Cálculo 1 - Limites

Wandeson Ricardo

10 de outubro de 2020

Sumário

0.1 Definição Intuitiva de Limite

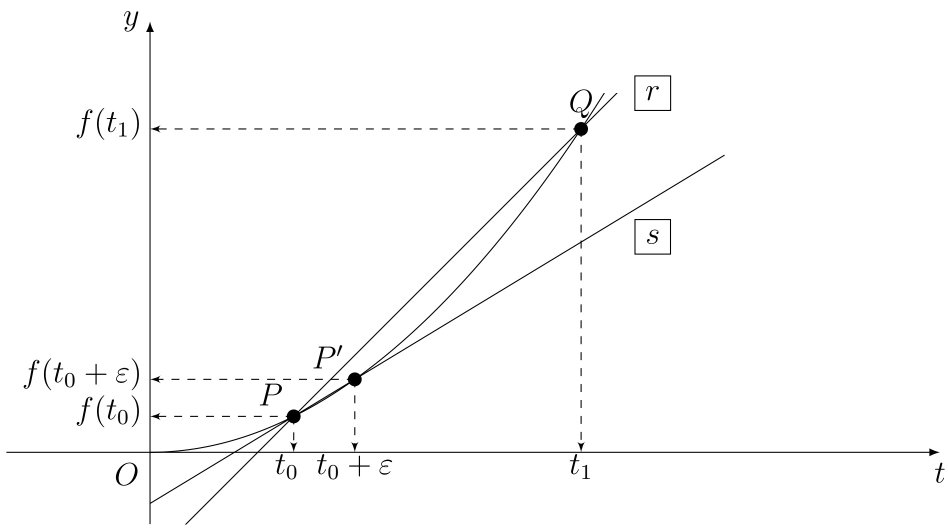
Um objeto percorre uma distância ao longo do tempo t. Em um instante t qualquer desejamos saber a velocidade do objeto. Sabemos que a velocidade média escalar deste objeto é dada por $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ onde Δs é a variação do espaço e Δt a variação do tempo ao longo daquela distância percorrida.

Observamos que no instante de tempo $t_{inicial}$ e t_{final} o objeto objeto percorreu uma distância Δs onde s_{incial} e s_{final} fornecem sua posição. Podemos escrever da seguinte forma,

$$V_m := \frac{s_{final} - s_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} \tag{1}$$

Em **(1)** observamos que a velocidade escalar média é a razão entre a variação do espaço percorrido Δs em um determinado intervalo de tempo Δt. Mas contudo e se desejássemos saber a velocidade num instante t ao invés do intervalo Δt.

Imaginemos o seguinte, temos um instante qualquer t_0 e tomamos um incremento nesse tempo o qual chamaremos de ε.



Seja $f(t) = y$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que define a posição de um carro no instante t. A posição após t segundos é medida em metros. Podemos ver de **(1)** que a inclinação da reta secante r que contém os pontos P e Q nos fornece a velocidade média no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Logo,

$$v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{2}$$

que é exatamente a inclinação m_{PQ} da reta secante r.

Tomemos agora um P' qualquer sobre a curva cujas coordenadas são $(t_0+\varepsilon, f(t_0+\varepsilon))$ onde ε significa um pequeno incremento em t_0.

A inclinação da reta secante s por PP' é dada por,

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0+\varepsilon)-f(t_0)}{(t_0+\varepsilon)-t_0}$$

ou

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0+\varepsilon)-f(t_0)}{\varepsilon} \tag{3}$$

Tomando-se ε cada vez menor, teremos um um $t_0+\varepsilon$ cada vez mais próximo de t_0. Esse valor tomado cada vez menor é o que chamaremos de limite para o qual ε ficará bem próximo de 0 mas $\varepsilon \neq 0$. Em símbolos teríamos,

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad talque \quad t_0+\varepsilon \longrightarrow t_0$$

Assim definimos o limite de forma intuitiva como,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t_0+\varepsilon)-f(t_0)}{\varepsilon} = L \tag{4}$$

que nos fornecerá a velocidade no instante exato t_0. No gráfico acima de f(t) estaríamos tomando o ponto P' cada vez mais próximo de P.

Temos também que,

$$m = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t_0+\varepsilon)-f(t_0)}{\varepsilon} = L$$

é nada mais que a equação da reta tangente da função f no ponto $P = (t_0, f(t_0))$.

E a velocidade no instante t_0, ou seja, a *velocidade instantânea* seria dada por

$$v(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t_0+\varepsilon)-f(t_0)}{\varepsilon} \tag{5}$$

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^2 - 4$ calcular o limite quando x se apróxima de 1.

Solução: Verifiquemos a tabela com valores de x cada vez mais próximos de 1.

Tabela 1: $x > 1$

x	$f(x)$
2	0
1.5	-1.75
1.4	-2.04
1.3	-2.31
1.2	-2.56
1.1	-2.79
1.05	-2.8975
1.025	-2.949375
1.0125	-2.97484375
1.00625	-2.9874609375
1.001	-2.99799
1.0001	-2.9997999

Tabela 2: $x < 1$

x	$f(x)$
0	-4
0.5	-3.75
0.6	-3.64
0.7	-3.510
0.8	-3.36
0.9	-3.19
0.95	-3.0975
0.96	-3.0784
0.97	-3.0591
0.98	-3.0396
0.99	-3.0199
0.995	-3.0099

Das tabelas (1) e (2) notamos que a medida que o valores de x se aproximam de 1 os valores para $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de -3 podemos daí supor que o limite seria -3.

Vejamos abaixo.

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 4$$

A medida que $x \to 1$ temos $x^2 \to 1$ logo $(x^2 - 4) \to -3$.
Portanto $lim_{x \to 1}(x^2 - 4) = -3$.

Definimos o limite de $\mathbf{f(x)}$ como,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

onde a medida que **x se aproxima de a**, com $x \neq a$, temos que $\mathbf{f(x)}$ **se aproxima de L** que é o limite de $f(x)$ quando $x \to a$.

0.2 Leis dos Limites

Propriedades e leis de limites

Leis dos Limites. *Seja c uma constante e funções $f(x)$ e $g(x)$, onde existem*

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ e } \lim_{x\to a} g(x)$$

então valem,

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a}[cg(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *se* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.
6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a}]^n$ *onde n é um inteiro positivo.*
7. $\lim_{x\to a} = c$
8. $\lim_{x\to a} x = a$
9. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ *onde n é um inteiro positivo*
10. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$ *onde n é um inteiro positivo. (Se n for par supomos $a > 0$.)*
11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ *onde n é um inteiro positivo. (Se n for par supomos que $\lim_{x\to a} > 0$.)*

0.3 Limites Laterais

Uma condição fundamental para existência do limite é que o limite esquerdo e o limite direito ambos sejam iguais. Ou seja,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Quando escrevemos $\lim_{x\to a^+} f(x)$ estamos a querer dizer que os valores x se aproximam de a pela direita, ou seja, x se torna cada vez mais próximo de a contudo $x > a$. Já quando estamos a falar de $\lim_{x\to a^-} f(x)$ estamos a querer dizer que estamos tomando valores de x próximos de a pela esquerda contudo $\mathbf{x} < \mathbf{a}$.

Exemplo: Tomemos como exemplo a função $f(x) = |x|$. Calcular o $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solução: Sabemos que,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Tomemos o limite de $f(x)$ para valores de x maiores que zero. Como estamos interessados em $x \geq 0$, temos que

$$\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

para $x \to 0^-$, ou seja, x tendendo a 0 pela esquerda, onde $x < 0$, temos

$$\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

logo o limite existe, como $\lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$.

Tomemos agora o exemplo, $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
Vejamos o limite direito de $f(x)$, sabemos que $x \to 0$, têm-se $x \geq 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

porém para $x \to 0^-$, onde $x < 0$, observamos que,

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

portanto o limite $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Existência do Limite. *Seja* $f(x) = y$ *uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$*. O limite,*

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe se, e somente se,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ou seja, os limites esquerdo e direitos forem iguis.