いしたー問題

問題

3×2の既知の行列Mと未知の行列Pについて$M^{\mathrm{T}}PM = I$となるような行列Pを求める問題ってどうやって解けばいいんだろ

ただしPは$P = Q^{\mathrm{T}}Q$なる分解が可能。

条件

$$M^{\mathrm{T}}PM = I$$

3×2行列Mを3次元ベクトルを2本並べた

$$M = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$$

を用いて条件を書き直すと、

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_1 &= 1 \\ \mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_2 &= 0 \\ \mathbf{m}_2^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_1 &= 0 \\ \mathbf{m}_2^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_2 &= 1 \end{cases}$$

となっている。

前提

Mについて条件から以下の制約が必要であり、Mが以下の条件を満たさないとき、条件を満たすPは存在しない。

1. $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$かつ$\mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$
2. $\forall a,\ \mathbf{m}_1 \neq a\mathbf{m}_2$

1の証明

条件より$\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_1 = 1, \mathbf{m}_2^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_2 = 1$が必要。$\mathbf{m}_1 = \mathbf{0}$または$\mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$のとき、$\mathbf{m} = \mathbf{0}$とおくと

$$\mathbf{m}^{\mathrm{T}}P\mathbf{m} = 0$$

となるので必要条件に矛盾。したがって$\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$かつ$\mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$。

2の証明

$\mathbf{m}_1 = a\mathbf{m}_2$とおけるとき、

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_1 &= 1 \\ \mathbf{m}_2^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_2 &= a^2(\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}}P\mathbf{m}_1) = a^2 &= 1 \end{cases}$$

より$a^2 = 1$。しかしこれは条件である

$$\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}} P \mathbf{m}_2 = a(\mathbf{m}_1^{\mathrm{T}} P \mathbf{m}_1) = a = 0$$

に矛盾。したがって$\mathbf{m}_1 = a\mathbf{m}_2$を満たす$a$は存在しない。

具体的に求めるのは簡単

Mは$X^{\mathrm{T}}X = I$を満たす適当な直交行列$X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$を用いて次のように書ける（この$X$の選び方は不定性の部分であり、本当に適当）。

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &= a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + a_{13}\mathbf{x}_3 \\
\mathbf{m}_2 &= a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 + a_{23}\mathbf{x}_3 \\
\mathbf{m}_3 &= a_{31}\mathbf{x}_1 + a_{32}\mathbf{x}_2 + a_{33}\mathbf{x}_3
\end{aligned}$$

ただし$\mathbf{m}_3$は上の条件を満たすように適当に付け加えたベクトルである（ここも不定性の部分で適当だが、$\mathbf{m}_3 \neq \mathbf{0}$かつ$\mathbf{m}_3 \neq a\mathbf{m}_1$かつ$\mathbf{m}_3 \neq b\mathbf{m}_2$）。このとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を用いて$M = XA^{\mathrm{T}}$と書ける（このMの2列目まで着目するともとのMになる）。

Pは対角化可能なので、このXを固有ベクトルに持つものを選べる。このときXに対応するPの固有値を並べた行列を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$X^{\mathrm{T}} P X = \Lambda$$

のように対角化できる。このとき

$$M^{\mathrm{T}} P M = A X^{\mathrm{T}} P X A^{\mathrm{T}} = A \Lambda A^{\mathrm{T}}$$

である。条件と合わせれば

$$A \Lambda A^{\mathrm{T}} = I_3$$

を満たすようにΛを定めればよい（条件ではI_2だが、I_3と拡張しても一般性を失わない）。上の式は要素ごとに書き直せば、与えられた条件からは

$$\begin{cases}
\lambda_1 a_{11}^2 + \lambda_2 a_{12}^2 + \lambda_3 a_{13}^2 = 1 \\
\lambda_1 a_{21}^2 + \lambda_2 a_{22}^2 + \lambda_3 a_{23}^2 = 1 \\
\lambda_1 a_{11} a_{21} + \lambda_2 a_{12} a_{22} + \lambda_3 a_{13} a_{23} = 0
\end{cases} \tag{1}$$

となり、勝手につけくわえた部分は

$$\begin{cases}
\lambda_1 a_{31}^2 + \lambda_2 a_{32}^2 + \lambda_3 a_{33}^2 = 1 \\
\lambda_1 a_{11} a_{31} + \lambda_2 a_{12} a_{32} + \lambda_3 a_{13} a_{33} = 0 \\
\lambda_1 a_{21} a_{31} + \lambda_2 a_{22} a_{32} + \lambda_3 a_{23} a_{33} = 0
\end{cases} \tag{2}$$

となる。ここで(1)式に含まれるa_{ij}はXの選び方に依存して定まる数なので、Xを一度選んでしまえば定数とみなせる。したがって(1)式は

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、Wに逆行列が存在すれば

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が求まったあとで、(2)式は必ず解ける（変数はa_{31}, a_{32}, a_{33} の3つだが、第2式と第3式を用いて第1式はa_{32} とa_{33} を消去してa_{31} の2次式とすることができる。これら3つの変数は$\mathbf{m}_3$ を付け加えるときに勝手に用意したものなので、解けること、すなわち必ず用意できることさえわかれば具体的に求める必要はない）。

元の問題は$QQ^{\mathrm{T}} = P$となるQを求めることであったようだ。ここで

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

なる行列Λを定義して$Q = \Lambda^{\frac{1}{2}} X$とおけば、

$$QQ^{\mathrm{T}} = \Lambda^{\frac{1}{2}} X (\Lambda^{\frac{1}{2}} X)^{\mathrm{T}} = X \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} X^{\mathrm{T}} = X \Lambda X^{\mathrm{T}} = P$$

となるのでQが求まる。