadania

1. Oblicz granice następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$, $x_0 = 2$,

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$, $x_0 = -2$,

c) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^4 - 3x^2 + 2}$, $x_0 = -1$,

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$, $x_0 = 2$,

e) $f(x) = \frac{\sin 7x}{5x}$, $x_0 = 0$,

f) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$, $x_0 = 0$.

2. Oblicz granice następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(2+x)^2}$, $x_0 = -2$,

b) $f(x) = \frac{x^2 - 12}{|x-3|}$, $x_0 = 3$,

c) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}-2}{x^3}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 3x + 2}$, $x_0 = 1$.

3. Oblicz granice jednostronne następujących funkcji w podanych punktach:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{1-x}$, $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \frac{-4x^2 + x}{-x^2 + x + 2}$, $x_0 = -1$,

c) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{|x|^3}$, $x_0 = 0$,

d) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{|x^2 - 4x + 3|}$, $x_0 = 1$.

4. Oblicz granice następujących funkcji w minus i plus nieskończoności:

a) $f(x) = -x^4 - x^3 + 5x^2 + 6x - 4$,

b) $f(x) = \frac{2x-4}{3x+2}$,

c) $f(x) = \frac{-4x^2+6}{-3x^2+5x-4}$,
d) $f(x) = \frac{-2x^2+5x-7}{2x-9}$,
e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{-4x+2}$,
f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+5}}$.

5. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, oblicz granice:

- a) funkcji $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ w minus i plus nieskończoności,
b) funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x^3+2}$ w minus i plus nieskończoności,
c) funkcji $f(x) = \frac{\cos(x^{2010}+2010)}{x^{2010}+2010}$ w plus i minus nieskończoności.

6. Zbadaj ciągłość funkcji f w podanych obok punktach, jeśli:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x + 2 & \text{dla } x \in (-1, +\infty) \end{cases}, \quad x_0 = -1,$
b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in (2, +\infty) \end{cases}, \quad x_0 = -1, x_1 = 2.$
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 2 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0.$

7. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja f była ciągła w zbiorze \mathbb{R} , jeśli:

- a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{dla } x < -1 \\ a & \text{dla } x \in (-1, 1) \\ -x^2 + 4b & \text{dla } x \geq 1 \end{cases},$
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{dla } x < 2 \\ x - 4 & \text{dla } x \in (2, 3), \\ -5x + b & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} - a & \text{dla } x < 1 \\ 2x^2 + 3b & \text{dla } x \in (-1, 1) \\ -4x + 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

8. Korzystając z definicji, zbadaj różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0 , jeśli:

- a) $f(x) = 4x^2 + 2x$, $x_0 = -2$,
- b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x_0 = 3$,
- c) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{dla } x \leq 3 \\ -x+3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$, $x_0 = 3$,
- d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{3x+6} & \text{dla } x \neq -2 \\ -\frac{4}{3} & \text{dla } x = -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$.

9. Wyznacz funkcje pochodne następujących funkcji:

- a) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 8$,
- b) $f(x) = 6\sqrt[3]{x^4} - 5x^{-2}$,
- c) $f(x) = (4x - 3)(5x + 6)$,
- d) $f(x) = (4 - \sqrt{x})(8x^2 - 5\sqrt[3]{x})$,
- e) $f(x) = (x - 3)(5x^2 + 4)(x^5 - 1)$,
- f) $f(x) = \frac{3x+2}{x-9}$,
- g) $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2-6}$,
- h) $f(x) = \frac{3x^2-5x+7}{x^3+4}$.

10. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej, wyznacz funkcje pochodne następujących funkcji:

- a) $f(x) = (3 + 5x)^8$,
- b) $f(x) = (x - 5)^2(3x^2 + 2)$,
- c) $f(x) = 3\sqrt{x^2 + 6x + 2}$,
- d) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$,
- e) $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$,
- f) $f(x) = 4e^{\cos x}$,
- g) $f(x) = (x^2 - 3)e^{4x}$,
- h) $f(x) = \ln 4x - \frac{2}{x}$.

11. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P , jeśli:
- $f(x) = 5\sqrt{x}$, $P(4, y_0)$,
 - $f(x) = -2x^5$, $P(x_0, 64)$,
 - $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$, $P(x_0, -4)$,
 - $f(x) = \sqrt{1-4x}$, $P(-2, y_0)$.
12. Wyznacz współrzędne takiego punktu A , że prosta styczna do wykresu funkcji $f(x) = -\sqrt{3x+1}$ w punkcie A jest równoległa do prostej $k: 3x + 8y + 2 = 0$.
13. Wyznacz otwarte przedziały monotoniczności następujących funkcji:
- $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x - 2$,
 - $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 4x - 3$,
 - $f(x) = \frac{-x^2+x-4}{x-1}$,
 - $f(x) = \frac{-2x^2+3}{4-x^2}$,
 - $f(x) = x\sqrt{5-x}$,
 - $f(x) = \cos x - \sin x$ dla $x \in (0, 2\pi)$,
 - $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$,
 - $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
14. Wyznacz ekstrema lokalne następujących funkcji (o ile istnieją):
- $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$,
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x - 2$,
 - $f(x) = \frac{x^2+x+9}{x+1}$,
 - $f(x) = \frac{4-x^2}{2x^2-3}$,
 - $f(x) = x\sqrt{2-x}$,
 - $f(x) = x - \sqrt{2} \cos x$ dla $x \in (0, 2\pi)$,
 - $f(x) = x^2 \ln x$,
 - $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
15. Wyznacz ekstrema globalne funkcji f w przedziale domkniętym A , jeśli:

-
- a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}$, $A = \langle -2, 2 \rangle$,
 b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 15x - 3$, $A = \langle -1, 1 \rangle$,
 c) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$, $A = \langle -1, 4 \rangle$,
 d) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $A = \langle -2, 1 \rangle$,
 e) $f(x) = (2-x)e^{-x}$, $A = \langle 1, 4 \rangle$,
 f) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$, $A = \langle \sqrt[4]{e}, e \rangle$.

16. Wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

- a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x + 1$,
 b) $f(x) = (4 + \sqrt{x^3})(4 - \sqrt{x^3})$,
 c) $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 - 2x + 9}{1 - x^2}$,
 d) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$,
 e) $f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$,
 f) $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$.

17. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części, wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

- a) $f(x) = (2x + 2) \cos x$,
 b) $f(x) = x^2 \sin x$,
 c) $f(x) = (x - 3) \cdot 3^x$,
 d) $f(x) = (x^2 - 2)e^x$,
 e) $f(x) = (5 - x) \ln x$,
 f) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

18. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, wyznacz całki nieoznaczone następujących funkcji:

- a) $f(x) = (2x - 9)^7$,
 b) $f(x) = \sqrt{6x + 4}$,
 c) $f(x) = x^2(2x^3 - 5)^6$,
 d) $f(x) = x\sqrt{3x^2 + 2}$,
 e) $f(x) = \cos(4x)$,
 f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,
 g) $f(x) = xe^{-x^2}$.

19. Oblicz całkę oznaczoną funkcji f na przedziale A , jeśli:

- a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6x - 7, A = \langle 0,1 \rangle,$
- b) $f(x) = (\sqrt{x} - 2)x, A = \langle 0,2 \rangle,$
- c) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2x + 8}{x+4}, A = \langle -2,0 \rangle,$
- d) $f(x) = |x - 1|, A = \langle -1,3 \rangle,$
- e) $f(x) = |x^2 - x - 2|, A = \langle -2,3 \rangle,$
- f) $f(x) = x \sin x, A = \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle,$
- g) $f(x) = \sqrt{x} \ln x, A = \langle e, e^3 \rangle,$
- h) $f(x) = \sqrt{2x + 9}, A = \langle 0,8 \rangle.$

20. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji f , osią Ox oraz prostymi $x = a$ i $x = b$, jeśli:

- a) $f(x) = \sqrt{x} + 2, a = 0, b = 4,$
- b) $f(x) = (1 - x)^2, a = 0, b = 3,$
- c) $f(x) = 2 \sin x, a = -\frac{\pi}{2}, b = \pi,$
- d) $f(x) = x^2 - 2|x|, a = -2, b = 3.$

21. Oblicz pole obszaru między krzywymi $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$, jeśli:

- a) $f(x) = x^2 - 2x - 8, g(x) = 0,$
- b) $f(x) = (x - 1)^2 - 1, g(x) = 3x,$
- c) $f(x) = 2 - |x|, g(x) = x^2 - 4,$
- d) $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{10-x^2}{9}.$

Rozdział 14

Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

14.1. Kombinatoryka

14.1.1. Permutacje

Rozważmy następującą sytuację. Spotykają się cztery osoby w kolejce przed sklepem. Na ile sposobów mogą się one ustawić?

Rozważając wszystkie możliwości, oznaczmy osoby literami A, B, C, D. Tworzymy ciągi złożone z tych czterech liter, w których przestawienie każdych dwóch daje nam nową sytuację.

Zatem możliwe ciągi to: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCDA, BCAD, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

Jak widać, takich ustnień otrzymaliśmy 24.

Czy można bez wypisywania wszystkich możliwości przewidzieć, ile ich będzie?

Rozpatrzmy zagadnienie w sposób następujący: mamy w kolejce 4 miejsca. Pierwsza osoba wchodząca do sklepu ma do wyboru 4 miejsca, druga 3, trzecia 2, a czwartej pozostałe ostatnie wolne miejsce.

Wynika z powyższego, że ilość ustnień (czyli ciągów czteroelementowych) możemy policzyć w sposób następujący:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 .$$

Definicja

Permutacją bez powtórzeń zbioru n-elementowego, $n \in N_+$ nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów danego zbioru n-elementowego.

Twierdzenie

Liczba permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($n \in N_+$) wyraża się wzorem:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Zastanówmy się, ile możemy utworzyć słów mających sens lub nie z liter słowa TATA.

Zadanie to sprowadza się do tworzenia czteroelementowych ciągów z wykorzystaniem powyższych liter. Nietrudno zauważać, że każde przestawienie dwóch jednakowych liter nie wnosi nowej sytuacji, zatem wszystkie takie słowa (ciągi) to: TATA, TTAA, TAAT, ATAT, AATT, ATTA.

Definicja

Niech A oznacza zbiór złożony z k różnych elementów $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Permutacją n elementową z powtórzeniami, w której elementy a_1, a_2, \dots, a_k powtarzają się odpowiednio n_1, n_2, \dots, n_k razy, ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), jest każdy n -wyrazowy ciąg, w którym elementy a_1, a_2, \dots, a_k powtarzają się podaną liczbę razy.

Twierdzenie

Liczba permutacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego ($n \in N_+$) wyraża się wzorem:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

14.1.2. Wariacje

Mamy do wyboru liczby ze zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$. Tworzymy dwucyfrowe liczby o nie powtarzających się cyfrach.

Wszystkimi liczbami utworzonymi w ten sposób są:

$$24, 26, 28, 42, 46, 48, 62, 64, 68, 82, 84, 86.$$

Nietrudno zauważać, że tworzyliśmy dwuelementowe ciągi o różnych elementach, w których kolejność występujących elementów miała znaczenie (liczba 24 jest różnym od 42).

Definicja

Wariacją k -wyrazową bez powtórzeń zbioru n -elementowego, ($k, n \in N_+ \wedge k \leq n$) nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z k różnych elementów zbioru n -elementowego.

Zastanówmy się, czy można wyznaczyć wzór na liczbę takich wariacji.

Wróćmy do naszego przykładu. W liczbie dwucyfrowej pierwszą z liczb możemy wybrać na 4 sposoby, a drugą już tylko na 3 (cyfry w liczbie nie

mogą się powtarzać). Więc liczbę wariacji 2-elementowych bez powtórzeń zbioru 4-elementowego wyraża wartość $4 \cdot 3 = 12 = \frac{4!}{2!}$

Twierdzenie

Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, $(k, n \in N_+ \wedge k \leq n)$ wyraża się wzorem: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Założymy, że mamy do wyboru liczby ze zbioru $\{2, 4, 6, 8\}$. Tworzymy wszystkie dwucyfrowe liczby z wykorzystaniem tych cyfr. W zadaniu tym tworzymy dwuelementowe ciągi, w których kolejność występujących elementów ma znaczenie (liczba 24 jest różnym od 42) oraz cyfry w ciągach mogą się powtarzać.

Definicja

Wariację k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego $(k, n \in N_+ \wedge k \leq n)$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów zbioru n-elementowego.

Do wyznaczonych liczb musimy zatem dołożyć wszystkie te, które będą składały się z dwóch jednakowych cyfr, czyli 22, 44, 66 oraz 88. Zatem ilość takich liczb wzrośnie o 4 i będzie wynosiła 16.

Zastanówmy się, czy można wyznaczyć wzór na liczbę takich wariacji.

Wróćmy do naszego przykładu. W liczbie dwucyfrowej pierwszą z liczb możemy wybrać na 4 sposoby i drugą również na 4 sposoby (cyfry w liczbie mogą się powtarzać). Więc liczbę wariacji 2-elementowych z powtórzeniami zbioru 4-elementowego wyraża wartość $4 \cdot 4 = 16 = 4^2$.

Twierdzenie

Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego $(k, n \in N_+ \wedge k \leq n)$ wyraża się wzorem: $W_n^k = n^k$.

14.1.3. Kombinacje

W pojemniku znajdują się kule: czerwona (C), zielona (Z), niebieska (N) i biała (B). W sposób losowy wyciągamy z urny dwie kule. Na ile sposobów

możemy wyciągnąć kule z pojemnika? Należy zauważać, że w tym doświadczeniu nie ma znaczenia kolejność losowania, a jedynie wynik (czyli jakiego koloru kule wylosujemy).

Wyniki naszego losowania to zbiory dwóch kul, przy czym nie ma znaczenia kolejność zapisu. Zatem wyniki zapiszemy w postaci $\{\{C, Z\}, \{C, B\}, \{Z, N\}, \{Z, B\}, \{N, B\}\}$.

Ogólnie rzecz biorąc, tworzymy w takiej sytuacji k -elementowe (u nas 2-elementowe) podzbiory zbioru n -elementowego (u nas 4-elementowego), w których elementy nie mogą się powtórzyć.

Definicja

Kombinacją k -elementową bez powtórzeń zbioru n -elementowego, $k, n \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$ nazywamy każdy k -elementowy podzbiór tego zbioru, przy czym elementy tego podzbioru nie mogą się powtarzać.

Wyniki naszego zadania zapiszemy w postaci $\{\{C, Z\}, \{C, B\}, \{Z, N\}, \{Z, B\}, \{N, B\}\}$. Różnych podzbiorów dwuelementowych zbioru cztero-elementowego jest sześć.

Twierdzenie

Liczba k -elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego ($k, n \in \mathbb{N}$ i $k \leq n$) jest równa: $C_n^k = \binom{n}{k}$.

14.2. Prawdopodobieństwo

Często spotykamy się z sytuacjami, w których nie jesteśmy w stanie podać wyniku, np. rzucając kostką do gry, możemy uzyskać od 1 do 6 oczek, przy rzucie monetą możemy otrzymać reszkę lub orła. Takie zjawiska nazywać będziemy zjawiskami losowymi. Dział matematyki, który zajmuje się opisywaniem tych zjawisk, nosi nazwę rachunku prawdopodobieństwa lub teorii prawdopodobieństwa.

Dla każdego doświadczenia możemy wyznaczyć zbiór wszystkich różnych możliwych do uzyskania wyników. Zbiór ten nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i oznaczamy: Ω .

Każdy pojedynczy wynik doświadczenia, czyli każdy element przestrzeni, nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym, a każdy skończony podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem.

Zdarzenie, które jest równe Ω , nazywać będziemy zdarzeniem pewnym, a równe \emptyset nazywać będziemy zdarzeniem niemożliwym.

Zdarzenia są zbiorami, więc działania na nich wykonywać będziemy jak na zbiorach. W rachunku prawdopodobieństwa używać będziemy następujących określeń:

- dla $A = B$ zdarzenia A i B nazywać będziemy identycznymi,
- dla $A \subset B$ powiemy, że zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B,
- $A \cup B$ to suma, $A \cap B$ – iloczyn, $A - B$ nazwiemy różnicą zdarzeń A i B,
- dla $A \cap B = \emptyset$ powiemy, że zdarzenia A i B są wykluczające się,
- zbiór $\Omega - A = A'$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do A,
- jeśli $\omega \in A$, to mówimy, że ω sprzyja zdarzeniu A.

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest określone w sposób jednoznaczny.

Definicja

Prawdopodobieństwem określonym na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy taka funkcję P, która każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ przyporządkowuje liczbę $P(A)$ spełniającą następujące aksjomaty:

- $P(A) \geq 0$,
- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla $A \cap B = \emptyset$.

Prawdopodobieństwo zatem ma następujące własności:

Twierdzenie

Jeżeli P jest prawdopodobieństwem określonym na pewnej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω , to:

- $P(\emptyset) = 0$
- Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$,
- Dla każdego $A \subset \Omega$ mamy $P(A) \leq 1$,
- $P(A') = 1 - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- Jeśli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n wykluczają się parami, to:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Przykład

Student ma zdawać dwa egzaminy: z matematyki i fizyki. Prawdopodobieństwo, że zda matematykę, jest równe 0,4, że zda co najmniej jeden egzamin – 0,7. Oblicz prawdopodobieństwo, że zda fizykę, jeśli prawdopodobieństwo, że zda obydwa egzaminy wynosi 0,2.

Niech:

A – zdarzenie polegające na tym, że student zda egzamin z matematyki.

B – zdarzenie polegające na tym, że student zda egzamin z fizyki.

$A \cup B$ – zdarzenie polegające na tym, że student zda egzamin z matematyki lub fizyki.

$A \cap B$ – zdarzenie polegające na tym, że student zda egzamin z matematyki i fizyki.

Z warunków zadania mamy:

$$P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A) = 0,4$$

$$P(A \cap B) = 0,2.$$

Z własności prawdopodobieństwa:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

więc:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = 0,7 - 0,4 + 0,2 = 0,5$$

Zatem prawdopodobieństwo, że zda fizykę wynosi 0,5.

Praktycznie prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia A obliczać będziemy z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

Definicja

Jeżeli przestrzeń Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, A jest dowolnym zdarzeniem $A \subset \Omega$, to: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, gdzie $|A|$ jest liczbą zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A, $|\Omega|$ jest liczbą elementów przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Przykład

Rzucamy sześciokrotnie kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w co najmniej jednym rzucie liczba wyrzuconych oczek będzie równa numerowi rzutu.

Zadanie to będzie nam łatwiej rozwiązać, wykorzystując własność prawdopodobieństwa:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

W naszym zadaniu:

A – zdarzenie polegające na tym, że w żadnym rzucie liczba wyrzuconych oczek nie będzie równa numerowi rzutu.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem sześcioelementowych ciągów, w których występują liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ z możliwością powtórzeń. Zatem: $|\Omega| = 6^6$ (liczba sześcioelementowych wariacji z powtórzeniami na zbiorze sześcioelementowym).

Policzmy, ile może być takich ciągów, w których liczba uzyskanych oczek nie będzie równa numerowi rzutu. Na pierwszym miejscu nie może występować 1, na drugim 2, na trzecim 3 itd. Wynika stąd, że:

$$|A'| = 5^6.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5^6}{6^6} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,665.$$

Prawdopodobieństwo, że w co najmniej jednym rzucie liczba wyrzuconych oczek będzie równa numerowi rzutu wynosi 0,665.

Często zdarza się tak, że zajście jednego zdarzenia losowego ma wpływ (warunkuje) zajście innego zdarzenia losowego w określonym doświadczeniu losowym.

Twierdzenie

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A, pod warunkiem że zajdzie zdarzenie B, nazywamy liczbę wyrażoną wzorem: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, gdzie $A, B \subset \Omega$ oraz $P(B) > 0$.

Przykład

Prawdopodobieństwo, że napięcie w obwodzie elektrycznym przewyższy 250V jest równe 0,02. Prawdopodobieństwo awarii aparatu przy podwyższonym napięciu wynosi 0,6. Oblicz prawdopodobieństwo awarii aparatu na skutek podwyższonego napięcia.

Niech:

A – zdarzenie polegające na tym, że będzie awaria aparatu.

B – zdarzenie polegające na tym, że będzie podwyższone napięcie.

Mamy zatem obliczyć $P(A \cap B)$. Z treści zadania wynika, że:

$$P(A/B) = 0,6$$

oraz:

$$P(B) = 0,02.$$

Wykorzystując zależność: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ mamy:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B),$$

więc:

$$P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,02 = 0,012.$$

Prawdopodobieństwo awarii aparatu na skutek podwyższzonego napięcia wynosi 0,012.

W przypadku zadań związanych z doświadczeniami wykonywanymi dwuetapowo stosować będziemy twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Twierdzenie

Jeśli $A \subset \Omega$ jest dowolnym zdarzeniem, natomiast $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ spełniają warunki:

- a) wykluczają się parami,
- b) mają dodatnie prawdopodobieństwa,
- c) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,

to $P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n)$.

Przykład

W pudełku znajduje się 120 oporników serii A oraz 80 oporników serii B. Z pudełka wyciągamy losowo jeden opornik. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany opornik będzie dobry, jeśli liczba wadliwych oporników serii A stanowi 4%, zaś w serii B stanowi 5%?

W zadaniu niech:

- A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowany opornik będzie dobry,
- B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu opornika serii A,
- B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu opornika serii B,
- A/B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu dobrego opornika pod warunkiem, że wybrano opornik serii A,
- A/B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu dobrego opornika pod warunkiem, że wybrano opornik serii B.

Należy zauważyć, że losujemy opornik z serii A lub serii B, więc te dwa zdarzenia wyczerpują wszystkie możliwości, czyli: $B_1 \cup B_2 = \Omega$. Ponadto:

$$P(B_1) = \frac{120}{200} = 0,6$$

oraz

$$P(B_2) = \frac{80}{200} = 0,4.$$

Z treści zadania wynika, że:

$$P(A/B_1) = 1 - 0,04 = 0,96$$

oraz

$$P(A/B_2) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite, mamy:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) = 0,96 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,5 = 0,956$$

Prawdopodobieństwo, że wybrany opornik będzie dobry, wynosi 0,956.

Przykład

W dwóch urnach są kule białe i czarne. W pierwszej jest 6 kul czarnych i 4 białe, w drugiej 7 białych i 3 czarne. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie liczba oczek podzielna przez 3, to losujemy kule z urny pierwszej, w przeciwnym przypadku z urny drugiej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba oczek podzielna przez 3, jeśli wylosowaliśmy kulę białą?

W zadaniu tym prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej obliczymy z wykorzystaniem wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{6} + \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{36}{60} = 0,6$$

gdzie:

A – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej,

B_1 – zdarzenie polegające na tym, że będziemy losować z urny pierwszej,

B_2 – zdarzenie polegające na tym, że będziemy losować z urny drugiej.

W zadaniu tym wiemy, jaki jest wynik doświadczenia. Pytamy o jego przebieg. Dokładniej chcemy policzyć $P(B_1 / A)$.

W tym celu skorzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2)}$$

Otrzymamy:

$$P(B_1 / A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{6}}{0,6} = \frac{4}{18}.$$

Prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba oczek podzielna przez 3, jeśli wylosowaliśmy kulę białą, wynosi $\frac{4}{18}$.

Omówimy teraz zagadnienie niezależności zdarzeń. Zdarzenia A i B można uznać za niezależne, gdy zdarzenie A nie wpływa na zdarzenie B i odwrotnie.

Definicja

Dwa zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Definicja

Zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ nazywamy niezależnymi, jeśli prawdopodobieństwo iloczynu dowolnej liczby różnych spośród nich jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Przykład

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Niech: A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu 2 oczek w pierwszym rzucie, B – zdarzenie polegające na uzyskaniu w sumie 7 oczek. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

W zadaniu tym musimy sprawdzić, czy zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. W tym celu obliczymy prawdopodobieństwa:

$$P(A), P(B), P(A \cap B).$$

$$|\Omega| = 6^2 = 36$$

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

Jak widać:

$$|A| = 6$$

$$B = \{(6,1), (1,6), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\},$$

czyli:

$$|B| = 6.$$

Nietrudno zauważyć, że:

$$A \cap B = \{(2,5)\},$$

więc:

$$|A \cap B| = 1.$$

Korzystając z definicji klasycznej prawdopodobieństwa, mamy:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Ponieważ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P(A \cap B)$, więc zdarzenia A i B są niezależne.

Zastanówmy się, jakie będzie prawdopodobieństwo uzyskania 3 razy sześciu oczek na kostce podczas wykonywania 5 rzutów kostką.

W pojedynczym rzucie kostką 6 oczek uzyskamy z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{6}$, a nie uzyskamy z prawdopodobieństwem $1 - p = \frac{5}{6}$. Poszczególne rzuty kostką są oczywiście niezależne od siebie, więc prawdopodobieństwo powyższe jest równe: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!}$.

Prawdopodobieństwo p nazywane jest prawdopodobieństwem sukcesu, natomiast $1 - p = q$ – prawdopodobieństwem porażki.

Definicja

Schematem Bernoulliego nazywamy ciąg doświadczeń losowych spełniających warunki:

- doświadczenia są niezależne,
- każde z tych doświadczeń może się skończyć na dwa sposoby: sukcesem lub porażką,
- prawdopodobieństwo sukcesu jest w każdym z tych doświadczeń takie samo.

Wniosek

W ciągu n doświadczeń losowych, tworzących schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w n próbach uzyskamy k sukcesów, obliczamy ze wzoru:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Przykład

Rzucamy 8 razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie 5 razy?

Pojedynczy rzut monetą to próba, w której poszczególne rzuty są od siebie niezależne. Sukces to wyrzucenie reszki, a w 8 próbach chcemy osiągnąć 5 sukcesów.

W zadaniu tym mamy:

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, N = 8, k = 5.$$

Zatem:

$$P(S_8 = 5) = \binom{8}{5} \cdot p^5 \cdot q^{8-5}$$

$$P(S_8 = 5) = \binom{8}{5} \cdot p^5 \cdot q^{8-5} = \binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Prawdopodobieństwo, że w serii 8 rzutów monetą reszka wypadnie 5 razy, wynosi $\frac{7}{32}$.

14.3. Zadania

1. Na ile sposobów możemy posadzić 5 osób na pięciu ponumerowanych miejscach?
2. Na ile sposobów możemy posadzić 7 osób na długiej ławie, a na ile przy okrągłym stole?
3. Ile jest możliwych ustawień liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, w których:
 - a) liczby 6 i 7 sąsiadują ze sobą w kolejności wzrostu,
 - b) liczby 6 i 7 sąsiadują ze sobą,
 - c) liczby 6 i 7 nie sąsiadują ze sobą?
4. Z okazji zjazdu klasowego spotyka się jedenastu przyjaciół. Ile nastąpi powitań?
5. Z klasy liczącej 24 uczniów należy wybrać pięcioosobową delegację, która będzie reprezentować klasę na akademii szkolnej. Ile istnieje sposobów wyboru takiej delegacji?
6. W pudełku znajduje się 15 żarówek, w tym 12 dobrych. Nie oglądając ich, losujemy bez zwracania 5 żarówek. Na ile sposobów można wylosować 3 dobre żarówki?
7. W klasie liczącej 31 uczniów wybierano samorząd klasowy. Ile jest różnych wyników takiego wyboru?
8. Ile różnych słów (mających sens lub nie) można utworzyć z liter A, B, C, D, E, I, zakładając, że litery w słowie nie mogą się powtarzać?
9. Rzucamy czterema monetami. Ile istnieje wszystkich możliwych wyników takiego rzutu?

10. Dziesięć ponumerowanych kul liczbami od 1 do 10 rozmieszczono w 4 szufladach ponumerowanych od 1 do 4. Ile jest różnych rozmieszczeń?
11. Z tablicy liczb dwucyfrowych wylosowano jedna liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- jest to liczba parzysta,
 - jest to liczba pierwsza,
 - jest to liczba podzielna przez 6,
 - jest to liczba, która jest sześciąnem liczby jednocyfrowej.
12. W klasie liczącej 25 uczniów jest 10 dziewcząt. Wśród nich rozdzielono w sposób przypadkowy 5 biletów do teatru. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że bilety otrzymali:
- samich chłopców,
 - 2 dziewczyny i 3 chłopców?
13. Pomalowany sześćsian rozcięto na 1000 jednakowych sześciianików, a następnie po wymieszaniu wszystkich wylosowano jeden. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- wylosowany sześćsian ma trzy pomalowane ściany,
 - wylosowany sześćsian ma dwie pomalowane ściany,
 - wylosowany sześćsian ma jedną pomalowaną ścianę,
 - wylosowany sześćsian nie ma pomalowanych ścian.
14. Winda z 6 pasażerami zatrzymuje się na 10 piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie osoby wysiądą:
- na różnych piętrach,
 - na tym samym piętrze?
15. W urnie są kule białe, czarne i zielone. Kul zielonych jest 3 razy więcej niż białych. Białych jest tyle samo, co czarnych. Ile jest kul każdego koloru, jeśli przy losowaniu dwóch kul z urny prawdopodobieństwo, że będą to kule różnych kolorów, wynosi $\frac{3}{5}$?
16. Przy danych $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ oblicz $P(B)$, $P(A \cap B')$, $P(A - B)$.
17. Wśród 40 osób 5 włada tylko językiem francuskim, 20 tylko językami angielskim i francuskim oraz 10 tylko językiem rosyjskim. Wy-

- bieramy losowo osobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana osoba włada:
- a) językiem angielskim lub francuskim,
 - b) językiem angielskim lub rosyjskim,
 - c) językiem francuskim lub rosyjskim,
 - d) nie włada żadnym językiem.
18. Z talii 52 kart losujemy 5. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kierów, jeśli wiadomo, że wśród wylosowanych kart nie ma kolorów pik i trefl.
19. Rzucamy trzy razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że przynajmniej na jednej z nich wypadnie 5 oczek, jeśli wiadomo, że na wszystkich kostkach były różne liczby oczek.
20. W urnie znajdują się 4 kule białe i 5 czarnych. Losujemy dwukrotnie po jednej kuli bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli białej, jeśli za pierwszym razem wylosowano kulę czarną?
21. W jednej urnie jest 6 kul białych i 5 czarnych, a w drugiej 4 białe i 7 czarnych. Z losowo wybranej urny wyciągamy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.
22. W pierwszym pojemniku są 4 kule białe i 3 czarne, a w drugim 3 białe i 2 czarne. Z pierwszego pojemnika wyciągamy 3 kule i bez oglądania wkładamy je do pojemnika drugiego, a następnie wyciągamy z drugiego pojemnika 2 kule. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul różnego koloru?
23. Strzelec A trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,8, a strzelec B z prawdopodobieństwem 0,7. Wybieramy losowo jednego strzelca. Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelał strzelec A, jeśli cel został trafiony.
24. Wiadomo, że 5% wszystkich mężczyzn i 0,25% kobiet to daltoniści. Wybrana losowo osoba z grupy, w której jest 2 razy więcej mężczyzn niż kobiet, jest daltonistą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?
25. Trzy osoby P, Q, R ustawiły się przypadkowo w rzędzie. Niech:
A – zdarzenie polegające na tym, że Q stoi przed P; B – zdarzenie

polegające na tym, że R stoi przed P. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

26. Strzelec A trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,8, a strzelec B z prawdopodobieństwem 0,7. Strzelcy oddają po jednym strzale do tego samego celu. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
- a) cel zostanie trafiony dwa razy,
 - b) cel zostanie co najmniej raz trafiony,
 - c) cel zostanie trafiony dokładnie dwa razy.

Bibliografia

- Cewe A., Nahorska H., Pancer I., *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2007.
- Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna I. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna I. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2007.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Analiza matematyczna dla licealistów. Podręcznik*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Analiza matematyczna dla licealistów. Zbiór zadań*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa I. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa II. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2003.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Klasa III. Część I. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2004.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa I. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2005.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa II. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2006.
- Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa III. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro, Warszawa 2007.
- Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- Selwat K., *Wybrane zagadnienia matematyki*, Seria Wydawnicza Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej im. Witelona w Legnicy, Legnica 2009.

Spis treści

Wstęp	3
Rozdział 1	
Elementy logiki matematycznej	5
1.1. Zdania	5
1.1.1. Koniunkcja	6
1.1.2. Alternatywa	6
1.1.3. Implikacja	7
1.1.4. Równoważność	8
1.1.5. Zaprzeczenie zdania	8
1.2. Prawa logiczne	9
1.3. Formy zdaniowe	10
1.4. Kwantyfikatory	11
1.5. Zadania	13
Rozdział 2	
Elementy teorii mnogości	17
2.1. Zbiory	17
2.2. Działania na zbiorach	18
2.3. Prawa rachunku zbiorów	20
2.4. Zbiór liczb rzeczywistych	20
2.5. Zadania	22
Rozdział 3	
Dwumian Newtona	25
3.1. Indukcja matematyczna	25
3.2. Silnia	27
3.3. Symbol Newtona	27
3.4. Dwumian Newtona	29
3.5. Zadania	30

Rozdział 4

Elementy rachunku wektorowego i geometrii analitycznej	33
4.1. Wektory	33
4.2. Proste	35
4.3. Okrąg i koło	38
4.4. Zadania	40

Rozdział 5

Podstawy teorii funkcji	43
5.1. Podstawowe definicje	43
5.2. Podstawowe własności funkcji	46
5.3. Działania na funkcjach	49
5.4. Zadania	51

Rozdział 6

Trygonometria	55
6.1. Miara łukowa kąta	55
6.2. Trygonometria kąta ostrego w trójkącie prostokątnym	57
6.3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	57
6.4. Podstawowe wzory trygonometryczne	62
6.5. Równania i nierówności trygonometryczne	64
6.6. Zadania	67

Rozdział 7

Wielomiany	69
7.1. Działania na wielomianach	70
7.2. Wykresy niektórych wielomianów	77
7.3. Równania wielomianowe	80
7.4. Nierówności wielomianowe	81
7.5. Zadania	83

Rozdział 8

Funkcje wymierne	85
8.1. Działania na ułamkach algebraicznych	85
8.2. Funkcja homograficzna	88
8.3. Równania i nierówności wymierne	89
8.4. Zadania	92

Rozdział 9	
Równania i nierówności z wartością bezwzględną	97
9.1. Przykłady	97
9.2. Zadania	104
Rozdział 10	
Funkcja wykładnicza	107
10.1. Podstawowe definicje	107
10.2. Równania wykładnicze	109
10.3. Nierówności wykładnicze	112
10.4. Zadania	114
Rozdział 11	
Funkcja logarytmiczna	115
11.1. Własności logarytmów	115
11.2. Równania logarytmiczne	118
11.3. Nierówności logarytmiczne	120
11.4. Zadania	122
Rozdział 12	
Ciągi liczbowe	125
12.1. Podstawowe własności ciągów	125
12.2. Granica ciągu liczbowego	127
12.3. Podstawowe metody obliczania granic ciągów	128
12.4. Liczba e	132
12.5. Zadania	133
Rozdział 13	
Elementy analizy matematycznej	137
13.1. Granica funkcji	137
13.2. Podstawowe metody obliczania granic funkcji	142
13.3. Ciągłość funkcji	147
13.4. Podstawowe własności funkcji ciągłych	150
13.5. Pochodna funkcji	152
13.6. Podstawowe metody obliczania pochodnych funkcji	156
13.7. Zastosowania pochodnych	159

13.7.1. Prosta styczna do wykresu funkcji	159
13.7.2. Funkcja pochodna a monotoniczność funkcji	161
13.7.3. Ekstrema lokalne funkcji	162
13.7.4. Ekstrema globalne	165
13.8. Całka nieoznaczona	167
13.9. Podstawowe metody wyznaczania całek nieoznaczonych	169
13.10. Całka oznaczona	173
13.11. Podstawowe metody obliczania całek oznaczonych	174
13.12. Podstawowe zastosowania całek	176
13.13. Zadania	180
Rozdział 14	
Elementy kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa	187
14.1. Kombinatoryka	187
14.1.1. Permutacje	187
14.1.2. Wariacje	188
14.1.3. Kombinacje	189
14.2. Prawdopodobieństwo	190
14.3. Zadania	198
Bibliografia	203



ISBN 978-83-61389-84-2

A standard linear barcode representing the ISBN number.

9 788361 389842