Seminarium dyplomowe magisterskie

Prezentacja nr 1

Wojciech Pasternak

Wyznaczanie zer wielomianów

Finding of roots of polynomial

Promotor: dr hab. inż. Robert Janczewski

Główne problemy do rozwiązania

- Znalezienie metody, odnajdującej wszystkie rzeczywiste pierwiastki wielomianów
- Konstrukcja intuicyjnego interfejsu, pozwalającego na łatwe wprowadzanie danych wejściowych
- Wysoka precyzja obliczeń – eliminacja błędów zaokrągleń
- Wybór struktury do reprezentacji wielomianu
- Optymalizacja podstawowych działań na wielomianach

Wybór struktury do reprezentacja wielomianu

- Reprezentacja wielomianu w pamięci na dwa sposoby:
  - Trzymanie tylko niezerowych współczynników wielomianu (mapa)
  - Trzymanie wszystkich współczynników wielomianu (tablica)
- Przeprowadzenie testów i porównanie wydajności obu struktur pod względem czasowym (być może także pod względem pamięciowym)

Precyzja obliczeń i błędy zaokrągleń

- Brak stabilności - obliczenia na wielomianach, zwłaszcza wysokich stopni, wymagają dużej precyzji obliczeń – drobna zmiana może zupełnie zmienić wartość wielomianu i jego pierwiastki
- Żaden z podstawowych typów w C++ nie rozwiązuje problemu długich liczb
- Konieczność użycia dodatkowej biblioteki długich liczb (np. GNU MP library) albo własnej implementacji
- Współczynniki wielomianu są liczbami wymiernymi – można je reprezentować w postaci ilorazu dwóch liczb: licznika i mianownika
- Każdą z liczb (licznik i mianownik) można reprezentować jako długą liczbę całkowitą lub cały ułamek jako liczbę wymierną

GNU MP library

- Biblioteka programistyczna dla języków m.in. C, C++
- Udostępnia liczby całkowite oraz wymierne
- Jedynym ograniczeniem precyzji jest dostępna pamięć
- Jest to zoptymalizowany kod asemblerowy
- Używane różne algorytmy dla odpowiednich operandów, optymalizujące działania dla małych i dużych liczb
- Instalacja pod Windowsem wymaga MinGW lub Cygwina
- Licencja LGPL

Intuicyjny interfejs, pozwalający na łatwe wprowadzanie danych

- Wprowadzanie dowolnych (poprawnych składniowo) wyrażeń
- Wyrażenie zostaje parsowane i zapisane w strukturze, reprezentującej wielomian w pamięci
- Walidacja wyrażenia pod względem poprawności składniowej
- Brak potrzeby wpisywanie znaków * oraz ^ w oczywistych miejscach
- Dopuszczalne typy wyrażeń:

  - 5x4 + x3 + x2 + 3

  - x3 + 2x3 + 4x + 8x + 3

  - (x+2)(2x2 + 3x + 4)^2

Znane sposoby rozwiązywania równań nieliniowych

- Metoda bisekcji
- Metoda Newtona-Raphsona (metoda stycznych)
- Metoda Eulera (metoda siecznych)
- Reguła falsi
- ✓ Zastosowanie ciągu Sturma

Dlaczego standardowe metody numeryczne odpadają ?

- Wszystkie podstawowe metody numeryczne (bisekcji, stycznych, siecznych, reguła falsi) zakładają różny znak na końcach przedziału
- Potrzeba metody działającej, niezależnie od znaków na krańcach przedziału początkowego
- Potrzeba metody dobrze radzącej sobie z pierwiastkami wielokrotnymi

Zastosowanie ciągu Sturma

- Eliminacja pierwiastków wielokrotnych poprzez podzielenie wielomianu W przez NWD(W, W’)
- Pozwala na znalezienie wszystkich pierwiastków rzeczywistych w zadanym przedziale z dowolną dokładnością
- Ważna jest liczba zmian znaku dla wartości wielomianów, będących kolejnymi elementami ciągu Sturma

Istniejące rozwiązania w praktyce

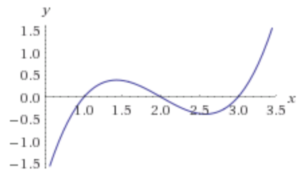
- Wolfram Alpha
- Portal oblicz.to
- Strona http://akiti.ca/rpoly_ak1_Intro.html

Wolfram Alpha

Input:

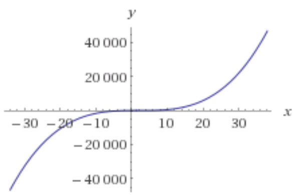
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Plots:



(x from 0.6 to 3.4)

Enable interactivity



(x from −34 to 38)

Enable interactivity

Alternate forms:

Step-by-step solution

$(x-1)(x-2)(x-3)$

$(x-2)^3 - x + 2$

$x((x-6)x+11) - 6$

Roots:

Step-by-step solution

$x = 1$

$x = 2$

$x = 3$

Wolfram Alpha

WolframAlpha computational knowledge engine

x6 −6x4 −4x3 +9x2 +12x+4

Examples Random

Input:

$$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

Alternate forms: Step-by-step solution

$$(x+1)^4 (x-2)^2$$

$$(x^3 - 3x)^2 - 4(x^3 - 3x) + 4$$

$$x(x(x(x(x^2 - 6) - 4) + 9) + 12) + 4$$

Roots: Step-by-step solution

$$x = -1$$

$$x = 2$$

Wolfram Alpha

+ Dokładne obliczenie pierwiastków
+ Rysowanie wykresu
+ Alternatywna reprezentacja wielomianu: rozkład na czynniki itd.
+ Obliczana pochodna
+ Informacja o pierwiastkach zespolonych
– Przy skomplikowanych wielomianach, obliczenia i wizualizacja wyników trwa ponad kilkanaście sekund

Portal oblicz.to

Rozwiązanie

$x^3 - (6 \cdot x^2) + 11 \cdot x - 6 = 0$

$x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 = 0$

$x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 = 0$

Potencjalne pierwiastki całkowite to: $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

Sprawdzamy: 1

Dla $x = 1$, mamy: $x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 = 0$

1 jest pierwiastkiem

Możemy zredukować stopień wielomianu poprzez podzielenie go przez: $x - 1$

$$
\begin{array}{l}
x^2 - 5 \cdot x + 6 \\
\hline
x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 : x - 1 \\
-x^3 + x^2 \\
\hline
-5 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \\
5 \cdot x^2 - 5 \cdot x \\
\hline
6 \cdot x - 6 \\
-6 \cdot x + 6 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - (1 \cdot 4 \cdot 6)$

$\Delta = 1$

$\Delta > 0$, więc równanie ma 2 rozwiązania

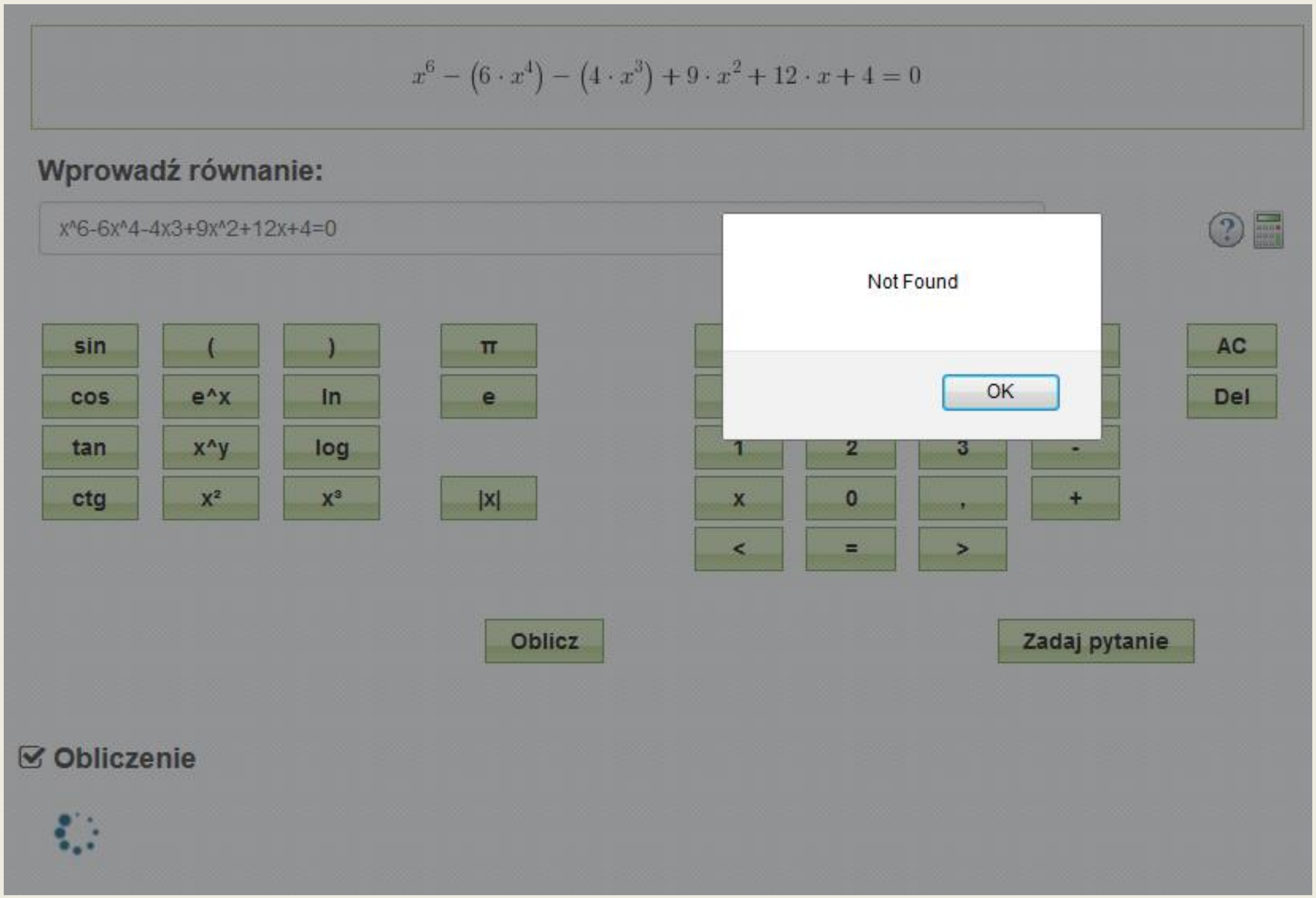
$$x = \frac{(\sqrt{1} + 5)}{(1 \cdot 2)} \vee x = \frac{(5 - \sqrt{1})}{(1 \cdot 2)}$$

$x = 3 \vee x = 2$

$x \in \{2, 3, 1\}$

$x \in \{2, 3, 1\}$

Portal oblicz.to



Portal oblicz.to

+ Dokładne obliczanie pierwiastków dla prostych wielomianów wraz z prezentacją rozwiązania krok po kroku
± Rysowanie wykresu i graficzne rozwiązywanie równania dla niektórych wielomianów
– Wewnętrzny błąd pojawiający się po wprowadzeniu bardziej skomplikowanych wielomianów

Strona akiti.ca

For example, assume we want to find the roots of the following equation:

$$3x^4 + 5x^2 + 17x + 19 = 0$$

Data input to the box should look as follows:

4
3
0
5
17
19

Note the 0 for the x^3 term.

Once you click the "Find Roots" button, this utility will then seek the zeros.
IMPORTANT: Note the Error Code output.

Polynomial Coefficients

Enter the polynomial degree and coefficients (up to 101 coefficients):

3
1
-6
11
-6

Find Roots

The solutions follow:

1
1.9999999999999998
3.0000000000000004

Strona akiti.ca

Polynomial Coefficients

Enter the polynomial degree and coefficients (up to 101 coefficients):

6
1
0
-6
-4
9
12
4

Find Roots

The solutions follow:

-1.0000000268112552
-0.9999999909966526
-0.9999999914898405
1.9999999653689624
-0.9999999907022511
2.000000034631037

Strona akiti.ca

– Rozwiązanie oparte na przybliżonym rozwiązaniu – opartym o metodę Newtona
– Przez zastosowanie rozwiązania przybliżonego, traktowanie większości pierwiastków wielokrotnych, jako różnych pierwiastków
– Konieczność wprowadzania stopnia wielomianu i wartości kolejnych współczynników – problem dla wprowadzenia wielomianów wyższych stopni np. $W(x)=x^{100}-10x^{49}+10$
+ Dla wszystkich wprowadzanych wielomianów algorytm znalazł rozwiązanie
+ Informacja o pierwiastkach zespolonych

Podsumowanie

– Implementacja działań na wielomianach w C++
– Znajdowanie pierwiastków w oparciu o ciąg Sturma
– Konieczność zastosowania biblioteki dla dużych liczb całkowitych i wymiernych
– Zastosowanie intuicyjnego interfejsu, ułatwiające użytkownikowi wprowadzanie danych wejściowych
– Przeprowadzone zostaną testy i porównanie wydajności różnych struktur, mogących reprezentować wielomiany w pamięci

Literatura

1. A Concrete Introduction to Higher Algebra, Lindsay N. Childs
2. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, Nicholas J. Higham
3. Algebraiczne metody rozwiązywania równania Schrödingera, W. Salejda
4. Algorithmic Number Theory, Duncal Buell
5. Data Structures Using C++, D. S. Malik
6. Gnu MP 6.0 Multiple Precision Arithmetic Library, Torbjorn Granlund
7. Metody numeryczne i graficzne cz. 1, Mieczysław Warmus, Józef Łukaszewicz
8. Metody obliczeniowe i ich komputerowa realizacja, Bogusław Bożek
9. Numerical Analysis, Richard L. Burden,J. Douglas
10. Numerical Methods for Roots of Polynomials cz. 1, J.M. McNamee
11. Numerical Methods, Germund Dahlquist, Åke Björck
12. Pierwiastki wielokrotne wielomianu, Maciej Bryński
13. Podstawowe metody numeryczne dla studentów kierunków inżynierskich, Adam Marlewski
14. Polynomials, E.J. Barbeau
15. Relations between polynomial roots, Michael Drmota, Mariusz Skałba
16. Repozytorium z matematyki dla studentów pierwszego roku, Janina Płaskonka, Karol Selwat
17. Solving Polynomial Equation Systems I: The Kronecker-Duval Philosophy, Teo Mora
18. Structured Matrices and Polynomials: Unified Superfast Algorithms, Victor Pan
19. Twierdzenie Sturma, Maciej Bryński
20. Wiadomości matematyczne, Tomy 10-11, Polskie Towarzystwo Matematyczne
21. Wielomiany, Arkadiusz Męcel
22. Wprowadzenie do metod numerycznych Wykład 2, Romuald Kotowski
23. Wstęp do metod numerycznych, J Stoer, R Bulirsch, M Mikulska
24. Wykład analizy matematycznej, cz. 1: Funkcje jednej zmiennej, Wojciech Kryszewski
25. Zasady algebry wyższej, z przypisem Andrzeja Mostowskiego Zarys teorii Galois Wacław Sierpiński, Andrzej Mostowski