

## 1 Bezugssysteme

### 1.1 Einführung

#### 1.1.1 Zeit und Bezugssystem

- Newtonsche Mechanik: absolute Zeit  $t \rightarrow$  gleichförmig und unabhängig vom Koord.system
- Mathematisch: Die unabhängige Variable im Raum sämtlicher Bewegungen ist die Zeit
- Koordinatensystem: Definiert durch einen Ursprung  $O$  + drei orthogonale Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$
- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  = Basisvektoren, wobei  $\vec{x}$  eine Linearkombination aller drei Komponenten  $(x_1, x_2, x_3)$  des Punktes  $\vec{x}$  sind
- Die Bezeichnung "Vektor" ist eigentlich falsch, da ein Vektor unabhängig von Koordinatensystem ist. Koordinaten sind von einem Bezugssystem abhängig
- Post-newtonsche Formalismen sind Bezugs- und Zeitsysteme, Frequenzen, Phasen- und Laufzeitdifferenzen, welche ebenfalls wichtig sind

#### 1.1.2 Ortsvektor, Bahnkurve, Weltlinie

Die **Kinematik** eines Massenpunktes wird beschrieben durch den Ortsvektor  $\underline{x}(t)$  als Funktion der Zeit:  $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ .

Die Gesamtheit aller Endpunkte der Ortsvektoren nennt man **Bahnkurve**. Die Funktionen  $x_1, x_2, x_3$  sind die Koordinaten des Massenpunktes im gewählten **Bezugssystem**  $\{O, e_1, e_2, e_3\}$

Anstatt Parameterdarstellung  $\underline{x} = \underline{x}(t)$  kann auch die Kurve im vierdimensionalen Raum dargestellt werden ( $t = 4.$  Achse). Daraus ergibt sich die **Weltlinie**  $\underline{x}(ct, x_1, x_2, x_3)$

#### 1.1.3 Referenzsysteme und Referenzrahmen

- **Koordinatensystem:** Alle Grössen, die notwendig sind, um Punkte eindeutige Koordinaten zuordnen zu können (Ursprung, Achsen, Massstab)

- **Referenz- und Bezugssystem:** Erweiterung des Koordinatensystems durch z.B. eines Bezugsellipsoids oder Modellschwerefeld oder Gravitationskonstante
- **Datumsdefinition:** Festlegung von DOF (Freiheitsgrade), die nicht aus den Messungen selbst abgeleitet werden können. Hinreichende Menge von ausgewählten Grössen muss vorhanden sein
- **Koordinatenrahmen:** Wahl des Systems (Koordinatensystem) + Datumsdefinition  $\rightarrow$  Koordinatenlisten für Referenzpunkte
- **Referenzrahmen oder Bezugsrahmen:** Realisierung des Koordinatensystems + Datumsdefinition
- **Referenzsystem:** Konzept eines idealen Referenzsystems basierend auf abstrakten Prinzipien (Mathematik)
- **Konventionelles Ref.system:** Mathematik reicht nicht aus, da Faktoren wie Gezeiten, Lovesche Zahlen (Erdrigidität) berücksichtigt werden müssen
- **Konventioneller Ref.rahmen:** Konkrete Realisierung durch Punkte wie Stationen, Sterne, Quasare mit Koordinaten

In der Geodäsie gibt es drei Arten von Bezugssystemen:

- **Raumfeste Systeme:** Inertialsystem (gute Annäherung)  $\rightarrow$  zälestisch = celestial
- **Erdfeste Systeme:** Fest mit Erde verbunden und rotiert mit dieser
- **Lokale Systeme:** An ein Messinstrument gekoppelt oder orientiert sich an einer Referenzfläche

## 1.2 Raumfeste Bezugssysteme

Inertialsystem, welche keinen Scheinkräften ausgesetzt sind, es gelten allgemeine Kräfte wie:  $F = m \cdot a$ . Es gibt zwei Ansätze hierzu:

- **Dynamischer Ansatz:** Trajektorien von Planeten und System sind Differentialgleichungssysteme. Die Gleichungen gelten nur in einem Inertialsystem
- **Kinematischer Ansatz:** Annahme: Universum rotiert nicht (fixe Punkte). Aus diesem Grund ist es ein Inertialsystem. Galaktische Objekte bewegen sich nicht allzu fest

Es ist nicht ausschliessbar, dass unser Sonnensystem sich bewegt, und sich linear im Raum bewegt. Man nennt dies in diesem Fall ein **Quasiinertialsystem**

### 1.2.1 Grundbegriffe

- **Epoche:** Zeitpunkt, auf den sich Koordinaten, Bahnelemente oder Ephemeriden (tabellierte Positionen von Sternen etc. beziehen
- **Äquatorebene:** Ausdehnung des Äquators in den Raum und senkrecht zur Rotationsachse der Erde
- **Ekliptik:** Umlaufebene der Erde um die Sonne. Diese ist relativ zur Äquatorebene verschoben um die Schiefe der Ekliptik
- **Rotationspol der Erde:**  $P_N$ : Schnitt der Koordinate Z im Raumfesten Bezugssystem (Rotationsachse)
- **Pol der Ekliptik:**  $P_{II}$ : Pol, welcher sich mit der Ekliptik verschiebt
- **Schiefe der Ekliptik:**  $\epsilon \approx 23.4^\circ$
- **Frühlingspunkt:** Ist der Punkt, wo sich Ekliptik und Äquatorebene schneidet bevor die Ekliptik positiv wird (von Süden nach Norden). Bei der Nordhalbkugel ist dies der 19., 20. oder 21. März
- **Herbstpunkt:** Analog zu Frühlingspunkt, jedoch wird die Ekliptik hier von Norden nach Süden verlaufen (22. oder 23. September)
- **Äquinoktien:** Sind Frühlings- und Herbstpunkt der Erde (analog bei anderen Himmelskörpern) so kommt es zur Tag- und Nachtgleiche. Die Ekliptik und Äquatorebene gleich und die Halbkugel Nord und Süd wird komplett von der Sonne bestrahlt

### 1.2.2 International Celestial Reference System

Das **International Celestial Reference System (ICRS)** ist kinematisch definiert und ist ein raumfestes System. Die Achsenorientierung ist ausgelegt auf sehr weite Objekte im Universum, da diese praktisch kaum eine Eigenbewegung aufweisen.

Die Hauptebene des Systems entspricht dem mittleren Erdäquator zur Epoche J2000.0. Diese Ebene wird auch **Himmelsäquator** genannt. Eine Achse des Systems zeigt dementsprechend zum mittleren Rotationspol  $\bar{P}_{N_0}$ . Dieser Pol wird **Conventional Reference Pole** CRP genannt. Die Referenzrichtung entspricht der Richtung zum Frühlingspunkt zur Epoche J2000.0.

Die Festlegung der Epoche ist wichtig, da Äquatorebene, Ekliptik, und damit Frühlingspunkt aufgrund Nutation und Präzession sich langsam verändern. Die Epoche J2000.0 entspricht dem 1. Januar 2000, 11:58:55.816 (UTC). Je nachdem, wo der Ursprung gelegt wird, spricht man vom Barycentric Celestial Reference System (BCRS, Sonne) oder Geocentric Celestial Reference System (GCRS, Erde). Anwendungen liegen in der Raumfahrt. Das GCRS kommt meistens zur Anwendung bei Satellitenbahnen. Die Umrechnung berücksichtigt auch relativistische Effekte.

### 1.2.3 International Celestial Reference Frame

Das ICRF benutzt Quasare, BL-Lacertae-Objekte und aktive Galaxienkerne. Die ausgewählten Objekte sind in drei Klassen eingeteilt:

- 1. Klasse: Defining Group: Kennt man lange
- 2. Klasse: Candidate Group: Bisher nicht lange gekannt oder nicht bisher so lange beobachtet
- 3. Klasse: Nicht geeignet, jedoch immer noch interessant

Das aktuelle ICRF3 nutzt 303 definierte und 4500 Objekte. Die Objekte werden mittels VLBI ausgemessen. Es gibt auch optische Realisierungen, basierend auf dem Hipparcos Sternkatalog (100'000 Sterne aus zur Epoche 1991.25). Mittels Sonden konnte man jedoch auch bereits optische Realisierungen des ICRS verbessern.

Die dynamische Realisierung des ICRS ist durch die Ephemeriden von Planeten und des Mondes gegeben. Diese werden durch die Einstein-Infeld-Hoffmann-Gleichungen erzeugt (DGL-System), durch Punktmassen unter gegenseitiger Gravitationsanziehung mit Berücksichtigung allgemeiner relativistischer Effekten.

## 1.3 Erdfeste Bezugssysteme

Fest mit der Erde verbunden. Die Positionen sind fest mit der Erdoberfläche verbunden nur zu kleinen zeitlichen Variationen. Durch Tektonik oder Gezeiten verschieben diese sich wenig. Zudem definierte man ein Bezugsellipsoid, welches sich gut an den Erdkörper anschmiegt. Zudem kann ein Bezugsschwerefeld festgelegt werden.

### 1.3.1 International Terrestrial Reference System

Das IERS definierte ITRS ist ein Koordinatensystem mit gleich skalierten Koordinatenachsen. Massenzentrum ist die Erde (inkl. Ozeane und Atmosphäre). Die Z-Achse entspricht der mittleren Rotationsachse der Erde, die X-Achse zeigt zum Greenwich Meridian. Die Summe aller im Netz liegenden Stationen aufgrund Plattenbewegungen ergibt null (no-net-rotation), dies ist eine Bedingung des Systems. Regularisierte Stationskoordinaten führen dazu, dass Stationskoordinaten des ITRS sich auf eine feste Erdkruste beziehen.

### 1.3.2 International Terrestrial Reference Frame

Basierend auf VLBI, SLR, GPS und DORIS. Die Berechnung der Koordinaten findet zweistufig statt:

1. Einzelne Zeitserien zu technik-spezifischen Langzeiglösungen: Koordinaten, Geschwindigkeiten und Rotationsparameter werden berechnet
2. Vier Einzellösungen werden zur endgültigen ITRF Lösung kombiniert.

Das ITRF2014 bestimmt den Ursprung (Geozentrum) mittels SLR, Der Massstab wird definiert durch SLR und VLBI; und die Orientierung basierend auf dem alten System realisiert. Die Stationen erhalten Koordinaten, inklusive eine Geschwindigkeit:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}(t - t_0)$ . Die Koordinaten sind regularisiert durch konventionelle Korrekturen, um hochfrequente zeitliche Variationen zu eliminieren (Gezeiten und Ozeanauflasten). Der Zusatzterm ist  $\sum \Delta \mathbf{x}_i(t)$  Die Koordinaten neuer Punkte im ITRF werden folgendermaßen ausgewertet:

- Direkte Benutzung einiger ITRF-Stationen als Referenzpunkte
- Einführung von IGS Orbit- und Uhrinformationen in eine GNSS-Auswertung (Precise Point Positioning - PPP)

- Einführung und fixieren von einigen ITRF-Referenzstationen in eine GNSS-Auswertung
- Ähnlichkeitstransformationen der gemessenen Neupunkte in das ITRF mittels Referenzstationen

Neben kartesischen Koordinaten können auch geographische ellipsoidische Koordinaten miteinbezogen werden. Die Parameter des GRS80-Ellipsoids sind da empfohlen.

Schwerefelder können genutzt werden um Satellitenbahnen zu modellieren. Das EGM2008 Modell benötigt GRACE (Satelit) Daten, Schweremessungen am Boden und Altimetriedaten

### 1.3.3 GNSS-spezifische Referenzsysteme

GNSS-spezifische Systeme werden oft von broadcast-Orbits genutzt. GPS, GLONASS, GTRF nutzen dieses und stellen diese Daten zu Verfügung.

- GPS nutzt 12 Fundamentalstationen, es werden in der Realität mehr genutzt. Diese Stationen werden regelmäßig vermessen und an das ITRF angeschlossen. Das WGS84 ist auf das ITRF2008 bis zu 10cm konsistent
- GLONASS: Nutzt das russische System PZ-90, und beruht auf 26 Bodenstationen. Zwischen PZ-90.11 und ITRF2008 gibt es nur eine Translation
- GTRF (GALILEO Terrestrial Reference Frame): nutzt Daten von Referenzstationen mit ausgewählten GPS-Stationen des IGS-Netzes und transformiert in das ITRF. Hierzu gibt es auch Transformationsparameter.

## 1.4 Erdrotation

Die Transformation vom raumfesten System in das konventionelle erdfeste System ist im Prinzip eine räumliche Rotation, die durch drei Rotationswinkel vollständig beschrieben ist. Diese wird in mehrere Einzelschritte aufgetrennt.

### 1.4.1 Präzession - $\bar{S}_{i_0} \rightarrow \bar{S}_i$

Im ersten Schritt wird die Präzessionsbewegung der Erde berücksichtigt. Zur Referenzeпоche J2000.0 wird das mittlere Inertialsystem zum **mittleren Inertialsystem zur Beobachtungsepoche** umgewandelt. Es handelt sich hierbei um die Drehung um drei Winkel um die Achsen 3-2-3.

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{P} \bar{\mathbf{e}}_{i_0} = \mathbf{R}_3(-z_A) \mathbf{R}_2(\theta_A) \mathbf{R}_3(-\zeta_A) \bar{\mathbf{e}}_{i_0}$$

Die Winkel werden angenähert durch ein Zeitargument  $t$ , wobei dieses folgendermassen definiert ist:

$$t = (t_{obs} - J2000.0)/36525$$

Der Zeitunterschied in Tagen zwischen der Zeit der Observation zum J2000.0 wird normiert und so in Jahrhunderten gerechnet.

#### 1.4.2 Nutation - $\bar{S}_i \rightarrow S_i$

Nach der Präzession werden kurzperiodeische Nutationsperioden berücksichtigt. Somit wandelt man das System vom mittleren inertialsystem der Beobachtungsepoche zum **Wahren Inertialsystem der Beobachtungsepoche**. Somit wird mittels der mittleren Schiefe der Ekliptik (Rotation um Ekliptik), der Nutation in der Länge (Rotation um Erdachse) der Nutation in der Schiefe (Rotation um Ekliptik) die Transformation durchgeführt. Die Nutationswinkel sind schwieriger zu berechnen (viel Trigonometrie)

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{N}\bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}_1(-\epsilon_A - \Delta\epsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\epsilon_A)\bar{\mathbf{e}}_{i0}$$

#### 1.4.3 Erdrotation - $S_i \rightarrow S_e$

Durch das Anbringen der Präzession und Nutation wird die dritte Achse angepasst, damit die Rotationsachse der Erde entspricht und somit das **wahre erdfeste System** erhalten wird.

$$\mathbf{e}_e = \mathbf{R}_3(\Theta_0)\mathbf{e}_i$$

Der Rotationswinkel  $\Theta_0$  ist GAST (Greenwich apparent sidereal time), der wahren Sternzeit von Greenwich. Der Winkel ist der wahre Frühlingspunkt relativ zum Greenwichmeridians. Durch die schwankende Unregelmässigkeit der Tageslänge muss man die Differenz  $UT1 - UTC$  mitberücksichtigt werden. Die Nutation hat ebenfalls einen Einfluss auf GAST, also muss man diese mitberücksichtigen.

#### 1.4.4 Polbewegung - $S_e \rightarrow S'_e$

Schliesslich muss noch die Polbewegung der Erde (Bewegung der Rotationsachse um Figurenachsen) im erdfesten System berücksichtigen werden.

$$\mathbf{e}'_e = \mathbf{W}\mathbf{e}_e = \mathbf{R}_2(-x_p)\mathbf{R}_1(-y_p)\mathbf{e}_e$$

Die Polbewegung ist allerdings unregelmässig. Sie ist nicht periodisch, weshalb man auf tabellierte Werte zurückgreift. UT1-UTC, die Nutationswinkel werden jeweils immer vom IERS gestellt.

#### 1.4.5 Zusammenfassung Transformation raumfest $\leftrightarrow$ erdfest

$$\mathbf{e}'_e = \mathbf{WRNP}\bar{\mathbf{e}}_{i0}$$

Da es sich um Rotationsmatrizen handelt, welche orthogonal sind, kann die Rücktransformation mittels der Inversen (transponierte Matrizen) gemacht werden. Seit 2003 gibt es neuere Systeme, wo sogenannte intermediäre Pole, zälistische und terrestiale Referenzsysteme definiert worden sind. Diese Methode ist noch nicht sehr weit verbreitet.

### 1.5 Schwerefeldbezogene Bezugssysteme

Geodätische oder astronomische Beobachtungen an oder nahe der Erdoberfläche orientieren sich an der örtlichen Lotlinie. Diese Beobachtungen werden vorzugsweise in lokalen, auf das Schwerefeld bezogenen Referenzsystemen modelliert. Die Orientierung der lokalen Systeme ist durch die Astronomische Breite und Länge gegeben. Die Orientierungsparameter erlauben eine Hin- und Rücktransformation zwischen lokalen und globalen Bezugssystemen.

#### 1.5.1 Beschreibung der örtlichen Lotlinie

Die Richtung des Schwerevektors wird durch die Angabe der beiden Winkel der Breite und Länge gegeben ( $\Phi$  und  $\Lambda$ )

$$\mathbf{g} = -|\mathbf{g}| \cdot \hat{\mathbf{g}} = -|\mathbf{g}| \cdot \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix}$$

#### 1.5.2 Lokale astronomische Systeme

Der Ursprung lokaler astronomischer System liegt im Beobachtungspunkt  $P$ . Die Z-Achse ist gegeben durch die Lotrichtung und zeigt zum Zenit. Die x-Achse zeigt in Nordrichtung. Die y-Achse komplettiert ein Linkssystem. Der Zenitwinkel wird vom Zenit ausgemessen. Der Azimut im Uhrzeigersinn von der x-Achse aus.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}$$

Die Umrechnung vom lokalen System in ein globales System kann auf zwei verschiedene Arten ablaufen:

##### 1. Geometrisch:

- Richtungen der Koordinatenachsen des lokalen Systems werden abgebildet in den Raum des lokalen Systems. Mittels Skalarprodukts werden die Koordinaten in  $X$  auf  $x$  projiziert. Die Matrix, da orthonormal, kann invertiert werden durch die Transposition, somit ist  $M^T$  die Abbildung von Grössen in  $x$  nach  $X$

##### 2. Rotationen und Spiegelungen:

- Durch die Spiegelung der y-Achse (Rechtssystem), durch Drehungen um die y-Achse um den Winkel  $90 - \Phi$  (Breite) und Drehung um den Winkel  $180 - \Lambda$  (Länge), ergibt sich durch Matrixmultiplikation  $M^T$

### 1.6 Zeitsysteme

#### 1.6.1 Sonnenzeit und Sternzeit

Die Rotation der Erde stellt ein natürliches Zeitmass da. Hierbei werden zwei periodische Bewegungen in Betracht gezogen:

- Die tägliche Rotation der Erde um die polare Achse
- Der jährliche Umlauf der Erde um die Sonne

Der Sonnentag wird von aufeinanderfolgenden Höchstständen der Sonne an einem Beobachtungspunkt der Erde abgeleitet. Diese ist jedoch nicht konstant, da:

- Die Geschwindigkeit im Umlauf um die Sonne sich variiert (2. Kelper Gesetz)
- Die Bahnebene nicht rechtwinklig zur Rotationsachse ist

Die Einführung einer mittleren Sonnenbahn (Universal Time UT) führt zu einem mittleren Sonnentag. Hierfür gibt es folgende Gleichung, welche die Rektaszension der wahren Sonne gegenüber der Rektaszension der mittleren Sonne beschreibt:

$$EQ_T = -2e \sin M - 5/4 e^2 \sin 2M + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \sin(2\lambda_E K) - 1/2 \tan^4 \frac{\epsilon}{2} \sin 4\lambda_E K$$

Die Exzentrizität der Bahnellipse, die Schiefe der Ekliptik, die Mittlere Anomalie der Sonne, sowie die Länge der Sonne in der Ekliptik gemessen vom Frühlingspunkt werden hierzu benötigt. Die Abweichungen der wahren zur mittleren Sonnenzeit beträgt zwischen -14 und 16 Minuten. UT1 wurde eingeführt, um die aktuelle Erdrotation, die mittlere Sonnenbahn und den mittleren Pol zu beschreiben um somit den wahren Winkel der Rotation des globalen terrestrischen Koordinatensystems

darzustellen.

Die Sternzeit bezieht sich auf den Meridiandurchgang des Frühlingspunktes. Im Vergleich zur Sonnenzeit, wo 50 Stationen die Höchststände der Sonne bestimmen, wird hier vom der Winkelunterschied vom Greenwich Meridian zum mittleren, beziehungsweise wahren Frühlingspunkt gemessen. Lokale Sternzeiten sind ebenfalls definiert, womit die Relation zum Greenwich Apparent Siderial Time (GAST) und Greenwich Median Siderial Time berechnet wird:

$$\Lambda = LAST - GAST = LMST - GMST$$

### 1.6.2 Atomzeit

Alternativ zu den auf der Erdrotation basierenden Zeitskalen, werden die Zeiten durch Atomuhren realisiert. Die internationale Atomzeit AT1 basiert auf der SI-Sekunde auf dem rotierenden Geoid. Die Frequenzstabilitäten über Jahre sind bis zu  $10^{-13}$ .  $TT$  ist die dynamische Terrestrische Zeit und wird durch für die Integration von Satellitenbahnen verwendet.  $TAI$  wurde mittels 250 Atomuhren auf der Erde bestimmt und der Anfangspunkt wurde auf UT1 im Jahre 1958 festgelegt. Da jedoch UT1 und UTC mit der Zeit sich ändern aufgrund der Rotation der Erde.

## 2 Geometrie der Erde

Bereits früh wurde erkannt, dass die Erde eine Kugel ist. Durch die Annahmen der Griechen hatte man über die Zeit den Erdradius immer besser annähern können. Zudem wurde beobachtet, dass die Erde keine Kugel, sondern eher ein Rotationsellipsoid ist. Einerseits durch die Abplattung anderer Planeten, andererseits durch die Veränderungen der Schwerkraft mit der geographischen Breite.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = \frac{W^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

Durch die Vereinfachung von  $W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ , also dem kürzesten Abstand zwischen Z-Achse und Punkt P auf dem Rotationsellipsoiden können neue Gleichungen hergeleitet werden:

$$f = \frac{a - b}{a}, \text{ Abplattung } f$$

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ Lineare Exzentrizität } \varepsilon$$

$$e = \varepsilon/a \iff b = a\sqrt{1 - e^2}, \text{ Numerische Exzentrizität } e$$

$$\frac{b}{a} = 1 - f = \sqrt{1 - e^2}$$

Die Erde hat ungefähr eine Abplattung von  $f = 300$ , also beträgt der Unterschied zwischen  $a$  und  $b$  ungefähr 22 km. Die Lineare Exzentrizität misst den Abstand der Brennpunkte zum Ursprung. Bei der Erde ist dies ungefähr 522 km.

## 2.1 Geozentrische kartesische und krummlinige Koordinaten

### 2.1.1 Einleitung und Umrechnungsmethoden

In diesem Abschnitt wird die Umrechnungsmethode von kartesischen in krummlinige Koordinaten (Breite, Länge) angeschaut. Beim Rotationsellipsoid können drei verschiedene Arten von Breiten berechnet werden, die Länge  $\lambda$  ist gleich bei allen:

- Geozentrische Breite  $\beta$ : Hier wird die Ellipsenbahn verwendet, der Abstand ist abhängig von der Breite  $\beta$ .
- Reduzierte Breite  $\beta'$ : Hier wird ein Referenzkreis mit Radius  $a$  genommen, wobei ein Referenzpunkt P runterprojiziert werden kann auf Punkt Q, von dem die Koordinaten bestimmt werden können.
- Geodätische Breite  $\varphi$ : Hier wird die Tangentensteigung der Ellipse bestimmt. Mittels Trigonometrie, Ableitung der Ellipsengleichung von  $Z$  nach  $W$  nutzt man den Steigungswinkel. Es ergibt sich eine neue Grösse  $R_N$ , den Querkrümmungsradius im Punkt (ein Kreis, welcher an die Ellipse lokal anschmiegt und auf der Z-Achse liegt).

Die verschiedenen Winkel stehen im Verhältnis:

$$\tan \varphi = \frac{Z}{W} \frac{b^2}{a^2} \geq \tan \beta' = \frac{Z}{W} \frac{b}{a} \geq \tan \beta = \frac{Z}{W}$$

### 2.1.2 Topographie

Bisher wurden Helmert-Projektionen verwendet. Hier wird der Punkt P senkrecht auf die Ellipsenoberfläche projiziert. In der Pizzetti-Projektion wird Punkt P entlang der Lotlinie auf die Ellipsenoberfläche projiziert. Somit ergibt sich eine Parameter-

darstellung des Punktes auf die Oberfläche.

$$\mathbf{n}_Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_Q = R_N \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ (1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_Q + h_P \cdot \mathbf{n}_Q$$

Da der Querkrümmungsradius  $R_N$  die geodätische Breite  $\varphi$  beinhaltet, muss diese Gleichung für  $\varphi$  iterativ gelöst werden. Es gibt jedoch Annäherungsmethoden.

## 3 Geodätische Raumverfahren

### 3.1 Very Long Baseline Interometry

Mit grossen Radioteleskopen (bis  $D = 100 \text{ m}$ ) werden bei VLBI extragalaktische Radioquellen, sog. Quasare beobachtet. Diese Objekte sind so weit entfernt, dass sie keine feststellbaren Bewegungen aufweisen. Sie sind daher ideal geeignet, um ein raumfestes Referenzsystem zu realisieren. Das Netz von 2 bis 6 VLBI Stationen registrieren innerhalb von Sessionen à 24 Stunden. Von der gleichen Radioquelle werden zwei Frequenzen registriert. Auf extrem genauen Zeitmarken auf Festplatten werden diese registriert und im Bereich von  $10^{-14}$ . Durch Kreuzkorrelation werden die Signale zur Interferenz gebracht und die Unterschiede in der Ankunftszeit der Signale durch den Time Delay und die zeitlichen Differenzen der Laufzeitunterschiede durch Maximierung der Korrelation ermittelt.

$$\Delta \tau = -\frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_s$$

Durch Messungen vieler Radioquellen ergeben sich die Basisvektoren  $\mathbf{b}$  zwischen Stationen und die Richtungen zu den Quellen  $\mathbf{e}_s$  bestimmen und die troposphärische Refraktion, sowie instrumentelle Fehler mitbestimmen und reduzieren. Die Genauigkeit liegt hier im Millimeterbereich für Koordinaten bzw. Millimeter/Jahr in der Geschwindigkeit. Die ionosphärische Refraktion wird mittels zwei Frequenzen eliminiert. (2.3 und 8.4 GHz). Die Genauigkeit der Erdrotationsparameter beträgt etwa 0.2 Millibogensekunden bei Polschwankung und  $10 \mu\text{s}$  in der Erddrehung (UT1). VLBI ist die einzige Methode, um die Verbindung zum raumfesten Referenzsystem zu realisieren und die Positionen der Radioquellen relativ zueinander zu bestimmen.

### 3.2 Satellite and Lunar Laser Ranging

Laser Ranging zu künstlichen Erdsatelliten oder Mond ist vom Konzept her sehr einfach. Sehr kurze Laserpulse werden zu einem Satelliten geschickt, der mit Retroreflektoren ausgestattet ist und zur Station zurückschickt. Aus der Messung der Lichtlaufzeit hin und zurück ergibt sich die Distanz zw. Station und Satellit. Neben der Distanz muss in der Beobachtungsgleichung nebst der geometrischen Distanz auch Korrekturterme mitberücksichtigt werden.

$$\Delta t_E^S = \frac{2}{c} \left( \underbrace{\rho_E^S}_{\text{Distanz}} + \underbrace{\delta \rho_{atm}}_{\text{Refraktion}} + \underbrace{\delta_{rel}}_{\text{Relativität}} \right) + \underbrace{\frac{1}{c} \delta \rho_{sys}}_{\text{Signalverz.}}$$

Eigentlich müsste die rein geometrische Laufzeit des Pulses aus zwei Einzellaufzeiten berechnet werden (hin und zurück). Für einen Satelliten in der Höhe von 20'000 km (GPS, oder GLONASS) beträgt die Lichtlaufzeit rund 0.13 Sekunden. Der quadratische Term aus einer Reihenentwicklung liegt im Fehler bei etwa  $10^{-4}m$  Bereich. Für Messungen zum Mond muss die Gleichung erweitert werden. Der Sender und Empfänger müssen im gleichen Koordinatensystem vorliegen (Transformation von Erdfest zu Raumfestes System).

Zur Zeit gibt es etwa 40 Satelliten, welche mit SLR verfolgt werden können. Die wichtigsten sind LAGEOS I und II. Diese sind etwa 60 cm gross und etwa bei 6000 km Höhe. Die Distanzmessungen sind etwa 1cm genau. Die Parameter von Satellitenbahnen, Koeffizienten des Erdschwerefeldes, Stationsgeschwindigkeiten und Erdrotationsparameter werden mittels SLR bestimmt. SLR hilft am genauesten, um den Schwerpunkt der Erde zu bestimmen.

LLR ist 2cm genau und benötigt starke Laser, um diese wirklich zu messen. Erdrotationsparameter können mittels LLR bestimmt werden (UT1 z.B.), sowie Parameter für die Mondbahn und für Tests in der Relativitätstheorie.

### 3.3 Doppler Orbitography by Radiopositioning Integrated on Satellite (DORIS)

Bei DORIS handelt es sich um ein Zweifrequenz-Dopplersystem (2.03 GHz und 0.4 GHz). Das vor allem für die Bestimmung von Satellitenbahnen eingesetzt wird. Bei DORIS ist nebst Sendesystem auch ein Empfänger integriert, dessen Bahn man mitverfolgen kann man mitverfolgen kann. DORIS kann also einem Satelliten zusätzlich mitgegeben werden.

Die Doppler-Beobachtungsdaten werden zentral im Satelliten gesammelt und an das Betriebszentrum übermittelt. DORIS kann auch an entlegene Gebiete aufgestellt werden wo die Übermittlung von Daten z.B. für GPS, ein Problem darstellen würde.

Die 50 Stationen des DORIS Systems sind homogen über die Erde verteilt und bilden ein gutes Referenzsystem für die Untersuchung von Plattenbewegungen. Die Genauigkeit liegt hier für Stationskoordinaten 2cm, und 1-2 Millibogensekunden für die Stellung der Erdachse im erdfesten System. Zur Zeit sind 6 Satelliten mit DORIS ausgestattet.

### 3.4 Satellitenaltimetrie

Das Prinzip basiert auf der Laufzeitmessung eines Mikrowellenpulses im Radarfrequenzbereich (14 GHz) vom Satelliten zur Erdoberfläche und zurück. Die Genauigkeit liegt hier bei einigen Zentimetern bis zu einem Meter.

$$\rho = c \frac{\Delta t}{2}$$

Die Pulslänge beträgt wenige Nanosekunden. Besonders gute Messungen liefert dieses Verfahren wegen den guten Reflexionseigenschaften über Wasseroberflächen. Der Durchmesser des Strahles am Boden wird folgendermassen berechnet:

$$D = 2\sqrt{2\rho c\tau + (c\tau)^2}$$

Hier ist  $c\tau$  die Pulslänge. Die Fläche die hier abgedeckt wird sind oft einige Kilometer. Somit lässt sich die Distanz zwischen Satellit und Meeresoberfläche bestimmen. Nimmt man an, man kenne die Höhe der Meeresoberfläche, wie die die lokale Höhe des Geoids sowie die Abweichung  $H$  der Meeresoberfläche vom Geoid, lassen sich für verschiedene Disziplinen die Ozeangebiete in kurzer Zeit flächenhaft vermessen.

## 4 Das Schwerefeld der Erde

Hier werden die Grundlagen der Physikalischen Geodäsie erarbeitet, insbesondere die Grundlagen, welche mit dem Schwerefeld der Erde sich befassen. Hierbei liefert die Potentialtheorie die Grundlagen der Physikalischen Geodäsie. Die meisten geodätischen Messungen beziehen sich auf das Schwerefeld und deren Richtungen (Lotrichtung, lokale Niveaufläche), d.h. viele Messinstrumente werden beispielsweise horizontalisiert. Andere Messungen wie Nivellement, Schweremessungen, Trägheitsnavigation und Satellitenbahnen hängen ebenfalls vom Schwerefeld ab.

### 4.1 Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F = G \frac{m_A m_B}{l_{AB}^2}$$

Die Gravitationskraft wird bestimmt durch eine Gravitationskonstante  $G$ , den zwei punktförmigen, homogenen Massen  $A$  und  $B$  sowie deren Abstand. Die Gravitationskonstante für sich alleine kennt man nur auf 6 Stellen genau. Das Produkt von Gravitationskonstante und Erdmasse kennt man jedoch auf ca. 10 Stellen sehr genau, da man viele künstliche Satelliten hat.

Die erste Bestimmung von  $G$  wurde mittels einer Torsionswaage bestimmt. Um die Richtung der Gravitationskraft zu bestimmen, wird das Gesetz oft in vektorieller Form bestimmt.

$$\mathbf{F}_A = -G \frac{m_A m_B}{l_{AB}^3} \cdot \mathbf{l}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|^3} \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)$$

Dabei ist  $F_A$  die Gravitationskraft, die von Masse  $B$  auf  $A$  ausgeübt wird. Die Massen sind positiv. Im Vergleich zur elektrischen Coulomb Kraft ist diese sehr ähnlich, wobei jedoch die Ladungen positiv und negativ sein können.

Nach dem 3. Newtonschen Gesetz gilt auch, dass die entgegengesetzte Kraft auf  $B$  exakt der Kraft von  $A$  entspricht. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt auch  $F_A = m_A \ddot{\mathbf{x}}_A$ . Hierbei ist jedoch die Masse als Trägheitsmasse zu verstehen, und im Gegensatz zur schweren Masse  $m_A$  einen unterschiedlichen Charakter aufweist. Newton postulierte, dass beide Massen identisch sind, aus diesem Grund ergibt sich folgende Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung:

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{x}}_A = -G \frac{m_B}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|^3} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) = -G \frac{m_B}{l_{AB}^3} \mathbf{l}_{AB}$$

Bei der Gravitationsbeschleunigung handelt es sich um ein Vektorfeld. Somit gilt auch das Überlagerungs-, bzw. Superpositionsprinzips - wo mehrere Massen im Raum dieses verändern und auf einen jeweiligen Bezugspunkt  $i$  eine Kraft ausübt.

Sobald man von der Punktmasse in geschlossene, kontinuierliche Volumen übergeht, dann ergibt sich die Gravitationsbeschleunigung als eine Riemannsche Summe von Massen, beziehungsweise Volumen mittels der Dichte.

$$\mathbf{a}_A = -G \int \int \int_M \frac{\mathbf{l}_{AQ}}{l_{AQ}^3} dm = -G \int \int \int_\Sigma \rho(Q) \frac{\mathbf{l}_{AQ}}{l_{AQ}^3} d\Sigma$$

Die Gravitationskraft verändert sich instantan. Die Relativitätstheorie widerspricht dem, jedoch dies genügt unseren Anforderungen.

---

## 4.2 Gravitationspotential

Aufgrund der Annahme, dass das Vektorfeld instantan ist und zeitunabhängig ist, ist das Feld stationär. Zudem kann man das definierte Vektorfeld auch als skalare Funktion beschreiben:

$$\mathbf{a} = \nabla V(x, y, z)$$

Das Gravitationspotential  $V$  hat einen Gradienten, welches der Gravitationsbeschleunigung entspricht. Das Gravitationspotential ist nicht eindeutig, sondern bis auf eine Konstante festgelegt. Zudem muss jenes auch im Unendlichen Null sein, gegeben durch den Abstand, welcher in der Unendlichkeit den Term 0 macht. Falls das Koordinatensystem so gewählt ist, dass die Masse  $B$  als Quelle des Potentials im Ursprung liegt, dann kann folgende Gleichung verwendet werden:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r}$$
$$V(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r}$$

Das Gravitationspotential ist also so definiert.

---

## 4.3 Gravitationspotential einer homogenen Kugel

### 4.3.1 Einführung

Nun werden Gravitationspotential homogener Kugeln bestimmt. Dies bedeutet, dass diese Kugeln überall die gleiche Dichte  $\rho(Q) = \rho = \text{const.}$  aufweisen in einem beliebigen Punkt innerhalb der Kugel.

---

### 4.3.2 Potential einer Kugel für einen Punkt ausserhalb der Kugel

Das Potential, welches bei einer Kugelschale  $S$  der Dicke  $dR$ , auf einen Punkt  $A$  ausserhalb der Kugel wirkt, wird nun berechnet. Wie bei einer Vollkugel lässt sich durch Transformationen und Trigonometrie bestimmen, dass die Potentiale ausserhalb von Schalen und Kugeln mit der Distanz  $d$  umgekehrt proportional sind zum Abstand, und dass die Massen jeweils einer Schale oder Kugel die Magnitude mitbestimmt.

$$V_{S,aussen} = \frac{GM_S}{d}$$
$$V_{K,aussen} = \frac{GM_K}{d}$$

---

### 4.3.3 Potential einer Kugel für einen Punkt innerhalb der Kugel

Für einen Punkt innerhalb einer Kugelschale erhält man ein konstantes Potential. Da der Gradient bei einer Konstanten verschwindet, übt die Kugelschale auf einen Massenpunkt im Innern keine Kraft aus.

$$V_{S,innen} = 0$$

Für einen Punkt innerhalb einer Vollkugel kann folgendes Modell angenommen werden: Es gibt eine äussere Schale, welche aufgrund der Integrationsgrenzen auch einen Effekt auf das Potential hat.

$$V_{K,innen} = 2\pi G\rho \left( R_K^2 - \frac{d^2}{3} \right)$$

Somit kann via dem Gradienten folgendes gezeigt werden:

$$\mathbf{a} = \nabla V_{K,aussen}(r) = -\frac{GM_K}{r^3} \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \nabla V_{K,innen}(r) = -\frac{4}{3}\pi G\rho \mathbf{r}$$

Die Gravitationsbeschleunigung nimmt mit  $r^2$  ausserhalb der Kugel ab, und nimmt innerhalb mit  $r$  ab.

---

## 4.4 Laplacegleichung und Poissongleichung

Durch die weitere Anwendung des Nabla Operators, erhält man nun beim Potential neue Gleichungen, die erfüllt werden müssen:

$$\Delta V_{K,aussen}(r) = 0$$
$$\Delta V_{K,innen}(r) = -4\pi G\rho$$

Für eine beliebige Dichteverteilung müssen die gegebenen Gleichungen erfüllt sein.

---

## 4.5 Zentrifugalbeschleunigung

In einem erdfesten Referenzsystem wirken auf einem ruhenden Körper nebst der Anziehungskraft auch die Flieh- oder Zentrifugalkraft, welche durch die Erdrotation verursacht wird. Die Corioliskraft und Eulerkraft kommen ebenfalls hinzu, falls sich die Rotationsgeschwindigkeit oder die Richtung der Rotationsachse sich ändert. Diese Kräfte sind Scheinkräfte, welche nur

auftreten weil die Erde nicht ein Inertialsystem ist.

$$\mathbf{F}_Z = m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = m\omega^2 \mathbf{p}$$
$$p = |\mathbf{p}| = r \cos \beta$$
$$\mathbf{a}_Z = \frac{\mathbf{F}_Z}{m} = \omega^2 \mathbf{p}$$
$$a_z = \omega^2 r \cos \beta, \quad a_{z,max} \approx 0.03391 m/s^2$$

Die Zentrifugalkraft auf einen Massenpunkt  $m$  wirkt in Richtung  $p$ , welcher senkrecht zur Rotationsachse liegt. Für das Potential gilt, dass dieses konstant bei  $\Delta V_Z = 2\omega^2$  liegt.

---

## 4.6 Schwerkraft, Schwerebeschleunigung und Schwerepotential

Die Schwerkraft ist also eine Vektorsumme aus Gravitation und Zentrifugalkraft. Auf einen Massepunkt hin lassen sich je die Schwerebeschleunigung und Schwerepotential durch Summation ermitteln. Somit kann auch die Gleichungen in Laplace und Poissongleichung umformulieren und hinzufügen.

---

## 4.7 Geometrie des Schwerefeldes

### 4.7.1 Niveauflächen, Äquipotentialflächen

### 4.7.2 Lotlinien

### 4.7.3 Astronomische Breite und Länge

### 4.7.4 Geometrie des Schwerefeldes

---

## 5 Satellitenbahnen