



Politechnika Gdańska
Wydział Elektroniki,
Telekomunikacji i Informatyki



Katedra:	Architektury Systemów Komputerowych
Imię i nazwisko dyplomanta:	Wojciech Pasternak
Nr albumu:	137361
Forma i poziom studiów:	Stacjonarne jednolite studia magisterskie
Kierunek studiów:	Informatyka

Praca dyplomowa magisterska

Temat pracy:
Obliczanie zer wielomianów

Kierujący pracą:
dr hab. inż. Robert Janczewski

Zakres pracy:
Opis pracy (jedno zdanie)

Gdańsk, 2016

Spis treści

1 Przegląd literatury	1
1.1 Wielomiany	1
1.1.1 Definicja	1
1.1.2 Podstawowe działania na wielomianach	1
1.1.3 Eliminacja pierwiastków wielokrotnych	6
1.2 Twierdzenie Sturma	7

Rozdział 1

Przegląd literatury

1.1 Wielomiany

1.1.1 Definicja

Definicja 1 *Wielomianem zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie:*

$$W(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1.1)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in R, n \in N$

Liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu, natomiast n nazywamy stopniem wielomianu.

Szczególnym przypadkiem wielomianu jest jednomian.

Definicja 2 *Jednomianem zmiennej rzeczywistej x nazywamy wielomian, który posiada co najwyżej jeden wyraz niezerowy i określamy wzorem:*

$$W(x) = ax^n, \text{ gdzie } a \in R, n \in N \quad (1.2)$$

Można, więc rozumieć wielomian jako skończoną sumę jednomianów. Jednomianem stopnia zerowego jest stała, pojedyncza liczba rzeczywista, która w szczególności może być zerem.

Definicja 3 *Wielomianem zerowym nazywamy, wielomian wyrażony wzorem:*

$$W(x) = 0 \quad (1.3)$$

W dalszej części, jeżeli nie zaznaczymy inaczej, mówiąc wielomian, będziemy mieli na myśli pewien wielomian, nie będący wielomianem zerowym.

1.1.2 Podstawowe działania na wielomianach

Na wielomianach, tak jak na liczbach możemy wykonywać podstawowe działania. Należą do nich: porównywanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, a także obliczanie reszty z dzielenia

oraz NWD (największego wspólnego dzielnika). Jako, że wielomian zmiennej x możemy traktować jak funkcję jednej zmiennej, możemy także policzyć z niego pochodne.

Porównywanie wielomianów

Twierdzenie 1 *Dwa wielomiany uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia, a ich kolejne współczynniki są równe.*

Przykład 1 *Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .*

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \quad (1.4)$$

Wielomiany W_1 oraz W_2 są równe wtedy i tylko wtedy gdy $\forall i \in N \ a_i = b_i$.

Suma wielomianów

Twierdzenie 2 *Aby dodać dwa wielomiany, należy dodać ich wyrazy podobne.*

Przykład 2 *Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .*

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \quad (1.5)$$

Zdefiniujemy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) + W_2(x)$. Wówczas:

$$W_3(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + a_n + b_n \quad (1.6)$$

Na powyższym przykładzie łatwo zaobserwować, że stopień sumy dwóch wielomianów nie może być większy od większego ze stopni dodawanych wielomianów. W przypadku gdy oba te wielomiany są tego samego stopnia, o przeciwnym współczynniku przy najwyższej potędze, to stopień ten będzie mniejszy.

Twierdzenie 3

$$\deg(W_1 + W_2) \leq \max(\deg(W_1), \deg(W_2)) \quad (1.7)$$

Różnica wielomianów

Definicja 4 *Wielomianem przeciwnym nazywamy wielomian, którego wszystkie współczynniki są przeciwne do danych.*

Przykład 3 *Mamy dany wielomian W_1 .*

$$W_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1.8)$$

Zdefiniujemy drugi wielomian: $W_2(x) = -W_1(x)$. Wówczas:

$$W_1(x) = -a_0x^n + (-a_1)x^{n-1} + \dots + (-a_{n-1})x + (-a_n) \quad (1.9)$$

Twierdzenie 4 Aby obliczyć różnicę wielomianów W_1 i W_2 , należy dodać ze sobą wielomiany W_1 i $-W_2$, czyli wielomian przeciwny do wielomianu W_2 .

Przykład 4 Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

Zdefiniujemy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) - W_2(x)$. Wówczas:

$$W_3(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + a_n - b_n \quad (1.11)$$

Wielomianem neutralnym ze względu na dodawanie i odejmowanie jest wielomian $W(x) = 0$.

Iloczyn wielomianów

Twierdzenie 5 Aby pomnożyć dwa wielomiany, należy wymnożyć przez siebie wyrazów obu wielomianów, a następnie dodać do siebie wyrazy podobne.

Przykład 5 Mamy dane wielomian W_1 oraz wielomian W_2 .

$$\begin{aligned} W_1(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ W_2(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned} \quad (1.12)$$

Zdefiniujemy trzeci wielomian: $W_3(x) = W_1(x) * W_2(x)$. Wówczas:

$$W_3(x) = (a_0 * b_0)x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + \dots + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x + a_nb_m \quad (1.13)$$

Na podstawie powyższego przykładu, możemy zaobserwować, że stopień wielomianu, będącego iloczynem dwóch wielomianów niezerowych, jest równy sumie stopni tych wielomianów. Jeżeli jeden z czynników jest wielomianem zerowym, to stopień iloczynu jest równy 0.

Twierdzenie 6

$$\begin{aligned} \deg(W_1 * W_2) &= \deg(W_1) + \deg(W_2), \text{ dla } W_1! = 0, W_2! = 0 \\ \deg(W_1 * W_2) &= 0, \text{ w pozostałych przypadkach} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Iloraz wielomianów

Definicja 5 Wielomian $W(x)$ nazywamy podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że spełniony jest warunek $W(x) = P(x) * Q(x)$. Wówczas: wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$, zaś wielomian $P(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

Definicja 6 Wielomian $R(x)$ nazywamy resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że spełniony jest warunek $W(x) = P(x) * Q(x) + R(x)$.

Przykład 6 Mamy dane wielomian W oraz wielomian P .

$$\begin{aligned} W(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \\ P(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m \end{aligned} \quad (1.15)$$

Zdefiniujemy wielomian: $Q(x) = W(x)/P(x)$ oraz $Q(x) = W(x) \bmod P(x)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} Q(x) &= c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \dots + c_{n-m-1}x + c_{n-m} \\ R(x) &= d_0x^{n-m-1} + d_1x^{n-m-2} + \dots + d_{n-m-2}x + d_{n-m-1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Twierdzenie 7

$$\deg(W_1 \bmod W_2) < \deg(W_1/W_2) = \deg(W_1) - \deg(W_2) \quad (1.17)$$

Pochodna wielomianu

Definicja 7 Dany jest wielomian W , określony wzorem $W(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Pochodną wielomianu W nazywamy wielomian W' i wyrażamy wzorem:

$$W(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1} \quad (1.18)$$

Twierdzenie 8

$$\begin{aligned} \deg(W') &= \deg(W) - 1, \text{ dla } \deg(W) > 0 \\ W &= 0, \text{ w pozostałych przypadkach} \end{aligned} \quad (1.19)$$

NWD wielomianów

Twierdzenie 9 Niezerowy wielomian, o współczynnikach rzeczywistych, jest jednoznacznie rozkładalny na czynniki liniowe lub nierozkładalne czynniki kwadratowe, o współczynnikach rzeczywistych.

Oznacza to, że nie da się rozłożyć jednego wielomianu na czynniki, na dwa różne sposoby, tzn. tak, by istniał chociaż jeden czynnik (lub jego proporcjonalny odpowiednik), nie występujący w drugim rozkładzie.

Twierdzenie 10 Jeżeli wielomian $W(x)$ podzielimy przez dwumian $x - x_0$, to reszta z tego dzielenia jest równa wartości tego wielomianu dla $x = x_0$.

W szczególnym przypadku reszta ta może być równa 0. Oznacza to, że liczba x_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Twierdzenie 11 (Bezout) Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian jest podzielny przez dwumian $x - x_0$

Dowód Jeżeli liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W , to wielomian ten możemy wyrazić jako iloczyn dwumianu $x - x_0$ oraz pewnego wielomianu Q : $W(x) = (x - x_0) * Q(x)$. Wyznaczając z tego wyrażenia wielomian Q , otrzymujemy $Q(x) = \frac{W(x)}{x - x_0}$. Widzimy zatem, że dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $x - x_0$, otrzymujemy bez reszty, wielomian $Q(x)$.

Twierdzenie 12 Liczba x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian jest podzielny przez $(x - x_0)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

Dowód Dowód jest analogiczny, jak dla twierdzenia Bezout. Jedyną różnicą jest to, że wielomian W przedstawiamy jako: $W(x) = (x - x_0)^k * Q(x)$.

Twierdzenie 13 Każdy wielomian $W(x)$ nie będący wielomianem zerowym jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego

Twierdzenie 14 Każdy wielomian stopnia nieparzystego, ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie 15 Dany jest wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, o współczynnikach całkowitych. Jeżeli wielomian W posiada pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego a_0 .

Twierdzenie 16 Dowolny wielomian $W_1(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0}$, o współczynnikach wymiernych, można przekształcić w wielomian $W_2(x) = k * W_1(x)$, o współczynnikach całkowitych i tych samych pierwiastkach, co wielomian W . Wówczas:

$$k = m * NWW(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n), \text{ gdzie } m \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

Twierdzenie 17 Jeżeli liczba jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu W , to jest pierwiastkiem $(k-1)$ -krotnym pochodnej tego wielomianu.

Przykład 7 Mamy dany wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Obliczmy teraz kolejne pochodne wielomianu W .

$$\begin{aligned} W'(x) &= 3x^2 + 2 * 2x + 1 = 3x^2 + 4x + 1 \\ W^{(2)}(x) &= 2 * 3x + 4 = 6x + 4 \\ W^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Obliczmy teraz pierwiastki wielomianu W i jego kolejnych pochodnych.

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2 \\ x_1 &= 0, \quad k_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad k_2 = 2 \\ W'(x) &= 3x^2 + 4x + 1 \\ \Delta &= 4^2 - 4 * 3 * 1 = 16 - 12 = 4 \\ \sqrt{\Delta} &= 2 \\ x_1 &= \frac{-4-2}{2*3} = \frac{-6}{6} = -1, \quad k_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-4+2}{2*3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \quad k_2 = 1 \\ W^{(2)}(x) &= 6x + 4 = 6(x + \frac{2}{3}) \\ x_1 &= -\frac{2}{3}, \quad k_1 = 1 \\ W^{(3)}(x) &= 6 \quad - \text{ brak pierwiastków} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Jak widać powyższy przykład potwierdza zastosowanie przedstawionego twierdzenia. Widzimy, że krotność wszystkich pierwiastków ulega zmniejszeniu o 1, w kolejnej pochodnej. Dodatkowo możemy zauważyć, że pochodna może zawierać także pierwiastki, których nie miał dany wielomian. Ma to miejsce w przypadku, gdy wielomian, posiada przynajmniej dwa różne pierwiastki. Potwierdza to poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 18 *Liczba nowych pierwiastków pochodnej wielomianu W' (takich których nie posiadał wielomian W) jest równa liczbie różnych pierwiastków wielomianu pomniejszonej o jeden.*

Dowód Zdefiniujmy wielomian $W(x) = (x - x_1)^{k_1} * (x - x_2)^{k_2} * \dots * (x - x_{m-1})^{k_{m-1}} * (x - x_m)^{k_m}$. Przyjmijmy, że wielomian W jest stopnia n i posiada m różnych pierwiastków, gdzie $1 \leq m \leq n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} + k_m = n$. Zdefiniujmy wielomian $P(x) = (x - x_1) * (x - x_2) * \dots * (x - x_{m-1}) * (x - x_m)$, w którym każdy z pierwiastków wielomianu W występuje dokładnie jeden raz. Pierwiastków jest m , zatem wielomian P jest stopnia m . Dzieląc wielomian W przez wielomian P , otrzymujemy bez reszty wielomian $Q(x) = (x - x_1)^{k_1-1} * (x - x_2)^{k_2-1} * \dots * (x - x_{m-1})^{k_{m-1}-1} * (x - x_m)^{k_m-1}$, który posiada każdy z pierwiastków wielomianu W , krotności pomniejszonej o jeden. Skoro krotność każdego z m pierwiastków uległa zmniejszeniu o jeden, to stopień wielomianu Q w stosunku do wielomianu W zmniejszył się o m . Stopień wielomianu Q jest więc równy $n - m$. Na mocy twierdzenia wiemy także, że wielomian $Q(x)$ jest podzielny również przez wielomian W' , stopnia $n - 1$. Zatem wielomian W' możemy przedstawić jako iloczyn wielomianu Q oraz innego wielomianu: $W'(x) = Q(x) * V(x)$. Wielomian V , zawiera wszystkie pierwiastki W' , których nie posiadał wielomian W . Łatwo policzyć, że stopień wielomianu V jest równy: $\deg(V) = \deg(W') - \deg(Q) = (n - 1) - (n - m) = n - 1 - n + m = m - 1$. Jak widać, właśnie udowodniliśmy, że stopień ten jest równy liczbie różnych pierwiastków wielomianu W pomniejszonej o jeden.

1.1.3 Eliminacja pierwiastków wielokrotnych

Przykład 8 *Dany jest wielomian W , określony wzorem: $W(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$. Dokonajmy eliminacji pierwiastków wielokrotnych dla wielomianu W .*

1. Obliczamy pochodną wielomianu.

$$\begin{aligned} W'(x) &= 6 * x^5 - 4 * 6x^3 - 3 * 4x^2 + 2 * 9x + 12 = \\ &= 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 6(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Obliczmy teraz resztę z dzielenia wielomianu W przez wielomian W' .

$$\begin{array}{r} x \\ \hline x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 : (x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \\ - x^6 + 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x \\ \hline - 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x \end{array} \quad (1.24)$$

Kluczowa jest wartość reszty z dzielenia. Gdyby otrzymana reszta z dzielenia była wielomianem zerowym, to pochodna wielomianu było równocześnie NWD(W , W'). W tym przypadku tak jednak nie jest, więc wykonujemy analogiczną operację z tą różnicą, że nową dzielną jest dotychczasowy

dzielnik a reszta z wielomianu jest nowym dzielnikiem. Tę operację wykonujemy tak długo, jak otrzymana reszta jest niezerowego stopnia. W przypadku gdy jest ona jednocześnie wielomianem zerowym, to podobnie jak wyżej, aktualny dzielnik, jest naszym NWD(W, W'). W przypadku gdy otrzymana reszta jest niezerowym wielomianem stopnia zerowego, to największym wspólnym dzielnikiem wielomianów jest pewna niezerowa stała.

$$\begin{array}{r}
 x \\
 \hline
 x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 : (x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2) \\
 - x^6 + 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x \\
 \hline
 - 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x
 \end{array} \tag{1.25}$$

1.2 Twierdzenie Sturma

Definicja 8 Ciąg Sturma

Twierdzenie 19 Jeżeli wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych, to liczba pierwiastków rzeczywistych w przedziale $a < x \leq y$, jest równa $Z(a) - Z(b)$.

W ogólności twierdzenie Sturma można zastosować dla przedziału $(-\infty, +\infty)$, dopuszczając w ciągu Sturma wartości niewłaściwe $+\infty$ oraz $-\infty$. Wówczas $Z(-\infty)$ będzie oznaczać liczbę zmian znaków w ciągu $W(-\infty), W_1(-\infty), W_2(-\infty), \dots, W_m(-\infty)$, zaś $Z(+\infty)$ liczbę zmian w ciągu $W(+\infty), W_1(+\infty), W_2(+\infty), \dots, W_m(+\infty)$.

Twierdzenie 20 Liczba różnych pierwiastków rzeczywistych wielomianu $W(x)$ jest równa $Z(-\infty) - Z(+\infty)$.

Stosując twierdzenie Sturma dla coraz mniejszych przedziałów możliwe jest wyznaczenie pierwiastków wielomianu z dowolną dokładnością. Sposób ten określony jest mianem metody Sturmy. Twierdzenie Sturma jest bardzo mocnym środkiem używanym do znajdowania pierwiastków w określonym przedziale. Może być używana nie tylko dla wielomianów, ale dowolnej różniczkowalnej funkcji ciągłej.

Przeanalizujmy teraz sposób konstruowania ciągu Sturma dla wielomianu W . Pierwszym wyrazem ciągu jest sam wielomian W . Z kolei drugim wyrazem jest pochodna wielomianu W . Kolejne wyrazy ciągu Sturma wyznaczamy obliczając resztę z ilorazu dwóch poprzednich wyrazów. Dzieje się to do uzyskania pierwszej reszty wielomianu, będącą wielomianem stopnia zerowego. Za każdym razem dzieląc wielomian stopnia n , przez wielomian stopnia m , gdzie $m < n$, mamy gwarancję, że wielomian będący resztą tego ilorazu będzie stopnia mniejszego niż m . Korzystając z tego faktu, wiemy, że liczba wyrazów ciągu Sturma dla wielomianu W jest nie większa od $\deg(W) + 1$.

Definicja 9 Liczbą zmian znaków ciągu Sturma dla wielomianu $W(x)$ w punkcie x , obliczamy zliczając liczbę zmian pomiędzy kolejnymi wyrazami, pomijając te o wartości równej zero w punkcie x .

Można, więc zauważyć, że warunkiem wystarczającym i jednocześnie koniecznym do tego by wielomian $W(x)$ stopnia n , posiadający wyłącznie pierwiastki jednokrotne, posiadał n pierwiastków rzeczywistych jest to by wartość ciągu Sturma wynosiła n dla $x = -\infty$ oraz 0 dla $x = +\infty$.

Twierdzenie 22 Dany jest wielomian $W_1(x) = ax^n, a > 0$, stopnia n oraz wielomian $W_2(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, gdzie $b_0 > 0$, stopnia $n-1$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = +\infty$.

[illegible]

.

.

Bibliografia