

# Cálculo 1 - Limites

Wandeson Ricardo

9 de outubro de 2020

## 0.1 Definição Intuitiva de Limite

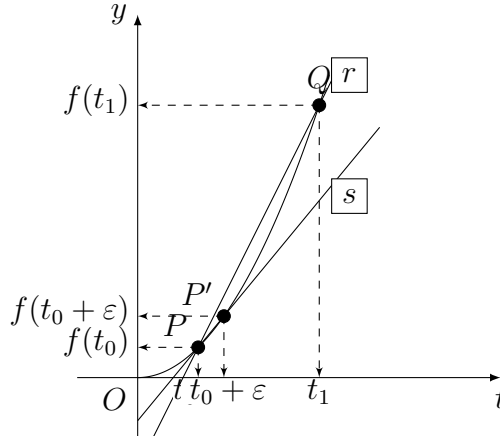
Um objeto percorre uma distância ao longo do tempo  $t$ . Em um instante  $t$  qualquer desejamos saber a velocidade do objeto. Sabemos que a velocidade média escalar deste objeto é dada por  $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  onde  $\Delta s$  é a variação do espaço e  $\Delta t$  a variação do tempo ao longo daquela distância percorrida.

Observamos que no instante de tempo  $t_{inicial}$  e  $t_{final}$  o objeto percorreu uma distância  $\Delta s$  onde  $s_{inicial}$  e  $s_{final}$  fornecem sua posição. Podemos escrever da seguinte forma,

$$V_m := \frac{s_{final} - s_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} \quad (1)$$

Em (1) observamos que a velocidade escalar média é a razão entre a variação do espaço percorrido  $\Delta s$  em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ . Mas contudo e se desejássemos saber a velocidade num instante  $t$  ao invés do intervalo  $\Delta t$ .

Imaginemos o seguinte, temos um instante qualquer  $t_1$  e tomamos um incremento nesse tempo o qual chamaremos de  $\varepsilon$ .



Seja  $f(t) = y$  uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que define a posição de um carro no instante  $t$ . A posição após  $t$  segundos é medida em metros. Podemos ver de (1) que a inclinação da reta secante  $r$  que contém os pontos  $P$  e  $Q$  nos fornece a velocidade média no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ . Logo,

$$v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

que é exatamente a inclinação  $m_{PQ}$  da reta secante  $r$ .

Tomemos agora um  $P'$  qualquer sobre a curva cujas coordenadas são  $(t_0 + \varepsilon, f(t_0 + \varepsilon))$  onde  $\varepsilon$  significa um pequeno incremento em  $t_0$ .

A inclinação da reta secante  $s$  por  $PP'$  é dada por,

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{(t_0 + \varepsilon) - t_0}$$

ou

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \quad (3)$$

Tomando-se  $\varepsilon$  cada vez menor, teremos um  $t_0 + \varepsilon$  cada vez mais próximo de  $t_0$ . Esse valor tomado cada vez menor é o que chamaremos de limite para o qual  $\varepsilon$  ficará bem próximo de 0 mas  $\varepsilon \neq 0$ . Em símbolos teríamos,

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{talque} \quad t_0 + \varepsilon \longrightarrow 0$$

Assim definimos o limite de forma intuitiva como,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L \quad (4)$$

que nos fornecerá a velocidade no instante exato  $t_0$ . No gráfico acima de  $f(t)$  estaríamos tomando o ponto  $P'$  cada vez mais próximo de  $P$ .

Temos também que,

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L$$

é nada mais que a equação da reta tangente da função  $f$  no ponto  $P = (t_0, f(t_0))$ .

E a velocidade no instante  $t_0$ , ou seja, a *velocidade instantânea* seria dada por

$$v(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \quad (5)$$