王树禾《图论》部分习题答案整理

By WHU sliu

第一章 图

1.7 任取 n 个人组成的人群，n≥2，至少有两位，他们在此人群中的朋友一样多.

证明:（方法不唯一）

令上述人群内人的集合为图 G 的顶点集合，若两人是朋友，则相应的两顶之间连一边，所得之图 G 是人群的朋友关系图，显然 G 是单图，图中顶点的次数恰表示该人在此人群中的朋友的个数，利用图 G，上述问题就抽象成如下的图论问题：

单图 G 中，若 v(G)≥2，则在 G 中存在次数相等的两个顶点。下面我们证明这个命题。

用反证法，设 G 中各点的次数均不相等。必有 $\Delta \geq \nu-1$（0,1，……， ν-1 共 ν 个整数），若 $\Delta = \nu-1$，必有 $\delta \geq 1$（此时其他点必与最大次数的顶点相邻），从而 $\Delta-\delta+1 < \nu$，这与各点次数均不等（$\Delta-\delta+1 \geq \nu$）矛盾；若 $\Delta > \nu-1$，又与 G 是单图矛盾.

1.40 证明：G 是单图，$\delta \geq k$，则 G 有长 k 的轨.

证明：若 P 是 G 中的一条最长轨，它的长 l 小于 k,设 P 为 $v_1v_2\cdots\cdots v_lv_{l+1}$，由假定 $d(v_1) \geq \delta \geq k > l$，从而在 P 外存在一顶点 v_0 和 v_1 邻接，于是 $v_0v_1v_2\cdots\cdots v_lv_{l+1}$ 是 G 中长于 P 的一条轨，这和 P 是 G 中最长轨矛盾，故 $l \geq k$。我们可以在 P 中取一段长为 k 的轨，故 G 中存在长为 k 的轨.

1.42 若 G 是单图，$\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$，则 G 是连通图.

证明：若 G 不连通，分为两个顶点数分别是ν_1与ν_2的互不连通的子图，从而

$\varepsilon \le \binom{\nu_1}{2} + \binom{\nu_2}{2} = \dfrac{\nu_1(\nu_1-1)}{2} + \dfrac{\nu_2(\nu_2-1)}{2} \le \dfrac{(\nu-1)(\nu-1-1)}{2} = \binom{\nu-1}{2}$，矛盾.

类似题目：

°若 G 是单图，每一对不相邻的顶点的度数之和至少是$\nu-1$，则 G 是连通图.

证明：若 G 不连通，存在两个顶点数分别是ν_1与ν_2的互不连通的连通片 G_1和 G_2，

$\nu_1+\nu_2 \le \nu$，

对 G_1中任意顶点 v_1和 G_2中任意顶点 v_2，v_1 和 v_2一定不相邻，顶点的度数之和：

$$d(v_1)+d(v_2) \le \nu_1-1+\nu_2-1 \le \nu-2 < \nu-1,$$

矛盾.

1.47 证明：连通图若有两条最长轨，则二最长轨有公共顶点.

证明：反证法：

设 P(v_1, v_2)和 P(v_1', v_2')都是 G 中的最长轨，且无公共顶点。由于 G 是连通的，故存在 P(v_2, v_2')，设 v_s为由 v_2出发沿 P(v_2, v_2')前进，最后一个和 P(v_1, v_2)相交的顶点，设 v_s'为由 v_s出发，沿 P(v_2, v_2')前进，第一个和 P(v_1', v_2')相交的顶点。

不失一般性，设 P(v_1, v_2)中(v_1, v_s)段的长度不小于 P(v_1', v_2')中(v_1', v_s')段，于是从 v_1出发,经 P(v_1, v_2)中的(v_1, v_s)段，然后经 P(v_2, v_2')中(v_s, v_s')-段，最后经 P(v_1', v_2')中(v_s', v_2')-段到达 v_2'，显然这条轨比原来的 P(v_1, v_2)要长，这和 P(v_1, v_2)是最长轨矛盾，所以 P(v_1, v_2)和 P(v_1', v_2')有公共顶点.

1.50 证明：若 G 是单图，d(G)＝2，$\Delta=\nu-2$，则$\varepsilon \ge 2\nu-4$.

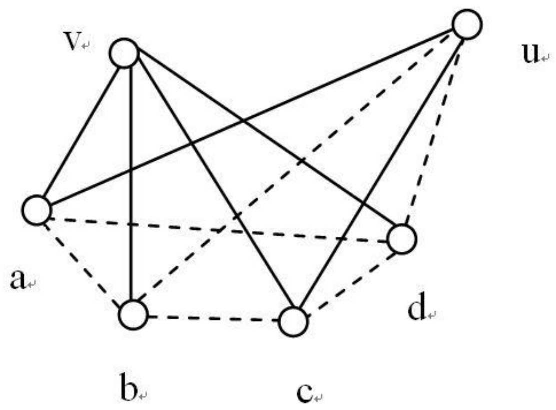
证明：

由$\Delta=\nu-2$知，G 中有顶点 v 与$\nu-2$个顶点相邻，此时图 G 已经至少含有$\nu-2$条边，与 v 相邻的这$\nu-2$个顶点集合设为 S，除了顶点 v 和集合 S 的 G 的唯一顶点 u 与顶点 v 必不相邻，u 至少与 S 中的一个顶点相邻.（现在图的顶点分为 u，v，顶点集合 S 三个部分）

为使 G 的直径为 2，即 u 到各顶点的距离不超过 2，图 G 至少还需要增加$\nu-2$条边，因为 S 中的每个顶点至少需要与 u $\cup$N(u)中的一个顶点相邻，所以对于 S 的

每个顶点除了与 v 相邻的边都要增加一条边，图 G 至少还要增加$\nu-2$条边，故 $\varepsilon \geq \nu-2+\nu-2=2\nu-4$.

注：N(u)为 u 的邻顶组成的集合，例子如下图所示



S＝{a,b,c,d},u∪N(u)＝{u,a,c},对于 b 和 d，都至少与{u,a,c}中的一个顶点相邻。

1.58 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$是 6 个城市，下面矩阵的（i,j）号元素是 v_i 到 v_j 的机票票价，试为一个旅行者制作一张由 v_1 到各城去旅游的最便宜的航行路线图.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

解：以 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 为顶点，两顶点相邻当且仅当票价不为∞，各边的权等于票价，在这样的赋权图上，使用 Dijkstra 算法，计算 v_1 到 v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 的最短路径：

(1)$i=0$，标号 $l(v_1)=0$, $l(v_j)=\infty$，$j\neq 1$,固定标号点集 $S_0=\{v_1\}$。临时标号点集为 $\bar{S}_0=\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$。

(2)令 $l(v_2)=\min\{l(v_2), l(v_1)+w(v_1v_2)\}=\min\{\infty, 0+50\}=50$

$l(v_3)=\min\{l(v_3), l(v_1)+w(v_1v_3)\}=\min\{\infty, 0+\infty\}=\infty$

$l(v_4)=\min\{l(v_4), l(v_1)+w(v_1v_4))\}=\min\{\infty, 0+40\}=40$

$l(v_5) = \min\{l(v_5), l(v_1) + w(v_1v_5)\} = \min\{\infty, 0+25\} = 25$

$l(v_6) = \min\{l(v_6), l(v_1) + w(v_1v_6)\} = \min\{\infty, 0+10\} = 10$

由 $l(v_6) = \min\{l(v_j)\}$知，v_1 到 v_6 的最短轨为 v_1v_6，长为 10。令 $S_1 = S_0 \cup \{v_6\} = \{v_1, v_6\}$，$\bar{S}_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$。

(3) $i=1$，令 $l(v_2) = \min\{l(v_2), l(v_6) + w(v_6v_2)\} = \min\{50, 10+25\} = 35$

$l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_6) + w(v_6v_3)\} = \min\{\infty, 10+\infty\} = \infty$

$l(v_4) = \min\{l(v_4), l(v_6) + w(v_6v_4))\} = \min\{40, 10+25\} = 35$

$l(v_5) = \min\{l(v_5), l(v_6) + w(v_6v_5)\} = \min\{25, 10+55\} = 25$

由 $l(v_5) = \min\{l(v_j)\}$知，v_1 到 v_5 的最短轨为 v_1v_5，长为 25。令 $S_2 = S_1 \cup \{v_5\} = \{v_1, v_6, v_5\}$，$\bar{S}_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$。

(4) $i=2$，令 $l(v_2) = \min\{l(v_2), l(v_5) + w(v_5v_2)\} = \min\{35, 25+\infty\} = 35$

$l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_5) + w(v_5v_3)\} = \min\{\infty, 25+20\} = 45$

$l(v_4) = \min\{l(v_4), l(v_5) + w(v_5v_4))\} = \min\{35, 25+10\} = 35$

由 $l(v_2) = \min\{l(v_j)\}$知，v_1 到 v_2 的最短轨为 $v_1v_6v_2$，长为 35。令 $S_3 = S_2 \cup \{v_2\} = \{v_1, v_6, v_5, v_2\}$，$\bar{S}_3 = \{v_3, v_4\}$。

Tips:算法中 $l(v_i)$出现两个相同的最小值，任意选取一个即可；计算 $l(v_i)$时，min 里面两个值相同是多解的情况

(5) $i=3$，令 $l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_2) + w(v_2v_3)\} = \min\{45, 35+15\} = 45$

$l(v_4) = \min\{l(v_4), l(v_2) + w(v_2v_4))\} = \min\{35, 35+20\} = 35$

由 $l(v_4) = \min\{l(v_j)\}$知，v_1 到 v_4 的最短轨为 $v_1v_6v_4$ 或者 $v_1v_5v_4$，长为 35。令 $S_4 = S_3 \cup \{v_4\} = \{v_1, v_6, v_5, v_2, v_4\}$，$\bar{S}_4 = \{v_3\}$。

(6) $i=4$，令 $l(v_3) = \min\{l(v_3), l(v_4) + w(v_4v_3)\} = \min\{45, 35+10\} = 45$

由此可知，v_1到v_3的最短轨为$v_1v_5v_3$或者$v_1v_6v_4v_3$或者$v_1v_5v_4v_3$，长为 45。令S_5＝$S_4\cup\{v_3\}$＝$\{v_1, v_6, v_5, v_2, v_4, v_3\}$，$\bar{S}_5=\emptyset$。

(7) i＝5＝v-1，停止。

终点	最便宜的航行路线	票价
v_2	$v_1\to v_6\to v_2$	35
v_3	$v_1\to v_5\to v_3$ 或者 $v_1\to v_6\to v_4\to v_3$ 或者 $v_1\to v_5\to v_4\to v_3$	45
v_4	$v_1\to v_6\to v_4$ 或者 $v_1\to v_5\to v_4$	35
v_5	$v_1\to v_5$	25
v_6	$v_1\to v_6$	10

1.72 证明：若 G 是连通图，$\nu\geq 2$，$\varepsilon<\nu$，则 G 中至少有两个一次顶.

证明：G 是连通图，那么 G 的每个顶点的次数大于等于 1，

假设 G 中无一次顶，那么每个顶点的次数大于等于 2，所以$\sum_{v\in V}d(v)\geq 2\nu$，而$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$，则有$\varepsilon\geq\nu$，与已知矛盾，所以 G 中有一次顶，

假设 G 中恰有一个一次顶，因为 G 中奇数次顶的个数是偶数，那么$\sum_{v\in V}d(v)\geq 1+3+2(\nu-2)=2\nu$，同上与已知矛盾，所以 G 中至少有两个一次顶.

第二章 树

2.2 如果一棵树仅有两个叶，则此树就是一条轨.

证明：已知$\varepsilon(T)=\nu(T)-1$，$\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon=2(\nu-1)$，除了叶，其他顶点的次数≥2，若其他顶点中有次数大于 2 的顶点，则$\sum_{v\in V}d(v)>2+2(\nu-2)=2(\nu-1)$，矛盾，故其他顶点的次数都是 2，于是此树就是一条轨.

2.3 证明：若 T 是树，且$\Delta(T)\geq n$，则 T 至少有n个叶.

证明：设树 T 有s个叶，

假如$s\leq n-1$，那么$\Delta(T)-s\geq 1$

$$2\varepsilon(T)=\sum_{v\in V}d(v)\geq\Delta(T)+2\left[\nu(T)-s-1\right]+s=2\nu(T)-2+\Delta(T)-s\geq 2\nu(T)-1$$

$\varepsilon(T) \geq \nu(T) - \dfrac{1}{2} > \nu(T) - 1$，

这与树 T 的$\varepsilon(T) = \nu(T) - 1$矛盾，

所以$s \geq n$，即 T 至少有 n 个叶.

2.12 证明：$\tau(K_\nu - e) = (\nu - 2)\nu^{\nu-3}$，其中$e \in E(K_\nu)$.

证明：由定理 2.2（Cayley），$\tau(K_\nu) = \nu^{\nu-2}$，

K_ν的生成树均由$(\nu - 1)$条边组成，$\varepsilon(K_\nu) = \dfrac{1}{2}\nu(\nu - 1)$，

由对称性，K_ν的每条边在它的所有生成树中恰出现了$\dfrac{(\nu-1)\nu^{\nu-2}}{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)} = 2\nu^{\nu-3}$次，

所以$\tau(K_\nu - e) = \nu^{\nu-2} - 2\nu^{\nu-3} = (\nu - 2)\nu^{\nu-3}$

第三章 平面图

3.7 若平面图 G 的顶数不少于 11 个，则 G^C 不是平面图.
证明：

设 $\nu(G) = \nu(G^C) = \nu$

首先 $\varepsilon(G) + \varepsilon(G^C) = \varepsilon(K_\nu) = \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}$，

又 $\varepsilon(G) \leq 3\nu - 6$，

则 $\varepsilon(G^C) = \dfrac{\nu(\nu-1)}{2} - \varepsilon(G) \geq \dfrac{\nu^2 - 7\nu + 12}{2}$，

可证$\nu \geq 11$时，$\dfrac{\nu^2 - 7\nu + 12}{2} > 3\nu - 6$，

所以$\nu \geq 11$时，$\varepsilon(G^C) > 3\nu - 6$，从而 G^C 不是平面图.

3.8 S＝{x_1，x_2，……，x_n}是平面上的点组成的集合，$n \geq 3$，S 中任二点距离至少为 1,则距离恰为 1 的顶对在 S 中最多（$3n$ -6）对.

证明:

以 S 为顶点集构造一个单图 G，x_i 与 x_j 在 G 中相邻当且仅当 x_i 与 x_j 间距离为 1，

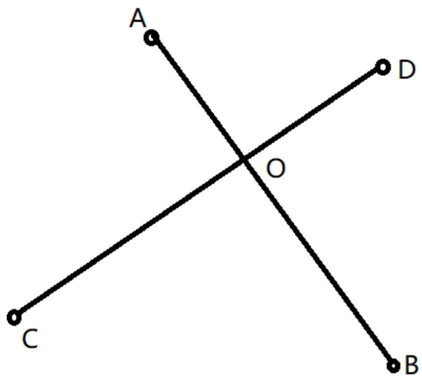
下证 G 中任两边除了端点外没有其他交点(G 为平面图)，

假设存在两条边有其它交点，如图设边 AB 与边 CD 交于 O，

则有　　　　　　　　　AO+CO>AC，BO+DO>BD，

所以　　　　　　　　　AC+BD<AO+CO+BO+DO＝AB+CD＝2，

又已知 AC⩾1，BD⩾1，则 AC+BD⩾2，矛盾，



故 G 为平面单图，

(1) G 是连通的，由推论 3.1，$\varepsilon(G)\le 3n-6$ ；

(2) G 不是连通的，设有ω（ω＞1）个连通片 G_1，G_2，……，G_ω，

由推论 3.1，$\varepsilon(G_i)\le 3\nu(G_i)-6$，两边对 i 求Σ得:

$\sum_{i=1}^{\omega}\varepsilon(G_i)\le\sum_{i=1}^{\omega}\left[3\nu(G_i)-6\right]$，即

$\varepsilon(G)\le 3\sum_{i=1}^{\omega}\nu(G_i)-6\omega=3\nu-6\omega<3\nu-6$.

综上，$\varepsilon(G)\le 3n-6$ 即距离恰为 1 的顶对在 S 中最多（3n -6）对.

注：n＞3 等号不成立.

第三章补充：

1.　（欧拉公式推论）连通平面图 G 中 $d(f)\ge l\ge 3$，证明：$\varepsilon\le\frac{l}{l-2}(\nu-2)$

证明：连通平面图 G 中，

$$l\phi\le\sum_{i=1}^{\phi}d(f_i)=2\varepsilon\,,$$

根据 Euler 公式：　　　　　$\nu-\varepsilon+\phi=2$，

得到：　　　　　　　　　$l\varepsilon=l\nu+l\phi-2l\le l\nu+2\varepsilon-2l=2\varepsilon+l(\nu-2)$，

即 $\varepsilon\le\dfrac{l}{l-2}(\nu-2)$.（与推论 3.1 思路相同）

特别地，得到两个关于平面图的必要条件（平面图的顶数确定之后，边数有上界）：

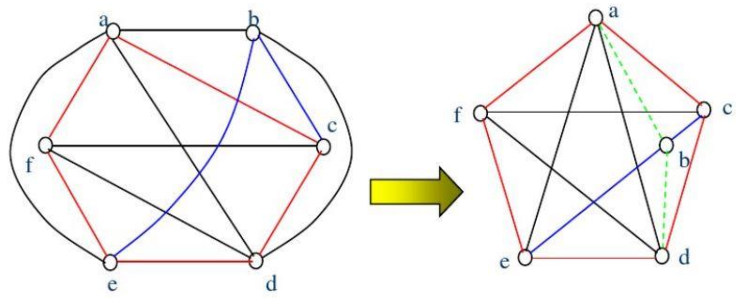
1) 当单图 G 是 $\nu\ge 3$ 的连通平面图时，$l=3$，则 $\varepsilon\le 3(\nu-2)=3\nu-6$ 即推论 3.1。

对于 K_5，$\nu=5$，$\varepsilon=10$，$10=\varepsilon>3\nu-6=9$，不满足必要条件，所以 K_5 不是平面图。

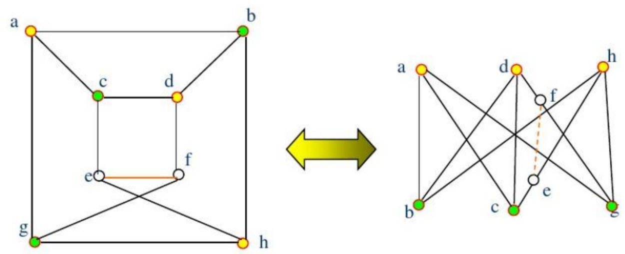
2) 当单图 G 是 $\nu\ge 3$ 的连通平面图时，且 G 是二分图时，$l=4$(因为二分图无奇圈（定理 1.2），所以每个面的次数至少是 4，可以取到 4)，则 $\varepsilon\le 2(\nu-2)=2\nu-4$.

对于 $K_{3,3}$，$\nu=6$，$\varepsilon=9$，$9=\varepsilon>2\nu-4=8$，不满足必要条件，所以 $K_{3,3}$ 不是平面图。

- 左图含有与K_5同胚的子图, 因此它也是非平面图。



- 左图的一个子图与$K_{3,3}$同胚。因此它是***非平面图***。



2. 证明：在连通平面图 G 中，

（1）若 G 的平面嵌入 G' 的面没有三角形，则存在次数不超过 3 的顶点（$\delta\le 3$）；

（2）若 G 的所有顶点度数不小于 3（$\delta=3$），则存在次数不超过 5 的面.

证明：反证法：

（1）假设对 $\forall\nu\in V$，$d(\nu)\ge 4$，

$$4\nu \le \sum_{\nu\in V} d(\nu)=2\varepsilon\ ,$$

由已知平面图中没有三阶圈，则对$\forall f_i$，$i=1,2$，……，Φ，$d(f_i)\ge 4$，类似地，有

$$4\phi \le \sum_{i=1}^{\phi} d(f_i)=2\varepsilon\ ,$$

根据 Euler 公式：$\nu-\varepsilon+\phi=2$，得到

$$4\varepsilon=4\nu+4\phi-8\le 2\varepsilon+2\varepsilon-8=4\varepsilon-8，矛盾.$$

（2）假设对$\forall f_i, i=1,2,\cdots\cdots$，$\Phi$，$d(f_i)\ge 6$，

$$6\phi \le \sum_{i=1}^{\phi} d(f_i)=2\varepsilon\ ,$$

由已知$\forall \nu\in V$，$d(\nu)\ge 3$，

$$3\nu \le \sum_{\nu\in V} d(\nu)=2\varepsilon\ ,$$

根据 Euler 公式：$\nu-\varepsilon+\phi=2$，得到

$$6\varepsilon=6\nu+6\phi-12\le 4\varepsilon+2\varepsilon-12=6\varepsilon-12，矛盾.$$

第四章 匹配理论及其应用

4.1 求 K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完备匹配的数目.

解：

K_{2n} 的任意一个顶点有（2n-1）种不同的方法被匹配，

所以，K_{2n} 的不同完美匹配个数＝(2n-1)×K_{2n-2} 的不同完美匹配个数＝……，如此推下去,可以归纳出 K_{2n} 的不同完美匹配个数为:(2n-1)!!

同样地，对具有二分类(X,Y)的完全偶图 $K_{n,n}$，对 X 中任意一个顶点，在 Y 中有 n 个顶点与之相配，

所以，$K_{n,n}$ 的不同完美匹配个数＝n× $K_{n-1,n-1}$ 的不同完美匹配个数＝……,可归纳出 $K_{n,n}$ 的不同完美匹配个数为:n!

4.2 树上是否可能有两个不同的完备匹配？为什么？

解：

不可能，可用反证法证明：设 M_1 和 M_2 是树 T 的两个不同的完备匹配，则 $M_1 \oplus M_2 \neq \varnothing$，而且以 $M_1 \oplus M_2$ 为边的导出子图是每个顶点的次数都是 2 的单图，因为每个顶点都被完备匹配 M_1 和 M_2 许配了，根据最长轨技术可证无 0 次顶与 1 次顶的单图中有圈（例 1.9），那么以 $M_1 \oplus M_2$ 为边的导出子图有圈，这导致了树 T 有圈，矛盾.

4.11 矩阵的行或列称为矩阵的“线”，证明：0-1 矩阵中含有所有 1 的线集合的最小阶数（集合元素个数）等于没有两个在同一线上 1 的最大个数.

证明：

设 X 为行集合，Y 为列集合，若某行与某列交点为 1，则将这两点连线，每个 0-1 矩阵对应一个二分图 G,

0-1 矩阵中含有所有 1 的线集合的最小阶数＝二分图 G 的最小覆盖的顶数 $\beta(G)$,

0-1 矩阵中没有两个在同一线上 1 的最大个数＝二分图 G 的最大匹配的边数 $\alpha'(G)$,

根据 konig 定理，对二分图 G 来说，$\beta(G)=\alpha'(G)$,

所以，0-1 矩阵中，含有所有 1 的线集合的最小阶数＝没有两个在同一线上 1 的最大个数.

4.19 n×n 方阵中两两不同行不同列的 n 个元素的集合称为一个对角线，对角线的权指它的 n 个元素之和，试求下列矩阵 A 的最小权的对角线：

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

解：

将方阵的每行视为 X 中一点，每列视为 Y 中一点，方阵的元素视为完全二分图(X,Y)的各边的权。方阵的对角线即二分图的完备匹配，本题求最小权的完备匹配。

设 J 为每个元素均为 1 的 5 阶方阵,考虑 $13J-A$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 7 & 0 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

问题转化为求权矩阵为 $13J-A$ 的 $K_{5,5}$ 的最佳匹配，用 KM 算法：

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & T & T & & & & \\
S & 9^{v} & 8 & 5 & 3 & 2 & 9 \\
 & 6 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{9}^{v} & 9 \\
S & 5 & \mathbf{8} & 1 & 4 & 7 & 8 \\
S & \mathbf{7} & \mathbf{7}^{v} & 0 & 3 & 6 & 7 \\
S & \mathbf{9} & 8 & 6 & 4 & 5 & 9 \\
 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 &
\end{array}
$$

方阵外的数字是一可行顶点标记 l，粗体数对应的边是 l 下相等子图 G_l 的边。

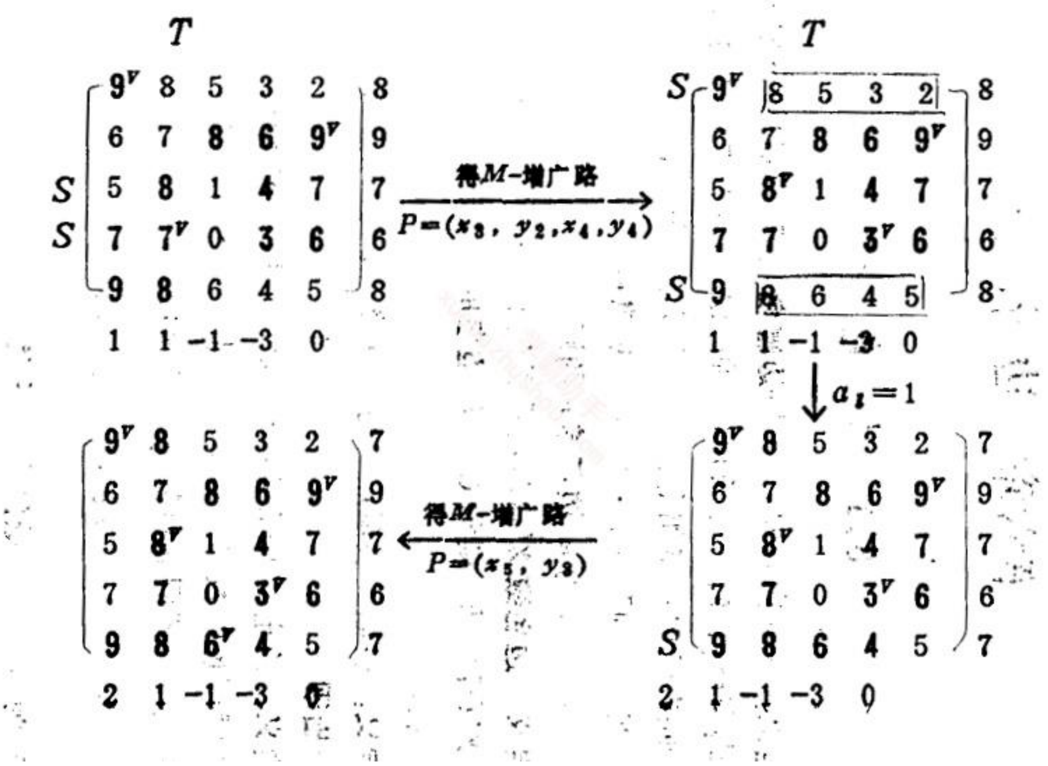
$\cdot^{v}$表 G_l 中的一个匹配 M 的元素。方阵中由算法得该 M 下，属于 S 的行与属于 T 的列都在矩阵旁标出了。且 $N_{G_l}(S)=T$。

$\boxed{\quad\quad}$中的元素是行 x 在 S 中列 y 不在 T 中的元素。

求得 $\alpha_l=1$，得如下页方阵。

故原方阵中元素(1,1)，(2,5)，(3,2)，(4,4)，(5,3)是一个最小权的对角线。

（这题也可在原方阵上求解，只要将可行标记定义改变为一边两端点的标记之和不大于该边的权即可！）。



结果是$\begin{pmatrix} \color{red}{4} & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & \color{red}{4} \\ 8 & \color{red}{5} & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & \color{red}{10} & 7 \\ 4 & 5 & \color{red}{7} & 9 & 8 \end{pmatrix}$，权值为 30。本题结果不唯一，选取不同的初始匹配可以得到结果是$\begin{pmatrix} \color{red}{4} & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & \color{red}{5} & 7 & 4 \\ 8 & \color{red}{5} & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & \color{red}{7} \\ 4 & 5 & 7 & \color{red}{9} & 8 \end{pmatrix}$，权值也是 30.

第五章 着色理论

5.1 求 n 顶轮的边色数.

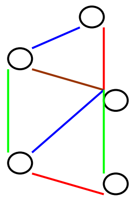
注：轮是由圈添加一个新顶点(称为轮心)，且在圈上的每一个顶点到新顶点之间连以边(称为轮的辐)所得到的图，n 顶轮是有 n 个顶点的轮。

解：1）在 n 顶轮 G 中，$\chi'(G)\geq\Delta=n-1$，

2）现可构造一个（n−1）的边正常着色如下：

用（n−1）种颜色对与 n 顶轮中心顶点关联的边着色，

n 顶轮的不与 v_0 关联的边 v_kv_{k+1} 着色为 $v_{k+2}v_0$ 的颜色一致（k＝1,2,⋯⋯, n－2），$v_{n-1}v_1$ 着色与 v_2v_0 相同.



5.5 证明：若 G 是奇数个顶的有边正则图，则 G 是第二类图.

证明：

对 G 进行 χ'(G)边正常着色，记成 C＝（E_1，E_2,⋯⋯$E_{\chi'(G)}$），

每个同色边集合都是一个匹配，又 ν 是奇数，

那么$|E_i|$（i＝1,2，⋯⋯，χ'(G)）＝同色边的条数≤最大匹配的边数＝$\frac{1}{2}(\nu-1)$，

所以 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{\chi'(G)}|E_i|\le\frac{1}{2}(\nu-1)\cdot\chi'(G)$，

因为 G 是正则图，所以 $\varepsilon=\frac{1}{2}\nu\cdot\Delta$，于是有 $\chi'(G)\ge\frac{\nu}{\nu-1}\Delta>\Delta$，

所以根据 Vizing 定理，$\chi'(G)=\Delta+1$，G 是第二类图.

5.8 （在一个学校里一周进行 5 天教学的情况下）有 7 名老师 x_1，x_2，⋯⋯，x_7，12 个班 y_1，y_2，⋯⋯，y_{12}，

$$P=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 & Y_8 & Y_9 & Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{array}$$

其中 p_{ij} 是教师 X_i 必须教 Y_j 班的节数。试问：

(*a*) 一天分成几节课，才能满足所提的要求？

(*b*) 若安排出每天 8 节课的时间表，需要多少间教室？

解：设由矩阵P对应的2-部图为 G，我们有：$d(X_1)=d(X_3)=d(X_4)=d(X_6)=35$；$d(X_2)=32$；$d(X_5)=d(X_7)=34$；$|V(G)|=19$；$|E(G)|=240$。

(*a*) $\Delta=35$，由定理 6.1，G 有 35个不相交的匹配。所以，一天分成7(7=35/5)节课就可以完成教学任务。

(*b*) 由定理 6.3 的系有 240/(5×8)=6，知 在每天 8 节的时间表下，需要 6 间教室。

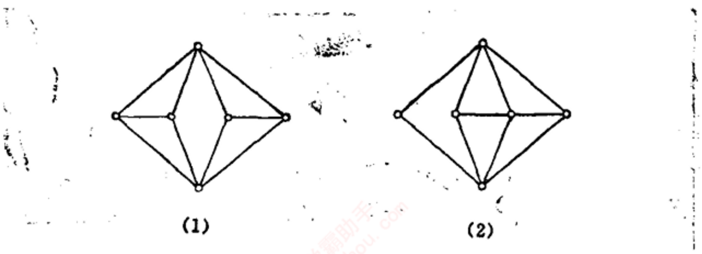
5.20 求颜色多项式 P（G，k），G 如图所示.

引理：（这里用$\pi_k(G)$表示颜色多项式）

8.4.6 设 G_1、G_2、…、G_ω 是 G 的 ω 个分支，则 $\pi_k(G)=\pi_k(G_1)\pi_k(G_2)\cdots\pi_k(G_\omega)$。

证：只需注意到 G_1、G_2、…、G_ω 均可用 k 色独立地进行着色，故命题成立。

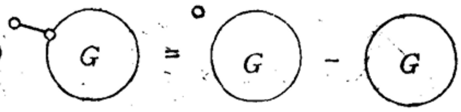
8.4.1 计算下列两图的色多项式



8.4.1 题 图

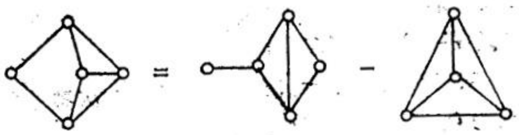
解：对图（1）、（2）计算前，先计算另外三个图的色多项式。下面我们沿用以图本身形象地代表它的色多项式的方法。由于环与重边对色多项式不产生影响，从而将它们从图中略去，一律用单图画出来。我们不妨先用练习 8.4.6 的结果来得到后面计算中要用到的（1）式。

(1)

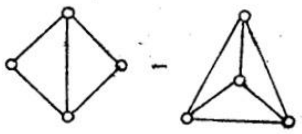


$$=(k-1)\pi_k(G)$$

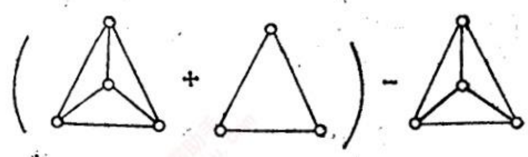
(2)



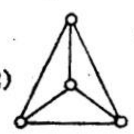
$=(k-1)$



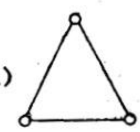
$=(k-1)$



$=(k-2)$



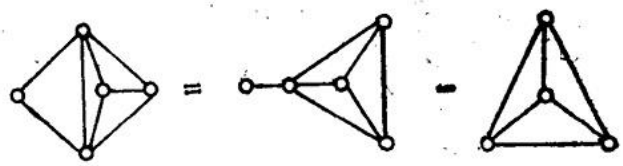
$+(k-1)$

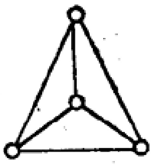


$$=k(k-1)(k-2)^2(k-3)+k(k-1)^2(k-2)$$

$$=k(k-1)(k-2)(k^2-4k+5)$$

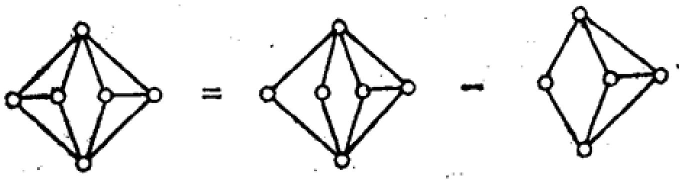
(3)

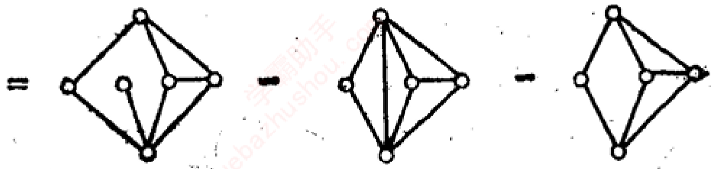


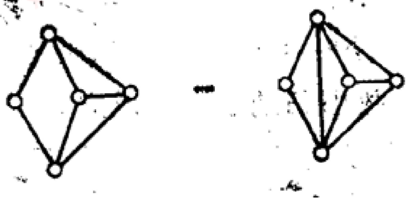
$=(k-2)$ 

$=k(k-1)(k-2)^2(k-3)$

所以对图(1)





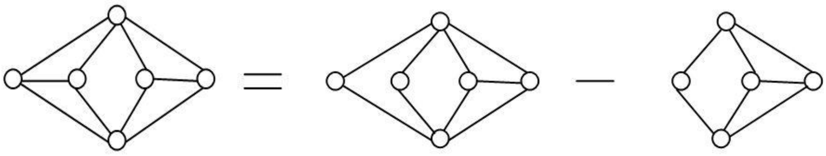
$=(k-2)$ 

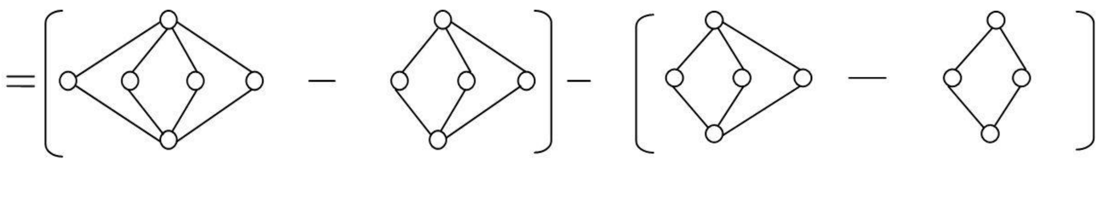
$$=k(k-1)(k-2)^2(k^2-4k+5)$$
$$-k(k-1)(k-2)^2(k-3)$$
$$=k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

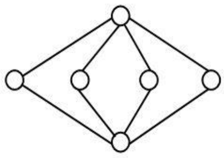
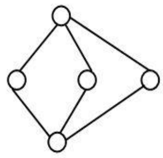
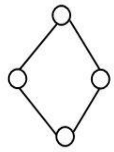
我的方法：

首先对于完全二分图 $K_{2,n}$，可以按照含有两顶的集合内顶点颜色不同和相同分类计算颜色多项式，然后相加得到 $K_{2,n}$ 的颜色多项式：

$$P(K_{2,n},k)=k(k-1)(k-2)^n+k(k-1)^n=k(k-1)[(k-2)^n+(k-1)^{n-1}]$$



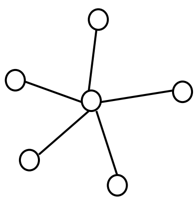


=  − 2  + 

$$P(G,k)=P(K_{2,4},k)-2P(K_{2,3},k)+P(K_{2,2},k)$$
$$=k(k-1)[(k-2)^4-2(k-2)^3+(k-2)^2+(k-1)^3-2(k-1)^2+(k-1)]$$
$$=k(k-1)\left\{(k-2)^2[(k-2)^2-2(k-2)+1]+(k-1)[(k-1)^2-2(k-1)+1]\right\}$$
$$=k(k-1)\left\{(k-2)^2[(k-2)-1]^2+(k-1)[(k-1)-1]^2\right\}$$
$$=k(k-1)(k-2)^2[(k-3)^2+(k-1)]$$
$$=k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$$

5.35 每个独立集是否可以扩张成最大独立集？每个覆盖集中是否含有最小覆盖集？

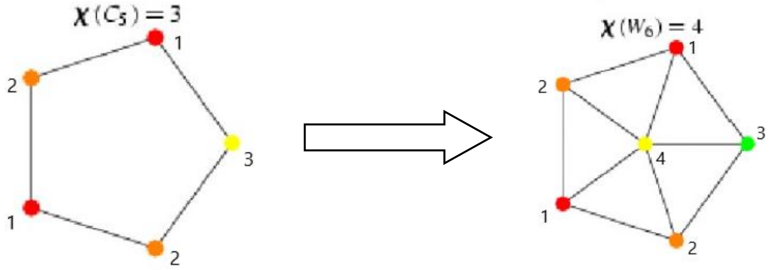
答：每个独立集不一定可以扩张成最大独立集比如下面的星 $K_{1,5}$ 中，星心是一个独立集，但是不能扩张成最大独立集（所有次数为 1 的顶点），每个覆盖集中不一定含有最小覆盖集，所有次数为 1 的顶点构成一个覆盖集，但是不含有最小覆盖集（星心）。（反例不唯一）



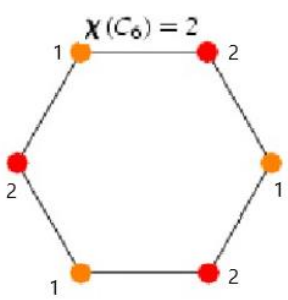
注：星是指只有一个次数大于 1 的顶（称为星心），其余顶的次数都是 1 的连通图。

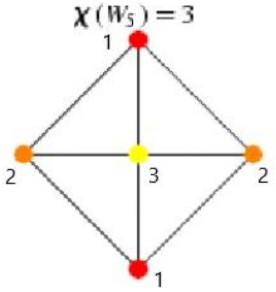
第五章补充：

1. 若 G 是奇圈，则 $\chi(G)=3$，若 G 是偶数顶轮，$\chi(G)=4$.



同理，若 G 是偶圈，则 $\chi(G)=2$，若 G 是奇数顶轮，$\chi(G)=3$.





2.（Brooks 定理）单图 G 是连通的，不是完全图，不是奇圈，则 $\chi(G)\leq\Delta$，即 G 是可以△着色的，也说明只有两类图满足 $\chi(G)=\Delta+1$：奇圈和完全图。

第六章 Euler 图和 Hamilton 图

6.3 求图 6.23 中的一条中国邮路

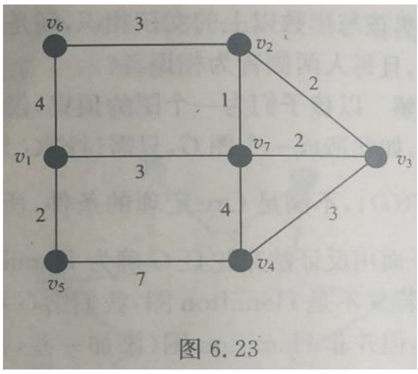


图 6.23

解：(1)在图 6.23 中，奇次顶集为

$$V_0=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}.$$

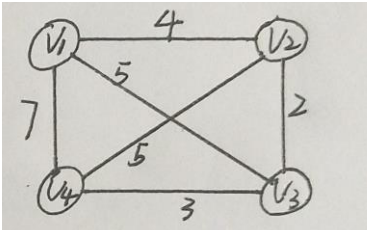
(2)在 V_0 中，每对顶的距离为(Dijkstra 算法去求):

$$d(v_1, v_2)=4，d(v_1, v_3)=5，d(v_1, v_4)=7，$$

$$d(v_2, v_3)=2，d(v_2, v_4)=5，d(v_3, v_4)=3.$$

(3)构作完全加权图 K_4，$V(K_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，边权 $w(v_iv_j)=d(v_i, v_j)$，$i\neq j$，$1\leqslant i, j\leqslant 4$,

见图.

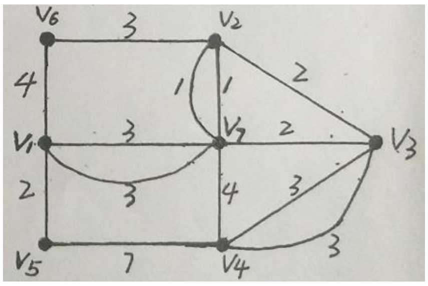


(4)求(3)中 K_4 的最佳(总权最小)的完备匹配 M,

$$M=\{v_1v_2,\ v_3v_4\}.$$

5)在 G 中求得 v_1 与 v_2 间最短轨 $P(v_1, v_2)=v_1v_7v_2$；v_3 与 v_4 间最短轨 $P(v_3,v_4)=v_3v_4$.

6)在 G 中沿 $P(v_1, v_2)$与 $P(v_3,v_4)$把边变成同权“倍边”，见图.

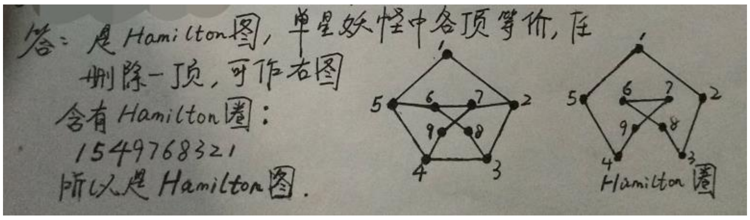


7)在 Euler 图上用 FE 算法求得一条 Euler 回路 W:

$$W=v_1v_7v_3v_4v_7v_2v_7v_1v_6v_2v_3v_4v_5v_1,$$

W 即为所求的中国邮路（不唯一）.

6.7 单星妖怪删除一顶后是否 Hamilton 图？

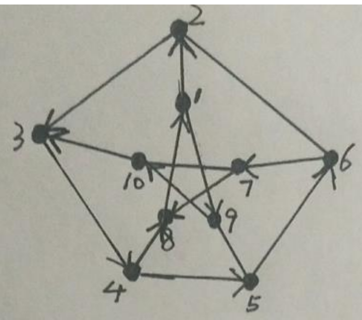


注：k 次正则图的顶点具有对称性，每个顶点的地位相同，所以单星妖怪的每个顶点的地位都相同

第七章 有向图

7.8 把单星妖怪定向成强连通有向图.

解：



如图所示标号，

根据定理7.1，有向生成回路存在即可，

左图中有向生成回路是：

1-2-3-4-5-6-7-8-1-9-10-3-4-8-1

（3-4和8-1用了两次）

没有定向的边方向任意

（2-6，5-9，7-10）→未定向

（此题定向方式可能不唯一

2-3-4-5-6-2-1-9-10-7-8-4-5-6-2 也可，4-5，5-6，6-2用了两次，应该不与给的第一个同构）

7.5 竞赛图不是强连通图，最少改变几条边的方向，可使它变成有向 Hamilton 图？

解：根据教材推论：竞赛图存在有向 Hamilton 轨，又因为不是强连通图，所以不存在有向 Hamilton 圈（否则存在有向 Hamilton 圈也就存在有向生成回路，此时竞赛图是强连通图），只需改变仅与有向 Hamilton 轨的起点和终点关联的有向边的方向即可形成有向 Hamilton 圈，此时该竞赛图变成有向 Hamilton 图，所以最少改变一条边的方向，可使它变成有向 Hamilton 图.