

# Cálculo 1 - Limites

Wandeson Ricardo

10 de outubro de 2020

# Sumário

0.1	Definição Intuitiva de Limite . . . . .	2
0.2	Leis dos Limites . . . . .	5
0.3	Limites Laterais . . . . .	5
0.4	Continuidade . . . . .	7
0.5	Limites no Infinito . . . . .	7

## 0.1 Definição Intuitiva de Limite

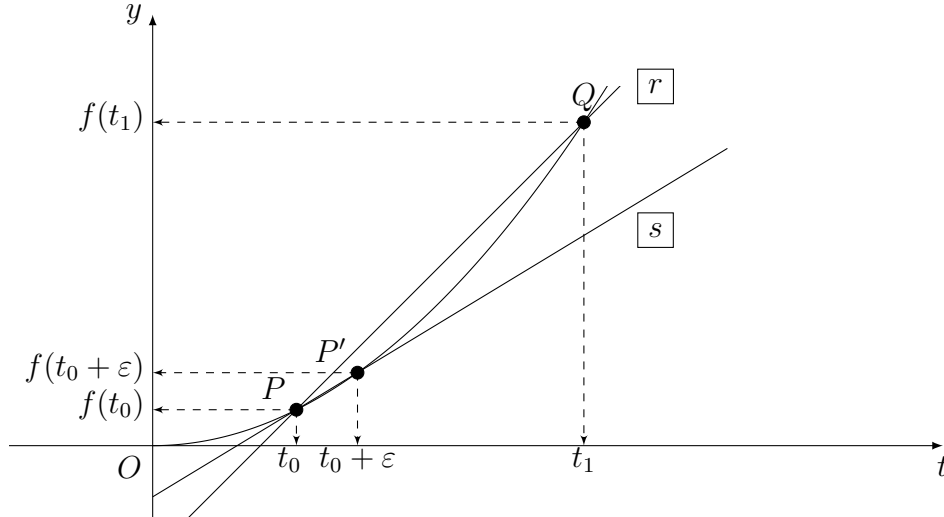
Um objeto percorre uma distância ao longo do tempo  $t$ . Em um instante  $t$  qualquer desejamos saber a velocidade do objeto. Sabemos que a velocidade média escalar deste objeto é dada por  $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  onde  $\Delta s$  é a variação do espaço e  $\Delta t$  a variação do tempo ao longo daquela distância percorrida.

Observamos que no instante de tempo  $t_{inicial}$  e  $t_{final}$  o objeto percorreu uma distância  $\Delta s$  onde  $s_{inicial}$  e  $s_{final}$  fornecem sua posição. Podemos escrever da seguinte forma,

$$V_m := \frac{s_{final} - s_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} \quad (1)$$

Em (1) observamos que a velocidade escalar média é a razão entre a variação do espaço percorrido  $\Delta s$  em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ . Mas contudo e se desejássemos saber a velocidade num instante  $t$  ao invés do intervalo  $\Delta t$ .

Imaginemos o seguinte, temos um instante qualquer  $t_0$  e tomamos um incremento nesse tempo o qual chamaremos de  $\varepsilon$ .



Seja  $f(t) = y$  uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  que define a posição de um carro no instante  $t$ . A posição após  $t$  segundos é medida em metros. Podemos ver de (1) que a inclinação da reta secante  $r$  que contém os pontos  $P$  e  $Q$  nos fornece a velocidade média no intervalo de tempo  $[t_0, t_1]$ . Logo,

$$v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \quad (2)$$

que é exatamente a inclinação  $m_{PQ}$  da reta secante  $r$ .

Tomemos agora um  $P'$  qualquer sobre a curva cujas coordenadas são  $(t_0 + \varepsilon, f(t_0 + \varepsilon))$  onde  $\varepsilon$  significa um pequeno incremento em  $t_0$ .

A inclinação da reta secante  $s$  por  $PP'$  é dada por,

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{(t_0 + \varepsilon) - t_0}$$

ou

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \quad (3)$$

Tomando-se  $\varepsilon$  cada vez menor, teremos um  $t_0 + \varepsilon$  cada vez mais próximo de  $t_0$ . Esse valor tomado cada vez menor é o que chamaremos de limite para o qual  $\varepsilon$  ficará bem próximo de 0 mas  $\varepsilon \neq 0$ . Em símbolos teríamos,

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{talque} \quad t_0 + \varepsilon \longrightarrow t_0$$

Assim definimos o limite de forma intuitiva como,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L \quad (4)$$

que nos fornecerá a velocidade no instante exato  $t_0$ . No gráfico acima de  $f(t)$  estaríamos tomando o ponto  $P'$  cada vez mais próximo de  $P$ .

Temos também que,

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L$$

é nada mais que a equação da reta tangente da função  $f$  no ponto  $P = (t_0, f(t_0))$ .

E a velocidade no instante  $t_0$ , ou seja, a *velocidade instantânea* seria dada por

$$v(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \quad (5)$$

**Exemplo 1:** Seja  $f(x) = x^2 - 4$  calcular o limite quando  $x$  se aproxima de 1.

**Solução:** Verifiquemos a tabela com valores de  $x$  cada vez mais próximos de 1.

Tabela 1: $x > 1$	
$x$	$f(x)$
2	0
1.5	-1.75
1.4	-2.04
1.3	-2.31
1.2	-2.56
1.1	-2.79
1.05	-2.8975
1.025	-2.949375
1.0125	-2.97484375
1.00625	-2.9874609375
1.001	-2.99799
1.0001	-2.9997999

Tabela 2: $x < 1$	
$x$	$f(x)$
0	-4
0.5	-3.75
0.6	-3.64
0.7	-3.510
0.8	-3.36
0.9	-3.19
0.95	-3.0975
0.96	-3.0784
0.97	-3.0591
0.98	-3.0396
0.99	-3.0199
0.995	-3.0099

Das tabelas (1) e (2) notamos que a medida que o valores de  $x$  se aproximam de 1 os valores para  $f(x)$  ficam cada vez mais próximos de -3 podemos daí supor que o limite seria -3.

Vejamos abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 4$$

A medida que  $x \rightarrow 1$  temos  $x^2 \rightarrow 1$  logo  $(x^2 - 4) \rightarrow -3$ .  
Portanto  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4) = -3$ .

Definimos o limite de  $\mathbf{f(x)}$  como,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

onde a medida que  $\mathbf{x}$  se aproxima de  $\mathbf{a}$ , com  $x \neq a$ , temos que  $\mathbf{f(x)}$  se aproxima de  $\mathbf{L}$  que é o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ .

## 0.2 Leis dos Limites

Propriedades e leis de limites

**Leis dos Limites.** *Seja  $c$  uma constante e funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , onde existem*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

*então valem,*

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [cg(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$  onde  $n$  é um inteiro positivo.
7.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$
8.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
9.  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  onde  $n$  é um inteiro positivo
10.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$  onde  $n$  é um inteiro positivo. (Se  $n$  for par supomos  $a > 0$ .)
11.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$  onde  $n$  é um inteiro positivo. (Se  $n$  for par supomos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ .)

## 0.3 Limites Laterais

Uma condição fundamental para existência do limite é que o limite esquerdo e o limite direito ambos sejam iguais. Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Quando escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  estamos a querer dizer que os valores  $x$  se aproximam de  $a$  pela direita, ou seja,  $x$  se torna cada vez mais próximo de

a contudo  $x > a$ . Já quando estamos a falar de  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  estamos a querer dizer que estamos tomando valores de  $x$  próximos de  $a$  pela esquerda contudo  $x < a$ .

**Exemplo:** Tomemos como exemplo a função  $f(x) = |x|$ . Calcular o  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Solução:** Sabemos que,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Tomemos o limite de  $f(x)$  para valores de  $x$  maiores que zero. Como estamos interessados em  $x \geq 0$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

para  $x \rightarrow 0^-$ , ou seja,  $x$  tendendo a 0 pela esquerda, onde  $x < 0$ , temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$$

logo o limite existe, como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$ .

Tomemos agora o exemplo,  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ .

Vejamos o limite direito de  $f(x)$ , sabemos que  $x \rightarrow 0$ , têm-se  $x \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

porém para  $x \rightarrow 0^-$ , onde  $x < 0$ , observamos que,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$$

portanto o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  não existe.

**Existência do Limite.** *Seja  $f(x) = y$  uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . O limite,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

*existe se, e somente se,*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

*ou seja, os limites esquerdo e direitos forem iguais.*

## 0.4 Continuidade

## 0.5 Limites no Infinito