Cálculo 2 - Limite à Duas Variáveis

Definição 1. *Seja f uma função cujo domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ contém pontos arbitrariamente próximos de (a,b). Dizemos que o* ***limite de*** *$f(x,y)$* ***quando*** *(x,y)* ***tende a*** *(a,b) é L e escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

se para todo número $\epsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que se $(x,y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ então $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Exemplo: Verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Seja $\epsilon > 0$, queremos determinar um $\delta > 0$ tal que se

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ então $|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| < \epsilon$

Considerando $x^2 > 0$ e $y^2 > 0$, como $x^2 + y^2 > 0$ e $3x^2y > 0$ *se* $y \geq 0$ *e* $3x^2y < 0$ *se* $y < 0$ com $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, temos

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ *ento* $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \epsilon$

Como $y^2 \geq 0$ logo $x^2 + y^2 \geq x^2$ assim $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ e portanto

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq (3|y|) = 3\sqrt{y^2} < 3\sqrt{x^2+y^2}$$

Como, se $3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$ logo $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \epsilon$ assim se escolhermos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ tal que,

$3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$ de forma que $\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} < \epsilon$ obtendo-se $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\epsilon}{3}$.

Assim se escolhermos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ e fizermos $0 < \sqrt{x^2+y^2 < \delta}$ teremos,

$$|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| < 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3(\frac{\epsilon}{3}) = \epsilon$$

. $\square$