常用公式

三角不等式	$\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a-b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$
	$\lvert a-b\rvert \geqslant \lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	$-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert$	
一元二次方程的解	$-b+\sqrt{(b^2-4ac)}/2a$	$-b-\sqrt{(b^2-4ac)}/2a$	

根与系数的关系	X1+X2=-b/a	X1*X2=c/a	注：韦达定理

数列前 n 项和	1+2+3+4+5+6+7+8+9+…+n=n(n+1)/2	$1+3+5+7+9+11+13+15+\cdots+(2n-1)=n^2$
	2+4+6+8+10+12+14+…+(2n)=n(n+1)	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$
	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+\cdots n^3=n^2(n+1)^2/4$	1*2+2*3+3*4+4*5+5*6+6*7+…+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3

常用数学公式表:解析几何公式				
圆的标准方程	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$		注：（a,b）是圆心坐标	
圆的一般方程	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$		注：$D^2+E^2-4F>0$	
抛物线标准方程	$y^2=2px$	$y^2=-2px$	$x^2=2py$	$x^2=-2py$

常用数学公式表:几何图形公式			
直棱柱侧面积	S=c*h	**斜棱柱侧面积**	S=c'*h
正棱锥侧面积	S=1/2c*h'	**正棱台侧面积**	S=1/2(c+c')h'
圆台侧面积	S=1/2(c+c')l=pi(R+r)l	**球的表面积**	$S=4pi*r^2$
圆柱侧面积	S=c*h=2pi*h	**圆锥侧面积**	S=1/2*c*l=pi*r*l
弧长公式	l=a*r（a 是圆心角的弧度数 r>0）	**扇形面积公式**	s=1/2*l*r
锥体体积公式	V=1/3*S*H	**圆锥体体积公式**	$V=1/3*pi*r^2h$
柱体体积公式	V=s*h	**圆柱体**	$V=pi*r^2h$
斜棱柱体积	V=S'L（S'是直截面面积，L 是侧棱长）	注：pi=acos(-1.0)；	

$$5.1\quad (a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

划分问题：

1、n 个点最多把直线分成 C(n,0)+C(n,1)份；

2、n 条直线最多把平面分成 C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)份；

3、n 个平面最多把空间分成 C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)=(n^3+5n+6)/6 份；

4、n 个空间最多把“时空”分成 C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+C(n,4)份.

Stirling 公式

lim(n→∞) √(2πn) * (n/e)^n = n!

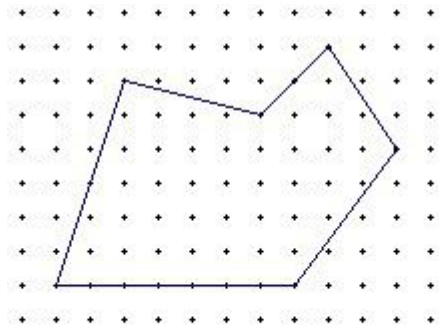
也就是说当 n 很大的时候,n!与√(2πn) * (n/e) ^ n 的值十分接近

这就是 Stirling 公式. (2 π n) ^0.5× n^ n × e^(-n) =n!;

皮克定理

一个多边形的顶点如果全是格点，这多边形就叫做格点多边形。有趣的是，这种格点多边形的面积计算起来很方便，只要数一下图形边线上的点的数目及图内的点的数目，就可用公式算出。

这个公式是皮克(Pick)在 1899 年给出的，被称为“皮克定理”，这是一个实用而有趣的定理。



给定顶点坐标均是整点（或正方形格点）的简单多边形，皮克定理说明了其面积 S 和内部格点数目 a、边上格点数目 b 的关系：

S=a+ b/2 - 1。

(其中 a 表示多边形内部的点数,b 表示多边形边界上的点数,S 表示多边形的面积)

卡特兰数

原理:

令 h(1)＝1,h(0)=1，catalan

数满足递归式：

h(n)= h(0)*h(n-1)+h(1)*h(n-2) + ... + h(n-1)h(0) (其中 n>=2)

另类递归式：

h(n) = h(n-1)*(4*n-2)/(n+1);

该递推关系的解为：

h(n)=C(2n,n)/(n+1) (n=1,2,3,...)

卡特兰数的应用

（实质上都是递归等式的应用）

错排公式

当 n 个编号元素放在 n 个编号位置,元素编号与位置编号各不对应的方法数用 M(n)表示,那么 M(n-1)就表示 n-1 个编号元素放在 n-1 个编号位置,各不对应的方法数,其它类推.

第一步,把第 n 个元素放在一个位置,比如位置 k,一共有 n-1 种方法;

第二步,放编号为 k 的元素,这时有两种情况.1,把它放到位置 n,那么,对于剩下的 n-2 个元素,就有 M(n-2)种方法;2,不把它放到位置 n,这时,对于这 n-1 个元素,有 M(n-1)种方法;

综上得到递推公式：

M(n)=(n-1)[M(n-2)+M(n-1)]　　特殊地，M(1)=0,M(2)=1

通项公式：
$M(n)=n![(-1)^2/2!+\dots+(-1)^{(n-1)}/(n-1)!+(-1)^n/n!]$

优美的式子：
$D_n=[n!/e+0.5]$,[x]为取整函数.
公式证明较简单．观察一般书上的公式，可以发现 e-1 的前项与之相同，然后作比较可得$/D_n-n!e^{-1}/<1/(n+1)<0.5$,于是就得到这个简单而优美的公式（此仅供参考）

等比数列

(1) 等比数列：

$a_{(n+1)}/a_n=q \quad (n\in N)$。

(2) 通项公式：

$a_n=a_1\times q^{(n-1)}$；

推广式：

$a_n=a_m\times q^{(n-m)}$；

(3) 求和公式：

$S_n=n*a_1 \quad (q=1)$

$S_n=a_1(1-q^n)/(1-q) =(a_1-a_n*q)/(1-q) \quad (q\neq1)$ （q 为比值，n 为项数）

(4)性质：

①若 m、n、p、q∈N，且 m＋n=p＋q，则 $a_m*a_n=a_p*a_q$；

②在等比数列中，依次每 k 项之和仍成等比数列.

③若 m、n、q∈N，且 m+n=2q，则 $a_m*a_n=a_q^2$

(5)"G 是 a、b 的等比中项""$G^2=ab$（G ≠ 0）".

(6)在等比数列中，首项 a_1 与公比 q 都不为零.

注意：上述公式中 a_n 表示等比数列的第 n 项。

等差数列

1、$S_n=n(a_1+a_n)/2$

2、$S_n=a_1*n+n(n-1)d/2$

$a_n=a_1+(n-1)d$

S_n＝（a_1＋a_n）$*n/2$

项数＝（末项-首项）÷公差＋1

$A_1=2*S/n-a_n$

an=2*S/n-a1

an=a1+（n-1）*d;

性质：

若 m、n、p、q∈N

①若 m＋n=p＋q，则 am+an=ap+aq

②若 m+n=2q，则 am+an=2aq

注意：上述公式中 an 表示等差数列的第 n 项。

二次函数

定义与定义表达式

1：一般式：

y=ax^2;+bx+c　(a≠0，a、b、c 为常数)

对称轴为直线 *x = -b/2a，*顶点坐标(-b/2a,(4ac-b^2)/4a)。

2：顶点式：

y=a(x-h）^2+k　或　y=a(x+m)^2+k

(两个式子实质一样,但初中课本上都是第一个式子)（若给出抛物线的顶点坐标或对称轴与最值，通常可设顶点式）

3：交点式（与 x 轴）：

y=a(x-x1)(x-x2)

（若给出抛物线与 x 轴的交点及对称轴与 x 轴的交点距离或其他一的条件，通常可设交点式）

重要概念：

（a，b，c 为常数，a≠0，且 a 决定函数的开口方向，a>0 时，开口方向向上，a<0 时，开口方向向下。a 的绝对值还可以决定开口大小,a 的绝对值越大开口就越小,a 的绝对值越小开口就越大。）

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[x^2+2\times\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

二次方程

a*x+b*y+c=0;

当△<0 ，方程无解；

当△=0 ，x1=x2= -b/(2*a)；

当△>0 ，x1= [-b-sqrt(b*b-4*a*c)]/(2*a)，x2=[-b+ sqrt(b*b-4*a*c)]/(2*a)。

约瑟夫环

令 f 表示 i 个人玩游戏报 m 退出最后胜利者的编号，最后的结果自然是 f[n].

递推公式:

f[1]=0;

f=(f[i-1]+m)%i; (i>1)

有了这个公式，我们要做的就是从 1-n 顺序算出 f 的数值，最后结果是 f[n]。因为实际生活中编号总是从 1 开始，我们输出 f[n]+1 由于是逐级递推，不需要保存每个 f，程序也是异常简单：

多边形面积

点顺序给出

S=0.5*abs(x1*y2-y1*x2+x2*y3-y2*x3+...+xn*y1-yn*x1)

均值不等式的简介

概念：

1、调和平均数：

$H_n=n/(1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n)$

2、几何平均数：

$G_n=(a_1a_2\ldots a_n)^{(1/n)}=$ n 次$\sqrt{(a_1*a_2*a_3*\ldots*a_n)}$

3、算术平均数：

$A_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n$

4、平方平均数：

$Q_n=\sqrt{[(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)/n]}$

5、这四种平均数满足:

$H_n\leq G_n\leq A_n\leq Q_n$

a_1、a_2、… 、$a_n\in R+$，当且仅当 $a_1=a_2=\ldots=a_n$ 时取“=”号

均值不等式的一般形式：

设函数 $D(r)=[(a_1^r+a_2^r+\ldots a_n^r)/n]^{(1/r)}$ （当 r 不等于 0 时);

$(a_1a_2\ldots a_n)^{(1/n)}$(当 r=0 时）（即 $D(0)=(a_1a_2\ldots a_n)^{(1/n)}$）

则有：当 $r<s$ 时，$D(r)\leq D(s)$

注意到 $H_n\leq G_n\leq A_n\leq Q_n$ 仅是上述不等式的特殊情形，即 $D(-1)\leq D(0)\leq D(1)\leq D(2)$

均值不等式的变形

(1)对实数 a,b，有 $a^2+b^2\geq 2ab$ (当且仅当 a=b 时取“=”号)，$a^2+b^2>0>-2ab$

(2)对非负实数 a,b，有 $a+b\geq 2\sqrt{(a*b)}\geq 0$，即$(a+b)/2\geq\sqrt{(a*b)}\geq 0$

(3)对负实数 a,b，有 $a+b<0<2\sqrt{(a*b)}$

(4)对实数 a,b，有 $a(a-b)\geq b(a-b)$

(5)对非负数 a,b，有 $a^2+b^2\geq 2ab\geq 0$

(6)对非负数 a,b，有 $a^2+b^2\geq 1/2*(a+b)^2\geq ab$

(7)对非负数 a,b,c，有 $a^2+b^2+c^2\geq 1/3*(a+b+c)^2$

(8)对非负数 a,b,c，有 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

(9)对非负数 a,b，有 $a^2+ab+b^2\geq 3/4*(a+b)^2$

(10)对实数 a,b,c，有$(a+b+c)/3>=(abc)^{(1/3)}$

(11) $a^3+b^3+c^3>=3abc$,a、b、c 都是正数。

扩展：若有 $y=x_1*x_2*x_3\ldots\ldots X_n$ 且 $x_1+x_2+x_3+\ldots+X_n=$常数 P,则 Y 的最大值为$((x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+X_n)/n)^n$

1、| |a|-|b| |≤|a-b|≤|a|+|b|　　2、| |a|-|b| |≤|a+b|≤|a|+|b|
设 a1,a2,…an；b1,b2…bn 均是实数，且 a1≥a2≥a3≥…≥an,b1≥b2≥b3≥…≥bn; 则有 a1b1+a2b2+…+anbn（顺序和）≥a1b2+a2b1+a3b3+…+aibj+…+anbm（乱序和）≥a1bn+a2bn-1+a3bn-2+…+anb1（逆序和）,仅当 a1=a2=a3=…an,b1=b2=b3=…=bn 时等号成立。

Lucas 定理

Lucas' theorem

From Wikipedia, the free encyclopedia

For the theorem in complex analysis, see Gauss-Lucas theorem.

In number theory, the **Lucas's theorem** states the following:

Let *m* and *n* be non-negative integers, *p* a prime, and

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0,$$

and

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0$$

be the base *p* expansions of *m* and *n* respectively. Then

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod p,$$

where $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ denotes the binomial coefficient of *m* and *n*, also known as "m choose n".

In particular, a binomial coefficient $\binom{m}{n}$ is divisible by a prime *p* as soon as at least one of the base *p* digits of *n*

corresponding digit of *m*.

Lucas theorem first appeared in 1878 by Edouard Lucas.[1]

斐波那契数列

$$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F(1) \\ F(0) \end{pmatrix} (n >= 1)$$

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ times}}$$

这是斐波那契数列

1，1，2，3，5，8，13……

通项公式很经典

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

欧拉函数

实际使用的时候是用下面这个式子：

在程序中利用欧拉函数如下性质，可以快速求出欧拉函数的值(a 为 N 的质因素)
(1) 若(N%a==0 && (N/a)%a==0) 则有:E(N)=E(N/a)*a;
(2) 若(N%a==0 && (N/a)%a!=0) 则有:E(N)=E(N/a)*(a-1);

欧拉函数的值

$\varphi(1)=1$（小于等于 1 的正整数中唯一和 1 互质的数就是 1 本身）。

若 n 是质数 p 的 k 次幂，$\varphi(n)=p^k-p^{k-1}=(p-1)p^{k-1}$，因为除了 p 的倍数外，其他数都跟 n 互质。

欧拉函数是积性函数，即是说若 m,n 互质，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$。证明：设 A, B, C 是跟 m, n, mn 互质的数的集，据中国剩余定理，$A\times B$和 C 可建立双射(一一对应)的关系。因此$\varphi(n)$的值使用算术基本定理便知，

若 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$

则 $\varphi(n)=\prod_{p|n}p^{\alpha_p-1}(p-1)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$。

例如

$$\varphi(72)=\varphi(2^3\times 3^2)=2^{3-1}(2-1)\times 3^{2-1}(3-1)=2^2\times 1\times 3\times 2=24$$

先看（2）式，N%a==0 && (N/a)%a!=0，因为 a 是质数，而 N/a 不能被 a 整除，说明 N/a 与 a 互质，由上面的$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$可知 E(N)=E(N/a)*E(a);而 E(a)=a-1（因为按照欧拉函数定义**欧拉函数**$\varphi(n)$是小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目，a 为质数，从 1 到 a-1 都和 a 互质，所以 E(a)=a-1）,故 E(N)=E(N/a)*(a-1);

再看（1）式，由于 a 是 N/a 的质因数，不能像（2）一样用上面的积性函数的公式。

那看这个式子 $\varphi(n)=\prod_{p|n}p^{\alpha_p-1}(p-1)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$，假设 E(n)可以表示成 a^k*(a-1)*C，C 为后面的部分，则 E(n/a)可以表示成 a^(k-1)*(a-1)*C，比较两式的差别可以得到 E(n)是 E(n/a)的 a 倍，即 E(N)=E(N/a)*a。

其实，（2）式也可以像（1）式一样证明，因为 N/a 与 a 互质，说明 N 的质因数有且只有一个 a，则 E(n)可表示为(a-1)*C，E(N/a)可表示为 C，比较两式差别可以得到 E(N)=E(N/a)*(a-1).

蚂蚁爬绳

一绳长 L 米，一蚂蚁从绳的一端爬向另一端，速度为每秒 v m/s，同时，绳子以每秒 u 米的速度均匀伸长，问：蚂蚁能否达到绳的另一端？如能，需多长时间？如不能，请说明理由。（假设绳子质量无限好，蚂蚁寿命无限长）

$T=[e^{(u/v)}-1]*L/u$;

(a/b)%m

背景：a 是 b 的倍数

1.如果 m 是质数，很简单，直接用扩展的欧几里德求 b 关于 m 的逆元

对于 a/b%m = ans, 求 ans。

a = a%m, b = b%m

ans = (a % m)*(x % m) % m （x 为 b 的逆元）

求逆元则利用扩展欧几里德：

对于 b*x = 1(mod m)

可以求 b*x + m*y = 1 的解（ 用 extennd_Euclid(b, m, x, y))!

然后把 x 映射到 [0,m)区间，带入上式， 即得解。

2.如果 m 不是质数，把 m 质数分解成质数 p1,p2,……,pk 的积

然后把 a 分解成 a1*a2,其中 a1 的质因数只能在 p[]中,a2 与 p[]中的所有质数都互质，即 a2 与 m 互质

同理把 b 分解成 b1*b2,其中 b1 的质因数只能在 p[]中,b2 与 p[]中的所有质数都互质，即 b2 与 m 互质

3.现在问题变成了(a1*a2)/(b1*b2)%m，即(a1/b1)%m*(a2/b2)%m。

问题分解成了两个问题:

对于 a1/b1%m，可以化为:

(p1^m1*p2^m2*……*pk^mk)/(p1^n1*p2^n2*……*pk^nk)%m,

即:p1^(m1-n1)*p2^(m2-n2)*……*pk^(mk-nk)%m

对于 a2/b2%m，b2 与 m 互质，则可以直接求出 b2 关于 m 的逆元化为 a2*b2^(-1)%m.

4.于是，问题解决，时间复杂度约为 O(sqrt(m) + log(m))

泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n],$$

乘法与因式分解公式

1.2 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

1.3 $a^n - b^n = \begin{cases} (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) & (n\text{为正整数}) \\ (a+b)(a^{n-1}+a^{n-2}b-a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}) & (n\text{为偶数}) \end{cases}$

1.4

$a^b + b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}) \qquad (n\text{为奇数})$

三角不等式

2.1 $|a+b| \leq |a| + |b|$

2.2 $|a-b| \leq |a| + |b|$

2.3 $|a-b| \geq |a| - |b|$

2.4 $-|a| \leq a \leq |a|$

2.6 $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

某些数列的前 n 项和

4.1 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

4.2 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

4.3 $2+4+6+\cdots+(2n)=n(n+1)$

4.4 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4.5 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$

4.6 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4.7 $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

4.8 $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

二项式展开公式

5.1 $$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n$$

三角函数公式

1　两角和公式

6.3　$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

6.4　$\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

2　倍角公式

6. 5　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\sin\beta$

6. 6　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

6.7　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

6.8　$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

3　半角公式

6.9　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

6.10　$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$

6.11　$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

6.12　$\cot\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

4　和差化积

6.13　$2sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

6.14　$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

6.15　$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

6.16　$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

6.17　$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

6.18　$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

6.19　$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

6.20　$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

6.21　$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

6.22　$\cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$