Produto Interno e Norma de Um Vetor

Definição 2.1 (Produto Interno)

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um **produto interno** sobre V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, denotada $\langle v, w \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades para todo $v, w, z \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

- i - $\langle v + w, z \rangle = \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle$;
- ii - $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$;
- iii - $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;
- iv - $\langle v, v \rangle > 0$. se $v \neq 0$

Lema 2.8

Seja V um espaço euclidiano. Dados $v, w, z, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V$, $\alpha, \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

1 - $\langle 0, v \rangle = 0$;

2 - $\langle v, \alpha w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$;

3 - $\langle v, w + z \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, z \rangle$;

Definição 3.1 (Norma)

Seja V um espaço euclidiano. Dado um vetor $v \in V$, a **norma** de v é o número

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

■ $\boxed{\|u\| = \|v\| \text{ se somente se } \langle u+v, u-v\rangle = 0.}$

* <u>Demonstração:</u>

Seja $u, v \in V$, onde norma e produto interno estão bem definido. (Considerando definições e lema anteriores.)

(1) Devemos verificar que,

$$\|u\| = \|v\| \Rightarrow \langle \underbrace{u+v,\ u-v}_{*}\rangle = 0$$

Tomemos $\|u\|^2 = \|v\|^2$, logo

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

$\Rightarrow \langle u, u\rangle - \langle v, v\rangle = 0$ Definição 3.1 (Acima) Norma

$\Rightarrow \langle u+0, u+0\rangle - \langle v, v\rangle = 0$ $0 \in V$, $u+0 = u$

$$\Rightarrow \langle u+(v-v), u+(v-v)\rangle - \langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (u+v) - v, \underbrace{(u-v)+v}\rangle - \langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (u+v), (u-v)+v\rangle + \langle -v, ((u-v)+v)\rangle - \langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\langle (u-v)+v, u+v\rangle} + \overbrace{\langle ((u-v)+v, -v\rangle} - \langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{\langle u-v, u+v\rangle} + \underbrace{\langle v, u+v\rangle}\right) + \left(\langle u-v, -v\rangle + \langle v, -v\rangle\right) - \langle v, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(\langle u-v, u+v\rangle + \langle u+v, v\rangle\right) + \left((-1)\cdot\langle u-v, v\rangle + (-1)\cdot\langle v,v\rangle\right) - \langle v,v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(\langle u-v, u+v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle\right) + \left((-1)\cdot\left(\langle u,v\rangle + \langle -v,v\rangle\right) + (-1)\cdot\langle v,v\rangle\right) - \langle v,v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(\langle u-v, u+v\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle\right) + \left((-1)\cdot\left(\langle u,v\rangle + (-1)\cdot\langle v,v\rangle\right) - \langle v,v\rangle\right) - \langle v,v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle u+v, u-v\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,v\rangle} - \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,v\rangle} - \cancel{\langle v,v\rangle} - \cancel{\langle v,v\rangle} = 0$$

$$\Rightarrow \langle u+v, u-v\rangle = 0 \qquad \square$$

Logo $\|u\| = \|v\| \Rightarrow \langle u+v, u-v\rangle = 0$

(2) Agora provamos a volta, ou seja, que vale

$$\langle u+v, u-v\rangle = 0 \Rightarrow \|u\| = \|v\|$$

Decorre que,

$$\langle u+v, (u-v)\rangle = \langle u, (u-v)\rangle + \langle v, u-v\rangle$$

$$= \langle u-v, u\rangle + \langle u-v, v\rangle$$

$$= \left(\langle u,u\rangle + \langle -v,u\rangle\right) + \left(\langle u,v\rangle + \langle -v,v\rangle\right)$$

$$= \|u\|^2 + (-1)\cdot\cancel{\langle v,u\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + (-1)\cdot\langle v,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 - \|v\|^2$$

Assim,

$$\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

Como $\langle u+v, u-v\rangle = 0$ temos

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

logo

$$\|u\|^2 = \|v\|^2$$

e temos que

$$\|u\| = \|v\|$$

como queríamos provar. $\square$