Cálculo 1 - Limites

Wandeson Ricardo

9 de outubro de 2020

0.1 Definição Intuitiva de Limite

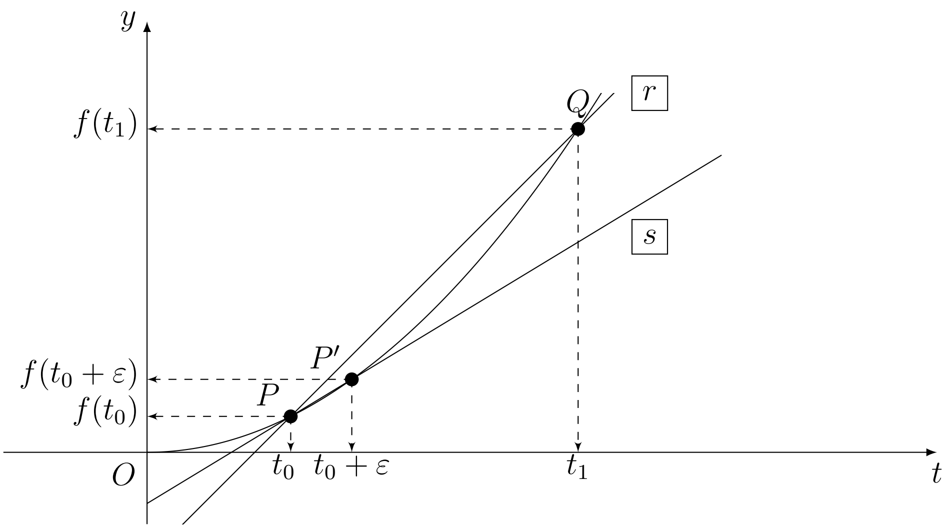
Um objeto percorre uma distância ao longo do tempo t. Em um instante t qualquer desejamos saber a velocidade do objeto. Sabemos que a velocidade média escalar deste objeto é dada por $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ onde Δs é a variação do espaço e Δt a variação do tempo ao longo daquela distância percorrida.

Observamos que no instante de tempo $t_{inicial}$ e t_{final} o objeto objeto percorreu uma distância Δs onde s_{incial} e s_{final} fornecem sua posição. Podemos escrever da seguinte forma,

$$V_m := \frac{s_{final} - s_{inicial}}{t_{final} - t_{inicial}} \tag{1}$$

Em **(1)** observamos que a velocidade escalar média é a razão entre a variação do espaço percorrido Δs em um determinado intervalo de tempo Δt. Mas contudo e se desejássemos saber a velocidade num instante t ao invés do intervalo Δt.

Imaginemos o seguinte, temos um instante qualquer t_0 e tomamos um incremento nesse tempo o qual chamaremos de ε.



Seja $f(t) = y$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que define a posição de um carro no instante t. A posição após t segundos é medida em metros. Podemos ver de **(1)** que a inclinação da reta secante r que contém os pontos P e Q nos fornece a velocidade média no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$. Logo,

$$v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \tag{2}$$

que é exatamente a inclinação m_{PQ} da reta secante r.

Tomemos agora um P' qualquer sobre a curva cujas coordenadas são $(t_0 + \varepsilon, f(t_0 + \varepsilon))$ onde ε significa um pequeno incremento em t_0.

A inclinação da reta secante s por PP' é dada por,

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{(t_0 + \varepsilon) - t_0}$$

ou

$$m_{PP'} = \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \tag{3}$$

Tomando-se ε cada vez menor, teremos um um $t_0 + \varepsilon$ cada vez mais próximo de t_0. Esse valor tomado cada vez menor é o que chamaremos de limite para o qual ε ficará bem próximo de 0 mas $\varepsilon \neq 0$. Em símbolos teríamos,

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad talque \quad t_0 + \varepsilon \longrightarrow t_0$$

Assim definimos o limite de forma intuitiva como,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L \tag{4}$$

que nos fornecerá a velocidade no instante exato t_0. No gráfico acima de f(t) estaríamos tomando o ponto P' cada vez mais próximo de P.

Temos também que,

$$m = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} = L$$

é nada mais que a equação da reta tangente da função f no ponto $P = (t_0, f(t_0))$.

E a velocidade no instante t_0, ou seja, a *velocidade instantânea* seria dada por

$$v(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon) - f(t_0)}{\varepsilon} \tag{5}$$

Exemplo 1: Seja $f(x) = x^2 - 4$ calcular o limite quando x se apróxima de 1.

Solução: Verifiquemos a tabela com valores de x cada vez mais próximos de 1.

Tabela 1: $x > 1$

x	$f(x)$
2	0
1.5	-1.75
1.4	-2.04
1.3	-2.31
1.2	-2.56
1.1	-2.79
1.05	-2.8975
1.025	-2.949375
1.0125	-2.97484375
1.00625	-2.9874609375
1.001	-2.99799
1.0001	-2.9997999

Tabela 2: $x < 1$

x	$f(x)$
0	-4
0.5	-3.75
0.6	-3.64
0.7	-3.510
0.8	-3.36
0.9	-3.19
0.95	-3.0975
0.96	-3.0784
0.97	-3.0591
0.98	-3.0396
0.99	-3.0199
0.995	-3.0099

Das tabelas (1) e (2) notamos que a medida que o valores de x se aproximam de 1 os valores para $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de -3 podemos daí supor que o limite seria -3.

Vejamos abaixo.

$$\lim_{x \to 1} x^2 - 4$$

A medida que $x \to 1$ temos $x^2 \to 1$ logo $(x^2 - 4) \to -3$.
Portanto $lim_{x \to 1}(x^2 - 4) = -3$.