

母函数 入门 + 模板 - CSDN博客

在数学中，某个序列的母函数(Generating function，又称生成函数)是一种形式幂级数，其每一项的系数可以提供关于这个序列的信息。使用母函数解决问题的方法称为母函数方法。

母函数可分为很多种，包括普通母函数、指数母函数、L级数、贝尔级数和狄利克雷级数。对每个序列都可以写出以上每个类型的一个母函数。构造母函数的目的一般是为了解决某个特定的问题，因此选用何种母函数视乎序列本身的特性和问题的类型。

这里先给出两句话，不懂的可以等看完这篇文章再回过头来看：

- 1.“把组合问题的加法法则和幂级数的乘幂对应起来”
- 2.“母函数的思想很简单——就是把离散数列和幂级数一一对应起来，把离散数列间的相互结合关系对应成为幂级数间的运算关系，最后由幂级数形式来确定离散数列的构造。”

我们首先来看下这个多项式乘法：

$$\begin{aligned}(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx) \\ = 1 + (a_1+a_2+\cdots+a_n)x + (a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^2 \\ + \cdots + a_1a_2\cdots a_nx^n\end{aligned}$$

作者:Tanky Woo
Blog:www.WuTianQi.com

母函数图(1)

由此可以看出：

- 1.x的系数是 a_1, a_2, \dots, a_n 的单个组合的全体。
2. x^2 的系数是 a_1, a_2, \dots, a_2 的两个组合的全体。
-
- n. x^n 的系数是 a_1, a_2, \dots, a_n 的n个组合的全体（只有1个）。

进一步得到：

$$(1+x)^n = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n)x^n$$

作者:Tanky Woo
Blog:www.WuTianQi.com

母函数图(2)

母函数的定义

对于序列 a_0, a_1, a_2, \dots 构造一函数：

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots,$$

母函数图(3)

称函数 $G(x)$ 是序列 a_0, a_1, a_2, \dots 的母函数。

这里先给出2个例子，等会再结合题目分析：

第一种：

有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，能称出哪几种重量？每种重量各有几种可能方案？

考虑用母函数来解决这个问题：

我们假设 x 表示砝码， x 的指数表示砝码的重量，这样：

- 1个1克的砝码可以用函数 $1+x$ 表示，
- 1个2克的砝码可以用函数 $1+x^2$ 表示，
- 1个3克的砝码可以用函数 $1+x^3$ 表示，
- 1个4克的砝码可以用函数 $1+x^4$ 表示，

上面这四个式子懂吗？

我们拿 $1+x^2$ 来说，前面已经说过， x 表示砝码， x 的指数表示砝码的重量！初始状态时，这里就是一个质量为2的砝码。

那么前面的1表示什么？按照上面的理解，1其实应该写为： $1*x^0$ ，即1代表重量为2的砝码数量为0个。

所以这里 $1+x^2 = 1*x^0 + 1*x^2$ ，即表示2克的砝码有两种状态，不取或取，不取则为 $1*x^0$ ，取则为 $1*x^2$

不知道大家理解没，我们这里结合前面那句话：

“把组合问题的加法法则和幂级数的乘幂对应起来”

接着讨论上面的 $1+x^2$ ，这里 x 前面的系数有什么意义？

这里的系数表示状态数(方案数)

$1+x^2$ ，也就是 $1*x^0 + 1*x^2$ ，也就是上面说的不取2克砝码，此时有1种状态；或者取2克砝码，此时也有1种状态。(分析！)

所以，前面说的那句话的意义大家可以理解了吧？

几种砝码的组合可以称重的情况，可以用以上几个函数的乘积表示：

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \\ = (1+x+x^2+x^4)(1+x^3+x^7)\end{aligned}$$

$$=1+x+x^2+2*x^3+2*x^4+2*x^5+2*x^6+2*x^7+x^8+x^9+x^{10}$$

从上面的函数知道：可称出从1克到10克，系数便是方案数。（!!! 经典!!!）

例如右端有 $2*x^5$ 项，即称出5克的方案有2种：5=3+2=4+1；同样，6=1+2+3=4+2；10=1+2+3+4。

故称出6克的方案数有2种，称出10克的方案数有1种。

接着上面，接下来是第二种情况：

第二种：

求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值的方案数：

大家把这种情况和第一种比较有何区别？第一种每种是一个，而这里每种是无限的。

$$G(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots) \cdot (1+x^3+x^6+\dots)$$

母函数图(4)

以展开后的 x^4 为例，其系数为4，即4拆分成1、2、3之和的拆分方案数为4：

即：4=1+1+1+1=1+1+2=1+3=2+2

这里再引出两个概念"整数拆分"和"拆分数"：

所谓整数拆分即把整数分解成若干整数的和（相当于把n个无区别的球放到n个无标志的盒子，盒子允许空，也允许放多于一个球）。

整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做拆分数。

现在以上面的第二种情况每种种类个数无限为例，给出模板：

[cpp]view plaincopy

```
1. #include
2. using namespace std;
3. // Author: Tanky Woo
4. // www.wutianqi.com
5. const int _max = 10001;
6. // c1是保存各项质量砝码可以组合的数目
7. // c2是中间量，保存每一次的情况
8. int c1[_max], c2[_max];
9. int main()
10. { //int n,i,j,k;
11. int nNum; //
12. int i, j, k;
13. while (cin >> nNum)
14. {
15. for (i=0; i<=nNum; ++i) // ---- ①
16. {
17. c1[i] = 1;
18. c2[i] = 0;
19. }
20. for (i=2; i<=nNum; ++i) // ---- ②
21. {
22. for (j=0; j<=nNum; ++j) // ---- ③
23. for (k=0; k+j<=nNum; k+=i) // ---- ④
24. {
25. c2[j+k] += c1[j];
26. }
27. for (j=0; j<=nNum; ++j) // ---- ⑤
28. {
29. c1[j] = c2[j];
30. c2[j] = 0;
31. }
32. }
33. cout << c1[nNum] << endl;
34. }
35. return 0;
36. }
```

我们来解释下上面标志的各个地方：(*****!!! 重点!!! *****)

- ① 、首先对c1初始化，由第一个表达式 $(1+x+x^2+\dots x^n)$ 初始化，把质量从0到n的所有砝码都初始化为1。
- ② 、i从2到n遍历，这里i就是指第i个表达式，上面给出的第二种母函数关系式里，每一个括号括起来的就是一个

表达式。

③、j 从0到n遍历，这里j就是(前面i个表达式累乘的表达式)里第j个变量，(这里感谢一下seagg朋友给我指出的错误，大家可以看下留言处的讨论)。如 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)$ ，j先指示的是1和x的系数，i=2执行完之后变为

$(1+x+x^2+x^3)(1+x^3)$ ，这时候j应该指示的是合并后的第一个括号的四个变量的系数。

④、k表示的是第j个指数，所以k每次增i（因为第i个表达式的增量是i）。

⑤、把c2的值赋给c1,而把c2初始化为0，因为c2每次是从一个表达式中开始的。

咱们赶快趁热打铁，来几道题目：

（相应题目解析均在相应的代码里分析）

1. 题目：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1028>

代码：<http://www.wutianqi.com/?p=587>

这题大家看看简单不？把上面的模板理解了，这题就是小Case！

看看这题：

2. 题目：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1398>

代码：<http://www.wutianqi.com/?p=590>

要说和前一题的区别，就只需要改2个地方。在遍历表达式时（可以参考我的资料——《母函数详解》），把 $i \leq nNum$ 改成了 $i * i \leq nNum$ ，其次在k遍历指数时把 $k += i$ 变成了 $k += i * i$ ；Ok,说来说去还是套模板~~~

3. 题目：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1085>

代码：<http://www.wutianqi.com/?p=592>

这题终于变化了一点，但是万变不离其中。

大家好好分析下，结合代码就会懂了。

4. 题目：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1171>

代码：<http://www.wutianqi.com/?p=594>

还有一些题目，大家有时间自己做做：

HDOJ: 1709、1028、1709、1085、1171、1398、2069、2152

（原创文章，欢迎各位转载，但是请不要任意删除文章中链接，请自觉尊重文章版权，违法必究，谢谢合作。Tanky Woo原创, www.WuTianQi.com）

附：

1.在维基百科里讲到了普通母函数、指数母函数、L级数、贝爾级数和狄利克雷级数：

<http://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%AF%8D%E5%87%BD%E6%95%B0>

2. Matrix67大牛那有篇文章：什么是生成函数：

<http://www.matrix67.com/blog/archives/120>

3.大家可以看看杭电的ACM课件的母函数那篇，我这里的图片以及一些内容都引至那。

如果大家有问题或者资料里的内容有错误，可以留言给出，博客<http://www.wutianqi.com/>

Tanky Woo原创文章，转载请注明出处：<http://www.wutianqi.com/?p=596>。

对于任何转载本博客文章且不保留原文链接或任意删改文中链接的行为，本人将一定周旋到底！