

いした一問題

問題

3×2 の既知の行列 M と未知の行列 P について $M^T P M = I$ となるような行列 P を求める問題ってどうやって解けばいいんだろ

ただし P は $P = Q Q^T$ なる分解が可能。

条件

$$M^T P M = I$$

3×2 行列 M を3次元ベクトルを2本並べた

$$M = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)$$

を用いて条件を書き直すと、

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_1 = 1 \\ \mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_2 = 0 \\ \mathbf{m}_2^T P \mathbf{m}_1 = 0 \\ \mathbf{m}_2^T P \mathbf{m}_2 = 1 \end{cases}$$

となっている。

前提

M について条件から以下の制約が必要であり、 M が以下の条件を満たさないとき、条件を満たす P は存在しない。

1. $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$
2. $\forall a, \mathbf{m}_1 \neq a \mathbf{m}_2$

1の証明

条件より $\mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_1 = 1, \mathbf{m}_2^T P \mathbf{m}_2 = 1$ が必要。 $\mathbf{m}_1 = \mathbf{0}$ または $\mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$ のとき、 $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ とおくと

$$\mathbf{m}^T P \mathbf{m} = 0$$

となるので必要条件に矛盾。したがって $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$ 。

2の証明

$\mathbf{m}_1 = a \mathbf{m}_2$ とおけると、

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_1 = 1 \\ \mathbf{m}_2^T P \mathbf{m}_2 = a^2 (\mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_1) = a^2 = 1 \end{cases}$$

より $a^2 = 1$ 。しかしこれは条件である

$$\mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_2 = a(\mathbf{m}_1^T P \mathbf{m}_1) = a = 0$$

に矛盾。したがって $\mathbf{m}_1 = a\mathbf{m}_2$ を満たす a は存在しない。

具体的に求めるのは簡単

M は $X^T X = I$ を満たす適当な直交行列 $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ を用いて次のように書ける（この X の選び方は不定性の部分であり、本当に適当）。

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_1 &= a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + a_{13}\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{m}_2 &= a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 + a_{23}\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{m}_3 &= a_{31}\mathbf{x}_1 + a_{32}\mathbf{x}_2 + a_{33}\mathbf{x}_3\end{aligned}$$

ただし \mathbf{m}_3 は上の条件を満たすように適当に付け加えたベクトルである（ここも不定性の部分で適当だが、 $\mathbf{m}_3 \neq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{m}_3 \neq a\mathbf{m}_1$ かつ $\mathbf{m}_3 \neq b\mathbf{m}_2$ ）。このとき

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

を用いて $M = XA^T$ と書ける（この M の2列目まで着目すると M になる）。

P は対角化可能なので、この X を固有ベクトルに持つものを選べる。このとき X に対応する P の固有値を並べた行列を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$X^T P X = \Lambda$$

のように対角化できる。このとき

$$M^T P M = A X^T P X A^T = A \Lambda A^T$$

である。条件と合わせれば

$$A \Lambda A^T = I_3$$

を満たすように Λ を定めればよい（条件では I_2 だが、 I_3 と拡張しても一般性を失わない）。上の式は要素ごとに書き直せば、与えられた条件からは

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11}^2 + \lambda_2 a_{12}^2 + \lambda_3 a_{13}^2 = 1 \\ \lambda_1 a_{21}^2 + \lambda_2 a_{22}^2 + \lambda_3 a_{23}^2 = 1 \\ \lambda_1 a_{11} a_{21} + \lambda_2 a_{12} a_{22} + \lambda_3 a_{13} a_{23} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

となり、勝手につけくわえた部分は

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{31}^2 + \lambda_2 a_{32}^2 + \lambda_3 a_{33}^2 = 1 \\ \lambda_1 a_{11} a_{31} + \lambda_2 a_{12} a_{32} + \lambda_3 a_{13} a_{33} = 0 \\ \lambda_1 a_{21} a_{31} + \lambda_2 a_{22} a_{32} + \lambda_3 a_{23} a_{33} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

となる。ここで(1)式に含まれる a_{ij} は X の選び方に依存して定まる数なので、 X を一度選んでしまえば定数とみなせる。したがって(1)式は

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 W に逆行列が存在すれば

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が求まったあとで、(2)式は必ず解ける（変数は a_{31}, a_{32}, a_{33} の3つだが、第2式と第3式を用いて第1式は a_{32} と a_{33} を消去して a_{31} の2次式とすることができる。これら3つの変数は \mathbf{m}_3 を付け加えるときに勝手に用意したものなので、解けること、すなわち必ず用意できることさえわかれば具体的に求める必要はない）。

元の問題は $QQ^T = P$ となる Q を求めることであったようだ。ここで

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

なる行列 Λ を定義して $Q = \Lambda^{\frac{1}{2}}X$ とおけば、

$$QQ^T = \Lambda^{\frac{1}{2}}X(\Lambda^{\frac{1}{2}}X)^T = X\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}X^T = X\Lambda X^T = P$$

となるので Q が求まる。