

第11章

交流功率分析

有四件事是永远不可挽回的：说出去的话、射出去的箭、流逝的时间和错过的机会。

——Al Halif Omar Ibn

拓展事业

电力系统工程领域的职业生涯

1831年，迈克尔·法拉第(Michael Faraday)发现交流发电机的基本原理是工程领域中一项重大突破，它提供了一种产生电能的便捷途径，而电能恰恰是我们日常使用的各类电子、电气以及机电设备所必需的能源。

电能是由矿物燃料(天然气、石油、煤)、核燃料(铀)、水利能源(江河落差)、地热能(热水、热流)、风能、潮汐能以及生物能(垃圾)等不同形式的能源转换得到的，在电力工程领域中会详细研究电能产生的各种不同途径，而且电力工程已经成为电子工程中一门不可或缺的子学科。电气工程师应该熟练掌握电能的分析、产生、传输，配送以及成本计算等基本知识。

电力行业是电子工程师的一个巨大雇主。该行业包括成千上万个电力供应系统，大到为各大区域供电的大型互联电网，小到为各个社区和工厂供电的小型电力公司。由于电力行业所固有的复杂性，使得其不同的部门需要大量的电气工程工作人员，如发电厂、输电与配电、电力系统维护、科学研究、数据获取与数据流控制，以及管理等。由于各地都需要用电，电力公司也就各处都有，同时也为世界各国的人们提供了大量的培训机会和稳定的就业机会。



三线式配电系统的低压杆式变压器，© Vol. 129 PhotoDisc/Getty

11.1 引言

之前对交流电路的分析主要集中于电压与电流的计算，本章主要介绍交流电路的功率分析。

交流功率分析具有极其重要的意义。功率是电气设备、电子系统与通信系统中最为重要的物理量，因为上述系统中均存在从一点到另一点的功率传输。同时，各种工业用电设备或家用电子设备——电扇、电动机、照明灯、熨斗、电视机、个人计算机等都有一个额定功率值，即设备正常工作所要求的功率，如果超过额定功率将造成设备的永久性损坏。最常用的电功率为50Hz或60Hz的交流电。用交流电取代直流电即可实现从发电厂到用户的高压电传输。

本章首先定义并推导瞬时功率与平均功率，之后介绍其他功率的概念。作为这些概念的实际应用，本章将讨论如何测量交流功率，以及供电公司如何收取电费。

11.2 瞬时功率与平均功率

第2章已经介绍过，元件吸收的瞬时功率 $p(t)$ 等于该元件两端的瞬时电压 $v(t)$ 与流经

该元件的瞬时电流 $i(t)$ 的乘积。假设采用无源符号的国际惯例，则有：

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (11.1)$$

瞬时功率(单位为瓦特)是指任一瞬间的功率。

瞬时功率是元件吸收能量的速率。

提示：瞬时功率也可以认为是电路元件在某个特定时刻所吸收的功率，瞬时功率通常用小写字母表示。

下面考虑电路元件的任意组合在正弦信号激励下吸收的瞬时功率的一般情况，如图 11-1 所示。令电路终端的电压与电流为：

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad (11.2a)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.2b)$$

其中， V_m 与 I_m 为振幅(即峰值)， θ_v 与 θ_i 分别为电压与电流的相位角。于是，电路吸收的瞬时功率为：

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.3)$$

利用三角恒等式：

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (11.4)$$

将式(11.3)写为：

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \quad (11.5)$$

上式表明，瞬时功率包括两部分，第一部分为常量，与时间无关，其值取决于电压与电流之间的相位差；第二部分为正弦函数，其频率为 2ω ，即电压或电流角频率的两倍。

式(11.5)中 $p(t)$ 的波形图如图 11-2 所示，图中 $T = 2\pi/\omega$ 为电压或电流的周期。由图 11-2 可见， $p(t)$ 为周期信号， $p(t) = p(t + T_0)$ ，其周期 $T_0 = T/2$ ， $p(t)$ 的频率是电压或电流频率的 2 倍。同时还可以观察到，在一个周期的部分时间 $p(t)$ 为正，其余时间 $p(t)$ 为负。当 $p(t)$ 为正时，电路吸收功率；而当 $p(t)$ 为负时，电源吸收功率，也就是说功率由电路传送到电源，这种情况在电路中包括储能元件(电感器或电容器)时是可能的。

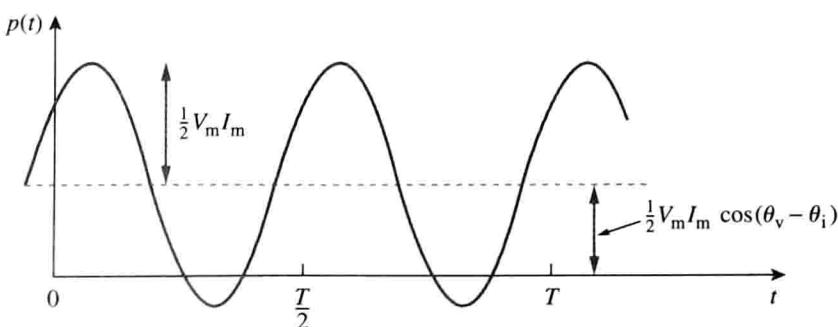


图 11-2 电路吸收的瞬时功率 $p(t)$

由于瞬时功率是随时间而变化的，因此难以测量。平均功率则容易测量。实际上，用于测量功率的仪器——功率表(瓦特计)所测得的就是平均功率。

平均功率(单位为瓦特)是指一个周期内瞬时功率的平均值。

平均功率可以表示为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (11.6)$$

式(11.6)是对周期 T 取平均的。如果在 $p(t)$ 的实际周期，即 $T_0 = T/2$ 内取积分，同样会得到相同的结果。

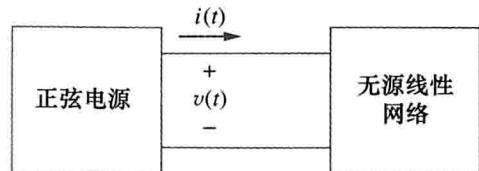


图 11-1 正弦电源与无源线性电路

将式(11.5)中的 $p(t)$ 代入式(11.6), 有:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \frac{1}{T} \int_0^T dt + \frac{1}{2} V_m I_m \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \end{aligned} \quad (11.7)$$

上式中的第一项为常数, 常数的平均仍为原来的常数; 第二项为正弦函数的积分, 因为正弦函数正半周的面积与其负半周的面积相互抵消, 所以正弦函数在一个周期内的平均为零, 因此, 式(11.7)中的第二项为零, 于是平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.8)$$

由于 $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$, 所以重要的是电压与电流之间的相位差。

注意, $p(t)$ 是随时间变化的, 而 P 是与时间无关的。如果要求瞬时功率, 必须求出时域中的 $v(t)$ 与 $i(t)$, 但是求平均功率时, 只需要电压与电流在时域中表达为式(11.8)的形式, 也可以在频域中表达。式(11.2)中 $v(t)$ 与 $i(t)$ 的相量形式分别为 $\mathbf{V} = V_m / \theta_v$ 与 $\mathbf{I} = I_m / \theta_i$, P 既可以用式(11.8)计算, 也可以用相量 \mathbf{V} 与 \mathbf{I} 计算。利用相量计算时, 由于:

$$\frac{1}{2} \mathbf{VI}^* = \frac{1}{2} V_m I_m / \theta_v - \theta_i = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i)] \quad (11.9)$$

可以看出, 上式中的实部即式(11.8)所定义的平均功率 P , 于是:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{VI}^*] = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.10)$$

下面考虑式(11.10)的两种特殊情况。当 $\theta_v = \theta_i$ 时, 电压与电流同相, 为纯电阻电路或电阻性负载 R , 且:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 R \quad (11.11)$$

其中, $|\mathbf{I}|^2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}^*$ 。式(11.11)表明, 纯电阻电路在任何时刻均吸收功率。当 $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$ 时, 为纯电抗电路, 且:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 90^\circ = 0 \quad (11.12)$$

表明纯电抗电路吸收的平均功率为零。

电阻性负载(R)在任何时刻均吸收功率, 而电抗负载(L 或 C)吸收的平均功率为零。

例 11-1 已知 $v(t) = 120 \cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$, $i(t) = 10 \cos(377t - 10^\circ) \text{ A}$, 求图 11-1 所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

解: 瞬时功率为:

$$p = vi = 1200 \cos(377t + 45^\circ) \cos(377t - 10^\circ)$$

利用三角恒等式:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

得到:

$$p = 600 [\cos(754t + 35^\circ) + \cos 55^\circ]$$

即

$$p(t) = [344.2 + 600 \cos(754t + 35^\circ)] \text{ W}$$

平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} 120 \times 10 \cos[45^\circ - (-10^\circ)] = 600 \cos 55^\circ = 344.2 \text{ (W)}$$

即上述 $p(t)$ 中的常数项。

练习 11-1 已知 $v(t) = 330\cos(10t+20^\circ)$ V, $i(t) = 33\sin(10t+60^\circ)$ A, 试计算如图 11-1 所示无源线性网络所吸收的瞬时功率与平均功率。

答案: $[3.5 + 5.445\cos(20t-10^\circ)]$ kW, 3.5 kW

例 11-2 当阻抗 $Z = (30-j70)$ Ω 两端的电压 $V = 120 \angle 0^\circ$ 时, 计算该负载吸收的平均功率。

解: 流过该阻抗的电流为:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{120 \angle 0^\circ}{30-j70} = \frac{120 \angle 0^\circ}{76.16 \angle -66.8^\circ} = 1.576 \angle 66.8^\circ \text{ A}$$

平均功率为:

$$P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{1}{2} \times 120 \times 1.576 \cos(0 - 66.8^\circ) = 37.24 \text{ (W)}$$

练习 11-2 如果流过阻抗 $Z = 40 \angle -22^\circ$ Ω 的电流为 $I = 33 \angle 30^\circ$ A, 试求传递给阻抗的平均功率。

答案: 20.19 kW

例 11-3 对于图 11-3 所示电路, 求电源提供的平均功率与电阻器吸收的平均功率。

解: 电路中电流 I 为:

$$I = \frac{5 \angle 30^\circ}{4-j2} = \frac{5 \angle 30^\circ}{4.472 \angle -26.57^\circ} = 1.118 \angle 56.57^\circ \text{ A}$$

电压源提供的平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} \times 5 \times 1.118 \cos(30^\circ - 56.57^\circ) = 2.5 \text{ (W)}$$

流过电阻器的电流为:

$$I_R = I = 1.118 \angle 56.57^\circ \text{ A}$$

电阻器两端的电压为:

$$V_R = 4I_R = 4.472 \angle 56.57^\circ \text{ (V)}$$

该电阻器吸收的平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} \times 4.472 \times 1.118 = 2.5 \text{ (W)}$$

由此可见, 电阻器吸收的平均功率与电源提供的平均功率相同, 电容器吸收的平均功率为零。

练习 11-3 在图 11-4 所示电路中, 试计算电阻器与电感器吸收的平均功率, 并求电压源提供的平均功率。

答案: 15.361 kW, 0 W, 15.361 kW

例 11-4 求图 11-5a 所示电路中各电源产生的平均功率以及各无源元件吸收的平均功率。

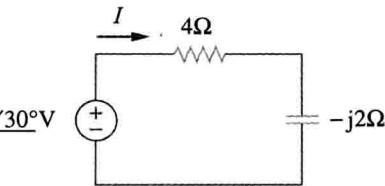


图 11-3 例 11-3 图

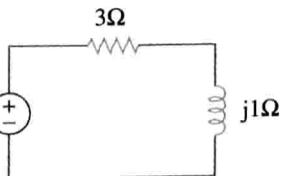
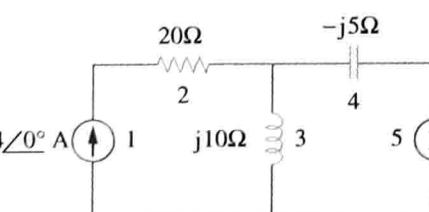
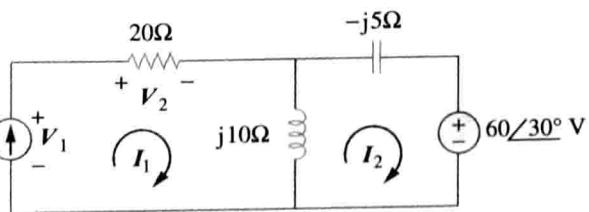


图 11-4 练习 11-3 图



a)



b)

图 11-5 例 11-4 图

对于网孔 1，有：

$$\mathbf{I}_1 = 4\text{A}$$

对于网孔 2，有：

$$(j10 - j5)\mathbf{I}_2 - j10\mathbf{I}_1 + 60 \angle 30^\circ = 0, \quad \mathbf{I}_1 = 4\text{A}$$

即

$$j5\mathbf{I}_2 = -60 \angle 30^\circ + j40 \Rightarrow \mathbf{I}_2 = -12 \angle -60^\circ + 8 = 10.58 \angle 79.1^\circ (\text{A})$$

对于电压源而言，流过它的电流为 $\mathbf{I}_2 = 10.58 \angle 79.1^\circ \text{ A}$ ，其两端的电压为 $60 \angle 30^\circ \text{ V}$ ，于是平均功率为：

$$P_5 = \frac{1}{2} \times 60 \times 10.58 \cos(30^\circ - 79.1^\circ) = 207.8(\text{W})$$

按照无源符号约定（见图 11-8），从 \mathbf{I}_2 的方向与电压源的极性来看，这个平均功率是被电压源吸收的，也就是说，该电路将平均功率传递给电压源。

对于电流源而言，流过它的电流为 $\mathbf{I}_1 = 4 \angle 0^\circ$ ，它两端的电压为：

$$\mathbf{V}_1 = 20\mathbf{I}_1 + j10(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 80 + j10(4 - 2 - j10.39) = 183.9 + j20 = 184.984 \angle 6.21^\circ (\text{V})$$

于是，该电流源提供的平均功率为：

$$P_1 = -\frac{1}{2} \times 184.984 \times 4 \cos(6.21^\circ - 0) = -367.8(\text{W})$$

根据无源符号约定，平均功率为负，表示该电流源向电路提供功率。

对于电阻器而言，流过它的电流为 $\mathbf{I}_1 = 4 \angle 0^\circ$ ，其两端的电压为 $20\mathbf{I}_1 = 80 \angle 0^\circ$ ，于是，该电阻器吸收的功率为：

$$P_2 = \frac{1}{2} \times 80 \times 4 = 160(\text{W})$$

对于电容器而言，流过它的电流为 $\mathbf{I}_2 = 10.58 \angle 79.1^\circ \text{ A}$ ，其两端的电压为 $-j5\mathbf{I}_2 = (5 \angle -90^\circ)(10.58 \angle 79.1^\circ) = 52.9 \angle 79.1^\circ - 90^\circ$ ，因此，电容器吸收的平均功率为：

$$P_4 = \frac{1}{2} \times 52.9 \times 10.58 \cos(-90^\circ) = 0$$

对于电感器而言，流过它的电流为 $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 2 - j10.39 = 10.58 \angle -79.1^\circ$ ，其两端的电压为 $j10(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 105.8 \angle -79.1^\circ + 90^\circ$ ，因此，电感器吸收的平均功率为：

$$P_3 = \frac{1}{2} \times 105.8 \times 10.58 \cos 90^\circ = 0$$

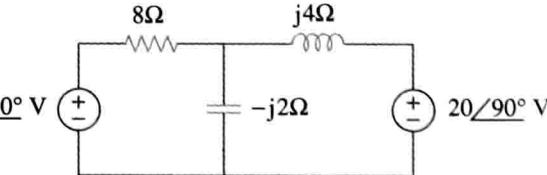
可见，电感器与电容器吸收的功率均为零，并且电流源提供的总功率等于电阻器与电压源吸收的功率，即：

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = -367.8 + 160 + 0 + 0 + 207.8 = 0$$

表明功率是守恒的。

 练习 11-4 试计算图 11-6 所示电路中五个元件分别吸收的平均功率。

答案：40V 电压源：-60W；j20V 电压源：-40W；电阻器：100W；其他：0W



11.3 最大平均功率传输

图 11-6 练习 11-4 图

本书 4.8 节解决了电阻性供电网络为其负载 R_L 提供功率的最大功率传输问题。如果用戴维南等效表示供电电路，则可以证明，当负载电阻等于戴维南电阻，即 $R_L = R_{Th}$ 时，传输给负载的功率最大。下面，将该结果扩展到交流电路中。

考虑如图 11-7 所示电路，图中交流电路与负载 Z_L 相连接，并以戴维南等效电路表达该交流电路。负载通常用阻抗表示，可以是电动机、天线、电视机等的模型。戴维南阻抗 Z_{Th} 与负载阻抗 Z_L 的直角坐标表达式为：

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (11.13a)$$

$$Z_L = R_L + jX_L \quad (11.13b)$$

流过负载的电流为：

$$I = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{(R_{Th} + jX_{Th}) + (R_L + jX_L)} \quad (11.14)$$

由式(11.11)可知，传递给负载的平均功率为：

$$P = \frac{1}{2} \| \mathbf{I} \|^2 R_L = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L / 2}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (11.15)$$

需要调节负载参数 R_L 与 X_L ，使得 P 最大。为此，令 $\partial P / \partial R_L = 0$ ， $\partial P / \partial X_L = 0$ 。由式(11.15)可得：

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L (X_{Th} + X_L)}{-[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (11.16a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 [(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)]}{2[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} \quad (11.16b)$$

令 $\partial P / \partial X_L = 0$ 得到：

$$X_L = -X_{Th} \quad (11.17)$$

令 $\partial P / \partial R_L = 0$ 得到：

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (11.18)$$

合并式(11.17)与式(11.18)得到如下结论：为实现最大平均功率传输，所选择的 Z_L 必须满足 $X_L = -X_{Th}$ 且 $R_L = -R_{Th}$ ，即：

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^* \quad (11.19)$$

对于最大平均功率传输而言，负载阻抗 Z_L 必须等于戴维南阻抗 Z_{Th} 的共轭复数。

提示：当 $Z_L = Z_{Th}^*$ 时，称负载与电源是匹配的。

上述结果称为正弦稳态条件下的最大平均功率传输定理 (maximum average power transfer theorem)。在式(11.15)中，令 $R_L = R_{Th}$ 且 $X_L = -X_{Th}$ ，得到最大平均功率为：

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} \quad (11.20)$$

在负载为纯实数的情况下，在式(11.18)中，令 $X_L = 0$ ，可以得到最大功率传输条件为：

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = |Z_{Th}| \quad (11.21)$$

式(11.21)表明，对于纯电阻负载而言，最大功率传输条件为：负载阻抗(即电阻)等于戴维南阻抗的模。

例 11-5 求图 11-8 所示电路中负载阻抗 Z_L 的值，使其吸收的平均功率最大，并计算相应的最大平均功率。

解：首先确定负载两端的戴维南等效电路。由图 11-9a 所示电路可以求出 Z_{Th} ：

$$Z_{Th} = j5 + 4 \parallel (8 - j6) = j5 + \frac{4(8 - j6)}{4 + 8 - j6} = (2.933 + j4.467)(\Omega)$$

由图 11-9b 所示的电路可以求出 \mathbf{V}_{Th} ，由分压原理，有：

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{8 - j6}{4 + 8 - j6} \times 10 = 7.454 \angle -10.3^\circ (\text{V})$$

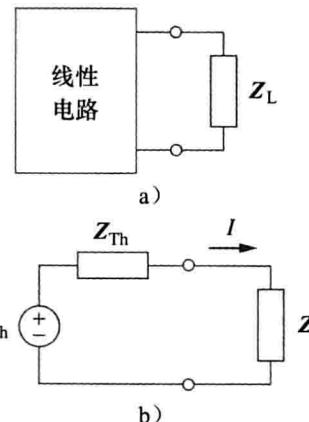


图 11-7 确定最大平均功率传输条件

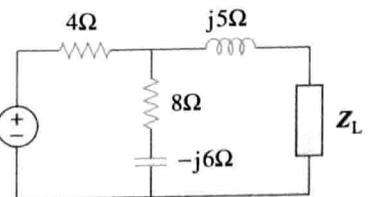


图 11-8 例 11-5 图

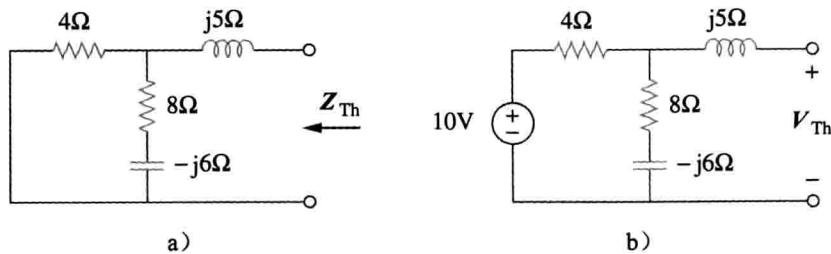


图 11-9 图 11-8 的戴维南等效电路

当负载阻抗从电路中吸收的平均功率最大时，其阻抗为：

$$Z_L = Z_{Th}^* = (2.933 - j4.467)\Omega$$

根据式(11.20)，最大平均功率为：

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{7.454^2}{8 \times 2.933} = 2.368\text{W}$$

练习 11-5 对于图 11-10 所示电路，试求吸收最大平均功率时的负载阻抗 Z_L ，并计算该最大平均功率。

答案： $(3.415 - j0.7317)\Omega$, 51.47W

例 11-6 在图 11-11 所示电路中，求吸收最大平均功率时的 R_L 值，并计算该功率。

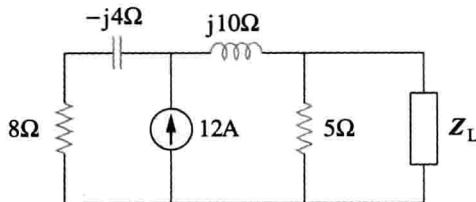


图 11-10 练习 11-5 图

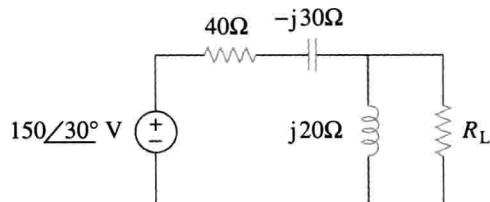


图 11-11 例 11-6 图

解：首先求出 R_L 两端的戴维南等效电路：

$$\mathbf{Z}_{Th} = (40 - j30) \parallel j20 = \frac{j20(40 - j30)}{j20 + 40 - j30} = (9.412 + j22.35)(\Omega)$$

由分压原理，有：

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{j20}{j20 + 40 - j30} \times 150 \angle 30^\circ = 72.76 \angle 134^\circ (\text{V})$$

吸收最大平均功率的 R_L 值为：

$$R_L = |\mathbf{Z}_{Th}| = \sqrt{9.412^2 + 22.35^2} = 24.25(\Omega)$$

流过该负载的电流为：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th} + \mathbf{R}_L} = \frac{72.76 \angle 134^\circ}{33.66 + j22.35} = 1.8 \angle 100.42^\circ (\text{A})$$

R_L 吸收的最大平均功率为：

$$P_{max} = \frac{1}{2} |\mathbf{I}|^2 R_L = \frac{1}{2} \times 1.8^2 \times 24.25 = 39.29(\text{W})$$

练习 11-6 在图 11-12 所示电路中，调节电阻器 R_L 使其能够吸收最大平均功率，试计算 R_L 及其吸收的最大平均功率值。

答案： 30Ω , 6.863W

11.4 有效值

有效值(effective value)的概念源于对测量交流电压源或电流源传递给电阻性负载的有效功率的需求。

周期性电流的有效值是指与该周期性

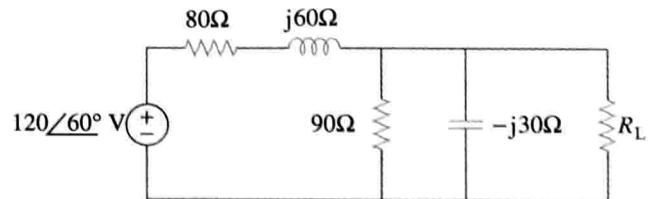


图 11-12 练习 11-6 图

电流传递给电阻器的平均功率相等的直流电流值。

在图 11-13 所示电路中, 图 a 中的电路为交流电路, 图 b 中的电路为直流电路。计算有效值的目的是求出与正弦电流 i 传递给电阻器 R 的平均功率相等的有效值电流 I_{eff} , 该交流电路中, 电阻器吸收的平均功率为:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (11.22)$$

而在直流电路中, 电阻器吸收的功率为:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (11.23)$$

令式(11.22)与式(11.23)相等, 即可求出:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (11.24)$$

交流电压有效值的求解方法与交流电流有效值的求解方法相同, 即:

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} \quad (11.25)$$

上式表明, 有效值就是周期信号平方的方均根(或平均)。因此, 有效值通常也称为方均根(root-mean-square)值, 简称 rms 值, 写作:

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}}, \quad V_{\text{eff}} = V_{\text{rms}} \quad (11.26)$$

对于任意周期函数 $x(t)$, 其有效值(rms 值)为:

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt} \quad (11.27)$$

周期信号的有效值就是它的方均根(rms)值。

式(11.27)表明, 为了求得 $x(t)$ 的 rms 值, 首先求出其平方值 x^2 , 之后求平均值, 即:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt$$

最后再求该均值的平方根($\sqrt{}$)。常数的 rms 仍然是它本身, 正弦信号 $i(t) = I_m \cos \omega t$ 的有效值或 rms 值为:

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.28)$$

同理, 对于 $v(t) = V_m \cos \omega t$, 其有效值为:

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (11.29)$$

必须牢记的是, 式(11.28)与式(11.29)仅适用于正弦信号。

利用 rms 值来表示式(11.8)中的平均功率, 可得:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.30)$$

类似地, 式(11.11)表示的电阻器 R 吸收的平均功率可以写为:

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \quad (11.31)$$

对于给定的正弦电压或电流而言, 由于其平均值为零, 所以通常用它的最大值或 rms 值来表示。电力公司一般用 rms 值而不是峰值来标称相量大小, 例如, 民用电压 110V(我国为 220V)就是电力公司供电电压的 rms 值。在功率分析中, 利用有效值表示电压与电流

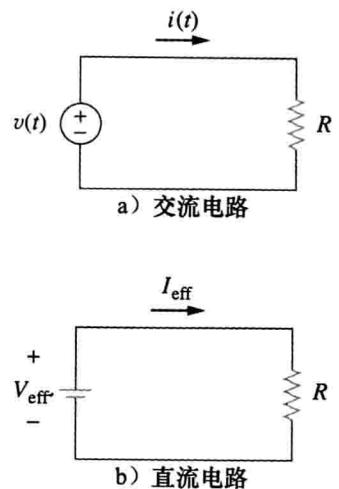


图 11-13 求解有效电流

是比较方便的。另外，模拟电压表与电流表的读数分别为被测电压或电流的 rms 值。

例 11-7 求图 11-14 所示电流波形的 rms 值，如果该电流流过一个 2Ω 电阻器，试求该电阻器吸收的平均功率。

解：图示电流波形的周期为 $T=4$ ，一个周期内该电流波形的表达式为：

$$i(t) = \begin{cases} 5t, & 0 < t < 2 \\ -10, & 2 < t < 4 \end{cases}$$

其 rms 值为：

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\int_0^2 (5t)^2 dt + \int_2^4 (-10)^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[25 \times \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 + 100t \Big|_2^4 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{200}{3} + 200 \right)} = 8.165(\text{A}) \end{aligned}$$

2Ω 电阻器吸收的平均功率为：

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = 8.165^2 \times 2 = 133.3(\text{W})$$

练习 11-7 求图 11-15 所示电流波形的 rms 值，如果该电流流过一个 9Ω 电阻器，计算该电阻器吸收的平均功率。
答案：9.238A, 768W

例 11-8 如图 11-16 所示波形为半波整流正弦波，试求其 rms 值以及 10Ω 电阻器消耗的平均功率。

解：该电压波形的周期为 $T = 2\pi$ ， $v(t)$ 可表示为：

$$v(t) = \begin{cases} 10\sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

其 rms 值为：

$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi (10\sin t)^2 dt + \int_\pi^{2\pi} 0^2 dt \right]$$

但由于 $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ ，所以：

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{100}{2}(1 - \cos 2t) dt = \frac{50}{2\pi} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{50}{2\pi} (\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi - 0) = 25, \quad V_{\text{rms}} = 5\text{V} \end{aligned}$$

电阻器吸收的平均功率为：

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{5^2}{10} = 2.5(\text{W})$$

练习 11-8 求图 11-17 所示的全波整流正弦波的 rms 值，并计算 6Ω 电阻器消耗的平均功率。
答案：70.71V, 833.3W

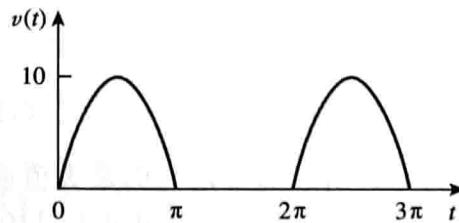


图 11-16 例 11-8 图

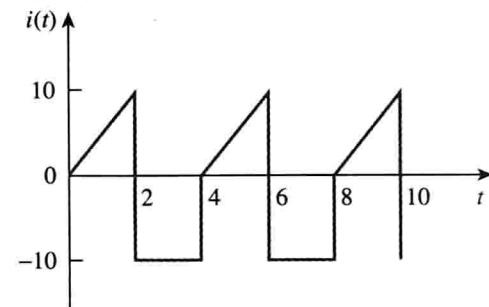


图 11-14 例 11-7 图

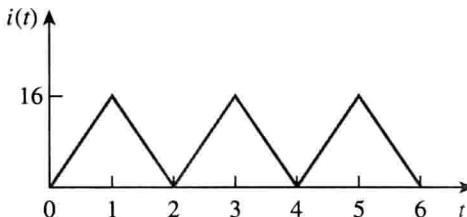


图 11-15 练习 11-7 图

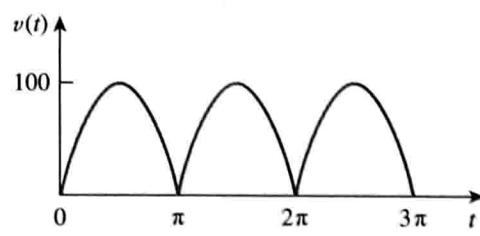


图 11-17 练习 11-8 图

11.5 视在功率与功率因数

由 11.2 节可知, 如果电路终端的电压与电流为:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \quad (11.32)$$

或用相量形式表示为 $\mathbf{V} = V_m / \theta_v$, $\mathbf{I} = I_m / \theta_i$, 则其平均功率为:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.33)$$

由 11.4 节可知:

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.34)$$

上式中出现了新的一项:

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad (11.35)$$

平均功率为两项的乘积, 其中乘积 $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ 称为视在功率(apparent power) S , 因子 $\cos(\theta_v - \theta_i)$ 称为功率因数(power factor, pf)。

视在功率(单位为 V·A)是指电压与电流的有效值乘积。

之所以称为视在功率, 是因为与直流电阻性电路相类似, 功率表面上看应该是电压与电流的乘积。视在功率的单位为伏安或 V·A, 以区别于单位为瓦特的平均功率或有功功率。功率因数是无量纲的, 它等于平均功率与视在功率之比:

$$\text{pf} = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.36)$$

由于角度($\theta_v - \theta_i$)的余弦值为功率因数, 因此将该角度称为功率因数角(power factor angle)。如果 \mathbf{V} 为负载两端的电压, \mathbf{I} 为流过负载的电流, 则功率因数角等于负载阻抗的辐角。这是因为:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_m / \theta_v}{I_m / \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} / \theta_v - \theta_i \quad (11.37)$$

另外, 由于:

$$\mathbf{V}_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{rms}} / \theta_v \quad (11.38a)$$

和

$$\mathbf{I}_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{rms}} / \theta_i \quad (11.38b)$$

则阻抗为:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{rms}}}{\mathbf{I}_{\text{rms}}} = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} / \theta_v - \theta_i \quad (11.39)$$

功率因数是电压与电流的相位角之差的余弦值, 同时也是负载阻抗辐角的余弦值。

由式(11.36)可知, 功率因数可以看做是由视在功率得到有功功率或平均功率所必须乘以的一个因子, 其值在 0~1 之间。对于纯电阻性负载而言, 电压与电流是同相的, 所以 $\theta_v - \theta_i = 0$ 且 $\text{pf} = 1$, 即视在功率等于平均功率。对于纯电抗负载而言, $\theta_v - \theta_i = \pm 90^\circ$ 且 $\text{pf} = 0$, 此时平均功率为零。在这两种极端情况之间, pf 可以说是超前的或滞后的。超前功率因数是指电流超前于电压, 此时电路负载呈电容性; 滞后功率因数是指电流滞后于电压, 此时电路负载呈电感性。在 11.9.2 节还会看到, 功率因数会影响用户支付给供电公司的电费。

提示: 由式(11.36)可知, 功率因数也可以看成是负载消耗的有功功率与负载的视在功率之比。

例 11-9 当激励电压为 $v(t) = 120 \cos(100\pi t - 20^\circ)$ V 时, 流过某串接负载的电流为

$i(t) = 4\cos(100\pi t + 10^\circ)$ A, 求该负载的视在功率与功率因数, 并确定构成该串接负载的元件值。

解: 视在功率为:

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = \frac{120}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} = 240(\text{V} \cdot \text{A})$$

功率因数为:

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(-20^\circ - 10^\circ) = 0.866(\text{超前})$$

由于电流超前于电压, 因此 pf 为超前的。功率因数还可以由负载阻抗求得:

$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{120 / -20^\circ}{4 / 10^\circ} = 30 / -30^\circ = (25.98 - j15)\Omega$$

$$\text{pf} = \cos(-30^\circ) = 0.866(\text{超前})$$

负载阻抗 Z 可以看做是一个 25.98Ω 的电阻器与一个电容器的串联, 该电容器的容抗为:

$$X_C = -15 = -\frac{1}{\omega C}$$

即

$$C = \frac{1}{15\omega} = \frac{1}{15 \times 100\pi} = 212.2(\mu\text{F})$$

 练习 11-9 当激励电压为 $v(t) = 320\cos(377t + 10^\circ)$ V 时, 确定阻抗为 $Z = (60 + j40)\Omega$ 的负载的视在功率与功率因数。 答案: $0.8321(\text{滞后}), 710 / 33.69^\circ \text{V} \cdot \text{A}$

例 11-10 试确定图 11-18 所示电路从电源端看进去的功率因数, 并计算电源输出的平均功率。

解: 电路的总阻抗为:

$$Z = 6 + 4 \parallel (-j2) = 6 + \frac{-j2 \times 4}{4 - j2} = 6.8 - j1.6 = 7 / -13.24^\circ (\Omega)$$

由于阻抗为电容性的, 故功率因数为:

$$\text{pf} = \cos(-13.24^\circ) = 0.9734(\text{超前})$$

电路的 rms 值为:

$$I_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{rms}}}{Z} = \frac{30 / 0^\circ}{7 / -13.24^\circ} = 4.286 / 13.24^\circ (\text{A})$$

电源提供的平均功率为:

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{pf} = 30 \times 4.286 \times 0.9734 = 125(\text{W})$$

即

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = 4.286^2 \times 6.8 = 125(\text{W})$$

其中, R 为阻抗 Z 的电阻部分。

 练习 11-10 计算图 11-19 所示电路从电源端看进去的功率因数, 以及该电源提供的平均功率。 答案: $0.936(\text{滞后}), 2.008\text{kW}$

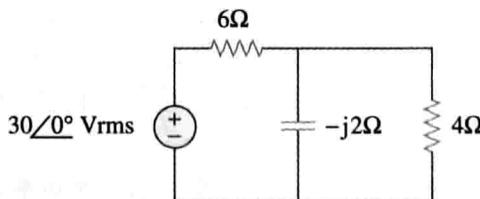


图 11-18 例 11-10 图

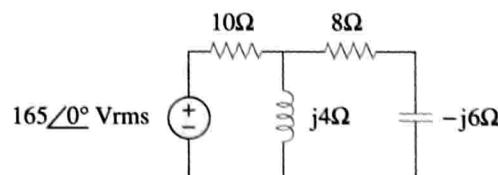


图 11-19 练习 11-10 图

11.6 复功率

为了得到尽可能简单的功率关系式，电力工程师付出了多年努力，提出了复功率 (complex power) 的概念，可用于表示并联负载的全部影响。由于复功率包含了给定负载吸收功率的全部信息，所以复功率在功率分析中是一个非常重要的概念。

考虑如图 11-20 所示的交流负载。如果给定电压 $v(t)$ 与电流 $i(t)$ 形式为 $\mathbf{V} = V_m \angle \theta_v$ 与 $\mathbf{I} = I_m \angle \theta_i$ 。假设采用无源符号约定（见图 11-20），则该交流负载所吸收的复功率 S 为电压与电流共轭复数的乘积，即：

$$S = \frac{1}{2} \mathbf{VI}^* \quad (11.40)$$

用有效值表示为：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* \quad (11.41)$$

其中：

$$V_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{V}}{\sqrt{2}} = V_{\text{rms}} \angle \theta_v \quad (11.42)$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{\mathbf{I}}{\sqrt{2}} = I_{\text{rms}} \angle \theta_i \quad (11.43)$$

于是，式(11.42)可以写为：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \angle \theta_v - \theta_i = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.44)$$

该式同样可以由式(11.9)得到。由式(11.44)可以看出，复功率的大小即为视在功率，因此，复功率的单位为伏安(V·A)，而且，复功率的辐角就是功率因数角。

提示：在不至混淆的情况下，电压或电流有效值的下标 rms 通常可以省略。

复功率还可以用负载阻抗 Z 表示，由式(11.37)可知，负载阻抗 Z 可以写为：

$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} \angle \theta_v - \theta_i \quad (11.45)$$

因此， $\mathbf{V}_{\text{rms}} = Z \mathbf{I}_{\text{rms}}$ ，将该关系代入式(11.41)可得：

$$S = I_{\text{rms}}^2 Z = \frac{V_{\text{rms}}^2}{Z^*} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* \quad (11.46)$$

又因 $Z = R + jX$ ，则式(11.46)变为：

$$S = I_{\text{rms}}^2 (R + jX) = P + jQ \quad (11.47)$$

其中， P 与 Q 分别为复功率的实部与虚部，即：

$$P = \text{Re}(S) = I_{\text{rms}}^2 R \quad (11.48)$$

$$Q = \text{Im}(S) = I_{\text{rms}}^2 X \quad (11.49)$$

P 为平均功率或有功功率，其值取决于负载电阻 R ，而 Q 为无功 (reactive) 功率 (或正交功率)，其值取决于负载的电抗 X 。

比较式(11.44)与式(11.47)可得：

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i), \quad Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.50)$$

有功功率 P 就是传递给负载的平均功率，单位为瓦特，是唯一有用的功率，也是负载实际消耗的功率。无功功率 Q 是电源与电抗负载进行能量交换的一个度量值，单位为乏 (volt-ampere reactive, var)，区别于有功功率的单位瓦特。由第 6 章可知，电路中的储能元件既不消耗功率也不提供功率，只是与网络中的其他部分来回交换能量。同样，无功功率也是在负载与电源之间来回转换，且在转换过程中没有损耗。应该注意到：

- 对于电阻性负载 ($\text{pf}=1$)， $Q=0$ 。

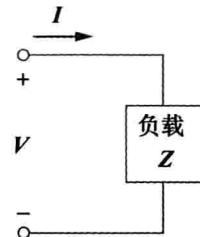


图 11-20 某负载的电压相量与电流相量

2. 对于电容性负载(超前 pf)， $Q < 0$ 。

3. 对于电感性负载(滞后 pf)， $Q > 0$ 。

复功率(单位为 $V \cdot A$)是电压相量有效值与电流相量有效值的共轭复数的乘积，它的值是一个复数，其实部为有功功率 P ，虚部为无功功率 Q 。

引入复功率后，就可以由电压相量与电流相量直接得到有功功率和无功功率：

$$\text{复功率} = S = P + jQ = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = |V_{\text{rms}}| |I_{\text{rms}}| / \theta_v - \theta_i$$

$$\text{视在功率} = S = |S| = |V_{\text{rms}}| |I_{\text{rms}}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\text{有功功率} = P = \text{Re}(S) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$\text{无功功率} = Q = \text{Im}(S) = S \sin(\theta_v - \theta_i)$$

$$\text{功率因数} = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

(11.51)

可见，复功率包含了给定负载的所有与功率有关的信息。

通常利用三角形法表示 S 、 P 、 Q 三者之间的关系，称为功率三角形(power triangle)，如图 11-21a 所示。与图 11-21b 所示的表示 Z 、 R 、 X 三者之间关系的阻抗三角形类似，功率三角形包括四项——视在功率/复数功率、有功功率、无功功率与功率因数角。给定其中两项，就可以很方便地由功率三角形得到另外两项。如图 11-22 所示，当 S 位于第一象限时，则得到电感性负载和滞后的功率因数；位于第四象限时，则得到电容性负载和超前的功率因数。当然，复功率 S 也可能位于第二象限或第三象限，这就要求负载阻抗具有负电阻，这种情况在有源电路中是可能的。

提示：复功率 S 包含了负载的所有功率信息， S 的实部为有功功率 P ，虚部为无功功率 Q ， S 的幅度为视在功率 S ，其相位角的余弦值为功率因数 pf。

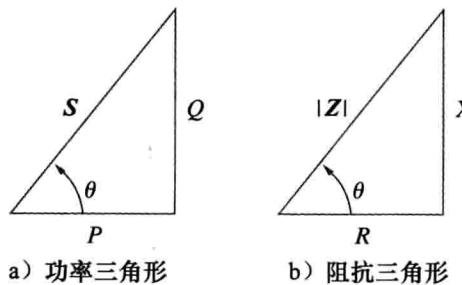


图 11-21 功率和阻抗三角形

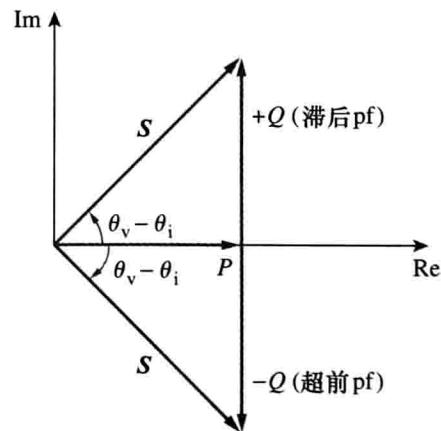


图 11-22 功率三角形

例 11-11 某负载两端的电压为 $v(t) = 60 \cos(\omega t - 10^\circ)$ V，而沿电压降落方向流过该负载的电流为 $i(t) = 1.5 \cos(\omega t + 50^\circ)$ A。试求：(a)复功率与视在功率；(b)有功功率与无功功率；(c)功率因数与负载阻抗。

解：(a) 电压相量与电流相量的 rms 值为：

$$V_{\text{rms}} = \frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ \text{ (V)}, \quad I_{\text{rms}} = \frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle +50^\circ \text{ (A)}$$

复功率为：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = \left(\frac{60}{\sqrt{2}} \angle -10^\circ \right) \left(\frac{1.5}{\sqrt{2}} \angle -50^\circ \right) = 45 \angle -60^\circ \text{ (V} \cdot \text{A})$$

视在功率为：

$$S = |S| = 45 \text{ V} \cdot \text{A}$$

(b) 将复功率写为直角坐标形式, 得到:

$$S = 45 \angle -60^\circ = 45[\cos(-60^\circ) + j\sin(-60^\circ)] = 22.5 - j38.97 (\text{V} \cdot \text{A})$$

由于 $S = P + jQ$, 因此有功功率为:

$$P = 22.5 \text{ W}$$

无功功率为:

$$Q = -38.97 \text{ var}$$

(c) 功率因数为:

$$\text{pf} = \cos(-60^\circ) = 0.5 (\text{超前})$$

由于无功功率是负的, 表示 pf 是超前的。负载阻抗为:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{60 \angle -10^\circ}{1.5 \angle +50^\circ} = 40 \angle -60^\circ (\Omega)$$

这是一个电容性阻抗。

练习 11-11 某负载的 $V_{\text{rms}} = 110 \angle 85^\circ \text{ V}$, $I_{\text{rms}} = 0.4 \angle 15^\circ \text{ A}$, 试求: (a) 复功率与视在功率; (b) 有功功率与无功功率; (c) 功率因数与负载阻抗。

答案: (a) $44 \angle 70^\circ \text{ V} \cdot \text{A}$, $44 \text{ V} \cdot \text{A}$; (b) 15.05 W , 41.35 var ;

(c) 0.342 (滞后), $(94.06 + j258.4) \Omega$

例 11-12 某负载从有效值 120 V 的正弦电源中提取了 $12 \text{ kV} \cdot \text{A}$ 的功率, 其功率因数为 0.856 (滞后), 计算: (a) 传递给该负载的平均功率与无功功率; (b) 峰值电流; (c) 负载阻抗。

解: (a) 已知 $\text{pf} = \cos\theta = 0.856$, 于是功率角为 $\theta = \arccos 0.856 = 31.13^\circ$ 。如果视在功率为 $S = 12000 \text{ V} \cdot \text{A}$, 则平均功率为:

$$P = S \cos\theta = 12000 \times 0.856 = 10272 (\text{kW})$$

无功功率为:

$$Q = S \sin\theta = 12000 \times 0.517 = 6204 (\text{kV} \cdot \text{A})$$

(b) 由于 pf 是滞后的, 所以复功率为:

$$S = P + jQ = (10272 + j6204) \text{ kV} \cdot \text{A}$$

由 $S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^*$ 可得:

$$I_{\text{rms}}^* = \frac{S}{V_{\text{rms}}} = \frac{10272 + j6204}{120 \angle 0^\circ} = (85.6 + j51.7) \text{ A} = 100 \angle 31.13^\circ (\text{A})$$

即 $I_{\text{rms}} = 100 \angle -31.13^\circ$, 其峰值电流为:

$$I_m = \sqrt{2} I_{\text{rms}} = \sqrt{2} \times 100 = 141.4 (\text{A})$$

(c) 负载阻抗为

$$Z = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{100 \angle -31.13^\circ} = 1.2 \angle 31.13^\circ (\Omega)$$

这是一个电感性阻抗。

练习 11-12 某正弦电源给负载 $Z = 250 \angle -75^\circ \Omega$ 提供的无功功率为 100 kvar , 试确定:

(a) 功率因数; (b) 传递给该负载的视在功率; (c) rms 电压。

答案: (a) 0.2588 (超前); (b) $103.53 \text{ kV} \cdot \text{A}$; (c) 5.087 kV

† 11.7 交流功率守恒

功率守恒原理不仅适用于直流电路(参见 1.5 节), 而且适用于交流电路。为了说明这一原理, 考虑如图 11-23a 所示电路, 图中负载 Z_1 与 Z_2 并联在交流电压源 V 两端, 利用 KCL, 可得:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \quad (11.52)$$

实际上，在例 11-3 与例 11-4 中已经可以看到，交流电路中的平均功率是守恒的。

该电源提供的复功率为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*) = \mathbf{VI}_1^* + \mathbf{VI}_2^* = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (11.53)$$

其中， \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 分别表示传递给负载 \mathbf{Z}_1 与 \mathbf{Z}_2 的复功率。

如果两个负载与电压源串联，如图 11-23b 所示，则由 KVL 可知：

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \quad (11.54)$$

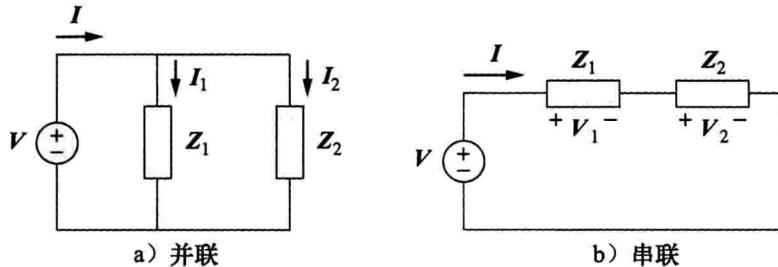


图 11-23 交流电压源给几个负载的供电

电源提供的复功率为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{VI}^* = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)\mathbf{I}^* = \mathbf{V}_1\mathbf{I}^* + \mathbf{V}_2\mathbf{I}^* = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (11.55)$$

其中， \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 分别表示传递到负载 \mathbf{Z}_1 与 \mathbf{Z}_2 上的复功率。

由式(11.53)与式(11.55)可得出结论：无论负载是串联的还是并联的(或是混联的)，电源提供的总功率等于传递给负载的总功率。一般而言，如果电源连接 N 个负载。则有：

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_N} \quad (11.56)$$

上式表明网络中总的复功率等于各元件复功率之和(该关系对于有功功率与无功功率也成立，但对于视在功率不成立)。这就是交流功率守恒原理。

电源的复功率、有功功率、无功功率分别等于各个负载上的复功率、有功功率、无功功率之和。

由上述分析可知，网络中来自电源的有功(无功)功率等于流入到电路其他元件中的有功(无功)功率。

提示：事实上，交流功率的所有形式——瞬时功率、有功功率、无功功率与复功率都是守恒的。

例 11-13 图 11-24 所示为一个电压源通过传输线给一个负载供电，传输线的阻抗可以表示为一个 $(4+j2)\Omega$ 的阻抗和一个回路，试求：(a) 电源吸收的有功功率与无功功率；(b) 传输线吸收的有功功率与无功功率；(c) 负载吸收的有功功率与无功功率。

解：总阻抗为：

$$\mathbf{Z} = (4+j2) + (15-j10) = 19-j8 = 20.62 \angle -22.83^\circ (\Omega)$$

流过电路的电流为：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{20.62 \angle -22.83^\circ} = 10.67 \angle 22.83^\circ (\text{Arms})$$

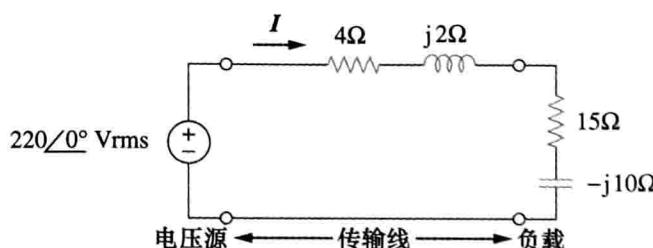


图 11-24 例 11-13 图

(a) 对于电源而言，复功率为：

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{V}_s \mathbf{I}^* = (220 \angle 0^\circ)(10.67 \angle -22.83^\circ) = 2347.4 \angle -22.83^\circ = (2163.5 - j910.8)(V \cdot A)$$

由此可得，电源吸收的有功功率为 2163.5W，无功功率为 910.8var(超前)

(b) 对于传输线而言，电压为：

$$\mathbf{V}_{\text{line}} = (4 + j2)\mathbf{I} = (4.472 / 26.57^\circ)(10.67 / 22.83^\circ) = 47.72 / 49.4^\circ (\text{Vrms})$$

传输线吸收的复功率为：

$$\mathbf{S}_{\text{line}} = \mathbf{V}_{\text{line}} \mathbf{I}^* = (47.72 / 49.4^\circ)(10.67 / -22.83^\circ) = 509.2 / 26.57^\circ = (455.4 + j227.7)(\text{V} \cdot \text{A})$$

或

$$\mathbf{S}_{\text{line}} = |\mathbf{I}|^2 \mathbf{Z}_{\text{line}} = 10.67^2 (4 + j2) = (455.4 + j227.7)(\text{V} \cdot \text{A})$$

由此可得，传输线吸收的有功功率为 455.4W，无功功率为 227.7var(滞后)。

(c) 对于负载而言，电压为：

$$\mathbf{V}_L = (15 - j10)\mathbf{I} = (18.03 / -33.7^\circ)(10.67 / 22.83^\circ) = 192.38 / -10.87^\circ (\text{Vrms})$$

负载吸收的复功率为：

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{V}_L \mathbf{I}^* = (192.38 / -10.87^\circ)(10.67 / -22.83^\circ) = 2053 / -33.7^\circ = (1708 - j1139)(\text{V} \cdot \text{A})$$

由此可得，负载吸收的有功功率为 1708W，无功功率为 1139var(超前)。可以注意到 $\mathbf{S}_s = \mathbf{S}_{\text{line}} + \mathbf{S}_L$ 。以上计算利用的是电压与电流的有效值。◀

练习 11-13 在如图 11-25 所示电路中，60Ω 电阻器吸收的平均功率为 240W，试求 V 与 电路中各支路的复功率，该电路总的复功率为多少(假设流过 60Ω 电阻器的电流无相移)？

答案：240.7 / 21.45° Vrms；20Ω 电阻器：656V · A；(30 - j10)Ω 阻抗：(480 - j160)V · A；(60 + j20)Ω 阻抗：(240 + j80)V · A；总的复功率：(1376 - j80)V · A

例 11-14 在图 11-26 所示电路中， $\mathbf{Z}_1 = 60 / -30^\circ \Omega$ ， $\mathbf{Z}_2 = 40 / 45^\circ \Omega$ ，计算电源提供的且从电源端口看进去的总的：(a) 视在功率；(b) 有功功率；(c) 无功功率；(d) pf。

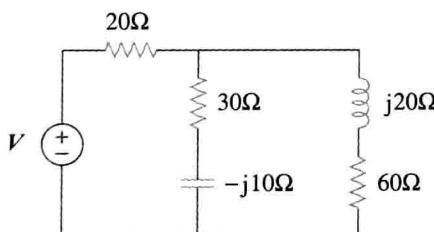


图 11-25 练习 11-13 图

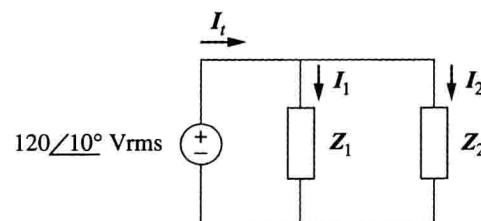


图 11-26 例 11-14 图

解：流过 \mathbf{Z}_1 的电流为：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{120 / 10^\circ}{60 / -30^\circ} = 2 / 40^\circ (\text{Arms})$$

流过 \mathbf{Z}_2 的电流为：

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_2} = \frac{120 / 10^\circ}{40 / 45^\circ} = 3 / -35^\circ (\text{Arms})$$

阻抗吸收的复功率分别为：

$$\mathbf{S}_1 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\mathbf{Z}_1^*} = \frac{120^2}{60 / 30^\circ} = 240 / -30^\circ = (207.85 - j120)\text{V} \cdot \text{A}$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\mathbf{Z}_2^*} = \frac{120^2}{40 / -45^\circ} = 360 / 45^\circ = (254.6 + j254.6)\text{V} \cdot \text{A}$$

总的复功率为：

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = (462.4 + j134.6)\text{V} \cdot \text{A}$$

(a) 总的视在功率为：

$$|\mathbf{S}_t| = \sqrt{462.4^2 + 134.6^2} = 481.6(\text{V} \cdot \text{A})$$

(b) 总的有功功率为：

$$P_t = \operatorname{Re}(S_t) = 462.4 \text{W}, \quad P_t = P_1 + P_2$$

(c) 总的无功功率为:

$$Q_t = \operatorname{Im}(S_t) = 134.6 \text{var}, \quad Q_t = Q_1 + Q_2$$

$$(d) \quad \text{pf} = P_t / |S_t| = 462.4 / 481.6 = 0.96 \text{(滞后)}$$

通过求解电源提供的复功率 S_s 可以检验上述结果的正确性:

$$I_t = I_1 + I_2 = (1.532 + j1.286) + (2.457 - j1.721)$$

$$= 4 - j0.435 = 4.024 \angle -6.21^\circ \text{ (Arms)}$$

$$S_s = VI_t^* = (120 \angle 10^\circ)(4.024 \angle 6.21^\circ)$$

$$= 482.88 \angle 16.21^\circ = (463 + j135) \text{V} \cdot \text{A}$$

与上面结果一致。

 练习 11-14 两个相互并联的负载分别为 2kW、pf=0.75(超前)和 4kW、pf=0.95(滞后)。试计算这两个负载的 pf，并求解电源提供的复功率。

答案: 0.9972(超前), $(6 - j0.4495) \text{kV} \cdot \text{A}$

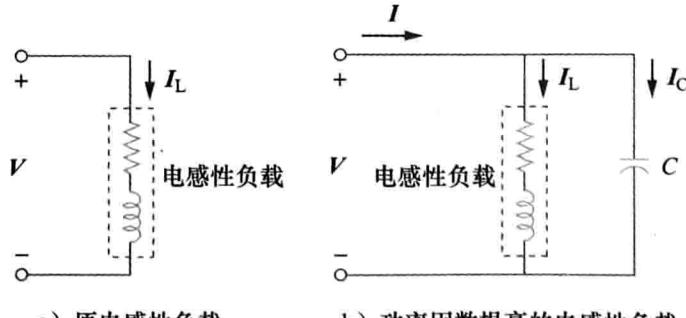
11.8 功率因数的校正

大多数家电负载(如洗衣机、空调、电冰箱等)以及工业负载(如感应电动机)通常呈现电感性负载特性且功率因数(滞后)较小。虽然负载的电感性不能改变,但是可以提高其功率因数。

不改变原始负载的电压或电流,提高功率因数的过程称为功率因数校正(**power factor correction**)。

提示: 换言之,功率因数校正可以看做是增加一个与负载并联的电抗元件(一般是电容器),从而使功率因数接近于单位 1 的过程。

由于大多数负载是电感性的,如图 11-27a 所示,所以给负载并联一个电容器就可以改善或者校正负载的功率因数,如图 11-27b 所示。增加电容器后的效果既可以用功率三角形予以说明,也可以用相关电流的相量图予以说明。图 11-28 给出了用于说明并联电容器作用的相量图,假设图 11-27a 所示电路的功率因数为 $\cos\theta_1$,而图 11-27b 所示电路的功率因数为 $\cos\theta_2$ 。显然,由图 11-28 可见,并联电容器后,供电电压与电流之间的相位角从 θ_1 减小到 θ_2 ,因而提高了功率因数。同时,由图 11-28 所示的相量幅度可见,在相同供电电压下,图 11-27a 所示电路提取的电流要比图 11-27b 所示电路提取的电流 I 要大。电流越大,损耗的功率就越大(因为 $P = I^2 R$ 呈平方关系),供电公司收取用户的电费也就越多。因此,减小电流或提高功率因数使其尽可能接近单位 1,对于供电公司和用户都是有利的。选取适当的电容器,就可以使电压与电流完全同相,从而使功率因数等于 1。



a) 原电感性负载

b) 功率因数提高的电感性负载

图 11-27 功率因数校正

提示: 电感性负载可以建模为电感器与电阻器的串联组合。

也可以从另一个角度来研究功率因数校正问题。考虑如图 11-29 所示的功率三角形,

如果原始电感性负载的视在功率为 S_1 ，则有：

$$P = S_1 \cos\theta_1, \quad Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = P \tan\theta_1 \quad (11.57)$$

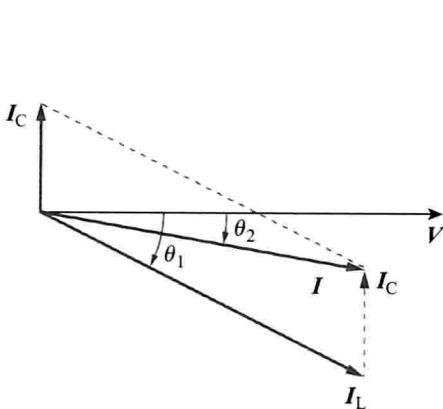


图 11-28 说明与电感性负载相并联的电容器作用的相量图

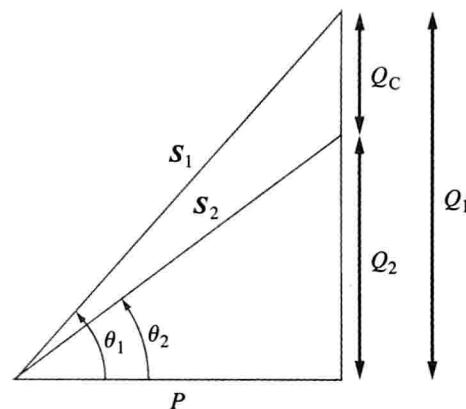


图 11-29 说明功率因数校正的功率三角形

在不改变有功功率的情况下，如果将功率因数从 $\cos\theta_1$ 提高到 $\cos\theta_2$ ，即 $P = S_2 \cos\theta_2$ ，则新的无功功率为：

$$Q_2 = P \tan\theta_2 \quad (11.58)$$

无功功率的降低是由并联电容器引起的，也就是说：

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) \quad (11.59)$$

但由式(11.46)可知： $Q_C = V_{\text{rms}}^2 / X_C = \omega C V_{\text{rms}}^2$ ，于是，所需的并联电容器的容值 C 可由下式确定：

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{P(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{\omega V_{\text{rms}}^2} \quad (11.60)$$

应注意的是，由于电容器消耗的平均功率为零，所以负载消耗的有功功率不会受到功率因数校正的影响。

虽然实际的负载大多是电感性负载，但也有可能出现电容性负载，即负载工作时的功率因数超前的。在这种情况下，负载两端应该连接一个电感器以实现功率因数校正，所需的分流电感器的电感值可按下式计算：

$$Q_L = \frac{V_{\text{rms}}^2}{X_L} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\omega L} \Rightarrow L = \frac{V_{\text{rms}}^2}{\omega Q_L} \quad (11.61)$$

其中， $Q_L = Q_1 - Q_2$ ，表示新、旧无功功率之差。

例 11-15 某负载与 120Vrms、60Hz 电力线相连后，在滞后功率因数为 0.8 时，该负载吸收的功率为 4kW。求将 pf 提高到 0.95 所需并联的电容值。

解：如果 $\text{pf} = 0.8$ ，则有：

$$\cos\theta_1 = 0.8 \Rightarrow \theta_1 = 36.87^\circ$$

其中 θ_1 为电压与电流之间的相位差。由已知的有功功率与 pf 可以得到视在功率为：

$$S_1 = \frac{P}{\cos\theta_1} = \frac{4000}{0.8} = 5000(\text{V} \cdot \text{A})$$

无功功率为：

$$Q_1 = S_1 \sin\theta = 5000 \sin 36.87^\circ = 3000(\text{var})$$

当 pf 提高到 0.95 时：

$$\cos\theta_2 = 0.95 \Rightarrow \theta_2 = 18.19^\circ$$

有功功率 P 并未改变，但视在功率发生了变化，其新值为：

$$S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2} = \frac{4000}{0.95} = 4210.5(\text{V} \cdot \text{A})$$

新的无功功率为：

$$Q_2 = S_2 \sin\theta_2 = 1314.4(\text{var})$$

新、旧无功功率之差是由于负载上并联了电容器引起的，因此由电容器引起的无功功率为：

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = 3000 - 1314.4 = 1685.6(\text{var})$$

且

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{\text{rms}}^2} = \frac{1685.6}{2\pi \times 60 \times 120^2} = 310.5(\mu\text{F})$$

注意：购买电容器通常要满足所需的电压，在本例中，电容器的最大峰值电压为170V，因此建议购买标称200V的电容器。

练习 11-15 某负载在 $\text{pf}=0.85$ (滞后)时的功率为 140kvar，求该负载的 pf 从 0.85(滞后)提高到 1 所需并联的电容值，假设利用 110Vrms、60Hz 电力线给负载供电。

答案：30.69 μF

† 11.9 应用实例

本节讨论两个重要的应用，即如何测量功率以及供电公司如何确定用户的电费。

11.9.1 功率测量

负载吸收的平均功率可以利用功率表(wattmeter)来测量。

功率表是测量平均功率的仪器。

提示：无功功率可以利用无功功率表来测量，无功功率表与负载的连接方式和功率表与负载的连接方式相同。

图 11-30 给出了由电流绕组与电压绕组组成的功率表的结构示意图。阻抗值极低(理想情况下为零)的电流绕组与负载串联(见图 11-31)，并对负载电流产生响应；阻抗值极高(理想情况下为无穷大)的电压绕组与负载并联(见图 11-31)，并对负载电压产生响应。电流绕组阻抗极低，在电路中相当于短路；而电压绕组阻抗高，在电路中相当于开路。因此，功率表的接入并不会对电路产生干扰，也不会影响功率的测量。

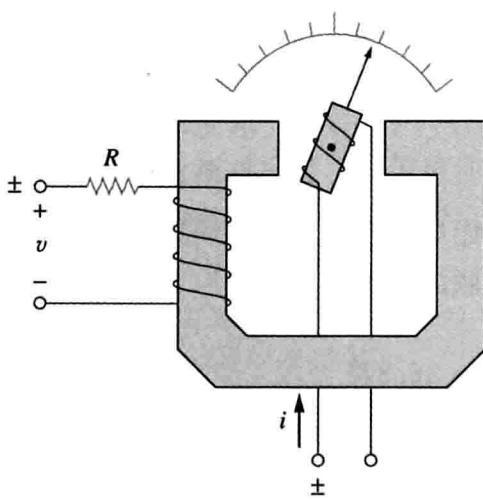


图 11-30 功率表

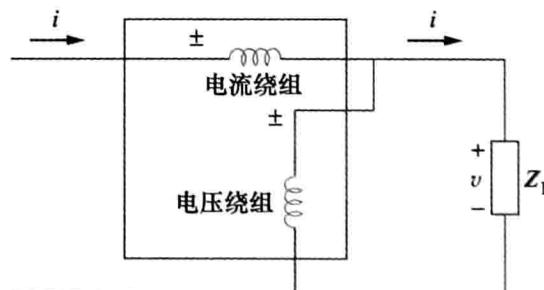


图 11-31 与负载相连的功率表

提示：某些功率表中没有绕组，这里仅考虑电磁式功率表。

当两个绕组通以电流后，功率表转动系统的机械转动惯量产生与一个乘积 $v(t)i(t)$ 的均值成正比的偏转角。如果负载的电压与电流分别为 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$ ， $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ ，则相应的均方根相量为：

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \angle \theta_v, \quad I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \theta_i \quad (11.62)$$

功率表测得的平均功率为：

$$P = |V_{\text{rms}}| |I_{\text{rms}}| \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.63)$$

如图 11-31 所示，功率表的每个绕组有两个端子，其中一个端子标有“±”。为了保证偏转角正向增大，电流绕组的“±”端子应朝向电源，电压绕组的“±”端子应与电流绕组连接到同一根线上。如果两个绕组都反接，则偏转角仍然会正向增大。然而，如果仅反接其中一个，则偏转角就会反向减小，功率表也就没有读数了。

例 11-16 试求图 11-32 所示电路中功率表的读数。

解：1. 明确问题。本题所要解决的问题已定义清楚。学生在实验室可以利用功率表对所求得的结果进行验证。

2. 列出已知条件。本题要求确定与阻抗串联的外部电源传递给负载的平均功率。

3. 确定备选方案。本题是一道简单的电路分析问题，所需求解的就是流过负载的电流幅度与辐角，以及负载两端电压的幅度与辐角。还可以利用 PSpice 求解上述变量，本题将利用 PSpice 对结果进行验证。

4. 尝试求解。在图 11-32 所示电路中，由于电流绕组与 $(8 - j6)\Omega$ 负载阻抗串联，而电压绕组与该负载阻抗并联，所以功率表读数为 $(8 - j6)\Omega$ 阻抗所吸收的平均功率。流过该电路的电流为：

$$I_{\text{rms}} = \frac{150 \angle 0^\circ}{(12 + j10) + (8 - j6)} = \frac{150}{20 + j4} (\text{A})$$

$(8 - j6)\Omega$ 阻抗两端的电压为：

$$V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}} (8 - j6) = \frac{150(8 - j6)}{20 + j4} (\text{V})$$

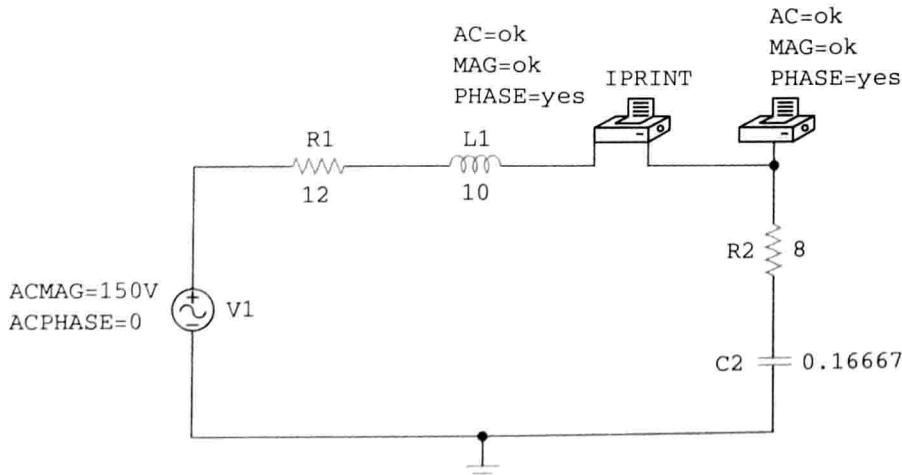
于是，复功率为：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = \frac{150(8 - j6)}{20 + j4} \times \frac{150}{20 - j4} = \frac{150^2 (8 - j6)}{20^2 + 4^2} = (423.7 - j324.6) \text{ V} \cdot \text{A}$$

功率表读数为：

$$P = \text{Re}(S) = 432.7 \text{ W}$$

5. 判断结果。可以利用 PSpice 验证所得到的结果。



仿真可得：

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
1.592E-01	7.354E+00	-1.131E+01

且

FREQ	VM (\$N_0004)	VP (\$N_0004)
1.592E-01	7.354E+01	-4.818E+01

为了验证结果，需要计算电流(7.354A)流经负载电阻所产生的功率：

$$P = I_L^2 R = 7.354^2 \times 8 = 432.7 \text{W}$$

与之前的计算结果相同，答案得到验证。

6. 是否满足要求？问题已解决，结果满足要求，现在可以提交答案了。

练习 11-16 对于图 11-33 所示电路，求功率表的读数。

答案：1.437kW

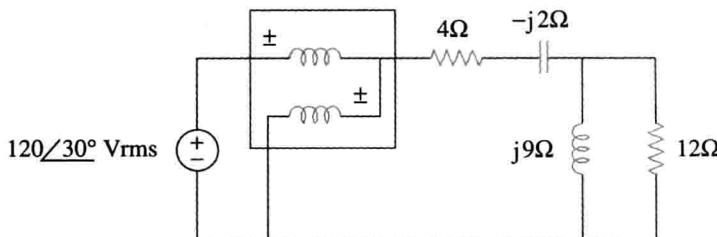


图 11-33 练习 11-16 图

11.9.2 电费的计算

1.7 节讨论了确定用户电费的一种简化模型，但当时的计算中并未涉及功率因数的概念，下面将讨论功率因数在电费计算中的重要作用。

正如 11.8 节所述，功率因数低的负载所需的电流大，因此电费高。理想情况应该是从供电系统提取的电流最小，从而使得 $S=P$, $Q=0$ 。无功功率 Q 不等于零的负载意味着能量要在负载与电源之间来回交换，因而造成额外的功率损耗。因此，供电公司总是鼓励用户将负载的功率因数尽可能接近 1，并对不改善负载功率因数的部分用户予以一定的惩罚。

供电公司通常将其用户分为如下几类：居民用户（本地用户）、商业用户以及工业用户，或者分为大、中、小型耗电用户。各类用户采用不同的费率标准。单位为千瓦时(kW·h)的用户的用电量是由安装在用户室内的电能表(千瓦-时表)来计量的。

虽然供电公司采用不同的方法收取用户的电费，但其收费价格表上一般都分为两个部分。第一部分是固定的，对应于满足用户负载需求所必需的发电、输电和配电的费用，这部分费用通常用最大用电需求量的每 kW 价格来计算。或者考虑到用户的功率因数(pf)，用最大用电需求量的 $\text{kV} \cdot \text{A}$ 来算。当用户功率因数低于某个规定值（如 0.85 或 0.9）时，就会向用户收取一定的 pf 罚金。例如当 pf 较规定值每低于 0.01，就要收取其最大需求 kW 或 $\text{kV} \cdot \text{A}$ 一定百分比的费用作为罚金。另一方面，当用户功率因数高于某规定值时，每高于 0.01 就会给用户一定比例的奖励。

收费价格表上的第二部分正比于用电量，单位是 $\text{kW} \cdot \text{h}$ ，这部分费用可以分级收取。例如，第一个 $100\text{kW} \cdot \text{h}$ 为 16 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ ，下一个 $200\text{kW} \cdot \text{h}$ 为 10 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 等。因此，用户的电费账单可以用如下公式计算：

$$\text{总电费} = \text{固定费用} + \text{消耗电能的费用} \quad (11.64)$$

例 11-17 某制造工厂一个月消耗的电能为 $200\text{MW} \cdot \text{h}$ ，如果其最大需求量为 1600kW ，试计算按如下两部分费率收取的用户电费：

需求量收费：\$5.00 每月每千瓦。

用电收费：第一个 $50\,000\text{kW} \cdot \text{h}$ 为 8 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ ，其余用电量为 5 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 。

解：需求量决定的固定收费为：

$$\$ 5.00 \times 1600 = \$ 8000 \quad (11.17.1)$$

第一个 $50\,000\text{kW} \cdot \text{h}$ 的用电收费是：

$$\$ 0.08 \times 50\,000 = \$ 4000 \quad (11.17.2)$$

其余用电量为 $200\ 000\text{kW}\cdot\text{h} - 50\ 000\text{kW}\cdot\text{h} = 150\ 000\text{kW}\cdot\text{h}$, 相应的电费为:

$$\$0.05 \times 150\ 000 = \$7500 \quad (11.17.3)$$

将式(11.17.1)~式(11.17.3)加起来, 得到:

$$\text{一个月总的账单} = \$8000 + \$4000 + \$7500 = \$19\ 500$$

看起来电费很高, 但这部分费用通常仅是该工厂产品的总产值或成品销售额的很小一部分。 ◀

练习 11-17 某造纸厂一个月的电表读数为:

最大需求最 $32\ 000\text{kW}$

电能消耗 $500\text{MW}\cdot\text{h}$

试利用例 11-17 给出的两部分费率, 计算该造纸厂当月的电费。 答案: $\$186\ 500$

例 11-18 某 300kW 负载在 13kVrms 供电电压下, 一个月里以功率因数 0.8 工作了 520 小时。计算按如下费率确定的每月平均用电支出:

电能收费: 6 美分/ $\text{kW}\cdot\text{h}$ 。

功率因数罚金: 较 0.85 每低 0.01 要增收电能收费的 0.1%。

功率因数奖励: 较 0.85 每高 0.01 要奖励电能收费的 0.1%。

解: 所消耗的电能为:

$$W = 300\text{kW} \times 520\text{h} = 156\ 000\text{kW}\cdot\text{h}$$

负载工作时的功率因数 $\text{pf} = 80\% = 0.8$, 较预定值 0.85 低 5×0.01 。由于 pf 每降低 0.01 要加收 0.1% 的电能收费, 所以功率因数罚金为 0.5%, 相应的电能为:

$$\Delta W = 156\ 000 \times \frac{5 \times 0.1}{100} = 780(\text{kW}\cdot\text{h})$$

因此, 总的收费能量为

$$W_t = W + \Delta W = 156\ 000 + 780 = 156\ 780(\text{kW}\cdot\text{h})$$

每月应收取的电费为:

$$\text{电费} = 6 \text{ 美分} \times W_t = \$0.06 \times 156\ 780 = \$9406.80 \quad \blacktriangleleft$$

练习 11-18 某 800kW 的感应电炉以功率因数 0.88 每天工作 20 小时, 一个月工作 26 天, 试按照例 11-8 中的费率确定每月的电费。 答案: $\$24\ 885.12$

11.10 本章小结

1. 某元件吸收的瞬时功率等于该元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积:

$$p = vi$$

2. 平均功率或有功功率 P (单位为瓦特)等于瞬时功率 p 的平均值:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

如果 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, 则 $V_{\text{rms}} = V_m / \sqrt{2}$, $I_{\text{rms}} = I_m / \sqrt{2}$, 且:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

电感器与电容器不吸收平均功率, 电阻器吸收的平均功率为 $(1/2) I_m^2 R = I_{\text{rms}}^2 R$ 。

3. 当负载阻抗等于从负载端看进去的戴维南阻抗的共轭复数, 即 $Z_L = Z_{\text{Th}}^*$ 时, 传递给负载的平均功率最大。

4. 周期信号 $x(t)$ 的有效值即它的方均根(rms)值:

$$X_{\text{eff}} = X_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt}$$

对于正弦信号而言，有效值或 rms 值等于其幅度的 $1/\sqrt{2}$ 。

5. 功率因数等于电压与电流相位差的余弦值：

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

功率因数也等于负载阻抗辐角的余弦值，或者是有功功率与无功功率之比。如果电流滞后于电压（电感性负载），则 pf 是滞后的；如果电流超前于电压（电容性负载），则 pf 是超前的。

6. 视在功率 S （单位为 $\text{V} \cdot \text{A}$ ）等于电压有效值与电流有效值的乘积：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$$

另外， $S = |S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ，其中 P 为有功功率， Q 为无功功率。

7. 无功功率（单位为 var）为：

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

8. 复功率 S （单位为 $\text{V} \cdot \text{A}$ ）等于电压相量有效值与电流相量有效值的共轭复数的乘积，也等于有功功率 P 与无功功率 Q 的复数和：

$$S = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}^* = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} / \underline{\theta_v - \theta_i} = P + jQ$$

或

$$S = I_{\text{rms}}^2 Z = \frac{V_{\text{rms}}^2}{Z^*}$$

9. 电路网络总的复功率等于各个元件的复功率之和，同理，总的有功功率与无功功率也分别等于各个元件的有功功率与无功功率之和。但是，总的视在功率的计算方法并不不同于上述计算方法。

10. 若考虑经济因素，则功率因数校正是必需的。降低总的无功功率即可改善负载的功率因数。
11. 功率表是测量平均功率的仪器。用电量可以用电能表来度量。

复习题

- 1 电感器吸收的平均功率为零。

(a) 正确 (b) 错误

- 2 从负载两端看进去的网络的戴维南阻抗为 $80 + j55\Omega$ ，要实现负载的最大功率传递，负载阻抗应为：

(a) $(-80 + j55)\Omega$ (b) $(-80 - j55)\Omega$
(c) $(80 - j55)\Omega$ (d) $(80 + j55)\Omega$

- 3 家用电源插座上的 60Hz、120V 电源的幅度为：

(a) 110V (b) 120V
(c) 170V (d) 210V

- 4 如果负载阻抗为 $20 - j20\Omega$ ，则功率因数为：

(a) $\angle -45^\circ$ (b) 0
(c) 1 (d) 0.7071
(e) 以上均错误

- 5 包含给定负载所有功率信息的量是：

(a) 功率因数 (b) 视在功率
(c) 平均功率 (d) 无功功率
(e) 复功率

- 6 无功功率的度量单位为：

(a) 瓦特 (b) $\text{V} \cdot \text{A}$

- (c) var (d) 以上均错误

- 7 在如图 11-34 所示的功率三角形中，无功功率为：
(a) 1000var 超前 (b) 1000var 滞后
(c) 866var 超前 (d) 866var 滞后

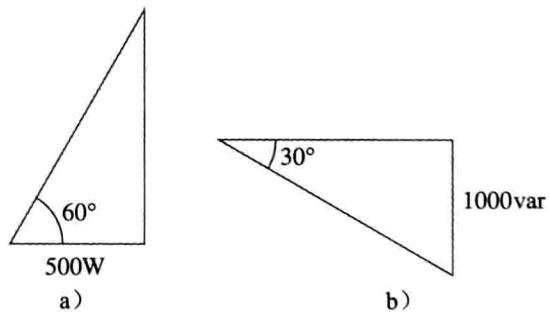


图 11-34 复习题 7 与复习题 8 的功率三角形

- 8 在如图 11-34b 所示的功率三角形中，视在功率为：

(a) 2000 $\text{V} \cdot \text{A}$ (b) 1000var
(c) 866var (d) 500var

- 9 某电源与三个负载 Z_1 、 Z_2 与 Z_3 并联相接，下列哪项是错误的？

(a) $P = P_1 + P_2 + P_3$ (b) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$(c) S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (d) S = S_1 + S_2 + S_3$$

10 测量平均功率的仪器是：

- (a) 电压表 (b) 电流表 (c) 功率表

习题^①

11.2 节

- 1 如果 $v(t) = 160\cos 50t$ V, $i(t) = -33\sin(50t - 30^\circ)$ A。计算瞬时功率与平均功率。
- 2 已知图 11-35 所示电路，试求各元件提供或吸收的平均功率。

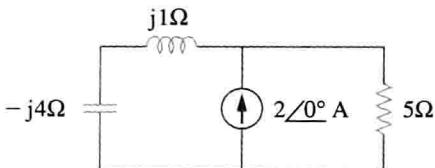


图 11-35 习题 2 图

- 3 某负载由 60Ω 电阻器与 $90\mu F$ 电容器并联组成，如果该负载与电压源 $v_s(t) = 160\cos 2000t$ V 相连，试求传递给负载的平均功率。
- 4 利用图 11-36 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解瞬时功率和平均功率。 ED

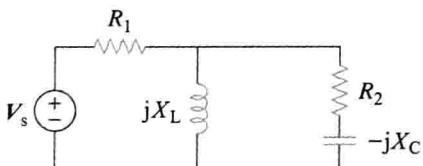


图 11-36 习题 4 图

- 5 假设图 11-37 所示电路中， $v_s = 8\cos(2t - 40^\circ)$ V，试求传递给各无源元件的平均功率。

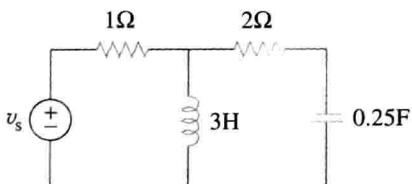


图 11-37 习题 5 图

- 6 在图 11-38 所示电路中， $i_s = 6\cos 10^3 t$ A，试求 50Ω 电阻器吸收的平均功率。

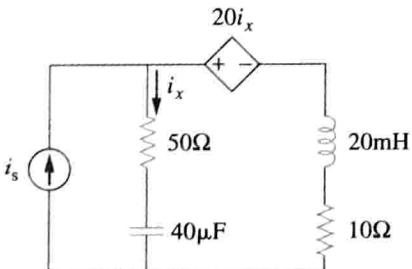


图 11-38 习题 6 图

$$(d) \text{var 表} \quad (e) \text{电能表}$$

- 答案：1(a); 2(c); 3(c); 4(d); 5(e); 6(c); 7(d); 8(a); 9(c); 10(c)

- 7 已知图 11-39 所示电路，试求 10Ω 电阻器吸收的平均功率。

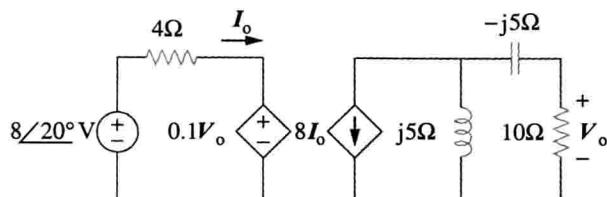


图 11-39 习题 7 图

- 8 在图 11-40 所示电路中，试确定 40Ω 电阻器吸收的平均功率。

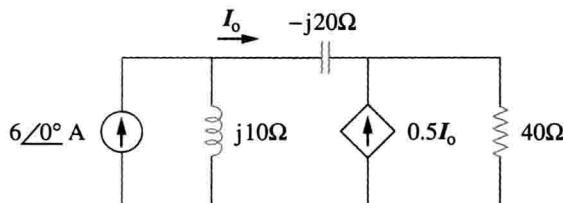


图 11-40 习题 8 图

- 9 在图 11-41 所示的运算放大器电路中， $V_s = 10\angle 30^\circ$ V，试求 $20k\Omega$ 电阻器吸收的平均功率。

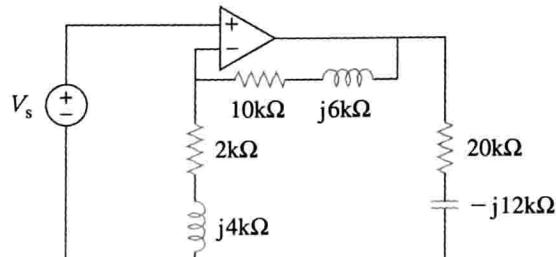


图 11-41 习题 9 图

- 10 在图 11-42 所示的运算放大器电路中，试求电阻器吸收的总的平均功率。

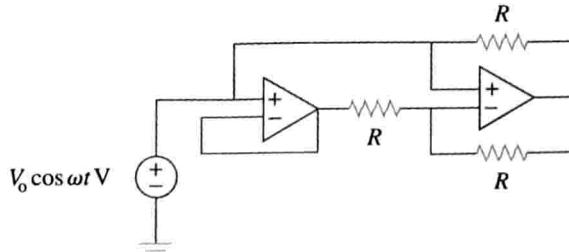


图 11-42 习题 10 图

- 11 在如图 11-43 所示的网络中，假设端口阻抗为：

^① 从习题 22 开始，除非特别说明，否则假设所有的电流和电压值均为 rms 值。

$$Z_{ab} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \angle -\arctan \omega RC$$

求 $R = 10\text{k}\Omega$ 、 $C = 200\text{nF}$ 、 $i = 33\sin(377t + 22^\circ)$ 时，该网络消耗的平均功率。

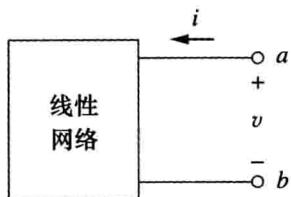


图 11-43 习题 11 图

11.3 节

- 12 对于图 11-44 所示电路，试确定实现最大功率传输（对于 Z ）时的负载阻抗 Z_L ，并计算负载吸收的最大功率值。

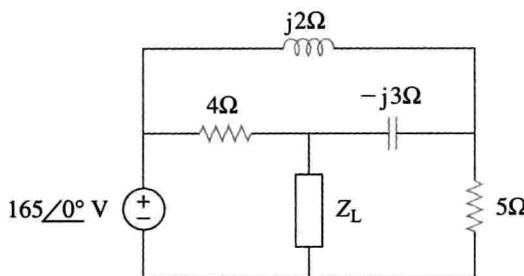


图 11-44 习题 12 图

- 13 电源的戴维南阻抗为 $Z_{Th} = (120 + j60)\Omega$ ，戴维南峰值电压为 $V_{Th} = (165 + j0)\text{V}$ ，试确定该电源可提供的最大平均功率。
14 利用图 11-45 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解最大平均功率传输。 **ED**

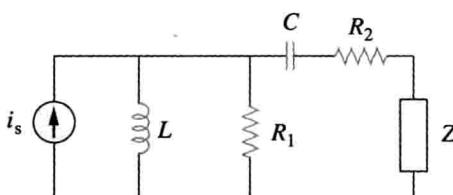


图 11-45 习题 14 图

- 15 在图 11-46 所示电路中，试确定吸收最大功率的阻抗 Z_L 以及该最大功率。

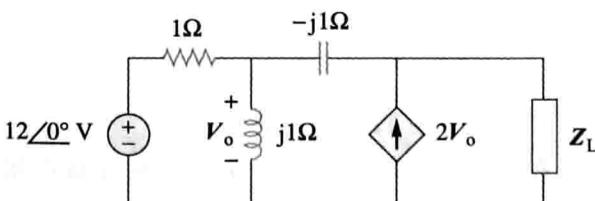


图 11-46 习题 15 图

- 16 在图 11-47 所示电路中，试求传递给负载 Z_L 的最大功率和此时的 Z_L 值。

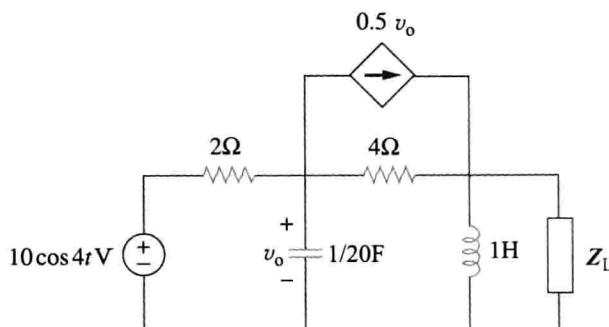


图 11-47 习题 16 图

- 17 计算图 11-48 所示电路中 Z_L ，使得 Z_L 吸收的平均功率最大，并求出 Z_L 吸收的最大平均功率的值。

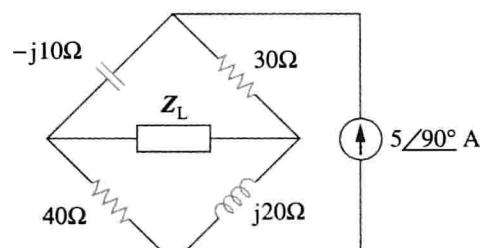


图 11-48 习题 17 图

- 18 求图 11-49 所示电路中实现最大功率传递的 Z_L 。

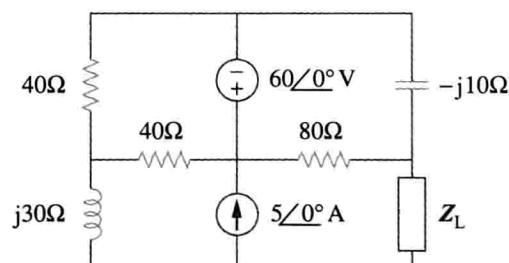


图 11-49 习题 18 图

- 19 调节图 11-50 所示电路中的可变电阻 R 使其吸收最大的平均功率，试求该电阻值以及所吸收的最大平均功率。

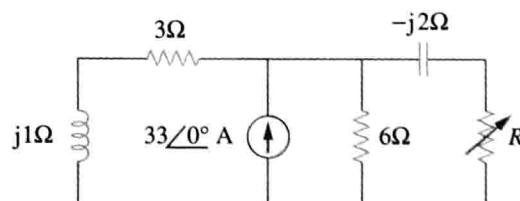


图 11-50 习题 19 图

- 20 调节图 11-51 所示电路中的负载电阻 R_L 使其吸收最大的平均功率，试计算该电阻值 R_L 以及所吸收的最大平均功率。

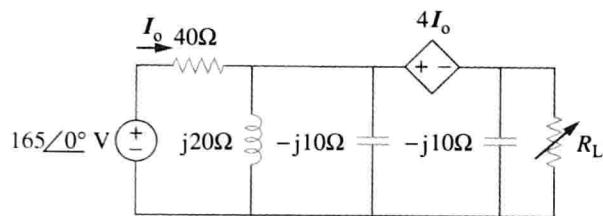


图 11-51 习题 20 图

- 21 假设负载阻抗为纯电阻，试问图 11-52 所示电路中端口 $a-b$ 两端应该连接多大的负载才能使传递给该负载的功率最大？

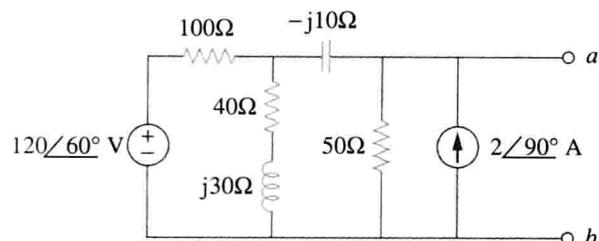


图 11-52 习题 21 图

11.4 节

- 22 求图 11-53 所示移位正弦波的 rms 值。

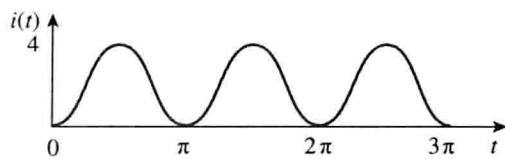


图 11-53 习题 22 图

- 23 利用图 11-54 所示的电压波形图设计一个问题，帮助其他同学更好地理解波形的 rms 值。 **ED**

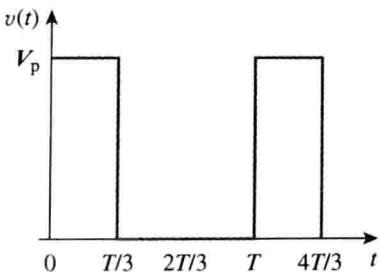


图 11-54 习题 23 图

- 24 确定图 11-55 所示波形的 rms 值。

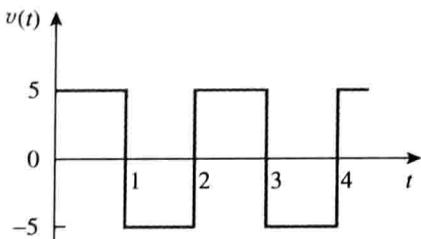


图 11-55 习题 24 图

- 25 求图 11-56 所示信号的 rms 值。

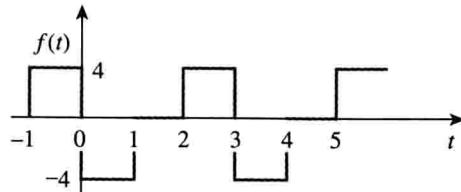


图 11-56 习题 25 图

- 26 求图 11-57 所示电压波形的有效值。

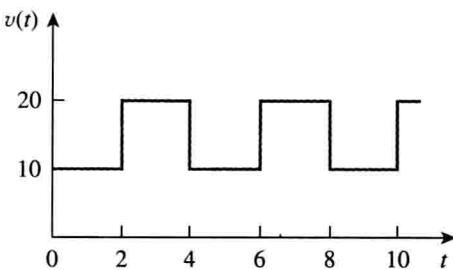


图 11-57 习题 26 图

- 27 计算图 11-58 所示电流波形的 rms 值。

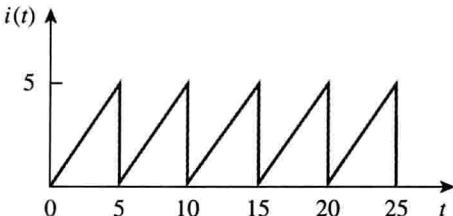


图 11-58 习题 27 图

- 28 求图 11-59 所示电压波形的 rms 值，以及将该电压施加于 2Ω 电阻器两端时，该电阻器吸收的平均功率。

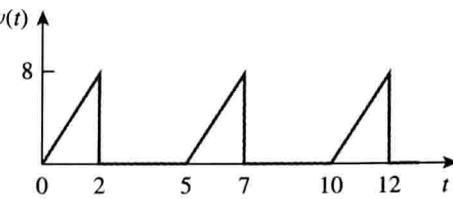


图 11-59 习题 28 图

- 29 计算图 11-60 所示电流波形的有效值，以及该电流通过 12Ω 电阻器时，传递给电阻器的平均功率。

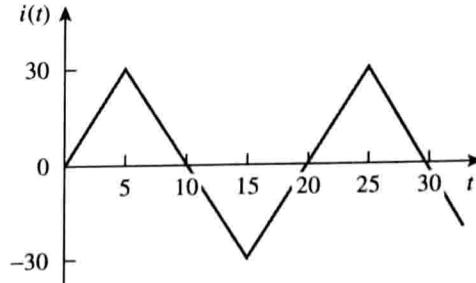


图 11-60 习题 29 图

30 计算图 11-61 所示波形的 rms 值。

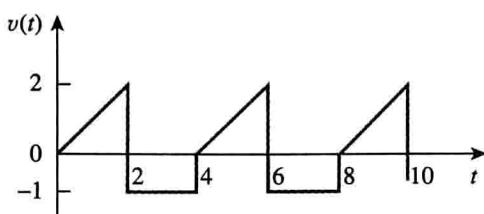


图 11-61 习题 30 图

31 求图 11-62 所示信号的 rms 值。

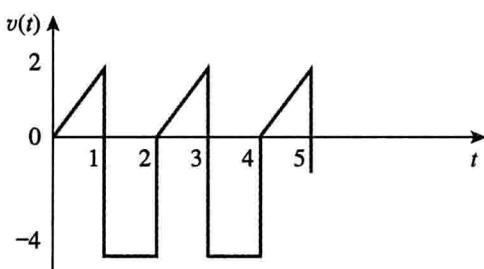


图 11-62 习题 31 图

32 确定图 11-63 所示电流波形的 rms 值。

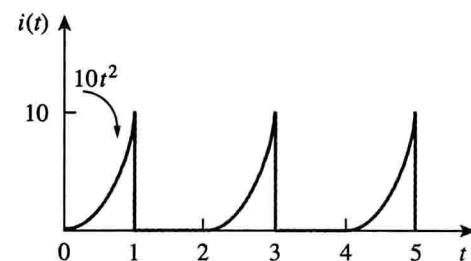


图 11-63 习题 32 图

33 确定图 11-64 所示波形的 rms 值。

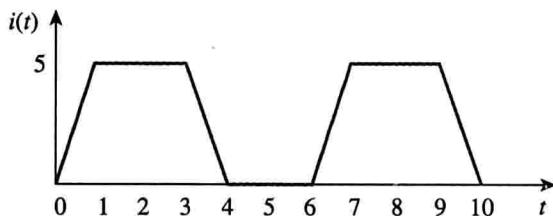


图 11-64 习题 33 图

34 求图 11-65 所示信号 $f(t)$ 的有效值。

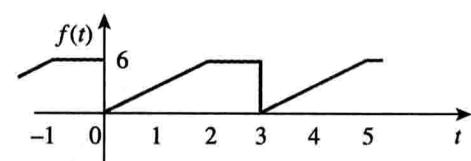


图 11-65 习题 34 图

35 某周期电压波形的一个周期如图 11-66 所示，试求该电压的有效值。注意，该周期的起点为 $t=0$ ，终点为 $t=6\text{s}$ 。

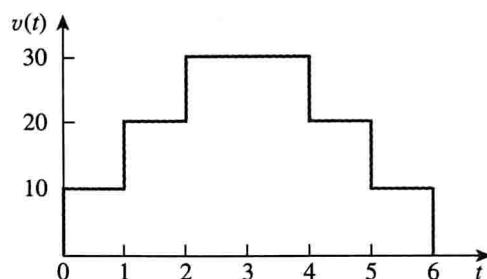


图 11-66 习题 35 图

36 计算如下各函数的 rms 值：(a) $i(t) = 10\text{A}$ ；
(b) $v(t) = (4 + 3\cos 5t)\text{V}$ ；(c) $i(t) = (8 - 6\sin 2t)\text{A}$ ；(d) $v(t) = (5\sin t + 4\cos t)\text{V}$

37 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解多个电流信号之和的 rms 值的计算方法。 ED

11.5 节

38 对于图 11-67 所示的电力系统，试求：(a) 平均功率；(b) 无功功率；(c) 功率因数。注意，220V 为 rms 值。

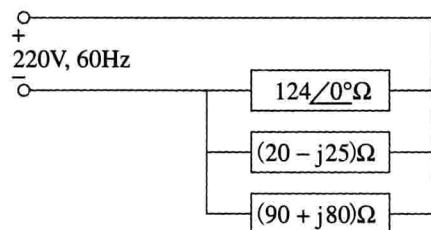
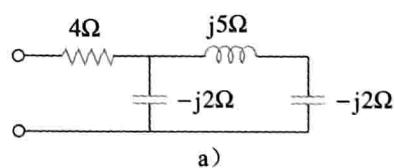


图 11-67 习题 38 图

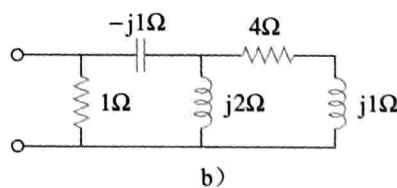
39 给阻抗为 $Z_L = (4.2 + j3.6)\Omega$ 的某交流电动机供电的电源为 220V、60Hz，(a) 试求 pf 、 P 、 Q ；(b) 试确定可将功率因数校正为 1 的与该发动机并联的电容值。

40 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解视在功率和功率因数。 ED

41 确定图 11-68 所示各电路的功率因数，并指出各功率因数是超前的还是滞后的。



a)



b)

图 11-68 习题 41 图

11.6 节

42 将 110Vrms、60Hz 电源作用于负载阻抗 Z ，功率因数为 0.707(滞后)时进入该负载的视在

功率为 $120V \cdot A$ 。(a)试计算复功率；(b)试求流过该负载的 rms 电流值；(c)试确定 Z ；(d)假设 $Z=R+j\omega L$, 试求 R 与 L 的值。

43 设计一个问题帮助其他同学更好地理解复功率。 **ED**

44 试求 v_s 传递给图 11-69 所示网络的复功率, 设 $v_s=100\cos 2000t V$ 。

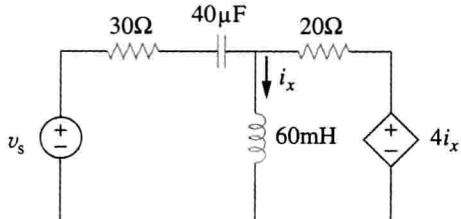


图 11-69 习题 44 图

45 某负载两端的电压以及流过该负载的电流为: $v(t)=(20+60\cos 100t)V$, $i(t)=(1-0.5\sin 100t)A$ 。试求: (a) 该电压与电流的 rms 值; (b) 该负载消耗的平均功率。

46 对如下电压与电流相量, 试计算复功率、视在功率、有功功率和无功功率, 并指出 pf 是超前的还是滞后的。(a) $V=220\angle 30^\circ V_{rms}$, $I=0.5\angle 60^\circ A_{rms}$; (b) $V=250\angle -10^\circ V_{rms}$, $I=6.2\angle -25^\circ A_{rms}$; (c) $V=120\angle 0^\circ V_{rms}$, $I=2.4\angle -15^\circ A_{rms}$; (d) $V=160\angle 45^\circ V_{rms}$, $I=8.5\angle 90^\circ A_{rms}$ 。

47 对于如下几种情况, 试求其复功率、平均功率与无功功率。(a) $v(t)=112\cos(\omega t+10^\circ)V$, $i(t)=4\cos(\omega t-50^\circ)A$; (b) $v(t)=160\cos 377t V$, $i(t)=4\cos(377t+45^\circ)A$; (c) $V=80\angle 60^\circ V_{rms}$, $Z=50\angle 30^\circ \Omega$; (d) $I=10\angle 60^\circ A_{rms}$, $Z=100\angle 45^\circ \Omega$ 。

48 试确定以下几种情况下的复功率。(a) $P=269W$, $Q=150\text{var}$ (电容性); (b) $Q=2000\text{var}$, $\text{pf}=0.9$ (超前); (c) $S=600V \cdot A$, $Q=450\text{var}$ (电感性); (d) $V_{rms}=220V$, $P=1kW$, $|Z|=40\Omega$ (电感性)。

49 确定以下几种情况下的复功率。(a) $P=4kW$, $\text{pf}=0.86$ (超前); (b) $S=2kV \cdot A$, $P=1.6kW$ (电容性); (c) $V_{rms}=208\angle 20^\circ V$, $I_{rms}=6.5\angle -50^\circ A$; (d) $V_{rms}=120\angle 30^\circ V$, $Z=(40+j60)\Omega$ 。

50 试确定以下几种情况下的总阻抗。(a) $P=1000W$, $\text{pf}=0.8$ (超前), $V_{rms}=220V$; (b) $P=1500W$, $Q=2000\text{var}$ (电感性), $I_{rms}=12A$; (c) $S=4500\angle 60^\circ V \cdot A$, $V=120\angle 45^\circ V$ 。

51 对于图 11-70 所示的电路, 试计算: (a) 功率因数; (b) 电源传递的平均功率; (c) 无功功率; (d) 视在功率; (e) 复功率。

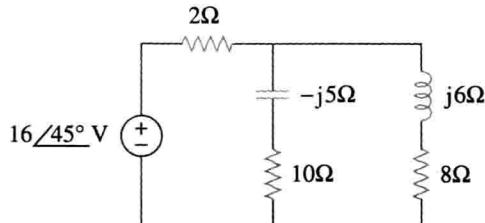


图 11-70 习题 51 图

52 在图 11-71 所示电路中, 器件 A 在功率因数为 0.8 (滞后) 时接收的功率为 $2kW$, 器件 B 在功率因数为 0.4 (超前) 时接收的功率为 $3kV \cdot A$, 器件 C 为感性元件, 消耗的功率为 $1kW$, 接收的功率为 500var 。(a) 试确定整个系统的功率因数; (b) 试求 $V_s=120\angle 45^\circ V_{rms}$ 时的 I 。

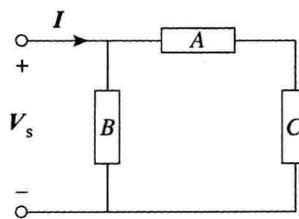


图 11-71 习题 52 图

53 在图 11-72 所示电路中, 负载 A 在功率因数为 0.8 (超前) 时接收的功率为 $4kV \cdot A$, 负载 B 在功率因数为 0.6 (滞后) 时接收的功率为 $2.4kV \cdot A$, 器件 C 为感性负载, 消耗的功率为 $1kW$, 接收的功率为 500var 。(a) 试确定 I ; (b) 试计算该电路的功率因数。

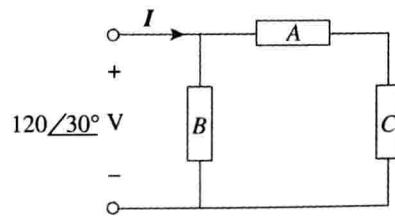


图 11-72 习题 53 图

11.7 节

54 对于图 11-73 所示网络, 试求各元件吸收的复功率。

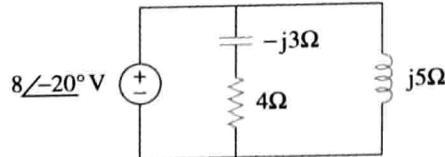


图 11-73 习题 54 图

- 55 利用图 11-74 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解交流电路的功率守恒定理。 ED

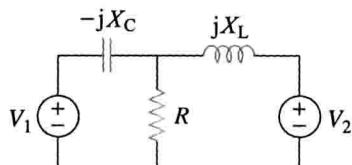


图 11-74 习题 55 图

- 56 确定图 11-75 所示电路中的电源传递的复功率。 PS ML

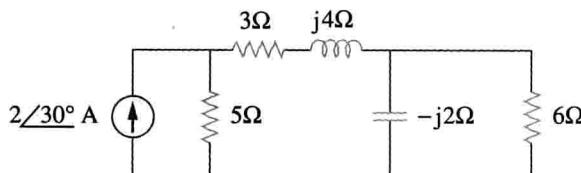


图 11-75 习题 56 图

- 57 对于图 11-76 所示电路，试求独立电流源传递的平均功率、无功功率与复功率。 PS ML

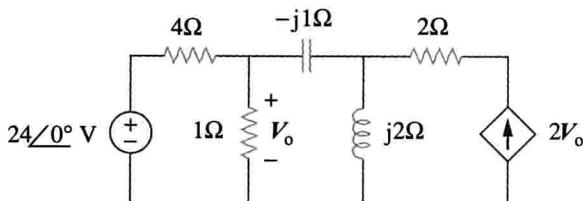


图 11-76 习题 57 图

- 58 求传递给图 11-77 所示电路中 $10k\Omega$ 电阻器的复功率。

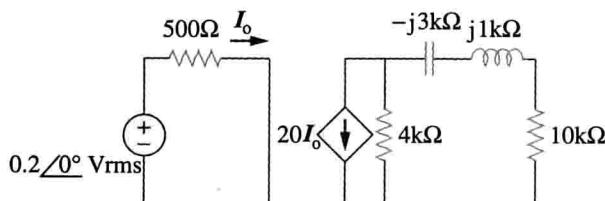


图 11-77 习题 58 图

- 59 计算图 11-78 所示电路中电感器与电容器的无功功率。

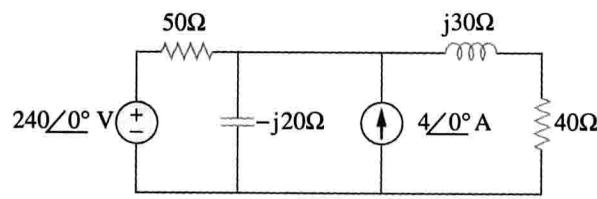


图 11-78 习题 59 图

- 60 对于图 11-79 所示电路，试求 V_o 与输入功率因数。

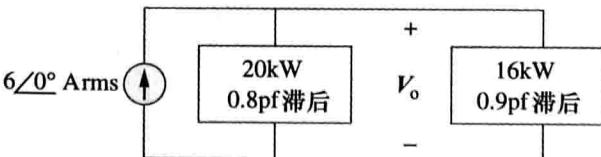


图 11-79 习题 60 图

- 61 已知图 11-80 所示电路，试求 I_o 与电源提供的总的复功率。

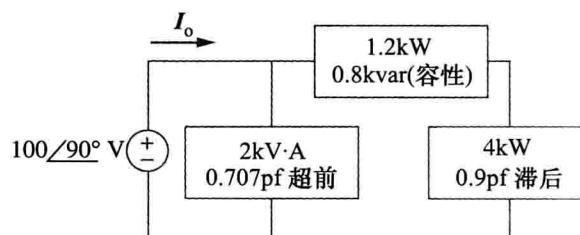


图 11-80 习题 61 图

- 62 对于图 11-81 所示电路，试求 V_s 。

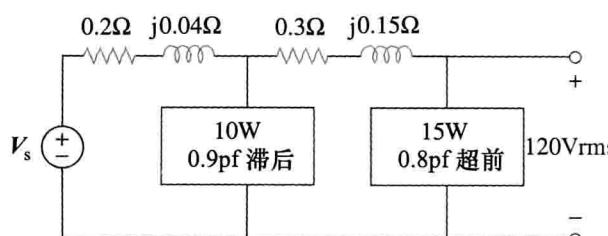


图 11-81 习题 29 图

- 63 求图 11-82 所示电路中的 I_o 。



图 11-82 习题 63 图

- 64 在图 11-83 所示电路中，如果电压源提供的功率为 $2.5kW$ 与 $0.4kvar$ (超前)，试确定 I_s 。

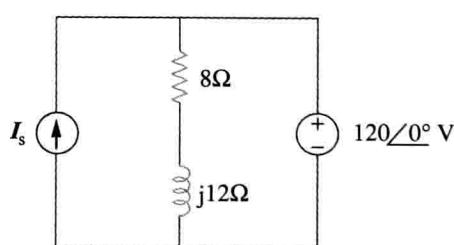


图 11-83 习题 64 图

- 65 在图 11-84 所示运算放大器电路中，如果 $v_s = 4\cos 10^4 t V$ ，试求传递给 $50k\Omega$ 电阻器的平均功率。

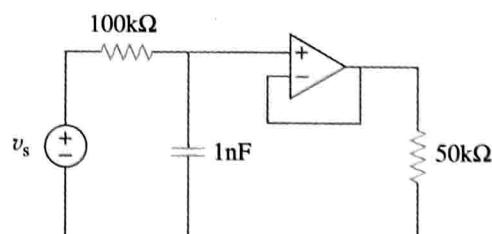


图 11-84 习题 65 图

- 66 确定图 11-85 所示运算放大器电路中, $6\text{k}\Omega$ 电阻器吸收的平均功率。

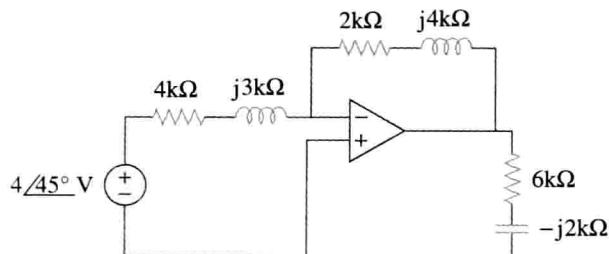


图 11-85 习题 66 图

- 67 对于图 11-86 所示的运算放大器电路, 试计算: (a) 电压源传递的复功率; (b) $12\text{k}\Omega$ 电阻器消耗的平均功率。

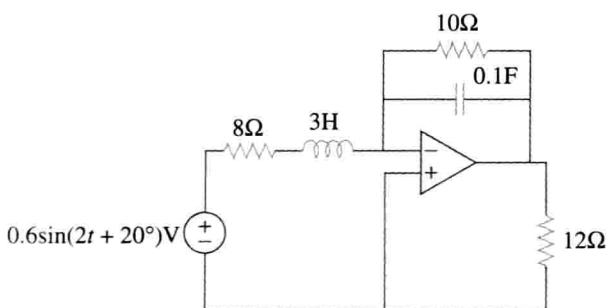


图 11-86 习题 67 图

- 68 计算图 11-87 所示 RLC 串联电路中, 电流源提供的复功率。

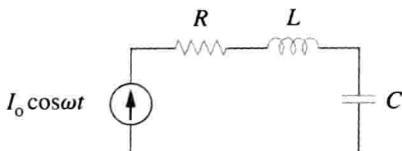


图 11-87 习题 68 图

11.8 节

- 69 参见图 11-88 所示电路。

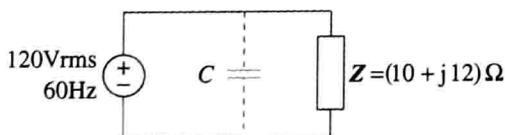


图 11-88 习题 69 图

- (a) 功率因数为多少? (b) 消耗的平均功率为多少? (c) 能够将功率因数校正为单位 1 的与负载并联的电容器的容值为多少?

- 70 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解功率因数校正。 **ED**

- 71 三个负载与 $120\angle0^\circ$ Vrms 电源并联, 在 $\text{pf} = 0.85$ (滞后) 时, 负载 1 吸收的功率为 60kvar , 在 $\text{pf} = 1$ 时, 负载 2 吸收的功率为 90kW 与 50kvar (超前), 负载 3 吸收的功率为 100kW 。(a) 试求等效阻抗; (b) 试计算该并联电路的功率因数;

(c) 试确定电源提供的电流。

- 72 相互并联的两个负载在功率因数为 0.8 (滞后) 时从 120Vrms 、 60Hz 电力线提取的总功率为 2.4kW , 其中一个负载在功率因数为 0.707 (滞后) 时吸收的功率为 1.5kW 。试确定: (a) 第二个负载的功率因数; (b) 将两个负载的功率因数校正为 0.9 (滞后) 所需的并联元件值。

- 73 某 240Vrms 、 60Hz 电源为某负载供电, 该负载为 10kW (电阻性)、 15kvar (电容性) 以及 22kvar (电感性), 试求: (a) 视在功率; (b) 从电源提取的电流; (c) 额定 kvar 以及将功率因数提高到 0.96 (滞后) 所需的电容值; (d) 在新的功率因数条件下, 从电源提取的电流。

- 74 某 120Vrms 、 60Hz 电源给两个相互并联的负载供电, 如图 11-89 所示。(a) 试求该并联负载的功率因数; (b) 试计算将功率因数提高到 1, 所需并联的电容值。

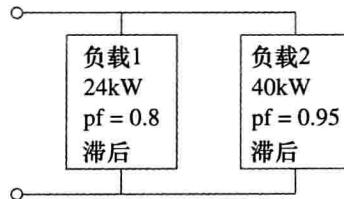


图 11-89 习题 74 图

- 75 对于图 11-90 所示的供电系统, 试计算: (a) 总的复功率; (b) 功率因数。

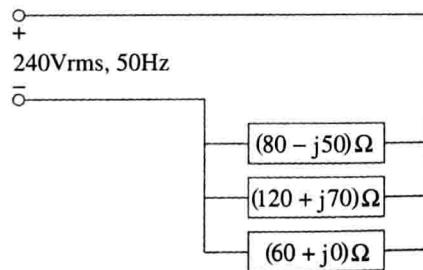


图 11-90 习题 75 图

11.9 节

- 76 确定图 11-91 所示电路中功率表的读数。

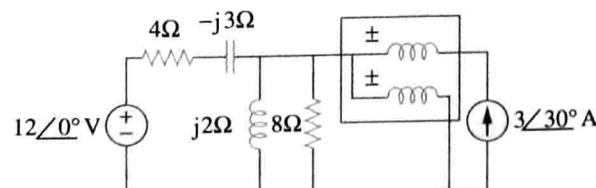


图 11-91 习题 76 图

- 77 在图 11-92 所示网络中, 功率表的读数是多少?

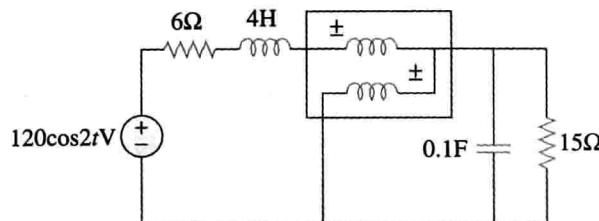


图 11-92 习题 77 图

78 求图 11-93 所示电路中功率表的读数。

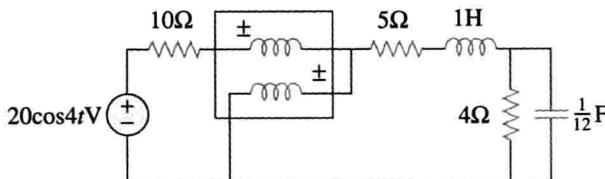


图 11-93 习题 78 图

79 确定图 11-94 所示电路中功率表的读数。

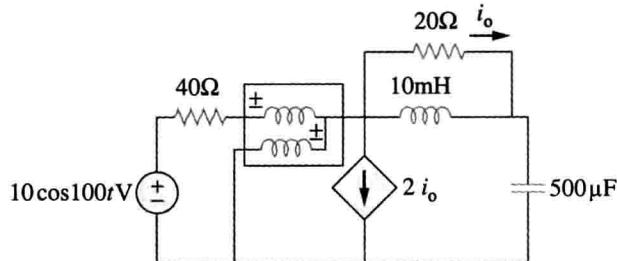


图 11-94 习题 79 图

80 图 11-95 所示为功率表接入某交流网络中的电路图：(a)试求负载电流；(b)试计算功率表的读数。

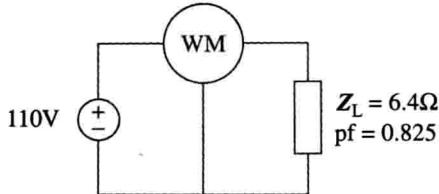


图 11-95 习题 80 图

综合理解题

- 86 当天线调整为与 75Ω 电阻器和 $4\mu\text{H}$ 电感器相串联的负载等效时，发射机传递给该天线的功率最大。如果发射机的工作频率为 4.12MHz ，试求其内部阻抗。 **ED**
- 87 在电视发射机中，某串联电路的阻抗为 $3\text{k}\Omega$ ，总电流为 50mA 。如果该电阻器两端的电压为 80V ，试问该电路的功率因数为多少？
- 88 某个电子电路与 110V 交流电源相连接，所提取的电流方均根值为 2A ，相位角为 55° 。
(a) 试求该电路所提取的有功功率；(b) 试计算视在功率。

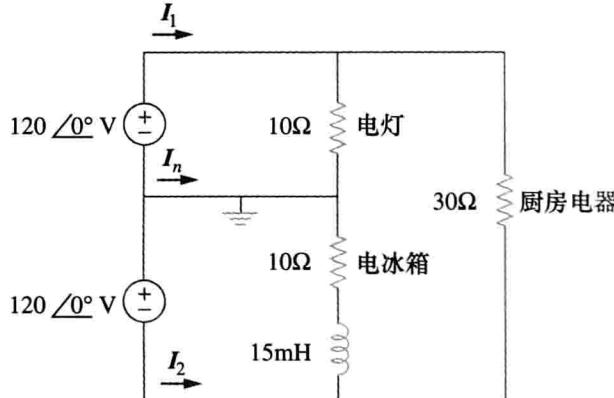
81 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何将功率因数校正为单位 1 以外的其他值。 **ED**82 某 240Vrms 、 60Hz 电源给一个 5kW 加热器与一个 $30\text{kV}\cdot\text{A}$ 感应电动机组成的并联负载供电，该负载的功率因数为 0.82 ，试确定：(a) 该系统的视在功率；(b) 该系统的无功功率；(c) 将该系统的功率因数调节为 0.9 (滞后)所需的电容器的标称 $\text{kV}\cdot\text{A}$ ；(d) 所需的电容器值。83 示波器测试结果显示某负载两端的电压与流过该负载的电流分别为 $210 \angle 60^\circ \text{V}$ 与 $8 \angle 25^\circ \text{A}$ ，试确定：(a) 有功功率；(b) 视在功率；(c) 无功功率；(d) 功率因数。84 某用户月耗电 $1200\text{MW}\cdot\text{h}$ ，最大需求为 $2.4\text{MV}\cdot\text{A}$ ，最大需求收费为 $\$30$ 每 $\text{kV}\cdot\text{A}$ 每年，电能收费为 4 美分每 $\text{kW}\cdot\text{h}$ 。(a) 试确定每年的电费；(b) 如果供电公司两部分的收入保持相同，试计算统一费率下每 $\text{kW}\cdot\text{h}$ 电能的收费。 **ED**85 某单相三线电路的常规家电系统允许使用 120V 与 240V 、 60Hz 两种家用电器，该家用电器的模型如图 11-96 所示。试计算：(a) 电流 I_1 、 I_2 与 I_n ；(b) 电源提供的总的复功率；(c) 电路的总的功率因数。

图 11-96 习题 85 图

- 89 某工业用加热器的标示牌上显示 210V 、 60Hz 、 $12\text{kV}\cdot\text{A}$ 、 0.78pf 滞后，试确定：(a) 视在功率与复功率；(b) 该加热器的阻抗。 **ED**
- * 90 某功率因数为 0.85 的 2000kW 涡轮发电机工作在额定负载条件下，接入另一个 300kW 、功率因数为 0.8 的负载，试问使该涡轮发电机正常运转且不至过载所需的电容器的 kvar 为多少？ **ED**
- 91 某电动机的标示牌上显示：
电源电压： 220Vrms
电源电流： 15Arms

电源频率: 60Hz

功率: 2700W

试确定该电动机的功率因数(滞后), 并求出使该电动机的 pf 提高到 1 所需并联电容器的容值 C。

ED

- 92 如图 11-97 所示, 550V 馈电线路给某工厂供电, 该工厂负载包括功率因数为 0.75 电感性的 60kW 电动机、标称值为 20kvar 的电容器以及 20kW 照明系统。(a) 试计算该工厂吸收的总的无功功率与视在功率; (b) 试确定总的功率因数; (c) 试求馈电线路中的电流。

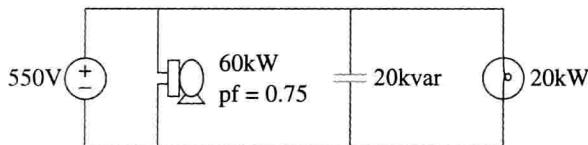


图 11-97 习题 92 图

- 93 某工厂的四种主要负载如下:

- 一个额定功率为 5 马力的电动机, $\text{pf} = 0.8$ (滞后), 1 马力 = 0.7457kW ;
 - 一个额定功率为 1.2kW 的加热器, $\text{pf} = 1.0$;
 - 十个 120W 的灯泡;
 - 一个额定功率为 1.6kvar 的同步电机, $\text{pf} = 0.6$ (超前);
- (a) 试计算总的有功功率与无功功率; (b) 试求总的功率因数。

- 94 某 $1\text{MV}\cdot\text{A}$ 的电力分站以功率因数 0.7 满负荷运转。现欲通过安装电容器将功率因数提高到 0.95。假设安装新分站和配电设施的费用为 $\$120/\text{kV}\cdot\text{A}$ 、安装电容器的费用为 $\$30/\text{kV}\cdot\text{A}$ 。(a) 试计算安装电容器所需的费用; (b) 试求分站容量的释放所节省的费用; (c) 试问安装电容器与释放电站容量哪个更为合算?

ED

- 95 耦合电容器可用于阻隔来自放大器的直流电流, 如图 11-98a 所示。放大器与电容器均可以看做电源, 而扬声器则是负载, 如图 11-98b 所示。(a) 试问在什么频率下, 传递给扬声器的功率最大? (b) 如果 $V_s = 4.6\text{V}_{\text{rms}}$, 在该频率下, 传递给扬声器的功率为多少?

ED

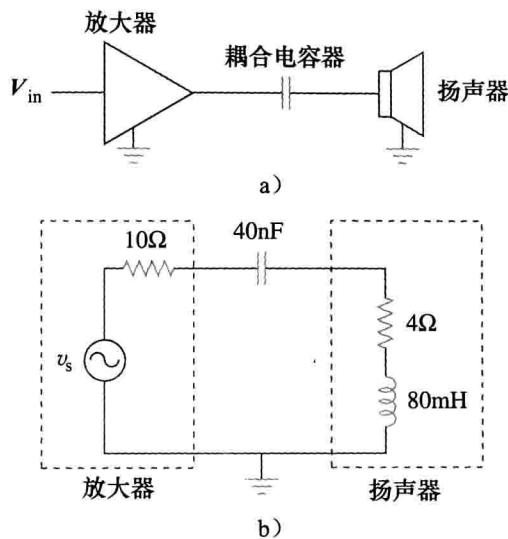


图 11-98 习题 95 图

- 96 某功率放大器的输出阻抗为 $(40+j8)\Omega$, 当频率为 300Hz 时, 该放大器的无负载输出电压为 146V 。(a) 试确定实现最大功率传输的负载阻抗; (b) 试计算在匹配条件下的负载功率。

- 97 某电力传输系统的模型如图 11-99 所示, 如果 $V_s = 240 \angle 0^\circ \text{V}_{\text{rms}}$, 试求负载吸收的平均功率。

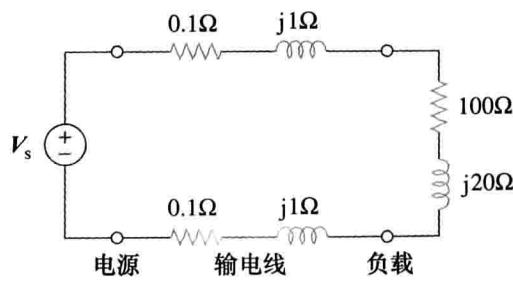


图 11-99 习题 97 图

第12章

三相电路

不能原谅别人的人，实际上也就毁坏了自己必须通过的桥。

——G. Herbert

增强技能与拓展事业

ABET EC 2000 标准(3.e), “确认、表达并解决工程问题的能力”

培养并提高“确认、表达并解决工程问题的能力”是本书的主要任务。按照本书提出的六步法，求解问题的过程就是实践这一技能的最佳方式，建议读者在任何可能的情况下，都采用这六个步骤解题。你会发现，这一解题过程对于非工程课程也有很好的效果。

ABET EC 2000 标准(f), “对于职业责任与伦理道德的理解”

“对于职业责任与伦理道德的理解”是每个工程师都必须思考的。从某种程度上说，这种理解对于我们每一个人而言都非常 important。下面就通过一些实例帮助读者理解这句话的含义。最佳实例之一是工程师有责任回答“尚未提出的问题”。打个比方，欲出售一辆传动系统有问题的小汽车，在售车过程中，可能的买主会问你右前轮轴承是否有问题，你回答没问题。但是，作为一名工程师，即便买主没有询问，你也必须告知买主该车的传动系统有问题。

一个人的职业与道德责任表现为不损害周围人以及你所负责的人的利益。显然，培养这种能力需要一定的时间和成熟度。建议读者在日常活动中不断地探索职业道德以加深自己的理解。



由 Charles Alexander 拍摄

12.1 引言

至此，本书介绍的内容仅涉及单相电路。单相交流电力系统由负载与发电机组组成，二者通过一对电线(传输线)相连，图 12-1a 所示为一个单相两线系统。图中 V_p 为电源电压的幅度， ϕ 为相位。实际应用中更常见的是如图 12-1b 所示的单相三线系统，该系统包括两

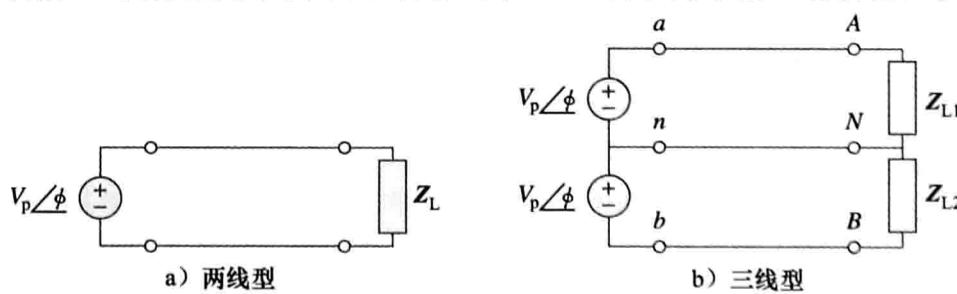


图 12-1 单相系统

个完全相同的电源(相同的振幅、相同的相位)，通过两根外接线与一根中性线与两个负载相连接。例如，常见的家用供电系统就是单相三线系统，因为其终端电压具有相同的振幅和相同的相位。这种系统允许接入120V或240V的用电设备。

提示：爱迪生利用三线取代四线，从而发明了三线系统。

交流电源以相同的频率、不同的相位工作的电路或系统称为多相(polyphase)系统，图12-2所示为一个两相三线系统，图12-3所示为一个三相四线系统。与单相系统不同，两相系统中的发电机包括两个相互垂直的绕组，其产生的两个电压相位相差90°。同理，三相系统中的发电机包括三个幅度与频率相同但相位彼此相差120°的绕组。三相系统是迄今为止应用最普遍、最经济的多相系统，因此，本章主要讨论三相系统。

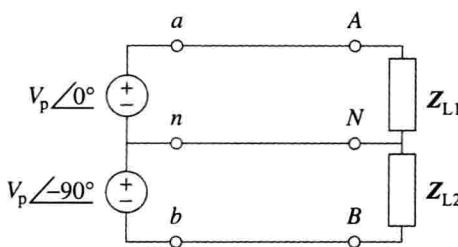


图12-2 两相三线系统

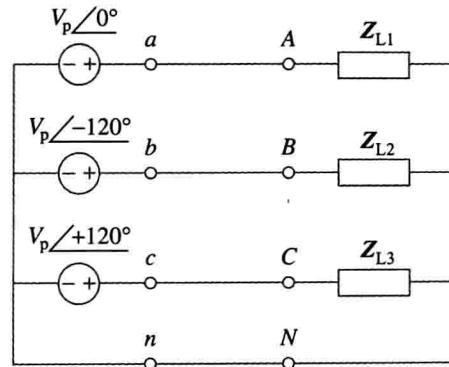


图12-3 三相四线系统

三相系统之所以重要，至少有三个原因。首先，几乎所有的电厂产生并配送的都是三相电，其工作频率在美国是60Hz($\omega = 377\text{rad/s}$)，而在其他一些国家和地区是50Hz($\omega = 314\text{rad/s}$)。当需要单相或两相输入时，可以从三相系统中提取，而无需独立产生。即使需求超过三相时，例如铝厂为了将铝熔化，需要48相电源，这时也可以通过对已有三相电源进行一定的处理而获得。其次，二相系统的瞬时功率是恒定的(而非波动的)，详见12.7节的讨论。这样可以实现均匀的功率传输，并且减少三相机器的振动。最后，对于相同的功率而言，三相系统较单相系统更为经济，而且三相系统所需的传输线数量少于等效的单相系统所需的传输线数量。

历史珍闻

尼古拉·特斯拉(Nikola Tesla, 1856—1943)，克罗地亚裔美国工程师，在他的多项发明中，感应电动机与首个多相交流电源系统对交、直流电之争的尘埃落定产生了极大的影响，有利地促进了交流电的普及与应用。同时，他还负责确定了美国地区的交流供电系统的标准工作频率为60Hz。

特斯拉出生于奥匈帝国(现在的克罗地亚)的一个牧师家庭。他拥有惊人的记忆力，对数学有极其浓厚的兴趣。1884年，特斯拉移居美国并首次为托马斯·爱迪生工作。当时美国正处于“电流之争”中，以乔治·威斯丁豪斯(George Westinghouse, 1846—1914)为首的一方主张采用交流电，而以托马斯·爱迪生为首的一方坚持采用直流电。由于特斯拉对于交流电的浓厚兴趣，他离开了爱迪生，并加入了威斯丁豪斯的行列。通过与威斯丁豪斯的合作，特斯拉提出的多相交流发电、输电和配电系统赢得了极高的声誉并被业界所接受。他一生拥有700多项专利，他的其他发明包括高压设备(特斯拉线圈)以及无



由史密斯森协会提供图片

线传输系统等。磁通密度的单位——特斯拉，就是为了纪念他而以他的名字命名的。

本章首先讨论平衡(对称)三相电压，之后分析对称三相系统的四种可能结构，并讨论非平衡(非对称)三相系统。本章还将学习如何利用 Windows 系统下的 PSpice 分析对称与非对称三相系统。最后，讨论本章介绍的概念在三相功率测量以及民用供电系统中的实际应用问题。

12.2 对称三相电压

三相电压通常是由三相交流发电机产生的，交流发电机的横截面图如图 12-4 所示。发电机主要由转动磁铁(称为转子)及其周围环绕的静止绕组(称为定子)组成，端子为 $a-a'$ 、 $b-b'$ 和 $c-c'$ 的三个分离绕组在物理上围绕定子 120° 等间隔排列。例如，端子 $a-a'$ 表示绕组的一端进入纸面，而另一端则从纸面出来。随着转子的转动，其磁场“切割”来自三个绕组的磁通量而在绕组中产生感应电压。因为绕组彼此间隔 120° ，所以绕组中产生的感应电压幅度相等，相位相差 120° (如图 12-5 所示)。由于每个绕组本身可以看做是一个单相发电机，所以三相发电机既可以给单相负载供电，也可以给三相负载供电。

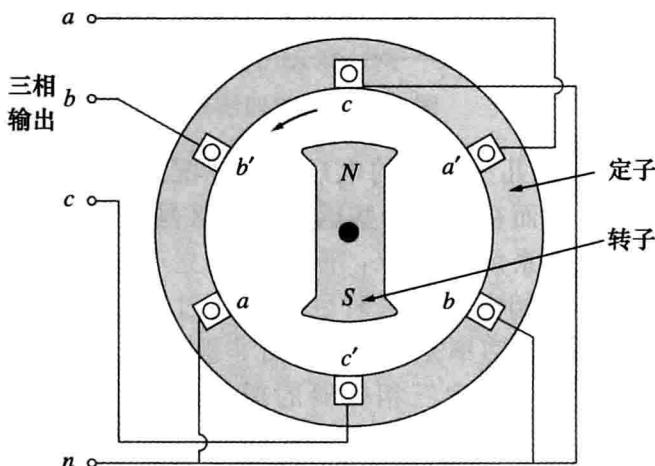


图 12-4 三相发电机

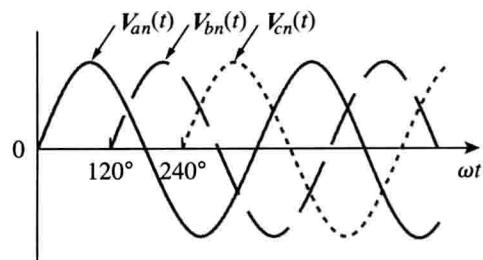


图 12-5 相位彼此相差 120° 的发电机输出电压

典型的三相系统是由通过三条或四条线路(即传输线)与负载相连接的三个电压源组成的(三相电流源是极其少见的)。三相系统与三个单相电路是等效的。三相系统中的电压源既可以是 Y 形联结(星形联结)，如图 12-6a 所示，也可以是△形联结(三角形联结)，如图 12-6b 所示。

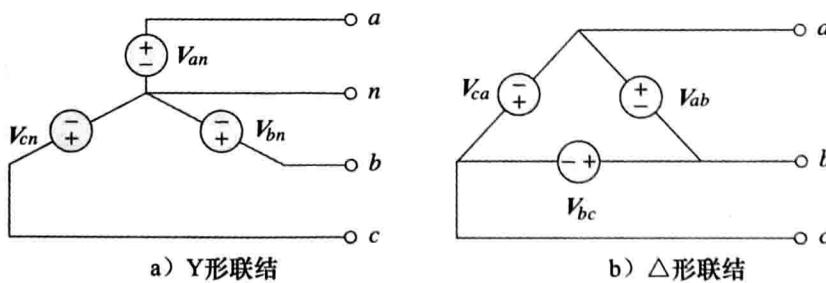


图 12-6 三相电压源

首先讨论如图 12-6a 所示的 Y 形联结电压源。电压 V_{an} 、 V_{bn} 与 V_{cn} 分别表示线路 a 、 b 、 c 与中性线 n 之间的电压，这些电压称为相电压(phase voltage)。如果这些电压源具有相同的幅度和频率，单相位彼此相差 120° ，则称这组电压为平衡的或对称的(balanced)。对

称的三相电压意味着：

$$\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} = 0 \quad (12.1)$$

$$|\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad (12.2)$$

对称相电压是幅度相等，但相位彼此相差 120° 的电压。

由于三相电压相位彼此相差 120° ，所以就会出现两种可能的组合方式。一种如图 12-7a 所示，其数学表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= V_p / 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p / -120^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p / -240^\circ = V_p / +120^\circ\end{aligned}$$

其中， V_p 为相电压的有效值，即 rms 值。这种组合成为 *abc* 顺序 (*abc sequence*) 或正序 (*positive sequence*)。按照这种相序， \mathbf{V}_{an} 超前于 \mathbf{V}_{bn} ，从而 \mathbf{V}_{bn} 超前于 \mathbf{V}_{cn} 。当图 12-4 中的转子沿逆时针方向转动时，就会得到这种相序。另一种可能如图 12-7b 所示，其数学表达式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= V_p / 0^\circ \\ \mathbf{V}_{cn} &= V_p / -120^\circ \\ \mathbf{V}_{bn} &= V_p / -240^\circ = V_p / +120^\circ\end{aligned}$$

提示：按照电力系统的一般习惯，除非特别说明，本章出现的电压与电流均指有效值。

这种组合称为 *acb* 顺序 (*acb sequence*) 或逆序 (*negative sequence*)。对于这种相序而言， \mathbf{V}_{an} 超前于 \mathbf{V}_{cn} ，从而 \mathbf{V}_{cn} 超前于 \mathbf{V}_{bn} 。当图 12-4 中转子沿顺时针方向转动时，就会产生 *acb* 顺序。

容易证明，式(12.3)与式(12.4)中的电压满足式(12.1)与式(12.2)。例如，由式(12.3)可得：

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} + \mathbf{V}_{cn} &= V_p / 0^\circ + V_p / -120^\circ + V_p / +120^\circ \\ &= V_p (1.0 - 0.5 - j0.866 - 0.5 + j0.866) = 0\end{aligned} \quad (12.5)$$

相序是指电压经过各自最大值的时间次序。

相序由相量图中相量经过某一固定点的次序来决定。

提示：随着时间增加，各相量（即正弦矢量）以角速度 ω 转动。

在图 12-7a 中，当相量以频率 ω 沿逆时针方向转动时，它们以次序 $abcabc\dots$ 经过水平轴，因此，相序为 *abc* 或 *bca* 或 *cab*。同理，图 12-7b 中的相量沿逆时针方向转动时，它们经过水平轴的次序为 $acbaca\dots$ ，即 *acb* 顺序。相序在三相配电系统中是非常重要的，相序决定了与电源相连接的电动机的转动方向。

与发电机的联结方式类似，根据终端应用的不同，三相负载的联结也可以分为 Y 形联结与 Δ 形联结。Y 形联结负载如图 12-8a 所示， Δ 形联结负载如图 12-8b 所示。图 12-8a 中的中性线可以有，也可以没有，取决于该系统为四线系统还是三线系统（当然，中性线联结对于 Δ 形联结在拓扑结构上是不可能的）。如果各相负载阻抗的大小和相位不相等，则相应的 Y 形

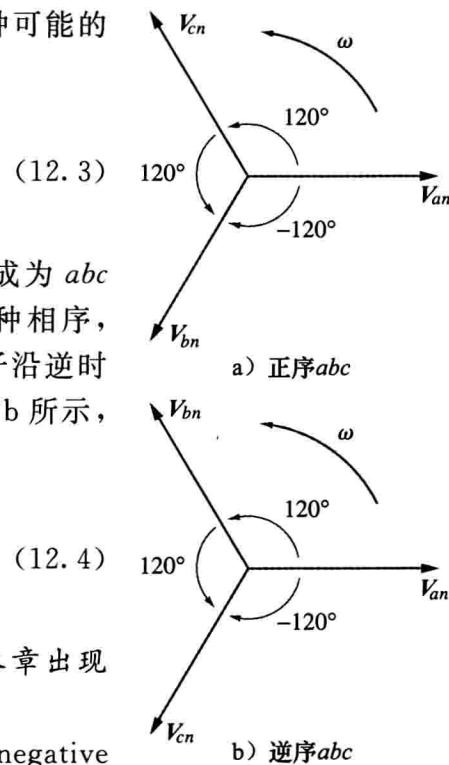


图 12-7 相序

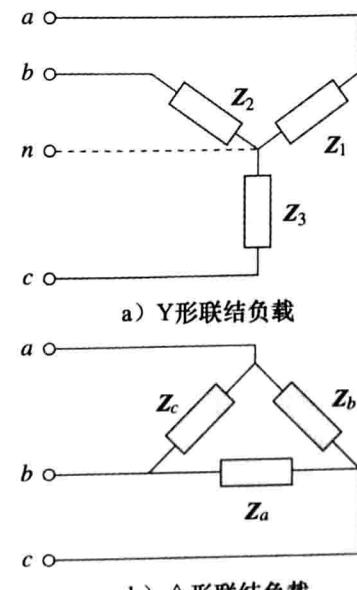


图 12-8 三相负载联结的两种可能结构

联结或△形联结负载称为非平衡的或非对称的(unbalanced)。

对称负载是指各相阻抗在大小和相位上都相等的负载。

对于对称Y形联结负载而言：

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_Y \quad (12.6)$$

其中， Z_Y 为每一相的负载阻抗。对于对称△形联结负载而言：

$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_\Delta \quad (12.7)$$

其中， Z_Δ 为每一相的负载阻抗。由式(9.69)可知：

$$Z_\Delta = 3Z_Y, \quad Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta \quad (12.8)$$

因此，利用式(12.8)即可实现Y形联结负载与△形联结负载之间的相互转换。

提示：Y形联结负载由与中性线节点相连接的三个阻抗组成，而△形联结负载由连接成回路的三个阻抗组成。在两种联结情况下，三个阻抗相等时称负载是平衡的或对称的。

由于三相电源与三相负载都可以采用Y形联结或△形联结，所以就会出现四种可能的联结情况：

- Y-Y联结(即Y形联结的电源与Y形联结的负载)
- Y-△联结
- △-△联结
- △-Y联结

以下几节将逐个讨论这些可能的联结结构。

这里应该指出的是，负载的对称△形联结要比对称Y形联结更为常用。这是因为在负载的△形联结中可以很方便地在每一相中增加或去掉负载。而对于负载的Y形联结而言，由于中性线可以不接，所以每一相负载的增减就非常困难。另外，电源的△形联结实际上并不常用，因为如果三相电压稍不平衡，就会出现环路电流而构成△网孔。

例 12-1 确定以下电压组的相序：

$$v_{an} = 200\cos(\omega t + 10^\circ), \quad v_{bn} = 200\cos(\omega t - 230^\circ), \quad v_{cn} = 200\cos(\omega t - 110^\circ)$$

解：将已知电压用相量形式表示为：

$$V_{an} = 200 \angle 10^\circ \text{ V}, \quad V_{bn} = 200 \angle -230^\circ \text{ V}, \quad V_{cn} = 200 \angle -110^\circ \text{ V}$$

由此可见， V_{an} 超前 V_{cn} 120°， V_{cn} 又超前 V_{bn} 120°，因此，相序为acb相序。

 **练习 12-1** 已知 $V_{bn} = 110 \angle 30^\circ$ ，试求 V_{an} 与 V_{cn} ，假定为正序(abc)。

$$\text{答案: } 110 \angle 150^\circ \text{ V}, \quad 110 \angle -90^\circ \text{ V}$$

12.3 对称Y-Y联结

由于任何对称的三相系统都可以化简为等效的Y-Y联结系统，因此本节首先分析Y-Y系统。对该系统的分析应该说是解决所有对称三相系统的关键所在。

对称Y-Y系统是一个由对称Y形联结电源与对称Y形联结负载构成的三相系统。

考虑如图12-9所示为对称四线Y-Y系统，图中Y形联结负载与Y形联结电源相连，假设负载是对称的，即各负载阻抗是相等的。虽然阻抗 Z_Y 表示各相的总的负载阻抗，但它可看做是各相的源阻抗 Z_s 、线阻抗 Z_l 与负载阻抗 Z_L 之和，因为这三个阻抗是相互串联的。如图12-9所示， Z_s 表示发电机各相绕组的内阻抗， Z_l 表示连接电源相与负载相之间的线阻抗， Z_L 表示各相的负载阻抗， Z_n 为中性线阻抗。因此，一般有：

$$Z_Y = Z_s + Z_l + Z_L \quad (12.9)$$

与 Z_L 相比， Z_s 与 Z_l 通常是非常小的，如果没有给出电源阻抗或线阻抗，可以假定 $Z_s = Z_l = Z_n = 0$ 。无论怎样，总可以将阻抗合并在一起，如图12-9所示的Y-Y系统即可简化为如

图 12-10 所示的系统。

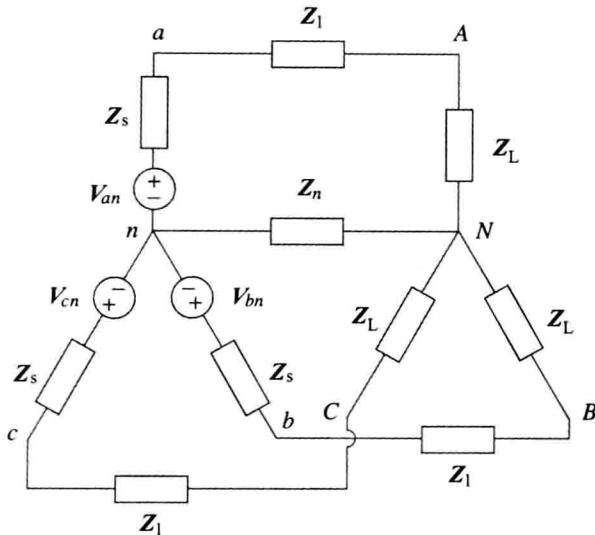


图 12-9 包括电源阻抗、输电线阻抗和负载阻抗在内的对称 Y-Y 系统

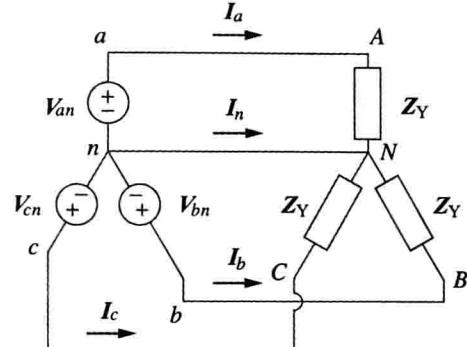


图 12-10 对称 Y-Y 连接

对于正序而言，相电压(即输电线与中性线之间的电压)为：

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ, \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle +120^\circ \quad (12.10)$$

而输电线与输电线之间的电压简称线电压(line voltage)，线电压 \mathbf{V}_{ab} 、 \mathbf{V}_{bc} 、 \mathbf{V}_{ca} 是与相电压有关的。例如：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (12.11a)$$

同理，可以得到：

$$\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{bn} - \mathbf{V}_{cn} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ \quad (12.11b)$$

$$\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{cn} - \mathbf{V}_{an} = \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ \quad (12.11c)$$

因此，线电压 \mathbf{V}_L 的幅度是相电压 V_p 的 $\sqrt{3}$ 倍，即：

$$\mathbf{V}_L = \sqrt{3} \mathbf{V}_p \quad (12.12)$$

其中：

$$V_p = |\mathbf{V}_{an}| = |\mathbf{V}_{bn}| = |\mathbf{V}_{cn}| \quad (12.13)$$

且

$$\mathbf{V}_L = |\mathbf{V}_{ab}| = |\mathbf{V}_{bc}| = |\mathbf{V}_{ca}| \quad (12.14)$$

而且，线电压超前相应的相电压 30° ，图 12-11a 可以说明这种情况，图 12-11a 还指出了如何由相电压来确定线电压 \mathbf{V}_{ab} 。而图 12-11b 所示为三个线电压的相量图，可见， \mathbf{V}_{ab} 超前 \mathbf{V}_{bc} 120° ， \mathbf{V}_{bc} 超前 \mathbf{V}_{ca} 120° ，所以，与相电压一样，线电压之和也为零。

对图 12-10 中的各相应用 KVL，得到线电流为：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y}, \quad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an} \angle -120^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ \\ \mathbf{I}_c &= \frac{\mathbf{V}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{\mathbf{V}_{an} \angle -240^\circ}{\mathbf{Z}_Y} = \mathbf{I}_a \angle -240^\circ \end{aligned} \quad (12.15)$$

可以推断出，线电流之和为零，即：

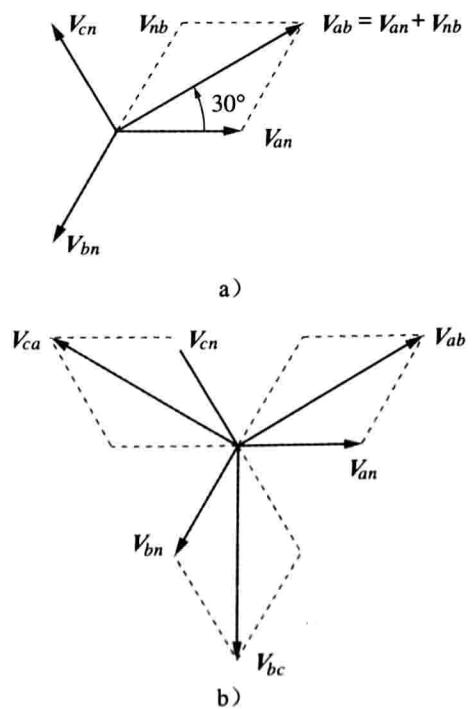


图 12-11 说明线电压与相电压之间关系的相量图

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0 \quad (12.16)$$

于是：

$$\mathbf{I}_n = -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) = 0 \quad (12.17a)$$

或

$$\mathbf{V}_{nN} = \mathbf{Z}_n \mathbf{I}_n = 0 \quad (12.17b)$$

即中性线两端的电压为零。因此，去掉中性线并不会对系统产生任何影响。实际上，在长距离电力传输中，多个三线系统的导体就是利用大地本身作为系统的中性线导体。以这种方式设计的电力系统在所有关键点都要良好接地，以保证安全。

线电流(line current)是各条线路中的电流，而相电流(phase current)则是电源或负载的各相电流。但是在Y-Y系统中，线电流与相电流是相等的，习惯上总是假设线电流是由电源流向负载的，所以仅用一个下标字母表示线电流。

分析对称Y-Y系统的另一种方法是按“每一相”来计算。首先看其中一相，例如a相，其等效电路如图12-12所示。通过单相分析，得到线电流 \mathbf{I}_a 为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} \quad (12.18)$$

由 \mathbf{I}_a 以及相序关系，可以确定其他线电流。因此，只要系统是对称的，仅分析其中一相即可，即使在没有中性线的情况下，也可以采用与三线系统相同的分析方法。

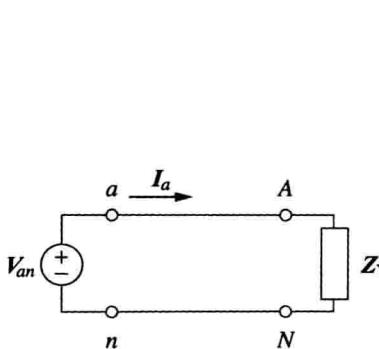


图 12-12 单相等效电路

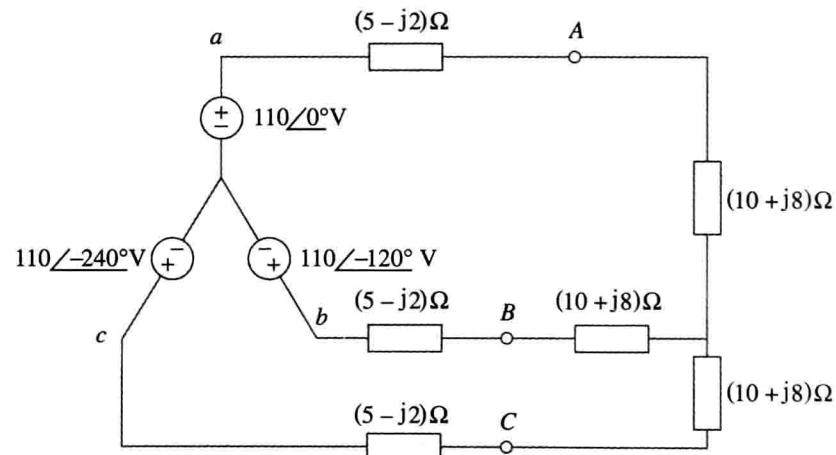


图 12-13 例 12-2 的三线 Y-Y 系统

例 12-2 计算图12-13所示三线Y-Y系统的线电流。

解：图12-13所示的三相电路是对称的，可以用如图12-12所示的单相等效电路来替代。由单相电路分析可以确定 \mathbf{I}_a 为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y}$$

其中， $\mathbf{Z}_Y = (5-j2) + (10+j8) = 15+j6 = 16.155 \angle 21.8^\circ \Omega$ ，因此：

$$\mathbf{I}_a = \frac{110 \angle 0^\circ}{16.155 \angle 21.8^\circ} = 6.81 \angle -21.8^\circ \text{ (A)}$$

由于图12-13的源电压是正序的，所以线电流也是正序的，于是：

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ = 6.81 \angle -141.8^\circ \text{ (A)}$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle -240^\circ = 6.81 \angle -261.8^\circ \text{ A} = 6.81 \angle 98.2^\circ \text{ (A)}$$

练习 12-2 各相阻抗为 $0.4+j0.3\Omega$ 的Y形联结对称三相发电机与各相负载阻抗为 $(24+j19)\Omega$ 的Y形联结对称负载相连。连接发电机与负载的线路阻抗为每相 $(0.6+j0.7)\Omega$ ，假设电源电压为正序，并且 $\mathbf{V}_{an} = 120 \angle 30^\circ \text{ V}$ 。试求：(a)线电压；(b)线电流。

答案：(a) $207.8 \angle 60^\circ$ V, $207.8 \angle -60^\circ$ V, $207.8 \angle -180^\circ$ V
 (b) $3.75 \angle -8.66^\circ$ A, $3.75 \angle -128.66^\circ$ A, $3.75 \angle -111.34^\circ$ A

12.4 对称Y-△联结

对称Y-△系统是指由对称Y形联结电源与对称△形联结负载构成的系统。

对称Y-△系统如图12-14所示，图中电源为Y形联结，而负载为△形联结。当然，这样的系统中没有从电源到负载的中性线。假设电源为正序，则各相电压为：

$$\mathbf{V}_{an} = V_p \angle 0^\circ, \quad \mathbf{V}_{bn} = V_p \angle -120^\circ, \quad \mathbf{V}_{cn} = V_p \angle +120^\circ \quad (12.19)$$

提示：这种系统是实际中使用最多的三相系统，因为三相电源通常是Y形联结的，而三相负载通常是△形联结的。

由12.3节可知，线电压为：

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ = \mathbf{V}_{AB}, \quad \mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ = \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_{ca} &= \sqrt{3}V_p \angle -150^\circ = \mathbf{V}_{CA} \end{aligned} \quad (12.20)$$

由此可见，在该系统结构中，线电压等于负载阻抗两端的电压，由这些电压可以确定各相电流为：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_\Delta}, \quad \mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_\Delta} \quad (12.21)$$

上述负载电流具有相同的幅度，但相位相差 120° 。

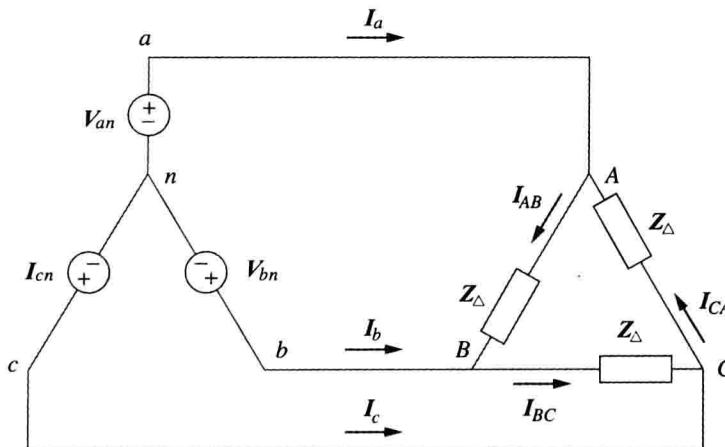


图12-14 对称Y-△联结

求解相电流的另一种方法是应用KVL。例如，对回路aABbna应用KVL，可以得到：

$$-\mathbf{V}_{an} + \mathbf{Z}_\Delta \mathbf{I}_{AB} + \mathbf{V}_{bn} = 0$$

即

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{an} - \mathbf{V}_{bn}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} \quad (12.22)$$

与式(12.21)一样。这是求解相电流的更一般的方法。

在节点A、B、C处应用KCL，即可由相电流求得线电流，于是：

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA}, \quad \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}, \quad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} \quad (12.23)$$

因为 $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB} \angle -240^\circ$ ，所以：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB} (1 - \angle -240^\circ) \\ &= \mathbf{I}_{AB} (1 + 0.5 - j0.866) = \mathbf{I}_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (12.24)$$

表明线电流 I_L 的大小是相电流 I_p 的 $\sqrt{3}$ 倍，即：

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (12.25)$$

其中：

$$I_L = | \mathbf{I}_a | = | \mathbf{I}_b | = | \mathbf{I}_c | \quad (12.26)$$

且

$$I_p = | \mathbf{I}_{AB} | = | \mathbf{I}_{BC} | = | \mathbf{I}_{CA} | \quad (12.27)$$

而且，在正序假设下，线电流较其相应的相电流滞后 30° 。图 12-15 为说明相电流与线电流关系的相量图。

分析 Y-△ 电路的另一种方法是将△形联结的负载转换为等效的 Y 形联结负载。由式 (12.8) 给出△-Y 的转换公式可得：

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \quad (12.28)$$

转换后即可得到如图 12-10 所示的 Y-Y 系统。图 12-14 所示三相的 Y-△ 系统可以用图 12-16 所示的单相等效电路来替代。这样就可以仅计算线电流，之后再利用式 (12.25) 以及各相电流超前于其对应的线电流 30° 的性质确定相电流。

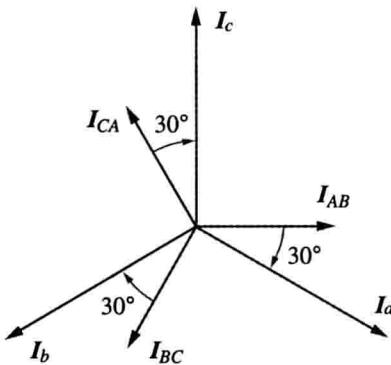


图 12-15 说明相电流与线电流关系的相量图

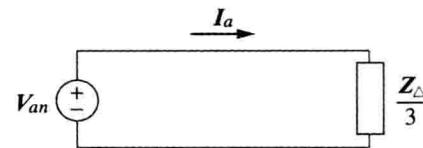


图 12-16 对称 Y-△ 电路的单相等效电路

例 12-3 某对称 abc 相序 Y 形联结电源 $\mathbf{V}_{an} = 100 \angle 10^\circ \text{ V}$ ，与一个各相阻抗为 $(8 + j4) \Omega$ 的对称△形联结负载相连，计算相电流与线电流。

解：本例可以用两种方法求解。

方法 1 负载阻抗为：

$$\mathbf{Z}_\Delta = 8 + j4 = 8.944 \angle 26.57^\circ (\Omega)$$

如果相电压 $\mathbf{V}_{an} = 100 \angle 10^\circ$ ，则线电压为：

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{an} \sqrt{3} \angle 30^\circ = 100\sqrt{3} \angle 10^\circ + 30^\circ = \mathbf{V}_{AB}$$

即

$$\mathbf{V}_{AB} = 173.2 \angle 40^\circ \text{ V}$$

相电流为：

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_\Delta} = \frac{173.2 \angle 40^\circ}{8.944 \angle 26.57^\circ} = 19.36 \angle 13.43^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{I}_{AB} \angle -120^\circ = 19.36 \angle -106.57^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB} \angle +120^\circ = 19.36 \angle 133.43^\circ (\text{A})$$

线电流为：

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ = \sqrt{3} \times 19.36 \angle 13.43^\circ - 30^\circ = 33.53 \angle -16.57^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ = 33.53 \angle -136.57^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle +120^\circ = 33.53 \angle 103.43^\circ (\text{A})$$

方法 2 由单相电路分析，可得：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_\Delta / 3} = \frac{100 \angle 10^\circ}{2.981 \angle 26.57^\circ} = 33.54 \angle -16.57^\circ (\text{A})$$

与方法 1 所得结果相同。其他线电流可以利用 abc 相序确定。

练习 12-3 对称 Y 形联结电源的一个线电压为 $V_{AB} = 120 \angle -20^\circ$ V，如果该电源与 $20 \angle 40^\circ \Omega$ 的负载△形联结，试在 abc 相序情况下，求相电流与线电流。

答案: $6 \angle -60^\circ$ A, $6 \angle -180^\circ$ A, $6 \angle 60^\circ$ A, $10.392 \angle -90^\circ$ A,
 $10.392 \angle 150^\circ$ A, $10.392 \angle 30^\circ$ A

12.5 对称△-△联结

一个对称△-△系统是指电源与负载均为对称△形联结的系统。

电源与负载均为△形联结的系统如图 12-17 所示，为了确定相电流与线电流，假设采用正序，则△形联结电源的相电压为：

$$V_{ab} = V_p \angle 0^\circ, \quad V_{bc} = V_p \angle -120^\circ, \quad V_{ca} = V_p \angle +120^\circ \quad (12.29)$$

线电压与相电压相同。对如图 12-17 所示系统，假设无输电线阻抗，则△形联结电源的相电压等于负载阻抗两端的电压，即：

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{AB}, \quad V_{bc} = V_{BC} \\ V_{ca} &= V_{CA} \end{aligned} \quad (12.30)$$

因此，相电流为：

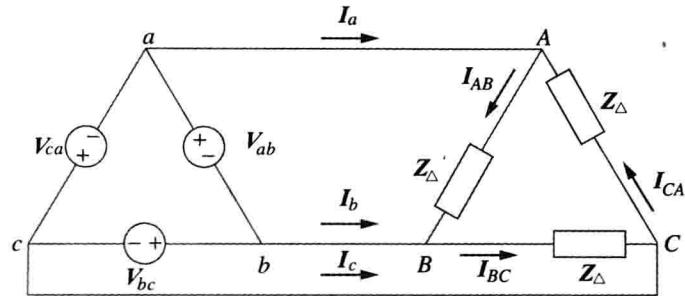


图 12-17 对称△-△联结

与前一节相同，负载为△形联结，所以前一节推导的部分公式在这里仍然适用。在节点 A、B、C 处应用 KCL，即可由相电流确定线电流，即：

$$I_a = I_{AB} - I_{CA}, \quad I_b = I_{BC} - I_{AB}, \quad I_c = I_{CA} - I_{BC} \quad (12.32)$$

而且，正如前一节所述，各线电流较其相应的相电流相位滞后 30° ，线电流 I_L 的大小为相电流 I_p 的 $\sqrt{3}$ 倍：

$$I_L = \sqrt{3} I_p \quad (12.33)$$

分析△-△型电路的另一种方法是将电源与负载转换为等效的 Y 形联结。已知 $Z_Y = Z_\Delta / 3$ ，将△形联结的电源转换为 Y 形联结电源的方法将在下一节讨论。

例 12-4 阻抗为 $(20-j15)\Omega$ 对称△形联结负载接到一个对称△形联结正序发电机上， $V_{ab} = 330 \angle 0^\circ$ V。计算负载的相电流与线电流。

解：每相的负载阻抗为：

$$Z_\Delta = 20 - j15 = 25 \angle -36.87^\circ (\Omega)$$

由于 $V_{AB} = V_{ab}$ ，所以相电流为：

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{330 \angle 0^\circ}{25 \angle -36.87^\circ} = 13.2 \angle 36.87^\circ (\text{A})$$

$$I_{BC} = I_{AB} \angle -120^\circ = 13.2 \angle -83.13^\circ (\text{A})$$

$$I_{CA} = I_{AB} \angle +120^\circ = 13.2 \angle 156.87^\circ (\text{A})$$

对于△形负载而言，其线电流总是滞后于其相应的相电流 30° ，并且其幅度为相电流的 $\sqrt{3}$ 倍。所以，线电流为：

$$I_a = I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ = (13.2 \angle 36.87^\circ) (\sqrt{3} \angle -30^\circ) = 22.86 \angle 6.87^\circ (\text{A})$$

$$I_b = I_a \angle -120^\circ = 22.86 \angle -113.13^\circ (\text{A})$$

$$I_c = I_a \angle +120^\circ = 22.86 \angle 126.87^\circ (\text{A})$$

练习 12-4 某正序、对称△形联结的电源为一对称△形联结的负载供电，如果负载的

各相阻抗为 $(18+j12)\Omega$ 且 $I_a = 9.609 \angle 35^\circ A$ ，试求 I_{AB} 与 V_{AB} 。

答案: $5.548 \angle 65^\circ A$, $120 \angle 98.69^\circ V$

12.6 对称△-Y 联结

△-Y 对称系统是指由对称△形联结的电源与对称Y形联结的负载组成的系统。

考虑如图 12-18 所示的电路。假设采用 abc 相序，则△形联结电源的相电压为：

$$V_{ab} = V_p \angle 0^\circ, \quad V_{bc} = V_p \angle -120^\circ, \quad V_{ca} = V_p \angle +120^\circ \quad (12.34)$$

上述电压既是相电压，也是线电压。

计算线电流的方法很多。其中一种方法是对如图 12-18 所示的回路 $aANBba$ 应用 KVL，得到：

$$-V_{ab} + Z_Y I_a - Z_Y I_b = 0$$

即

$$Z_Y (I_a - I_b) = V_{ab} = V_p \angle 0^\circ$$

于是：

$$I_a - I_b = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z_Y} \quad (12.35)$$

但是，按照 abc 相序， I_b 较 I_a 滞后 120° ，即 $I_b = I_a \angle -120^\circ$ ，因此：

$$I_a - I_b = I_a (1 - \angle -120^\circ) = I_a \left(1 + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I_a \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (12.36)$$

将式(12.36)代入式(12.35)，得到：

$$I_a = \frac{V_p / \sqrt{3} \angle -30^\circ}{Z_Y} \quad (12.37)$$

考虑到正序关系，即可确定其他线电流 I_b 与 I_c ， $I_b = I_a \angle -120^\circ$ ， $I_c = I_a \angle +120^\circ$ 。负载的相电流等于线电流。

确定线电流的另一种方法是将△形联结的电源利用其等效的 Y 形联结电源来替代，如图 12-19 所示。由 12.3 节已知，Y 形联结电源的线电压较其相应的相电压超前。因此，将 Y 形联结电源相应的线电压除以 $\sqrt{3}$ ，并相移 -30° ，就可以得到等效 Y 形联结的各相电压，于是，等效 Y 形联结电源的相电压为：

$$V_{an} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ, \quad V_{bn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ, \quad V_{cn} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} \angle +90^\circ \quad (12.38)$$

如果△形联结电源的各相源阻抗为 Z_s ，则由式(9.69)可知，等效的 Y 形联结电源的各相源阻抗为 $Z_s/3$ 。

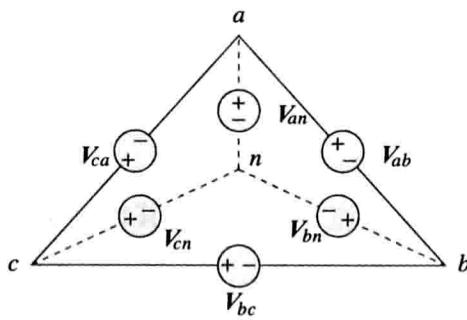


图 12-19 电源的△形联结转换为等效 Y 形联结

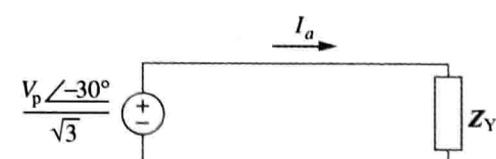


图 12-20 单相等效电路

一旦将电源转换为 Y 形联结，电路就成为一个 Y-Y 系统。因此，可以利用如图 12-20 所示的单相等效电路进行分析，由此可得 a 相的线电流为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_p / \sqrt{3} / -30^\circ}{\mathbf{Z}_Y} \quad (12.39)$$

与式(12.37)相同。

另外，还可以将 Y 形联结负载转换为等效的△形联结负载，所得到的系统为△-△系统，其分析方法参见 12.5 节。注意：

$$\mathbf{V}_{AN} = \mathbf{I}_a \mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{V}_p / -30^\circ}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{V}_{BN} = \mathbf{V}_{AN} / -120^\circ, \quad \mathbf{V}_{CN} = \mathbf{V}_{AN} / +120^\circ \quad (12.40)$$

如前所述，△形联结负载要比 Y 形联结负载更符合实际需求，由于各负载直接通过传输线相连，所以改变△形联结负载的任何一相负载是非常方便的。然而，△形联结电源是很不实用的，因为相电压出现任意小的不平衡，都会导致不希望出现的环路电流。

表 12-1 总结了四种联结的相电流，相电压以及线电流，线电压的计算公式。建议不必记忆这些公式，而要理解公式的推导过程。对相应的三相电路直接应用 KCL 与 KVL 即可推导出表中所列的公式。

表 12-1 对称三相系统相电压/电流和线电压/电流的公式总结

联结方式	相电压/电流	线电压/电流
Y-Y	$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_p / 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_p / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{V}_p / +120^\circ$ 同线电流	$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3} \mathbf{V}_p / 30^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{ab} / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_{ab} / +120^\circ$ $\mathbf{I}_a = \mathbf{V}_{an} / \mathbf{Z}_Y$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a / -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a / +120^\circ$
Y-△	$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_p / 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bn} = \mathbf{V}_p / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{cn} = \mathbf{V}_p / +120^\circ$ $\mathbf{I}_{AB} = \mathbf{V}_{AB} / \mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{V}_{BC} / \mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{V}_{CA} / \mathbf{Z}_\Delta$	$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{AB} = \sqrt{3} \mathbf{V}_p / 30^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{ab} / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{I}_{CA} = \mathbf{V}_{ab} / +120^\circ$ $\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{AB} \sqrt{3} / -30^\circ$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a / -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a / +120^\circ$ 同相电压
△-△	$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_p / 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_p / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_p / +120^\circ$ $\mathbf{I}_{AB} = \mathbf{V}_{ab} / \mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{V}_{bc} / \mathbf{Z}_\Delta$ $\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{V}_{ca} / \mathbf{Z}_\Delta$	$\mathbf{I}_a = \mathbf{V}_{AB} \sqrt{3} / -30^\circ$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a / -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a / +120^\circ$ 同相电压
△-Y	$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_p / 0^\circ$ $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_p / -120^\circ$ $\mathbf{V}_{ca} = \mathbf{V}_p / +120^\circ$ 同线电流	$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_p / -30^\circ}{\sqrt{3} \mathbf{Z}_Y}$ $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a / -120^\circ$ $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a / +120^\circ$ 同相电压

注：假设电源为正序或 abc 相序。

例 12-5 一相阻抗为 $(40+j25)\Omega$ 的对称 Y 形联结负载由线电压为 210V 的对称、正序△形联结的电源供电，如果以 \mathbf{V}_{ab} 作为参考电压，计算相电流。

解：负载阻抗为：

$$\mathbf{Z}_Y = 40 + j25 = 47.17 \angle 32^\circ (\Omega)$$

电源电压为：

$$\mathbf{V}_{ab} = 210 \angle 0^\circ \text{ V}$$

将△形联结电源转换为Y形联结电源，有：

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 121.2 \angle -30^\circ (\text{V})$$

于是线电流为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{121.2 \angle -30^\circ}{47.12 \angle 32^\circ} = 2.57 \angle -62^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_a \angle -120^\circ = 2.57 \angle -178^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_a \angle 120^\circ = 2.57 \angle 58^\circ (\text{A})$$

相电流与线电流相同。

 练习 12-5 在某对称△-Y 电路中， $\mathbf{V}_{ab} = 240 \angle 15^\circ$ ， $\mathbf{Z}_Y = (12 + j15) \Omega$ ，计算线电流。

答案： $7.21 \angle -66.34^\circ \text{ A}$, $7.21 \angle +173.66^\circ \text{ A}$, $7.21 \angle 53.66^\circ \text{ A}$

12.7 对称系统中的功率

本节讨论对称三项系统中的功率。首先计算负载吸收的瞬时功率，为此需要在时域中分析电路，对于Y形联结负载而言，其相电压为：

$$\begin{aligned} v_{AN} &= \sqrt{2}V_p \cos \omega t, & v_{BN} &= \sqrt{2}V_p \cos(\omega t - 120^\circ) \\ v_{CN} &= \sqrt{2}V_p \cos(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (12.41)$$

由于 V_p 定义为相电压的有效值，所以因子 $\sqrt{2}$ 是必需的。如果 $\mathbf{Z}_Y = Z \angle \theta$ ，则相电流较其相电压滞后的角度为 θ ，因此：

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta), & i_b &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) \\ i_c &= \sqrt{2}I_p \cos(\omega t - \theta + 120^\circ) \end{aligned} \quad (12.42)$$

其中， I_p 为相电流的有效值。负载的总的瞬时功率等于三相瞬时功率之和，即：

$$\begin{aligned} p &= p_a + p_b + p_c = v_{AN}i_a + v_{BN}i_b + v_{CN}i_c \\ &= 2V_p I_p [\cos \omega t \cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta - 120^\circ) + \\ &\quad \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta + 120^\circ)] \end{aligned} \quad (12.43)$$

利用三角恒等式：

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \quad (12.44)$$

可以得到：

$$\begin{aligned} p &= V_p I_p [3\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)] \\ &= V_p I_p (3\cos \theta + \cos \alpha + \cos \alpha \cos 240^\circ + \sin \alpha \sin 240^\circ + \cos \alpha \cos 240^\circ - \sin \alpha \sin 240^\circ) \end{aligned} \quad (12.45)$$

其中：

$$\alpha = 2\omega t - \theta = V_p I_p \left[3\cos \theta + \cos \alpha + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos \alpha \right] = 3V_p I_p \cos \theta$$

因此，对称三相系统中总的瞬时功率是恒定的，而不像各相的瞬时功率那样随时间而变化，无论负载是Y形联结还是△形联结，这个结论都是成立的。这是采用三相系统发电、配电的重要原因之一。稍后将介绍另一个原因。

由下总的瞬时功率不随时间变化，所以无论是△形联结负载还是Y形联结负载，其各相的平均功率 P_p 均为 $p/3$ ，或：

$$P_p = V_p I_p \cos \theta \quad (12.46)$$

各项的无功功率为：

$$Q_p = V_p I_p \sin \theta \quad (12.47)$$

各项的视在功率为：

$$S_p = V_p I_p \quad (12.48)$$

各项的复功率为：

$$\mathbf{S}_p = P_p + j Q_p = \mathbf{V}_p \mathbf{I}_p^* \quad (12.49)$$

其中， \mathbf{V}_p 和 \mathbf{I}_p 分别是幅度为 V_p 和 I_p 的相电压和相电流。总的平均功率为各相平均功率之和：

$$P = P_a + P_b + P_c = 3P_p = 3V_p I_p \cos \theta = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta \quad (12.50)$$

对于 Y 形联结负载而言， $I_L = I_p$ ，但 $V_L = \sqrt{3}V_p$ ，而对于 Δ 形联结负载而言， $I_L = \sqrt{3}I_p$ ，但 $V_L = V_p$ 。因此式(12.50)既适用于 Y 形联结负载，又适用于 Δ 形联结负载。同理，总的无功功率为：

$$Q = 3V_p I_p \sin \theta = 3Q_p = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta \quad (12.51)$$

总的复功率为：

$$\boxed{\mathbf{S} = 3\mathbf{S}_p = 3\mathbf{V}_p \mathbf{I}_p^* = 3I_p^2 \mathbf{Z}_p = \frac{3V_p^2}{\mathbf{Z}_p^*}} \quad (12.52)$$

其中， $\mathbf{Z}_p = Z_p / \theta$ 为各项的负载阻抗 (\mathbf{Z}_p 可以是 \mathbf{Z}_Y 或 \mathbf{Z}_Δ)。另外，式(12.52)还可以写为：

$$\boxed{\mathbf{S} = P + jQ = \sqrt{3}V_L I_L / \theta} \quad (12.53)$$

需要记住的是， V_p 、 I_p 、 V_L 与 I_L 均为有效值， θ 为负载阻抗的辐角，也是相电压与相电流之间的相位差。

采用三相系统进行配电的另一个重要优势在于：与单相系统相比，在相同线电压与相同吸收功率 P_L 的条件下，三相系统所需的输电线比单相系统少。下面将对这两种情况进行比较，假设两系统中的传输线采用相同的材料（例如电阻率为 ρ 的铜材），传输线具有相同的长度 l ，并且负载为电阻性的（功率因数为 1）。对于如图 12-21a 所示的两线单相系统而言， $I_L = P_L / V_L$ ，于是两线系统中的功率损耗为：

$$P_{loss} = 2I_L^2 R = 2R \frac{P_L^2}{V_L^2} \quad (12.54)$$

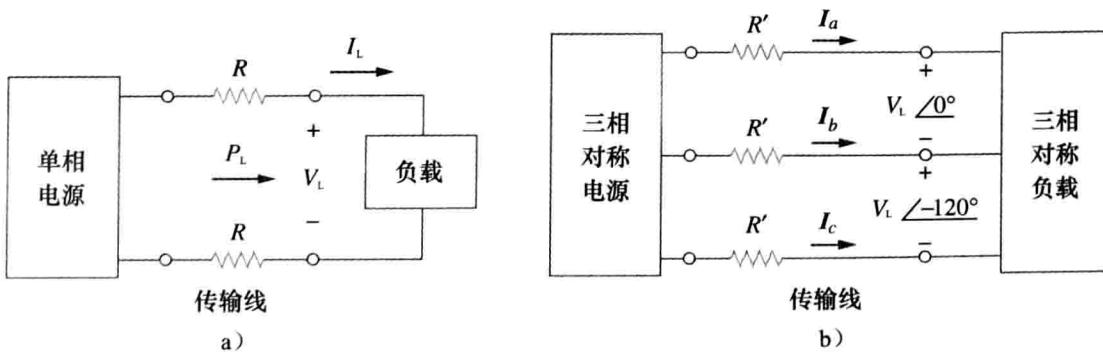


图 12-21 不同系统功率损耗的比较

对于图 12-21b 所示的三相三线系统而言，由式(12.50)可得， $I'_L = |\mathbf{I}_a| = |\mathbf{I}_b| = |\mathbf{I}_c| = P_L / \sqrt{3}V_L$ ，于是，三项系统的功率损耗为：

$$P'_{loss} = 3I'^2 L R' = 3R' \frac{P_L^2}{3V_L^2} = R' \frac{P_L^2}{V_L^2} \quad (12.55)$$

式(12.54)与式(12.55)表明, 对于传递相同的总功率 P_L 以及相同的线电压 V_L , 有:

$$\frac{P_{\text{loss}}}{P'_{\text{loss}}} = \frac{2R}{R'} \quad (12.56)$$

但由第2章可知, $R = \rho l / \pi r^2$, $R' = \rho l / \pi r'^2$, 其中 r 和 r' 为导线的半径, 因此:

$$\frac{P_{\text{loss}}}{P'_{\text{loss}}} = \frac{2r'^2}{r^2} \quad (12.57)$$

如果两个系统的损耗功率相同, 则 $r^2 = 2r'^2$ 。两系统所需的材料之比由传输线数及其体积决定, 且:

$$\frac{\text{单相系统的材料}}{\text{三相系统的材料}} = \frac{2\pi r^2 l}{3\pi r'^2 l} = \frac{2r^2}{3r'^2} = \frac{2}{3} \times 2 = 1.333 \quad (12.58)$$

式(12.58)表明, 单相系统所用的材料比三相系统多 33%, 或者说, 三相系统仅使用等效单相系统所需材料的 75% 即可, 换言之, 传递相同的功率时, 三相系统所需的材料要比单相系统所需的材料少得多。

例 12-6 参看图 12-13 所示电路(例 12-2 图), 确定电源与负载总的平均功率、无功功率及复功率。

解: 由于系统是对称的, 所以仅参考一项即可, 对于 a 相有:

$$V_p = 110 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{和} \quad I_p = 6.81 \angle -21.8^\circ \text{ A}$$

于是电源吸收的负功率为:

$$S_s = -3V_p I_p^* = -3(110 \angle 0^\circ)(6.81 \angle 21.8^\circ) = -2247 \angle 21.8^\circ = -(2087 + j834.6) \text{ V} \cdot \text{A}$$

即电源提供的有效功率为 -2087 W , 无功功率为 -834.6 var 。

负载吸收的复功率为:

$$S_L = 3 |I_p|^2 Z_p$$

其中, $Z_p = 10 + j8 = 12.81 \angle 38.66^\circ$ 且 $I_p = I_a = 6.81 \angle -21.8^\circ$ 。因此:

$$S_L = 3 \times 6.81^2 \times 12.81 \angle 38.66^\circ = 1782 \angle 38.66^\circ = (1392 + j1113) \text{ V} \cdot \text{A}$$

于是, 负载吸收的有功功率为 1391.7 W , 无功功率为 1113.3 var 。两复功率之差为线路阻抗 $(5 - j2) \Omega$ 吸收的复功率。下面求出线路吸收的复功率予以验证:

$$S_l = 3 |I_p|^2 Z_l = 3 \times 6.81^2 \times (5 - j2) = (695.6 - j278.3) \text{ V} \cdot \text{A}$$

恰好是 S_s 与 S_L 之差, 即 $S_s + S_l + S_L = 0$, 结果得到验证。

练习 12-6 在练习 12-2 的 Y-Y 电路中, 试计算电源端与负载端的复功率。

答案: $-(1054.2 + j843.3) \text{ V} \cdot \text{A}$, $(1012 + j801.6) \text{ V} \cdot \text{A}$

例 12-7 三相电动机可看做是对称 Y 负载。当供电线电压为 220 V , 线电流为 18.2 A 时, 电动机吸收的功率为 5.6 kW , 确定该电动机的功率因数。

解: 视在功率为:

$$S = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3} \times 220 \times 18.2 = 6935.13 \text{ V} \cdot \text{A}$$

由于有功功率为:

$$P = S \cos \theta = 5600 \text{ W}$$

所以, 功率因数为:

$$\text{pf} = \cos \theta = \frac{P}{S} = \frac{5600}{6935.13} = 0.8075$$

练习 12-7 某功率因数为 0.85(滞后)的 30 kW 三相电动机与线电压为 440 V 的对称电源相连, 计算该电动机所需的线电流。

答案: 46.31 A

例 12-8 两个对称负载与 240 kVrms 、 60 Hz 电力线相连, 如图 12-22a 所示, 负载 1 在功率因数为 0.6(滞后)时提取的功率为 30 kW , 负载 2 在功率因数为 0.8(滞后)时提取的

功率为 45kvar，假设相序为 abc ，试求：(a) 合并负载吸收的复功率、有功功率与无功功率；(b) 线电流；(c) 将功率因数提高到 0.9(滞后)，求与负载相并联的三个 \triangle 形联结电容器的额定功率(kvar)以及每个电容器的容值。

解：(a) 对于负载 1，已知 $P_1 = 30\text{kW}$ 且 $\cos\theta_1 = 0.6$ ，则 $\sin\theta_1 = 0.8$ ，所以：

$$S_1 = \frac{P_1}{\cos\theta_1} = \frac{30\text{kW}}{0.6} = 50\text{kV}\cdot\text{A}$$

且 $Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = 50 \times 0.8 = 40\text{kvar}$ ，所以负载 1 的复功率为：

$$S_1 = P_1 + jQ_1 = (30 + j40)\text{kV}\cdot\text{A} \quad (12.8.1)$$

对于负载 2，已知 $Q_2 = 45\text{kvar}$ 且 $\cos\theta_2 = 0.8$ ，则 $\sin\theta_2 = 0.6$ ，所以：

$$S_2 = \frac{Q_2}{\sin\theta_2} = \frac{45\text{kV}\cdot\text{A}}{0.6} = 75\text{kV}\cdot\text{A}$$

且 $P_2 = S_2 \cos\theta_2 = 75 \times 0.8 = 60\text{kW}$ ，因此，负载 2 的复功率为：

$$S_2 = P_2 + jQ_2 = (60 + j45)\text{kV}\cdot\text{A} \quad (12.8.2)$$

由式(12.8.1)和(12.8.2)可得，负载吸收的总复功率为：

$$S = S_1 + S_2 = 90 + j85\text{kV}\cdot\text{A} = 123.8 / 43.36^\circ \text{kV}\cdot\text{A} \quad (12.8.3)$$

其功率因数为 $\cos 43.36^\circ = 0.727$ (滞后)，有功功率为 90kW，无功功率为 85kvar。

(b) 由于 $S = \sqrt{3}V_L I_L$ ，所以线电流为：

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} \quad (12.8.4)$$

将其用于计算各负载的线电流，需要注意的是各负载两端的线电压均为 $V_L = 240\text{kV}$ 。于是对于负载 1：

$$I_{L1} = \frac{50\,000}{\sqrt{3} \times 240\,000} = 120.28(\text{mA})$$

由于功率因数是滞后的，所以线电流滞后于线电压 $\theta_1 = \arccos 0.6 = 53.13^\circ$ ，因此：

$$I_{a1} = 120.28 / -53.13^\circ$$

对于负载 2：

$$I_{L2} = \frac{75\,000}{\sqrt{3} \times 240\,000} = 180.42(\text{mA})$$

线电流滞后于线电压 $\theta_2 = \arccos 0.8 = 36.87^\circ$ ，所以：

$$I_{a2} = 180.42 / -36.87^\circ$$

所以总的线电流为：

$$\begin{aligned} I_a &= I_{a1} + I_{a2} = 120.28 / -53.13^\circ + 180.42 / -36.87^\circ \\ &= (72.168 - j96.224) + (144.336 - j108.252) \\ &= 216.5 - j204.472 = 297.8 / -43.36^\circ (\text{mA}) \end{aligned}$$

另外，利用式(12.8.4)也可以由总的复功率确定线电流：

$$I_L = \frac{123\,800}{\sqrt{3} \times 240\,000} = 297.82(\text{mA})$$

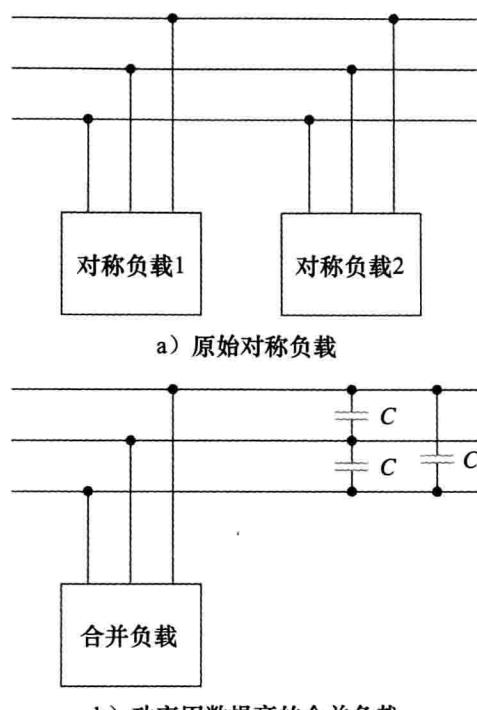


图 12-22 例 12-8 图

且

$$\mathbf{I}_a = 297.82 / -43.36^\circ \text{ mA}$$

与前面计算出的结果是一致的。另外两相的线电流 \mathbf{I}_b 与 \mathbf{I}_c 可以按照 abc 相序得到(即 $\mathbf{I}_b = 297.82 / -163.36^\circ \text{ mA}$ 且 $\mathbf{I}_c = 297.82 / 76.64^\circ \text{ mA}$)。

(c)要将功率因数提高到 0.9(滞后)，所需要的无功功率可以利用式(11.59)求出：

$$Q_C = P(\tan\theta_{\text{old}} - \tan\theta_{\text{new}})$$

其中， $P=90\text{kW}$ ， $\theta_{\text{old}}=43.36^\circ$ ， $\theta_{\text{new}}=\arccos 0.9=25.84^\circ$ ，所以：

$$Q_C = 90000(\tan 43.36^\circ - \tan 25.84^\circ) = 41.4 \text{kvar}$$

此即三个电容器的无功功率，于是，每个电容器的额定功率 $Q'_C = 13.8 \text{kvar}$ 。由式(11.66)可得各电容器的电容值为：

$$C = \frac{Q'_C}{\omega V_{\text{rms}}^2}$$

由于电容器是△形联结，如图 12-22b 所示，所以上式中的 V_{rms} 为线电压，即 240kV ，于是：

$$C = \frac{13800}{2\pi \times 60 \times 240000^2} = 635.5(\text{pF})$$

 **练习 12-8** 假设图 12-22a 所示的两个对称负载由 840VRms 、 60Hz 电源供电。负载 1 为 Y 形联结，每相的阻抗为 $(30+j40)\Omega$ ，负载 2 为对称三相电动机，在功率因素为 0.8(滞后)时提取的功率为 48kW 。假设相序为 abc ，计算：(a)合并负载吸收的复功率；(b)将功率因数提高到 1，与负载相并联的三个△形联结电容器的额定功率(kvar)；(c)在功率因数为 1 的情况下从电源提取的电流。

答案：(a) $(56.47+j47.29)\text{kV}\cdot\text{A}$ ；(b) 15.7kvar ；(c) 38.81A

† 12.8 非对称三相系统

如果不讨论非对称系统，本章的知识结构就显得不完整。在如下两种可能的情况下会出现非对称系统：(1)电源的大小不相等，或者相位角不相等；(2)负载阻抗不相等。

非对称系统是由非对称电压源或非对称负载形成的。

为了简化分析，假设电源电压是对称的，而负载是非对称的。

非对称系统可以直接利用网孔分析法和节点分析法求解。图 12-23 所示为一个非对称三相系统，该系统由对称的电源电压(图中未画出)与非对称 Y 形联结负载(图中已画出)组成。由于负载是非对称的，所以 \mathbf{Z}_A 、 \mathbf{Z}_B 、 \mathbf{Z}_C 不相等。由欧姆定律确定的线电流为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{AN}}{\mathbf{Z}_A}, \quad \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_{BN}}{\mathbf{Z}_B}, \quad \mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_{CN}}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.59)$$

这组非对称线电流会在中性线中产生电流，而对称系统中的中性线电流为零。在节点 N 处应用 KCL 可以得到中性线电流为：

$$\mathbf{I}_n = -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) \quad (12.60)$$

在没有中性线的三线系统中，仍然可以利用网孔分析法取出线电流 \mathbf{I}_a 、 \mathbf{I}_b 与 \mathbf{I}_c 。在这种情况下，节点 N 处必须满足 KCL，于是有 $\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$ 。对于△-Y、Y-△或△-△非对称三线系统的分析也是相同的。前面已经提到，在远距离电力传输中需要采用多路三线系统，并以大地本身作为中性线的导体。

计算非对称三相系统的功率必须先利用式(12.46)~(12.49)分别求出每相的功率，但总功率不是单相功率的 3 倍，而是全部三相功率之和。

提示：专门处理非对称三相系统的方法称为对称元件法，已超出本书的讨论范围。

例 12-9 图 12-23 所示的非对称 Y 形联结负载由 100V 对称电压、 abc 相序电源供电。如果 $Z_A = 15\Omega$, $Z_B = (10 + j5)\Omega$, $Z_C = (6 - j8)\Omega$, 计算线电流与中性线电流。

解：利用式(12.59)可求得线电流为：

$$\mathbf{I}_a = \frac{100 \angle 0^\circ}{15} = 6.67 \angle 0^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{100 \angle 120^\circ}{10 + j5} = \frac{100 \angle 120^\circ}{11.18 \angle 26.56^\circ} = 8.94 \angle 93.44^\circ (\text{A})$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{100 \angle -120^\circ}{6 - j8} = \frac{100 \angle -120^\circ}{10 \angle -53.13^\circ} = 10 \angle -66.87^\circ (\text{A})$$

利用式(12.60), 得到中性线电流为：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &= -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c) = -(6.67 - 0.54 + j8.92 + 3.93 - j9.2) \\ &= -10.06 + j0.28 = 10.06 \angle 178.4^\circ (\text{A}) \end{aligned}$$

练习 12-9 图 12-24 所示的非对称△形联结负载，由线电压为 200V 的正序对称电源供电，以 V_{ab} 作为参考电压求线电流。

答案: $39.71 \angle -41.06^\circ \text{ A}$, $64.12 \angle -139.8^\circ \text{ A}$, $70.13 \angle 74.27^\circ \text{ A}$

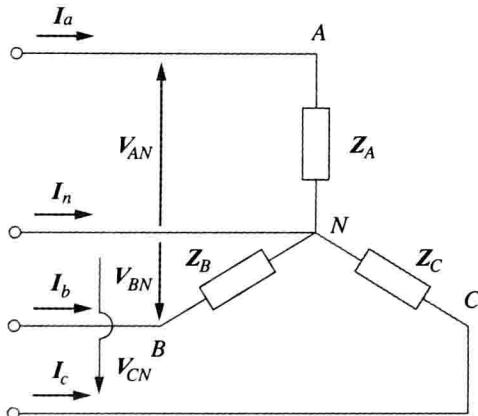


图 12-23 非对称 Y 形联结负载

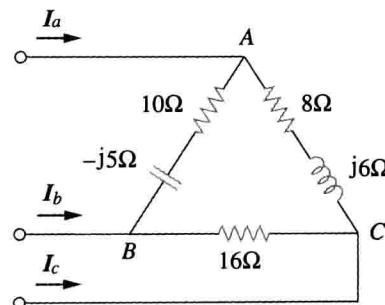


图 12-24 练习 12-9 的非对称△形联结负载

例 12-10 对于图 12-25 所示的非对称电路，试求：(a)线电流；(b)负载吸收的总复功率；(c)电源提供的总复功率。

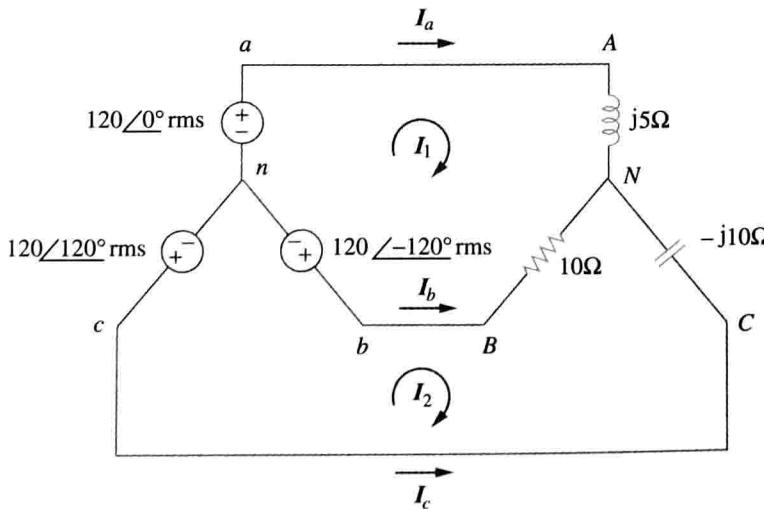


图 12-25 例 12-10 图

解：(a) 利用网孔分析法求解线电流。对于网孔 1, 有：

$$120 \angle -120^\circ - 120 \angle 0^\circ + (10 + j5) \mathbf{I}_1 - 10 \mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$(10 + j5)\mathbf{I}_1 - 10\mathbf{I}_2 = 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (12.10.1)$$

对于网孔 2, 有:

$$120 \angle 120^\circ - 120 \angle -120^\circ + (10 - j10)\mathbf{I}_2 - 10\mathbf{I}_1 = 0$$

即

$$-10\mathbf{I}_1 + (10 - j10)\mathbf{I}_2 = 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \quad (12.10.2)$$

式(12.10.1)与式(12.10.2)构成的矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} 10 + j5 & -10 \\ -10 & 10 - j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \\ 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \end{bmatrix}$$

其行列式为:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 + j5 & -10 \\ -10 & 10 - j10 \end{vmatrix} = 50 - j50 = 70.71 \angle -45^\circ$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 120\sqrt{3} \angle 30^\circ & -10 \\ 120\sqrt{3} \angle -90^\circ & 10 - j10 \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - j13.66) = 4015 \angle -45^\circ$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 + j5 & 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \\ -10 & 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \end{vmatrix} = 207.85(13.66 - j5) = 3023.4 \angle -20.1^\circ$$

于是, 网孔电流为:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4015.23 \angle -45^\circ}{70.71 \angle -45^\circ} = 56.78(A)$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3023.4 \angle -20.1^\circ}{70.71 \angle -45^\circ} = 42.75 \angle 24.9^\circ(A)$$

因此, 线电流为:

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_1 = 56.78A, \quad \mathbf{I}_c = -\mathbf{I}_2 = 42.75 \angle -155.1^\circ A$$

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = 38.78 + j18 - 56.78 = 25.46 \angle 135^\circ(A)$$

(b)下面计算负载吸收的复功率。对于 A 相, 有:

$$\mathbf{S}_A = |\mathbf{I}_a|^2 \mathbf{Z}_A = 56.78^2 \times j5 = j16120(V \cdot A)$$

对于 B 相, 有:

$$\mathbf{S}_B = |\mathbf{I}_b|^2 \mathbf{Z}_B = 25.46^2 \times 10 = 6480(V \cdot A)$$

对于 C 相, 有:

$$\mathbf{S}_C = |\mathbf{I}_c|^2 \mathbf{Z}_C = 42.75^2 \times (-j10) = -j18276(V \cdot A)$$

于是, 负载吸收的总复功率为:

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C = (6480 - j2156)V \cdot A$$

(c)下面通过求解电源吸收的功率来验证上述结果。对于 A 相电压源, 有:

$$\mathbf{S}_a = -\mathbf{V}_{an}\mathbf{I}_a^* = -(120 \angle 0^\circ) \times 56.78 = -6813.6(V \cdot A)$$

对于 B 相电压源, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_b &= -\mathbf{V}_{bn}\mathbf{I}_b^* = -(120 \angle -120^\circ)(25.46 \angle -135^\circ) \\ &= -3055.2 \angle 105^\circ = (790 - j2951.1)V \cdot A \end{aligned}$$

对于 C 相电压源, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= -\mathbf{V}_{cn}\mathbf{I}_c^* = -(120 \angle 120^\circ)(42.75 \angle 155.1^\circ) \\ &= -5130 \angle 275.1^\circ = (-456.03 + j5109.7)V \cdot A \end{aligned}$$

三相电源吸收的总复功率为：

$$\mathbf{S}_s = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_c = (-6480 + j2156) \text{ V} \cdot \text{A}$$

显然， $\mathbf{S}_s + \mathbf{S}_L = 0$ ，验证了交流功率守恒原理。

练习 12-10 试求图 12-26 所示非对称三相电路的线电流以及负载吸收的有功功率。

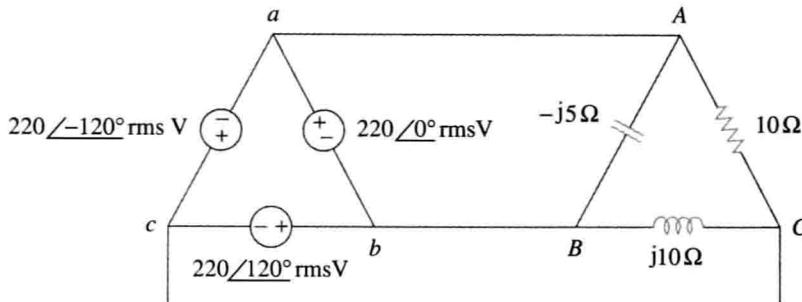


图 12-26 练习 12-10 图

答案：64 /80.1° A, 38.1 /-60° A, 42.5 /225° A, 4.84kW

12.9 基于 PSpice 的三相电路分析

PSpice 软件既可用于分析对称三相电路又可用于分析非对称三相电路，其分析方法与单相交流电路的分析方法相同。但是，利用 PSpice 分析△形联结电源时，存在两个主要问题。第一，△形联结电源形成一个电压源回路，这是 PSpice 不能接受的形式。为了避免这个问题，需在△形联结电源的每一相中串联一个可以忽略的电阻（如 $1\mu\Omega$ ）；第二，△形联结电源没有一个方便的节点可作为地参考节点，而这是运行 PSpice 程序时所必需的。在△形联结的电源中插入一个对称 Y 形联结的大电阻（如 $1\text{ M}\Omega$ 每相），使得该 Y 形联结电阻器的中性线节点作为地节点 0，即可解决这个问题。例 12-12 将说明上述问题。

例 12-11 对于图 12-27 所示的对称 Y-△电路，利用 PSpice 求解线电流 I_{aA} 、相电压 V_{AB} 以及相电流 I_{AC} ，假设电源频率为 60Hz。

解：电路的 PSpice 原理图如图 12-28 所示，在适当的线路中加入伪元件 IPRINT，以确定 I_{aA} 与 I_{AC} ，在节点 A 与节点 B 之间加入 VPRINT2 以得到电压差 V_{AB} ，将 IPRINT 和 VPRINT2 的属性设为 AC=yes、MAG=yes、PHASE=yes，从而仅输出电流与电压的幅度和相位。对于单频分析，选择 Analysis/setup/AC Sweep，并在对话框中输入 Total Pts=1、Start Freq=60 和 Final Freq=60，保存电路图后，即可运行 Analysis/simulate 程序仿真电路，得到如下输出文件：

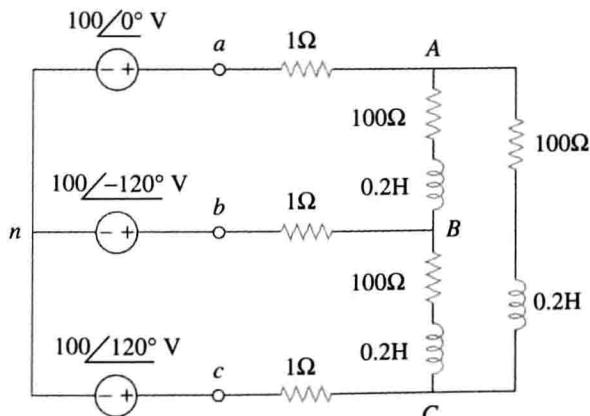


图 12-27 例 12-10 图

FREQ	V(A,B)	VP(A,B)
6.000E+01	1.699E+02	3.081E+01
FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
6.000E+01	2.350E+00	-3.620E+01
FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
6.000E+01	1.357E+00	-6.620E+01

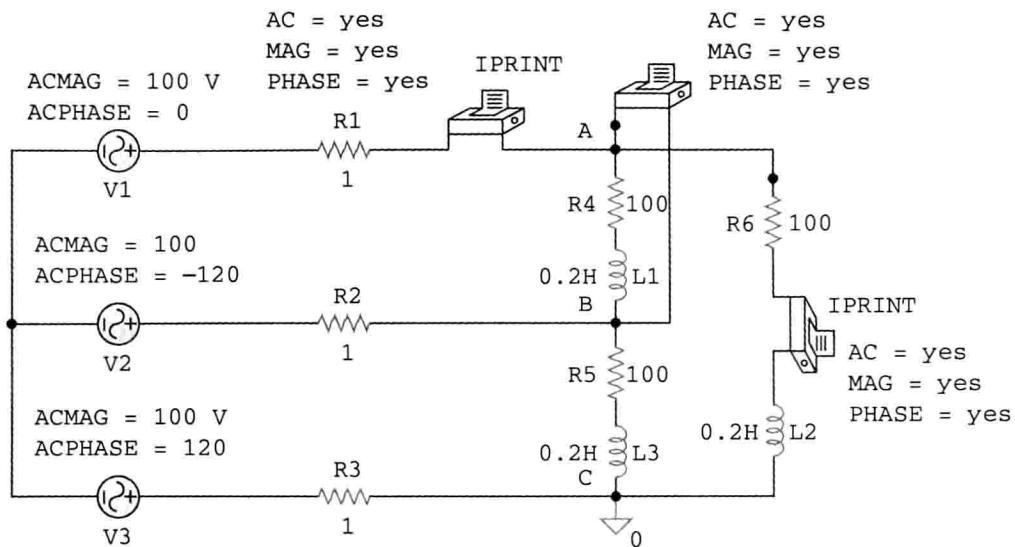


图 12-28 图 12-27 的 PSpice 原理图

由此得到：

$$I_{aA} = 2.35 \angle -36.2^\circ \text{ A}, \quad V_{AB} = 169.9 \angle 30.81^\circ \text{ V}, \quad I_{AC} = 1.357 \angle -66.2^\circ \text{ A}$$

练习 12-11 对于图 12-29 所示的对称 Y-Y 电路，利用 PSpice 求解线电流 I_{bb} 与相电压 V_{AN} ，假设 $f=100\text{Hz}$ 。

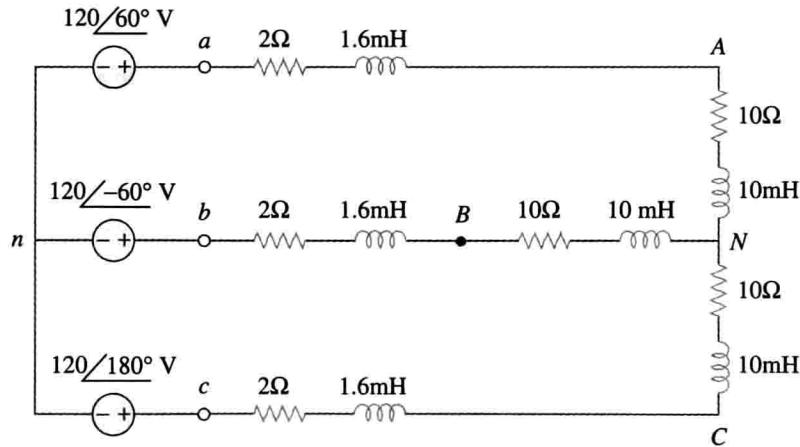


图 12-29 练习 12-11 图

$$\text{答案: } 100.9 \angle 60.87^\circ \text{ V}, \quad 8.547 \angle -91.27^\circ \text{ A}$$

例 12-12 对于图 12-30 所示的非对称 $\Delta-\Delta$ 电路，试利用 PSpice 求解发电机电流 I_{ab} 、线电流 I_{bb} 以及相电流 I_{BC} 。

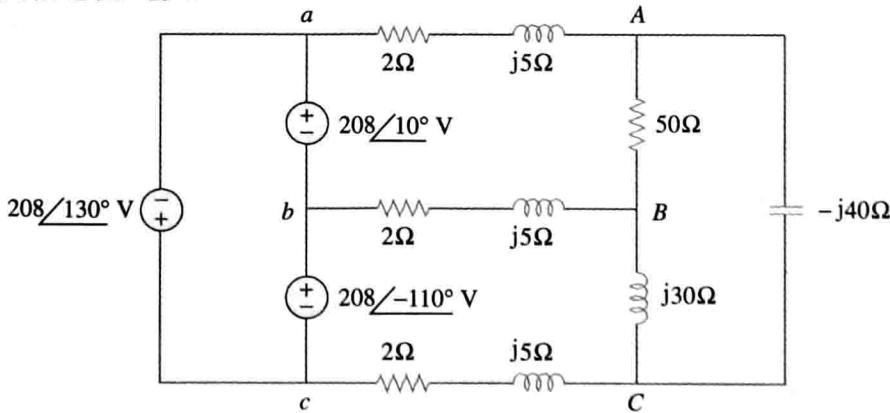


图 12-30 例 12-12 图

- 解：1. 明确问题。本题所要解决的问题以及求解过程均已明确。
 2. 列出已知条件。本题要求确定从 a 至 b 的发电机电流、从 b 到 B 的线电流以及从 B 到 C 的相电流。
 3. 确定备选方案。虽然可以利用不同的方法求解本题，但要求必须使用 PSpice，因此，这里不会采用其他方法求解。
 4. 尝试求解。如前所述，在△形联结电源中串联 $1\mu\Omega$ 电阻器，即可避免形成电压源回路。为了提供地节点 0，在△形联结电源中加入对称 Y 形联结电阻器（每相 $1M\Omega$ ），如图 12-31 所示。加入三个伪元件 IPRINT 并设置其属性，从而得到所求的电流 I_{ab} 、 I_{bb} 和 I_{bc} 。由于未指定工作频率，且需要确定电感值与电容值，所以假设 $\omega = 1\text{rad/s}$ ，于是 $f = 1/(2\pi) = 0.159155\text{Hz}$ ，所以：

$$L = \frac{X_L}{\omega}, \quad c = \frac{1}{\omega X_C}$$

选择 Analysis/Setup/AC Sweep，并输入 Total Pts=1、Start Freq=0.159155 以及 Final Freq=0.159155。保存电路之后，运行程序 Analysis/Simulate 对电路进行仿真，得到输出文件为：

FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
1.592E-01	9.106E+00	1.685E+02

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
1.592E-01	5.959E+00	-1.772E+02

FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
1.592E-01	5.500E+00	1.725E+02

由此得到：

$$I_{ab} = 5.595 \angle -177.2^\circ \text{ A}, \quad I_{bb} = 9.106 \angle 168.5^\circ \text{ A}, \quad I_{bc} = 5.5 \angle 172.5^\circ \text{ A}$$

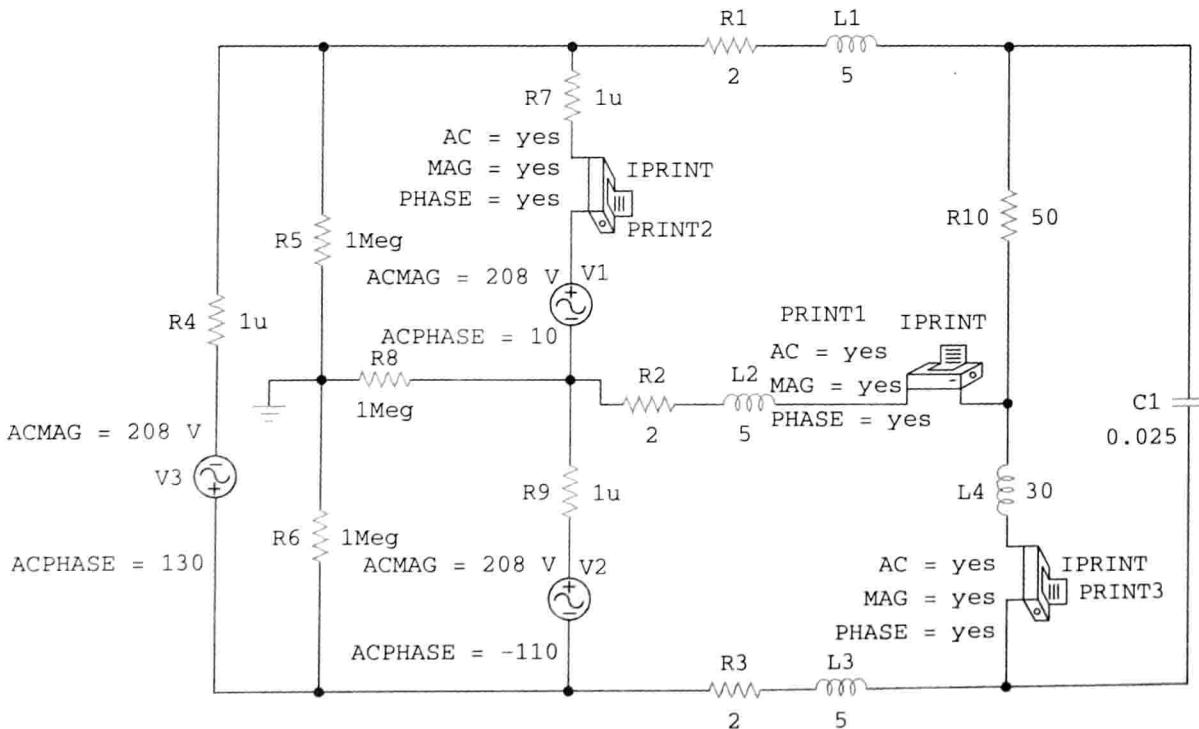


图 12-31 图 12-30 的 PSpice 原理图

5. 评价结果。利用网孔分析法验证所得到的结果。设网孔 aAb 为网孔 1，网孔 bBc 为网孔 2，网孔 ACB 为网孔 3，并且三个网孔电流均为顺时针方向。从而得到如下网孔

方程。

网孔 1：

$$(54 + j10)I_1 - (2 + j5)I_2 - 50I_3 = 208 \angle 10^\circ = 204.8 + j36.12$$

网孔 2：

$$-(2 + j5)I_1 + (4 + j40)I_2 - j30I_3 = 208 \angle -110^\circ = -71.14 - j195.46$$

网孔 3：

$$-50I_1 - j30I_2 + (50 - j10)I_3 = 0$$

利用 MATLAB 求解可得：

```
>>Z=[(54+10i),(-2-5i),-50;(-2-5i),(4+40i),
-30i,-50,-30i,(50-10i)]  
  
Z=  
54.0000+10.0000i -2.0000-5.0000i -50.0000  
-2.0000-5.0000i 4.0000+40.0000i 0-30.0000i  
-50.0000 0-30.0000i 50.0000-10.0000i  
>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0]  
  
V=  
1.0e+002*  
2.0480+0.3612i  
-0.7114-1.9546i  
0  
>>I=inv(Z)*V  
  
I=  
8.9317+2.6983i  
0.0096+4.5175i  
5.4619+3.7964i
```

$$I_{bB} = -I_1 + I_2 = -(8.932 + j2.698) + (0.0096 + j4.518)$$

$$= -8.922 + j1.82 = 9.106 \angle 168.47^\circ \text{ (A)} \quad \text{答案得到验证。}$$

$$I_{BC} = I_2 - I_3 = (0.0096 + j4.518) - (5.462 + j3.796)$$

$$= -5.452 + j0.722 = 5.5 \angle 172.46^\circ \text{ (A)} \quad \text{答案得到验证。}$$

下面求解 I_{ab} 。如果假设各电源的内部阻抗很小，则可得到 I_{ab} 的合理估计。加入 0.01Ω 的内部电阻器以及电源电路周围的第四个回路，得到如下网孔方程。

网孔 1：

$$(54.01 + j10)I_1 - (2 + j5)I_2 - 50I_3 - 0.01I_4 = 208 \angle 10^\circ = 204.8 + j36.12$$

网孔 2：

$$-(2 + j5)I_1 + (4.01 + j40)I_2 - j30I_3 - 0.01I_4 = 208 \angle -110^\circ = -71.14 - j195.46$$

网孔 3：

$$-50I_1 - j30I_2 + (50 - j10)I_3 = 0$$

网孔 4：

$$-0.01I_1 - 0.01I_2 + 0.03I_4 = 0$$

```
>>Z=[(54.01+10i),(-2-5i),-50,-0.01;(-2-5i),
(4.01+40i),-30i,-0.01,-50,-30i,(50-10i),
0,-0.01,-0.01,0,0.03]
```

Z=

```
54.0100+10.0000i -2.0000-5.0000i, -50.0000 -0.0100
-2.0000-5.0000i 4.0100-40.0000i 0-30.0000i 0.0100
```

```

-50.0000 0-30.0000i 50.0000-10.0000i 0
-0.0100 -0.0100 0 0.0300

>>V=[(204.8+36.12i);(-71.14-195.46i);0;0]
V=
1.0e+002*
2.0480+0.3612i
-0.7114-1.9546i
0
0
>>I=inv(Z)*V
I=
8.9309+2.6973i
0.0093+4.5159i
5.4623+3.7954i
2.9801+2.4044i

```

$$I_{ab} = -I_1 + I_4 = -(8.931 + j2.697) + (2.98 + j2.404)$$

$$= -5.951 - j0.293 = \underline{5.958 \angle -177.18^\circ \text{ A}} \quad \text{答案得到验证。}$$

6. 是否满意? 本题的求解过程是令人满意的, 而且对答案进行了充分验证, 可以将所求得的结果作为本题的答案。

练习 12-12 对于如图 12-32 所示的非对称电路, 试利用 PSpice 求解发电机电流 I_a 、线电流 I_c 以及相电流 I_{AB} 。

答案: $24.68 \angle -90^\circ \text{ A}$,

$37.25 \angle 83.79^\circ \text{ A}$,

$15.55 \angle -75.01^\circ \text{ A}$

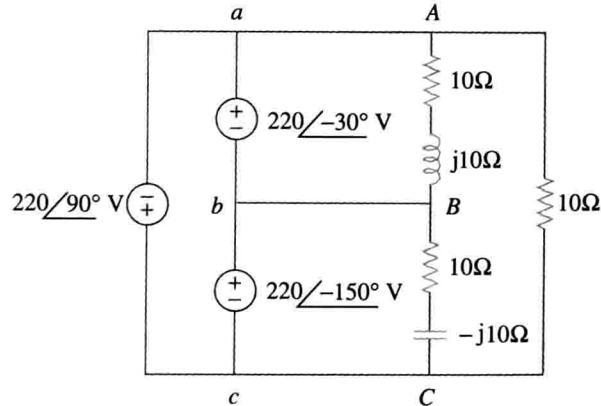


图 12-32 练习 12-12 图

† 12.10 应用实例

三相电源的 Y 形联结与△形联结都有重要的应用。Y 形联结电源用于远距离电力传输, 此时的传输线电阻损耗(I^2R)最小, 这是

因为 Y 形联结的线电压是△形联结的 $\sqrt{3}$ 倍, 因此传输相同的功率时, 其线电流较△形联结的线电流小。△形联结电源主要用在需要由三相电源得到三个单相电路的场合, 因为家庭照明与家用电器均为单相电源供电, 所以在住宅供电系统中通常需要将三相电转换为单相电。三相电用在功率需求较大的工业供电线路方面, 在一些应用中, 负载是 Y 形联结还是△形联结并不重要。例如, 感应电动机既可以采用 Y 形联结, 也可以采用△形联结。实际上, 有些制造商将电动机在 220V 时连接为△形联结, 在 440V 时连接为 Y 形联结, 这样电动机的一条线路就可以适应于两种不同的电压。

本节讨论两个实际应用, 三相电路的功率测量以及住宅供电线路问题。

12.10.1 三相功率测量

本书 11.9 节介绍了测量单相电路中平均功率(即有功功率)的仪器——功率表。单相功率表也可以测量对称三相系统的平均功率, 因为 $P_1 = P_2 = P_3$, 所以总平均功率即一只功率表读数的三倍。然而, 如果系统是非对称的, 则需要用两只或三只单相功率表测量功率。图 12-33 所示是三表功率测量法, 无论负载是对称或非对称、是 Y 形联结或△形联结, 这种方法都是适用的。三表功率测量法对于功率因数经常变化的三相系统是非常适用的, 总的平均功率为三个功率表读数的代数和, 即:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 \quad (12.61)$$

其中, P_1 、 P_2 与 P_3 分别对应于功率表 W_1 、 W_2 与 W_3 的读数。注意, 图 12-33 中的公用参考点 o 的选取是任意的。如果负载为 Y 形联结, 则参考点 o 可以连接至其中性线点 n 上。如果负载为 Δ 形联结, 则参考点 o 可以连接至任意一点。例如, 当点 o 与点 b 相连时, 功率表 W_2 的电压绕组读数为零, 即 $P_2=0$, 表示功率表 W_2 不是必需的。因此, 只需两个功率表即可测量系统的总功率。

两表功率测量法是最常用的三相功率测量方法。如图 12-34 所示, 两个功率表必须正确地与任意两相相连接, 应该注意的是, 图中各瓦特表的电流绕组测量的是线电流, 而相应的电压绕组连接在该相线路与第三相线路之间, 测量的是线电压。还要注意, 电压绕组的“土”端要接到与之相应的电流绕组的“土”端上。虽然各功率表的读数不再是任一相的功率值, 但是无论负载是 Y 形联结还是 Δ 形联结, 无论负载是对称还是非对称的, 两个功率表读数的代数和仍等于负载吸收的总平均功率。即总平均功率等于两功率表读数的代数和:

$$P_T = P_1 + P_2 \quad (12.62)$$

下面将证明该方法对于对称三相系统是成立的。

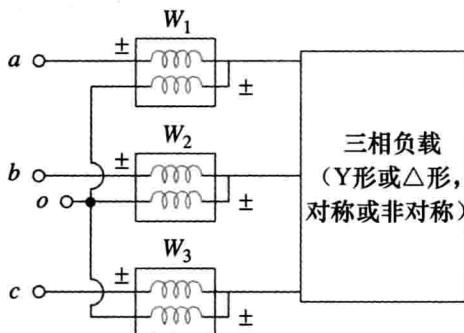


图 12-33 测量三相功率的三表法

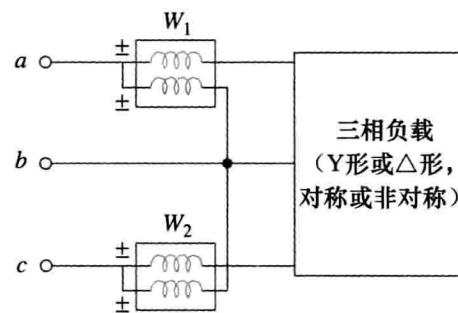


图 12-34 测量三相功率的两表法

考虑图 12-35 所示的对称 Y 形联结负载, 下面利用两表法确定负载吸收的平均功率。假设电源相序为 abc , 负载阻抗为 $Z_Y = Z_Y / \theta$ 。由于接入负载阻抗, 各表的电压绕组超前于其电流绕组 θ , 所以功率因数为 $\cos\theta$, 已知各线电压超前于相应的相电压, 因此, 相电流 I_a 与线电压 V_{ab} 之间总的相位差为 $(\theta+30^\circ)$, 并且功率表 W_1 平均功率的读数为:

$$P_1 = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_{ab} \mathbf{I}_a^*] = V_{ab} I_a \cos(\theta + 30^\circ) = V_L I_L \cos(\theta + 30^\circ) \quad (12.63)$$

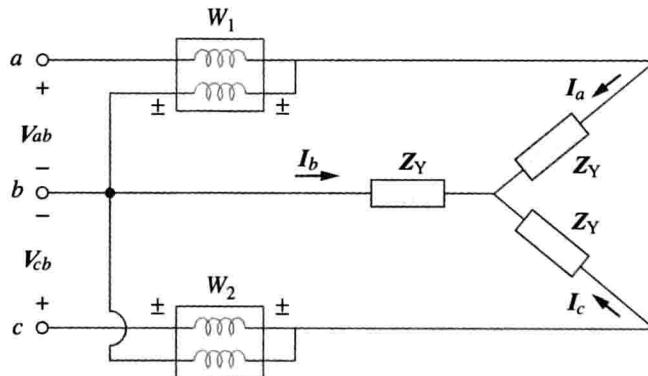


图 12-35 二表功率测量法用于对称 Y 形联结负载

同理, 可以证明功率表平均功率的读数为:

$$P_2 = \operatorname{Re}[\mathbf{V}_{cb} \mathbf{I}_c^*] = V_{cb} I_c \cos(\theta - 30^\circ) = V_L I_L \cos(\theta - 30^\circ) \quad (12.64)$$

下面利用如下三角恒等式:

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \quad (12.65)$$

确定式(12.63)与式(12.64)中两个功率表读数的和与差:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30^\circ) + \cos(\theta - 30^\circ)] \\
 &= V_L I_L (\cos\theta\cos30^\circ - \sin\theta\sin30^\circ + \cos\theta\cos30^\circ + \sin\theta\sin30^\circ) \\
 &= V_L I_L 2\cos30^\circ\cos\theta = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta
 \end{aligned} \tag{12.66}$$

其中, $2\cos30^\circ = \sqrt{3}$, 比较式(12.66)与式(12.50)表明, 功率表读数之和即为总的平均功率:

$$P_T = P_1 + P_2 \tag{12.67}$$

同理:

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30^\circ) - \cos(\theta - 30^\circ)] \\
 &= V_L I_L (\cos\theta\cos30^\circ - \sin\theta\sin30^\circ - \cos\theta\cos30^\circ - \sin\theta\sin30^\circ) \\
 &= -V_L I_L 2\sin30^\circ\sin\theta \\
 P_2 - P_1 &= V_L I_L \sin\theta
 \end{aligned} \tag{12.68}$$

其中, $2\sin30^\circ = 1$ 。比较式(12.68)与式(12.51)表明, 两个功率表读数之差正比于总的无功功率, 即:

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) \tag{12.69}$$

由式(12.67)与式(12.69), 可得总的视在功率为:

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} \tag{12.70}$$

用式(12.69)除以式(12.67)即得到功率因数角的正切值:

$$\tan\theta = \frac{Q_T}{P_T} = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \tag{12.71}$$

由此, 可以求得功率因数为 $\text{pf} = \cos\theta$ 。综上所述, 两表法不仅可以测量总的有功功率与无功功率, 还可以用于计算功率因数。由式(12.67)、式(12.69)与式(12.71)可得如下结论:

1. 如果 $P_2 = P_1$, 则负载为电阻性的。
2. 如果 $P_2 > P_1$, 则负载为电感性的。
3. 如果 $P_2 < P_1$, 则负载为电容性的。

虽然上述结果是利用对称Y形联结负载推导出来的, 但是对于对称△形联结负载同样是有有效的。然而, 两表功率测量法不适用于中性线电流非零的三相四线系统。通常采用三表功率测量法测量三相四线系统的有功功率。

例 12-13 三个功率表 W_1 、 W_2 、 W_3 分别与 a 、 b 、 c 三相连接, 用于测量例 12-9(见图 12-33)中非对称 Y 形联结负载吸收的总功率。(a) 预测功率表的读数; (b) 求负载吸收的总功率。

解: 本题的一部分已在例 12-9 中解决了。假设功率表按照图 12-36 所示方式连接。

(a) 由例 12-9 可知:

$$\begin{aligned}
 V_{AN} &= 100 \angle 0^\circ, \quad V_{BN} = 100 \angle 120^\circ \\
 V_{CN} &= 100 \angle -120^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

且

$$I_a = 6.67 \angle 0^\circ \text{ A}, \quad I_b = 8.94 \angle 93.44^\circ \text{ A}, \quad I_c = 10 \angle -66.87^\circ \text{ A}$$

功率表读数可计算如下:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \text{Re}[V_{AN} I_a^*] = V_{AN} I_a \cos(\theta_{V_{AN}} - \theta_{I_a}) \\
 &= 100 \times 6.67 \cos(0^\circ - 0^\circ) = 667 \text{ (W)}
 \end{aligned}$$

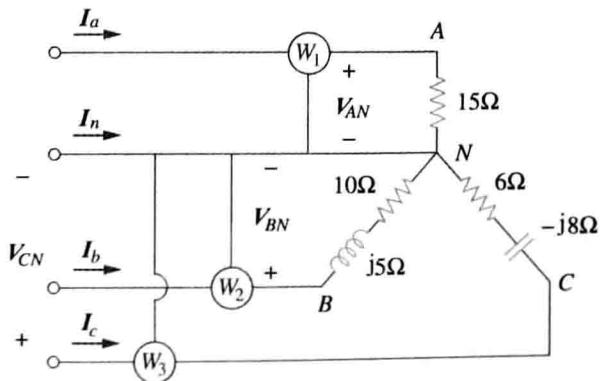


图 12-36 例 12-13 图

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \operatorname{Re}[\mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}_b^*] = V_{BN}I_b \cos(\theta_{V_{BN}} - \theta_{I_b}) \\
 &= 100 \times 8.94 \cos(120^\circ - 93.44^\circ) = 800(\text{W}) \\
 P_3 &= \operatorname{Re}[\mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}_c^*] = V_{CN}I_c \cos(\theta_{V_{CN}} - \theta_{I_c}) \\
 &= 100 \times 10 \cos(-120^\circ + 66.87^\circ) = 600(\text{W})
 \end{aligned}$$

(b) 负载吸收的总功率为：

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 667 + 800 + 600 = 2067(\text{W})$$

求出图 12-36 所示各电阻器吸收的功率，即可验证上述结果的正确性。

$$\begin{aligned}
 P_T &= |I_a|^2 \times 15 + |I_b|^2 \times 10 + |I_c|^2 \times 6 \\
 &= 6.67^2 \times 15 + 8.94^2 \times 10 + 10^2 \times 6 = 667 + 800 + 600 = 2067(\text{W})
 \end{aligned}$$

结果与上式相同。 ◀

练习 12-13 对于图 12-24 所示网络（见练习 12-9）重做例 12-13。提示：将图 12-33 中的参考点 o 连接到点 B。 答案：(a) 13.175kW, 0W, 29.91kW; (b) 43.08kW

例 12-14 利用两表法测量△形联结负载的功率时，功率表的读数为 $P_1 = 1560\text{W}$, $P_2 = 2100\text{W}$ ，如果线电压为 220V，计算：(a) 每相的平均功率；(b) 每相的无功功率；(c) 功率因数；(d) 相阻抗。

解：将已知结果应用于△形联结负载上。

(a) 总的有功功率，即总的平均功率为：

$$P_T = P_1 + P_2 = 1560 + 2100 = 3660(\text{W})$$

于是，每相的平均功率为：

$$P_p = \frac{1}{3}P_T = 1220(\text{W})$$

(b) 总的无功功率为：

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3}(2100 - 1560) = 935.3(\text{var})$$

于是，每相的无功功率为：

$$Q_p = \frac{1}{3}Q_T = 311.77(\text{var})$$

(c) 功率角为：

$$\theta = \arctan \frac{Q_T}{P_T} = \arctan \frac{935.3}{3660} = 14.33^\circ$$

因此，功率因数为：

$$\cos\theta = 0.9689(\text{滞后})$$

由于 Q_T 为正，即 $P_2 > P_1$ ，所以功率因数是滞后的。

(d) 相阻抗为 $Z_p = Z_p / \theta$ ，其中 θ 就是功率因数角，即 $\theta = 14.33^\circ$ ，所以：

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p}$$

对于△形联结负载而言， $V_p = V_L = 220\text{V}$ ，则由式(12.46)可得：

$$P_p = V_p I_p \cos\theta \Rightarrow I_p = \frac{1220}{220 \times 0.9689} = 5.723(\text{A})$$

因此：

$$Z_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{220}{5.723} = 38.44(\Omega)$$

且

$$Z_p = 38.44 / 14.33^\circ \Omega$$

练习 12-14 假设图 12-35 所示对称系统中，线电压为 $V_L = 208\text{V}$ ，功率表读数为

$P_1 = -560\text{W}$, $P_2 = 800\text{W}$, 试确定: (a) 总平均功率; (b) 总无功功率; (c) 功率因数; (d) 相阻抗, 并说明该阻抗是电感性的还是电容性的。

答案: (a) 240W ; (b) 2.356kvar ; (c) 0.1014 ; (d) $18.25 \angle 84.18^\circ \Omega$, 电感性

例 12-15 图 12-35 所示的三相平衡负载, 其每相的阻抗为 $Z_Y = (8 + j6)\Omega$, 如果将该负载连接到 208V 电源上, 试预测功率表 W_1 与 W_2 的读数, 并求 P_T 与 Q_T 。

解: 每相的阻抗为:

$$Z_Y = 8 + j6 = 10 \angle 36.87^\circ (\Omega)$$

所以, pf 角为 36.87° 。又因线电压为 $V_L = 208\text{V}$, 于是线电流为:

$$I_L = \frac{V_p}{|Z_Y|} = \frac{208/\sqrt{3}}{10} = 12(\text{A})$$

因此:

$$P_1 = V_L I_L \cos(\theta + 30^\circ) = 208 \times 12 \cos(36.87^\circ + 30^\circ) = 980.48(\text{W})$$

$$P_2 = V_L I_L \cos(\theta - 30^\circ) = 208 \times 12 \cos(36.87^\circ - 30^\circ) = 2478.1(\text{W})$$

即功率表 1 的读数为 980.48W ; 功率表 2 的读数为 2478.1W 。由于 $P_2 > P_1$, 负载为电感性的, 这从负载 Z_Y 本身也可以看出。于是,

$$P_T = P_1 + P_2 = 3.459(\text{kW})$$

且

$$Q_T = \sqrt{3}(P_2 - P_1) = \sqrt{3} \times 1497.6 \text{ var} = 2.594 \text{ kvar}$$

练习 12-15 如果图 12-35 中的负载为△形联结, 且每相阻抗 $Z_p = (30 - j40)\Omega$, $V_L = 440\text{V}$, 试预测功率表 W_1 与 W_2 的读数, 并计算 P_T 与 Q_T 。

答案: 6.167kW , 0.8021kW , 6.969kW , -9.292kvar

12.10.2 住宅供电线路

在美国, 绝大多数家庭照明与家用电器设备都采用 120V 、 60Hz 单相交流电(不同区域, 供电电压可能是 110V 、 115V 或 117V)。当地供电公司采用三线交流系统为住宅供电, 图 12-37 所示为一种典型的配电情况, 12000V 线电压经过变压器降至 $120\text{V}/240\text{V}$ (有关变压器的详细介绍参见下一章)。变压器输出的三路线通常用不同的颜色加以区分: 红色(相线)、黑色(相线)、白色(中性线)。如图 12-38 所示, 两个 120V 电压相位相反,

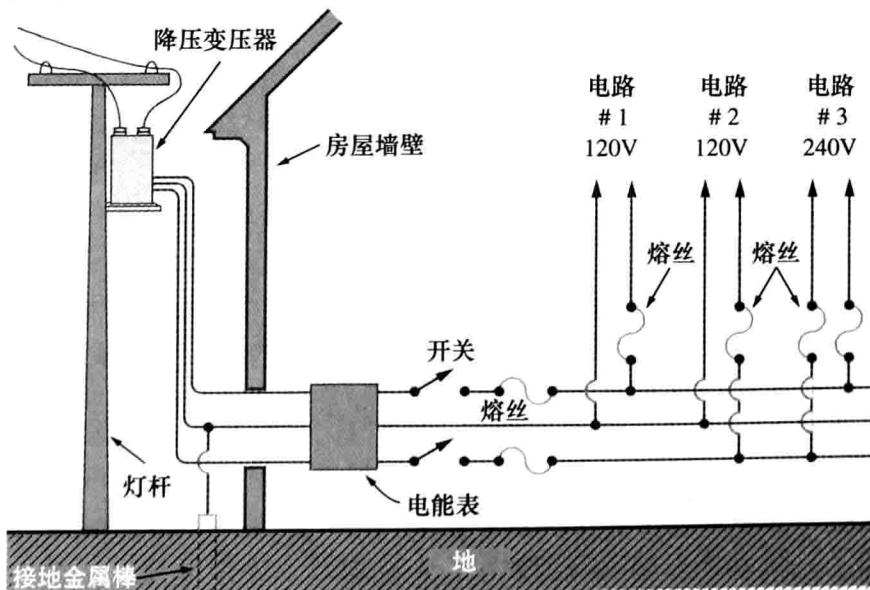


图 12-37 $120\text{V}/240\text{V}$ 民用住宅供电系统

A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd edition, © 1975, p. 324. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

相加后为零。即 $V_w = 0/0^\circ$, $V_B = 120/0^\circ$, $V_R = 120/180^\circ = -V_B$ 。

$$\mathbf{V}_{BR} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_R = \mathbf{V}_B - (-\mathbf{V}_B) = 2\mathbf{V}_B = 240 / 0^\circ \quad (12.72)$$

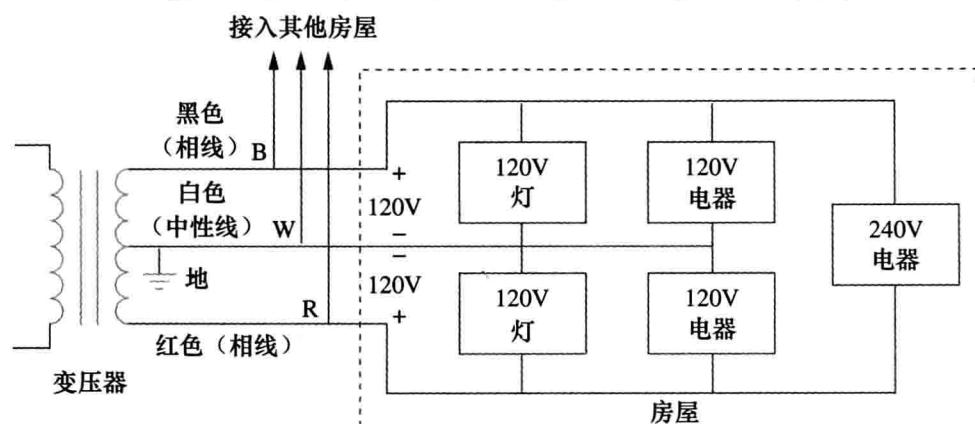


图 12-38 单相三线住宅供电线路

由于绝大多数家用电气设备的工作电压都是 120V，因此室内照明以及家用电器均与 120V 线路相连，如图 12-39 所示。由图 12-37 可见，所有的家用电器都是并联的。耗电量比较大的一些电器，如空调、洗碗机、电炉以及洗衣机等，均接至 240V 电源线上。

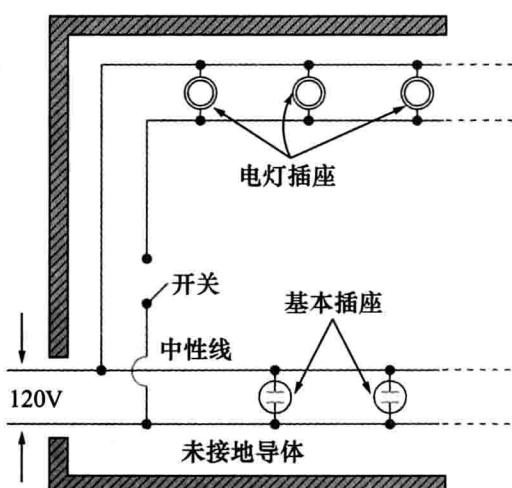


图 12-39 典型的室内供电线路图

A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd edition, © 1975, p. 325. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

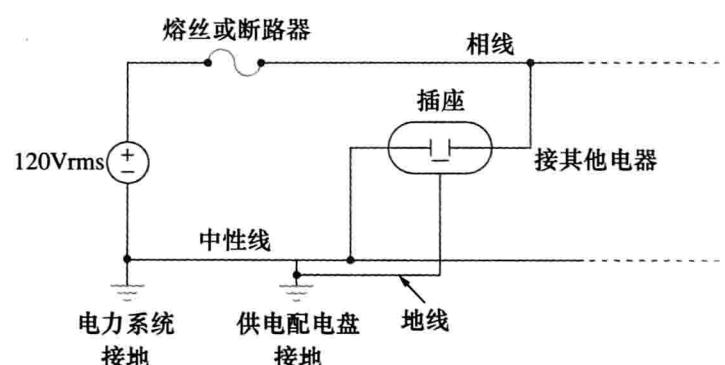


图 12-40 插座与相线和地线的连接方式

由于用电存在危险性，住宅供电线路必须严格按照当地法规以及美国国家电气规程(National Electricity Code, NEC)予以规范。为了避免事故发生，须采用隔离、接地、熔丝以及电路断路器等措施。现代线路规程要求第三路线单独接地，地线与中性线都不用于输电，但电器设备可以单独接地。图 12-40 所示为电源插座与 120V_{rms} 电源线和地线的连接情况，可见，中性线在许多关键位置均与地(大地)相连。虽然地线看起来是多余的，但是接地之所以重要的原因是多方面的：首先，接地是 NEC 规程所要求的；其次，接地为雷击放电提供了便捷通道，可以防止雷击破坏输电线路；第三，接地可以最大限度地降低电击触电的危险性。电击现象是电流从人体的某一部分流向另一部分引起的。人体呈现为一个大电阻 R ，若 V 是人体与地之间的电位差，则流过人体的电流由欧姆定律决定：

$$I = \frac{V}{R} \quad (12.73)$$

R 的值因人而异，并且与人体的干湿程度有关。电击严重程度或致命程度取决于流过

人体的电流大小、电流路径以及人体触电的时间长度。小于 1mA 的电流，应该说不会对人体造成任何危害，但大于 10mA 的电流就会导致严重的电击。在电击隐患最大的户外电路以及浴室电路中，通常采用现代安全设备——接地故障电路断路器（Ground-Fault Circuit Interrupter, GFCI）。它实际上就是一个电路断路器，当流过红、白、黑线的电流之和不为零，即 $i_R + i_W + i_B \neq 0$ 时，断路器就会打开从而使电路断开。

避免电击的最好办法是遵守与电气系统和电气装置有关的安全操作规程，下面是其中的一部分：

- 千万不要假设电路是不带电的，一定要检查并确认。
 - 必要时应使用安全器具，着适当服装(绝缘靴、绝缘手套等)。
 - 切勿使用双手检测高压电路，因为从一只手流到另一只手的电流路径直接经过心脏和胸部。
 - 双手潮湿时，切勿触摸电气设备，牢记水是导电的。
 - 收音机、电视机等家用电器中均有大容量电容器，在电源关闭后，需要一段时间才能放电完毕，因此，操作此类电器设备时一定要极为谨慎。
 - 在接线或检修时，一定要有另一人在场，以防意外发生。

12.11 本章小结

- 相序是三相发动机相电压产生的时间顺序。在相序为 abc 的对称电源系统中, \mathbf{V}_{an} 超前 $\mathbf{V}_{bn} 120^\circ$, \mathbf{V}_{bn} 超前 $\mathbf{V}_{cn} 120^\circ$ 。在相序为 acb 的对称电源系统中, \mathbf{V}_{an} 超前 $\mathbf{V}_{cn} 120^\circ$, \mathbf{V}_{cn} 超前 $\mathbf{V}_{bn} 120^\circ$ 。
 - 对于对称 Y 形联结负载或对称 Δ 形联结负载而言, 其三相阻抗均是相等的。
 - 对称三相电路最简便的分析方法是将电源与负载都转换为 Y-Y 系统, 之后分析其单相等效电路。表 12-1 列出了四种可能结构的相电流与相电压、线电流与线电压的计算公式。
 - 在三相系统中, 线电流是指各传输线路中从发电机流向负载的电流, 线电压是指除中性线(如果有)以外的每一对线之间的电压。相电流是指流过三相负载每一相的电流, 而相电压则是每一相的电压。对于 Y 形联结负载:

$$V_L = \sqrt{3}V_p, \quad I_L = I_p$$

对于 \triangle 形联结负载：

$$V_L = V_p, \quad I_L = \sqrt{3} I_p$$

5. 对称三相系统的总瞬时功率是恒定的，且等于其平均功率。
 6. 对称三相 Y 形联结或△形联结负载吸收的总复功率为：

$$S = P + jQ = \sqrt{3}V_L I_L / \theta$$

其中， θ 为负载阻抗的辐角。

7. 非对称三相系统的分析可以采用节点电压法或网孔电流法。
 8. 应用 PSpice 分析三相电路的方法与分析单相电路时的方法相同。
 9. 三相系统总有功功率的测量既可以采用三表功率测量法，也可以采用两表功率测量法。
 10. 住宅输电线路采用 120V/240V 单相三线系统。

复习题

- 1 某三相电动机的 $V_{AN} = 220 \angle -100^\circ$ V, $V_{BN} = 220 \angle 140^\circ$ V, 试问其相序为:
 (a) abc (b) acb

2 如果在 acb 相序下, $V_{an} = 100 \angle -20^\circ$, 则
 3 对于对称系统, 下列条件哪个不是必需的?

- (a) $|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$
 (b) $I_a + I_b + I_c = 0$
 (c) $V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$
 (d) 电源电压彼此之间的相位差为 120°
 (e) 三相的负载阻抗是相等的
- 4 在 Y 形联结负载中, 线电流与相电流是相等的。
 (a) 正确 (b) 错误
- 5 在 Δ 形联结负载中, 线电流与相电流是相等的。
 (a) 正确 (b) 错误
- 6 Y-Y 系统中, 220V 线电压产生的相电压为:
 (a) 381V (b) 311V
 (c) 220V (d) 156V
 (e) 127V
- 7 在 $\Delta-\Delta$ 系统中, 100V 的相电压产生的线电压为:

习题

12.2 节

- 1 如果某对称 Y 形联结三相发电机的 $V_{ab} = 400V$, 试求如下两种相序的相电压: (a) abc; (b) acb。
- 2 如果某对称三相电路的 $V_{an} = 120 \angle 30^\circ V$, $V_{cn} = 120 \angle -90^\circ V$, 试问该电路的相序是什么? 并确定 V_{bn} 。
- 3 确定 $V_{bn} = 440 \angle 130^\circ V$ 和 $V_{cn} = 440 \angle 10^\circ V$ 的对称三相电路的相序并求出 V_{an} 。
- 4 某相序为 abc、 $V_L = 440V$ 的三相系统为阻抗为 $Z_L = 40 \angle 30^\circ \Omega$ 的 Y 形联结负载供电, 试求线电流。
- 5 对于某 Y 形联结的负载, 终端处三路输电线与中性线之间电压的时域表达式为:

$$v_{AN} = 120 \cos(\omega t + 32^\circ) V$$

$$v_{BN} = 120 \cos(\omega t - 88^\circ) V$$

$$v_{CN} = 120 \cos(\omega t + 152^\circ) V$$

写出线电压 v_{AB} 、 v_{BC} 以及 v_{CA} 的时域表达式。

12.3 节

- 6 利用图 12-41 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解 Y-Y 联结电路。 **ED**

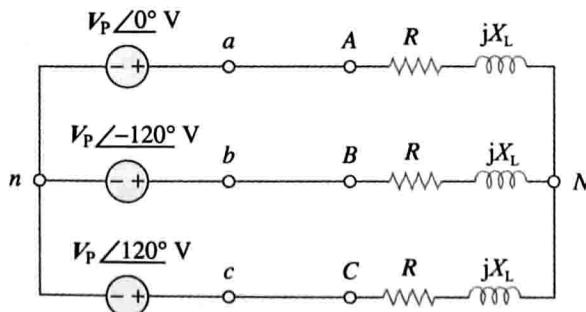


图 12-41 习题 6 图

- (a) 58V (b) 71V
 (c) 100V (d) 173V
 (e) 141V

- 8 当利用 abc 相序的电源为 Y 形联结负载供电时, 线电压较相应的相电压滞后。

- (a) 正确 (b) 错误

- 9 在对称三相电路中, 总的瞬时功率等于其平均功率。

- (a) 正确 (b) 错误

- 10 提供给对称 Δ 形联结负载的总功率的计算方法与对称 Y 形联结负载总功率的计算方法相同。

- (a) 正确 (b) 错误

答案: 1(a); 2(a); 3(c); 4(a); 5(b); 6(e); 7(c); 8(b); 9(a); 10(a)

- 7 确定图 12-42 所示三相电路的线电流。

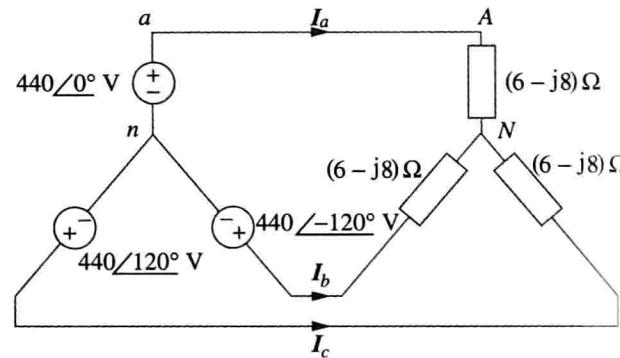


图 12-42 习题 7 图

- 8 在某对称三相 Y-Y 系统中, 电压源为 abc 相序, 且 $V_{an} = 100 \angle 20^\circ V$, 每相的线路阻抗为 $(0.6 + j1.2) \Omega$, 而负载的每相阻抗为 $(10 + j14) \Omega$ 。试计算电流与负载电压。

- 9 某对称 Y-Y 四线系统的相电压为:

$$V_{an} = 120 \angle 0^\circ, V_{bn} = 120 \angle -120^\circ$$

$$V_{cn} = 120 \angle 120^\circ V$$

每相的负载阻抗为 $(19 + j13) \Omega$, 每相的线路阻抗为 $(1 + j2) \Omega$, 试求线电流与中性线电流。

- 10 对于图 12-43 所示电路, 试确定中性线电流。

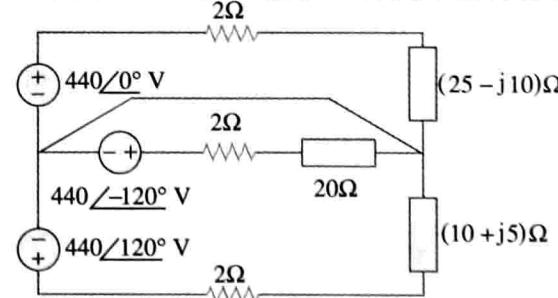


图 12-43 习题 10 图

12.4节

- 11 在图12-44所示的系统中，电源为正序， $V_{an} = 240 \angle 0^\circ$ V，且相阻抗为 $Z_p = (2 - j3) \Omega$ 。试计算线电压与线电流。

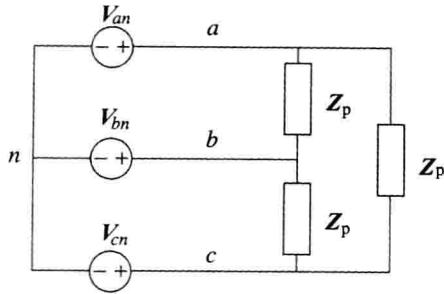


图 12-44 习题 11 图

- 12 利用图12-45所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解Y-△联结电路。**ED**

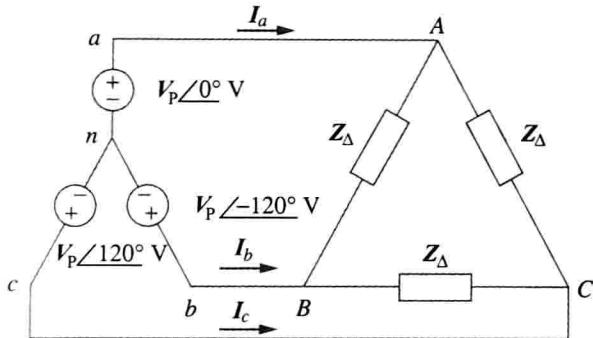


图 12-45 习题 12 图

- 13 在图12-46所示对称Y-△三相系统中，试求线电流 I_L 以及传递给负载的平均功率。**PS ML**

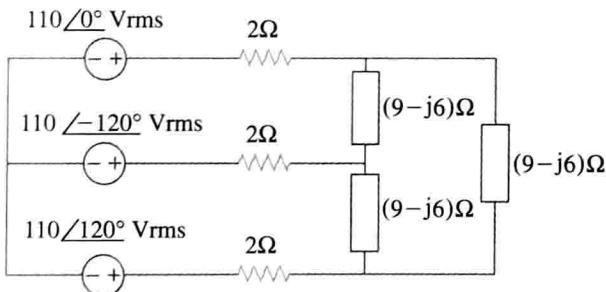


图 12-46 习题 13 图

- 14 确定图12-47所示三相电路中的线电流。**PS**

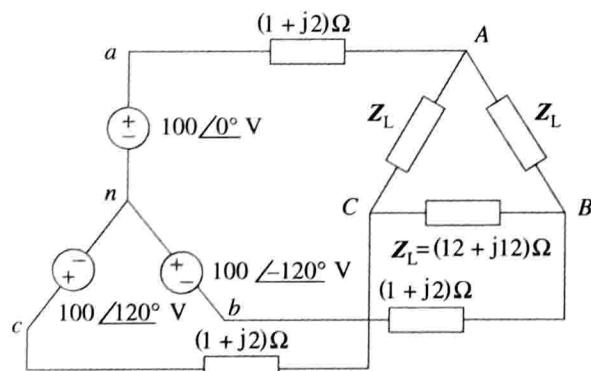


图 12-47 习题 14 图

- 15 图12-48所示电路由线电压为210V的对称三相电源激励，如果 $Z_l = (1 + j1) \Omega$, $Z_\Delta = (24 - j30) \Omega$ 且 $Z_Y = (12 + j5) \Omega$ ，试确定合并负载的线电流大小。**PS**

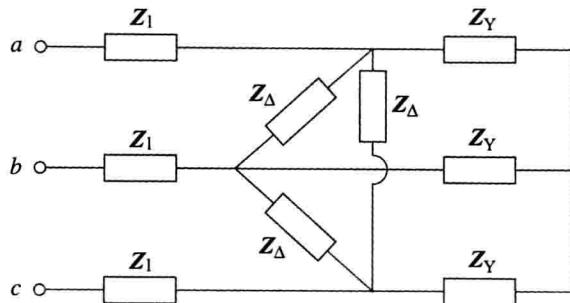


图 12-48 习题 15 图

- 16 某对称△形联结负载的相电流 $I_{AC} = 5 \angle -30^\circ$ A。
 (a)假设电路按正序工作，试确定三个线电流；(b)如果线电压 $V_{ab} = 110 \angle 0^\circ$ V，试计算负载阻抗。
 17 某对称△形联结负载的线电流 $I_a = 5 \angle -25^\circ$ A，求相电流 I_{AB} 、 I_{BC} 、 I_{CA} 。
 18 图12-49所示网络中，如果 $V_{an} = 220 \angle 60^\circ$ V，试求负载相电流 I_{AB} 、 I_{BC} 与 I_{CA} 。

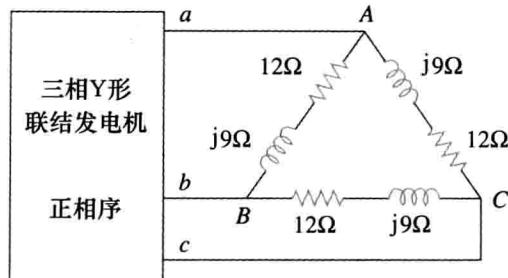


图 12-49 习题 18 图

12.5节

- 19 对于图12-50所示的△-△电路，计算相电流和线电流。

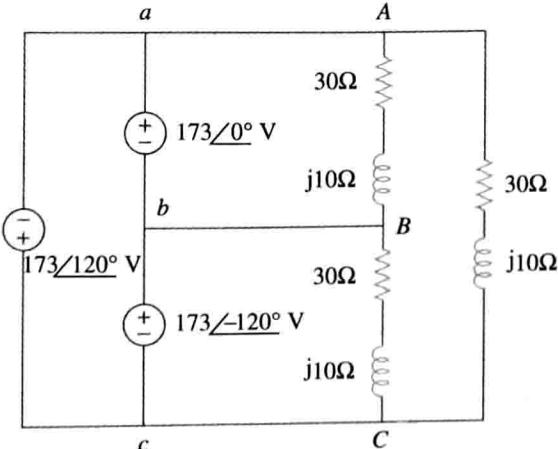


图 12-50 习题 19 图

- 20 利用图 12-51 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解 \triangle - \triangle 联结电路。 ED

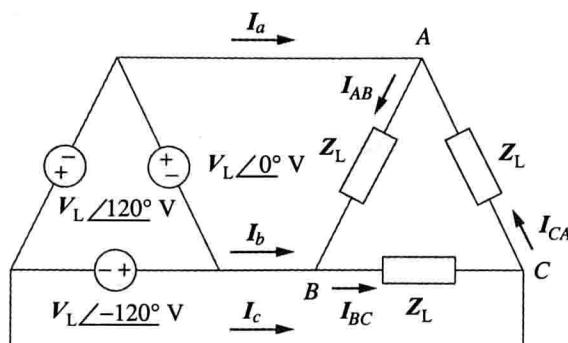


图 12-51 习题 20 图

- 21 在图 12-52 所示电路中，由 230V 发电机组成的 \triangle 形联结电源与每相阻抗为 $Z_L = (10 + j8)\Omega$ 的对称 \triangle 形联结负载相连。(a) 试确定 I_{AC} 的值；(b) I_{BB} 的值为多少？

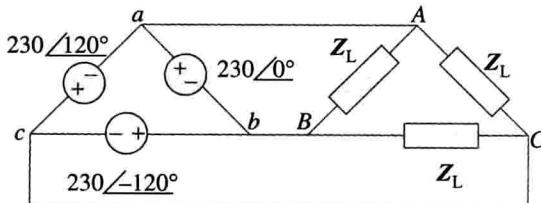


图 12-52 习题 21 图

- 22 求图 12-53 所示三相网络的线电流。假设 $Z_\Delta = (12 - j15)\Omega$, $Z_Y = (4 + j6)\Omega$, $Z_l = 2\Omega$ 。 PS

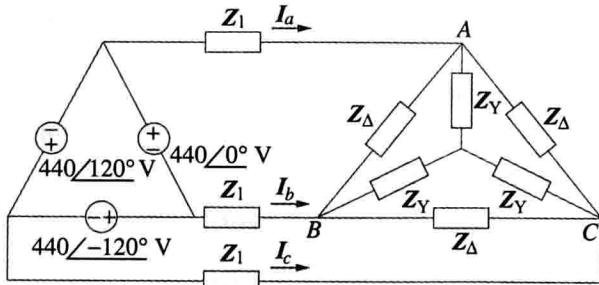


图 12-53 习题 22 图

- 23 线电压为 202Vrms 的三相对称系统为阻抗为 $Z_p = 25 \angle 60^\circ \Omega$ 的 \triangle 形联结负载供电。(a) 试求线电流；(b) 试利用与线路 A 和线路 C 相连接的两个功率表确定提供给负载的总功率。

- 24 某对称 \triangle 形联结电源的相电压 $V_{ab} = 416 \angle 30^\circ V$, 且相序为正序。如果该电源与一对称 \triangle 形联结负载相连，试求线电流与相电流。假设每相的负载阻抗为 $60 \angle 30^\circ \Omega$, 每相的线路阻抗为 $(1 + j1)\Omega$ 。

12.6 节

- 25 在图 12-54 所示电路中，如果 $V_{ab} = 440 \angle 10^\circ V$, $V_{bc} = 440 \angle -110^\circ V$, $V_{ca} = 440 \angle 130^\circ V$, 试求各线电流。 PS

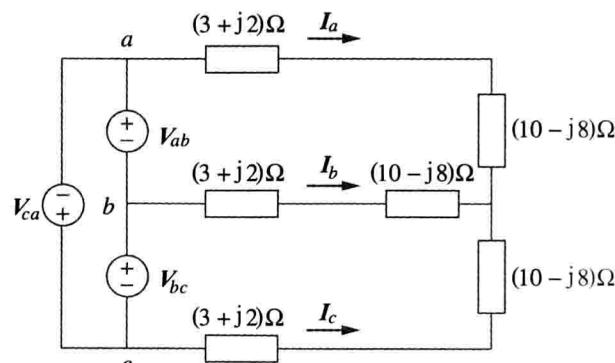


图 12-54 习题 25 图

- 26 利用图 12-55 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解对称 \triangle 形联结电源如何向对称 Y 形联结的负载供电。 ED

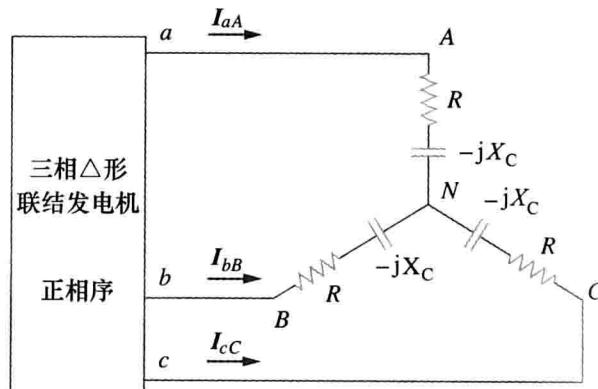


图 12-55 习题 26 图

- 27 某 \triangle 形联结电源为三相对称系统中的 Y 形联结负载供电，如果每相的线路阻抗为 $(2 + j1)\Omega$ ，每相的负载阻抗为 $(6 + j4)\Omega$ 。试求负载线电压的大小。假设电源相电压为 $V_{ab} = 208 \angle 0^\circ V_{rms}$ 。 PS

- 28 某 Y 形联结负载的线电压大小为 440V，且在 60Hz 时的相序为正序。如果对称负载 $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 25 \angle 30^\circ$ ，试求所有线电流与相电压。

12.7 节

- 29 某对称三相 Y- \triangle 系统中， $V_{an} = 240 \angle 0^\circ V$, $Z_\Delta = (51 + j45)\Omega$ ，如果每相的线阻抗为 $(0.4 + j1.2)\Omega$ ，试求传递给负载的总复功率。 PS

- 30 在图 12-56 所示电路中，线电压的 rms 值为 208V，试求传递给负载的平均功率。

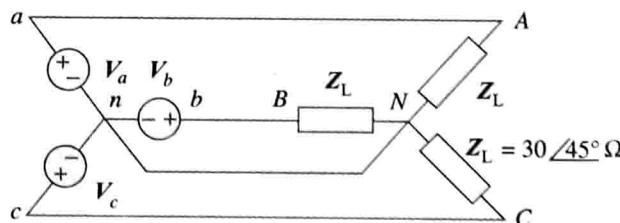


图 12-56 习题 30 图

- 31 线电压为 240V 的 60Hz 三相电源给某对称 \triangle 形

联结负载供电，各相负载在功率因数为 0.8(滞后)时提取的功率为 6kW。试求：(a)每相的负载阻抗；(b)线电流；(c)使得从电源获得的电流最小所需的与各相负载相并联的电容值。

- 32 设计一个问题帮助其他同学更好地理解对称三相系统中的功率。 **ED**
- 33 某三相电源传递给相电压为 208V、功率因数为 0.9(滞后)的某 Y 形联结负载的功率为 4800V·A。试计算电源的线电流与线电压。
- 34 某相阻抗为 $(10-j16)\Omega$ 的对称 Y 形联结负载与线电压为 220V 的对称三相发电机相连接，试确定线电流与负载吸收的复功率。
- 35 三个 $(60+j30)\Omega$ 阻抗组成△形联结负载，与 230Vrms 三相电路相连接。另外三个 $(40+j10)\Omega$ 阻抗组成 Y 形联结负载，并与相同的三相电路相连接。试确定：(a)线电流；(b)提供给两个负载的总复功率；(c)发端电压。 **PS**
- 36 某 4200V 三相输电线的各相负载为 $(4+j)\Omega$ ，如果在功率因数为 0.75 滞后时提供给负载的功率为 1MVA，式求：(a)复功率；(b)线路的功率损耗；(c)发送端电压。
- 37 为某 Y 形联结负载供电的三相系统在功率因数为 0.6(超前)时测得的总功率为 12kW，如果线电压为 208V，试计算线电流 I_L 与负载阻抗 Z_Y 。
- 38 已知图 12-57 所示电路，试求负载吸收的总复功率。 **PS**

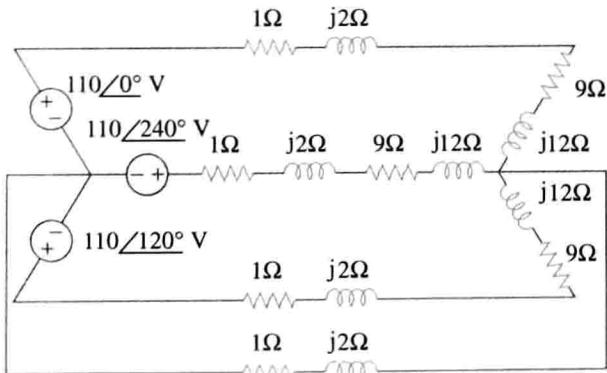


图 12-57 习题 38 图

- 39 试求图 12-58 所示电路中负载吸收的有功功率。 **PS**

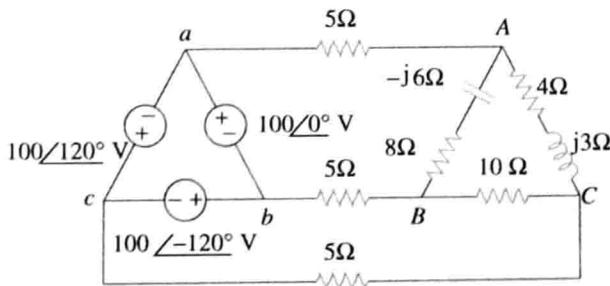


图 12-58 习题 39 图

- 40 对图 12-59 所示的三相电路，试求的△形联结负载吸收的平均功率。其中， $Z_\Delta = (21+j24)\Omega$ 。 **PS**

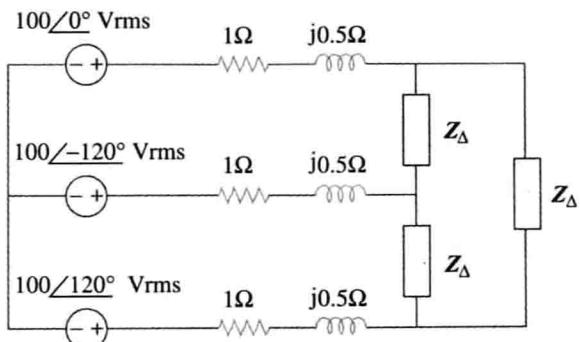


图 12-59 习题 40 图

- 41 某对称△形联结负载在功率因数为 0.8(滞后)时，从电源提取的功率为 5kW。如果三相系统的线电压有效值为 400V，试求线电流。
- 42 某对称三相发电机传递给各相阻抗为 $(30-j40)\Omega$ 的 Y 形联结负载的功率为 7.2kW，试求线电流与线电压。
- 43 在图 12-48 所示电路中，试确定合并负载吸收的复功率。 **PS**
- 44 某三相输电线路的每相阻抗为 $(1+j3)\Omega$ ，该输电线给对称△形联结负载供电。负载吸收的总复功率为 $(12+j5)kV \cdot A$ ，如果负载端的线电压大小为 240V，试计算电源端的线电压大小与电源的功率因数。 **PS**
- 45 某对称 Y 形联结负载通过每相阻抗为 $(0.5+j2)\Omega$ 的对称输电线与发电机相连。如果负载额定值为 450kW，功率因数 0.708(滞后)，线电压 440V，试求发电机的线电压。
- 46 某三相负载由三个 100Ω 电阻器构成，既可以联结为 Y 形，又可以联结为△形。试确定三相电源线电压为 110V 时，哪一种联结从电源吸收的平均功率最大。假设输电线路阻抗为零。
- 47 如下三个相互并联的三相负载由对称三相电源供电：
- 负载 1： $250kV \cdot A$, $\text{pf}=0.8$ (滞后)
- 负载 2： $300kV \cdot A$, $\text{pf}=0.95$ (超前)
- 负载 3： $450kV \cdot A$, $\text{pf}=1$
- 如果线电压为 13.8kV，试计算线电流与电源的功率因数。假设输电线路阻抗为零。
- 48 某对称正序 Y 形联结电源的 $V_{an} = 240 \angle 0^\circ V$ ，并且通过各相阻抗为 $(2+j3)\Omega$ 的输电线路给非对称△形联结负载供电。(a) 试计算线电流，假设 $Z_{AB} = (40+j15)\Omega$, $Z_{BC} = 60\Omega$, $Z_{CA} = (18-j12)\Omega$ ；(b) 试求电源提供的复功率。 **PS**

- 49 各相阻抗由 20Ω 电阻器与 10Ω 感性电抗组成，如果线电压为 220Vrms ，试计算如下两种情况下负载吸收的平均功率：(a)三相负载为 Δ 形联结；(b)三相负载为 Y 形联结。

- 50 某 $V_L = 240\text{Vrms}$ 的对称三相电源，在功率因数为 0.6(滞后)时为两个 Y 形联结并联负载提供的功率为 $8\text{kV}\cdot\text{A}$ ，如果其中一个负载在功率因数为 1 时吸收的功率为 3kW ，试计算第二个负载的各相阻抗。

12.8 节

- 51 考虑如图 12-60 所示系统，如果 $Z_1 = (8 + j6)\Omega$, $Z_2 = (4.2 - j2.2)\Omega$, $Z_3 = (10 + j0)\Omega$ 。(a) 试求相电流 I_{AB} 、 I_{BC} 和 I_{CA} ；(b) 试计算线电流 I_{aA} 、 I_{bB} 和 I_{cC} 。

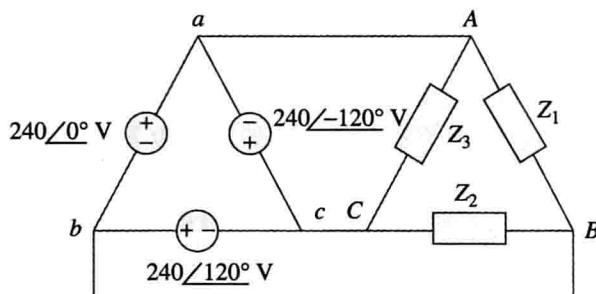


图 12-60 习题 51 图

- 52 某四线 $Y-Y$ 电路中， $V_{an} = 120\angle120^\circ$ V, $V_{bn} = 120\angle0^\circ$ V, $V_{cn} = 120\angle-120^\circ$ V。如果阻抗为： $Z_{AN} = 20\angle60^\circ \Omega$, $Z_{BN} = 30\angle0^\circ \Omega$, $Z_{CN} = 40\angle30^\circ \Omega$ 试求中性线电流。

- 53 利用图 12-61 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解非对称三相系统。 ED

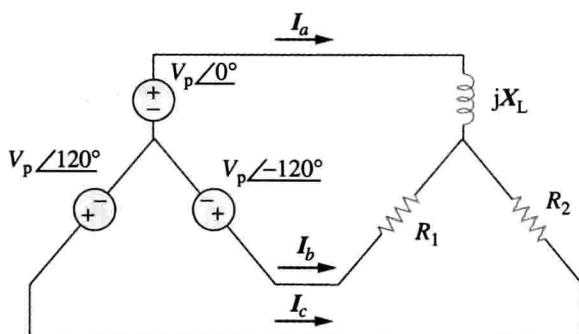


图 12-61 习题 53 图

- 54 某 $V_p = 210\text{Vrms}$ 的对称三相 Y 形联结电源三相阻抗为 $Z_A = 80\Omega$ 、 $Z_B = (60 + j90)\Omega$ 、 $Z_C = j80\Omega$ 的 Y 形联结三相负载供电，试计算线电流以及传递给负载的复功率。假设电路中连接有中性线。

- 55 线电压为 240Vrms 的正序三相电源驱动图 12-62 所示的非对称负载，试求相电流与总复功率。

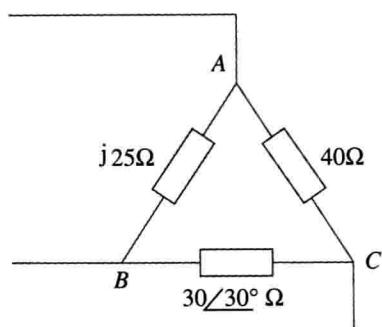


图 12-62 习题 55 图

- 56 利用图 12-63 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解非对称三相系统。 ED

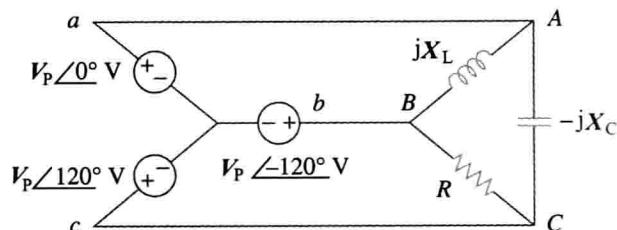


图 12-63 习题 56 图

- 57 试确定图 12-64 所示的三相电路的线电流。假设 $V_a = 110\angle0^\circ$ V, $V_b = 110\angle-120^\circ$ V, $V_c = 110\angle120^\circ$ V。

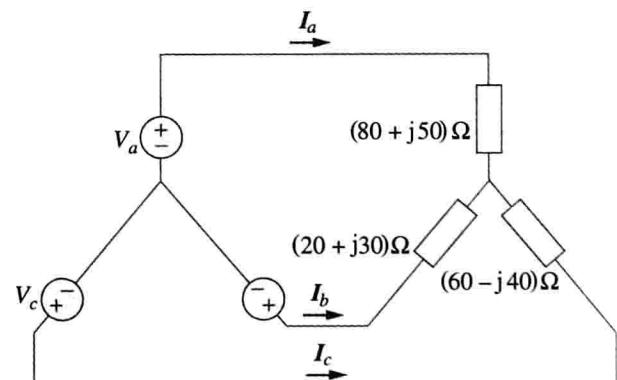


图 12-64 习题 57 图

12.9 节

- 58 利用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 10。
- 59 图 12-65 所示电源为对称正序三相电源，如果 $f = 60\text{Hz}$ ，试利用 PSpice 或 MultiSim 求解 V_{AN} 、 V_{BN} 和 V_{CN} 。

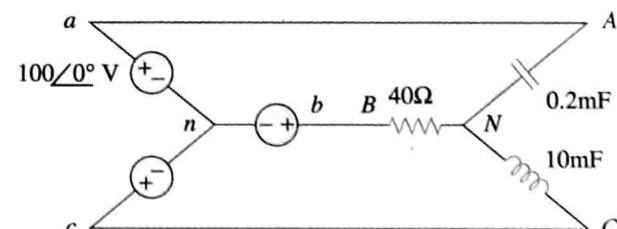


图 12-65 习题 59 图

- 60 利用 PSpice 或者 MultiSim 来确定图 12-66 所示单向三线电流中的 I_o ，假设 $Z_1 = (15 - j10)\Omega$, $Z_2 = (30 + j20)\Omega$, $Z_3 = (12 + j5)\Omega$ 。

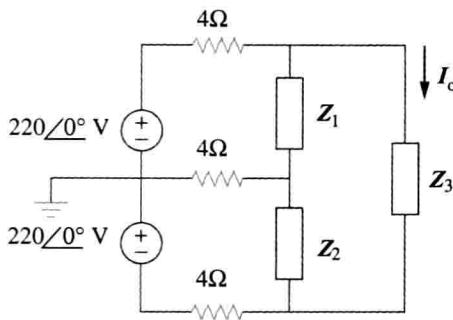


图 12-66 习题 60 图

- 61 已知图 12-67 所示电路，试利用 PSpice 或 MultiSim 确定电流 I_{aA} 与电压 V_{BN} 。

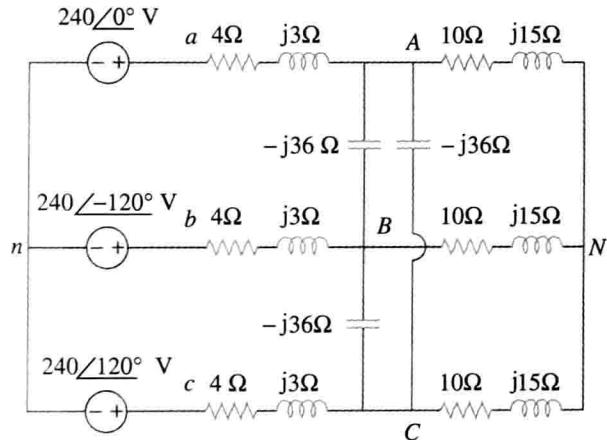


图 12-67 习题 61 图

- 62 利用图 12-68 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何运用 PSpice 或 MultiSim 仿真三相电路。 **ED**

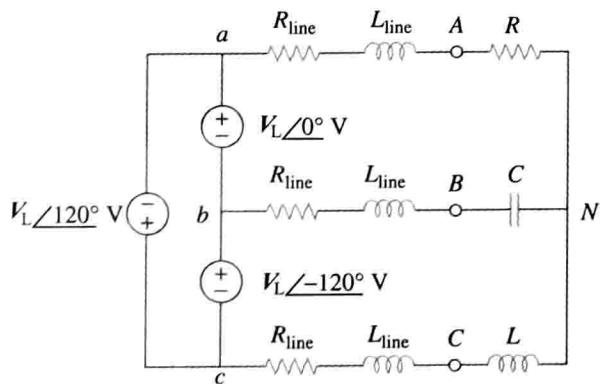


图 12-68 习题 62 图

- 63 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 12-69 所示对称三相系统中的电流 I_{aA} 与 I_{AC} ，假设 $Z_1 = (2 + j) \Omega$, $Z_1 = (40 + j20) \Omega$, $Z_2 = (50 - j30) \Omega$, $Z_3 = 25\Omega$ 。

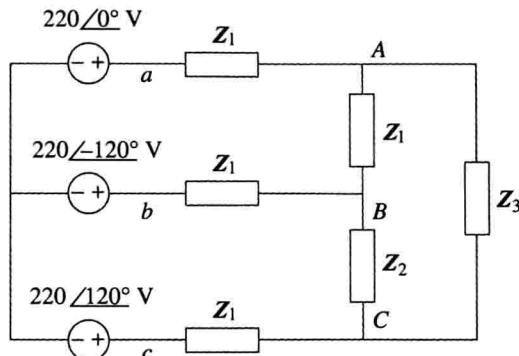


图 12-69 习题 63 图

- 64 对图 12-58 所示电路，试利用 PSpice 或 MultiSim 求解线电流与相电流。

- 65 某对称三相电路如图 12-70 所示，试利用 PSpice 或 MultiSim 求解线电流 I_{aA} 、 I_{bB} 与 I_{cC} 。

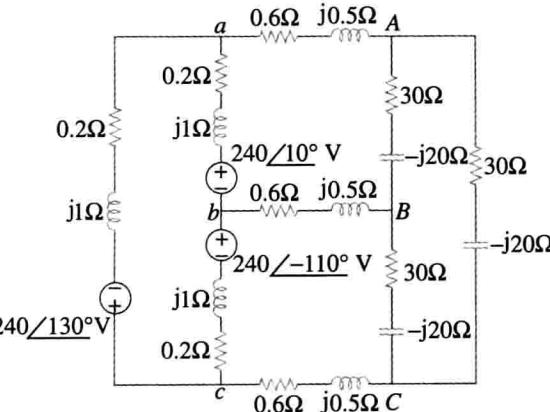


图 12-70 习题 65 图

12.10 节

- 66 图 12-71 所示的三相四线系统的线电压为 208V，电源电压是对称的，利用三表法测量 Y 形联结电阻性负载吸收的功率。试计算：
 (a) 中性线电压；(b) 电流 I_1 、 I_2 、 I_3 与 I_n ；
 (c) 三个功率表的读数；(d) 负载吸收的总功率。

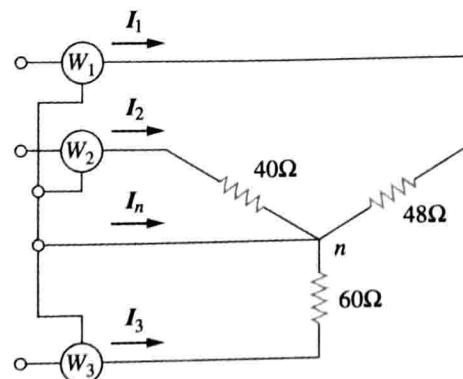


图 12-71 习题 66 图

- * 67 如图 12-72 所示，相电压为 120Vrms 的正序

三相四线输电线给对称电动机负载供电，在功率因数为 0.85(滞后)时，负载功率为 $260\text{kV}\cdot\text{A}$ ，电动机负载与三路主线 a 、 b 、 c 相连接，另外，白炽灯负载($\text{pf}=1$)的连接方式为：24kW 白炽灯连接在线路 a 与中性线之间，15kW 白炽灯连接在线路 b 与中性线之间；9kW 白炽灯连接在线路 c 与中性线之间。

ED

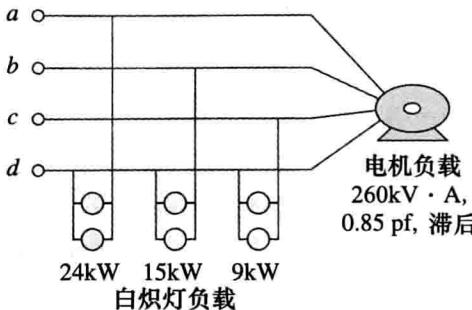


图 12-72 习题 67 图

(a)如果利用三个功率表测量每路输电线的功率，试计算各功率表的读数；(b)求中性线电流的大小。

- 68 给某电动机供电的三相 Y 形联结交流发电机的电表读数表明，线电压为 330V，线电流为 8.4A，总的线功率为 4.5kW，试求：(a)单位为的 $\text{V}\cdot\text{A}$ 负载功率；(b)负载的功率因数；(c)相电流；(d)相电压。
- 69 商店有三个对称三相负载，这三个负载分别为：
负载 1 功率因数为 0.85(滞后)时为 $16\text{kV}\cdot\text{A}$
负载 2 功率因数为 0.6(滞后)时为 $12\text{kV}\cdot\text{A}$
负载 3 功率因数为 1 时为 8kW
负载线电压在 60Hz 时为 $208\text{VR}_{\text{rms}}$ ，线阻抗为 $(0.4+j0.8)\Omega$ 。确定线电流与传递给负载的复功率。
- 70 两表法测得三相电动机在 240V 输电线路下的 $P_1=1200\text{W}$, $P_2=-400\text{W}$ 。假设电动机负载为 Y 形联结，提取的线电流为 6A，试计算电动机的功率因数及其相阻抗。
- 71 在图 12-73 所示电路中，两个功率表与非对称负载相连接，使得正序供电对称电源的 $V_{ab}=208\angle0^\circ\text{V}$ 。(a)试确定每个功率表的读数；(b)计算负载吸收的总视在功率。

综合理解题

- 77 某三相发电机在功率因数为 0.85(滞后)时，提供的功率为 $3.6\text{kV}\cdot\text{A}$ ，如果传递给负载的功率为 2500W，并且每相的线路损耗为 80W，试问发电机的内部损耗为多少？
- 78 某 Y 形联结的三相 440V 、 51kW 、 $60\text{kV}\cdot\text{A}$

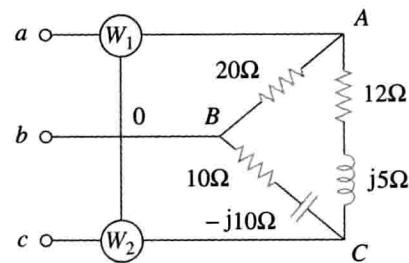


图 12-73 习题 71 图

- 72 如果功率表 W_1 与 W_2 按两表法分别接到图 12-44 的线路 a 与线路 b 以及线路 b 与线路 c 线之间，以测量 \triangle 形联结负载吸收的功率。试预测两个功率表读数。
- 73 对于图 12-74 所示电路，求图中功率表的读数。

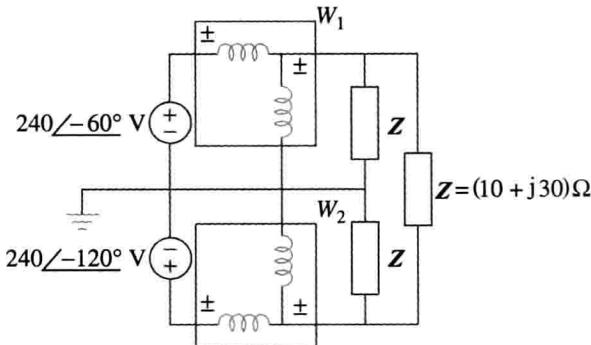


图 12-74 习题 73 图

- 74 预测图 12-75 所示电路中功率表的读数。

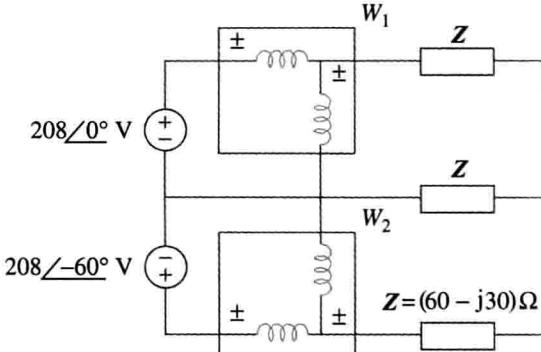


图 12-75 习题 74 图

- 75 某人的身体电阻为 600Ω ，问在如下两种情况下，流过其未接地身体的电流为多少？(a)当他接触 12V 电池的两极时；(b)当他的手指插入 120V 照明插座时。
- 76 试证明在相同额定功率条件下， 120V 电器的功率损耗高于 240V 电器的损耗。

ED

电感性负载工作频率为 60Hz ，现欲将其功率因数提高到 0.95(滞后)，试问与各负载阻抗相并联的电容器容值为多少？

- 79 某对称三相发电机的相序为 abc ，相电压为 $\text{V}_{an}=255\angle0^\circ\text{V}$ ，利用该发电机给一个各相

阻抗为 $(12+j5)\Omega$ 的Y形联结感应电动机供电。试求线电流与负载电压。假设每相的线路阻抗为 2Ω 。

- 80 某对称三相电源为如下三个负载提供功率：
 负载1 功率因数为0.83(滞后)时为 $6\text{kV}\cdot\text{A}$
 负载2 未知
 负载3 功率因数为0.7071(超前)时为 8kW
 如果线电流为84.6 Arms, 负载的线电压为 208VRms , 合并负载的功率因数为0.8(滞后)。试确定未知负载。
- 81 某职业中心由对称三相电源供电, 该中心有如下四个对称三相负载：
 负载1 功率因数为0.8(超前)时为 $150\text{kV}\cdot\text{A}$
 负载2 功率因数为1时为 100kW
 负载3 功率因数为0.6(滞后)时为 $200\text{kV}\cdot\text{A}$
 负载4 80kW 与 95kvar (电感性)
 如果每相的线阻抗为 $(0.02+j0.05)\Omega$, 负载端的线电压为 480V , 试求电源端的线电压。
- 82 某对称三相系统采用各相阻抗为 $(2+j6)\Omega$ 的相负载供电, 其中第一个负载为对称Y形联结负载, 在功率因数为0.8(滞后)时吸收的功率为 $400\text{kV}\cdot\text{A}$, 第二个负载为各相阻抗等于 $(10+j8)\Omega$ 的对称△形联结负载。如果负载端的线电压幅度为 2400VRms , 试计算电源端的线电压幅度以及提供给两个负载的总复功率。
- 83 某商用三相感应电动机以满载120马力(1马力=735W)运行, 在滞后功率因数为0.707时的工作效率为95%。该电动机在功率因数为1时与一个 80kW 对称三相加热器相并联, 如果线电压幅度为 480VRms , 试计算线电流。
- 84 图12-76所示为与 440V 线电压相连的一个三相△形联结电动机负载, 在功率因数为72%(滞后)时提取的功率为 $4\text{kV}\cdot\text{A}$ 。另外, 一个 1.8kvar 电容器接在线路a与线路b之间, 一个 800W 照明负载接在线路c与中性线之间。假设相序为abc, $\mathbf{V}_{an}=\mathbf{V}_p \angle 0^\circ$, 求 \mathbf{I}_a 、 \mathbf{I}_b 、 \mathbf{I}_c 与 \mathbf{I}_n 。

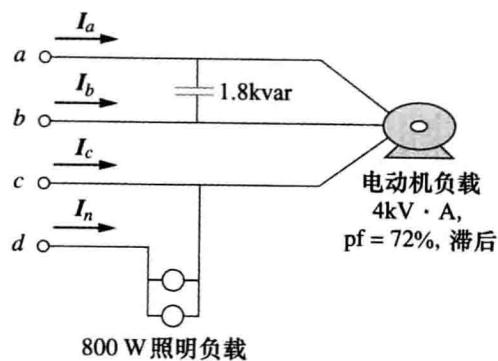


图12-76 习题84图

- 85 试利用Y形联结纯电阻设计一个具有对称负载的三相加热器, 假设该加热器的供电线电压为 240V , 输出的热功率为 27kW 。
ED
- 86 对于图12-77所示的单相三线系统, 试求 \mathbf{I}_{aA} 、 \mathbf{I}_{bb} 与 \mathbf{I}_{nN} 。

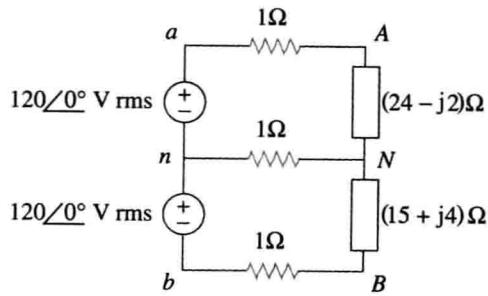


图12-77 习题86图

- 87 对于图12-78所示的单相三线系统, 试求中性线电流与各电压源提供的复功率, 假设电压源为 $\mathbf{V}_s = 115 \angle 0^\circ \text{V}$, $f=60\text{Hz}$ 。

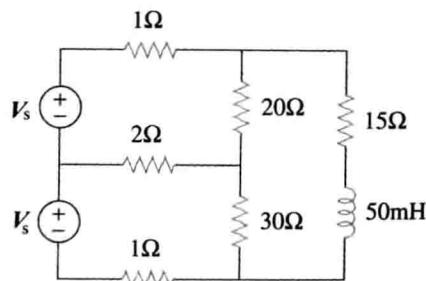


图12-78 习题87图

第13章

磁耦合电路

如果你想快乐长寿，就请宽恕邻居的无心之错、忘记朋友的怪癖，只记住他们令你欣慰的闪光之处；抹去昨天发生的一切不快，在今天的崭新篇章上写下快乐与幸福。

——佚名

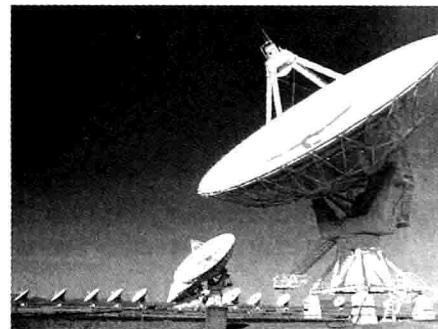
拓展事业

电磁学领域的职业生涯

电磁学是电子工程(物理学)的一个分支学科，主要研究电磁场理论及其应用。在电磁学中，电子电路分析方法适用于低频范围。

电磁学(EM)原理在许多相关学科中应用广泛，例如电子机械、机电能量转换、雷达气象、遥感、卫星通信、生物电磁学、电磁干扰与电磁兼容、等离子体以及光纤等。EM设备包括电动机、发电机、变压器、电磁铁、磁悬浮、天线、雷达、微波炉、微波清洗机、超导体和心电记录仪等。要完成这些设备的设计就必须完全掌握电磁学定律与电磁学原理的相关知识。

电磁学被认为是电子工程领域中较难的学科，原因之一在于电磁现象相当抽象。但是，如果你对数学感兴趣并且能将看不见的电磁现象可视化，就应该考虑成为一个电磁学专家，因为该领域的电子工程师也是非常少的。在微波工业、广播/电视发射站、电磁研究实验室以及很多通信行业都需要电磁学领域的电子工程师。



空间卫星遥测接收站
©DV169/Getty Images

历史珍闻

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)，剑桥大学数学专业毕业。1865年他发表了生平最有影响的论文，从数学上统一了法拉第定律与安培定律，由此所确立的电场与电磁之间的关系成为电子工程中的一个重要研究领域——电磁场与电磁波——的理论基础。美国电气与电子工程师协会(IEEE)将该原理的图形表示◆作为徽标，其中直线箭头代表电流，曲线箭头代表电磁场。该关系正是大家熟知的右手定则。麦克斯韦是一位非常活跃的理论家、科学家，因“麦克斯韦方程”而闻名于世，磁通量的单位“麦克斯韦”就是以他的名字命名的。



©Bettmann/Corbis

13.1 引言

前面章节介绍的电路可以看做是传导耦合(conductively coupled)的，因为一个回路通过电流的传导而影响其相邻回路。当两个相互接触或者不接触的回路之间通过其中一个回

路所产生的磁场而相互影响时，则称为磁耦合(magnetically coupled)。

变压器就是基于磁耦合概念设计出来的一种电子设备，即利用磁耦合绕组将能量从一个电路转换到另一个电路。变压器是电子电路中的关键电路元件，在电力系统中，利用变压器实现交流电压或交流电流的升高或降低。在无线电广播与电视接收机电路中，利用变压器实现阻抗匹配，将电路的两部分相互隔离开来，同样也可实现交流电压或交流电流的升高或降低。

本章首先介绍互感的概念，从而引入确定电流耦合元件电压极性的同名端标记法则。之后基于互感的概念介绍一种重要的电路元件——变压器(transformer)，包括线性变压器、理想变压器、自耦变压器以及三相变压器等。最后，在许多重要的应用中，讨论了变压器作为隔离与匹配器件的应用，以及它们在电力配送系统中的应用。

13.2 互感

当两个电感器(或线圈)距离较近时，电流在一个线圈中引起的磁通量会对另一个线圈产生影响，从而在另一个线圈中产生感应电压，这种现象称为互感(mutual inductance)。

首先讨论一个由 N 匝线圈构成的电感，当电流 i 流过该线圈时，在其周围产生磁通量 ϕ (如图 13-1 所示)，按照法拉第定律，该线圈中的感应电压正比于线圈的匝数 N 以及磁通量 ϕ 关于时间的变化率，即：

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \quad (13.1)$$

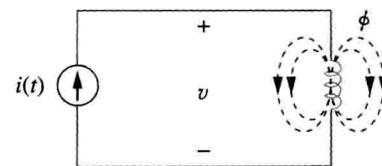


图 13-1 N 匝线圈产生的磁通量

但是，磁通量 ϕ 是由电流 i 产生的，所以磁通量的任何变化都是由电流的变化引起的，于是，式(13.1)可以写为：

$$v = N \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} \quad (13.2)$$

即

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (13.3)$$

此即电感器的电压-电流关系，由式(13.2)与式(13.3)可以得到电感器的电感值 L 为：

$$L = N \frac{d\phi}{di} \quad (13.4)$$

该电感通常称为自感(self-inductance)，因为表示的是同一线圈中时变电流与其感应电压之间的关系。

下面考虑两个彼此相邻的，自感分别为 L_1 与 L_2 的线圈(如图 13-2 所示)。线圈 1 有 N_1 匝，线圈 2 有 N_2 匝。为简单起见，假设第 2 个电感器中无电流，此时，由线圈 1 引起的磁通量 ϕ_1 由两个分量组成：一个分量 ϕ_{11} 仅与线圈 1 交链，而另一个分量 ϕ_{12} 与两个线圈交链，因此：

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} \quad (13.5)$$

虽然这两个线圈在物理上是分离的，但称为磁耦合(magnetically coupled)。因为全部磁通量 ϕ_1 与线圈 1 交链，所以线圈 1 的感应电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (13.6)$$

仅磁通量 ϕ_{12} 与线圈 2 交链，因此，线圈 2 的感应电压为：

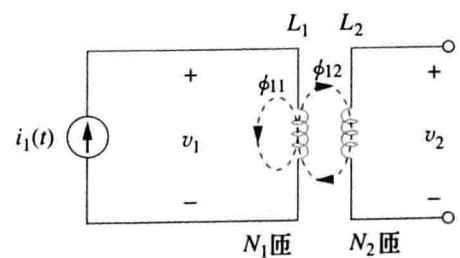


图 13-2 线圈 2 关于线圈 1 的互感量 M_{21}

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad (13.7)$$

另外，考虑到磁通量是电流 i_1 流过线圈 1 产生的，所以式(13.6)可以写成：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{di_1} \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (13.8)$$

其中， $L_1 = N_1 d\phi_1 / di_1$ 为线圈 1 的自感量。同理，式(13.7)可以写为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \frac{di_1}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.9)$$

其中：

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1} \quad (13.10)$$

M_{21} 称为线圈 2 相对于线圈 1 的互感，下标 21 表示互感 M_{21} 是联系线圈 2 的感应电压与线圈 1 中的电流的物理量。因此，线圈 2 两端的开路互感电压(感应电压)为：

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (13.11)$$

下面假设流过线圈 2 的电流为 i_2 ，而线圈 1 中无电流(如图 13-3 所示)，则线圈 2 引起的磁通量 ϕ_2 由 ϕ_{22} 与 ϕ_{21} 组成，其中 ϕ_{22} 仅与线圈 2 交链， ϕ_{21} 与两个线圈交链，所以：

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} \quad (13.12)$$

整个磁通量 ϕ_2 与线圈 2 交链，所以，线圈 2 的感应电压为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{di_2} \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (13.13)$$

其中， $L_2 = N_2 d\phi_2 / di_2$ 为线圈 2 的自感。由于仅磁通量 ϕ_{21} 与线圈 1 交链，所以线圈 1 中的感应电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_{21}}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \frac{di_2}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.14)$$

其中：

$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad (13.15)$$

M_{12} 称为线圈 1 相对于线圈 2 的互感，因此，线圈 1 两端的开路互感电压为：

$$v_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (13.16)$$

下一节中将会证明 M_{12} 与 M_{21} 是相等的，即：

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (13.17)$$

M 称为两个线圈之间的互感，与自感 L 相同，互感 M 的单位为亨利(H)。注意，仅当两个电感器或线圈距离很近，且电路由时变电源驱动时，才存在互感耦合。前面章节已经介绍过，电感器对于直流电路而言相当于短路。

由图 13-2 与图 13-3 两种情况可以看出，如果感应电压是由另一个电路中的时变电流引起的，则有互感存在。这是电感器的一个特性，即电感器产生的电压会反作用于靠近它的另一个电感器中的时变电流。

互感是指一个电感器在与其相邻的电感器两端感应出电压的能力，单位为亨利(H)。

虽然互感 M 总是正的，但是，与自感电压 Ldi/dt 一样，互感电压 Mdi/dt 既可以是正

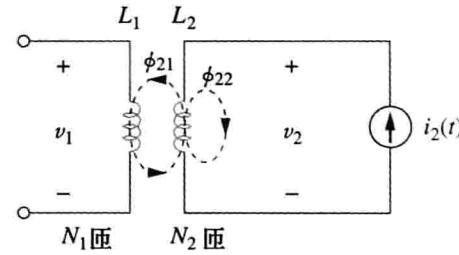


图 13-3 线圈 1 相对于线圈 2 的互感量 M_{12}

的也可以是负的。然而，与自感电压 Ldi/dt 的极性由电流参考方向和电压参考极性(符合无源符号约定)决定不同，确定互感电压 Mdi/dt 的极性并不是很容易，因为互感包含四个端点。正确选择 Mdi/dt 极性的方法是：检查两个线圈的物理缠绕方向，并利用楞次定律与右手准则来判定感应电压的极性。但是，由于在电路图中画出线圈的缠绕结构是很不方便的，因此在电路分析中通常采用同名端规则予以简化。按照规则，在两个磁耦合线圈的一端标上一个圆点，表示电流由该点流入线圈时磁通量的方向，如图 13-4 所示。在电路中，线圈外通常已经标记了圆点，无需担心应如何标示。通过圆点与同名端规则即可确定互感电压的极性。

如果电流进入一个线圈的同名端，则在第二个线圈的同名端处，互感电压的参考极性为正。

如果电流从一个线圈的同名端流出，则在第二个线圈的同名端处，互感电压的参数极性为负。

因此，互感电压的参数极性取决于施感电流的参考方向与耦合线圈的同名端。同名端规则在四对互感耦合线圈中的应用如图 13-5 所示。对于图 13-5a 所示的耦合线圈，互感电压 v_2 的符号取决于 v_2 的参考极性与电流 i_1 的方向。由于 i_1 进入线圈 1 的同名端且 v_2 在线圈 2 同名端处为正，所以互感电压为 $+Mdi_1/dt$ 。对于图 13-5b 所示的线圈，电流 i_1 进入线圈 1 的同名端，且互感电压 v_2 在线圈 2 的同名端处为负，所以互感电压为 $-Mdi_1/dt$ 。按照同样的方法可以得到图 13-5c 与图 13-5d 所示线圈的互感电压。

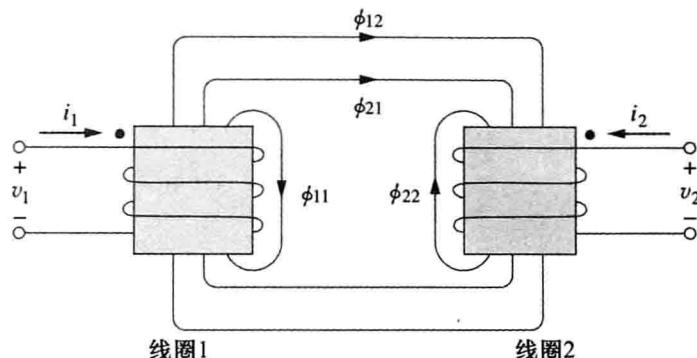


图 13-4 同名端规则的说明

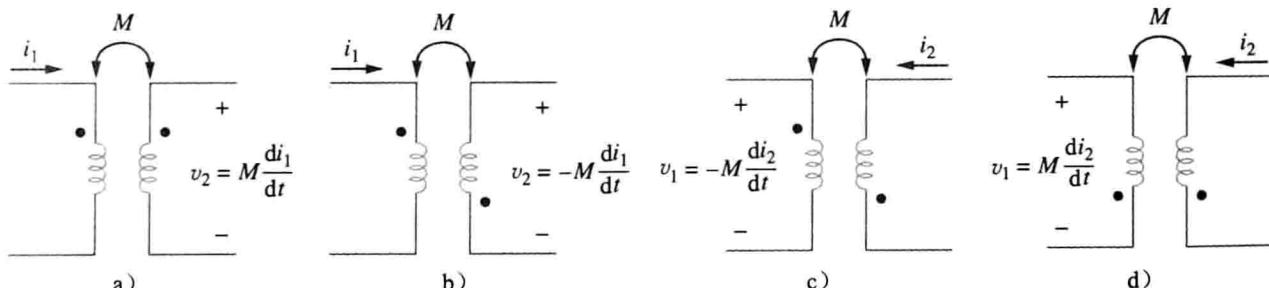


图 13-5 同名端规则的应用

图 13-6 所示为串联耦合线圈的同名端规则。对于图 13-6a 所示线圈，总的电感量为：

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (\text{同向串联连接}) \quad (13.18)$$

对于图 13-6b 所示线圈，有：

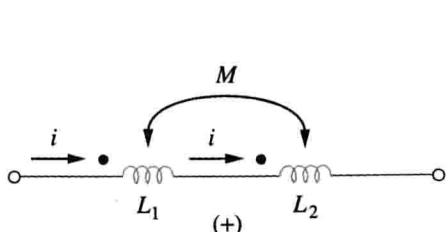
$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (\text{反向串联连接}) \quad (13.19)$$

掌握确定互感电压极性的方法之后，就可以分析包含互感的电路了。首先考虑图 13-7a 所示电路。对于线圈 1 应用 KVL，可得：

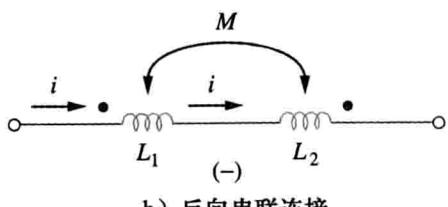
$$v_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (13.20a)$$

对于线圈 2 应用 KVL，可得：

$$v_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (13.20b)$$

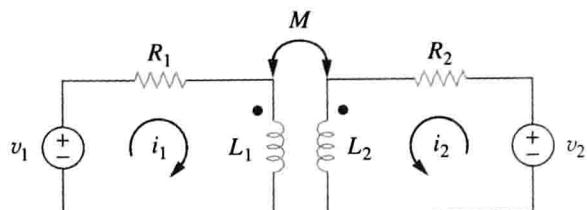


a) 同向串联连接

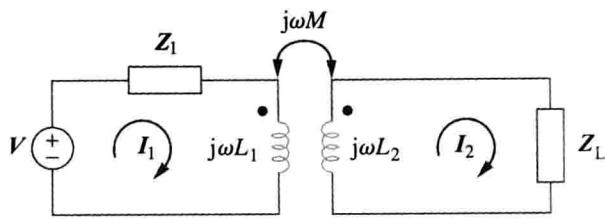


b) 反向串联连接

图 13-6 串联线圈的同名端规则, 正负号表示互感电压的极性



a) 时域分析



b) 频域分析

图 13-7 包含耦合线圈的电路分析

式(13.20)的频域表示为:

$$\mathbf{V}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 + j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (13.21a)$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \quad (13.21b)$$

另一个例子是在频域中分析如图 13-7b 所示电路, 对线圈 1 应用 KVL, 得到:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{Z}_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (13.22a)$$

对线圈 2 应用 KVL, 得到:

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_L + j\omega L_2)\mathbf{I}_2 \quad (13.22b)$$

求解式(13.2)与式(13.22)即可确定各电流。

为了准确地解决问题, 检查每一个步骤并验证每一个假设是非常重要的。解决互感耦合电路问题通常需要两步或更多的步骤来确定符号和互感电压。

实验表明, 如果根据所求值和符号将问题分成多个步骤, 将会使问题更加容易解决。在分析包含图 13-8a 所示的互感耦合电路时, 建议使用图 13-8b 所示的模型。

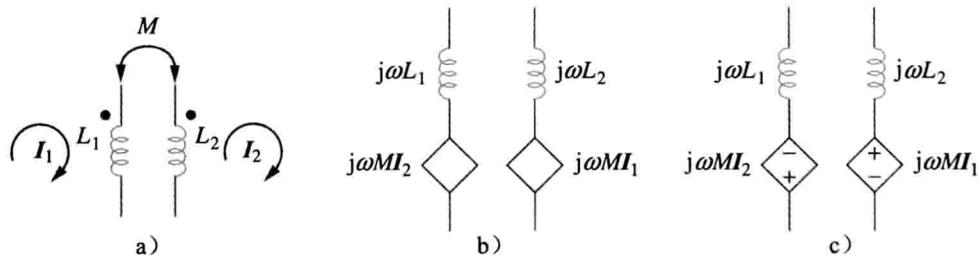


图 13-8 互感耦合的简易分析模型

注意, 模型中并不包含符号, 因为确定电压值之后才能确定相应的符号。显然, 电流 \mathbf{I}_1 引起的感应电压在第二个线圈中的值为 $j\omega\mathbf{I}_1$, \mathbf{I}_2 引起的感应电压在第一个线圈中的值为 $j\omega\mathbf{I}_2$ 。得到这两个值后, 可以通过图 13-8c 所示的两个电路来确定正确的符号。

由于 \mathbf{I}_1 从 L_1 的同名端流入, 所以它在 L_2 中产生的感应电压使得电流从 L_2 的同名端流出, 即电源的上端为正、下端为负, 如图 13-8c 所示。 \mathbf{I}_2 从 L_2 的同名端流出, 它在 L_1 中产生的感应电压使得电流从 L_1 的同名端流入, 即非独立源的下端为正、上端为负, 如图 13-8c 所示。现在需要分析两个非独立源, 分析过程中可以对每一步假设进行验证。

现阶段不需要关注互感线圈的同名端确定问题, 与电路中 R 、 L 、 C 的计算类似, 互感 M 的计算要求将电磁学理论应用于实际线圈的物理属性中。本书假设电路问题中的互感与同名端的位置是“已知的”, 即与电路元件 R 、 L 、 C 同等看待。

例 13-1 计算图 13-9 所示电路中的相量电流 \mathbf{I}_1 和 \mathbf{I}_2 。

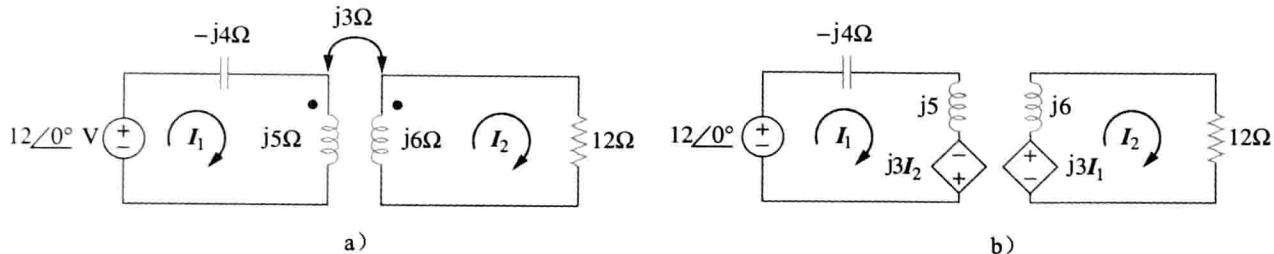


图 13-9 例 13-1 图

解：对于线圈 1 应用 KVL，得到：

$$-12 + (-j4 + j5)\mathbf{I}_1 - j3\mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$j\mathbf{I}_1 - j3\mathbf{I}_2 = 12 \quad (13.1.1)$$

对于线圈 2 应用 KVL，得到：

$$-j3\mathbf{I}_1 + (12 + j6)\mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(12 + j6)\mathbf{I}_2}{j3} = (2 - j4)\mathbf{I}_2 \quad (13.1.2)$$

将上式代入式(13.1.1)，可以得到：

$$(j2 + 4 - j3)\mathbf{I}_2 = (4 - j)\mathbf{I}_2 = 12$$

即

$$\mathbf{I}_2 = \frac{12}{4 - j} = 2.91 \angle 14.04^\circ \text{ (A)} \quad (13.1.3)$$

由式(13.1.2)与式(13.1.3)得到：

$$\mathbf{I}_1 = (2 - j4)\mathbf{I}_2 = (4.472 \angle -63.43^\circ)(2.91 \angle 14.04^\circ) = 13.01 \angle -49.39^\circ \text{ (A)} \quad \blacktriangleleft$$

练习 13-1 计算图 13-10 所示电路中的电压 \mathbf{V}_o 。

答案：20 $\angle -135^\circ$ V

例 13-2 计算图 13-11 所示电路的网孔电流。

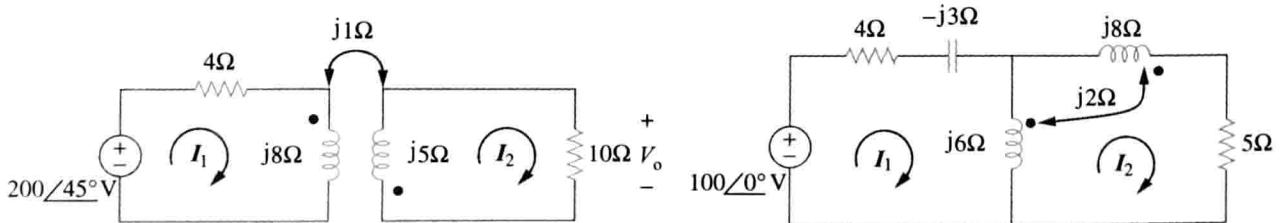


图 13-10 练习 13-1 图

图 13-11 例 13-2 图

解：分析磁耦合电路的关键是要知道互感电压的极性，这就需要利用同名端规则。在图 13-11 所示电路中，假设线圈 1 是电抗为 6Ω 的线圈，线圈 2 是电抗为 8Ω 的线圈。为了判断电流 \mathbf{I}_2 在线圈 1 中产生的互感电压的极性，观察到 \mathbf{I}_2 是从线圈 2 的同名端流出的，由于 KVL 是沿顺时针方向应用的，因此互感电压极性为负，即 $-j2\mathbf{I}_2$ 。

另外，还可以重新画出相关的电路以确定互感电压的极性，如图 13-12 所示，由此即可方便地确定互感电压为 $\mathbf{V}_1 = -2j\mathbf{I}_2$ 。

因此，对于图 13-11 所示电路的网孔 1，应用 KVL 可得：

$$-100 + \mathbf{I}_1(4 - j3 + j6) - j6\mathbf{I}_2 - j2\mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$100 = (4 + j3)\mathbf{I}_1 - j8\mathbf{I}_2 \quad (13.2.1)$$

同理,为了确定电流 \mathbf{I}_1 在线圈 2 中产生的互感电压,需将电路的相关部分重绘于图 13-12,利用同名端规则可得互感电压 $\mathbf{V}_2 = -2j\mathbf{I}_1$ 。另外,由图 13-11 可见,电流 \mathbf{I}_2 所经过的两个线圈是串联的。且电流从两个线圈的同名端流出,所以式(13.18)适用于这种情况。因此,对于图 13-11 所示电路的网孔 2,应用 KVL 可得:

$$0 = -2j\mathbf{I}_1 - j6\mathbf{I}_1 + (j6 + j8 + j2 \times 2 + 5)\mathbf{I}_2$$

即

$$0 = -j8\mathbf{I}_1 + (5 + j18)\mathbf{I}_2 \quad (13.2.2)$$

将式(13.2.1)与式(13.2.2)写成矩阵形式,得到:

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + j3 & -j8 \\ -j8 & 5 + j18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 4 + j3 & -j8 \\ -j8 & 5 + j18 \end{vmatrix} = 30 + j87 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 100 & -j8 \\ 0 & 5 + j18 \end{vmatrix} = 100(5 + j18) \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 4 + j3 & 100 \\ -j8 & 0 \end{vmatrix} = j800 \end{aligned}$$

于是,得到网孔电流为:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{100(5 + j18)}{30 + j87} = \frac{1868.2 \angle 74.5^\circ}{92.03 \angle 71^\circ} = 20.3 \angle 3.5^\circ \text{ (A)}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{j800}{30 + j87} = \frac{800 \angle 90^\circ}{92.03 \angle 71^\circ} = 8.693 \angle 19^\circ \text{ (A)}$$

练习 13-2 计算图 13-13 所示电路中的电流相量 \mathbf{I}_1 与 \mathbf{I}_2 。

答案: $\mathbf{I}_1 = 17.889 \angle 86.57^\circ \text{ A}$, $\mathbf{I}_2 = 26.83 \angle 86.57^\circ \text{ A}$

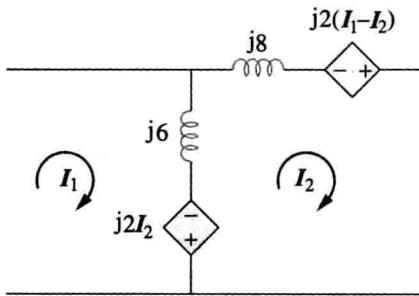


图 13-12 例 13-2 的电路重绘

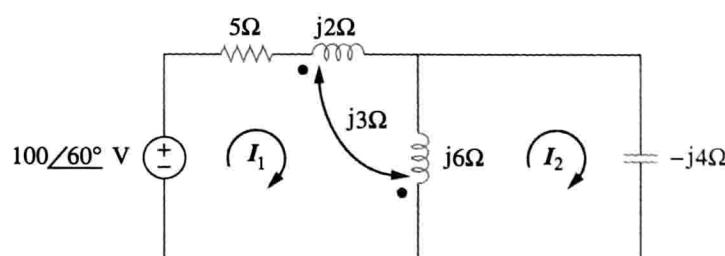


图 13-13 练习 13-2 图

13.3 耦合电路中的能量

由本书第 6 章可知,电感器中存储的能量为:

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \quad (13.23)$$

下面将确定磁耦合线圈中储存的能量。

考虑图 13-14 所示电路。假设电流 i_1 与 i_2 的初始值均为零,于是线圈中的初始储能为零。如果令 i_1 由 0 增加到 I_1 ,且 $i_2 = 0$ 保持不变,则线圈 1 中的功率为:

$$p_1(t) = v_1 i_1 = i_1 L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (13.24)$$

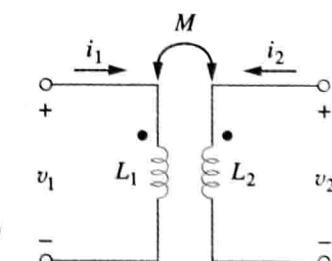


图 13-14 推导耦合电路
存储的能量

该电路中储存的能量为：

$$w_1 = \int p_1 dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (13.25)$$

如果 $i_1 = I_1$ 保持不变，但 i_2 从 0 增加到 I_2 ，则在线圈 1 中的互感电压为 $M_{12} di_2/dt$ ，由于 i_1 保持不变，所以线圈 2 中的互感电压为 0。于是线圈中的功率为：

$$p_2(t) = i_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2 = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (13.26)$$

该电路中储存的能量为：

$$w_2 = \int p_2 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 + L_2 \int_0^{I_2} i_2 di_2 = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (13.27)$$

当 i_1 与 i_2 均到达恒定值时，线圈中储存的总能量为：

$$w = w_1 + w_2 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \quad (13.28)$$

如果交换上述电流达到其终值的顺序，即 i_2 先从 0 增加到 I_2 ，之后 i_1 再从 0 增加到 I_1 ，则线圈中储存的总能最为：

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2 \quad (13.29)$$

由于无论电流按照哪种顺序到达终值，电路中所储存的能量都是相同的，因此，比较式(13.28)与式(13.29)，得到如下结论：

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (13.30a)$$

且

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \quad (13.30b)$$

推导上式的假设条件是，线圈电流均从同名端流入，如果一个电流从一个同名端流入，另一个电流从另一个同名端流出，则互感电压为负，因此，互感能量 $MI_1 I_2$ 也为负，在这种情况下：

$$w = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - MI_1 I_2 \quad (13.31)$$

另外，由于 I_1 与 I_2 为任意值，所以可以用 i_1 与 i_2 取代，于是得到电路中储存的瞬时能量的一般表达式为：

$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm Mi_1 i_2$

(13.32)

当两个电流均从线圈的同名端流入或者流出时，上式中的互感项取正号，否则，互感项取负号。

现在推导互感 M 的上限。由于无源电路中储存的能量不可能为负，所以 $(1/2L_1 i_1^2 + 1/2L_2 i_2^2 - Mi_1 i_2)$ 必须大于或等于零：

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - Mi_1 i_2 \geq 0 \quad (13.33)$$

为了得到完全平方，在式(13.33)右边加一项并减一项 $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$ ，从而得到：

$$\frac{1}{2} (i_1 \sqrt{L_1} - i_2 \sqrt{L_2})^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) \geq 0 \quad (13.34)$$

其中，第一项平方项不可能为负，其最小值为零。因此，式(13.34)的第二项必须大于零，即：

$$\sqrt{L_1 L_2} - M \geq 0$$

即

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.35)$$

因此，互感 M 不能大于线圈自感的几何平均值。互感 M 接近于其上限的程度由耦合系数 (coefficient of coupling) k 决定：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (13.36)$$

即

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.37)$$

其中， $0 \leq k \leq 1$ ，或 $0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ 。耦合系数是指由一个线圈产生的总磁通量中与另一个线圈交链的部分。例如，在图 13-2 所示电路中：

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{11} + \phi_{12}} \quad (13.38)$$

而在图 13-3 所示电路中：

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} = \frac{\phi_{21}}{\phi_{21} + \phi_{22}} \quad (13.39)$$

如果一个线圈产生的磁通全部与另一线圈交链，则 $k=1$ ，即为 100% 耦合，或称这两个线圈完全耦合 (perfectly coupled)。当 $k < 0.5$ 时，称这两个线圈松散耦合 (loosely coupled)；当 $k > 0.5$ 时，称这两个线圈紧耦合 (tightly coupled)。

耦合系数 k 是两个线圈之间磁耦合程度的一种量度， $0 \leq k \leq 1$ 。

k 值的大小取决于两个线圈的接近程度、磁心、方向以及缠绕方式。图 13-15 所示为松散耦合线圈与和紧耦合线圈两种情况。射频电路中使用的空心变压器一般是松散耦合的，而电力系统中使用的铁心变压器都是紧耦合的。13.4 节讨论的线性变压器大多数是空心的，而 13.5 节与 13.6 节讨论的理想变压器基本上都是铁心变压器。

例 13-3 对于图 13-16 所示电路，计算耦合系数，并计算当 $v = 60 \cos(4t + 30^\circ) V$ 时，耦合电感器在 $t = 1 s$ 时储存的能量。

解：耦合系数为：

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{2.5}{\sqrt{20}} = 0.56$$

表明两个电感器是紧耦合的，为了求出所存储的能量，需计算出电流，而要得到电流，就必须确定该电路的频域等效电路：

$$60 \cos(4t + 30^\circ) \Rightarrow 60 \angle 30^\circ, \omega = 4 \text{ rad/s}$$

$$5 \text{ H} \Rightarrow j\omega L_1 = j20 \Omega$$

$$2.5 \text{ H} \Rightarrow j\omega M = j10 \Omega$$

$$4 \text{ H} \Rightarrow j\omega L_2 = j16 \Omega$$

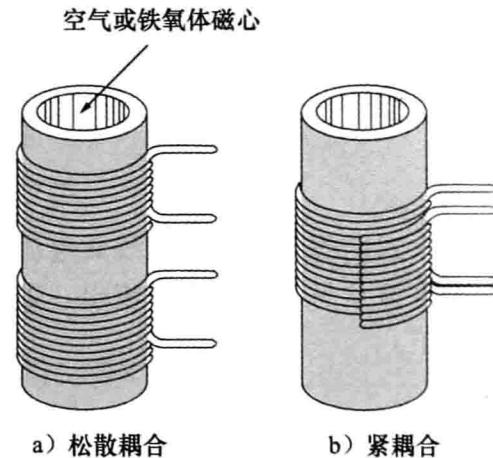


图 13-15 线圈剖面视图

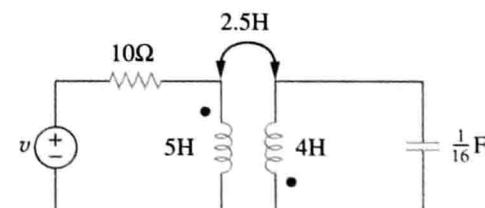


图 13-16 例 13-3 图

$$\frac{1}{16}F \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j4\Omega$$

频域等效电路如图13-17所示。下面利用网孔分析法确定电流。对于网孔1，有：

$$(10+j20)I_1 + j10I_2 = 60 \angle 30^\circ \quad (13.3.1)$$

对于网孔2，有：

$$j10I_1 + (j16 - j4)I_2 = 0$$

即

$$I_1 = -1.2I_2 \quad (13.3.2)$$

将上式代入式(13.3.1)，得到：

$$I_2(-12-j14) = 60 \angle 30^\circ \Rightarrow I_2 = 3.254 \angle 160.6^\circ \text{ (A)}$$

并且，

$$I_1 = -1.2I_2 = 3.905 \angle -19.4^\circ \text{ (A)}$$

变换到时域，有：

$$i_1 = 3.905 \cos(4t - 19.4^\circ), \quad i_2 = 3.254 \cos(4t + 160.6^\circ)$$

当 $t=1\text{s}$ 时， $4t=4\text{rad}=229.2^\circ$ ，所以：

$$i_1 = 3.905 \cos(229.2^\circ - 19.4^\circ) = -3.389 \text{ (A)}$$

$$i_2 = 3.254 \cos(229.2^\circ + 160.6^\circ) = 2.824 \text{ (A)}$$

耦合线圈中存储的总能量为：

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times (-3.389)^2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2.824^2 + 2.5(-3.389) \times 2.824 = 20.73 \text{ (J)} \end{aligned}$$

练习 13-3 对于图13-18所示电路，计算耦合系数，并计算当 $t=1.5\text{s}$ 时，耦合电感器中存储的能量。

答案：0.7071, 246.2J

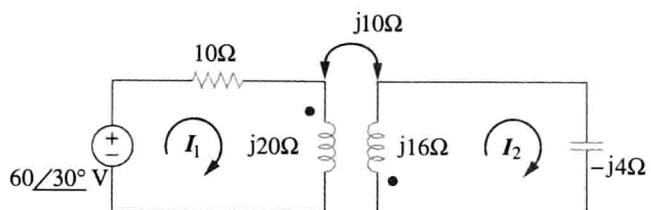


图13-17 图13-16的频域等效电路

13.4 线性变压器

本节介绍一个新的电路元件——变压器，变压器是利用互感现象设计的一种磁耦合器件。

变压器一般是由两个(或多个)磁耦合线圈组成的四端器件。

如图13-19所示，直接与电压源相连接的线圈称为一次绕组(primary winding)，而与负载相连接的线圈称为二次绕组(secondary winding)，图中 R_1 与 R_2 用于计算绕组的消耗(功率)。绕组缠绕在磁性线性材料上制成的变压器称为线性变压器，所谓磁性线性材料是指磁导率为常数的材料，例如空气、塑料、胶木与木头等。实际上，绝大多数材料都是磁性线性的。有时候也将线性变压器称为空心变压器(air-core transformer)，尽管其磁心未必都是空气的。线性变压器通常用于收音机与电视机等装置中，图13-20给出了各种不同类型的变压器。

提示：线性变压器也可以看做是磁通量与绕组内电流成正比的变压器。

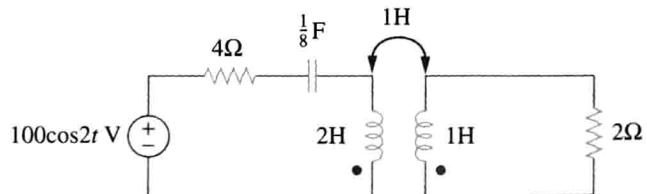


图13-18 练习13-3图

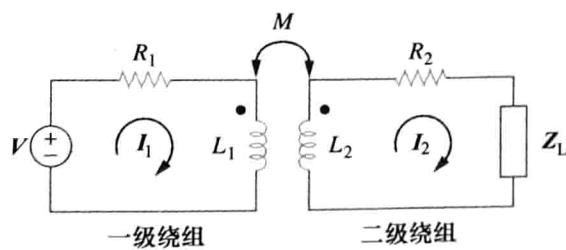
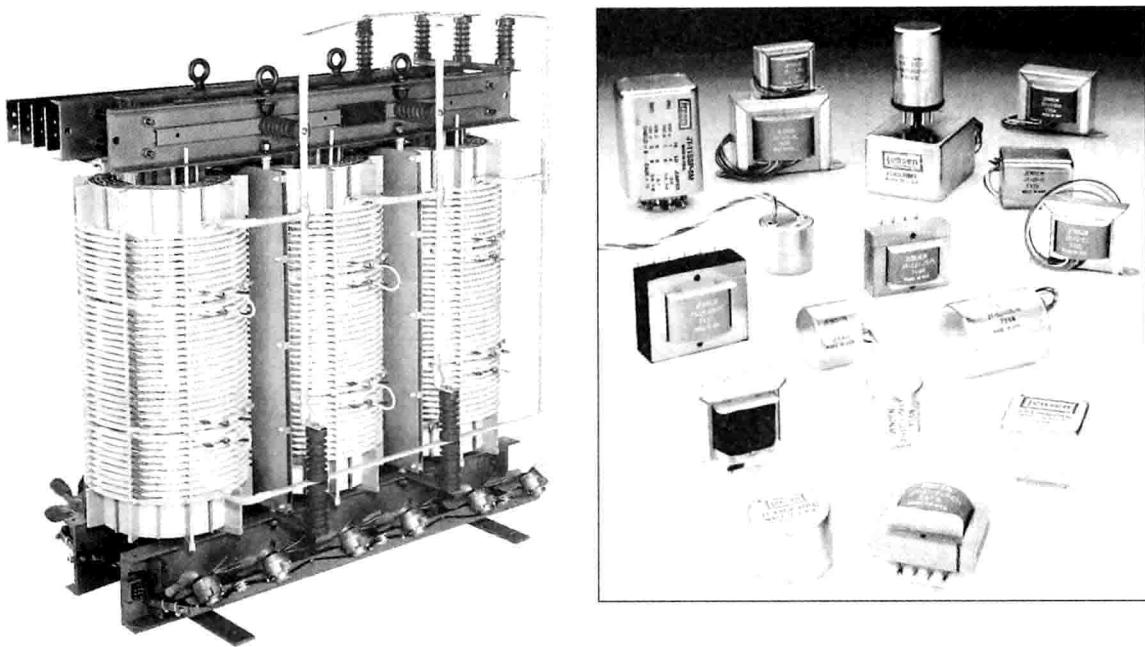


图13-19 线性变压器



a) 无润滑液铜绕组电力变压器

b) 音频变压器

图 13-20 不同类型的变压器

下面确定从电源端看进去的变压器输入阻抗 Z_{in} , Z_{in} 决定了一次电路的特征, 对图 13-19 所示电路中的两个网孔应用 KVL, 得到:

$$\mathbf{V} = (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (13.40a)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\mathbf{I}_2 \quad (13.40b)$$

式(13.40b)中, 用 \mathbf{I}_1 表示 \mathbf{I}_2 , 并代入式(13.40a), 得到输入阻抗为:

$$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.41)$$

上式表明, 输入阻抗由两项组成, 第一项($R_1 + j\omega L_1$)为一次阻抗, 第二项为一次绕组与二次绕组之间的耦合产生的阻抗, 可以看做是由二次侧映射到一次侧的阻抗, 因此, 也称为反射阻抗(reflected impedance) Z_R , 即:

$$Z_R = \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_L} \quad (13.42)$$

注意, 式(13.41)或式(13.44)给出的结果并不会受到变压器同名端位置的影响, 因为利用 $-M$ 取代式中的 M 后, 其结果是相同的。

提示: 有些学者也将反射阻抗称为耦合阻抗。

通过 13.2 节与 13.3 节磁耦合电路分析的过程可知, 这类电路的分析不像前面几章介绍的电路分析那样容易。因此, 通常用没有磁耦合的等效电路来取代磁耦合电路, 以便于分析。下面就利用没有互感的 T 形等效电路或 II 形等效电路取代图 13-21 所示的线性变压器。

一次绕组与二次绕组的电压-电流关系矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (13.43)$$

由矩阵求逆, 可得:

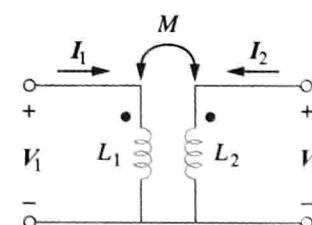


图 13-21 确定线性变压器的等效电路

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \\ \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} & \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (13.44)$$

现在需要将式(13.43)与式(13.44)同相应的 T 形网络和 II 形网络的方程匹配。

对于图 13-22 所示的 T 形(Y 形)网络而言, 由网孔分析法得到矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega(L_a + L_c) & j\omega L_c \\ j\omega L_c & j\omega(L_b + L_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (13.45)$$

如果图 13-21 与图 13-22 所示电路是等效的, 则式(13.43)与式(13.45)必须相同。令式(13.43)与式(13.45)中阻抗矩阵各项相等, 可得:

$$L_a = L_1 - M, \quad L_b = L_2 - M, \quad L_c = M \quad (13.46)$$

对于图 13-23 所示的 II 形(△形)网络而言, 由节点分析法得到矩阵方程为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega L_A} + \frac{1}{j\omega L_C} & -\frac{1}{j\omega L_C} \\ -\frac{1}{j\omega L_C} & \frac{1}{j\omega L_B} + \frac{1}{j\omega L_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (13.47)$$

令式(13.44)与式(13.47)中导纳矩阵各项相等, 可得:

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}, \quad L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}, \quad L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{M} \quad (13.48)$$

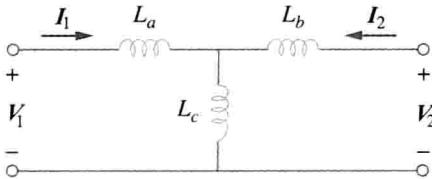


图 13-22 等效 T 形电路

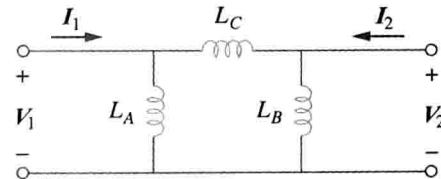


图 13-23 等效 II 形电路

注意, 在图 13-22 与图 13-23 中, 各电感器是没有磁耦合的, 同时, 改变图 13-21 所示电路中同名端的位置会使得 M 变为 $-M$ 。例 13-6 将会说明, M 为负值在物理上是不可实现的, 但是其等效电路模型在数学意义上仍然是有效的。

例 13-4 在图 13-24 所示电路中, 计算输入阻抗与电流 I_1 。假设 $Z_1 = (60 - j100)\Omega$, $Z_2 = (30 + j40)\Omega$ 且 $Z_L = (80 + j60)\Omega$ 。

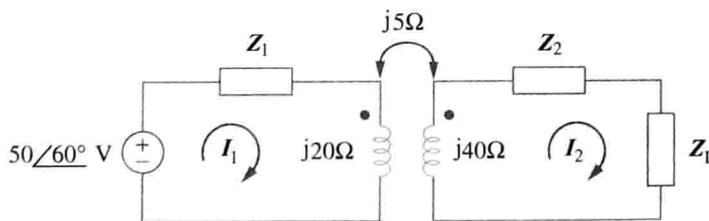


图 13-24 例 13-4 图

解: 由式(13.41)可得:

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_1 + j20 + \frac{5^2}{j40 + Z_2 + Z_L} = 60 - j100 + j20 + \frac{25}{110 + j140} \\ &= 60 - j80 + 0.14 \angle -51.84^\circ = 60.09 - j80.11 = 100.14 \angle -53.1^\circ (\Omega) \end{aligned}$$

因此:

$$I_1 = \frac{\mathbf{V}}{Z_{in}} = \frac{50 \angle 60^\circ}{100.14 \angle -53.1^\circ} = 0.5 \angle 113.1^\circ (\text{A})$$

 练习 13-4 求图 13-25 所示电路的输入阻抗以及电压源的电流。

答案: $8.58 \angle 58.05^\circ \Omega$, $4.662 \angle -58.05^\circ A$

例 13-5 确定图 13-26a 所示线性变压器的 T 形等效电路。

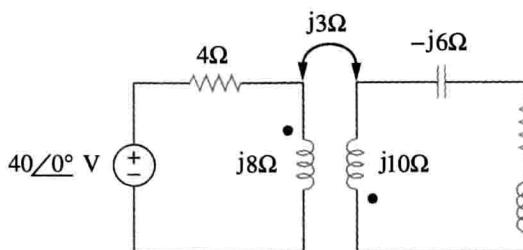


图 13-25 练习 13-4 图

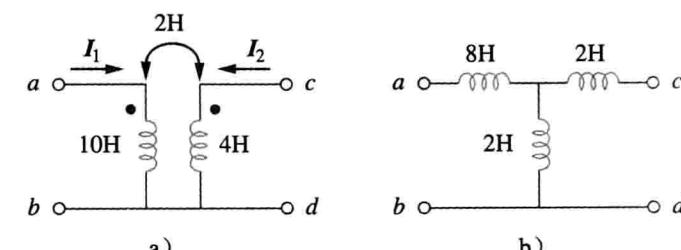


图 13-26 例 13-5 图

解: 已知 $L_1 = 10$, $L_2 = 4$, $M = 2$, 于是, T 形网络的参数如下:

$L_a = L_1 - M = 10 - 2 = 8(H)$, $L_b = L_2 - M = 4 - 2 = 2(H)$, $L_c = M = 2(H)$
T 形等效电路如图 13-26b 所示。已经假设一次绕组与二次绕组的电流参考方向和电压极性符合图 13-21 所示情况。否则就需要用 $-M$ 取代 M , 参见例 13-6。

 练习 13-5 求图 13-26a 所示线性变压器的 II 形等效网络。

答案: $L_A = 18H$, $L_B = 4.5H$, $L_C = 18H$

例 13-6 利用线性变压器的 T 形等效电路求解图 13-27(与练习 13-1 的电路相同)所示电路中的 I_1 、 I_2 与 V_o 。

解: 图 13-27 所示电路与图 13-10 所示电路相同, 只是电流 I_2 的参考方向相反, 仅需使磁耦合线圈的电流参考方向符合图 13-21 所示情况即可。

将磁耦合线圈用其等效 T 形电路取代, 图 13-27 所示电路的相关部分如图 13-28a 所示。首先, 由于电流参考方向与电压极性不同, 必须用 $-M$ 取代 M , 从而使得图 13-28a 所示电路符合图 13-21 所示情况。其次, 图 13-21 所示电路为时域电路, 而图 13-28a 所示电路为频域电路, 不同之处在于因子 $j\omega L$, 即图 13-21 中的 L 应该用 $j\omega$ 取代, M 应该用 $j\omega M$ 取代。由于本题并未规定 ω 的值, 因此可以假设 $\omega = 1rad/s$ 或其他值, 这并不会影响本题的求解。明确以上两处不同后, 可得:

$$L_a = L_1 - (-M) = 8 + 1 = 9(H)$$

$$L_b = L_2 - (-M) = 5 + 1 = 6(H), \quad L_c = -M = -1(H)$$

于是, 耦合线圈的 T 形等效电路如图 13-28b 所示。

利用图 13-28b 所示的 T 形等效电路取代图 13-27 中的两个耦合线圈, 得到图 13-29 所示的等效电路, 于是就可以利用节点电压分析法或网孔电流分析法求解该电路。由网孔电流分析法, 可得:

$$j6 = I_1(4 + j9 - j1) + I_2(-j1) \quad (13.6.1)$$

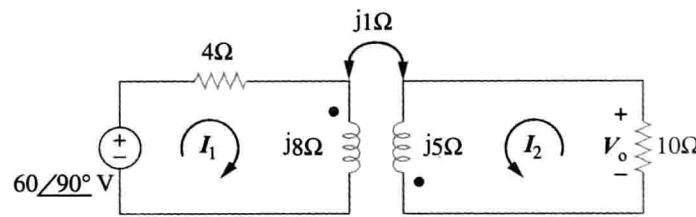


图 13-27 例 13-6 图

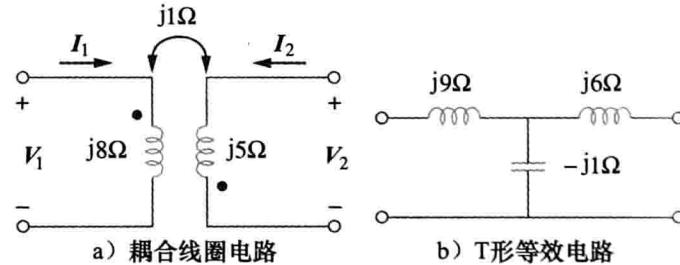


图 13-28 例 13-6 图

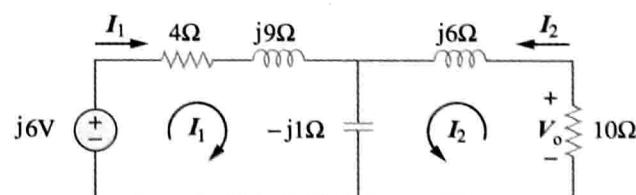


图 13-29 例 13-6 图

和

$$0 = \mathbf{I}_1(-j1) + \mathbf{I}_2(10 + j6 - j1) \quad (13.6.2)$$

由式(13.6.2)可得：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(10 + j5)}{j} \mathbf{I}_2 = (5 - j10) \mathbf{I}_2 \quad (13.6.3)$$

将式(13.6.3)代入式(13.6.1)得到：

$$j6 = (4 + j8)(5 - j10) \mathbf{I}_2 - j\mathbf{I}_2 = (100 - j) \mathbf{I}_2 \approx 100 \mathbf{I}_2$$

由于 100 比 1 大得多，所以上式中 $(100 - j)$ 的虚部可以忽略，于是， $(100 - j)$ 约等于 100。因此：

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j6}{100} = j0.06 = 0.06 \angle 90^\circ \text{ (A)}$$

由式(13.6.3)得到：

$$\mathbf{I}_1 = (5 - j10)j0.06 = (0.6 + j0.3) \text{ A}$$

和

$$\mathbf{V}_o = -10\mathbf{I}_2 = -j0.6 = 0.6 \angle -90^\circ \text{ (V)}$$

上述结果与练习 13-1 的答案一致。当然，图 13-10 中的 \mathbf{I}_2 方向与图 13-27 中 \mathbf{I}_2 的方向相反，但是这并不会影响 \mathbf{V}_o 。只是本题中 \mathbf{I}_2 的值与练习 13-1 中 \mathbf{I}_2 的值符号相反。利用 T 形等效模型取代磁耦合线圈的优点是，在图 13-29 所示电路中无需考虑耦合线圈中的同名端问题。

练习 13-6 试利用 T 形等效电路取代磁耦合线圈，求解例 13-1(见图 13-9)。

答案：13 $\angle -49.4^\circ$ A, 2.91 $\angle 14.04^\circ$ A

13.5 理想变压器

理想变压器是一种完全耦合($k=1$)的变压器。它由大量缠绕在高磁导率的磁心上的线圈构成的两个(或多个)绕组组成，由于磁心的磁导率高，所以磁通量与两个绕组的所有线圈交链，从而得到完全耦合的变压器。

为了说明理想变压器是两个完全耦合的电感值趋于无穷大的耦合线圈的极限情况，下面考虑图 13-14 所示电路。在频域中可以得到：

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \quad (13.49a)$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_2 \quad (13.49b)$$

由式(13.49a)可得： $\mathbf{I}_1 = (\mathbf{V}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2) / j\omega L_1$ (也可从此式得到电流之比，以替代下面将要用到的功率守恒方法)，将其代入式(13.49b)得到：

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{M\mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega M^2 \mathbf{I}_2}{L_1}$$

在完全耦合($k=1$)条件下， $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ，所以：

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + \frac{\sqrt{L_1 L_2} \mathbf{V}_1}{L_1} - \frac{j\omega L_1 L_2 \mathbf{I}_2}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathbf{V}_1 = n \mathbf{V}_1$$

其中， $n = \sqrt{L_2/L_1}$ ，称为完全耦合变压器的匝数比(turns ratio)。当 $L_1, L_2, M \rightarrow \infty$ ，且 n 保持不变时，耦合线圈就变为理想变压器了。因此，当变压器具有如下属性时，称之为理想变压器：

1. 线圈具有非常大的电抗($L_1, L_2, M \rightarrow \infty$)；
2. 耦合系数等于单位 1($k=1$)；
3. 一次绕组与二次绕组是无损耗的($R_1=0=R_2$)。

理想变压器是一次绕组与二次绕组具有无穷大自感的、完全耦合的、无损变压器。

铁心变压器是理想变压器的最佳近似，通常用于电力系统或电子设备中。

图 13-30a 所示为一个典型的理想变压器，其电路符号如图 13-30b 所示，图中两绕组之间的竖线表示铁心，以区别于线性变压器中的空气心。一次绕组为 N_1 匝，二次绕组为 N_2 匝。

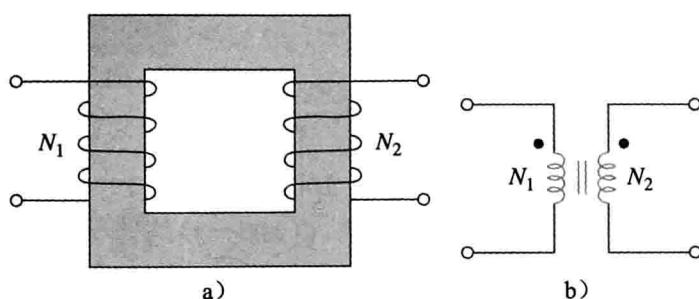


图 13-30 理想变压器

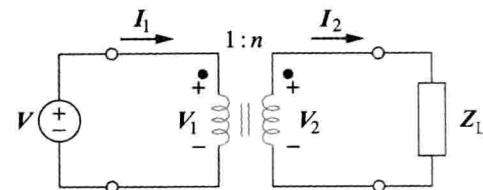


图 13-31 理想变压器中一次变量与二次变量之间的关系

当正弦电压作用于变压器的一次绕组上时，如图 13-31 所示，两个绕组中通过的磁通量 ϕ 相同，按照法拉第定理，一次绕组两端的电压为：

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (13.50a)$$

而二次绕组两端的电压为：

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (13.50b)$$

用式(13.50b)除以式(13.50a)，得到：

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \quad (13.51)$$

其中， n 仍然是匝数比。利用相量电压 \mathbf{V}_1 与 \mathbf{V}_2 ，而不是瞬时值 v_1 与 v_2 表示时，式(13.51)可以写为：

$$\boxed{\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n} \quad (13.52)$$

按照功率守恒定理，由于理想变压器没有任何损耗，所以一次绕组提供的能量必定等于二次绕组吸收的能量，这意味着：

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (13.53)$$

采用相量表示后，由式(13.53)与式(13.52)可得：

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = n \quad (13.54)$$

即一次电流、二次电流与匝数比之间的关系同电压与匝数比之间的关系是相反的，因此：

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}} \quad (13.55)$$

当 $n=1$ 时，一般称该变压器为隔离变压器(isolation transformer)，13.9.1 节将说明其原因；当 $n>1$ 时，称为升压变压器(step-up transformer)，因为电压从一次侧变到二次侧是升高的($\mathbf{V}_2 > \mathbf{V}_1$)；当 $n<1$ 时，称为降压变压器(step-down transformer)，因为电压从一次侧变到二次侧是降低的($\mathbf{V}_2 < \mathbf{V}_1$)。

降压变压器是指二次电压低于一次电压的变压器。

升压变压器是指二次电压大于一次电压的变压器。

变压器的额定值通常用 V_1/V_2 来表示。额定值为 2400V/120V 的变压器，是指其一次电压为 2400V，二次电压为 120V(降压变压器)。注意，额定电压值均指有效值。

电力公司通常产生适当大小的电压，并利用升压变压器将电压升高，从而在传输线上

实现以极高的电压和很低的电流输送电力，以节省大量的相关费用。而到了用户住宅附近，再利用降压变压器使电压降至120V，13.9.3节将详细讨论这一问题。

掌握如何确定图13-31所示变压器的电压极性与电流方向非常重要。如果图中 V_1 或 V_2 的极性改变，或者 I_1 或 I_2 的方向改变，都应该将式(13.51)~式(13.55)中的n替换为-n。于是，得到如下两个简单规则：

1. 如果同名端处的 V_1 与 V_2 均为正，或者均为负，则在式(13.52)中采用+n，否则，就采用-n。

2. 如果 I_1 与 I_2 均进入或者均流出同名端，则在式(13.55)中采用-n，否则，就采用+n。

图13-32所示的四个电路可以很好地说明上述规则。

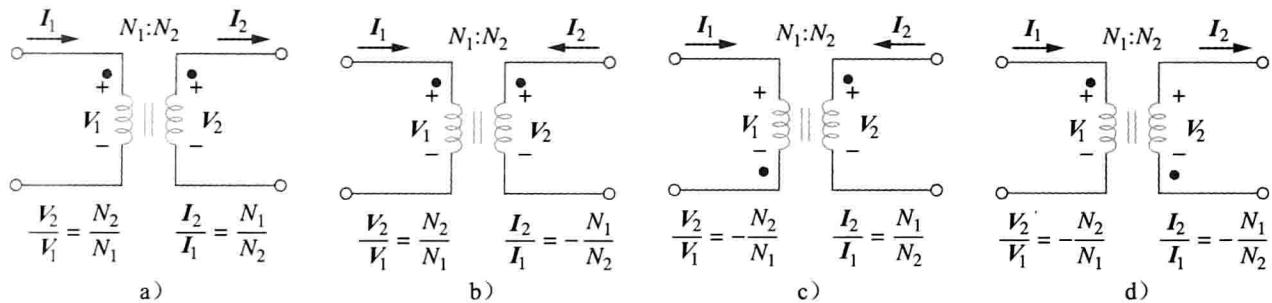


图13-32 说明理想变压器电压极性与电流方向的四个典型电路

利用式(13.52)与式(13.55)，便可以用 V_2 来表示 V_1 ，或用 I_2 来表示 I_1 ，反之亦然，所以：

$$V_1 = \frac{V_2}{n}, \quad V_2 = nV_1 \quad (13.56)$$

$$I_1 = nI_2, \quad I_2 = \frac{I_1}{n} \quad (13.57)$$

一次绕组的复功率为：

$$S_1 = V_1 I_1^* = \frac{V_2}{n} (nI_2)^* = V_2 I_2^* = S_2 \quad (13.58)$$

上式表明，提供给一次侧的复功率没有损耗地都传送到二次侧，即变压器不吸收功率，这一结论应该是可以预期的，因为理想变压器是无损耗的。由式(13.56)与式(13.57)可以得出从图13-31所示电路电源端看进去的输入阻抗为：

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2} \frac{V_2}{I_2} \quad (13.59)$$

由图13-31可见， $V_2/I_2 = Z_L$ ，因此，

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{n^2} \quad (13.60)$$

由于输入阻抗看起来好像是负载阻抗反射到一次侧的阻抗，因此也称为反射阻抗(reflected impedance)。变压器的这种将给定阻抗变换为另一阻抗的能力提供了一种实现最大功率传输的阻抗匹配(impedance matching)方法。阻抗匹配的思想在实际中非常有用，13.9.2节将详细地讨论这一问题。

提示：理想变压器将阻抗映射为匝数比的平方倍。

在分析包含理想变压器的电路时，通常是将阻抗与电源从变压器一侧映射到另一侧，以消除电路中的变压器。例如，在图13-33所示电路中，假设要将

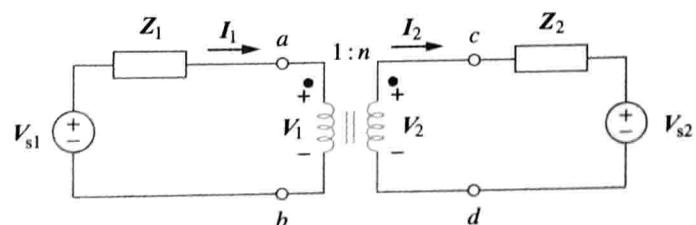
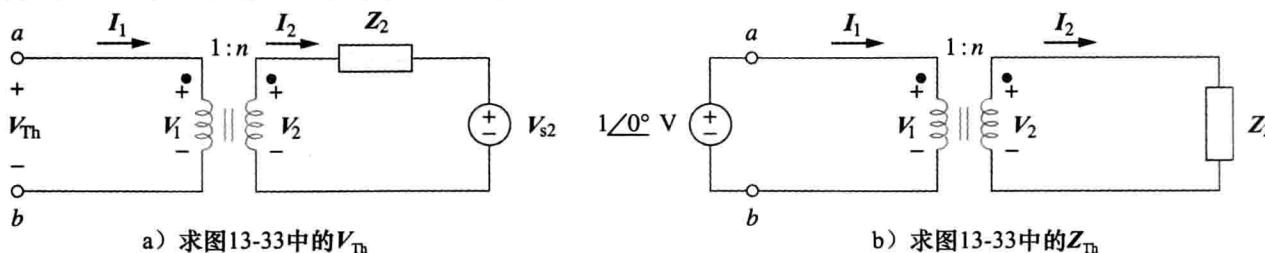


图13-33 求理想变压器的等效电路

变压器的二次电路映射到一次侧。需求出端口 $a-b$ 右侧电路的戴维南等效电路，其中 V_{Th} 为端口处的开路电压，如图 13-34a 所示。

图 13-34 求 V_{Th} 和 Z_{Th}

由于端口 $a-b$ 是开路的，所以 $I_1=0=I_2$ ，从而 $V_2=V_{s2}$ 。因此，由式(13.56)可以得到：

$$V_{Th} = V_1 = \frac{V_2}{n} = \frac{V_{s2}}{n} \quad (13.61)$$

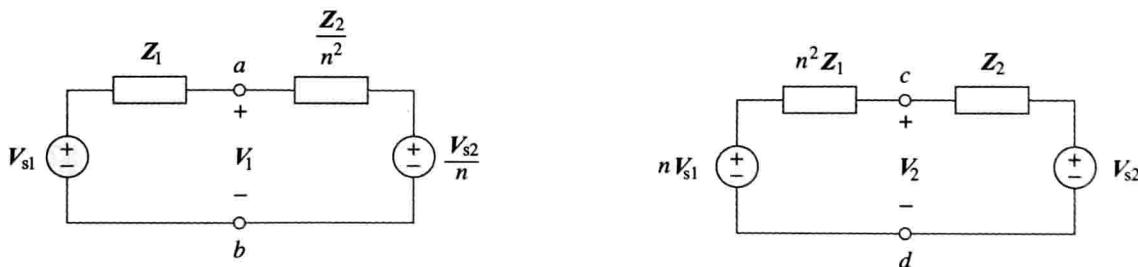
为了确定 Z_{Th} ，将二次绕组的电压源短路，并在端口 $a-b$ 处输入一个单位电压源，如图 13-34b 所示。由式(13.56)与式(13.57)可得， $I_1=nI_2$ 且 $V_1=V_2/n$ ，于是，

$$Z_{Th} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2/n}{nI_2} = \frac{Z_2}{n^2}, \quad V_2 = Z_2 I_2 \quad (13.62)$$

这也是由式(13.60)可以预期的结果。一旦求出 V_{Th} 与 Z_{Th} ，即可用该戴维南等效电路取代图 13-33 所示电路端口 $a-b$ 右侧的部分，得到图 13-35 所示电路。

将二次电路映射到一次侧从而消去变压器的一般规则是：二次阻抗除以 n^2 ，二次电压除以 n ，并且二次电流乘以 n 。

当然，也可以将图 13-33 所示电路的一次侧映射到二次侧，得到图 13-36 所示的等效电路。



将一次电路映射到二次侧从而消去变压器的一般规则是，一次阻抗乘以 n^2 ，一次电压乘以 n ，并且一次电流除以 n 。

根据式(13.58)，不论是按一次侧还是二次侧计算，功率是保持不变的。但是，需要注意的是，这种映射方法仅适用于一次绕组与二次绕组之间无外部连接的情况。当一次绕组与二次绕组之间有外部连接时，通常采用网孔分析法与节点分析法来求解电路。一次绕组与二次绕组之间有外部连接的电路实例如图 13-39 与图 13-40 所示。另外，如果图 13-33 中的同名端位置发生变化，则为了遵循同名端规则，就需要用 $-n$ 取代 n ，如图 13-32 所示。

例 13-7 某理想变压器的额定值为 $2400V/120V$, $9.6kV \cdot A$ ，且二次绕组为 50 匝，试计算：(a)匝数比；(b)一次绕组的匝数；(c)一次绕组与二次绕组的额定电流值。

解：(a) 由于 $V_1 > 2400V > V_2 = 120V$ ，所以这是一个降压变压器。匝数比为：

$$n = \frac{V_2}{V_1} = \frac{120}{2400} = 0.05$$

$$(b) n = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow 0.05 = \frac{50}{N_1}$$

即

$$N_1 = \frac{50}{0.05} = 1000 \text{ (匝)}$$

(c) $S = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 9.6 \text{ kV} \cdot \text{A}$, 因此,

$$I_1 = \frac{9600}{V_1} = \frac{9600}{2400} = 4 \text{ (A)}, \quad I_2 = \frac{9600}{V_2} = \frac{9600}{120} = 80 \text{ (A)}$$

或

$$I_2 = \frac{I_1}{n} = \frac{4}{0.05} = 80 \text{ (A)}$$

练习 13-7 某额定值为 2200V/110V 的理想变压器的一次电流为 5A, 试计算: (a) 匝数比; (b) kV·A 额定值; (c) 二次电流。

例 13-8 对于图 13-37 所示的理想变压器电路, 试求: (a) 电源电流 I_1 ; (b) 输出电压 V_o ; (c) 电源提供的复功率。

解: (a) 20Ω 阻抗可以反射到一次侧, 得到:

$$Z_R = \frac{20}{n^2} = \frac{20}{4} = 5 \text{ (\Omega)}$$

于是:

$$Z_{in} = 4 - j6 + Z_R = 9 - j6 = 10.82 \angle -33.69^\circ \text{ (\Omega)}$$

$$I_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{Z_{in}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{10.82 \angle -33.69^\circ} = 11.09 \angle 33.69^\circ \text{ (A)}$$

(b) 由于 I_1 与 I_2 均从同名端流出, 所以:

$$I_2 = -\frac{1}{n} I_1 = -5.545 \angle 33.69^\circ \text{ (A)}$$

$$V_o = 20I_2 = 110.9 \angle 213.69^\circ \text{ (V)}$$

(c) 电源提供的复功率为:

$$S = V_s I_1^* = (120 \angle 0^\circ)(11.09 \angle -33.69^\circ) = 1330.8 \angle -33.69^\circ \text{ (V} \cdot \text{A})$$

练习 13-8 在图 13-38 所示的理想变压器电路中, 试求 V_o 与电源提供的复功率。

答案: $429.4 \angle 116.57^\circ \text{ V}$,

$17.174 \angle -26.57^\circ \text{ kV} \cdot \text{A}$

例 13-9 计算图 13-39 所示的理想变压器电路中提供给 10Ω 电阻器的功率。

解: 由于本题电路中一次侧与二次侧之间通过一个 30Ω 电阻器直接相连, 所以既不能将该电路映射到二次侧, 也不能映射到一次侧。需应用网孔分析法求解, 对于网孔 1, 有:

$$-120 + (20 + 30)I_1 - 30I_2 + V_1 = 0$$

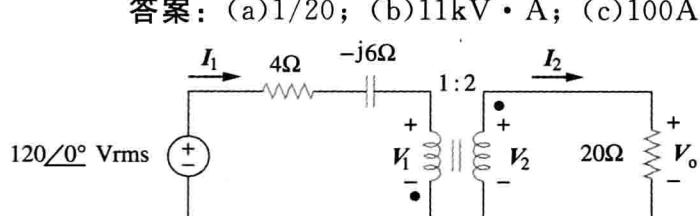


图 13-37 例 13-8 图

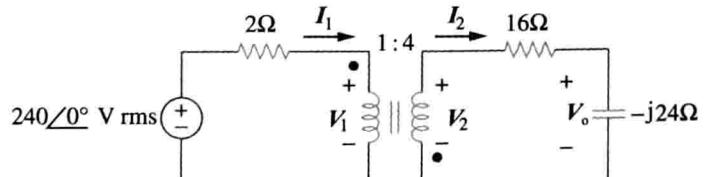


图 13-38 练习 13-8 图

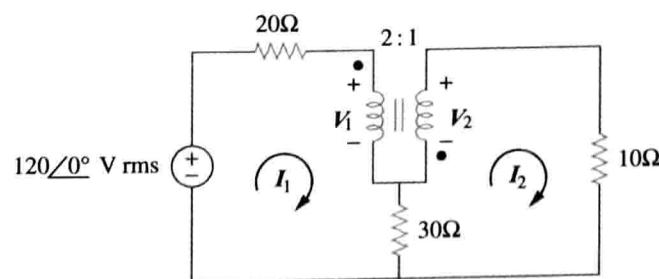


图 13-39 例 13-9 图

即

$$50\mathbf{I}_1 - 30\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1 = 120 \quad (13.9.1)$$

对于网孔 2，有：

$$-\mathbf{V}_2 + (10 + 30)\mathbf{I}_2 - 30\mathbf{I}_1 = 0$$

即

$$-30\mathbf{I}_1 + 40\mathbf{I}_2 - \mathbf{V}_2 = 0 \quad (13.9.2)$$

在变压器两端，有：

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{V}_1 \quad (13.9.3)$$

$$\mathbf{I}_2 = -2\mathbf{I}_1 \quad (13.9.4)$$

(注意， $n=1/2$)于是得到包含四个未知数的四个方程，但本题需要求出的是 \mathbf{I}_2 ，所以在式(13.9.1)与式(13.9.2)中，利用 \mathbf{V}_2 与 \mathbf{I}_2 取代 \mathbf{V}_1 与 \mathbf{I}_1 ，式(13.9.1)变为：

$$-55\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{V}_2 = 120 \quad (13.9.5)$$

式(13.9.2)变为：

$$15\mathbf{I}_2 + 40\mathbf{I}_2 - \mathbf{V}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_2 = 55\mathbf{I}_2 \quad (13.9.6)$$

将式(13.9.6)代入式(13.9.5)，得到：

$$-165\mathbf{I}_2 = 120 \Rightarrow \mathbf{I}_2 = -\frac{120}{165} = -0.7272(\text{A})$$

于是， 10Ω 电阻器吸收的功率为：

$$P = (-0.7272)^2 \times 10 = 5.3(\text{W})$$

练习 13-9 求图 13-40 所示电路中的 V_o 。

答案：48V

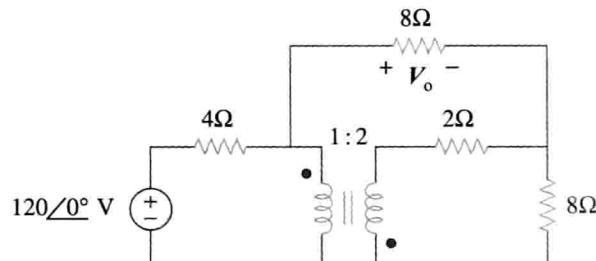


图 13-40 练习 13-9 图

13.6 理想自耦变压器

与之前介绍的传统的两绕组变压器不同，自耦变压器(autotransformer)仅包括一个连续绕组，其一次侧与二次侧之间通过一个称为抽头(tap)的连接点相互关联。抽头通常是可调整的，用以提供升压或降压时所需的匝数比。这样，自耦变压器就可以为其负载提供可变的电压。

自耦变压器是指一次侧与二次侧为同一个绕组的变压器。

图 13-41 所示为一个典型的自耦变压器。如图 13-42 所示，自耦变压器既可以工作在降压模式，也可以工作在升压模式。自耦变压器是功率变压器的一种，它较两绕组的变压器的优势在于，自耦变压器能够实现较大视在功率的传递，例 13-10 将对此予以说明。自耦变压器的另一优势在于，其体积比等效的两绕组变压器更小，其重

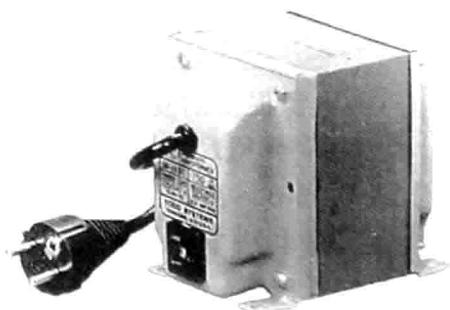


图 13-41 典型的自耦变压器

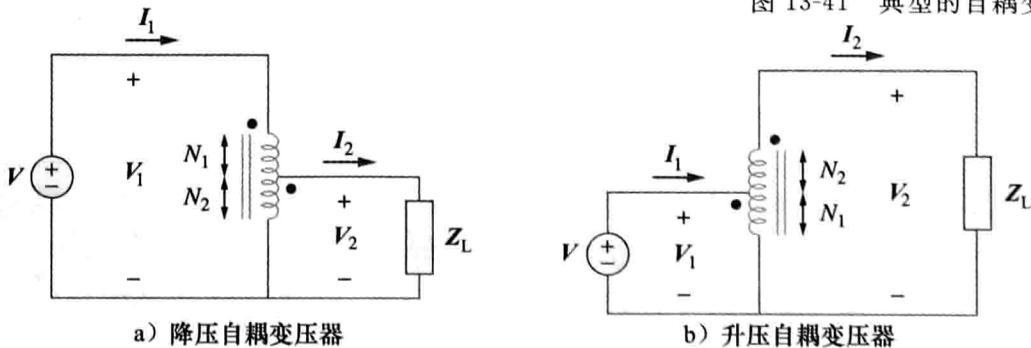


图 13-42 自耦变压器

量比等效的两绕组变压器更轻。但是，由于一次绕组与二次绕组为同一个绕组，因而就失去了电气隔离(electrical isolation，没有直接的电气连接)的功能(13.9.1节将介绍电气隔离属性在传统变压器中的实际应用)。一次绕组与二次绕组之间缺乏电气隔离正是自耦变压器的主要缺点。

之前推导的理想变压器的一些公式同样适用于自耦变压器。对于图13-42a所示的降压自耦变压器，由式(13.52)可得：

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} = 1 + \frac{N_1}{N_2} \quad (13.63)$$

对于理想自耦变压器，同样没有功率损耗，所以一次绕组与二次绕组中的复功率是相同的：

$$S_1 = V_1 I_1^* = S_2 = V_2 I_2^* \quad (13.64)$$

式(13.64)还可以表示为：

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

即

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} \quad (13.65)$$

于是，一次侧与二次侧的电流关系为：

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \quad (13.66)$$

对于图13-42b所示的升压自耦变压器，有：

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_1 + N_2}$$

即

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \quad (13.67)$$

式(13.64)给出的复功率同样适用于升压自耦变压器，因此式(13.65)对于升压自耦变压器也是成立的，于是，一次侧与二次侧的电流关系为：

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = 1 + \frac{N_2}{N_1} \quad (13.68)$$

传统变压器与自耦变压器之间的主要区别在于：自耦变压器的一次侧与二次侧之间不仅存在磁耦合，而且存在电导耦合。在无需电气隔离的应用场合，可以利用自耦变压器取代传统变压器。

例13-10 比较图13-43a所示的两绕组变压器与图13-43b所示的自耦变压器的额定功率值。

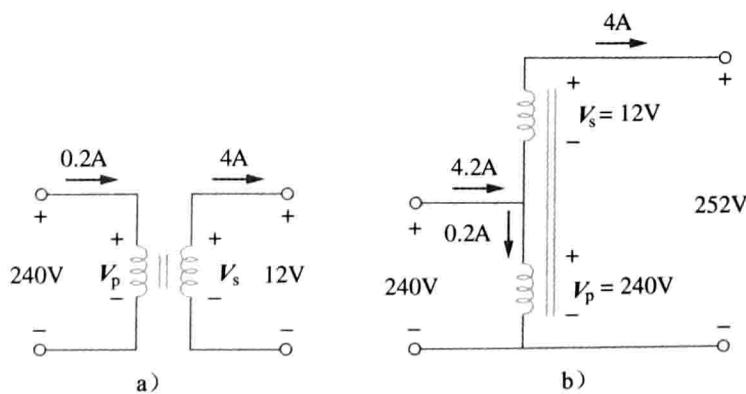


图13-43 例13-10图

解：虽然自耦变压器的一次绕组与二次绕组是同一个连续绕组，但在图13-43b中，为了清楚起见，将它们分开画出。注意，图13-43b所示自耦变压器各绕组中的电流和电压与图13-43a

所示两绕组变压器的电流和电压是相同的，这是比较这两个变压器额定功率的基础。

对于两绕组变压器而言，其额定功率为：

$$S_1 = 0.2 \times 240 = 48(\text{V} \cdot \text{A}), \quad S_2 = 4 \times 12 = 48(\text{V} \cdot \text{A})$$

对于自耦变压器而言，其额定功率为：

$$S_1 = 4.2 \times 240 = 1008(\text{V} \cdot \text{A}), \quad S_2 = 4 \times 252 = 1008(\text{V} \cdot \text{A})$$

显然，自耦变压器的额定功率是两绕组变压器的 21 倍。

 **练习 13-10** 参见图 13-43 所示电路，如果两绕组变压器是个 60V·A、120V/10V 的变压器，试问自耦变压器的额定功率为多少？

答案：780V·A

例 13-11 参见图 13-44 所示的自耦变压

器电路，试计算：(a)当 $Z_L = (8 + j6)\Omega$ 时的 I_1 、 I_2 与 I_o ；(b)提供给负载的复功率。

解：(a)这是一个 $N_1 = 80$ 、 $N_2 = 120$ 的升压自耦变压器，由于 $V_1 = 120 \angle 30^\circ$ ，于是由式(13.67)可以求出 V_2 ：

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{80}{200}$$

即

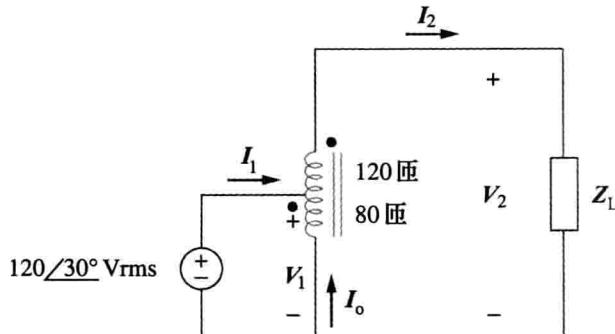


图 13-44 例 13-11 图

$$V_2 = \frac{200}{80}V_1 = \frac{200}{80}(120 \angle 30^\circ) = 300 \angle 30^\circ (\text{V})$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_L} = \frac{300 \angle 30^\circ}{8 + j6} = \frac{300 \angle 30^\circ}{10 \angle 36.87^\circ} = 30 \angle -6.87^\circ (\text{A})$$

但是：

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1} = \frac{200}{80}$$

即

$$I_1 = \frac{200}{80}I_2 = \frac{200}{80}(30 \angle -6.87^\circ) = 75 \angle -6.87^\circ (\text{A})$$

在抽头处利用 KCL，可以得到：

$$I_1 + I_o = I_2$$

即

$$I_o = I_2 - I_1 = 30 \angle -6.87^\circ - 75 \angle -6.87^\circ = 45 \angle 173.13^\circ (\text{A})$$

(b)提供给负载的复功率为：

$$S_2 = V_2 I_2^* = |I_2|^2 Z_L = 30^2 (10 \angle 36.87^\circ) \\ = 9 \angle 36.87^\circ \text{ kV} \cdot \text{A}$$

 **练习 13-11** 在图 13-45 所示的自耦变压器电路中，试求电流 I_1 、 I_2 与 I_o 。假设 $V_1 = 2.5\text{kV}$ ， $V_2 = 1\text{kV}$ 。答案：6.4A，16A，9.6A

† 13.7 三相变压器

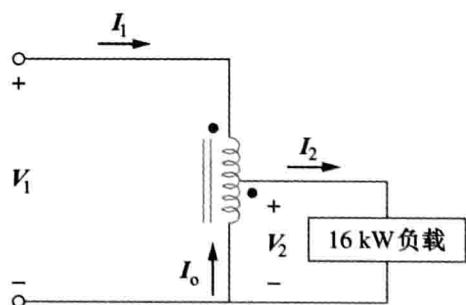


图 13-45 练习 13-11 图

为满足三相电传输的要求，就需要与三相电工作相兼容的变压器连接。可以通过如下两种方式实现上述变压器连接：一种是连接三个单相变压器，构成所谓的变压器组 (transformer bank)，另一种是采用专用的三相变压器。对于相同的 $\text{kV} \cdot \text{A}$ 额定功率，三相变压器比三个单相变压器体积小、价格低。如果采用单相变压器，必须保证三个变压器的匝数比 n 一致，从而构成平衡的三相系统。在三相系统中，三个单相变压器或者三相变

压器有四种标准的联结方式：Y-Y、△-△、Y-△与△-Y。

无论何种联结方式，其总的视在功率 S_T ，有功功率 P_T 与无功功率 Q_T 为：

$$S_T = \sqrt{3}V_L I_L \quad (13.69a)$$

$$P_T = S_T \cos\theta = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta \quad (13.69b)$$

$$Q_T = S_T \sin\theta = \sqrt{3}V_L I_L \sin\theta \quad (13.69c)$$

其中， V_L 与 I_L 分别等于一次侧的线电压 V_{Lp} 与线电流 I_{Lp} ，或者分别等于二次侧的线电压 V_{Ls} 与线电流 I_{Ls} 。因为功率在理想变压器中必须是守恒的，所以由式(13.69)可知，对于四种联结中的每一种，都有 $V_{Ls} I_{Ls} = V_{Lp} I_{Lp}$ 。

对于图 13-46 所示的 Y-Y 联结，由式(13.52)与式(13.55)可知，一次线电压 V_{Lp} 、二次线电压 V_{Ls} 、一次线电流 I_{Lp} 和二次线电流 I_{Ls} 与变压器每一相的匝数比 n 之间的关系为：

$$V_{Ls} = nV_{Lp} \quad (13.70a)$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n} \quad (13.70b)$$

对于图 13-47 所示的△-△ 联结，式(13.70)同样适用于其线电压与线电流。这种联结的一个独特的性质是：如果其中某个变压器需要取走进行维修或维护，其他两个变压器构成开路△联结，则仍然能够以原三相变压器的简化方式提供三相电压。

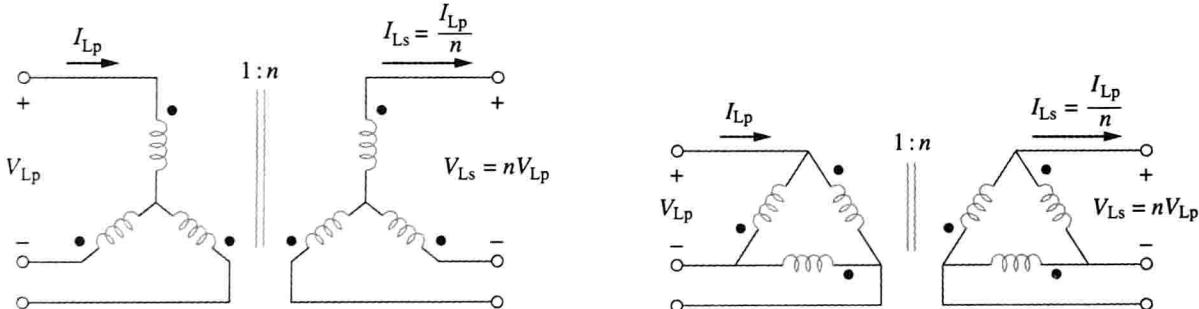


图 13-46 Y-Y 三相变压器联结

图 13-47 △-△ 三相变压器联结

对于图 13-48 所示的 Y-△ 联结，除变压器的每相匝数比 n 以外，其线-相值之间还存在一个值为 $\sqrt{3}$ 的因子，所以：

$$V_{Ls} = \frac{nV_{Lp}}{\sqrt{3}} \quad (13.71a)$$

$$I_{Ls} = \frac{\sqrt{3}I_{Lp}}{n} \quad (13.71b)$$

同理，对于图 13-49 所示的△-Y 联结，有：

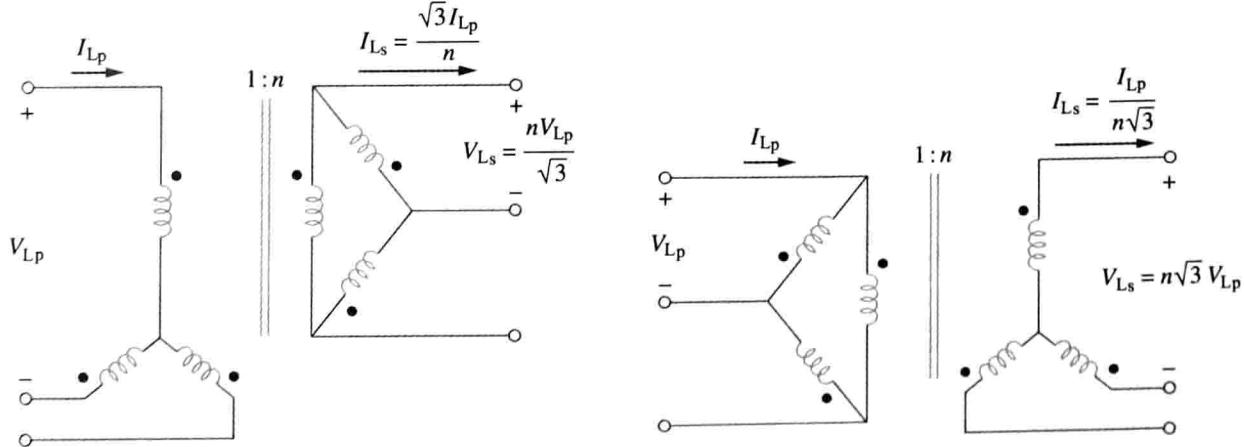


图 13-48 Y-△ 三相变压器联结

图 13-49 △-Y 三相变压器联结

$$V_{Ls} = n\sqrt{3}V_{Lp} \quad (13.72a)$$

$$I_{Ls} = \frac{I_{Lp}}{n\sqrt{3}} \quad (13.72b)$$

例 13-12 某三相变压器为图 13-50 所示的 42kV·A 对称三相负载供电。 (a) 确定变压器的连接方式；(b) 求一次侧的线电压与线电流；(c) 确定变压器组中每个变压器的 kV·A 额定功率。假设变压器均为理想的。

解：(a) 仔细观察图 13-50 所示电路可知，变压器的一次侧为 Y 形联结，而二次侧为△形联结，因此三相变压器的联结为 Y-△ 联结，与图 13-48 所示相同。

(b) 已知负载总的视在功率为 $S_T = 42\text{kV}\cdot\text{A}$ ，匝数比为 $n = 5$ ，二次线电压为 $V_{Ls} = 240\text{V}$ ，利用式(13.69a)可以求出二次线电流为：

$$I_{Ls} = \frac{S_T}{\sqrt{3}V_{Ls}} = \frac{42000}{\sqrt{3} \times 240} = 101(\text{A})$$

由式(13.71)可以得到：

$$I_{Lp} = \frac{n}{\sqrt{3}} I_{Ls} = \frac{5 \times 101}{\sqrt{3}} = 292(\text{A})$$

$$V_{Lp} = \frac{\sqrt{3}}{n} V_{Ls} = \frac{\sqrt{3} \times 240}{5} = 83.14(\text{V})$$

(c) 由于负载是对称的，并且变压器为无功耗的理想变压器，所以每个变压器平分其总负载，即每个变压器的 kV·A 额定功率为 $S = S_T/3 = 14\text{kV}\cdot\text{A}$ 。另外，变压器的额定功率也可以由其一次侧或二次侧的相电流与相电压的乘积确定。例如，本题的初级为△形联结，所以相电压与线电压相等，均为 240V，而相电流为 $(I_{Lp}/\sqrt{3} = 58.34)\text{A}$ ，因此， $S = 240 \times 58.34 = 14(\text{kV}\cdot\text{A})$ 。

练习 13-12 利用一个三相△-△变压器降低 625kV 线电压，为工作线电压为 12.5kV 的一家工厂供电，该工厂在功率因数为 85% (滞后) 时提取的功率为 40MW。试求：

(a) 工厂所提取的电流；(b) 匝数比；(c) 变压器的一次电流；(d) 各变压器的负载功率。

答案：(a) 2.174kA；(b) 0.02；(c) 43.47A；(d) 15.69MV·A

13.8 基于 PSpice 的磁耦合电路分析

除必须遵循同名端规则外，利用 PSpice 软件分析磁耦合电路与分析电感器电路的方法是类似的。在 PSpice 电路原理图中，当电感器 L 无旋转水平放置时，同名端总是位于电感器的引脚 1 处，即左边端点。所以当电感器逆时针旋转 90° 时，同名端即引脚 1 将位于下方，因为旋转总是围绕引脚 1 进行的。磁耦合电感器按照同名端规则放置在电路中，并设定好其取值，单位为亨利(H)，就可以利用耦合符号 K_LINEAR 来定义耦合属性。对于每一对耦合电感器，应按照如下步骤予以定义：

1. 选择 Draw/Get New Part 菜单并输入 K_LINEAR。
2. 回车或单击 OK 按钮，将 K_LINEAR 符号放置在电路原理图中，如图 13-51 所示（注意，K_LINEAR 并不是一个实际的元件，因此没有引脚）。
3. 双击耦合框 COUPLING，设置耦合系数值 k 。

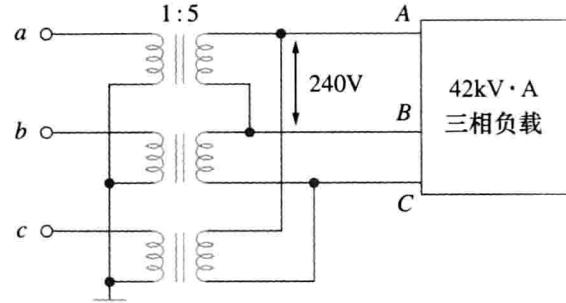


图 13-50 例 13-12 图

K	K1
K_Linear	
COUPLING=1	

图 13-51 定义耦合系数的
K_LINEAR

4. 双击耦合符号框 K, 输入耦合电感器的部件名 L_i , $i=1, 2, \dots, 6$ 。例如, 当 L_{20} 与 L_{23} 为耦合电感器时, 则设置 $L_1=L_{20}$ 且 $L_2=L_{23}$ 。 L_1 与至少另一个 L_i 必须被赋值, 而其他 L_i 则可以空白。

在步骤4中, 最多可以定义6个耦合系数相同的耦合电感器。

对于空心变压器, 部件名称为 XFRM_LINEAR, 选择 Draw/Get Part Name 菜单, 并输入部件名称即可将其插入电路, 或者从库文件 analog.slb 中选择部件名称插入电路。如图 13-52a 所示, 线性变压器的主要属性包括: 耦合系数 k , 电感值 L_1 与 L_2 (单位为 H)。如果定义互感 M , 则必须利用 M 与 L_1 、 L_2 的值计算 k 值, 注意, $0 < k < 1$ 。

对于理想变压器, 部件名称为 XFRM_NONLINEAR, 可以在库文件 breakout.slb 中找到, 选择并单击 Draw/Get Part Name, 即可输入其部件名称。其属性为耦合系数以及 L_1 、 L_2 的匝数, 如图 13-52b 所示, 互耦合系数的值为 $k=1$ 。

PSpice 软件中还提供另外一些变压器结构, 本书暂不讨论。

例 13-13 利用 PSpice 求解图 13-53 所示电路中的 i_1 、 i_2 与 i_3 。

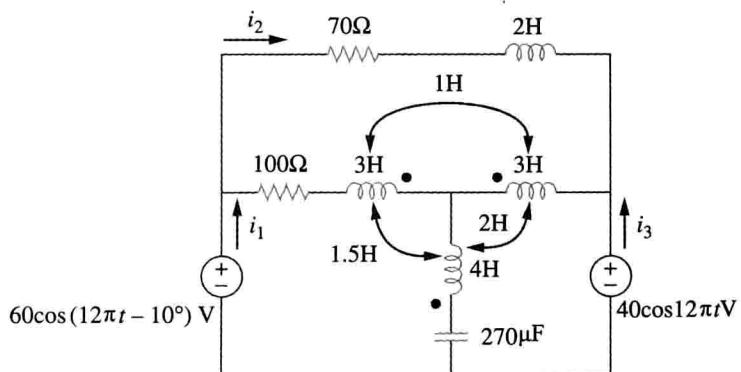
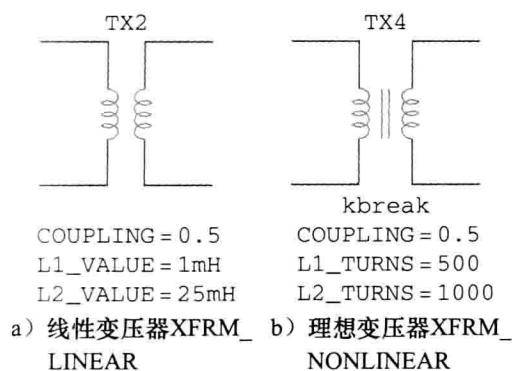


图 13-52 变压器部件

图 13-53 例 13-13 图

解: 三个耦合电感器的耦合系数为:

$$k_{12} = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 3}} = 0.3333, \quad k_{13} = \frac{M_{13}}{\sqrt{L_1 L_3}} = \frac{1.5}{\sqrt{3 \times 4}} = 0.433$$

$$k_{23} = \frac{M_{23}}{\sqrt{L_2 L_3}} = \frac{2}{\sqrt{3 \times 4}} = 0.5774$$

由图 13-53 可得其工作频率为 $\omega = 12\pi = 2\pi f \rightarrow f = 6\text{Hz}$ 。

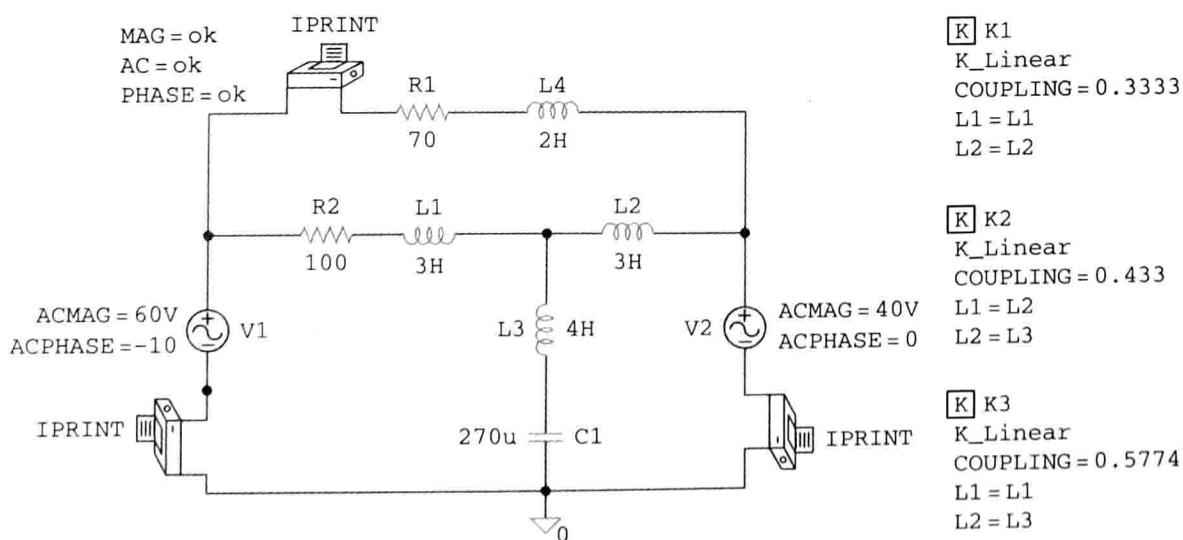


图 13-54 图 13-53 的 PSpice 原理图

该电路的 PSpice 原理图如图 13-54 所示，注意同名端规则在该图中是如何体现的。对于 L_2 而言，同名端位于引脚 1(电感器左端)，因此其位置无需旋转；对于 L_1 而言，为了使同名端位于电感器的右端，该电感器必须旋转 180°；对于 L_3 而言，电感必须转 90°，这样同名端才能位于下端。注意，2H 电感器(L_4)是无耦合电感。对于上述三个耦合电感器，利用库文件 analog.lib 中提供的三个 K_LINEAR 部件设置其属性(双击对话框中的符号 K)：

```

K1 - K_LINEAR
L1 = L1
L2 = L2
COUPLING = 0.3333

K2 - K_LINEAR
L1 = L2
L2 = L3
COUPLING = 0.433

K3 - K_LINEAR
L1 = L1
L2 = L3
COUPLING = 0.5774

```

提示：上述值是电路原理图中电感器的参考命名。

在适当的支路加入三个伪元件 IPRINT，用于确定所要求解的电流 i_1 、 i_2 与 i_3 。对于交流单频分析，选择 Analysis/Setup/AC Sweep 并在对话框中输入 Total Pts=1，Start Freq=6 和 Final Freq=6，存储电路原理图之后，运行 Analysis/Simulate 程序对电路进行仿真，得到如下输出文件：

FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)
6.000E+00	2.114E-01	-7.575E+01
FREQ	IM(V_PRINT1)	IP(V_PRINT1)
6.000E+00	4.654E-01	-7.025E+01
FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
6.000E+00	1.095E-01	1.715E+01

由此得到：

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.4654 \angle -70.25^\circ, \quad I_2 = 0.2114 \angle -75.75^\circ \\ I_3 &= 0.1095 \angle 17.15^\circ \end{aligned}$$

于是，其时域表达式为：

$$\begin{aligned} i_1 &= 0.4654 \cos(12\pi t - 70.25^\circ) A, \quad i_2 = 0.2114 \cos(12\pi t - 75.75^\circ) A \\ i_3 &= 0.1095 \cos(12\pi t + 17.15^\circ) A \end{aligned}$$

练习 13-13 利用 PSpice 求解图 13-55 所示电路中的 i_o 。

答案： $2.012 \cos(4t + 68.52^\circ) A$

例 13-14 利用 PSpice 求解图 13-56 所示理想变压器电路中的 V_1 与 V_2 。

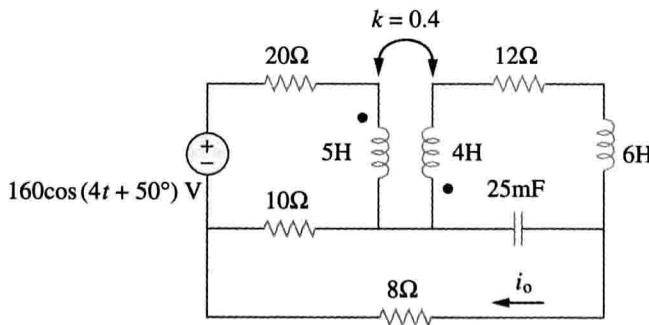


图 13-55 练习 13-13 图

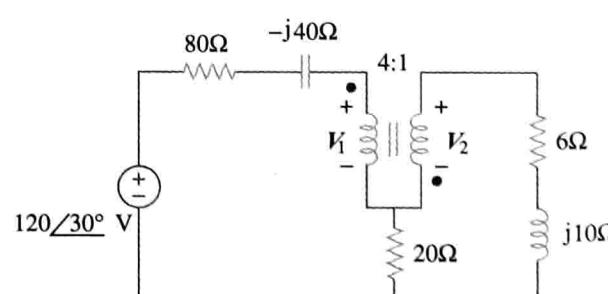


图 13-56 例 13-14 图

解：1. 明确问题。本例所要解决的问题已明确，可以进行下一个步骤。

2. 列出已知条件。本题要求确定理想变压器的输入电压与输出电压，同时要求利用

PSpice 求解这些电压。

3. 确定备选方案。本题要求利用 PSpice 求解，之后可以利用网孔分析法进行验证。

4. 尝试求解。假设 $\omega=1$ ，可求出相应元件的电容值与电感值：

$$j10 = j\omega L \Rightarrow L = 10H$$

$$-j40 = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow C = 25mF$$

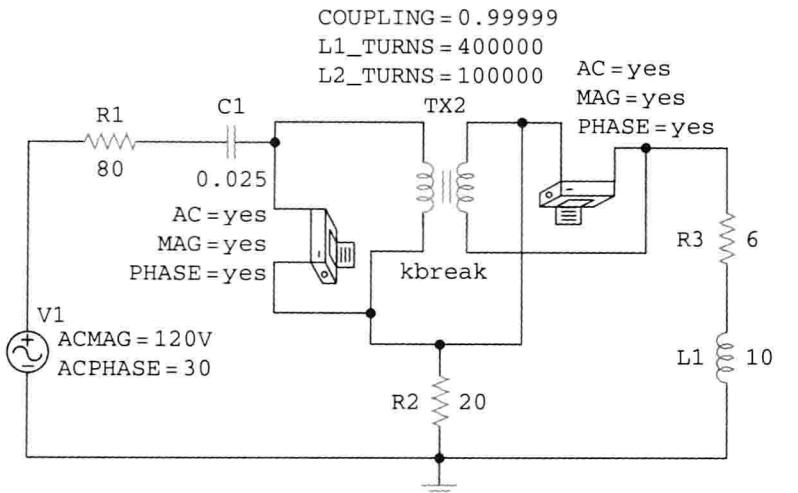


图 13-57 图 13-56 的 PSpice 原理图

图 13-57 所示为 PSpice 电路原理图，对于理想变压器，设耦合系数为 0.99999，匝数为 400 000 和 100 000。将两个伪元件 VPRINT2 连接在变压器两端，以便确定 V_1 与 V_2 。对于单频分析，应在 Analysis/Setup/AC Sweep 对话框中输入 Total Pts=1, Start Freq=0.1592, Final Freq=0.1592。存储电路原理图后，运行 Analysis/simulate 程序仿真电路，得到如下输出文件：

```
FREQ      VM($N_0003,$N_0006)  VP($N_0003,$N_0006)
1.592E-01  9.112E+01          3.792E+01

FREQ      VM($N_0006,$N_0005)  VP($N_0006,$N_0005)
1.592E-01  2.278E+01          -1.421E+02
```

由此可以得到：

$$V_1 = 91.12 / 37.92^\circ \text{ V}, \quad V_2 = 22.78 / -142.1^\circ \text{ V}$$

提示：对于理想变压器而言，其一次绕组与二次绕组的电感值均为无穷大。

5. 评价结果。下面用网孔分析法验证所得到的结果。

对于网孔 1： $-120 / 30^\circ + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 - I_2) = 0$

对于网孔 2： $20(-I_1 + I_2) - V_2 + (6 + j10)I_2 = 0$

$V_2 = -V_1/4, I_2 = -4I_1$ ，由此得到：

$$-120 / 30^\circ + (80 - j40)I_1 + V_1 + 20(I_1 + 4I_1) = 0$$

$$(180 - j40)I_1 + V_1 = 120 / 30^\circ$$

$$20(-I_1 - 4I_1) + V_1/4 + (6 + j10)(-4I_1) = 0$$

$$(-124 - j40)I_1 + 0.25V_1 = 0, \quad I_1 = V_1/(496 + j160)$$

将其代入第一个方程可以得到：

$$(180 - j40)V_1/(496 + j160) + V_1 = 120 / 30^\circ$$

$$(184.39 / -12.53^\circ / 521.2 / 17.88^\circ) V_1 + V_1 = (0.3538 / -30.41^\circ + 1) V_1$$

$$= (0.3051 + 1 - j0.17909) V_1 = 120 / 30^\circ$$

$$V_1 = 120 / 30^\circ / 1.3173 / -7.81^\circ = 91.1 / 37.81^\circ \text{ V}, \quad V_2 = 22.78 / -142.19^\circ \text{ V}$$

验证了所得到的答案。

6. 是否满意？本题的求解过程与答案的验证均令人满意，可以将其作为本题的答案。

练习 13-14 利用 PSpice 求解图 13-58 所示电路中的 V_1 与 V_2 。

答案： $V_1 = 153 \angle 2.18^\circ$ V,
 $V_2 = 230.2 \angle 2.09^\circ$ V

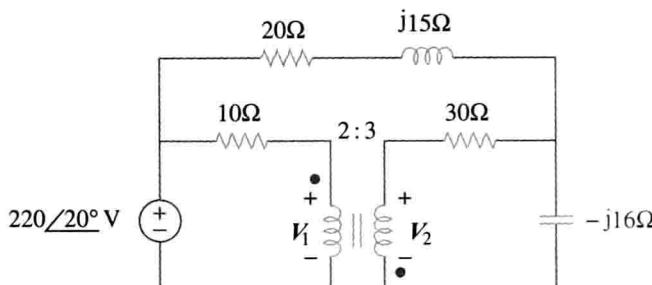


图 13-58 练习 13-14 图

† 13.9 应用实例

变压器通常是体积最大，重量最重，也是价格最贵的电路元件。但是，它却是电子电路中不可缺少的无源设备。在众多高效设备中，变压器的效率一般为 95%，但是也可以达到 99%。变压器的应用不胜枚举，例如：

- 升高或降低电压与电流，使其适合于电力传输与分配。
- 将电路的一部分与另一部分隔离（即在没有任何电气连接的情况下传输功率）。
- 用作阻抗匹配设备，以实现最大功率传输。
- 用于感应性响应的选频电路中。

由于变压器应用的多样性，所以出现了许多专用变压器（本章仅讨论其中几种类型），如电压变压器、电流变换器、功率转换器、配电变压器、阻抗匹配变压器、声频变压器、单相变压器、三相变压器、整流变压器、反相变压器等。本节仅介绍变压器的三种重要应用：变压器作为隔离设备、变压器作为匹配器以及电力配电系统。

提示：关于各类变压器的详细介绍，可以参阅 W. M. Flanagan 编著的《变压器设计与应用手册》第二版（纽约：McGraw-Hill 出版集团，1993）。

13.9.1 隔离变压器

当两个设备之间不存在物理连接时，则称这两个设备之间电气隔离。变压器的一次电路与二次电路之间无电气连接，能量是通过磁耦合传输的。下面介绍利用变压器电气隔离特性的三种实际应用。

首先，考虑图 13-59 所示电路。图中整流器是将交流电转换为直流电的电子电路，变压器在该电路中的作用是将交流电耦合到整流器中。这里的变压器起两个作用：第一个作用是升高或降低电压；第二个作用是在交流电源与整流器之间提供电气隔离，从而降低电子电路在工作时出现电击的危险性。

隔离变压器的第二个应用实例是用于耦合放大器的两级，从而防止前一级的直流电压影响下一级的直流偏置，直流偏置是晶体管放大器或其他电子电路在要求模式下工作所需的直流电压。放大器的各级都有其在特定模式下工作所需的偏置电压，如果没有变压器提供直流隔离，就会影响各级特定的工作模式。如图 13-60 所示，接入变压器后，仅交流信号从前一级耦合到后一级，直流电压源中是不存在磁耦合的。在无线电接收机或电视接收机中，变压器通常用

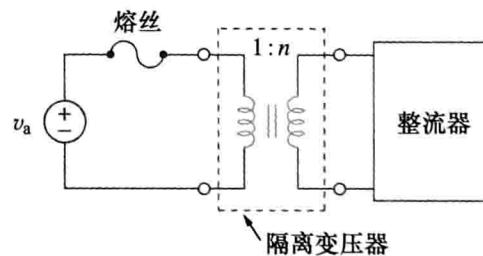


图 13-59 用于隔离交流电源与整流器的变压器

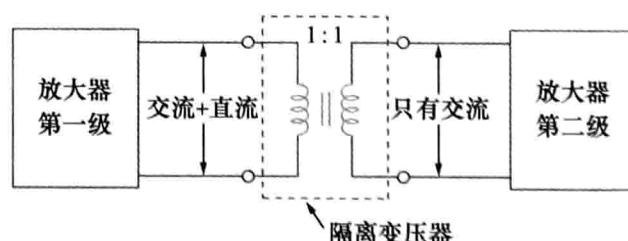


图 13-60 在放大器两级之间提供电气隔离的变压器

于高频放大器各级之间的耦合。当变压器仅用于提供电气隔离时，应将其匝数比制作成 1，即隔离变压器的 $n=1$ 。

隔离变压器的第三个应用实例是测量 13.2kV 线路两端的电压。将电压表直接接到这种高压线路中是非常不安全的。此时采用变压器既可以起到隔离电力线与电压表的作用，又可以将电压降至安全的电平，如图 13-61 所示。如果利用电压表测量变压器的二次电压，则可根据匝数比确定其一次线电压。

例 13-15 确定图 13-62 所示电路中负载两端的电压。

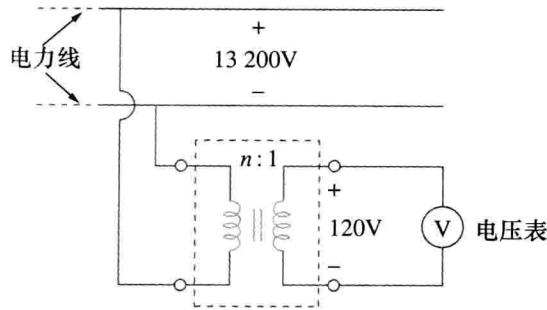


图 13-61 在电力线与电压表之间提供隔离

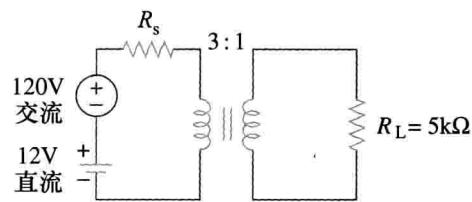


图 13-62 例 13-15 图

解：利用叠加定理求解负载电压，令 $v_L = v_{L1} + v_{L2}$ ，其中 v_{L1} 为由直流电源在负载上产生的电压， v_{L2} 为由交流电源在负载上产生的电压。仅包含直流电源与交流电源的电路如图 13-63 所示。由直流电源引起的负载电压为零，因为要在二次电路中产生感应电压，一次侧必须是时变电压源，于是， $v_{L1}=0$ 。对于交流电源，其内阻 R_s 很小可以忽略：

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{120} = \frac{1}{3}, \quad V_2 = \frac{120}{3} = 40V$$

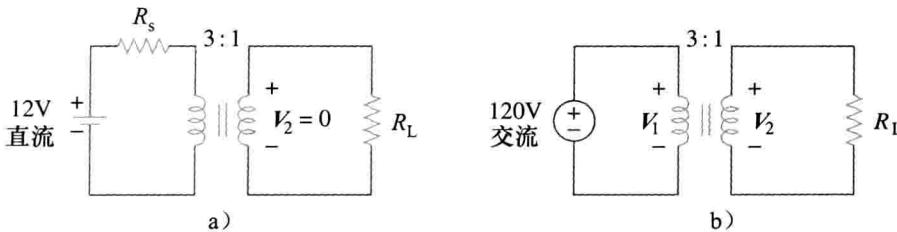


图 13-63 例 13-15 图

因此， $V_{L2}=40V$ 交流，即 $v_{L2}=40\cos\omega t$ 。即只有交流电压才能通过变压器达到负载。本例也说明了变压器的直流隔离作用。

练习 13-15 参见图 13-61 所示电路，试计算将 13.2kV 线电压降至 120V 安全电压所要求的变压器的匝数比。

答案：110

13.9.2 匹配变压器

之前已经介绍过，实现最大功率传输的条件是负载电阻 R_L 必须与电源电阻 R_s 匹配，但在大多数情况下， R_L 与 R_s 是不匹配的，而且两者都是固定的，不能改变。然而，可以利用铁心变压器实现负载电阻与电源电阻相匹配，该过程称为阻抗匹配。例如，扬声器与音频功率放大器相连接时，就需要采用变压器，因为扬声器的电阻只有几欧姆，而音频功率放大器的内部电阻却高达几千欧姆。

考虑图 13-64 所示电路，由式(13.60)可知，理想变压器将其负载阻抗通过比例因子 n^2 反射到一次侧。为使反射负载 R_L/n^2 与电源电阻 R_s 相匹配，应该使得：

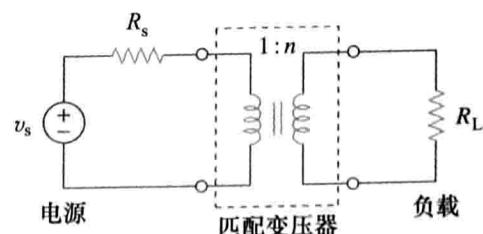


图 13-64 用于阻抗匹配的变压器

$$R_s = \frac{R_L}{n^2} \quad (13.73)$$

选择适当的匝数比 n 就可以满足式(13.73)。由式(13.73)可知, 当 $R_s > R_L$ 时, 需采用降压变压器($n < 1$)实现阻抗匹配; 当 $R_s < R_L$ 时, 则需采用升压变压器($n > 1$)实现阻抗匹配。

例 13-16 图 13-65 所示的理想变压器用于匹配放大电路与扬声器, 从而使扬声器的功率最大, 放大器的戴维南阻抗(输出阻抗)为 192Ω , 而扬声器的内部阻抗为 12Ω , 计算变压器的匝数比。

解: 利用戴维南等效电路取代放大器, 并将扬声器的阻抗 $Z_L = 12\Omega$ 反射到理想变压器的一次侧, 得到图 13-66 所示的电路。要实现最大功率传输, 必须满足:

$$Z_{Th} = \frac{Z_L}{n^2}, \quad n^2 = \frac{Z_L}{Z_{Th}} = \frac{12}{192} = \frac{1}{16}$$

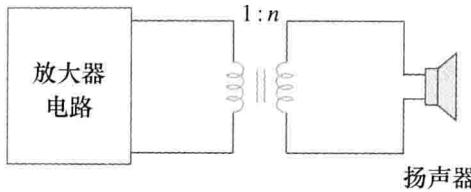


图 13-65 例 13-16 图: 利用理想变压器实现放大器与扬声器的阻抗匹配

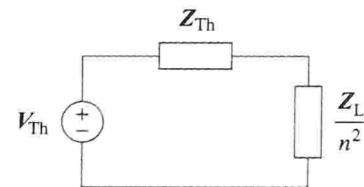


图 13-66 图 13-65 的等效电路

所以, 匝数比为 $n=1/4=0.25$ 。

利用 $P=I^2R$ 可以证明, 传送给扬声器的功率的确比不采用理想变压器时大得多, 如果不采用理想变压器, 将放大器与扬声器直接相连, 则传送给扬声器的功率为:

$$P_L = \left(\frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} \right)^2 Z_L = 288V_{Th}^2 (\mu W)$$

采用变压器后, 一次侧与二次侧的电流为:

$$I_p = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L/n^2}, \quad I_s = \frac{I_p}{n}$$

因此:

$$P_L = I_s^2 Z_L = \left(\frac{V_{Th}/n}{Z_{Th} + Z_L/n^2} \right)^2 Z_L = \left(\frac{nV_{Th}}{n^2 Z_{Th} + Z_L} \right)^2 Z_L = 1302V_{Th}^2 (\mu W)$$

证实了前面的说法。

 **练习 13-16** 要实现 400Ω 负载与内部阻抗为 $2.5\text{k}\Omega$ 的电源匹配, 试计算所需理想变压器的匝数比, 并求出电源电压为 60V 时的负载电压。 答案: 0.4, 12V

13.9.3 电力配送

电力系统主要由三部分组成: 发电、输电与配电。本地电力公司的发电厂在大约 18kV 时发出几百兆伏安($\text{MV} \cdot \text{A}$)的功率, 利用三相升压变压器将所产生的电功率输送至传输线上, 如图 13-67 所示。为什么要用升压器呢? 假设要将 $100\,000\text{V} \cdot \text{A}$ 的电功率输送到 50km 以外的地方, 由于 $S=VI$, 如果线电压为 1000V , 则传输线上必须承载 100A 的电流负荷, 这就要求传输线的直径很大。但是, 如果线电压为 $10\,000\text{V}$, 则传输线的电流负荷仅 10A , 电流减小使得所需的导线尺寸也相应地减小, 在最小化传输线损耗 I^2R 的同时, 也大大节省了材料开销。为了使损耗最小, 就需要采用一个升压变压器。否则, 就会有大部分电功率消耗在传输线上。变压器能够实现升压、降压以及经济的配电功能正是电力传输中广泛采用交流发电而不是直流发电的主要原因之一。因此, 在一定的发电功率

下，电压越高越好。目前，实用中的最高电压为1MV，随着研究和实验的进展，电压还有可能进一步提高。

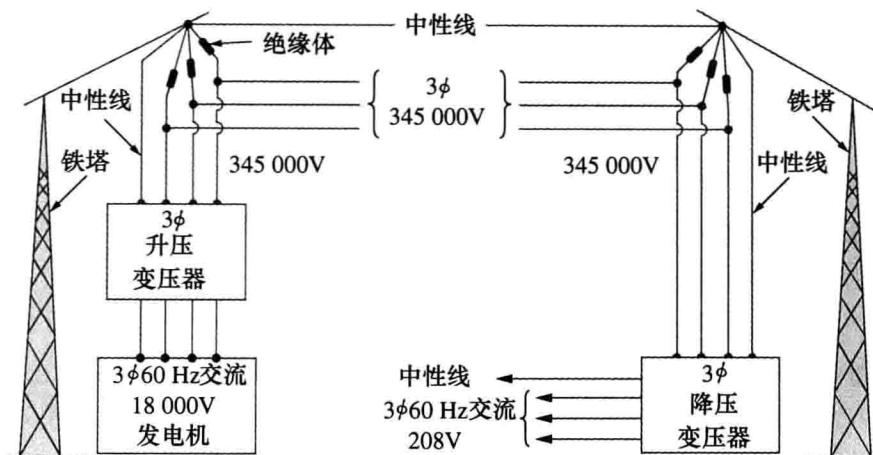


图 13-67 典型的电力输送配电系统

A. Marcus and C. M. Thomson, Electricity for Technicians, 2nd edition, ©1975, p. 337.

Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

提示：为什么升高电压不会增大电流，从而使损耗 I^2R 也增加呢？因为 $I=V_1/R$ ，其中 V_1 为传输线发送端与接收端之间的电位差，而被升高的电压为发送端的电压 V ，而不是 V_1 。如果接收端电压为 V_R ，则 $V_1=V-V_R$ 。因为 V 与 V_R 非常接近，所以即使电压 V 升高了， V_1 仍然是很小的。

除发电厂外，电能通过电力网(power grid)发送到几百英里以外的地方。电网中三相电是通过架设在各种尺寸、各种形状的铁塔上的传输线输送的。(铝制、钢加强型)传输线的典型直径高达40mm，并能承载高达1380A的电流负荷。

在变电站，利用配电变压器降压，降压过程通常是分级进行的。电力既可以通过架设的电缆，也可以通过地下电缆配送给本地用户。变电站负责给居民、商业或工业用户配电。在接收端，居民用户最终得到的是120V/240V电源，而工业或商业用户的馈电电压更高，如460V/208V等。居民用户的供电通常由架设在电力公司电线杆上的配电变压器实现。在需要直流电的情况下，可以将交流电转换为直流电。

例 13-17 某配送变压器用于为家庭供电，如图13-68所示。用电负载包括：8只100W灯泡，一台350W电视机以及一个15kW厨房用具。如果变压器的二次绕组为72匝，试计算：(a)一次绕组的匝数；(b)二次绕组中的电流 I_p 。

解：(a)由于本题仅关心电压与电流的大小，所以同名端的位置并不重要，由于：

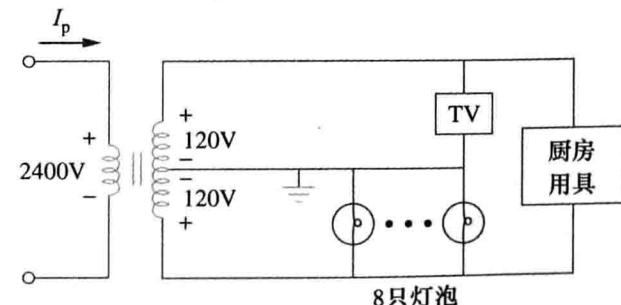


图 13-68 例 13.17 图

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s}$$

得到：

$$N_p = N_s \frac{V_p}{V_s} = 72 \times \frac{2400}{240} = 720(\text{匝})$$

(b)负载吸收的总功率为：

$$S = 8 \times 100 + 350 + 15000 = 16.15(\text{kW})$$

$S=V_p I_p=V_s I_s$ ，所以：

$$I_p = \frac{S}{V_p} = \frac{16\ 150}{2400} = 6.729(\text{A})$$

练习 13-17 在例 13-17 中, 如果利用 12 只 60W 的灯泡取代 8 只 100W 的灯泡, 并且利用 4.5kW 空调器取代厨房用具, 试求: (a)电源提供的总功率; (b)一次绕组中的电流 I_b 。
答案: (a) 5.57kW; (b) 2.321A

答案: (a)5.57kW; (b)2.321A

13.10 本章小结

1. 如果一个线圈的磁通量 ϕ 穿过另一个线圈，则称这两个线圈是相互耦合的，两个线圈之间的互感值为：

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

其中, k 为耦合系数, 且 $0 < k < 1$ 。

2. 如果 v_1 与 i_1 为线圈 1 中的电压与电流, v_2 与 i_2 为线圈 2 中的电压与电流, 则有:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

因此，耦合线圈中的感应电压由自感电压和互感电压两部分组成。

3. 互感电压的极性在电路中的表示需遵循同名端规则。

4. 存储在两个耦合线圈中的能量为：

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm Mi_1 i_2$$

5. 变压器是一种包含两个或两个以上的磁耦合绕组的四端设备，用于改变电路中的电流、电压与阻抗。
 6. 线性(或松散耦合)变压器的绕组缠绕在磁性线性材料上，为了便于分析，可以利用等效的 T 形网络或 II 形网络取代线性变压器。
 7. 理想(或铁心)变压器是耦合系数 $k = 1$ ，电感值为无穷大(L_1 、 L_2 、 $M \rightarrow \infty$)的无损($R_1 = R_2 = 0$)变压器。
 8. 对于理想变压器，有：

$$V_2 = nV_1, \quad I_2 = \frac{I_1}{n}, \quad S_1 = S_2, \quad Z_R = \frac{Z_L}{n^2}$$

其中， $n=N_2/N_1$ 为匝数比， N_1 为一次绕组的匝数， N_2 为二次绕组的匝数。当 $n>1$ 时，变压器将一次电压升高；当 $n<1$ 时，变压器将一次电压降低；而当 $n=1$ 时，变压器为匹配隔离装置。

9. 自耦变压器是一次电路与二次电路共用一个绕组的变压器。
 10. PSpice 软件是分析磁耦合电路的有用工具。
 11. 在配电系统的各个输送环节都需要采用变压器，三相电压可以通过变压器实现升压或降压。
 12. 变压器在电子系统中的重要应用包括电气隔离装置与阻抗匹配装置。

复习题

- 1 图 13-69a 所示的两个磁耦合绕组的互感电压极性为：
(a) 正 (b) 负

2 图 13-69b 所示的两个磁耦合绕组的互感电压极性为：
(a) 正 (b) 负

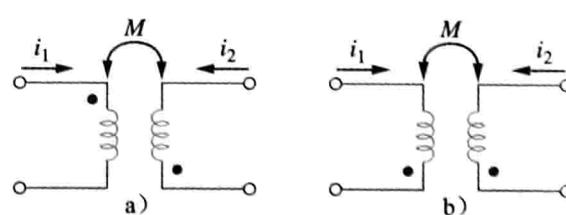


图 13-69 复习题 1 与复习题 2 图

3 $L_1 = 2\text{H}$, $L_2 = 8\text{H}$, $M = 3\text{H}$ 的两个耦合绕组的耦合系数为:

- (a) 0.1875 (b) 0.75
(c) 1.333 (d) 5.333

4 变压器是用于升高或降低什么的?

- (a) 直流电压 (b) 交流电压
(c) 直流电压与交流电压

5 图 13-70a 所示理想变压器的匝数比 $N_2/N_1 = 10$, 则 V_2/V_1 :

- (a) 10 (b) 0.1
(c) -0.1 (d) -10

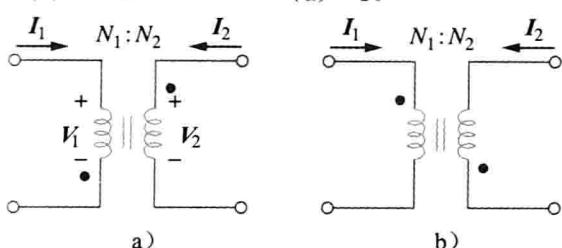


图 13-70 复习题 5 与复习题 6 图

6 图 13-70b 所示理想变压器的匝数比 $N_2/N_1 = 10$, 则 I_2/I_1 为:

- (a) 10 (b) 0.1
(c) -0.1 (d) -10

7 某三绕组变压器的连接如图 13-71a 所示, 输出电压 V_o 的值为:

- (a) 10 (b) 6
(c) -6 (d) -10

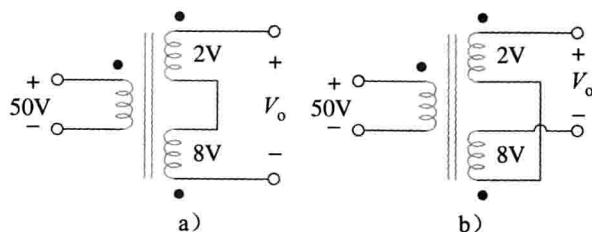


图 13-71 复习题 7 与复习题 8 图

8 某三绕组变压器的连接如图 13-71b 所示, 则输出电压 V_o 为:

- (a) 10 (b) 6
(c) -6 (d) -10

9 为使内部阻抗为 500Ω 的电源与 15Ω 的负载相匹配。需要如下哪种设备?

- (a) 升压线性变压器 (b) 降压线性变压器
(c) 升压理想变压器 (d) 降压理想变压器
(e) 自耦变压器

10 以下哪种变压器可以用作隔离装置?

- (a) 线性变压器 (b) 理想变压器
(c) 自耦变压器 (d) 上述三种变压器均可

答案: (1)b; (2)a; (3)b; (4)b; (5)d; (6)b; (7)c;
(8)a; (9)d; (10)b

习题

13.2 节

1 对于图 13-72 所示的三个耦合绕组, 试计算其总电感值。

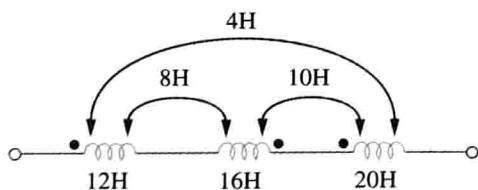


图 13-72 习题 1 图

2 利用图 13-73 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解互感。 **ED**

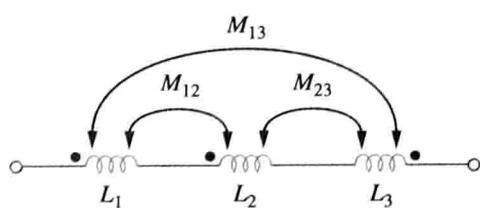


图 13-73 习题 2 图

3 正向串联的两个绕组的总电感为 250mH , 当这两个绕组反向串联时, 总电感为 150mH ,

如果其中一个绕组(L_1)的电感为另一个绕组的三倍, 试求 L_1 、 L_2 与 M , 并计算耦合系数 k 。

4 (a) 对于图 13-74a 所示的耦合绕组, 试证明:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

(b) 对于如对图 13-74b 的耦合绕组, 试证明:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

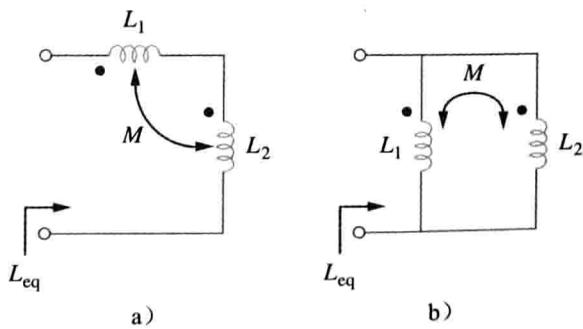


图 13-74 习题 4 图

5 两个绕组相互耦合, $L_1 = 25\text{mH}$, $L_2 = 60\text{mH}$, $k = 0.5$, 计算如下两种情况下的最大等效电感:

- (a) 两个绕组串联;

(b)两个绕组并联。

- 6 图 13-75 中, $L_1 = 40\text{mH}$, $L_2 = 5\text{mH}$, 耦合系数 $k = 0.6$ 。如果 $v_1(t) = 10\cos\omega t$ V, $i_2(t) = 2\sin\omega t$ A, $\omega = 2000\text{rad/s}$, 试求 $i_1(t)$ 与 $v_2(t)$ 。

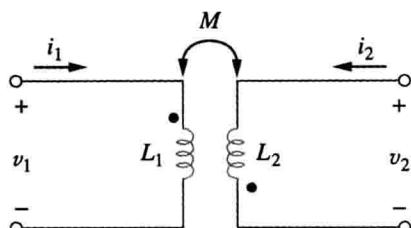


图 13-75 习题 6 图

- 7 计算图 13-76 所示电路中的 V_o 。

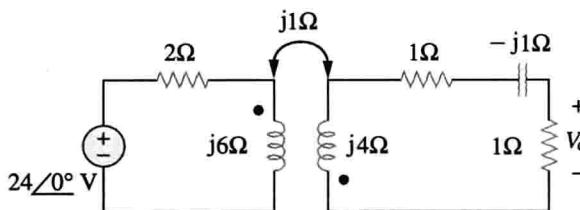
PS ML

图 13-76 习题 7 图

- 8 计算图 13-77 所示电路中的 $v(t)$ 。

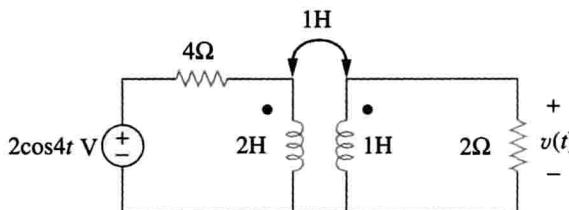
PS ML

图 13-77 习题 8 图

- 9 计算图 13-78 所示网络中的 V_x 。

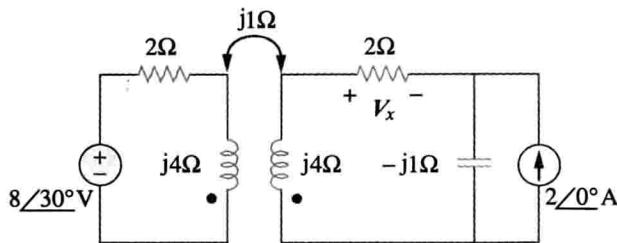
PS ML

图 13-78 习题 9 图

- 10 计算图 13-79 所示电路中的 V_o 。

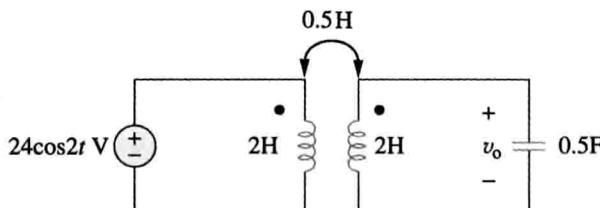
PS ML

图 13-79 习题 10 图

- 11 利用网孔分析法求解图 13-80 所示电路中的 i_x ，其中： $i_s = 4\cos 600t$ A, $v_s = 110\cos(600t + 30^\circ)$ V。

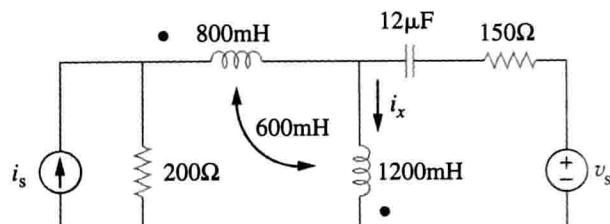
ML

图 13-80 习题 11 图

- 12 计算图 13-81 所示电路中等效电感 L_{eq} 。

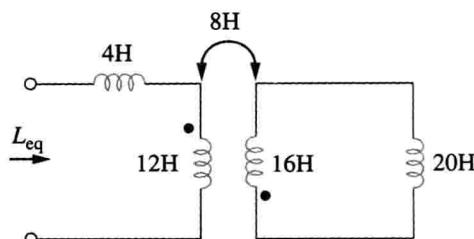


图 13-81 习题 12 图

- 13 对于图 13-82 所示电路，计算从电源端看进去的阻抗。

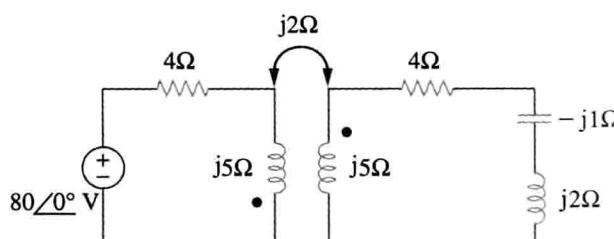
PS ML

图 13-82 习题 13 图

- 14 求图 13-83 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

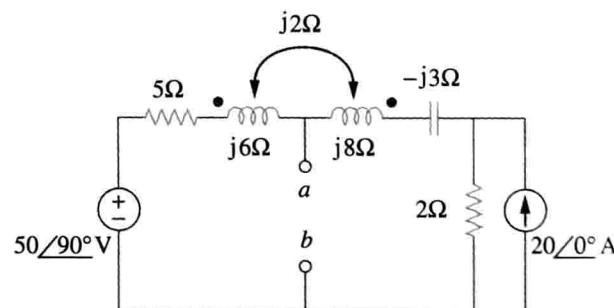


图 13-83 习题 14 图

- 15 求图 13-84 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

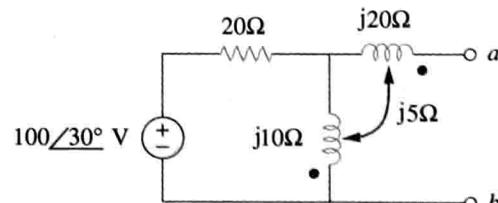


图 13-84 习题 13-15 图

- 16 求图 13-85 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

PS ML

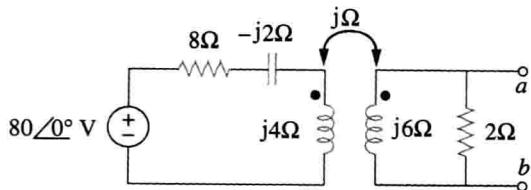


图 13-85 习题 16 图

- 17 在图 13-86 所示电路中, Z_L 为 5mH 电感, 阻抗为 $j40\Omega$ 。计算 $k=0.6$ 时的 Z_{in} 。
ML

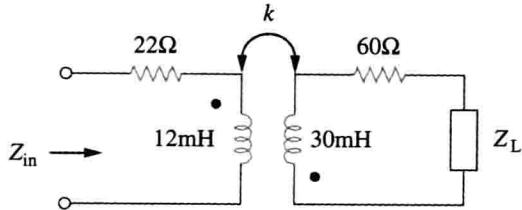


图 13-86 习题 17 图

- 18 求图 13-87 所示电路在负载 Z 左侧的戴维南等效电路。
PS ML

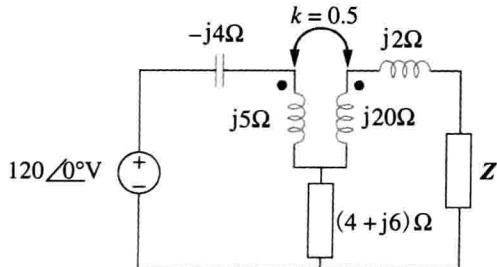


图 13-87 习题 18 图

- 19 求可用于取代图 13-88 所示变压器的等效 T 形电路。

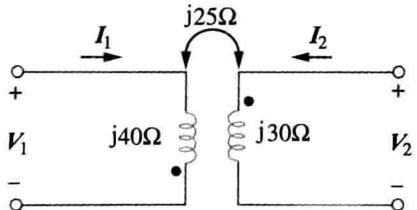


图 13-88 习题 19 图

13.3 节

- 20 计算图 13-89 所示电路中的电流 I_1 、 I_2 与 I_3 , 并求出 $t=2\text{ms}$ 时耦合绕组中存储的能量。假设角频率 $\omega=1000\text{rad/s}$ 。
PS ML

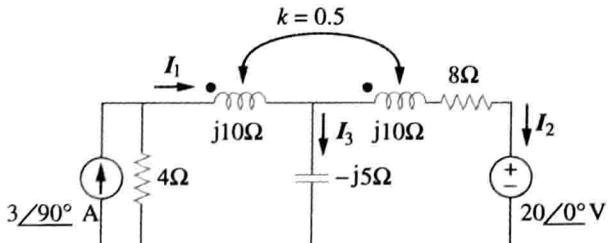


图 13-89 习题 20 图

- 21 利用图 13-90 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解耦合电路能量。
ED

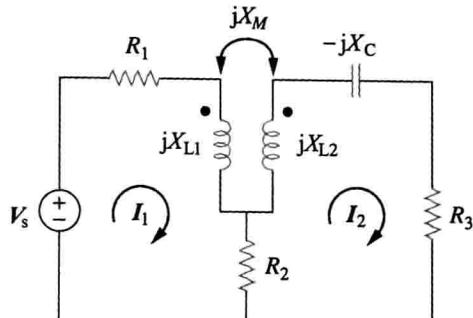


图 13-90 习题 21 图

- * 22 计算图 13-91 所示电路中的 I_o 。

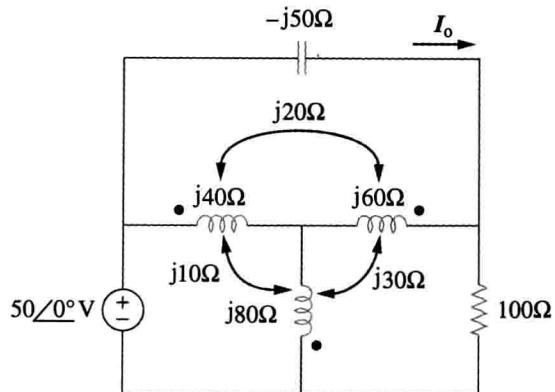


图 13-91 习题 22 图

- 23 在图 13-92 所示电路中, 如果 $M=0.2\text{H}$, $v_s=12\cos\omega t \text{ V}$, 试求 I_1 与 I_2 并计算 $t=15\text{ms}$ 时耦合绕组中存储的能量。
PS ML

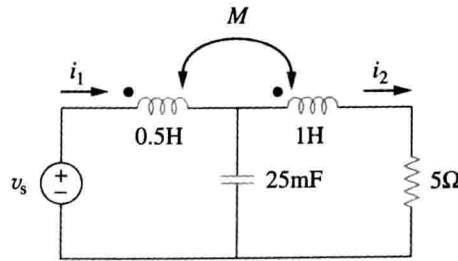


图 13-92 习题 23 图

- 24 在图 13-93 所示电路中: (a)求耦合系数; (b)计算 v_o ; (c)确定 $t=2\text{s}$ 时耦合电感器中存储的能量。
PS ML

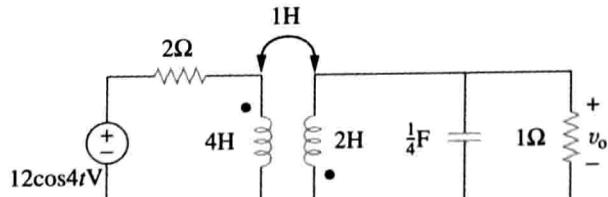


图 13-93 习题 24 图

- 25 在图 13-94 所示网络中, 求 Z_ϕ 与 I_o 。
PS ML

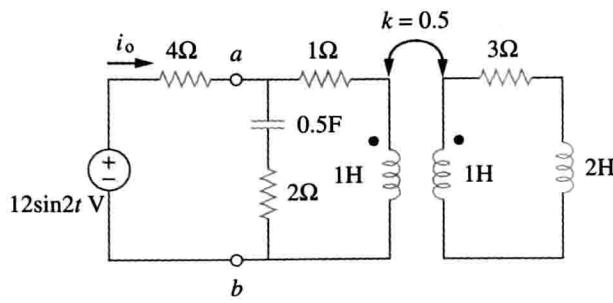


图 13-94 习题 25 图

- 26 图 13-95 所示电路中的 I_o 。如果将右边绕组的同名端更换，再求 I_o 。
PS ML

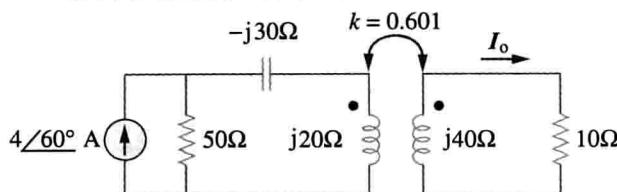


图 13-95 习题 26 图

- 27 图 13-96 所示电路传递给 50Ω 电阻器的平均功率。
PS ML

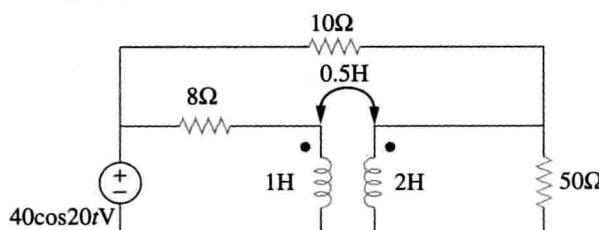


图 13-96 习题 27 图

- * 28 在图 13-97 所示电路中，传递给 20Ω 负载的功率最大时的 X 值。
ML

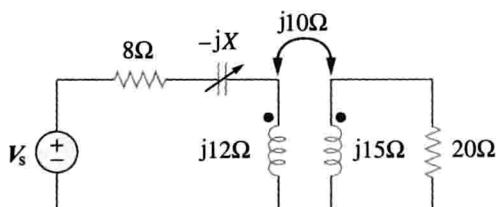


图 13-97 习题 28 图

13.4 节

- 29 在图 13-98 所示电路中，使 10Ω 电阻器消耗的功率为 320W 的耦合系数 k 的值。对于该 k 值， $t=1.5s$ 时耦合线圈中储存的能量。

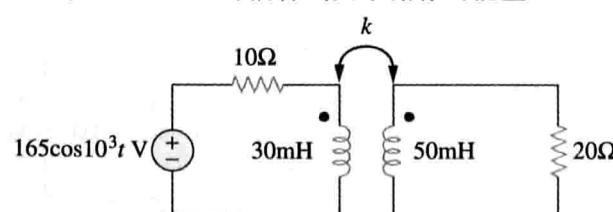


图 13-98 习题 29 图

- 30 (a) 利用反射阻抗的概念计算图 13-99 所示电

路的输入阻抗；(b) 利用 T 形等效电路取代线性变压器，输入阻抗。

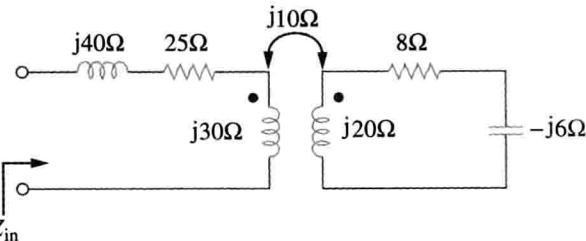


图 13-99 习题 30 图

- 31 利用图 13-100 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解线性变压器及其 T 形和 II 形电路的转换方法。
ED

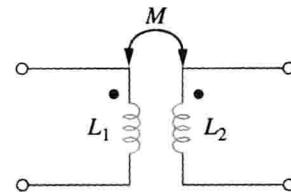


图 13-100 习题 31 图

- * 32 两个相互串联的线性变压器如图 13-101 所示，试证明：

$$Z_{in} = \frac{\omega^2 R(L_a^2 + L_a L_b - M_a^2) + j\omega^3(L_a^2 L_b + L_a L_b^2 - L_a M_b^2 - L_b M_a^2)}{\omega^2(L_a L_b + L_b^2 - M_b^2) - j\omega R(L_a + L_b)}$$

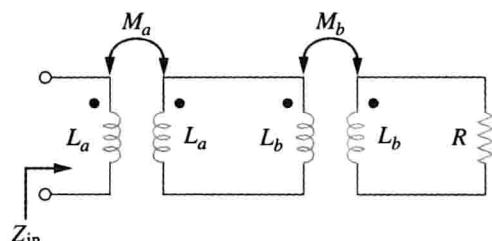


图 13-101 习题 32 图

- 33 计算图 13-102 所示空心变压器电路的输入阻抗。
ML

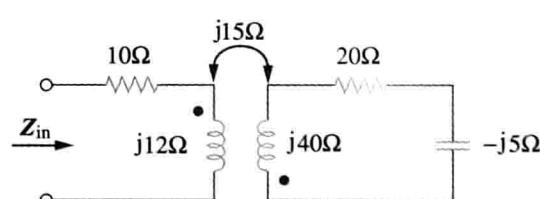


图 13-102 习题 33 图

- 34 利用图 13-103 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解变压器电路的输入阻抗。
ED

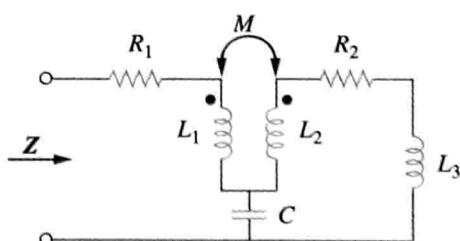


图 13-103 习题 34 图

- * 35 计算图 13-104 所示电路中的 I_1 、 I_2 、 I_3 。

PS ML

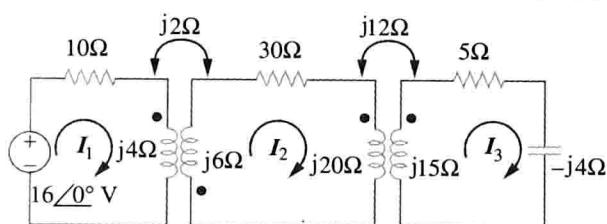


图 13-104 习题 35 图

13.5 节

- 36 类似图 13-32, 计算图 13-105 所示各理想变压器的端电压与电流之间的关系。

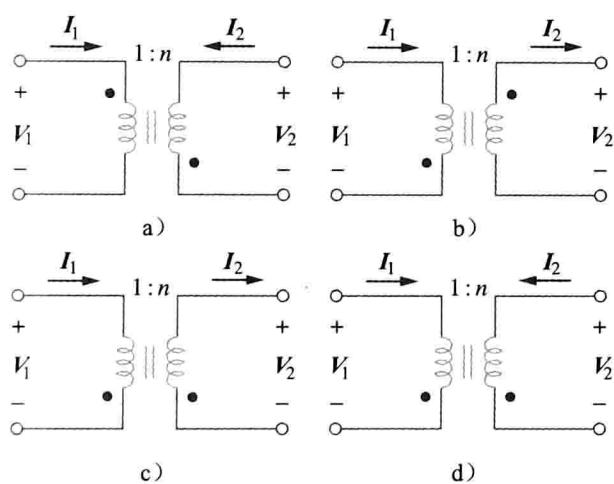


图 13-105 习题 36 图

- 37 某 $480\text{V}_{\text{rms}}/2400\text{V}_{\text{rms}}$ 升压理想变压器传递给电阻性负载的功率为 50kW , 计算: (a) 匝数比; (b) 一次电流; (c) 二次电流。
38 设计一个问题帮助其他同学更好地理解理想变压器。 ED
39 某 $1200\text{V}_{\text{rms}}/240\text{V}_{\text{rms}}$ 变压器高压端的阻抗为 $60\angle -30^\circ \Omega$, 如果变压器的低压端连接一个 $0.8\angle 10^\circ \Omega$ 负载, 确定该变压器输入电压为 $1200\text{V}_{\text{rms}}$ 的一次电流与二次电流。
40 某匝数比为 5 的理想变压器一次侧与一戴维南等效电压为 $v_{\text{Th}} = 10\cos 2000t \text{ V}$ 、等效电阻为 $R_{\text{Th}} = 100\Omega$ 的电压源相连接, 计算传递给与二次绕组相连的 200Ω 电阻器的平均功率。
41 计算图 13-106 所示电路中的 I_1 与 I_2 PS ML

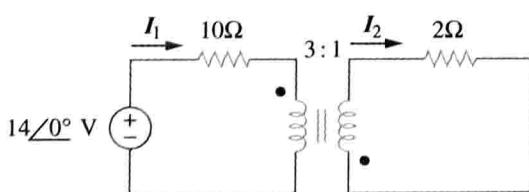


图 13-106 习题 41 图

- 42 对于图 13-107 所示电路, 计算 2Ω 电阻器吸

收的功率, 假设图中 80V 为 rms 值。 PS ML

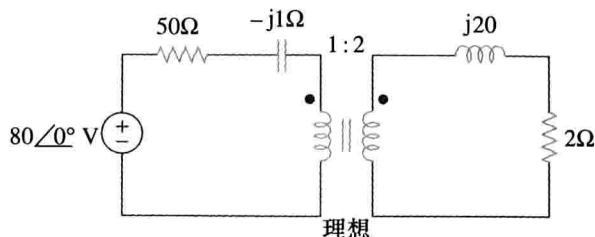


图 13-107 习题 42 图

- 43 计算图 13-108 所示理想变压器电路的 V_1 与 V_2 。 PS ML

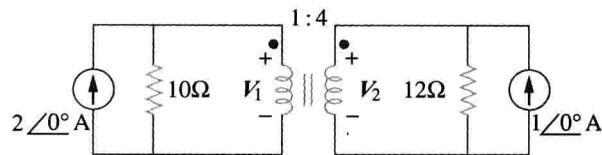


图 13-108 习题 43 图

- * 44 在图 13-109 所示理想变压器电路中, 求 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 。

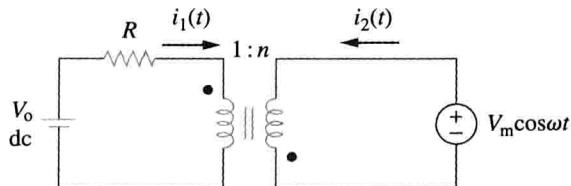


图 13-109 习题 44 图

- 45 对于图 13-110 所示电路, 求 8Ω 电阻器吸收的平均功率。 PS ML

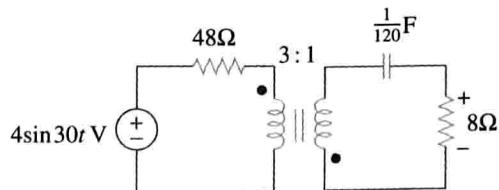


图 13-110 习题 45 图

- 46 (a)求图 13-111 所示电路中的 I_1 与 I_2 ; (b)将其中一个绕组的同名端改变, 重新求解 I_1 与 I_2 。 PS ML

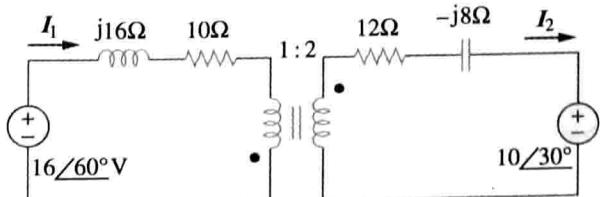


图 13-111 习题 46 图

- 47 计算图 13-112 所示电路中的 $v(t)$ 。 PS ML

- 48 利用图 13-113 所示电路设计一个问题, 帮助其

他同学更好地理解理想变压器的工作原理。 ED

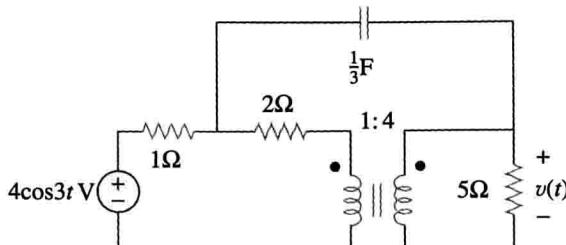


图 13-112 习题 47 图

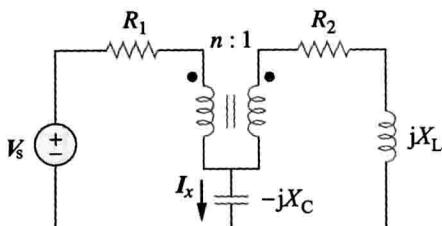


图 13-113 习题 48 图

49 计算图 13-114 所示理想变压器电路中的 I_x 。

PS ML

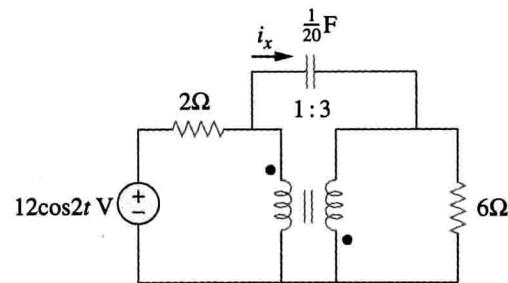


图 13-114 习题 49 图

50 计算图 13-115 所示网络的输入阻抗。 ML

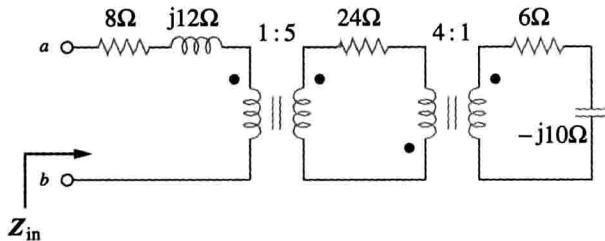


图 13-115 习题 50 图

51 利用反射阻抗的概念求解图 13-116 所示电路的输入阻抗与电流 I_1 。 ML

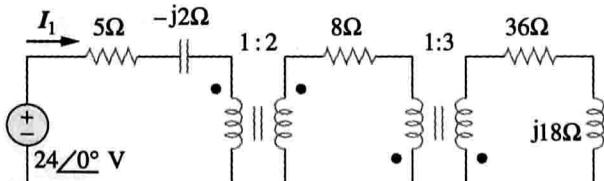


图 13-116 习题 51 图

52 对于图 13-117 所示电路，计算传递给负载的平均功率最大时的变压器匝数比 n ，并计算该

最大平均功率。 ED

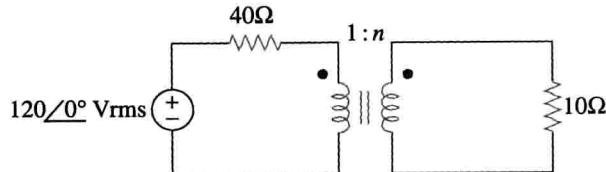


图 13-117 习题 52 图

53 对于图 13-118 所示网络：(a) 试求传递给 200Ω 负载功率最大时的匝数比 n ；(b) 如果 $n=10$ ，计算 200Ω 负载的功率。 ML

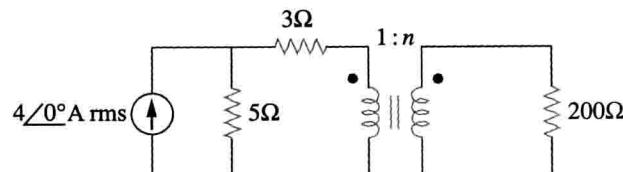


图 13-118 习题 53 图

54 在图 13-119 所示电路中，变压器用于实现放大器与 8Ω 负载的匹配，放大器的戴维南等效参数为： $V_{Th}=10V$ ， $Z_{Th}=128\Omega$ 。(a) 求实现最大功率传递时所需的匝数比；(b) 计算一次电流与二次电流；(c) 计算一次电压与二次电压。 ED

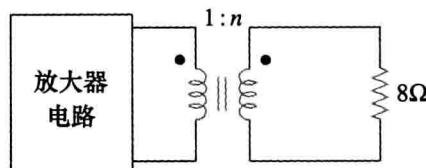


图 13-119 习题 54 图

55 对于图 13-120 所示电路，计算等效电阻。 ML

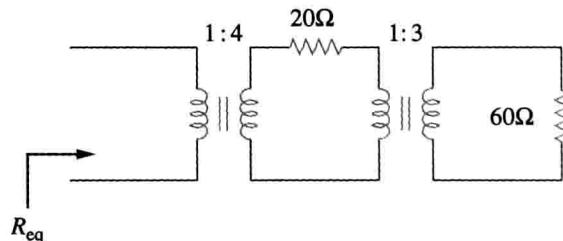


图 13-120 习题 55 图

56 计算图 13-121 所示理想变压器电路中 10Ω 电阻器吸收的功率。 PS ML

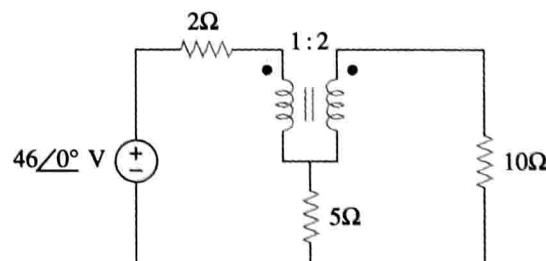


图 13-121 习题 56 图

- 57 对于图 13-122 所示理想变压器电路，试求：
 (a) I_1 与 I_2 ；(b) V_1 与 V_2 ；(c) 电源提供的复功率。

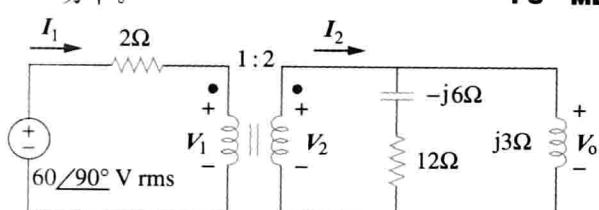
PS ML

图 13-122 习题 57 图

- 58 计算图 13-123 所示电路中各电阻器吸收的平均功率。

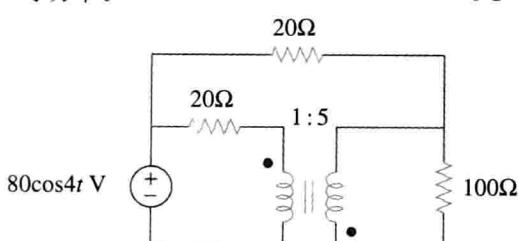
PS ML

图 13-123 习题 58 图

- 59 在图 13-124 所示电路中，设 $V_s = 40\cos 1000t$ V，求传递给各电阻器的平均功率。

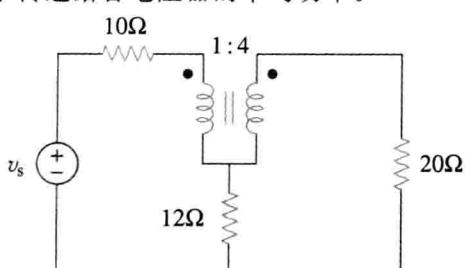
PS ML

图 13-124 习题 59 图

- 60 参见图 13-125 所示电路。(a)求电流 I_1 、 I_2 与 I_3 ；(b)求 400Ω 电阻器消耗的功率。

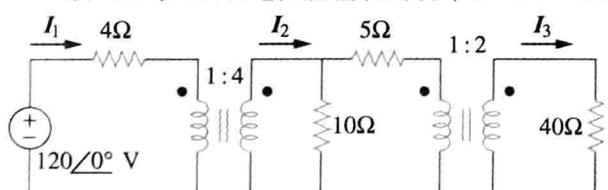
PS ML

图 13-125 习题 60 图

- 61 计算图 13-126 所示电路中的 I_1 、 I_2 与 V_o 。

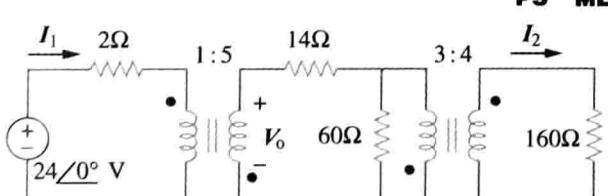
PS ML

图 13-126 习题 61 图

- 62 对于图 13-127 所示网络，试求：

- (a) 电源提供的复功率；(b) 传递给 18Ω 电阻器平均功率。

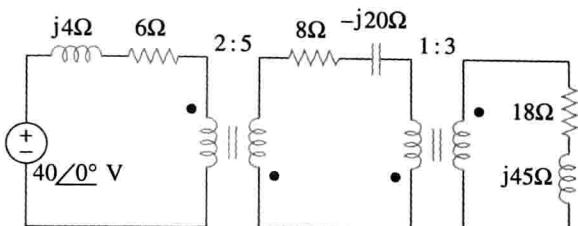
PS ML

图 13-127 习题 62 图

- 63 计算图 13-128 所示电路中的网孔电流。

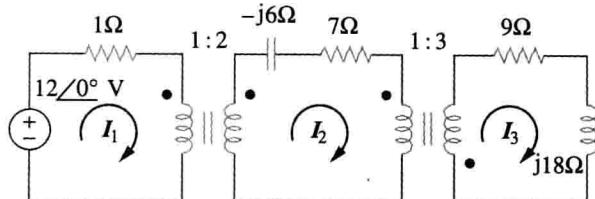
ML

图 13-128 习题 63 图

- 64 对于图 13-129 所示电路，求传递给 $30k\Omega$ 电阻器功率最大时的匝数比。

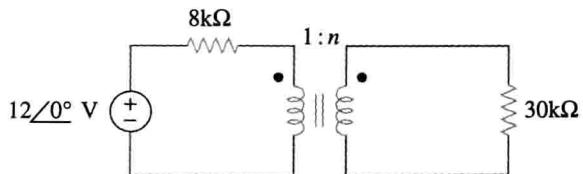
PS ML

图 13-129 习题 64 图

- * 65 计算图 13-130 所示电路中 20Ω 电阻器消耗的平均功率。

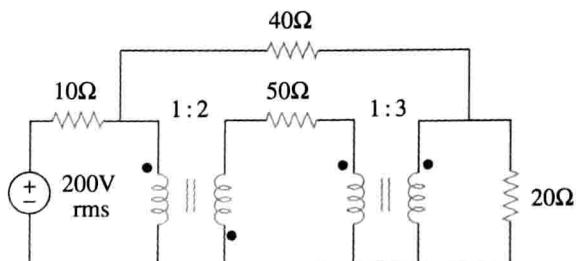
PS ML

图 13-130 习题 65 图

13.6 节

- 66 设计一个问题帮助其他同学更好地理解理想自耦变压器的工作原理。

ED

- 67 抽头比为 40% 的自耦变压器由 400V、60Hz 电源供电，并工作在升压状态下。某单位功率因数下的 $5kV \cdot A$ 负载与该变压器的二次侧相连。试求：(a) 二次电压；(b) 二次电流；(c) 一次电流。

- 68 在图 13-131 所示理想自耦变压器电路中，计算 I_1 、 I_2 与 I_o ，以及传递给负载的平均功率。

ML

- * 69 在图 13-132 所示电路中，调节 Z_L 使得传递给 Z_L

的平均功率最大，试求 Z_L 以及传递给它的最大平均功率。假设 $N_1 = 600$ 匝， $N_2 = 200$ 匝。**ED**

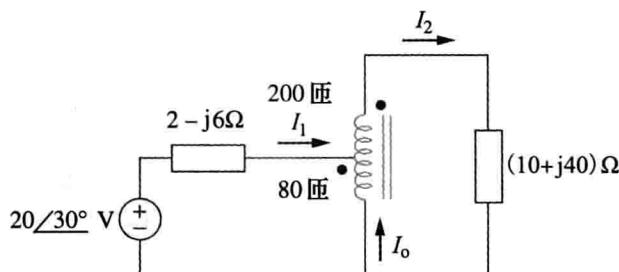


图 13-131 习题 68 图

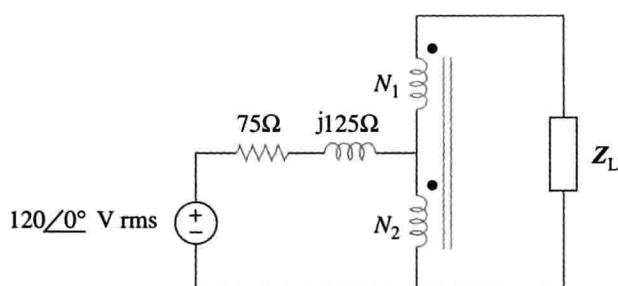


图 13-132 习题 69 图

- 70 在图 13-133 所示理想变压器电路中，计算传递给负载的平均功率。**ML**

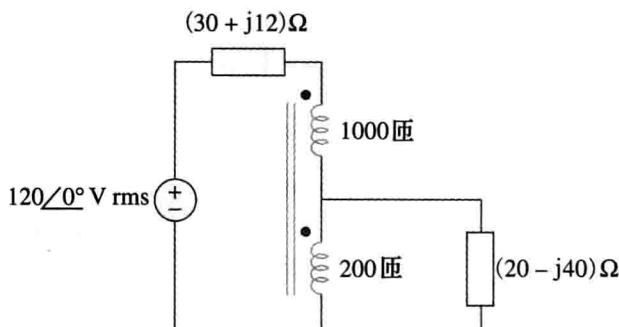


图 13-133 习题 70 图

- 71 在图 13-134 所示理想自耦变压器电路中，试证明：

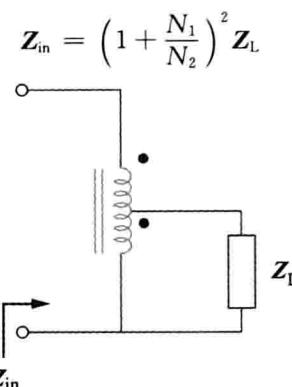


图 13-134 习题 71 图

13.7 节

- 72 为了应急需要，将三个 $12\ 470\text{Vrms}/7200\text{Vrms}$ 单相变压器接成 $\Delta - Y$ 形联结，从而构成一个由 $12\ 470\text{V}$ 输电线供电的三相变压器，如果该变压器给负载提供 $60\text{MV}\cdot\text{A}$ 的功率，试求：
(a) 各变压器的匝数比；(b) 变压器一次绕组与二次绕组中的电流；(c) 流入与流出传输线的电流。**ED**

- 73 图 13-135 所示为一个给 Y 形联结负载供电的三相变压器。
(a) 说明变压器的联结方法；
(b) 计算电流 I_2 与 I_c ；
(c) 求负载吸收的平均功率。**ML**

- 74 对于图 13-136 所示的三相变压器电路，其一次侧的馈电电压是线电压为 2.4kVrms 的三相电源，而二次侧为 $\text{pf}=0.8$ 的三相对称负载提供 120kW 功率，试确定：
(a) 变压器的联结类型；
(b) I_{LS} 与 I_{PS} 的值；
(c) I_{LP} 与 I_{PP} 的值；
(d) 变压器各相的 $\text{kV}\cdot\text{A}$ 值。

- 75 图 13-137 所示的 $\Delta - Y$ 形联结对称三相变压器组用于将 4500Vrms 线电压降至 900Vrms 。如果变压器给 $120\text{kV}\cdot\text{A}$ 负载供电，试求：
(a) 变压器的匝数比；
(b) 一次侧与二次侧的线电流。

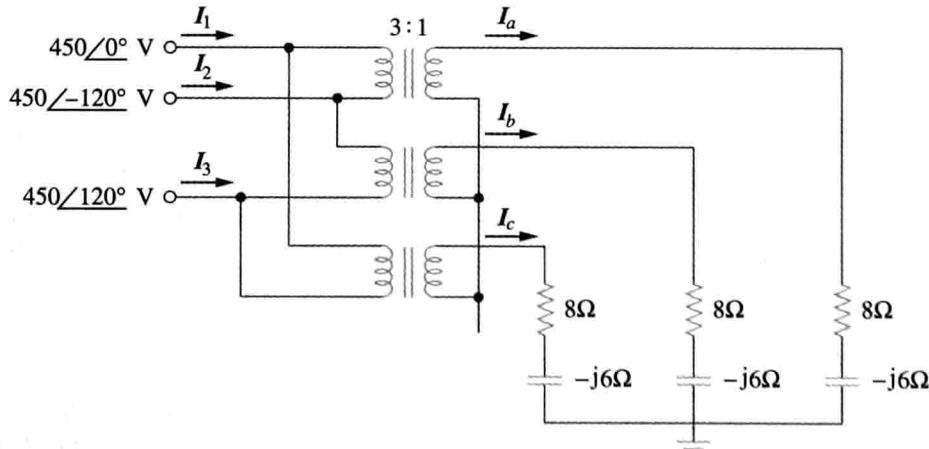


图 13-135 习题 73 图

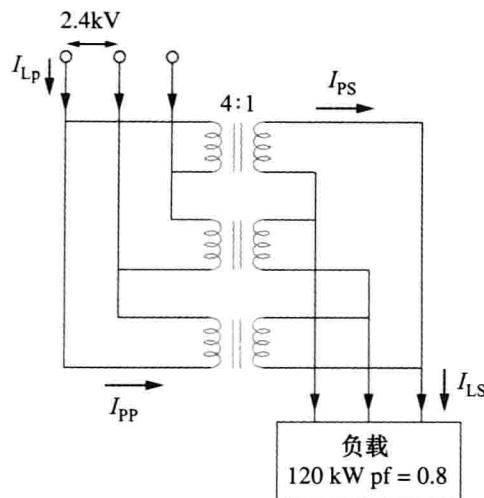


图 13-136 习题 74 图

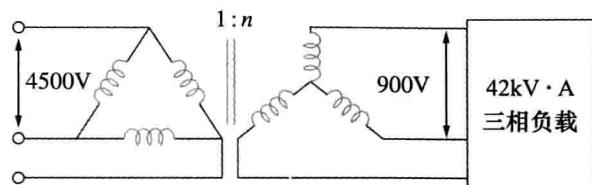


图 13-137 习题 75 图

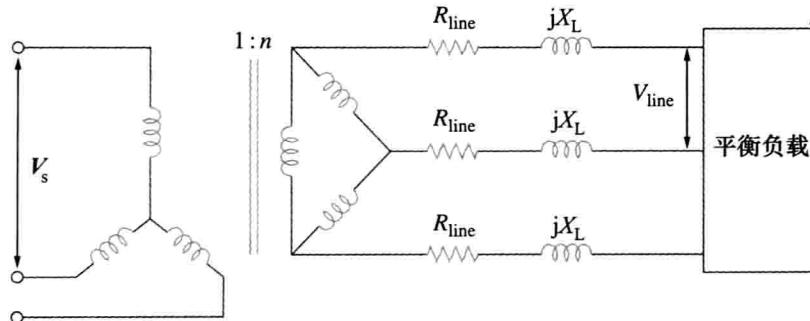


图 13-138 习题 76 图

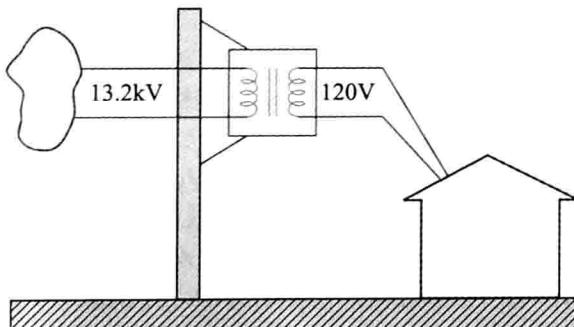


图 13-139 习题 77 图

- 76 利用图 13-138 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解 Y-△形三相变压器及其工作原理。**ED**

- 77 某城市配电三相系统的线电压为 13.2kV，架设在电线杆上的变压器与一条线路相连，并将高压线降至 120VRms 供住宅用户使用，如图 13-139 所示。(a) 计算得到 120V 电压所采用的变压器的匝数比。(b) 计算与 120V 相线相连的一个 100W 灯泡从高压线上提取的电流。**ED**

13.8 节

- 78 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-140 所示电路中的网孔电流，假设 $\omega=1\text{rad/s}$, $k=0.5$ 。**PS**

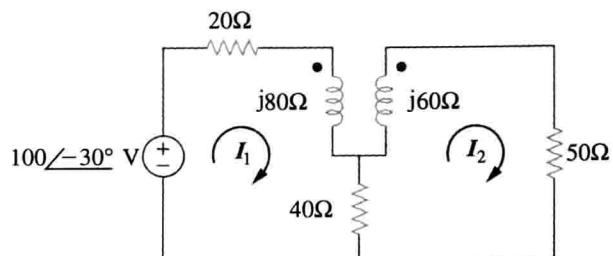


图 13-140 习题 78 图

- 79 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-141 所示电路中的 I_1 、 I_2 与 I_3 。**PS**

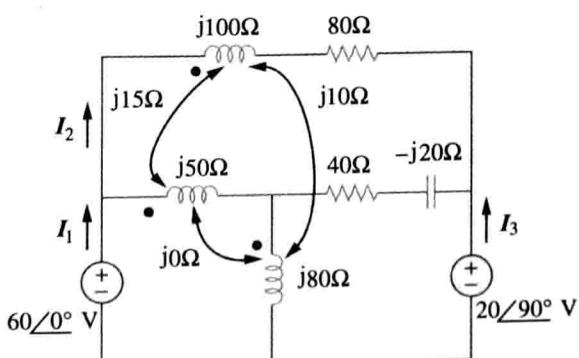


图 13-141 习题 79 图

- 80 利用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 22。
- 81 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-142 所示电路中的 I_1 、 I_2 与 I_3 。
- 82 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-143 所示电路中的 V_1 、 V_2 与 I_o 。

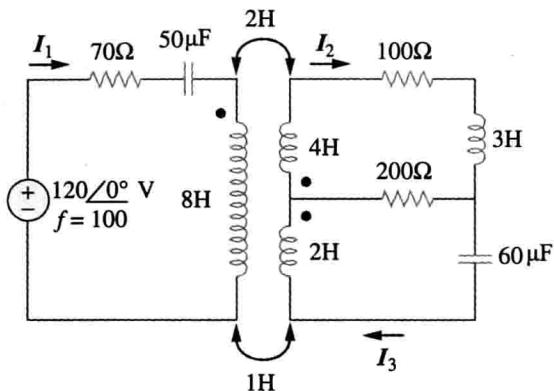


图 13-142 习题 81 图

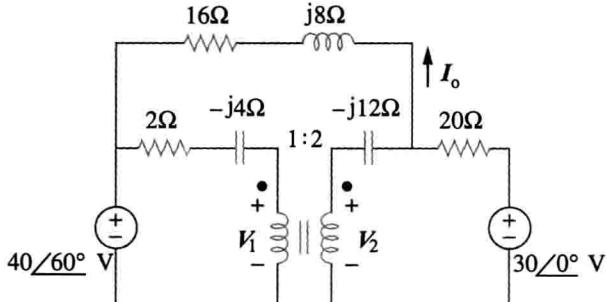


图 13-143 习题 82 图

- 83 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-144 所示电路中的 I_x 与 V_x 。

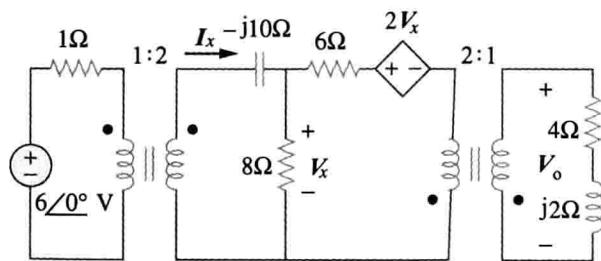


图 13-144 习题 83 图

- 84 利用 PSpice 或 MultiSim 计算图 13-145 所示理想变压器电路中的 I_1 、 I_2 与 I_3 。

- 85 某输出阻抗为 $7.2\text{k}\Omega$ 的立体声放大电路通过一个一次匝数为 3000Ω 的变压器与一个输入阻抗为 8Ω 的扬声器相匹配, 计算该变压器二次绕组的匝数。

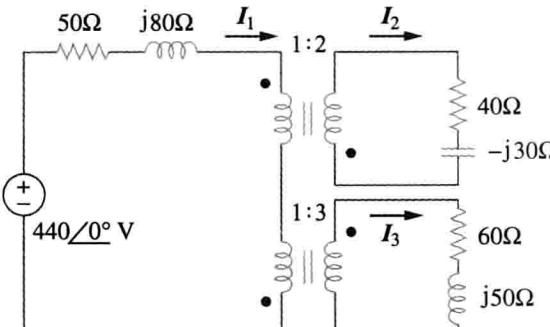


图 13-145 习题 84 图

- 86 某一次匝数为 2400 、二次匝数为 48 的变压器用作阻抗匹配器件, 试问与二次侧相连接的 3Ω 负载的反射阻抗为多少?
- 87 某无线电接收机的输入电阻为 300Ω , 当它与特征阻抗为 75Ω 的天线系统直接相连时, 阻抗是不匹配的。在接收机之前连接一个阻抗匹配变压器, 即可实现最大功率传送。计算所需的变压器匝数比。
ED
- 88 某匝数比为 $n=0.1$ 的降压变压器给某电阻性负载提供 $12.6\text{VR}_{\text{rms}}$ 的电压, 如果其一次电流为 2.5A_{rms} , 试问传递给该负载的功率为多少?
- 89 某 $240\text{VR}_{\text{rms}}/120\text{VR}_{\text{rms}}$ 电源变压器的额定功率为 $10\text{kV}\cdot\text{A}$, 计算其匝数比、一次电流以及二次电流。
- 90 某 $4\text{kV}\cdot\text{A} / 2400\text{VR}_{\text{rms}}/240\text{VR}_{\text{rms}}$ 变压器的一次绕组匝数为 250 , 试计算: (a) 匝数比; (b) 二次绕组匝数; (c) 一次电流与二次电流。
- 91 某 $25000\text{VR}_{\text{rms}}/240\text{VR}_{\text{rms}}$ 配电变压器一次电流的额定值为 75A 。(a)求变压器的额定 $\text{kV}\cdot\text{A}$ 功率; (b)计算二次电流。
- 92 $4800\text{VR}_{\text{rms}}$ 的传输线给一次匝数为 1200 、二次匝数为 28 的配电变压器供电, 当二次负载为 10Ω 时, 求: (a) 二次电压; (b) 一次电流与二次电流; (c) 提供给负载的功率。

综合理解题

- 93 图 13-146 所示的四绕组变压器通常用在既可以在 110V 电压下工作又可以在 220V 电压下工作的设备(如计算机、录像机等)中, 这就使得这类设备既可以在国内使用, 也可以在国外使用, 试说明提供如下电压所需的变压器连接方式: (a) 输入 1100V 时, 输出

14V ; (b) 输入 220V 时, 输出 50V 。

- * 94 $440\text{V}/110\text{V}$ 理想变压器可以连接成 $550\text{V}/440\text{V}$ 理想自耦变压器, 四种可能的连接方式中有两种连接是错误的, 求: (a) 错误连接的输出电压; (b) 正确连接的输出电压。
- 95 10 只相互并联的灯泡由 $7200\text{V}/120\text{V}$ 变压器

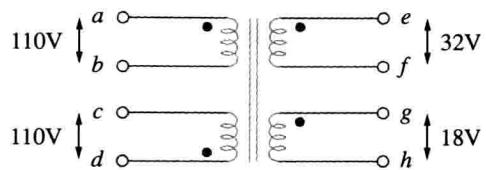


图 13-146 习题 93 图

供电, 如图 13-147 所示, 灯泡可以建模为 144Ω 的电阻器, 求: (a) 变压器的匝数比 n ;

(b) 流过一次绕组的电流。

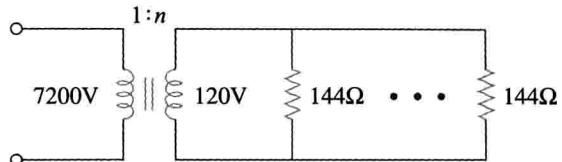


图 13-147 习题 95 图

第14章

频率响应

热爱生命吗？那就珍惜时间吧，因为生命是由时间构成的。

——Benjamin Franklin

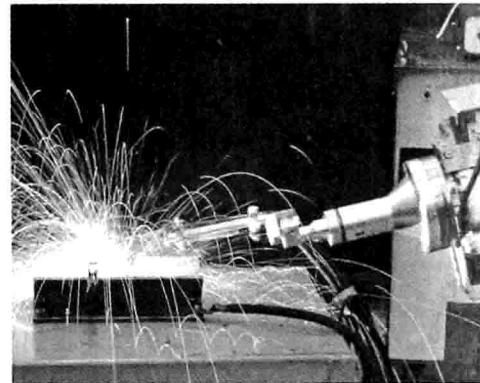
增强技能与拓展事业

控制系统领域的职业生涯

控制系统是电子工程学科中应用电路分析的另一个领域，所设计的控制系统按照某种期望的方式调整一个或多个变量的行为特征。控制系统在人们的日常生活中起着非常重要的作用，如供暖系统与空调系统等家用电器、开关调温器，洗衣机与烘干机、机动车巡航控制器、电梯、交通指示灯、加工厂、导航系统等都会用到控制系统。在航空航天技术领域中，太空探测器的精确导航、航天飞机的运行模式控制，以及宇宙飞船的地面遥控等都必须掌握控制系统的知识。在制造业领域，批量生产流水线的控制日益依赖于机器人来完成，而机器人则是一个可编程控制系统，可以长期不知疲劳地工作。

控制工程汇集了电路理论与通信理论的知识。它并不局限于任何一项专门的工程，而可能包含环境学、化学，航空学、机械学、土木工程学以及电子工程学等。例如，控制系统工程师的一项重要任务可能是设计一个磁盘驱动器读写头的转速调节器。

系统地理解控制系统的各项技术是对电子工程师的基本要求，这对于设计实现特定功能的控制系统具有极大的实际意义。



焊接机器人

© Vol. 1 PhotoDisc/Getty Images

14.1 引言

在正弦电路分析中已经学习了如何求解固定频率正弦电源激励的电压与电流。如果假设正弦电源的幅度保持不变，而改变其频率，则会得到电路的频率响应(frequency response)。频率响应可以看做是电路的正弦稳态特性随频率变化的一种完整描述。

电路的频率响应是指电路的行为特征随信号频率变化而发生的变化。

在许多应用中，特别是通信系统与控制系统中，电路的正弦稳态频率响应起到非常重要的作用。其中一种特殊的应用是电子滤波器，滤波器可以阻止或消除不需要的频率信号，而让所需频率的信号通过。在无线电收音机、电视机与电话机等系统中滤波器用于将不同广播频率相互隔离开。

提示：电路的频率响应也可以看做是电路的增益与相位随频率变化而发生的变化。

本章首先利用传递函数来分析简单电路的频率响应，之后介绍描述频率响应的工业标准方法——伯德图。同时学习串联谐振电路与并联谐振电路，并建立一些重要概念，如谐振、品质因数、截止频率及带宽等。接着再讨论几种不同的滤波器及电路参量的比例变换

问题，最后一节介绍谐振电路的一个应用实例和滤波器的两个应用实例。

14.2 传递函数

传递函数 $H(\omega)$ (也称网络函数(network function))是求解电路频率响应的一种有用的数学工具。实际上，电路的频率响应就是传递函数 $H(\omega)$ 随 ω 由 0 到 ∞ 变化的关系曲线。

传递函数是电路依赖于频率的受迫函数与激励函数(或输出信号与输入信号)之比。前面章节在利用阻抗或导纳表示电压与电流的关系时，实际上隐含了传递函数的概念。一般而言，线性网络可以利用图 14-1 所示的框图表示。

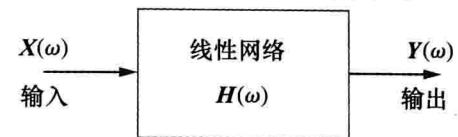


图 14-1 线性网络框图

电路的传递函数 $H(\omega)$ 是随着频率而变化的输出相量 $Y(\omega)$ (元件的电压或电流)与输入相量 $X(\omega)$ (源电压或电流)之比。

提示：本书中， $X(\omega)$ 与 $Y(\omega)$ 分别表示网络的输入相量与输出相量，不要和表示电抗与导纳的符号相混淆。由于没有足够的英文符号可以将所有的电路变量区分开来，所以用某些符号表示多种含义一般来讲是允许的。

传递函数可以表示为：

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (14.1)$$

其中假设初始条件为零。由于输入与输出可以是电路中任意位置的电压或电流，所以存在四种可能的传递函数：

$$H(\omega) = \text{电压增益} = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad (14.2a)$$

$$H(\omega) = \text{电流增益} = \frac{I_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad (14.2b)$$

$$H(\omega) = \text{转移阻抗} = \frac{V_o(\omega)}{I_i(\omega)} \quad (14.2c)$$

$$H(\omega) = \text{转移导纳} = \frac{I_o(\omega)}{V_i(\omega)} \quad (14.2d)$$

提示：有些学者喜欢用 $H(j\omega)$ 表示传递函数而不用 $H(\omega)$ ，因为 ω 与 j 常常一起使用。

其中，下标 i 与 o 分别表示输入值与输出值。 $H(\omega)$ 是一个复数量，其模值为 $H(\omega)$ ，相角为 ϕ ，即 $H(\omega) = H(\omega)/\phi$ 。

利用式(14.2)确定传递函数时，首先要将电路中的电阻器、电感器与电容器用它们的阻抗 R 、 $j\omega L$ 与 $1/j\omega C$ 取代，得到频域等效电路，之后再利用已经掌握的电路分析方法确定式(14.2)中的相关变量。这样，就可以画出电路传递函数的模与相位随频率变化的曲线，从而得到电路的频率响应。利用计算机绘制传递函数能够节省大量的时间。

传递函数 $H(\omega)$ 也可以用其分子多项式 $N(\omega)$ 与分母多项式 $D(\omega)$ 之比来表示：

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (14.3)$$

其中， $N(\omega)$ 与 $D(\omega)$ 未必和输出函数与输入函数具有同样的表达式。式(14.3)中，假设 $H(\omega)$ 的表达式中分子与分母的公因式已经消去，得到的是最简多项式之比。 $N(\omega)=0$ 的根称为 $H(\omega)$ 的零点(zero)，通常用 $j\omega = Z_1, Z_2, \dots$ 表示。类似地， $D(\omega)=0$ 的根称为 $H(\omega)$ 的极点(pole)，用 $j\omega = p_1, p_2, \dots$ 表示。

零点是分子多项式的根，它是使得传递函数等于零的点；极点是分母多项式的根它是使得传递函数趋于无穷大的点。

提示：零点也可以看做是使得 $H(s)$ 为零的 $s = j\omega$ 值，极点则是使得 $H(s)$ 为无穷大的 $s = j\omega$ 值。

为了避免复数的运算，在计算 $j\omega$ 时，可以暂时利用 s 取代 $j\omega$ ，这样会比较方便，而在计算完毕后，再将 s 替换为 $j\omega$ 。

例 14-1 对于图 14-2a 所示的 RC 电路，计算传递函数 V_o/V_s 及其频率响应。假设 $V_s = V_m \cos \omega t$ 。

解：该电路的频域等效电路如图 14-2b 所示，根据分压原理，其传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

上式与式(9.18e)比较即可得到 $H(\omega)$ 的模与相位：

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}, \quad \phi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

其中， $\omega_0 = 1/RC$ 。要画出 $0 < \omega < \infty$ 时 H 与 ϕ 的变化曲线，需确定一些关键点处的值，以便绘图。

当 $\omega = 0$ 时， $H = 1$ 且 $\phi = 0$ ；当 $\omega = \infty$ 时， $H = 0$ 且 $\phi = -90^\circ$ ；当 $\omega = \omega_0$ 时， $H = 1/\sqrt{2}$ 且 $\phi = -45^\circ$ 。利用上述各点以及表 14-1 所示的若干点，即可求得图 14-3 所示的频率响应。图 14-3 中频率响应曲线的某些特征将在 14.6.1 节介绍低频滤波器时予以说明。

表 14-1 例 14-1 中的相关数据

ω/ω_0	H	ϕ	ω/ω_0	H	ϕ
0	1	0	10	0.1	-84°
1	0.71	-45°	20	0.05	-87°
2	0.45	-63°	100	0.01	-89°
3	0.32	-72°	∞	0	-90°

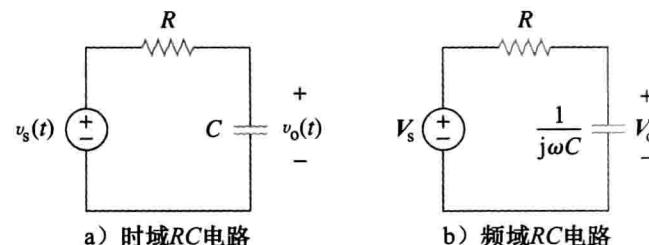


图 14-2 例 14-1 图

a) 时域RC电路
b) 频域RC电路

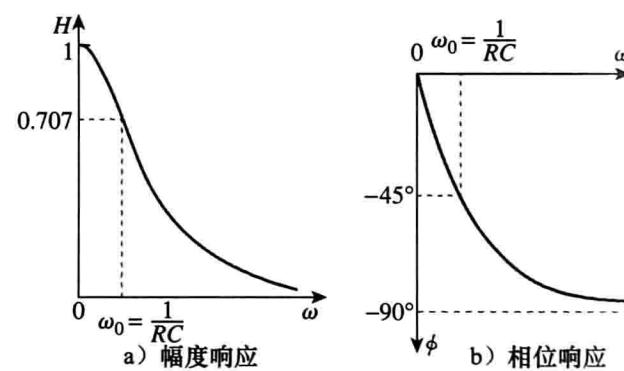


图 14-3 RC 电路的频率响应

练习 14-1 计算图 14-4 所示 RL 电路的传递函数 V_o/V_s ，并画出频率响应曲线。假设 $V_s = V_m \cos \omega t$ 。

答案： $j\omega L / (R + j\omega L)$ ；频率响应如图 14-5 所示

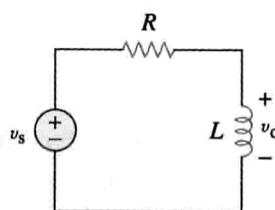


图 14-4 练习 14-1 的 RL 电路

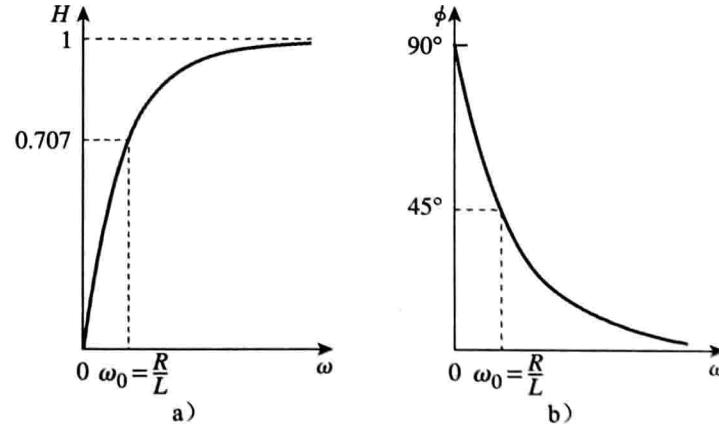


图 14-5 图 14-4 的频率响应

例 14-2 对于图 14-6 所示电路，计算增益 $I_o(\omega)/I_i(\omega)$ 即其极点与零点。

解：根据分流原理可得：

$$\mathbf{I}_o(\omega) = \frac{4 + j2\omega}{4 + j2\omega + 1/j0.5\omega} \mathbf{I}_i(\omega)$$

即

$$\frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_i(\omega)} = \frac{j0.5\omega(4 + j2\omega)}{1 + j2\omega + (j\omega)^2} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 1}, s = j\omega$$

其零点为：

$$s(s+2) = 0 \Rightarrow z_1 = 0, z_2 = -2$$

其极点为：

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$$

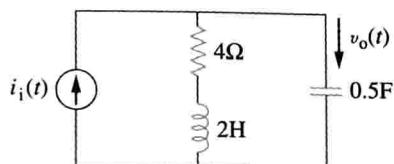
因此，在 $p=-1$ 处有一个重复极点（二重极点）。

图 14-6 例 14-2 图

练习 14-2 求图 14-7 所示电路的传递函数 $\mathbf{I}_o(\omega)/\mathbf{I}_i(\omega)$ ，并确定其零点与极点。

答案： $\frac{10(s+2)(s+3)}{s^2+8s+10}$, $s=j\omega$; 零点：-2, -3; 极点：-1.5505, -6.449

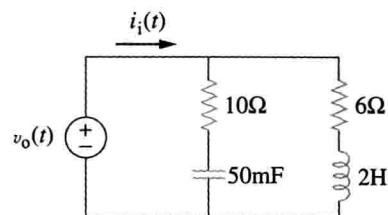


图 14-7 练习 14-2 图

† 14.3 分贝表示法

绘制传递函数的幅频特性与相频特性通常不会像上述例题那么容易。确定频率响应的一种更为系统的方法是利用伯德图。在学习绘制伯德图之前，首先明确两个重要问题：在增益表达式中对数与分贝的使用方法。

由于伯德图是基于对数坐标的，所以牢记如下对数性质是非常重要的：

1. $\log P_1 P_2 = \log P_1 + \log P_2$
2. $\log P_1/P_2 = \log P_1 - \log P_2$
3. $\log P^n = n \log P$
4. $\log 1 = 0$

在通信系统中，增益以贝尔(bel)为单位来度量。从历史上看，贝尔是用来度量两个功率电平之比的，即功率增益 G ：

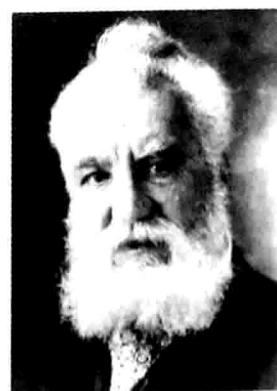
$$G = \text{贝尔数值} = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.4)$$

提示：用 bel 作为单位以纪念电话的发明者贝尔。

历史珍闻

亚历山大·格雷厄姆·贝尔 (Alexander Graham Bell 1847—1922)，苏格兰裔美国科学家，电话的发明人。

贝尔出生在苏格兰的爱丁堡，其父亲亚历山大·梅尔维尔·贝尔是一位著名的语言教师。小亚历山大从爱丁堡大学和伦敦大学毕业后也成为一位语言教师。1866 年，他对语音的点传输产生了浓厚的兴趣。在其兄长因肺结核病去世之后，父亲决定移居加拿大。此后小亚历山大来到波士顿一家聋哑学校工作，在那里他结识了托马斯·沃森 (Thomas A. Watson)，沃森后来成为他从事电磁发射实验研究的助手。1876 年 3 月 10 日，亚历山大发送了著名的第一条电话消息：“Watson, come here I want you.” 本章介绍的对数单位“贝尔”就是为了纪念他而以他的名字命名的。



©Ingram Publishing RF

分贝(dB)是一个比贝尔更小一些的单位，相当 $1/10\text{bel}$ ，即：

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad (14.5)$$

当 $P_1=P_2$ 时，功率没有变化，增益为0dB。当 $P_2=2P_1$ 时，增益为：

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 2 \approx 3\text{dB} \quad (14.6)$$

当 $P_1=0.5P_2$ 时，增益为：

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} 0.5 \approx -3\text{dB} \quad (14.7)$$

式(14.6)与式(14.7)也说明了对数应用广泛的另一个原因，即一个变量倒数的对数就等于该变量对数的相反数。

另外，增益 G 还可以用电压比或电流比来表达。为了说明这个问题，考虑图14-8所示的网络，如果 P_1 为输入功率， P_2 为输出(负载)功率， R_1 为输入电阻， R_2 为负载电阻，则 $P_1 = 0.5V_1^2/R_1$ ， $P_2 = 0.5V_2^2/R_2$ ，于是，方程(14.5)变为：

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_2}{V_1^2/R_1} = 10 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 + 10 \log_{10} \frac{R_1}{R_2} \quad (14.8)$$

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} - 10 \log_{10} \frac{R_2}{R_1} \quad (14.9)$$

在比较两个电压电平时通常假设 $R_1=R_2$ ，于是，式(14.9)变为：

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \quad (14.10)$$

对于电流而言，如果 $P_1=I_1^2R_1$ ， $P_2=I_2^2R_2$ ，则当 $R_1=R_2$ 时有：

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} \quad (14.11)$$

由式(14.5)、式(14.10)与式(14.11)可知，如下三点非常重要：

1. 由于功率与电压或电流之间呈平方关系($P=V^2/R=I^2R$)，所以“ $10 \log_{10}$ ”用于对功率取对数，而“ $20 \log_{10}$ ”用于对电压或电流取对数。

2. dB是同类型的一个变量与另一个变量之比的对数度量。因此，适合于表达式(14.2a)与式(14.2b)所示的无量纲传递函数 H ，而不适合表达式(14.2c)与式(14.2d)中的 H 。

3. 注意，在式(14.10)与式(14.11)中仅采用了电压与电流的幅度，负号与角度将做单独的处理，参见14.4节的内容。

下面利用对数与分贝的概念学习伯德图的绘制。

14.4 伯德图

14.2节中由传递函数确定频率响应是一项很困难的任务，频率响应所涉及的频率范围通常是非常宽的，如果频率轴采用线性刻度就显得很不方便；另外，确定传递函数的幅度与相位的重要特征也有更为系统的方法。鉴于上述原因，在实际中通常利用半对数坐标系绘制传递函数，即以频率的对数作为横坐标，幅度谱纵坐标是单位为分贝的幅度值，而另一幅图的相位谱纵坐标是单位为度的相位值。传递函数的这种半对数幅频、相频曲线就称为伯德图(Bode plot)，现已成为一种工业标准。

提示：伯德(Hendrik W, Bode, 1905—1982)是贝尔电话实验室的工程师，伯德图就是以他的名字命名的，以纪念他在20世纪30年代到40年代期间所做的前瞻性工作。

伯德图是传递函数的模(单位为分贝)与相位(单位为度)关于频率的半对数曲线图。

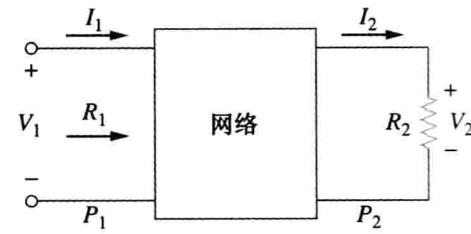


图14-8 四端网络的电压-电流关系

伯德图与前一节介绍的非对数曲线包含有同样的信息，但是稍后会看到，伯德图绘制起来却容易得多。

传递函数可以写为：

$$H = H / \phi = H e^{j\phi} \quad (14.12)$$

两边取自然对数可以得到：

$$\ln H = \ln H + \ln e^{j\phi} = \ln H + j\phi \quad (14.13)$$

因此， $\ln H$ 的实部是幅度的函数，而其虚部就是相位。在幅度伯德图中，增益为：

$$H_{dB} = 20 \log_{10} H \quad (14.14)$$

增益曲线是分贝(dB)-频率关系曲线，表 14-2 给出了一些 H 值及其对应的分贝值。在相位伯德图中，相位的单位为度。幅频曲线与相频曲线均绘制在半对数坐标纸上。

式(14.3)所示的传递函数可以用带有实部和虚部的因式来表示，其中一种表示方法可以写为：

表 14-2 某些特定的增益值及其分贝值^①

幅度 H	$20 \log_{10} H$ (dB)	幅度 H	$20 \log_{10} H$ (dB)
0.001	-60	0.01	-40
0.1	-20	0.5	-6
$1/\sqrt{2}$	-3	1	0
$\sqrt{2}$	3	2	6
10	20	20	26
100	40	1000	60

①某些为近似值。

$$H(\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1}(1+j\omega/z_1)[1+j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]\dots}{(1+j\omega/p_1)[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]\dots} \quad (14.15)$$

上式可以通过分配 $H(\omega)$ 中的极点与零点而得到。式(14.15)所示的 $H(\omega)$ 的表达式称为标准形式 (standard form)。 $H(\omega)$ 中可以包含多达七种不同的因子，这些因子可以是传递函数中各种不同的组合，它们是：

1. 增益 K ；
2. 在原点的极点 $(j\omega)^{-1}$ 或零点 $j\omega$ ；
3. 单极点 $1/(1+j\omega/p_1)$ 或单零点 $(1+j\omega/z_1)$ ；
4. 二阶极点 $1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ 或二阶零点 $[1+j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]$ 。

在绘制伯德图时，首先分别绘制各因子的曲线，之后再将其相加起来。由于采用了对数运算，所以各因子可以单独考虑，再将它们相加组合成伯德图。正是因为对数在数学上便于处理，使得伯德图成为一种强有力的工程工具。

提示：原点位于 $\omega=1$ ，即 $\log\omega=0$ 处，且原点处的增益为零。

下面画出以上所列各因子的直线伯德图，这些直线伯德图是真实伯德图的合理近似。

常数项：对于增益 K ，其幅度为 $20 \log_{10} K$ ，相位为 0° ，两者均与频率无关。于是，增益的幅频特性与相频特性曲线如图 14-9 所示。如果 K 是负的，其幅度仍然为 $20 \log_{10} |K|$ ，而相位为 $\pm 180^\circ$ 。

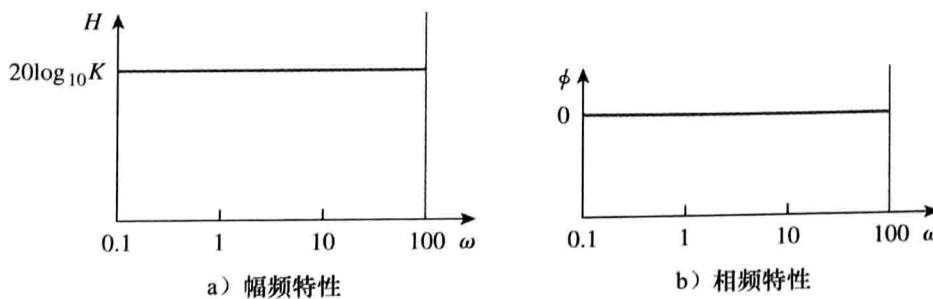


图 14-9 增益 K 的伯德图

位于原点处的极点/零点：对于原点处的零点 $(j\omega)$ ，其幅度为 $20 \log_{10} \omega$ ，相位为 90° 。

其伯德图如图 14-10 所示, 由图可见, 幅频特性曲线的斜率为 20dB/十倍频, 而相频特性与频率无关。

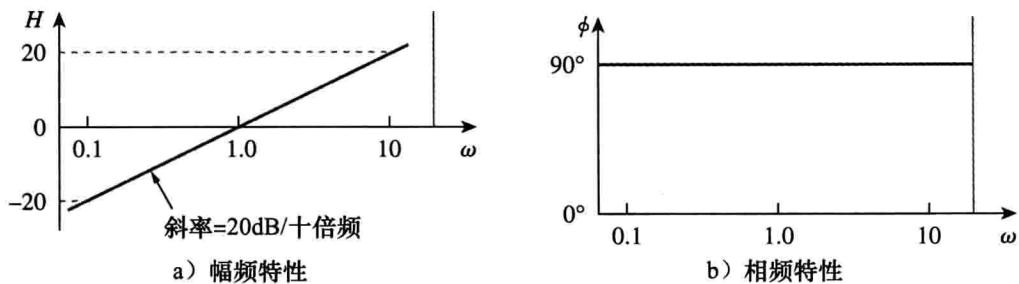


图 14-10 原点处零点($j\omega$)的伯德图

极点($j\omega$)⁻¹的伯德图与零点类似, 只是幅频特性曲线的斜率为 -20dB/十倍频, 而相位为 -90°。对于一般情况($j\omega$)^N, N 为整数, 其幅频特性曲线的斜率为 $20N$ dB/十倍频, 而相位为 $90N$ 度。

提示: 十倍频(dec)是指频率之比为 10 的两个频率之间的间隔, 例如 ω_0 与 $10\omega_0$ 之间的间隔, 或者 10Hz 与 100Hz 之间的间隔, 所以 20dB/dec 表示频率每变化十倍频程, 其幅度就改变 20dB。

单极点/单零点: 对于单零点($1+j\omega/z_1$), 其幅度为 $20\log_{10}|1+j\omega/z_1|$, 相位为 $\arctan\omega/z_1$ 。于是:

$$H_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega}{z_1}\right| \Rightarrow 20\log_{10}1 = 0, \omega \rightarrow 0 \text{ 时} \quad (14.16)$$

$$H_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega}{z_1}\right| \Rightarrow 20\log_{10}\frac{\omega}{z_1}, \omega \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (14.17)$$

由此可见, 当 ω 较小时, 可以用零(斜率为零的直线)作为其幅频特性曲线的近似, 而当 ω 较大时, 可以用斜率为 20dB/dec 的直线作为其幅频特性曲线的近似。两渐近线相交处的频率 $\omega=z_1$ 称为转折频率(corner frequency 或 break frequency)。于是, 近似幅频特性曲线如图 14-11a 所示。图中也给出了实际的幅频特性曲线, 可见, 除了在 $\omega=z_1$ 的转折频率处, 近似曲线非常接近于实际曲线, 而在该频率处, 其偏差为 $20\log_{10}|(1+j1)| = 20\log_{10}\sqrt{2} \approx 3$ dB。

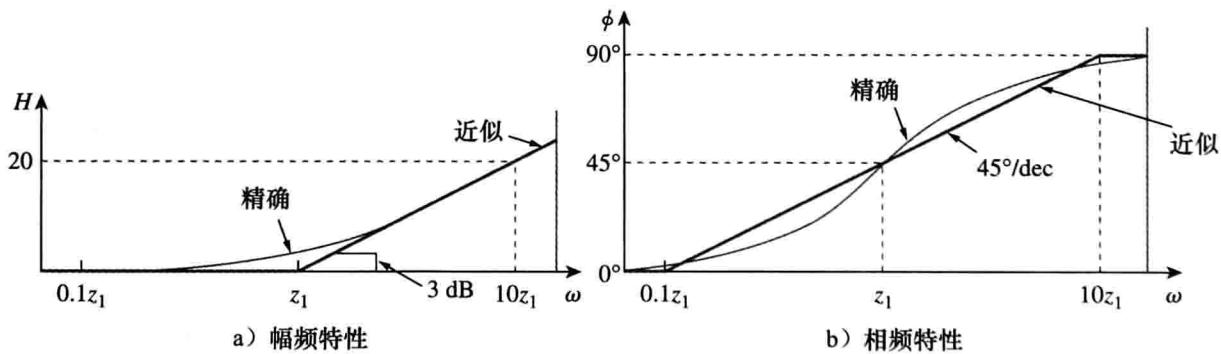


图 14-11 零点($1+j\omega/Z_1$)的伯德图

相位 $\arctan(\omega/z_1)$ 可以表示为:

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{z_1}\right) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ 45^\circ, & \omega = z_1 \\ 90^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14.18)$$

作为直线近似, 当 $\omega_1 \leq z_1/10$ 时, 令 $\phi \approx 0$; 当 $\omega_1 = z_1$ 时, 令 $\phi \approx 45^\circ$; 当 $\omega_1 \geq 10z_1$ 时, 令 $\phi \approx 90^\circ$ 。如图 14-11b 所示, 图中也给出了实际的相频特性曲线, 直线的斜率为 $45^\circ/\text{dec}$ 。

极点 $1/(1+j\omega/p_1)$ 的伯德图与图 14-11 类似，只是转折频率为 $\omega=p_1$ ，幅频特性曲线的斜率为 -20dB/dec ，相频特性曲线的斜率为 $-45^\circ/\text{dec}$ 。

提示：因为 $\log 0 = -\infty$ ，所以在伯德图上不会出现直流 ($\omega=0$) 的特例。这意味着零频率位于伯德图原点左侧无穷远处。

二阶极点/二阶零点：二阶极点 $1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ 的幅度为 $-20\log_{10}|1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2|$ ，其相位为 $\arctan(2\zeta_2\omega/\omega_n)/(1-\omega^2/\omega_n^2)$ 。且有：

$$H_{\text{dB}} = -20\log_{10} \left| 1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| \Rightarrow \omega \rightarrow 0 \text{ 时} \quad (14.19)$$

$$H_{\text{dB}} = -20\log_{10} \left| 1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 \right| \Rightarrow -40\log_{10} \frac{\omega}{\omega_n} \quad \omega \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (14.20)$$

因此，幅频特性曲线由两条渐近直线组成：一条是 $\omega < \omega_n$ 时，斜率为零的直线，另一条是 $\omega > \omega_n$ 时斜率为 -40dB/dec 的直线，其中 ω_n 为转折频率。图 14-12a 所示为近似幅频特性曲线与实际幅频特性曲线，可见，实际的幅频特性取决于阻尼因子 ζ_2 与转折频率 ω_n 。如果需要高精度的幅频特性，则需要在直线近似的转折频率的邻域内叠加一个明显的峰值。但是，为了简单起见，仍然可以采用直线近似。

二阶极点的相位可以表示为：

$$\phi = -\arctan \frac{2\zeta_2\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2} = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14.21)$$

该相频特性曲线是一条斜率为 $90^\circ/\text{dec}$ 的直线，其起点位于 $\omega_n/10$ 处，终点位于 $10\omega_n$ 处，如图 14-12b 所示。同样可以观察到由阻尼因子引起的实际曲线与近似直线之间的差别。二阶极点的幅频特性与相频特性的直线近似与重极点 $(1+j\omega/\omega_n)^2$ 的情况相同，这是因为重极点 $1+(j\omega/\omega_n)^2$ 就等于 $\zeta_2=1$ 时的二阶极点 $1/[1+j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]$ 。因此，只要采用直线近似，二阶极点与重极点就可以同等处理。

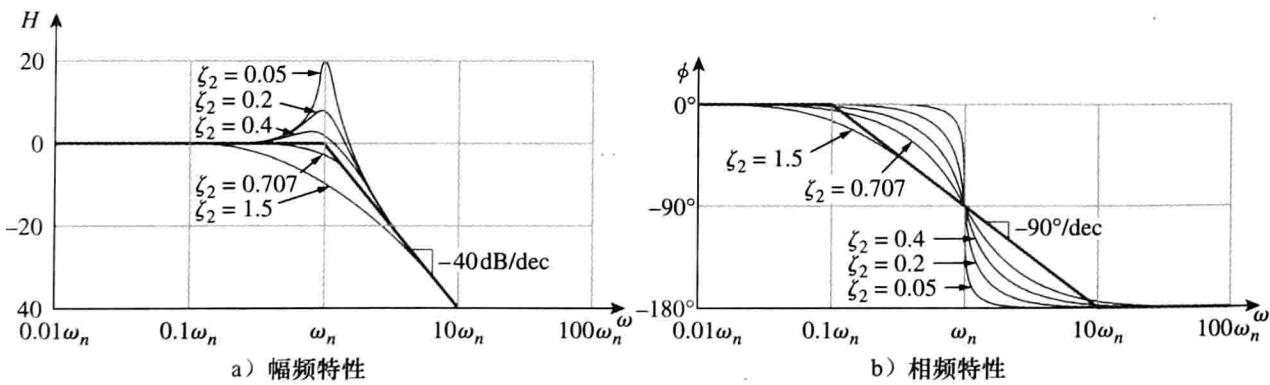


图 14-12 二阶极点 $1/[1+j2\zeta\omega/\omega_n - \omega^2/\omega_n^2]^{-1}$ 的伯德图

提示：还有一种速度更快、效率更高的伯德图绘制方法。该方法利用零点使斜率增大，极点使斜率下降的特性。从伯德图的低频渐近线开始，沿频率轴移动，在每个转移频率处增大或减小斜率，这样就可以快速地由传递函数绘制出伯德图，而无需逐个画出后再相加。在熟练掌握本节介绍的方法之后，就可以试着利用上述过程来绘制伯德图。

数字计算机已不再采用本节介绍的方法绘制伯德图。PSPice、MATLAB、Mathcad 和 Micro-Cap 等软件都可以绘制频率响应曲线，稍后将讨论利用 PSPice 绘制伯德图。

对于二阶零点 $[1+j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]$ ，由于其幅频特性曲线的斜率为 40dB/dec ，而相频特性曲线的斜率为 $90^\circ/\text{dec}$ ，所以其伯德图只需将图 14-12 所示曲线反转即可。

表 14-3 总结了上述 7 种因子的伯德图，当然，并非每个传递函数都包含上述七个因

子。为了画出式(14.15)所示传递函数 $H(\omega)$ 的伯德图, 首先要在半对数坐标纸上标记出各转折频率点, 按上述方法画出每个因子的伯德图, 之后将各个图形相加合并, 从而得到传递函数的伯德图。合并的过程通常是从左到右, 每次在转折频率处斜率发生变化。以下的例题说明上述绘制伯德图的过程。

表 14-3 幅频和相频直线伯德图总结

因子	幅频	相频
K	$20\log_{10}K$	0°
$(j\omega)^N$	$20N \text{ dB/decade}$	$90N^\circ$
$\frac{1}{(j\omega)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$	$-90N^\circ$
$\left(1 + \frac{j\omega}{z}\right)^N$	$20N \text{ dB/decade}$	$0^\circ, 90N^\circ$
$\frac{1}{(1 + j\omega/p)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$	$0^\circ, p, 10p$
$\left[1 + \frac{2j\omega\xi}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$	$40N \text{ dB/decade}$	$0^\circ, \omega_n, 10\omega_n$
$\frac{1}{[1 + 2j\omega\xi/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]^N}$	$-40N \text{ dB/decade}$	$0^\circ, \omega_k/10, \omega_k, 10\omega_k$

例 14-3 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

解：首先将 $H(\omega)$ 的分子、分母分别除以极点与零点，得到其标准形式为：

$$H(\omega) = \frac{10j\omega}{(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/10)} = \frac{10|j\omega|}{|1 + j\omega/2| |1 + j\omega/10|} \angle 90^\circ - \arctan \omega/2 - \arctan \omega/10$$

$H(\omega)$ 的幅度与相位分别为：

$$H_{\text{dB}} = 20\log_{10} 10 + 20\log_{10} |j\omega| - 20\log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{2} \right| - 20\log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right|$$

$$\phi = 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\omega}{10}$$

由此可见，两个转折频率分别位于 $\omega = 2$ 、 10 处，画出其幅频特性与相频特性中每一项的伯德图，如图 14-13 中虚线所示，之后进行相加合并，得到实线所示总的伯德图。

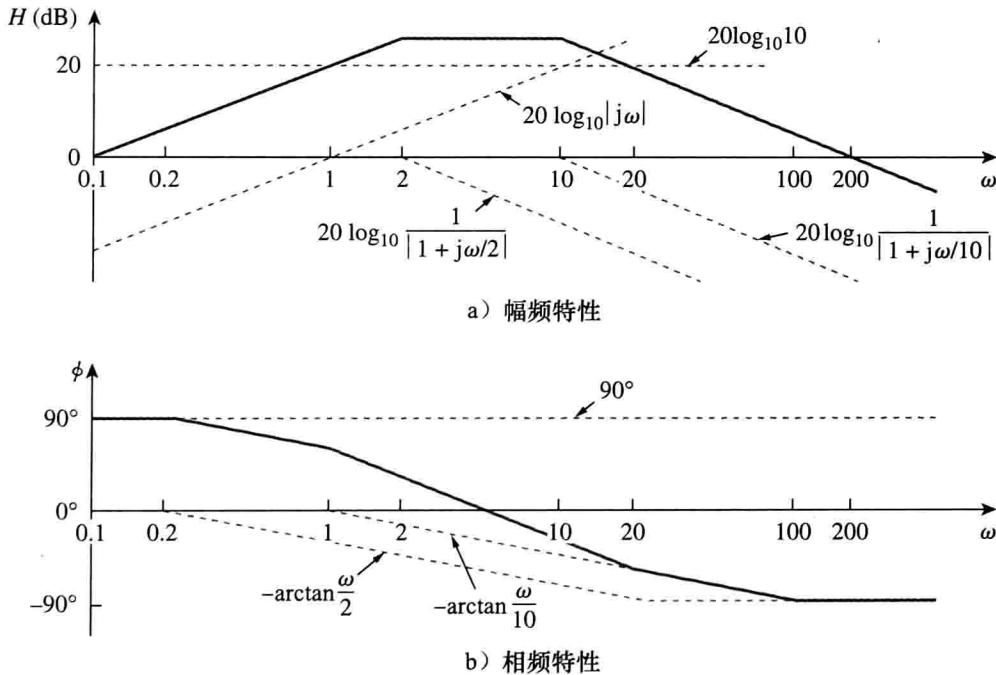


图 14-13 例 14-3 的伯德图

练习 14-3 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega) = \frac{5(j\omega + 2)}{j\omega(j\omega + 10)}$$

答案：参见图 14-14

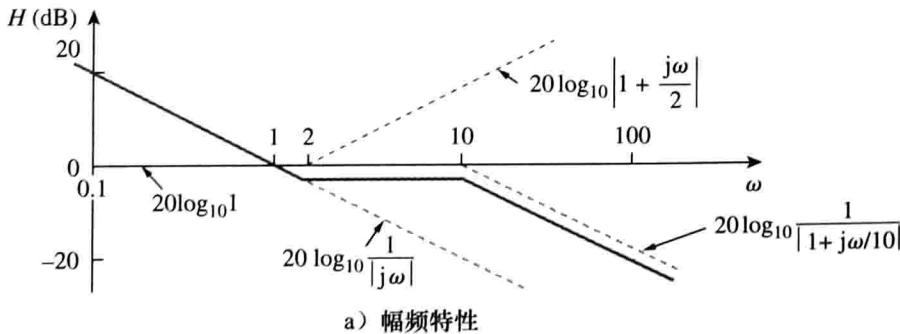


图 14-14 练习 14-3 的伯德图

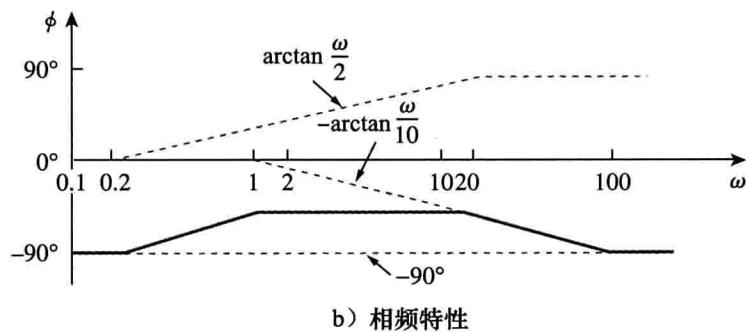


图 14-14 (续)

例 14-4 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 5)^2}$$

解：将 $H(\omega)$ 转化为标准形式，有：

$$H(\omega) = \frac{0.4(1 + j\omega/10)}{j\omega(1 + j\omega/5)^2}$$

由标准形式得到的幅度与相位分别为：

$$H_{dB} = 20\log_{10} 0.4 + 20\log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right| - 20\log_{10} |j\omega| - 40\log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{5} \right|^2$$

$$\phi = 0^\circ + \arctan \frac{\omega}{10} - 90^\circ - 2\arctan \frac{\omega}{5}$$

由此可见，两个转折频率分别位于 $\omega=5$ 、 10rad/s 处，在转折频率 $\omega=5$ 处得到极点，由于是平方因子，所以其幅频特性曲线的斜率为 -40dB/dec ，相频特性曲线的斜率为 $-90^\circ/\text{dec}$ 。 $H(\omega)$ 中各项的幅频特性曲线与相频特性曲线（虚线所示）以及整个伯德图（实线所示）如图 14-15 所示。

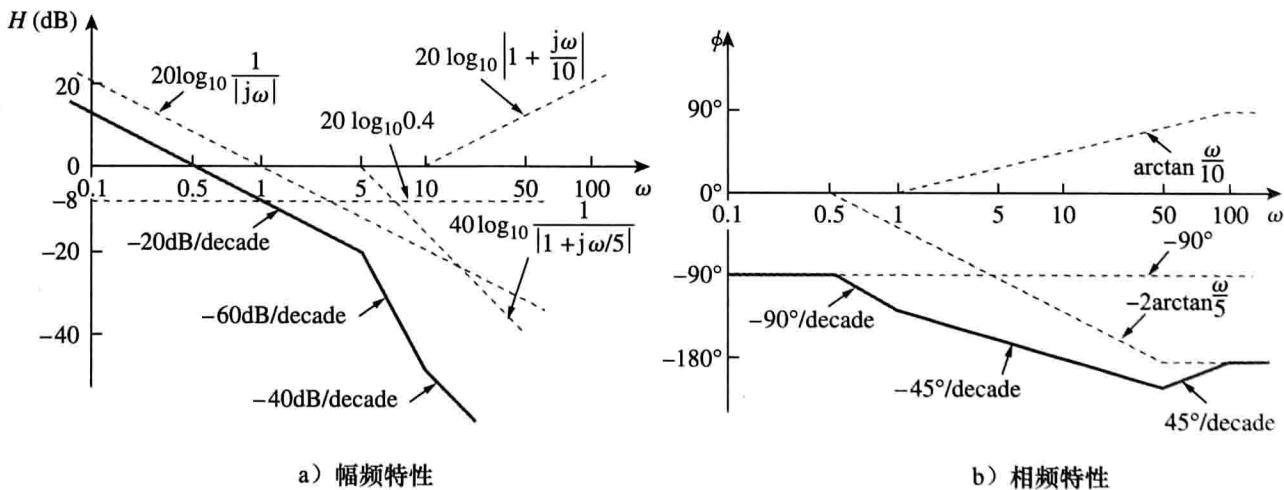
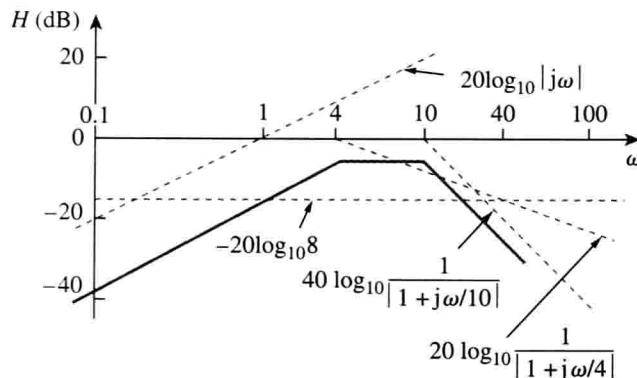


图 14-15 例 14-4 的伯德图

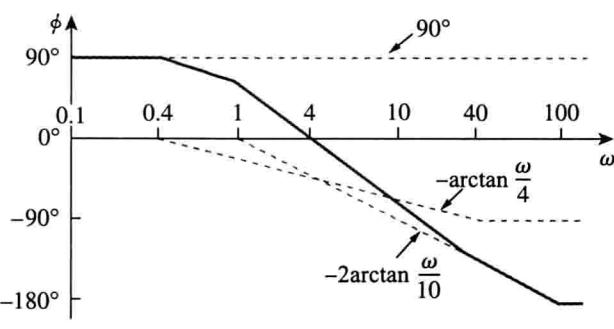
练习 14-4 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(\omega) = \frac{50j\omega}{(j\omega + 4)(j\omega + 10)^2}$$

答案：参见图 14-16



a) 幅频特性



b) 相频特性

图 14-16 练习 14-4 的伯德图

例 14-5 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 12s + 100}$$

解：1. 明确问题。本例所要解决的问题已明确，可以按照本章介绍的方法进行求解。

2. 列出已知条件。本题要求确定给定传递函数的近似伯德图。

3. 确定备选方案。求解本题最为有效的两种方法分别是本章介绍的近似方法，以及可以绘制精确伯德图的 MATLAB。这里采用前者。

4. 尝试求解。将 $H(s)$ 表达为标准形式：

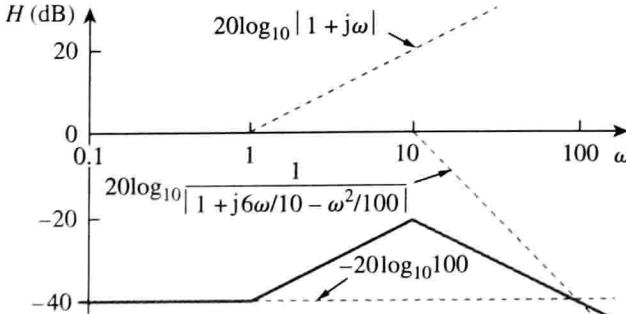
$$H(\omega) = \frac{1/100(1+j\omega)}{1+j\omega 1.2/10 + (j\omega/10)^2}$$

在转折频率 $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ 处为传递函数的二阶极点。 $H(\omega)$ 的幅度与相位分别为：

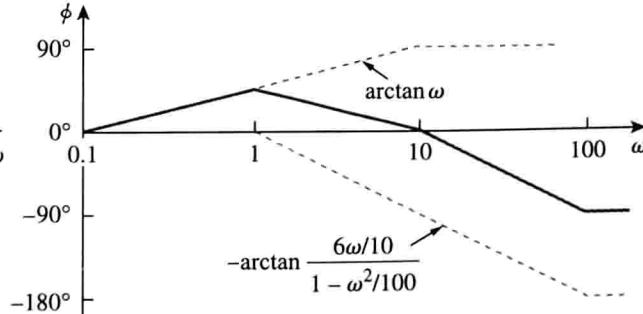
$$H_{\text{dB}} = -20\log_{10} 100 + 20\log_{10}|1+j\omega| - 20\log_{10}\left|1 + \frac{j\omega 1.2}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right|$$

$$\phi = 0^\circ + \arctan \omega - \arctan\left[\frac{\omega 1.2/10}{1 - \omega^2/100}\right]$$

$H(\omega)$ 的伯德图如图 14-17 所示。注意将二阶极点当作重极点来处理，在 $\omega=\omega_k$ 处为 $(1+j\omega/\omega_k)^2$ ，这是一种近似的方法。



a) 幅频特性



b) 相频特性

图 14-17 例 14-5 的伯德图

5. 评价结果。虽然可以利用 MATLAB 验证所得到的结果，但这里采用更为直接的方法进行验证。首先，必须明确在近似方法中，假设分母 $\zeta=0$ 。于是，可以利用如下方程验证答案：

$$H(s) \approx \frac{s+1}{s^2 + 10^2}$$

同时，需要求解 H_{dB} 及其相应的相位 ϕ 。首先，令 $\omega=0$ ，则有

$$H_{dB} = 20\log_{10}(1/100) = -40, \quad \phi = 0^\circ$$

令 $\omega=1$ ，则有：

$$H_{dB} = 20\log_{10}(1.4142/99) = -36.9dB$$

比转折频率处高 3dB。

$$H(j) = \frac{j+1}{-1+100} \Rightarrow \phi = 45^\circ$$

当 $\omega=100$ 时，则有：

$$H_{dB} = 20\log_{10}100 - 20\log_{10}9900 = 39.91dB$$

由分子处的 90° 减 180° 可得 ϕ 为 -90° 。至此，已经验证了三个不同的频率点，得到一致的结果，这是一种近似方法，我们对上述求解过程是有信心的。

为什么不在 $\omega=10$ 处进行验证呢？如果仅利用以上近似值，则会得到一个无穷大的值，这是由 $\zeta=0$ 可以估计到的（参见图 14-12a）。由于 $\zeta=0.6$ ，如果利用 $H(j10)$ 的实际值，仍然会得到与近似值偏离很大的值，并且图 14-12a 也给出了偏离值。在 $\zeta=0.707$ 时重做本题，就可以得到与近似值更接近的结果。但是，目前的点已经足够，无需再做这样的计算。

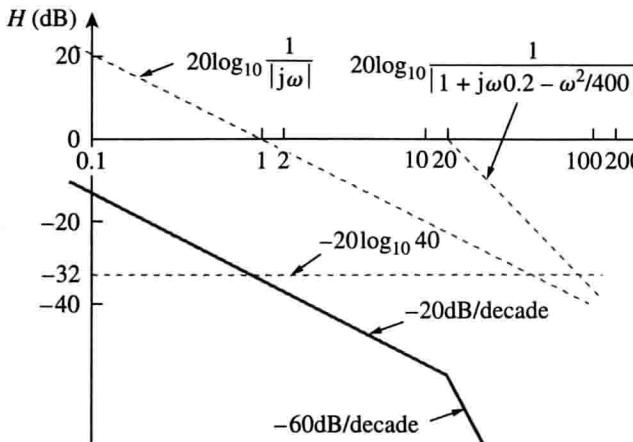
提示：利用 MATLAB 绘制伯德图的方法参见 14.11 节。

6. 是否满意？本题的求解过程令人满意，可以将其作为本题的答案。

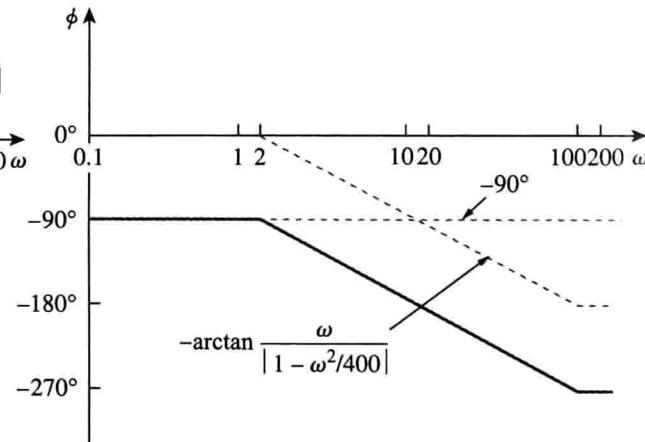
练习 14-5 画出如下传递函数的伯德图：

$$H(s) = \frac{10}{s(s^2 + 80s + 400)}$$

答案：参见图 14-18



a) 幅频特性



b) 相频特性

图 14-18 练习 14-5 的伯德图

例 14-6 已知伯德图如图所示 14-19 所示，试确定传递函数 $H(\omega)$ 。

解：由伯德图确定 $H(\omega)$ 时，必须记住零点总是在转折频率处引起向上的转折，而极点总是在转折频率处引起向下的转折。由图 14-19 可见，斜率为 $+20\text{dB/dec}$ 的直线表明在原点处有一个零点 $j\omega$ ，与频率轴的交点为 $\omega=1$ ，该直线平移 40dB 表明增益为 40dB，即：

$$40 = 20\log_{10}K \Rightarrow \log_{10}K = 2$$

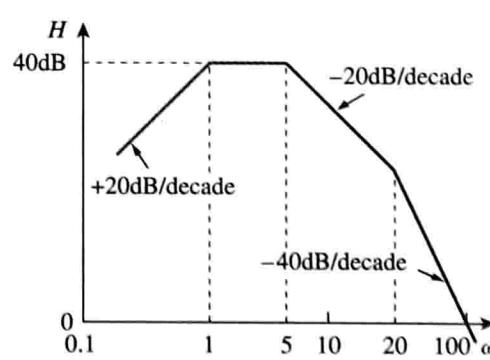


图 14-19 例 14-6 的伯德图

即

$$K = 10^2 = 100$$

除了原点处的零点 $j\omega$ 之外, 从图 14-19 可见, 还有三个转折频率分别为 $\omega = 1, 5$ 和 20 rad/s 的因子, 因此有:

1. 在 $p=1$ 处的极点, 其斜率为 -20 dB/decade , 该极点使曲线向下转折并与原点处的零点相互抵消。 $p=1$ 处的极点由因子 $1/(1+j\omega/1)$ 确定。

2. 在 $p=5$ 处的另一个极点, 其斜率为 -20 dB/decade , 使曲线向下转折, 该极点由因子 $1/(1+j\omega/5)$ 确定。

3. 第三个极点在 $p=20$ 处, 其斜率为 -20 dB/decade , 使曲线进一步向下转折, 该极点由因子 $1/(1+j\omega/20)$ 确定。

将以上各式合并, 即可得到相应的传递函数为:

$$H(\omega) = \frac{100j\omega}{(1+j\omega/1)(1+j\omega/5)(1+j\omega/20)} = \frac{j\omega 10^4}{(j\omega+1)(j\omega+5)(j\omega+20)}$$

即

$$H(s) = \frac{10^4 s}{(s+1)(s+5)(s+20)}, \quad s = j\omega$$

练习 14-6 确定与图 14-20 所示伯德图相对应的传递函数 $H(\omega)$ 。

答案: $H(\omega) = \frac{2000000(s+5)}{(s+10)(s+100)^2}$

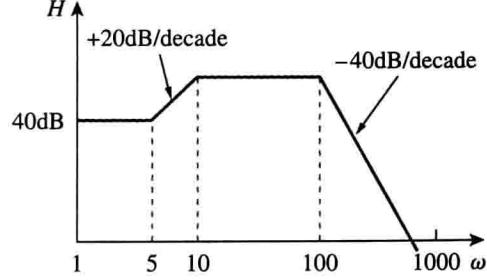


图 14-20 练习 14-6 的伯德图

14.5 串联谐振电路

电路频率响应的最为显著的特征是其幅频特性中所呈现的尖峰, 也称谐振峰。谐振的概念出现在科学与工程的诸多领域中, 任何包含复共轭极点对的系统都会出现谐振, 这是存储能量从一种形式转换为另一种形式的振荡产生的根源。这种现象在通信网络中可以用于频率识别。在至少包含一个电容器与一个电感器的任何电路中, 均有可能出现谐振现象。

谐振是 RLC 电路中容性电抗与感性电抗大小相等时呈现的一种状态, 此时该电路呈现出纯电阻的阻抗性质。

谐振电路(串联或并联)对于传递函数具有高度频率选择性的滤波器设计是非常有用的, 在无线电收音机与电视机的选频电路等许多应用中都会用到谐振电路。

考虑图 14-21 所示的频域 RLC 串联电路, 其输入阻抗为:

$$Z = H(\omega) = \frac{V_s}{I} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (14.22)$$

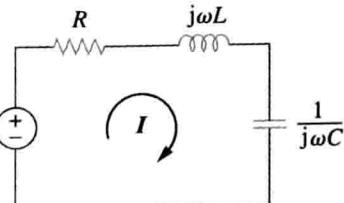


图 14-21 串联谐振电路

当传递函数的虚部为零时, 就会产生谐振, 即:

$$\operatorname{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (14.24)$$

满足上述条件的 ω 值称为谐振频率(resonant frequency) ω_0 , 因此谐振的条件为:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (14.25)$$

即

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (14.26)$$

因为 $\omega_0 = 2\pi f_0$, 所以:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (14.27)$$

注意, 在谐振条件下有如下性质:

1. 阻抗为纯电阻, 即 $Z=R$ 。换言之, LC 串联组合相当于短路, 整个电压都加在电阻 R 两端。
2. 电压 V_s 与电流 I 是同相的, 因此功率因数为 1。
3. 传递函数 $H(\omega)=Z(\omega)$ 的幅度最小。
4. 电感器两端的电压与电容器两端的电压比电源电压高得多。

提示: 第 4 点可由如下关系证实:

$$|V_L| = \frac{V_m}{R}\omega_0 L = QV_m, \quad |V_C| = \frac{V_m}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = QV_m$$

其中, Q 为由式(14.38)定义的品质因数。

RLC 电路电流幅度的频率响应为:

$$I = |\mathbf{I}| = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (14.28)$$

如图 14-22 所示, 当频率轴为对数坐标时, 该图仅说明对称特性。 RLC 电路消耗的平均功率为:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} I^2 R \quad (14.29)$$

当 $I=V_m/R$, 即谐振时, 电路消耗的功率最大, 因此:

$$P(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R} \quad (14.30)$$

在频率 $\omega=\omega_1$ 、 ω_2 处, 电路消耗的功率为上述最大功率的一半, 即:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{(V_m/\sqrt{2})^2}{2R} = \frac{V_m^2}{4R} \quad (14.31)$$

因此, ω_1 、 ω_2 称为半功率频率(half-power frequency)。

半功率频率可以通过设置 $Z=\sqrt{2}R$ 得到, 即:

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}R \quad (14.32)$$

求解 ω 得到:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}} \quad (14.33)$$

由式(14.33)与(14.33), 可以得到半功率频率与谐振频率之间的关系为:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (14.34)$$

即谐振频率为半功率频率的几何平均值。注意, 由于频率响应一般是不对称的, 所以 ω_1 、 ω_2 通常也不是关于谐振频率 ω_0 对称的。但是, 稍后会说明, 半功率频率关于谐振频率的对称性通常是一个比较合理的近似。

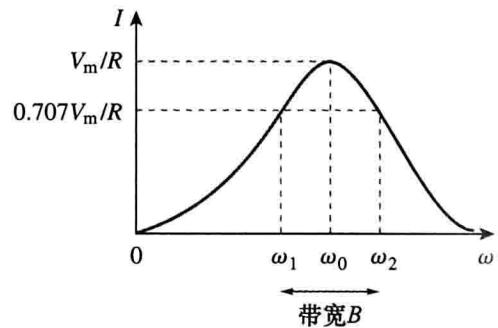


图 14-22 图 14-21 所示串联谐振电路的电流幅度与频率之间的关系曲线

虽然图 14-22 所示谐振曲线的峰值取决于电阻 R ，但是该曲线的宽度取决于其他因素，即带宽 B ，带宽定义为两个半功率频率之差：

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (14.35)$$

带宽的这种定义只是几种常用定义之一。严格地讲，式(14.35)所定义的带宽称为半功率带宽，因为它是半功率频率之间的谐振曲线的频带宽度。

谐振电路中，谐振曲线的“锐度”用品质因数(quality factor) Q 来度量。电路谐振时，电路中的电抗能量在电感器与电容器之间来回振荡。品质因数建立了谐振时电路储存的最大能量(峰值能量)与电路在一个振荡周期所消耗的能量之间的关系：

$$Q = 2\pi \frac{\text{电路存储的峰值能量}}{\text{电路在一个振荡周期所消耗的能量}} \quad (14.36)$$

提示：虽然符号 Q 与表示无功功率的符号相同，但二者并不相等，不应将它们混淆。这里的品质因数 Q 是无量纲的，而无功功率 Q 的单位是 var，通过单位可能会便于二者的区分。

品质因数也是电路的储能属性及其耗能属性之间关系的一个度量。在 RLC 串联电路中，储能的峰值为 $1/2LI^2$ ，一个周期的耗能为 $1/2(I^2R)(1/f_0)$ ，因此：

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{1}{2}I^2R(1/f_0)} = \frac{2\pi f_0 L}{R} \quad (14.37)$$

即

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (14.38)$$

注意，品质因数是无量纲的，将式(14.33)代入式(14.35)，并利用式(14.38)的关系即可确定带宽 B 与品质因数 Q 之间的关系：

$$B = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (14.39)$$

即

$$B = \omega_0^2 CR$$

谐振电路的品质因数是其谐振频率与带宽之比。

注意，式(14.26)、式(14.33)、式(14.38)以及式(14.39)仅适合于 RLC 串联电路。

Q 值越高，电路的频率选择性越好，但其带宽也越窄，如图 14-23 所示。 RLC 电路的选择性(selectivity)是指电路响应某个频率以及辨别其他频率的一种能力。如果被选择或者被拒绝的频带很窄，则要求谐振电路的品质因数必须很高，反之如果频带比较宽，则品质因数应相应地降低。

提示：品质因数是电路选择性(谐振“锐度”)的一种度量。

谐振电路通常应工作在谐振频率或其邻近频率处。当电路的品质因数大于或等于 10 时，称之为高 Q 值电路(high-Q circuit)。在高 Q 值电路的所有实际应用中，其半功率频率均关于谐振频率对称，而且可以近似地表示为：

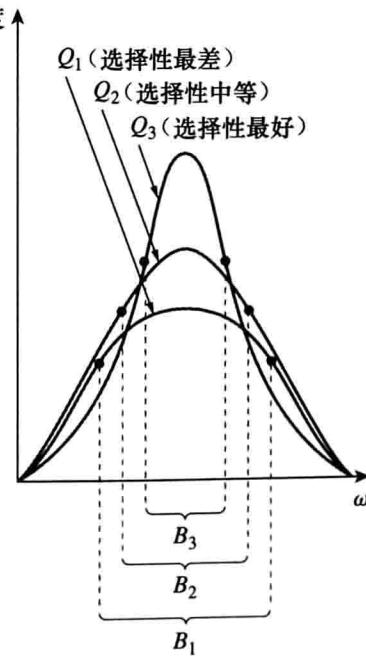


图 14-23 电路的 Q 值越高，其带宽越窄

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2} \quad (14.40)$$

高 Q 值电路通常用在通信网络中。

由此可见，谐振电路可以用如下五个相关参数来表征：两个半功率频率 ω_1 与 ω_2 ，谐振频率 ω_0 ，带宽 B 以及品质因数 Q 。

例 14-7 在图 14-24 所示电路中， $R = 2\Omega$ ， $L = 1\text{mH}$ ， $C = 0.4\mu\text{F}$ 。（a）求谐振频率与半功率频率；（b）计算品质因数与带宽；（c）计算在 ω_0 、 ω_1 与 ω_2 处的电流幅度。

解：(a) 谐振频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 0.4 \times 10^{-6}}} = 50(\text{krad/s})$$

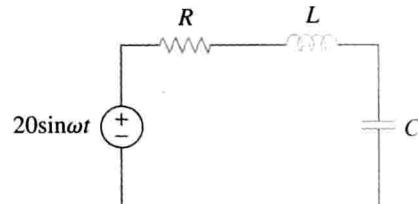


图 14-24 例 14-7 图

方法 1 小于谐振频率的半功率频率为：

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = -\frac{2}{2 \times 10^{-3}} + \sqrt{(10^3)^2 + (50 \times 10^3)^2} \\ &= -1 + \sqrt{1 + 2500} = 49\text{krad/s} \end{aligned}$$

同理，大于谐振频率的半功率频率为：

$$\omega_2 = 1 + \sqrt{1 + 2500} = 51\text{krad/s}$$

(b) 带宽为：

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2(\text{krad/s})$$

即

$$B = \frac{R}{L} = \frac{2}{10^{-3}} = 2(\text{krad/s})$$

品质因数为：

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{50}{2} = 25$$

方法 2 求解品质因数的另一种方法为：

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{50 \times 10^3 \times 10^{-3}}{2} = 25$$

由 $Q > 10$ ，因此该电路为高 Q 值电路，其半功率频率为：

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{50 \times 10^3}{25} = 2(\text{krad/s})$$

由于 $Q > 10$ ，因此该电路为高 Q 值电路，其半功率频率为：

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 50 - 1 = 49(\text{krad/s})$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 50 + 1 = 51(\text{krad/s})$$

与前面一种方法求得的结果相同。

(c) 当 $\omega = \omega_0$ 时：

$$I = \frac{V_m}{R} = \frac{20}{2} = 10(\text{A})$$

当 $\omega = \omega_1$ 、 ω_2 时：

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.071(\text{A})$$

练习 14-7 某串联电路中, $R=4\Omega$, $L=25mH$ 。(a)计算要得到品质因数 50 时的电容值 C ; (b)求 ω_1 、 ω_2 与 B ; (c)求 $\omega=\omega_0$ 、 ω_1 、 ω_2 时电路消耗的平均功率, 假设 $V_m=100V$ 。

答案: (a) $0.625\mu F$; (b) $7920rad/s$, $8080rad/s$, $160rad/s$; (c) $1.25kW$, $0.625kW$, $0.625kW$

14.6 并联谐振电路

图 14-25 所示的并联谐振电路是 RLC 串联谐振电路的对偶电路。为避免不必要的重复, 由对偶性质可以直接得到导纳为:

$$Y = H(\omega) = \frac{I}{V} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad (14.41)$$

即

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (14.42)$$

当 Y 的虚部为零时, 产生谐振:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (14.43)$$

即

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (14.44)$$

上式与串联谐振电路的式(14.26)是相同的。并联谐振电路的电压 $|V|$ 与频率之间的关系如图 14-26 所示。由此可见, 在谐振频率处, LC 并联组合相当于开路, 电流全部流经 R 。并且在谐振时, 流经电感器与电容器的电流比电源电流大得多。

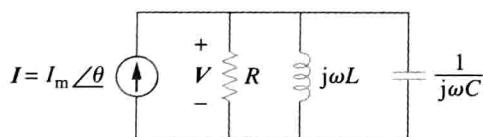


图 14-25 并联谐振电路

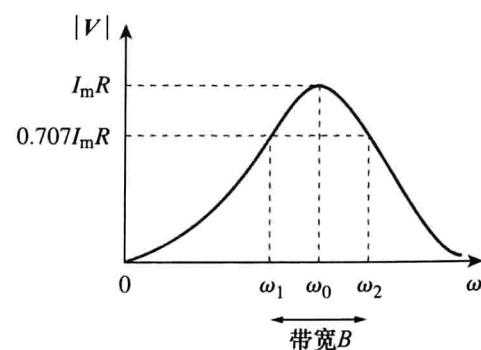


图 14-26 图 14-25 所示并联谐振电路的电压幅度与频率之间的关系曲线

提示:

$$|I_L| = \frac{I_m R}{\omega_0 L} = Q I_m, \quad |I_C| = \omega_0 C I_m R = Q I_m$$

可以看出, 流经电感器与电容器的电流比电源电流大得多。式中 Q 为由式(14.47)定义的品质因数。

比较式(14.42)与式(14.23), 可以利用图 14-21 与图 14-25 之间的对偶性质, 将串联谐振电路表达式中的 R 、 L 、 C 分别利用 $1/R$ 、 C 、 L 取代, 即可得到并联谐振电路的如下表达式:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 &= \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{aligned}} \quad (14.45)$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC} \quad (14.46)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (14.47)$$

注意，式(14.45)~式(14.47)仅适用于RLC并联谐振电路。利用式(14.45)与式(14.47)可以得到半功率频率与品质因数之间的关系，即：

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{\omega_0}{2Q}, \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{\omega_0}{2Q} \quad (14.48)$$

同理，对于高Q值电路($Q \geq 10$)有：

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2} \quad (14.49)$$

表14-4总结了串联谐振电路与并联谐振电路的主要特性。除了本章讨论的RLC串联与并联电路外，还存在其他形式的谐振电路，例14-9就是一个典型的例子。

表14-4 RLC谐振电路特性总结

特性	串联电路	并联电路	特性	串联电路	并联电路
谐振频率 ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	品质因数 Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ 或 $\frac{1}{\omega_0 R C}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ 或 $\omega_0 R C$
频带宽度 B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$	半功率频率 ω_1, ω_2	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
$Q \geq 10$ 时的 ω_1, ω_2	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$			

例14-8 在图14-27所示的RLC并联电路中，设 $R = 8k\Omega$, $L = 0.2mH$, $C = 8\mu F$ 。

(a)计算 ω_0 、Q与B; (b)求 ω_1 与 ω_2 ; (c)计算 ω_0 、 ω_1 与 ω_2 各处所消耗的功率。

解：(a)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.2 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-6}}} = \frac{10^5}{4} = 25(krad/s)$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8 \times 10^3}{25 \times 10^5 \times 0.2 \times 10^{-3}} = 1600$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = 15.625(rad/s)$$

(b)由于Q值很高($Q > 10$)，可以看做是高Q值电路，于是：

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 25000 - 7.812 = 24992(rad/s)$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 25000 + 7.812 = 25008(rad/s)$$

(c)当 $\omega = \omega_0$ 时， $Y = 1/R$ ，即 $Z = R = 8k\Omega$ ，因此：

$$I_o = \frac{V}{Z} = \frac{10 \angle -90^\circ}{8000} = 1.25 \angle -90^\circ (mA)$$

因为在谐振时，全部电流都流经R，所以当 $\omega = \omega_0$ 时消耗的平均功率为：

$$P = \frac{1}{2} |I_o|^2 R = \frac{1}{2} (1.25 \times 10^{-3})^2 (8 \times 10^3) = 6.25(mW)$$

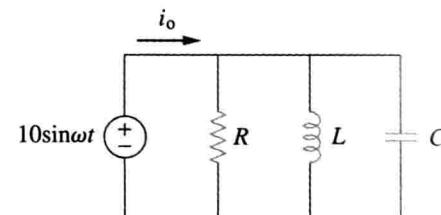


图14-27 例14-8图

即

$$P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{100}{2 \times 8 \times 10^3} = 6.25(\text{mW})$$

当 $\omega = \omega_1, \omega_2$ 时：

$$P = \frac{V_m^2}{4R} = 3.125(\text{mW})$$

练习 14-8 某并联谐振电路中， $R = 100\text{k}\Omega$, $L = 20\text{mH}$, $C = 5\text{nF}$, 计算 ω_0 、 ω_1 、 ω_2 、 Q 和 B 。

答案：100krad/s, 99krad/s, 101krad/s, 50, 2krad/s

例 14-9 计算图 14-28 所示电路的谐振频率。

解：该电路的输入导纳为：

$$Y = j\omega 0.1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{2 + j\omega 2} = 0.1 + j\omega 0.1 + \frac{2 - j\omega 2}{4 + 4\omega^2}$$

谐振时， $\text{Im}(Y) = 0$ ，即：

$$0.1\omega_0 - \frac{2\omega_0}{4 + 4\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 2(\text{rad/s})$$

练习 14-9 计算图 14-29 所示电路的谐振频率。

答案：435.9krad/s

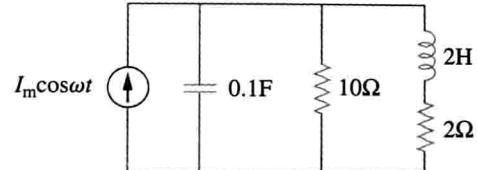


图 14-28 例 14-9 图

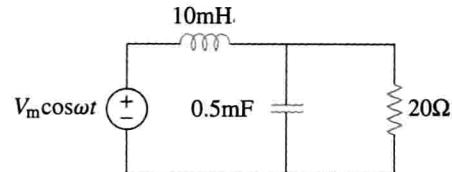


图 14-29 练习 14-9 图

14.7 无源滤波器

滤波器的概念从一开始就是电子工程发展中一个不可或缺的组成部分，没有电子滤波器，某些技术成果将是不可能实现的。鉴于滤波器的突出作用，许多学者和工程技术人员在其理论、设计与制造等问题上付出了大量的努力，发表并出版了很多关于滤波器的论文和专著。本章对滤波器的讨论只是一个简要介绍。

滤波器是一个使期望频率的信号通过、同时阻止或衰退其他频率信号的电路。

滤波器作为一种频率选择装置，可以用来将信号的频谱限制在某个特定的频带宽度范围内。在无线电接收机与电视机中，可以利用滤波器从空间中大量的广播信号中选出所需的信号频道。

如果滤波器电路仅由无源元件 R 、 L 、 C 组成，则称为无源滤波器 (passive filter)；如果构成滤波器的元件除无源元件 R 、 L 、 C 外，还包括有源器件（如晶体管、运算放大器等），则称为有源滤波器 (active filter)。本节先讨论无源滤波器，下一节再讨论有源滤波器。在实际应用中， LC 滤波器的级联已经超过八阶，在均衡器、阻抗匹配网络、变压器、成形网络、功率分配器、衰减器及方向耦合器等电路中应用广泛，为工程技术人员提供了大量的创新和实践机会。除这几节要学习的 LC 滤波器外，还有一些其他类型的滤波器，如数字滤波器、机电滤波器，微波滤波器等，均已超出本书的讨论范围，因此不再论及。

无论是无源滤波器还是有源滤波器，都有图 14-30 所示的四种形式。

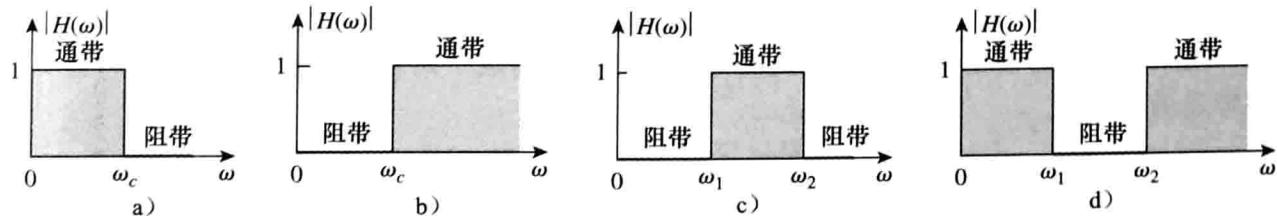


图 14-30 四类滤波器的理想频率响应

1. 低通滤波器 (lowpass filter)：允许低频通过，阻止高频通过，其理想频率响应如图 14-30a 所示。

2. 高通滤波器(highpass filter): 允许高频通过, 阻止低频通过, 其理想频率响应如图 14-30b 所示。

3. 带通滤波器(bandpass filter): 允许某个频带范围内的频率通过, 阻止或衰减该频带之外的频率, 其理想频率响应如图 14-30c 所示。

4. 带阻滤波器(bandstop filter): 允许某个频带范围外的频带通过, 阻止或衰减该频带内的频率, 其理想频率响应如图 14-30d 所示。

表 14-5 总结了以上四类滤波器的特性, 该表中所列的特性仅适用于一阶或二阶滤波器电路, 滤波器的种类不只表中所列的几种。下面讨论实现表 14-5 中所列各种滤波器的典型电路。

14.7.1 低通滤波器

当 RC 电路的输出取自电容器两端的电压时, 就构成一个典型的低通滤波器, 如图 14-31 所示。该电路的传递函数为(也可参见例 14-1):

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \\ H(\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \quad (14.50)$$

可见, $H(0)=1$, $H(\infty)=0$ 。图 14-32 所示为 $|H(\omega)|$ 的频率特性曲线及理想的频率特性曲线, 图中的半功率频率相当于伯德图中的转折频率, 但在滤波器中通常称为截止频率(cutoff frequency) ω_c 。令 $H(\omega)$ 的模等于 $1/\sqrt{2}$, 即可得到截止频率:

$$H(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

即

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (14.51)$$

截止频率也可以称为滚降频率(rolloff frequency)。

低通滤波器是只允许从直流到截止频率 ω_c 的频率信号通过的滤波器。

提示: 截止频率是传递函数 H 的模降至最大值的 70.71% 时所对应的频率, 也可以认为是电路消耗的功率为其最大值的一半时所对应的频率。

当 RL 电路的输出取自电阻器两端的电压时, 也可以构成低通滤波器。当然, 低通滤波器还存在其他多种电路形式。

14.7.2 高通滤波器

当 RC 电路的输出取自电阻器两端的电压时, 就构成了高通滤波器, 如图 14-33 所示。其传递函数为:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} \\ H(\omega) &= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \quad (14.52)$$

可见, $H(0)=0$, $H(\infty)=1$ 。图 14-34 所示为 $|H(\omega)|$ 的频率特性曲线, 其转折频率或截止频率为:

表 14-5 各类滤波器特性的总结

滤波器类型	$H(0)$	$H(\infty)$	$H(\omega)$ 或 $H(\omega_0)$
低通	1	0	$1/\sqrt{2}$
高通	0	1	$1/\sqrt{2}$
带通	0	0	1
带阻	1	1	0

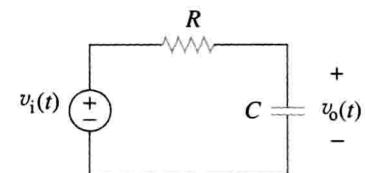


图 14-31 低通滤波器

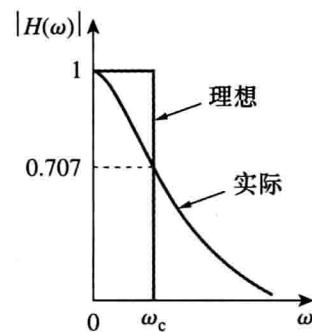


图 14-32 低通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

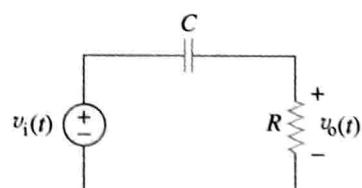


图 14-33 高通滤波器

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (14.53)$$

高通滤波器是允许高于其截止频率 ω_c 的频率信号通过的滤波器。

当 RL 电路的输出取自电感器两端时, 也可以构成一个高通滤波器。

14.7.3 带通滤波器

如果以 RLC 串联谐振电路中电阻器两端的电压作为输出, 就构成一个带通滤波器, 如图 14-35 所示, 其传递函数为:

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (14.54)$$

可见, $H(0)=0$, $H(\infty)=0$ 。图 14-36 所示为 $|H(\omega)|$ 的幅频特性曲线。带通滤波器使得以 ω_0 为中心的一个频带 ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) 内的信号通过, 其中心频率由下式确定:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.55)$$

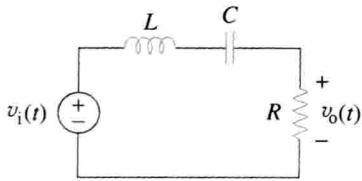


图 14-35 带通滤波器

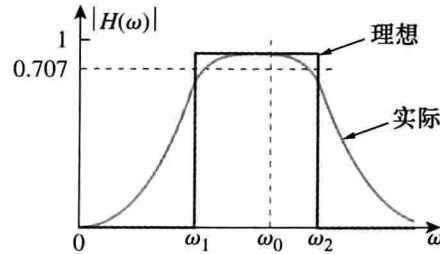


图 14-36 带通滤波器的理想频率响应与实际频率响应

带通滤波器是允许频带 ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) 内所有频率通过的滤波器。

由于图 14-35 所示的带通滤波是一个串联谐振电路, 所以该滤波器的半功率频率、带宽及品质因数均可由 14.5 节的公式确定。带通滤波器也可以由图 14-31 所示的低通滤波器 ($\omega_2 = \omega_c$) 与图 14-33 所示的高通滤波器 ($\omega_1 = \omega_c$) 级联构成。然而, 其结果并不仅仅是将低通滤波器的输出叠加到高通滤波器的输入, 因为其中一个电路是另一个电路的负载, 所以改变了所期望的传递函数。

14.7.4 带阻滤波器

阻止两个指定频率 (ω_1 和 ω_2) 之间的频带信号通过的滤波器称为带阻滤波器 (bandstop/bandreject filter) 或陷波滤波器 (notch filter)。当 RLC 串联谐振电路的输出取自 LC 串联组合两端时, 即构成带阻滤波器, 如图 14-37 所示, 其传递函数为:

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j(\omega L - 1/\omega C)}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad (14.56)$$

可见, $H(0)=1$, $H(\infty)=1$ 。图 14-38 所示为 $|H(\omega)|$ 的幅频特性曲线, 其中心频率为:

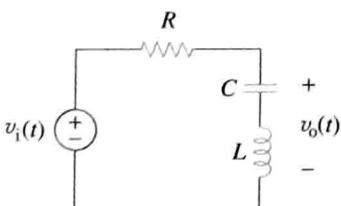


图 14-37 带阻滤波器

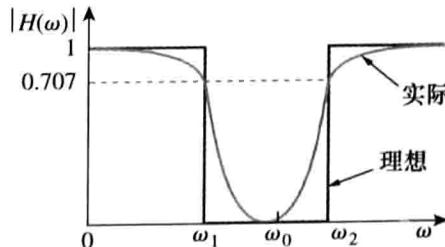


图 14-38 带阻滤波器的理想频率响应与实际频率响应

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.57)$$

同理，带阻滤波器的半功率频率、带宽及品质因数仍然可以利用 14.5 节中的谐振电路公式来计算，这里的 ω_0 称为抑制频率(frequency of rejection)。而相应的带宽($B = \omega_2 - \omega_1$)称为抑制带宽(bandwidth of rejection)。

带阻滤波器是抑制或消除在频带 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 内所有频率信号的滤波器。

注意，具有相同 R 、 L 、 C 值的带通滤波器的传递函数与带阻滤波器的传递函数相加得到的结果在任何频率下都为 1。这一结论一般而言是不成立的，但对于本节讨论的电路是成立的，这是因为这两个电路中一个电路的特性恰好与另一个电路的特性相反。

本节的最后总结几点注意事项：

1. 由式(14.50)、式(14.52)、式(14.54)以及式(14.56)可知，无源滤波器的最大增益为 1，要想得到大于 1 的增益，应该采用下一节介绍的有源滤波器。

2. 还可以采用其他方法得到本节介绍的各种类型的滤波器。

3. 本节讨论的滤波器都比较简单，其他许多滤波器还具有锐度更高的选择特性和复杂的频率响应。

例 14-10 确定图 14-39 所示滤波器的类型，并计算其转折(截止)频率。假设电路中 $R = 2\text{k}\Omega$ ， $L = 2\text{H}$ ， $C = 2\mu\text{F}$ 。

解：电路的传递函数为：

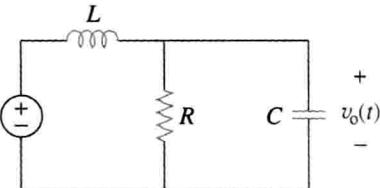


图 14-39 例 14-10 图

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R \parallel 1/sC}{sL + R \parallel 1/sC}, \quad s = j\omega \quad (14.10.1)$$

其中：

$$R \parallel \frac{1}{sC} = \frac{R/sC}{R + 1/sC} = \frac{R}{1 + sRC}$$

将其代入式(14.10.1)，可得：

$$H(s) = \frac{R/(1 + sRC)}{sL + R/(1 + sRC)} = \frac{R}{s^2RLC + sL + R}, \quad s = j\omega$$

即

$$H(\omega) = \frac{R}{-\omega^2RLC + j\omega L + R} \quad (14.10.2)$$

由于 $H(0)=1$ ， $H(\infty)=0$ ，所以由表 14-5 可知图 14-39 所示电路是一个二阶低通滤波器。 H 的模为：

$$H = \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2RLC)^2 + \omega^2L^2}} \quad (14.10.3)$$

其转折频率就是 H 下降至其 $1/\sqrt{2}$ 时的半功率频率。由于 $H(\omega)$ 的直流值为 1，所以在转折频率处，式(14.10.3)两边取平方可以得到：

$$H^2 = \frac{1}{2} = \frac{R^2}{(R - \omega_c^2RLC)^2 + \omega_c^2L^2}$$

即

$$2 = (1 - \omega_c^2LC)^2 + \left(\frac{\omega_c L}{R}\right)^2$$

将 R 、 L 、 C 的值代入后得到：

$$2 = (1 - \omega_c^2 4 \times 10^{-6})^2 + (\omega_c 10^{-3})^2$$

假设 ω_c 的单位为 krad/s ，则有：

$$2 = (1 - 4\omega_c^2)^2 + \omega_c^2, \quad 16\omega_c^4 - 7\omega_c^2 - 1 = 0$$

求解关于 ω_c^2 的二次方程，得到 $\omega_c^2 = 0.5509$ 和 -0.1134 ，由于 ω_c 为实数，所以：

$$\omega_c = 0.742 \text{ krad/s} = 742 \text{ rad/s}$$

练习 14-10 对于图 14-40 所示电路，求传递函数

$V_o(\omega)/V_i(\omega)$ ，并判断该电路的滤波器类型，同时确定其转折频率。假设 $R_1 = 100 \text{ k}\Omega = R_2$, $L = 2 \text{ mH}$ 。

答案： $\frac{R_2}{R_1+R_2} \left(\frac{j\omega}{j\omega+\omega_c} \right)$, 高通滤波器,

$$\omega_c = \frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)L} = 25 \text{ (krad/s)}$$

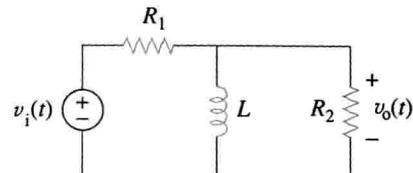


图 14-40 练习 14-10 图

例 14-11 如果图 14-37 所示的带阻滤波器阻止 200Hz 的正弦信号而允许其他频率通过，计算其 L 与 C 值。假设 $R = 150\Omega$ ，带宽为 100Hz。

解：利用 14.5 节串联谐振电路的公式，可以得到：

$$B = 2\pi \times 100 = 200\pi \text{ (rad/s)}$$

根据：

$$B = \frac{R}{L} \Rightarrow L = \frac{R}{B} = \frac{150}{200\pi} = 0.2387 \text{ (H)}$$

抑制 200Hz 的正弦信号表明 $f_0 = 200 \text{ Hz}$ ，于是图 14-38 中的 ω_0 为：

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 200 = 400\pi \text{ (Hz)}$$

由于 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ，所以：

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(400\pi)^2 \times 0.2387} = 2.653 \text{ (\mu F)}$$

练习 14-11 设计一个如图 14-35 所示形式的带通滤波器，其低截止频率为 20.1kHz，高截止频率为 20.3kHz。假设 $R = 20 \text{ k}\Omega$ ，计算 L 、 C 与 Q 。

答案： 15.915H, 3.9pF, 101

14.8 有源滤波器

前一节介绍的无源滤波器存在三个主要的限制。首先，不能产生大于 1 的增益，无源元件不能增加网络中的能量；其次，可能会用到体积笨重、价格昂贵的电感元件；最后，在低于音频范围($300 \text{ Hz} < f < 3000 \text{ Hz}$)工作时，滤波器性能很差。然而，无源滤波器在高频时是非常有用的。

有源滤波器由电阻器、电容器以及运算放大器组成，与无源 RLC 滤波器相比，有源滤波器的优势在于：第一，由于有源滤波器不需要电感器，因而器件体积较小、价格不是很贵，这使得滤波器的集成电路实现成为可能；第二，有源滤波器除了提供与 RLC 滤波器相同的频率响应外，还可以提供放大器增益；第三，有源滤波器可以与缓冲放大器(电压跟随器)结合使用，从而实现滤波器各级与电源和负载阻抗效应的隔离。利用这种隔离特性，就可以独立设计各级滤波器，之后再将其级联起来实现所要求的传递函数(传递函数级联时，根据对数关系伯德图可以直接相加)。然而，有源滤波器的可靠性和稳定性差，大多数有源滤波器的实际工作频率限制在 100kHz 以下，即多数有源滤波器在 100kHz 以下可以正常工作。

通常可以按照滤波器的阶数(极点数)或者特定的设计类型对滤波器进行分类。

14.8.1 一阶低通滤波器

一阶滤波器的一种形式如图 14-41 所示，其中器件 Z_i 和 Z_f 的不同选择决定了滤波器

是低通的还是高通的，但其中一个元件必须是电抗元件。

图 14-42 所示为一个典型的有源低通滤波器，该滤波器的传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad (14.58)$$

其中， $Z_i = R_i$ ，并且：

$$Z_f = R_f \parallel \frac{1}{j\omega C_f} = \frac{R_f/j\omega C_f}{R_f + 1/j\omega C_f} = \frac{R_f}{1 + j\omega C_f R_f} \quad (14.59)$$

因此：

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + j\omega C_f R_f} \quad (14.60)$$

由此可见，式(14.60)与式(14.50)基本相同，只是相差一个低频($\omega \rightarrow 0$)增益，即 $-R_f/R_i$ 的直流增益。此外，其转折频率为：

$$\omega_c = \frac{1}{R_f C_f} \quad (14.61)$$

由此可见， ω_c 不依赖于 R_i 。这意味着可以将几个不同的输入 R_i 相加起来，但各输入的转折频率保持不变。

14.8.2 一阶高通滤波器

图 14-43 所示为一个典型的高通滤波器，其传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad (14.62)$$

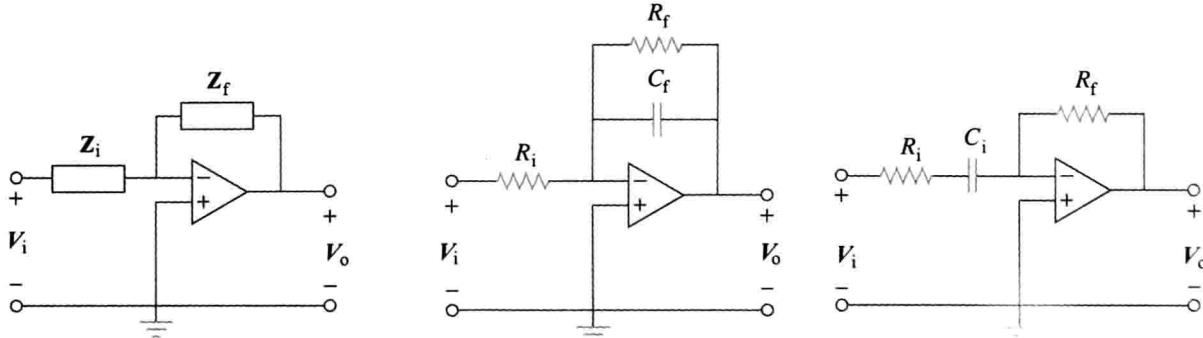


图 14-41 通用的一阶有源滤波器 图 14-42 有源一阶低通滤波器 图 14-43 有源一阶高通滤波器

其中 $Z_i = R_i + 1/j\omega C_i$ ， $Z_f = R_f$ ，因此：

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i + 1/j\omega C_i} = -\frac{j\omega C_i R_f}{1 + j\omega C_i R_i} \quad (14.63)$$

上式与(14.52)类似，只是在频率很高($\omega \rightarrow \infty$)时，其增益趋于 $-R_f/R_i$ ，转折频率为：

$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i} \quad (14.64)$$

14.8.3 带通滤波器

将图 14-42 所示低通滤波器与图 14-43 所示高通滤波器组合起来，就可以构成一个在所需频带内增益为 K 的带通滤波器。将单位增益的低通滤波器、单位增益的高通滤波器与增益为 $-R_f/R_i$ 的反相放大器级联即可构成一个带通滤波器，其框图如图 14-44a 所示，其频率响应如图 14-44b 所示。带通滤波器的实际电路结构如图 14-45 所示。

提示：这种构成带通滤波器的方法未必是最好的方法，但可能是最容易理解的。

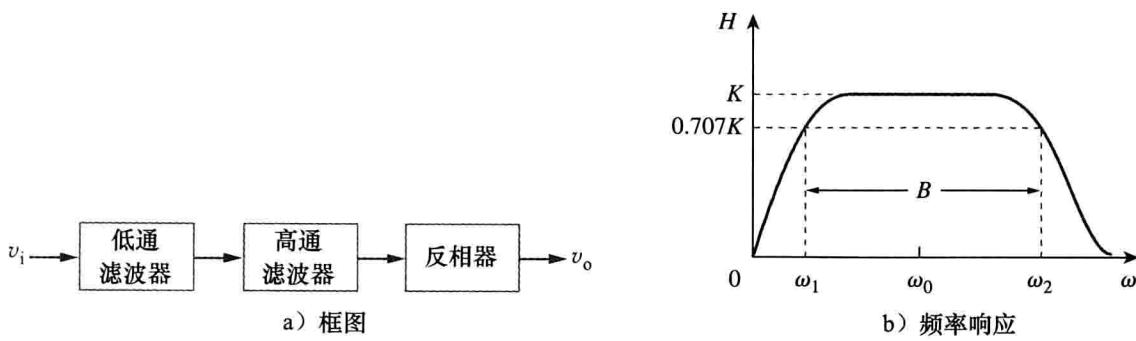


图 14-44 有源带通滤波器

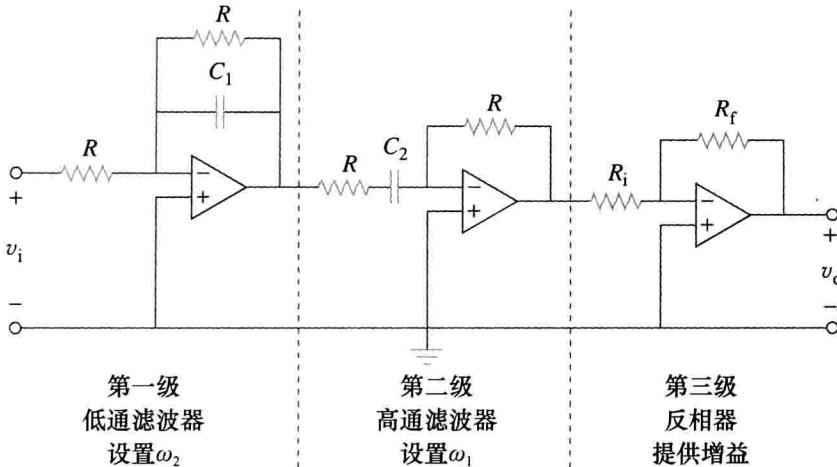


图 14-45 有源带通滤波器

带通滤波器的分析相当简单，其传递函数为式(14.60)、式(14.63)与反相器增益三者的乘积，即：

$$\begin{aligned} H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} &= \left(-\frac{1}{1+j\omega C_1 R}\right) \left(-\frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R}\right) \left(-\frac{R_f}{R_i}\right) \\ &= -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1+j\omega C_1 R} \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega C_2 R} \end{aligned} \quad (14.65)$$

低通部分设定了带通滤波器的上转折频率：

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \quad (14.66)$$

而高通部分设定了带通滤波器的下转折频率：

$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \quad (14.67)$$

由 ω_1 与 ω_2 的值即可确定带通滤波器的中心频率、带宽及品质因数：

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (14.68)$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (14.69)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} \quad (14.70)$$

为了确定带通滤波器的通带增益 K ，将式(14.65)的传递函数化为(14.15)所示的标准形式：

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega/\omega_1}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)} = -\frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)} \quad (14.71)$$

在中心频率 $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ 处，传递函数的模为：

$$|H(\omega_0)| = \left| \frac{R_f}{R_i} \frac{j\omega_0\omega_2}{(\omega_1 + j\omega_0)(\omega_2 + j\omega_0)} \right| = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.72)$$

于是，其带通增益为：

$$K = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.73)$$

14.8.4 带阻(陷波)滤波器

低通滤波器与高通滤波器的并联组合再加上一个求和放大器就可以构成带阻滤波器，其框图如图 14-46a 所示。带阻滤波器的下截止频率由低通滤波器设定，而上截止频率 ω_2 由高通滤波器设定。 ω_1 与 ω_2 之间的频带宽度为带阻滤波器的带宽，如图 14-46b 所示，带阻滤波器允许低于 ω_1 和高于 ω_2 的频带通过。图 14-46a 所示框图的实际电路结构如图 14-47 所示，带阻滤波器的传递函数为：

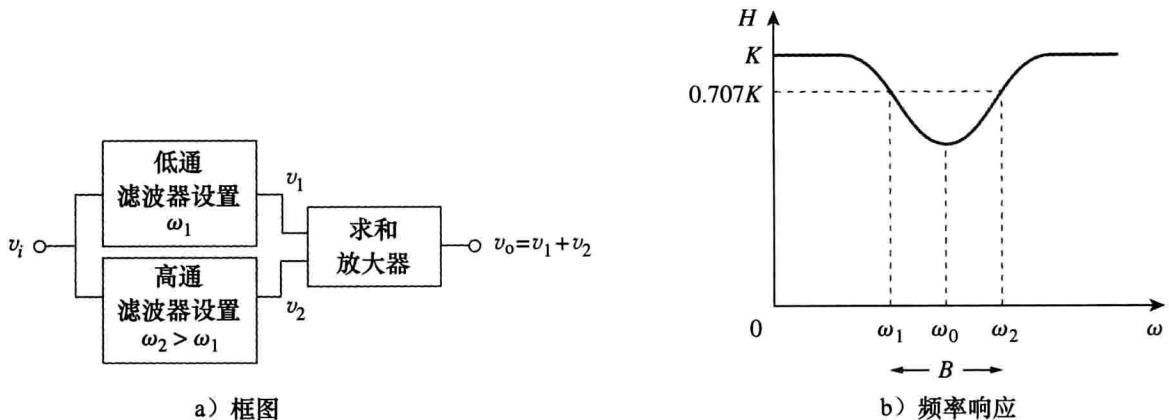


图 14-46 有源带阻滤波器

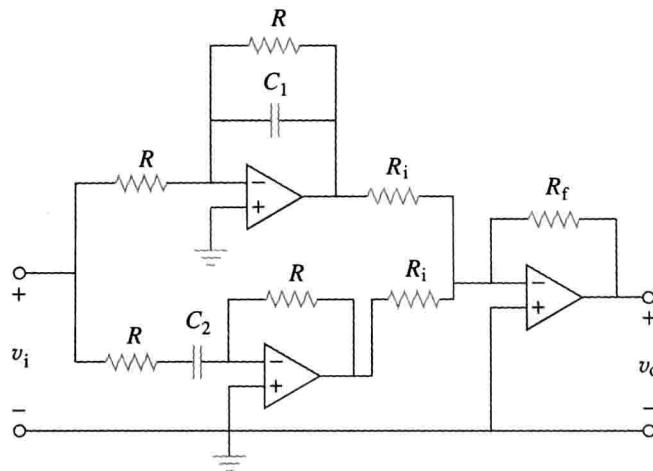


图 14-47 有源带阻滤波器

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i} \left(-\frac{1}{1 + j\omega C_1 R} - \frac{j\omega C_2 R}{1 + j\omega C_2 R} \right) \quad (14.74)$$

计算截止频率 ω_1 和 ω_2 、中心频率、带宽及品质因数的公式与式(14.66)~式(14.70)相同。

为了确定带阻滤波器的带通增益 K ，可以用上、下截止频率表示式(14.74)，得到：

$$H(\omega) = \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{1}{1 + j\omega/\omega_2} + \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1} \right) = \frac{R_f}{R_i} \frac{(1 + j2\omega/\omega_1 + (j\omega)^2/\omega_1\omega_1)}{(1 + j\omega/\omega_2)(1 + j\omega/\omega_1)} \quad (14.75)$$

将上式与式(14.15)所示的传递函数标准形式相比较可知，在两通带($\omega \rightarrow 0$ 与 $\omega \rightarrow \infty$)内，其增益为：

$$K = \frac{R_f}{R_i} \quad (14.76)$$

也可以通过中心频率处传递函数的模确定其通带增益，即：

$$H(\omega_0) = \left| \frac{R_f}{R_i} \frac{(1 + j2\omega_0/\omega_1 + (j\omega_0)^2/\omega_1^2)}{(1 + j\omega_0/\omega_2)(1 + j\omega_0/\omega_1)} \right| = \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} \quad (14.77)$$

同样，本节介绍的滤波器仅是一些典型的结构，还有许多更为复杂的其他类型的有源滤波器。

例 14-12 设计一个直流增益为 4、转折频率为 500Hz 的低通有源滤波器。

解：由式(14.61)可得：

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \times 500 = \frac{1}{R_f C_f} \quad (14.12.1)$$

其直流增益为：

$$H(0) = -\frac{R_f}{R_i} = -4 \quad (14.12.2)$$

现在得到包含的三个未知数的两个方程，如果选定 $C_f = 0.2\mu F$ ，则有：

$$R_f = \frac{1}{2\pi \times 500 \times 0.2 \times 10^{-6}} = 1.59(k\Omega)$$

和

$$R_i = \frac{R_f}{4} = 397.5(\Omega)$$

取 $R_f = 1.6k\Omega$, $R_i = 400\Omega$, 所设计的低通有源滤波器如图 14-42 所示。 ◀

练习 14-12 设计一个高频增益为 5、转折频率为 2kHz 的高通滤波器，设计时采用 0.1μF 的电容器。
答案： $R_f = 4k\Omega$, $R_i = 800\Omega$

例 14-13 设计一个图 14-45 所示的带通滤波器，允许 250~3000Hz 范围内的频率通过，增益 $K=10$ ，假设电阻 $R=20k\Omega$ 。

解：1. 明确问题。本例所要解决的问题已阐述清楚，设计中所采用的电路也已明确规定。

2. 列出已知条件。本题要求使用图 14-45 所示的运算放大器电路设计一个带通滤波器，已经给定电阻 R 的值($20k\Omega$)，另外，可以通过的信号频率范围为 250Hz~3kHz。

3. 确定备选方案。采用 14.8.3 节推导的公式求解本例，之后利用所得到的传递函数验证答案的正确性。

4. 尝试求解。因为 $\omega_1 = 1/RC_2$ ，所以：

$$C_2 = \frac{1}{R\omega_1} = \frac{1}{2\pi f_1 R} = \frac{1}{2\pi \times 250 \times 20 \times 10^3} = 31.83(nF)$$

同理，由于 $\omega_2 = 1/RC_1$ ，则：

$$C_1 = \frac{1}{R\omega_2} = \frac{1}{2\pi f_2 R} = \frac{1}{2\pi \times 3000 \times 20 \times 10^3} = 2.65(nF)$$

由式(14.73)可得：

$$\frac{R_f}{R_i} = K \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2} = K \frac{f_1 + f_2}{f_2} = \frac{10 \times 3250}{3000} = 10.83$$

如果选择 $R_i = 10k\Omega$ ，则有 $R_f = 10.83$, $R_i \approx 108.3k\Omega$ 。

5. 评价结果。第一个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_i - 0}{20k\Omega} + \frac{V_1 - 0}{20k\Omega} + \frac{s2.65 \times 10^{-9}(V_1 - 0)}{1} = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{V_i}{1 + 5.3 \times 10^{-5}s}$$

第二个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_1 - 0}{20\text{k}\Omega + \frac{1}{s31.83\text{nF}}} + \frac{V_2 - 0}{20\text{k}\Omega} = 0 \rightarrow$$

$$V_2 = -\frac{6.366 \times 10^{-4} s V_1}{1 + 6.366 \times 10^{-4} s} = \frac{6.366 \times 10^{-4} s V_i}{(1 + 6.366 \times 10^{-4} s)(1 + 5.3 \times 10^{-5} s)}$$

第三个运算放大器的输出为：

$$\frac{V_2 - 0}{10\text{k}\Omega} + \frac{V_o - 0}{108.3\text{k}\Omega} = 0 \rightarrow V_o = 10.83 V_2 \rightarrow j2\pi \times 25^\circ$$

$$V_o = -\frac{6.894 \times 10^{-3} s V_i}{(1 + 6.366 \times 10^{-4} s)(1 + 5.3 \times 10^{-5} s)}$$

令 $s=j2\pi \times 25^\circ$ 并求出 V_o/V_1 的模：

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-j10.829}{(1+j1) \times 1}$$

$|V_o/V_i| = 0.7071 \times 10.829$, 即低转折频率点。

令 $s=j2\pi \times 3000=j18.849\text{k}\Omega$, 则有：

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-j129.94}{(1+j12)(1+j1)} = \frac{129.94 / -90^\circ}{(12.042 / 85.24^\circ)(1.4142 / 45^\circ)} = 0.7071 \times 10.791 / -18.61^\circ$$

显然, 这是上截止频率, 答案得到验证。

6. 是否满意? 本题所设计的电路令人满意, 可以将其作为本题的答案。 ◀

练习 14-13 设计一个图 14-47 所示的陷波器, 其 $\omega_0=20\text{krad/s}$, $K=5$, $Q=10$, 假设 $R=R_i=10\text{k}\Omega$. 答案: $C_1=4.762\text{nF}$, $C_2=5.263\text{nF}$, $R_f=50\text{k}\Omega$

14.9 比例转换

在设计、分析滤波器与谐振电路的过程中, 或是在一般的电路分析过程中, 先采用 1Ω 、 1H 或 1F 的元件值, 之后再将这些值按比例转换为实际值, 这种方法通常会简化电路的分析与设计。本书大量的例题与习题中未采用元件的实际值, 就是利用了这一思想的优点。利用方便的元件值进行分析设计可以使读者更容易掌握电路分析方法, 由于可以通过比例转换得到实际值, 所以能够简化电路的计算。

电路的比例转换包括两个方面: 一是幅度或阻抗的比例转换; 二是频率的比例转换。二者在频率响应的比例转换以及将电路元件变换为实际值时是非常有用的, 虽然模的比例运算保持电路的频率响应不变, 但频率的比例转换却将频率响应沿频谱上、下移动。

14.9.1 幅值的比例转换

幅值的比例转换是指将电路网络中的所有阻抗都增大某个因子, 而不改变其频率响应的过程。

电路中的元件 R 、 L 、 C 的阻抗分别为:

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (14.78)$$

在进行幅值的比例转换时, 各电路元件的阻抗都乘以因子 K_m , 同时保持其频率不变。于是, 得到新的阻抗为:

$$Z'_R = K_m Z_R = K_m R, \quad Z'_L = K_m Z_L = j\omega K_m L, \quad Z'_C = K_m Z_C = \frac{1}{j\omega C / K_m} \quad (14.79)$$

比较式(14.79)与式(14.78)可知, 元件值的变化如下: $R \rightarrow K_m R$, $L \rightarrow K_m L$, $C \rightarrow C / K_m$, 因此, 在进行幅值的比例转换时, 各个元件的新值与频率分别为:

$R' = K_m R, \quad L' = K_m L, \quad C' = \frac{C}{K_m}, \quad \omega' = \omega$

(14.80)

其中，带“'”的变量为新值，而不带“'”的变量为原来的值。对于RLC串联或并联电路而言，比例转换前后的关系为：

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{K_m LC / K_m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (14.81)$$

说明比例转换前后的谐振频率是不变的。同样，品质因数与带宽也不会受到比例转换的影响。而且，幅值的比例转换也不会影响式(14.2a)与式(14.2b)所示的无量纲传递函数的形式。

14.9.2 频率的比例转换

频率比例转换是指将网络的频率响应沿频率轴上、下移动并保持阻抗不变的过程。

将频率乘以因子 K_f ，并保持阻抗不变就可以实现频率的比例转换。

提示：频率比例转换等效于对频率响应曲线中的频率轴进行重新标定，在将谐振频率、转折频率、带宽等平移至其实际值时，就必须用到频率转换。同时，还可以利用频率比例转换使电容值与电感值变换到方便处理的范围内。

由式(14.78)可见， L 与 C 的阻抗是与频率有关的，如果对式(14.78)中的 $Z_L(\omega)$ 与 $Z_C(\omega)$ 应用频率比例转换，由于电感器与电容器的阻抗在转换前后保持不变，于是得到：

$$Z_L = j(\omega K_f)L' = j\omega L \Rightarrow L' = \frac{L}{K_f} \quad (14.82a)$$

$$Z_C = \frac{1}{j(\omega K_f)C'} = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow C' = \frac{C}{K_f} \quad (14.82b)$$

由此可见，元件值的变化如下： $L \rightarrow L/K_f$ ， $C \rightarrow C/K_f$ 。由于 R 的阻抗是与频率无关的，所以 R 的值不受任何影响。因此，在进行频率比例转换时，电路元件的新值与频率为：

$$R' = R, \quad L' = \frac{L}{K_f}, \quad C' = \frac{C}{K_f}, \quad \omega' = K_f \omega \quad (14.83)$$

对于RLC串联或并联电路，其谐振频率为：

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{(L/K_f)(C/K_f)}} = \frac{K_f}{\sqrt{LC}} = K_f \omega_0 \quad (14.84)$$

其带宽为：

$$B' = K_f B \quad (14.85)$$

但是其品质因数仍保持不变($Q' = Q$)。

14.9.3 幅值与频率的比例转换

如果对电路同时进行幅值的比例转换与频率的比例转换，则有：

$$R' = K_m R, \quad L' = \frac{K_m}{K_f} L, \quad C' = \frac{1}{K_m K_f} C, \quad \omega' = K_f \omega \quad (14.86)$$

以上公式是比式(14.80)与式(14.83)更为一般的公式。在不进行幅值的比例转换的情况下，则令式(14.86)中的 $K_m = 1$ ，在不进行频率比例转换的情况下，则令式(14.86)中的 $K_f = 1$ 。

例 14-14 某四阶巴特沃思(Butterworth)低通滤波器如图 14-48a 所示。该滤波器的截止频率设计为 $\omega_c = 1\text{ rad/s}$ 。试利用 $10\text{k}\Omega$ 电阻器将该电路的截止频率变换为 50kHz 。

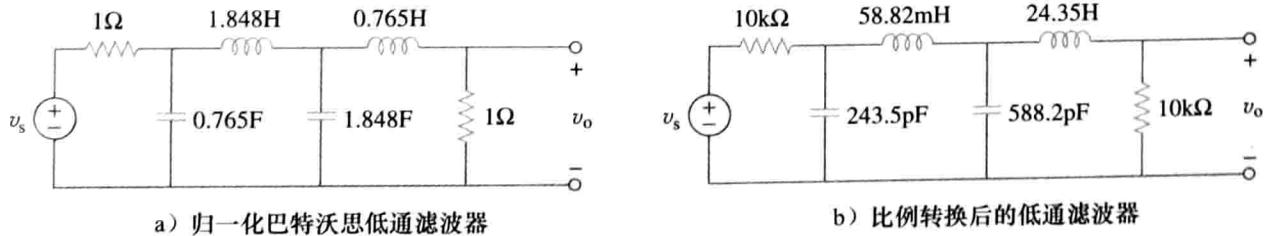


图 14-48 例 14-14 图

解：要将截止频率从 $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ 平移至 $\omega'_c = 2\pi \times 50 (\text{krad/s})$ ，则频率比例因子为：

$$K_f = \frac{\omega'_c}{\omega_c} = \frac{100\pi \times 10^3}{1} = \pi \times 10^5$$

并且，如果用 $10\text{k}\Omega$ 电阻取代各 1Ω 电阻，则模值比例因子为：

$$K_m = \frac{R'}{R} = \frac{10 \times 10^3}{1} = 10^4$$

利用式(14.86)，可以得到：

$$L'_1 = \frac{K_m}{K_f} L_1 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5} \times 1.848 = 58.82(\text{mH})$$

$$L'_2 = \frac{K_m}{K_f} L_2 = \frac{10^4}{\pi \times 10^5} \times 0.765 = 24.35(\text{mH})$$

$$C'_1 = \frac{C_1}{K_m K_f} = \frac{0.765}{\pi \times 10^9} = 243.5(\text{pF})$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{K_m K_f} = \frac{1.848}{\pi \times 10^9} = 588.2(\text{pF})$$

比例转换后的电路如图 14-84b 所示，该电路采用实际的元件值，并且其传递函数与图 14-48b 所示的原型一样，只是频率出现了平移。

练习 14-14 某三阶巴特沃思滤波器的归一化频率

为 $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ ，如图 14-49 所示。试利用 15nF 电容通过比例转换确定截止频率为 10kHz 时的电路参数。

答案： $R'_1 = R'_2 = 1.061\text{k}\Omega$, $C'_1 = C'_2 = 15\text{nF}$, $L' = 33.77\text{mH}$

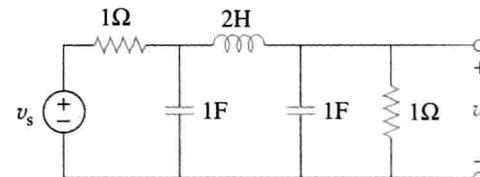


图 14-49 练习 14-14 图

14.10 基于 PSpice 的频率响应计算

对于现代电路工程师而言，PSpice 软件是计算电路频率响应的有力工具。利用 PSpice 中的 AC Sweep 功能确定电路的频率响应，要求在 AC Sweep 对话框中设定 Total Pts、Start Freq、End Freq 的值，并指定扫描类型，Total Pts 为频率扫描中的点数，Start Freq 与 End Freq 分别为起始频率与终止频率，单位为 Hz。为了确定 Start Freq 与 End Freq 两个频率值，必须通过绘制粗略的频率响应曲线，得出所需的频段范围。对于复杂电路而言，上述估计可能无法实现，只能采用试探性的方法来确定。

扫描类型包括三种：

Linear(线性)：在 Start Freq 与 End Freq 之间的频率范围内，Total Pts(响应)等间隔线性变化。

Octave(八倍频程)：在 Start Freq 到 End Freq 之间的频率范围内，以八倍频程对频率进行对数扫描，其中每八倍频程包括 Total Pts 个点。所谓八倍频程是指因子为 2 的频率范围(例如， $2\sim4\text{Hz}$, $4\sim8\text{Hz}$, $8\sim16\text{Hz}$)。

Decade(十倍频程)：在 Start Freq 到 End Freq 之间的频率范围内，从十倍频程对频率进行对数扫描，其中每十倍频程包括 Total Pts 个点。所谓十倍频程指因子为 10 的频率范围(例如， $2\sim20\text{Hz}$, $20\sim200\text{Hz}$, $200\sim2000\text{Hz}$)。

对于窄频率范围的显示，最好采用线性扫描，因为线性扫描显示窄频率范围较好。反之，对于宽频率范围的显示，最好采用对数扫描(八倍频程或十倍频程)。如果对宽频率范围采用线性扫描，则会出现几乎所有数据都集中在高频端或低频端，而在另一端没有足够数据的情况。

设定上述参数后，PSpice 对所有独立源的频率从 Start Freq 到 End Freq 进行扫描，

从而实现对电路的正弦稳态分析，得到频率响应。

利用 PSpice 的 A/D 程序会给出图形输出，输出数据的类型可以在 Trace Command Box 窗口中对 V 或 I 增加如下后缀来确定：

M 正弦信号的幅度

P 正弦信号的相位

dB 正弦信号幅度的单位为分贝，即 $20\log_{10}$ (幅度)。

例 14-15 确定图 14-50 所示电路的频率响应。

解：令输入电压 v_s 是幅度为 1V，相位为 0° 的正弦信号。图 14-51 为该电路的 PSpice 原理图，图中电容器逆时针方向旋转 270° ，确保引脚 1(正极)位于上方，电压探测器设在电容器两端输出电压上。要对 $1\text{Hz} < f < 1000\text{Hz}$ 之间 50 个点进行线性扫描，需选择 Analysis/Setup/AC Sweep 菜单，双击 Linear，在 Total Pts 对话框中输入 50，在 Start Freq 对话框中输入 1，在 End Freq 对话框中输入 1000，保存电路文件后，运行 Analysis/Simulate 程序对电路进行仿真。如果没有错误，PSpice A/D 窗口中会显示 $V(C1: 1)$ 的波形图，与 V_o 即 $H(\omega) = V_o/V_s$ 相同，如图 14-52a 所示，此即幅频特性曲线，因为 $V(C1: 1)$ 与 $VM(C1: 1)$ 相同。要确定相频特性曲线，应在 PSpice A/D 菜单中选择 Trace/Add 程序，并在 Trace Command 对话框中输入 $VP(C1: 1)$ ，从而得到图 14-52b 所示的相频特性曲线。手工计算的传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1000}{9000 + j\omega 8}$$

即

$$H(\omega) = \frac{1}{9 + j16\pi \times 10^{-3}}$$

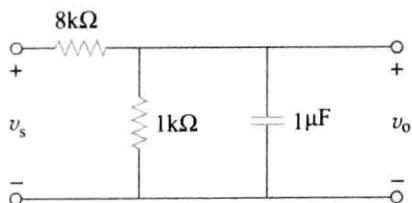


图 14-50 例 14-15 图

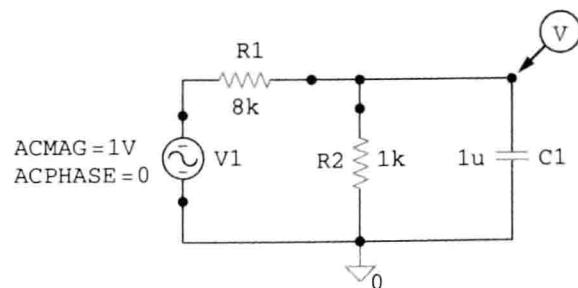


图 14-51 图 14-50 的 PSpice 原理图

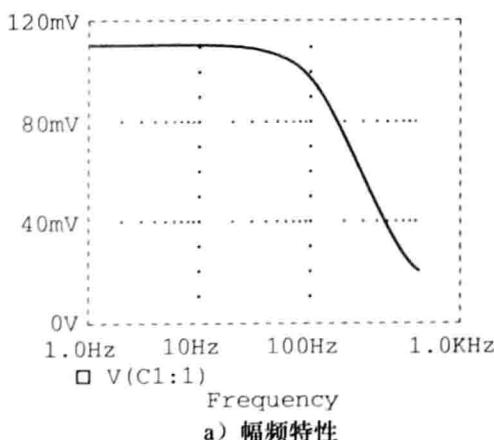
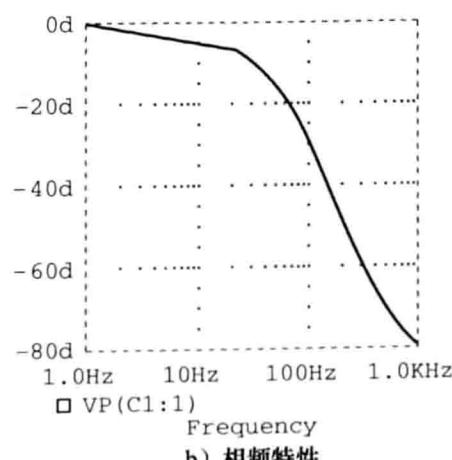


图 14-52 例 14-15 的伯德图



由此可见，该电路为低通滤波器，其特性如图 14-52 所示。注意，图 14-52 与图 14-3 类似（图 14-52 中的纵轴为对数坐标，而图 14-3 中的纵坐标为线性坐标）。

练习 14-15 利用 PSpice 确定图 14-53 所示电路的频率响应。采用线性频率扫描，在 $1\text{Hz} < f < 1000\text{Hz}$ 频率范围内包括 100 个点。

答案：参见图 14-54

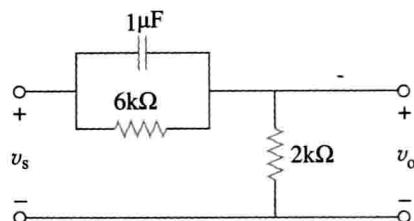
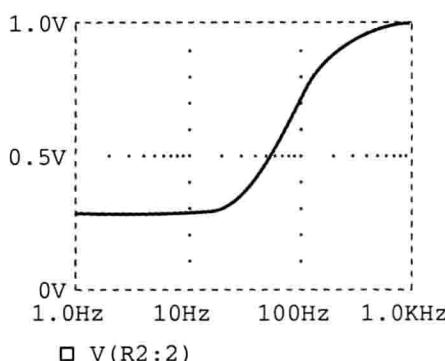
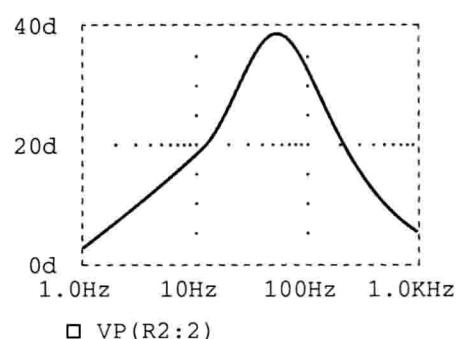


图 14-53 练习 14-15 图



a) 幅频曲线



b) 相频曲线

图 14-54 例 14-15 的伯德图

例 14-16 利用 PSpice 绘制图 14-55 所示电路中 V 的增益伯德图与相位伯德图。

解：例 14-15 中的电路为一阶电路，本例中的电路为二阶电路。因为要绘制伯德图，所以选用十倍频率扫描，且设定在 $300\text{Hz} < f < 3000\text{Hz}$ 范围内每十倍频程包括 50 个点。根据电路参数可知，该电路的谐振频率就位于频率范围内，因此选定该频率范围作为扫描区间。由电路参数可得：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5(\text{krad/s}), \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 795.8(\text{Hz})$$

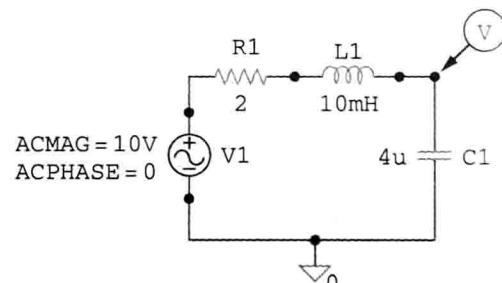
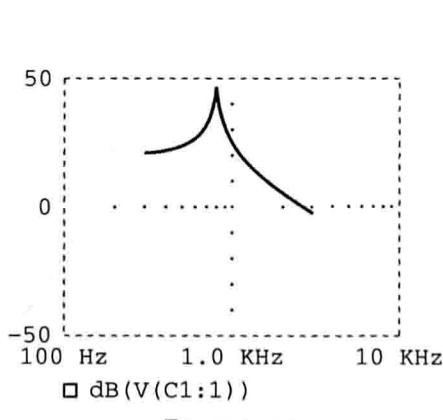
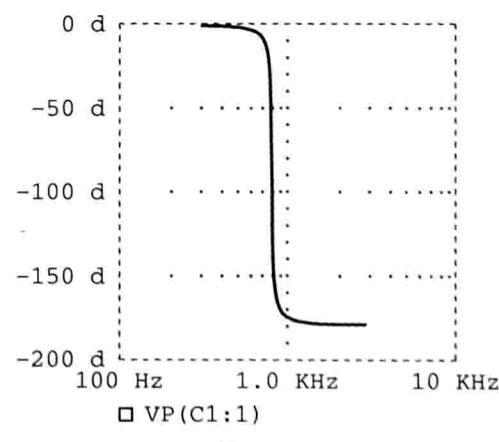


图 14-55 例 14-16 图

绘制好图 14-55 所示电路原理图后，选择 Analysis/Setup/AC Sweep 菜单，双击 Decade，在 Total Pts 对话框中输入 50，在 Start Freq 对话框中输入 300，在 End Freq 对话框中输入 3000。



a) 幅频特性



b) 相频特性

图 14-56 例 14-16 的伯德图

保存电路文件后，运行 Analysis/Simulate 程序对电路进行仿真。之后就会自动出现 PSpice A/D 窗口，如果仿真无误，则显示 $V(C1: 1)$ 的波形图。由于要绘制伯德图，所以应在 PSpice A/D 菜单中选择 Trace/Add 程序，并在 Trace Command 对话框中输入 $\text{dB}(V(C1: 1))$ ，所得到的幅频特性伯德图如图 14-56a 所示。对于相频特性曲线，在 PSpice A/D 菜单中选择 Trace/Add 程序，并在 Trace Command 对话框中输入 $\text{VP}(C1: 1)$ ，于是得到图 14-56b 所示的相频特性伯德图。以上两图均证实了谐振频率为 795.8Hz。

练习 14-16 对于图 14-57 所示网络，利用 PSpice 确定频率从 1~100kHz 的 V_o 的伯德图，在该频率范围内每十倍频程 20 个点。

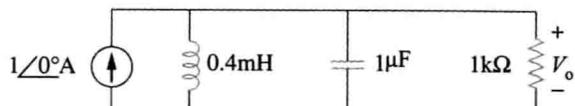
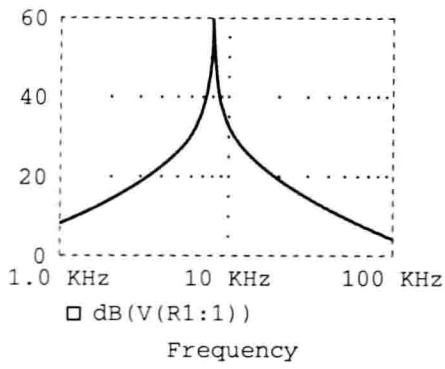
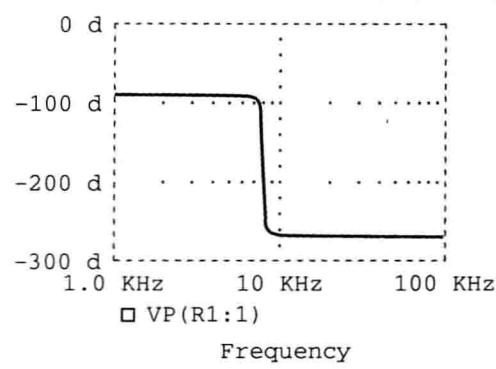


图 14-57 练习 14-16 图

答案：参见图 14-58



a) 幅频特性



b) 相频特性

图 14-58 练习 14-16 的伯德图

14.11 基于 MATLAB 的频率响应计算

MATLAB 是工程计算与仿真中应用非常广泛的一款软件，本节介绍如何利用该软件对本章及第 15 章介绍的运算进行数值仿真。利用 MATLAB 描述系统的关键是确定传递函数的分子 (num) 与分母 (den)，之后就可以利用 MATLAB 的相关命令绘制系统的伯德图(频率响应)，并确定系统对给定输入的响应。

利用 `bode` 命令可以得到给定传递函数 $H(s)$ 的伯德图(包括幅频特性与相频特性)，该命令的格式为 `bode(num, den)`，其中 num 为 $H(s)$ 的分子，den 为 $H(s)$ 的分母，仿真的频率范围与采样点数是自动选取的。例如，对于例 14-3 中的传递函数，首先应将其分子与分母写为多项式形式，得到：

$$H(s) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)} = \frac{200s}{s^2 + 12s + 20}, \quad s = j\omega$$

利用如下命令即可产生图 14-59 所示的伯德图。如果需要，可以采用 `logspace` 产生对数间隔的频率，并利用 `semilogx` 生成半对数坐标。

```
>> num = [200 0]; % specify the numerator of H(s)
>> den = [1 12 20]; % specify the denominator of H(s)
>> bode(num, den); % determine and draw Bode plots
```

系统的阶跃响应 $y(t)$ 是指当系统输入 $x(t)$ 为单位阶跃函数时的输出，如果已知系统传递函数的分子与分母，则可利用 `step` 命令绘制出系统的阶跃响应曲线，其时间范围与扫描点数也是自动选取的。例如，某二阶系统的传递函数为：

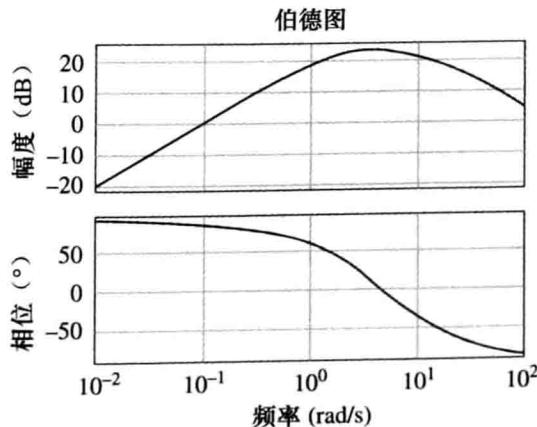


图 14-59 幅频和相频曲线

$$H(s) = \frac{12}{s^2 + 3s + 12}$$

利用如下命令即可得到图 14-60 所示的系统阶跃响应。

```
>> n = 12;
>> d = [1 3 12];
>> step(n,d);
```

求出 $y(t) = x(t) * u(t)$ 或 $Y(s) = X(s)H(s)$ 即可验证图 14-60 所示的曲线。

命令 lsim 比 step 更为通用，利用该命令可以计算系统对任意输入信号的时间响应，其格式为 $y = \text{lsim}(\text{num}, \text{den}, x, t)$ ，其中 $x(t)$ 为输入信号， t 为时间矢量， $y(t)$ 为所产生的输出。例如，假设系统的传递函数为：

$$H(s) = \frac{s+4}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}$$

为了求解系统对输入信号 $x(t) = 10e^{-t}u(t)$ 的响应 $y(t)$ ，可以采用如下 MATLAB 命令，响应 $y(t)$ 与输入 $x(t)$ 的曲线如图 14-61 所示。

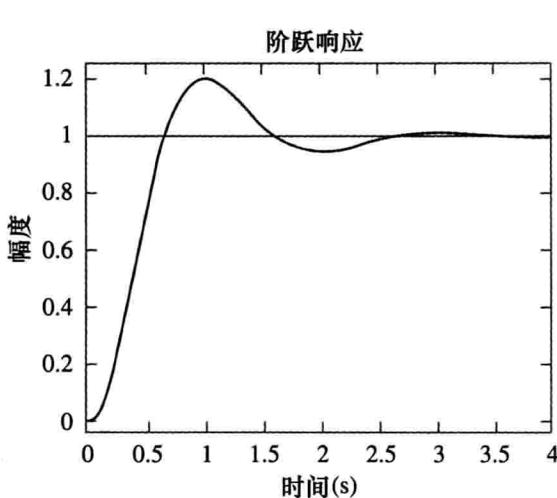


图 14-60 $H(s) = 12/(s^2 + 3s + 12)$ 的阶跃响应

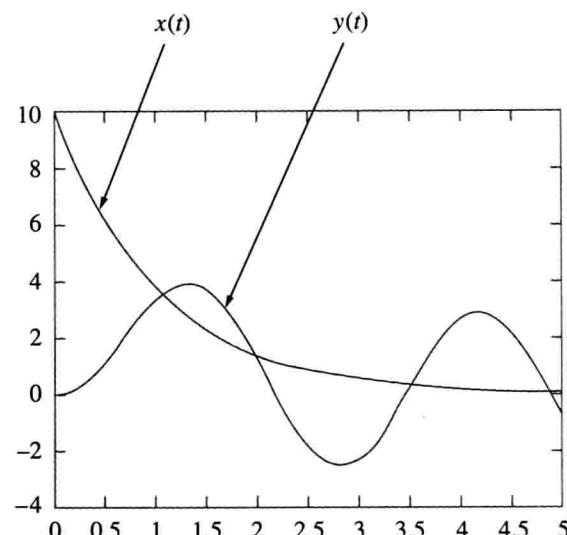


图 14-61 由 $H(s) = (s+4)/(s^3 + 2s^2 + 5s + 10)$ 描述的系统对指数输入信号的阶跃响应

```
>> t = 0:0.02:5; % time vector 0 < t < 5 with increment
0.02
>> x = 10*exp(-t);
>> num = [1 4];
>> den = [1 2 5 10];
>> y = lsim(num,den,x,t);
>> plot(t,x,t,y)
```

† 14.12 应用实例

谐振电路与滤波器的应用非常广泛，特别是在电子学、电力系统与通信系统中的应用最多。例如，截止频率为 60Hz 的陷波滤波器可以用于消除各种通信电子系统的 60Hz 电力线噪声。在通信系统中，为了从相同频率范围内的大量信号中选取所需的信号就必须对信号进行滤波（与接下来将要讨论的无线电接收机情况相同），滤波同时也使得噪声与干扰对所需信号的影响最小。本节讨论谐振电路的一种应用实例以及滤波器的两种应用实例，学习的重点应该放在如何将本章介绍的电路用于实际设备中，而不是各种设备的工作细节。

14.12.1 无线电接收机

在收音机与电视接收机中一般采用串联与并联谐振电路实现选台，并从射频载波中分离出音频信号。例如，在图 14-62 所示的调幅(AM)收音机电路框图中，入射调幅无线电

波(来自不同广播电台的成千上万个不同频率的电波)由天线接收，之后通过谐振电路(带通滤波器)选出其中一路入射无线电波，所选出的信号通常很微弱，因而需要多级放大，以便产生可听到的音频信号。因此，需要利用射频(RF)放大器对选出的广播信号进行放大，需要中频(IF)放大器对由RF信号产生的内部信号进行放大，同时需要音频放大器对进入扬声器之前的音频信号进行放大。利用不同的放大器分三级对信号进行放大要比构造一个在通带内实现相同放大功能的放大器容易得多。

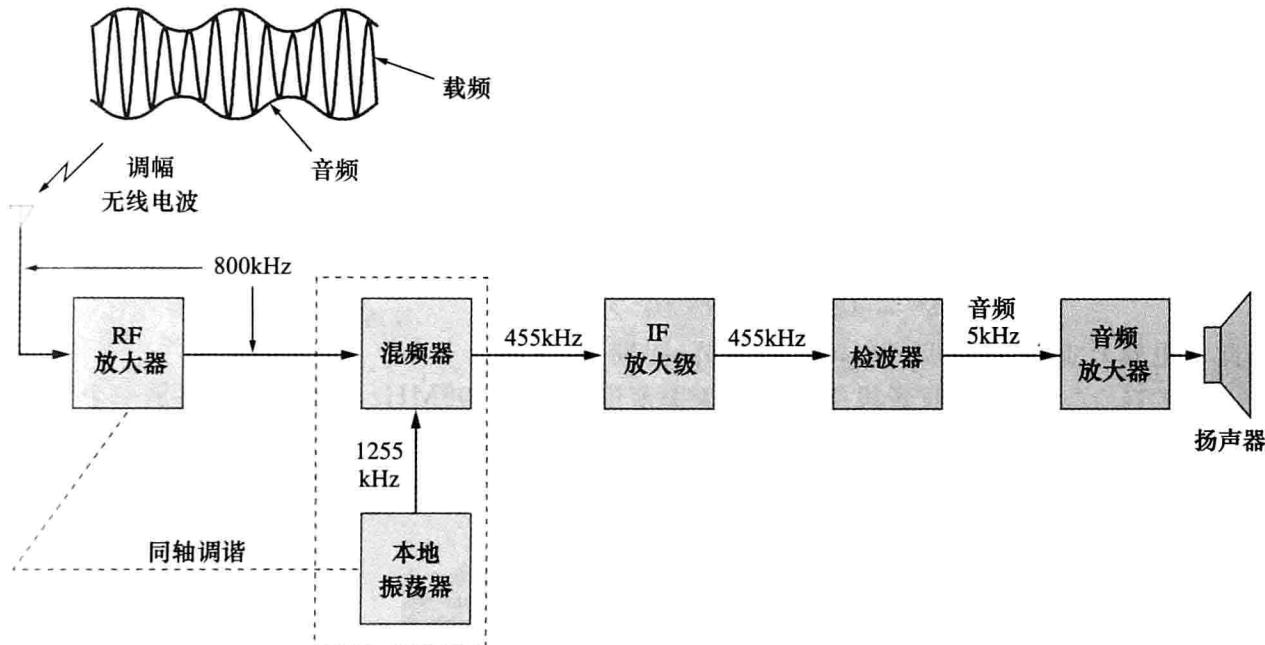


图 14-62 超外差调幅收音机的简化框图

图 14-62 所示的调幅收音机称为超外差接收机(superheterodyne receiver)，在收音机发展的早期，各级放大必须调谐至入射信号的频率。因此，各级放大器必须包括若干个调谐电路才能覆盖整个 AM 波段(540~1600kHz)。为了避免采用若干个谐振电路的问题，现代收音机均采用混频器(frequency mixer)或外差电路(heterodyne circuit)，其输出总是具有相同频率(445kHz)的中频(IF)信号，但入射信号中携带的音频频率保持不变。为了产生恒定的中频频率，两个独立的可变电容器调节装置在机械上相互耦合，这样就可以通过单个控制部件实现同轴转动调节，称为同轴调谐(ganged tuning)。RF 放大器同轴调谐的本地振荡器(local oscillator)产生的射频信号与入射波通过混频器进行混频，从而产生包含两个信号频率差与频率和的输出信号。例如，当谐振电路调谐到接收 800kHz 信号时，本地振荡器必须产生 1255kHz 的信号，于是，混频器输出端的信号频率包括两者之和($1255 + 800 = 2055\text{kHz}$)及两者之差($1255 - 800 = 455\text{kHz}$)。然而，实际中仅采用其差频(455kHz)信号，无论调谐到哪个电台，这一差频也是各级中频放大器的唯一调谐频率。在检波器中，提取出原始的音频信号(包括“智能信息”)，因此，检波器的主要功能是去除中频信号，同时保留音频信号。音频信号经放大后驱动扬声器，扬声器实际上就是一个将电信号转换为声音信号的能量转换器。

本节关心的主要问题是调幅收音机的调谐电路。调频收音机的工作原理不同于本节讨论的调幅收音机，其工作频率范围更宽，但是二者的调谐电路基本相同。

例 14-17 图 14-63 所示为调幅收音机的调谐电路，已知 $L = 1\mu\text{H}$ ，试确定使谐振频率覆盖全部 AM 频段所需的

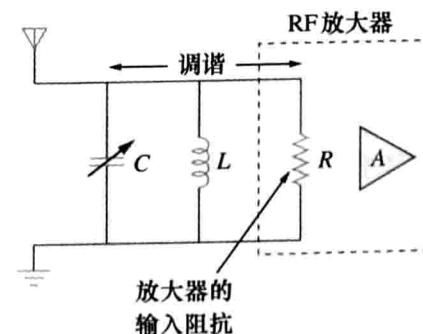


图 14-63 例 14-17 的调谐电路

电容 C 的取值范围。

解：调幅广播的频率范围为 540~1600kHz，本例需要考虑该频段的低端和高端，由于图 14-63 所示调谐电路为并联型的，所以可以利用 14.6 节的公式进行计算。由式(14.44)可知：

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

即

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$$

对于 AM 频段的高端， $f_0 = 1600\text{kHz}$ ，相应的电容值 C 为：

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 \times 1600^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 9.9(\text{nF})$$

对于 AM 频段的低端， $f_0 = 540\text{kHz}$ ，相应的电容值 C 为：

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 \times 540^2 \times 10^6 \times 10^{-6}} = 86.9(\text{nF})$$

因此，电容 C 必须为 9.9~86.9nF 的可调(同轴)电容器。

 **练习 14-17** 某调频收音机接收波的频率范围为 88~108MHz，其调谐电路是一个包括 $4\mu\text{H}$ 线圈的 RLC 并联电路，试计算覆盖整个频段所需的可变电容器的容值范围。

答案：0.543~0.818pF

14.12.2 按键式电话机

滤波器的一种典型应用是图 14-64 所示的按键式电话机，其键盘包括 12 个按钮，排列为四行三列。

这种排列方式通过分为两组的 7 种频率提供了 12 个不同的信号，这两组频率分别为：低频组 (697~941Hz) 与高频组 (1209~1477Hz)。按下某个按钮时即产生唯一对应于该按钮的一对频率的两个正弦量之和。例如，按下按钮“6”就会产生频率为 770Hz 与 1477Hz 的两个正弦信号之和。

拨打电话时，将一组信号传递到电话局，通过检测这组信号中包括的频率实现对按键的解码。图 14-65 给出了拨号检测方案框图。信号首先经过放大，之后通过低通滤波器(LP)与高通滤波器(HP)将信

号分到各自相应的频率组，利用限幅器(L)将各组信号转换为方波。接着，利用 7 个带通滤波器(BP)识别出不同频率的单音信号，即各带通滤波器仅允许其中一个频率通过，而阻止其他频率通过。各滤波器之后为一个检波器(D)，当其输入电压超过某个电平时就触发工作。检波器的输出为交换系统将主叫连接至被叫所需的直流信号。

例 14-18 在电话电路中，采用标准的 600Ω 电阻器与 RLC 串联电路，设计图 14-65 中的带通滤波器 BP_2 。

解：带通滤波器为图 14-35 所示的 RLC 串联电路，由于 BP_2 允许 697~852Hz 的频率通过，且中心频率为 $f_0 = 770\text{Hz}$ ，因此，该带通滤波器的带宽为：

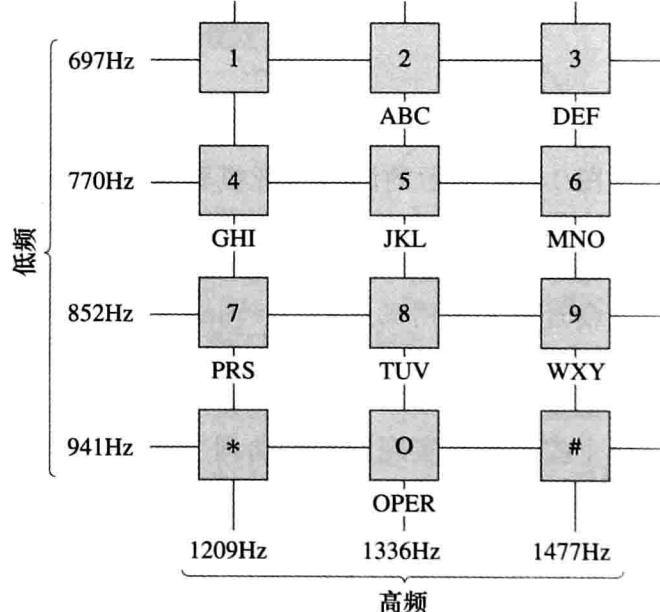


图 14-64 按键式电话机拨号的频率排列

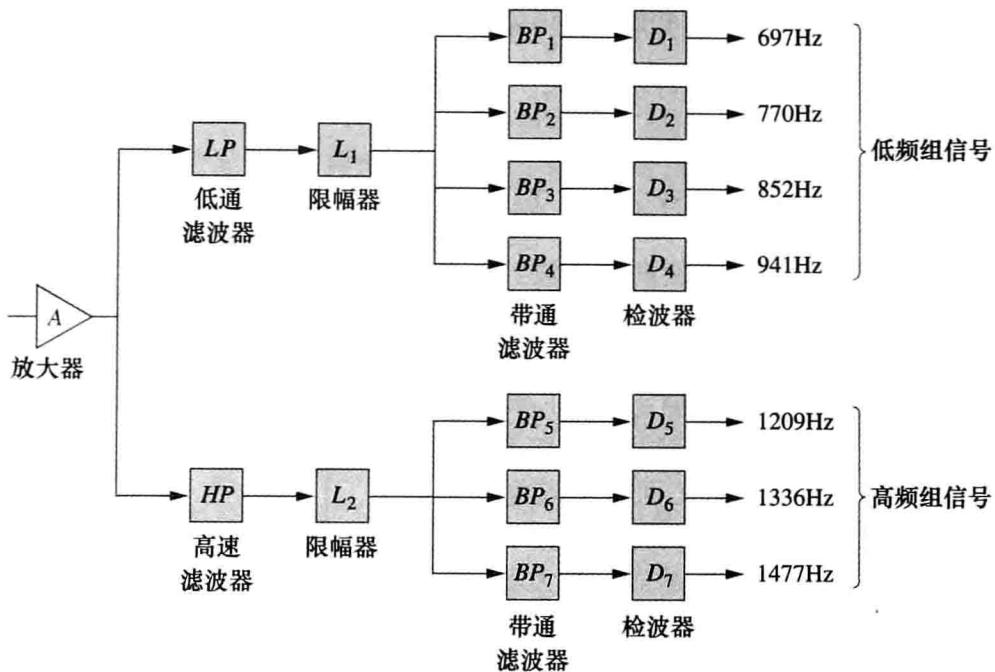


图 14-65 拨号检测方案框图

$$B = 2\pi(f_2 - f_1) = 2\pi(852 - 697) = 973.89(\text{rad/s})$$

由式(14.39)可得：

$$L = \frac{R}{B} = \frac{600}{973.89} = 0.616(\text{H})$$

由式(14.27)或式(14.57)可得：

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 770^2 \times 0.616} = 69.36(\text{nF})$$

练习 14-18 对于带通滤波器 BP_6 ，重做例 14-18 的设计。 答案：356mH, 39.83nF

14.12.3 交叉网络

滤波器的另一个典型应用是将音频放大器耦合至低频扬声器与高频扬声器的交叉网络(crossover network)，如图 14-66a 所示。交叉网络主要由一个高通 RC 滤波器与一个低通 RL 滤波器组成，它将高于某预定交叉频率 f_c 的高频信号送至高音喇叭(高频扬声器)，而将低于 f_c 的低频信号送至低音喇叭(低频扬声器)。这些扬声器能够适应某种特定的频率响应。低音喇叭是重现信号低频部分的低频扬声器，其最高频率约 3kHz，而高音喇叭则重现 3~20kHz 的音频信号。两类扬声器相结合即可重现整个音频范围的信号，并给出最优频率响应。

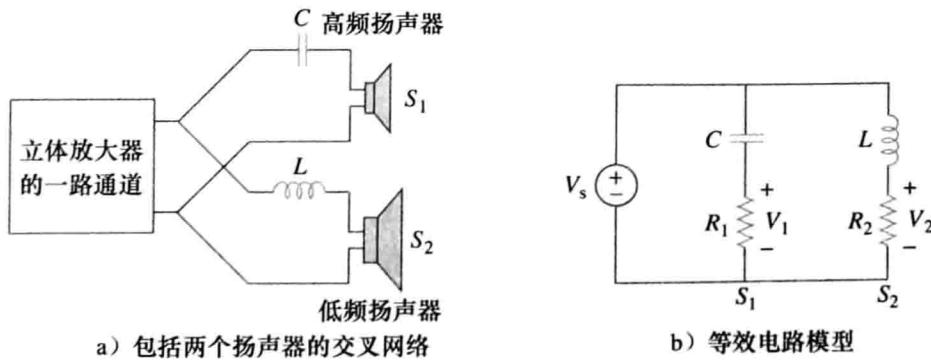


图 14-66 扬声器及等效电路

利用电压源取代放大器即可得到图 14-66b 所示的交叉网络的近似等效电路，图中扬

声器的电路模型为电阻器。高通滤波器的传递函数 V_1/V_s 为：

$$H_1(\omega) = \frac{V_1}{V_s} = \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \quad (14.87)$$

同理，低通滤波器的传递函数为：

$$H_2(\omega) = \frac{V_2}{V_s} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \quad (14.88)$$

选择 R_1 、 R_2 、 L 与 C 的值，可以使两个滤波器具有相同的转折频率，即交叉频率（crossover frequency），如图 14-67 所示。

交叉网络的基本原理也用于电视接收机的谐振电路中，因为电视接收机的谐振电路需将 RF 载波中的视频波段与音频波段分离开。低频段（频率为 30Hz ~ 4MHz 的图像信息）信号通过交叉网络进入电视接收机的视频放大器，而高频段（4.5MHz 左右的声音信息）信号通过交叉网络进入电视接收机的声音放大器。

例 14-19 在图 14-66 所示的交叉网络中，假设各扬声器的等效电阻为 6Ω ，求交叉频率为 2.5kHz 时的 C 与 L 。

解：对于高通滤波器，有：

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{R_1 C}$$

即

$$C = \frac{1}{2\pi f_c R_1} = \frac{1}{2\pi \times 2.5 \times 10^3 \times 6} = 10.61(\mu\text{F})$$

对于低通滤波器，有：

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{R_2}{L}$$

即

$$L = \frac{R_2}{2\pi f_c} = \frac{6}{2\pi \times 2.5 \times 10^3} = 382(\mu\text{H})$$

练习 14-19 如果图 14-63 中各扬声器的电阻为 8Ω 且 $C=10\mu\text{F}$ ，求 L 与交叉频率。

答案： 0.64mH , 1.989kHz

14.13 本章小结

1. 传递函数 $H(\omega)$ 为输出响应 $Y(\omega)$ 与输入激励 $X(\omega)$ 之比，即 $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ 。
2. 频率响应是指传递函数随频率的变化关系。
3. 传递函数 $H(s)$ 的零点是指使 $H(s)=0$ 的 $s=j\omega$ 的值，而极点是指使 $H(s)\rightarrow\infty$ 的 s 值。
4. 分贝是对数增益的单位，如果电压增益或电流增益为 G ，则其等效的分贝值为 $G_{\text{dB}} = 20\log_{10}G$ 。
5. 伯德图是传递函数的幅度与相位随频率变化的半对数曲线，利用由 $H(\omega)$ 的极点与零点定义的转折频率可以绘制 H （单位为 dB）与 ϕ （单位为度）的直线近似。
6. 谐振频率是指传递函数的虚部趋于零时的频率。对于 RLC 串联与并联电路而言：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

7. 半功率频率 (ω_1 , ω_2) 是指在该频率处所消耗的功率等于在谐振频率处所消耗功率一半的频率，半功率频率的几何平均值就是谐振频率，即：

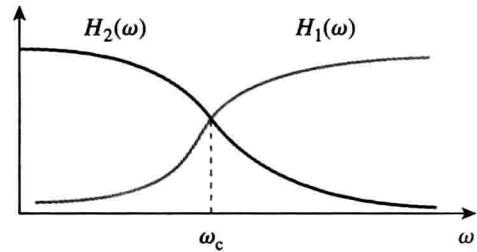


图 14-67 图 14-66 所示交叉网络的频率响应

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

8. 带宽是指两个半功率频率之间的频带宽度：

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

9. 品质因数是谐振峰“锐度”的一种度量，它等于谐振(角)频率与带宽之比：

$$Q = \frac{\omega_0}{B}$$

10. 滤波器是一种使某个频带信号通过而阻止其他频带信号通过的电路，无源滤波器由电阻器、电容器与电感器构成。有源滤波器由电阻器、电容器与有源器件组成，常用的有源器件为运算放大器。

11. 常用的四类滤波器包括低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器与带阻滤波器。低通滤波器仅允许频率低于截止频率 ω_c 的信号通过，高通滤波器仅允许频率高于截止频率 ω_c 的信号通过，带通滤波器仅允许频率位于规定范围 ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) 以内的信号通过，带阻滤波器仅允许频率位于规定频率范围 ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) 以外的信号通过。

12. 比例转换是指通过幅度比例因子 K_m 或者频率比例因子 K_f 将非实际元件值变换为实际值的过程。

$$R' = K_m R, \quad L' = \frac{K_m}{K_f} L, \quad C' = \frac{1}{K_m K_f} C$$

13. 在 PSpice 的 AC Sweep 中设定好电路响应的频率范围及该范围内所需的扫描点数后，就可以利用 PSpice 确定电路的频率响应。

14. 无线电接收机是谐振电路的应用之一，它可以利用带通谐振电路从天线接收到的所有广播信号中调谐出其中一个频率。

15. 按键式电话机与交叉网络是滤波器的两个典型应用实例。按键式电话系统利用滤波器将不同频率的单音信号分离开，用于驱动电子交换机。交叉网络将不同频率范围的信号分离开，以便将其传送到不同的设备中，对音响系统而言，就是传送到低音喇叭与高音喇叭。

复习题

1 传递函数 $H(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)}$ 的一个零点为：

- (a) 10 (b) -1
(c) -2 (d) -3

2 在幅度伯德图中，对于较大的 ω 值，极点 $1/(5+j\omega)^2$ 的斜率为：

- (a) 20dB/dec (b) 40dB/dec
(c) -40dB/dec (d) -20dB/dec

3 在相位伯德图中， $0.5 < \omega < 50$, $[1 + j10\omega - \omega^2/25]^2$ 的斜率为：

- (a) 45°/decade (b) 90°/decade
(c) 135°/decade (d) 180°/decade

4 由 $12nF$ 电容器构成的谐振电路谐振于 $5kHz$ 时所需的电感值为多少？

- (a) 2652H (b) 11.844H
(c) 3.333H (d) 84.43H

5 半功率频率之差称为：

- (a) 品质因数 (b) 谐振频率
(c) 带宽 (d) 截止频率

6 在 RLC 串联电路中，以下哪个品质因数在谐振

频率处具有最陡峭的幅频响应曲线：

- (a) $Q=20$ (b) $Q=12$
(c) $Q=8$ (d) $Q=4$

7 在 RLC 并联电路中，带宽 B 与 R 成正比。

- (a) 正确 (b) 错误

8 RLC 电路的元件既作了幅度比例转换又作了频率比例变换，下列哪个量不会受影响？

- (a) 电阻 (b) 谐振频率
(c) 带宽 (d) 品质因数

9 以下哪类滤波器可用于选择某个无线电台的信号？

- (a) 低通 (b) 高通
(c) 带通 (d) 带阻

10 某电压源为 RC 低通滤波器提供频率为 $0 \sim 40kHz$ 、幅度恒定的信号，与电容器并联的负载电阻电压最大的频率位于：

- (a) 直流 (b) $10kHz$
(c) $20kHz$ (d) $40kHz$

答案：(1)b; (2)c; (3)d; (4)d; (5)c; (6)a; (7)b;
(8)d; (9)c; (10)a

习题

14.2节

- 1 求图 14-68 所示 RC 电路的传递函数 V_o/V_i , 利用 $\omega_0 = 1/RC$ 表示该传递函数。

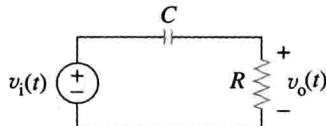


图 14-68 习题 1 图

- 2 利用图 14-69 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解传递函数的求解方法。 ED

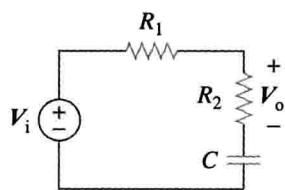


图 14-69 习题 2 图

- 3 图 14-70 所示电路中, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $C_1 = 0.1F$, $C_2 = 0.2F$ 。求 $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ 。

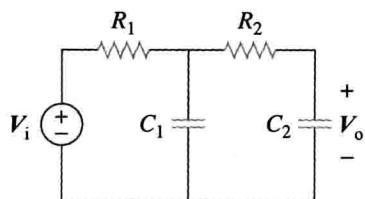
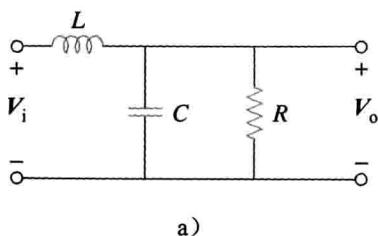


图 14-70 习题 3 图

- 4 求图 14-71 所示电路的传递函数 $H(\omega) = V_o/V_i$ 。



a)

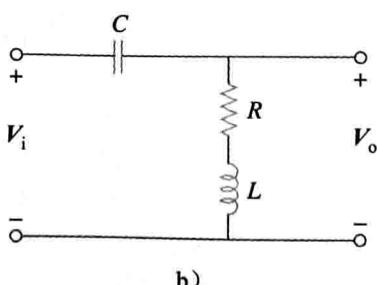
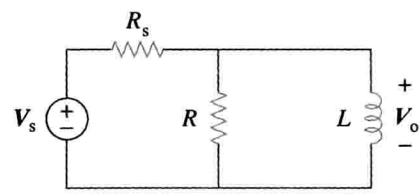
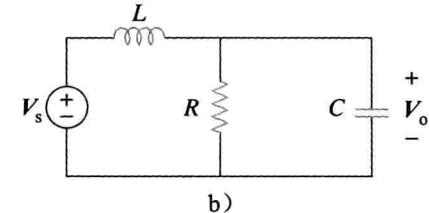


图 14-71 习题 4 图

- 5 对于图 14-72 所示各电路, 求 $H(s) = V_o(s)/V_s(s)$ 。
6 对于图 14-73 所示电路, 求 $H(s) = I_o(s)/I_s(s)$ 。



a)



b)

图 14-72 习题 5 图

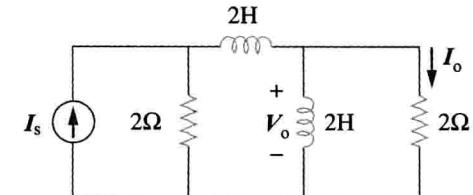


图 14-73 习题 6 图

14.3节

- 7 如果 H_{dB} 等于: (a) 0.05dB; (b) -6.2dB; (c) 104.7dB。试计算相应的 $|H(\omega)|$ 。

- 8 设计一个问题, 帮助其他同学计算某一频率 ω 下不同传递函数的幅度(dB)和相位($^\circ$)。 ED

14.4节

- 9 某阶梯网络的电压增益为:

$$H(\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)(10+j\omega)}$$

画出该增益的伯德图。

- 10 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何计算给定传递函数在频率为 $j\omega$ 时的幅度伯德图和相位伯德图。 ED

- 11 画出如下函数的伯德图:

$$H(\omega) = \frac{0.2(10+j\omega)}{j\omega(2+j\omega)}$$

- 12 传递函数为:

$$T(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+10)}$$

画出其幅度伯德图和相位伯德图。

- 13 画出如下函数的伯德图:

$$G(s) = \frac{0.1(s+1)}{s^2(s+10)}, \quad s = j\omega$$

- 14 画出如下函数的伯德图:

$$H(\omega) = \frac{250(j\omega+1)}{j\omega(-\omega^2 + 10j\omega + 25)}$$

- 15 画出如下函数的幅度伯德图和相位伯德图:

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+10)}, \quad s = j\omega$$

16 画出如下函数的幅度伯德图和相位伯德图:

$$H(s) = \frac{1.6}{s(s^2 + s + 16)}, \quad s = j\omega$$

17 画出如下函数的伯德图:

$$G(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s+1)}, \quad s = j\omega$$

18 某线性网络的传递函数为:

ML

$$H(s) = \frac{7s^2 + s + 4}{s^3 + 8s^2 + 14s + 5}, \quad s = j\omega$$

利用 MATLAB 绘制该传递函数的幅频特性曲线与相频特性曲线。假设 $0.1\text{rad/s} < \omega < 10\text{rad/s}$ 。

19 画出如下传递函数幅度与相位的近似伯德图:

ED

$$H(s) = \frac{80s}{(s+10)(s+20)(s+40)}, \quad s = j\omega$$

20 为了使同学们更好地理解如何计算幅度伯德图和相位伯德图, 设计一个比习题 10 更为复杂的问题, 计算传递函数在频率的幅度伯德图和相位伯德图, 并包括至少一个二阶复根。

ED

21 画出如下传递函数的幅度伯德图:

$$H(s) = \frac{10s(s+20)}{(s+1)(s^2 + 60s + 400)}, \quad s = j\omega$$

22 求图 14-74 所示幅度伯德图的传递函数 $H(\omega)$ 。

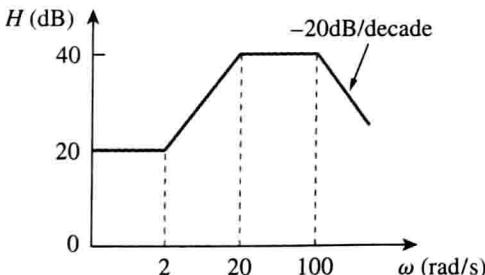


图 14-74 习题 22 图

23 $H(\omega)$ 的幅度伯德图如图 14-75 所示, 求 $H(\omega)$ 。

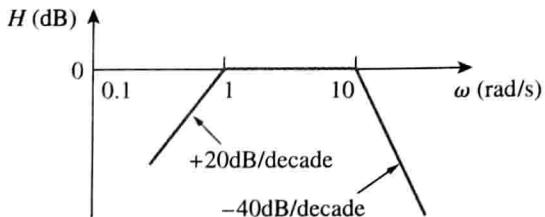


图 14-75 习题 23 图

24 图 14-76 所示幅频特性曲线表示某前置放大器的传递函数, 求 $H(s)$ 。

14.5 节

25 某 RLC 串联网络中, $R = 2\text{k}\Omega$, $L = 40\text{mH}$, $C = 1\mu\text{F}$, 求谐振时的阻抗以及在 $1/4$ 、 $1/2$ 、 2 、 4 倍谐振频率处的阻抗。

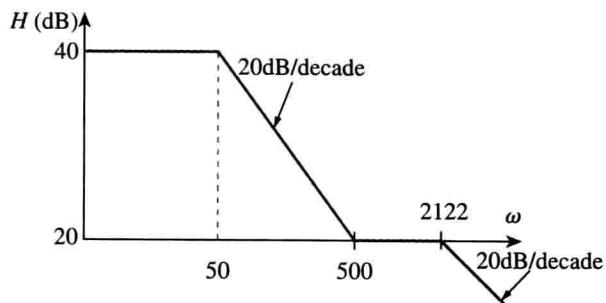


图 14-76 习题 24 图

26 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解 RLC 串联电路谐振时的 ω_0 、Q 和 B。**ED**

27 设计一个谐振频率为 $\omega_0 = 40\text{rad/s}$, 带宽为 $B = 10\text{rad/s}$ 的 RLC 串联谐振电路。**ED**

28 设计一个带宽为 $B = 20\text{rad/s}$, 谐振频率为 $\omega_0 = 1000\text{rad/s}$ 的 RLC 串联谐振电路, 并求该电路的 Q 值。假设 $R = 10\Omega$ 。

29 在图 14-77 所示电路中, $V_s = 20\cos\omega t$ V, 求从电容器两端看进去的 ω_0 、Q 和 B。

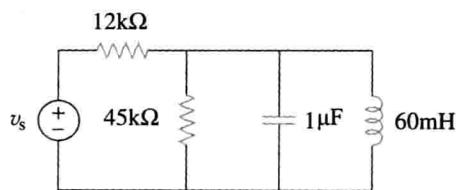


图 14-77 习题 29 图

30 电路由电感值为 10mH 、电阻值为 20Ω 的线圈, 电容器和电压均值为 120V 的信号发生器串联组成。试求: (a)使电路在 15kHz 时发生谐振的电容值; (b)谐振时通过线圈的电流; (c)电路的 Q 值。

14.6 节

31 设计一个 $\omega_0 = 10\text{rad/s}$, $Q = 20$ 的 RLC 并联谐振电路, 并计算该电路的带宽。假设 $R = 10\Omega$ 。**ED**

32 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解并联 RLC 电路的品质因数、谐振频率和带宽。**ED**

33 某品质因数为 120 的并联谐振电路的谐振频率为 $6 \times 10^6\text{ rad/s}$, 计算其带宽与半功率频率。

34 某 RLC 并联电路的谐振频率为 5.6MHz , 品质因数为 80, 电阻支路的电阻值为 $40\text{k}\Omega$ 。计算另外两个支路的 L 与 C 的值。

35 某 RLC 并联电路的 $R = 5\text{k}\Omega$, $L = 8\text{mH}$, $C = 60\mu\text{F}$, 计算: (a)谐振频率; (b)带宽; (c)品质因数。

36 某 RLC 并联谐振电路的中心频率导纳为 $25 \times 10^3\text{ S}$, 品质因数为 80, 谐振频率为 200krad/s , 计算其 R、L、C 的值, 并求出带宽与半功率

频率。

- 37 如果元件改为并联，重做习题 25。
38 求图 14-78 所示电路的谐振频率。

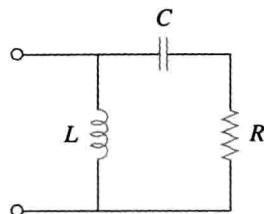


图 14-78 习题 38 图

- 39 求图 14-79 所示储能电路的谐振频率。

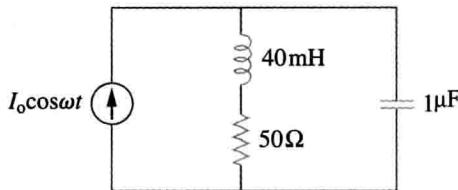


图 14-79 习题 39 与习题 91 图

- 40 某并联谐振电路的电阻为 $2k\Omega$ ，半功率频率为 $86kHz$ 与 $90kHz$ ，计算：(a) 电容值；(b) 电感值；(c) 谐振频率；(d) 带宽；(e) 品质因数。
41 利用图 14-80 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解 RLC 电路的品质因数、谐振频率和带宽。

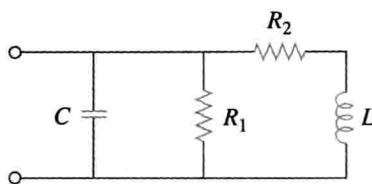


图 14-80 习题 41 图

- 42 对于图 14-81 所示电路，求谐振频率 ω_0 、品质因数 Q 及带宽 B。

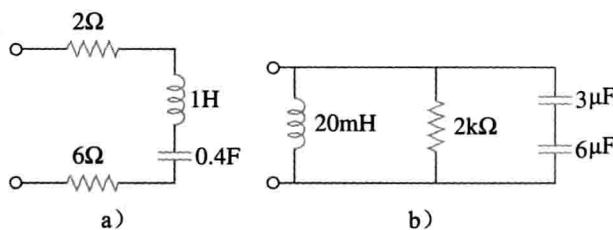


图 14-81 习题 42 图

- 43 计算图 14-82 所示各电路的谐振频率。

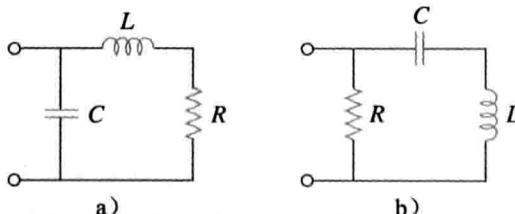


图 14-82 习题 43 图

- * 44 对于图 14-83 所示电路，求：(a) 谐振频率 ω_0 ；(b) $Z_{in}(\omega_0)$ 。

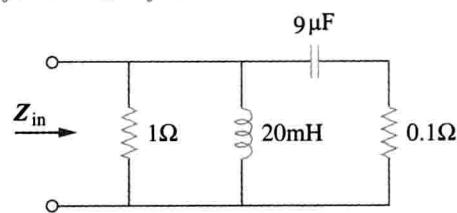


图 14-83 习题 44 图

- 45 对于图 14-84 所示电路，求从电感器两端看进去的 ω_0 、Q 和 B。

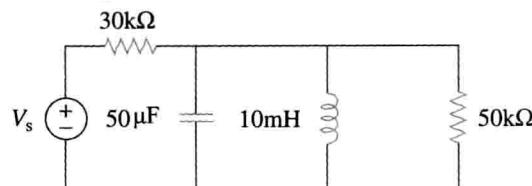


图 14-84 习题 45 图

- 46 对于图 14-85 所示网络，求：(a) 传递函数 $H(\omega) = V_o(\omega)/I(\omega)$ ；(b) $\omega_0 = 1rad/s$ 时 H 的幅度。

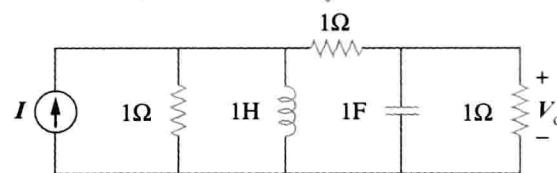


图 14-85 习题 46、习题 78 与习题 92 图

14.7 节

- 47 证明当输出取自电阻器两端时，LR 串联电路为低通滤波器，并计算当 $L = 2mH$ 且 $R = 10k\Omega$ 时的转折频率 f_c 。
48 求图 14-86 所示电路的传递函数 V_o/V_s ，并证明该电路为低通滤波器。

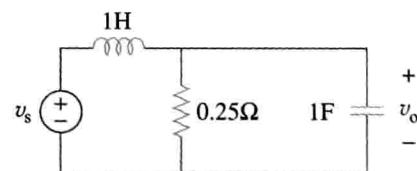


图 14-86 习题 48 图

- 49 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解传递函数描述的低通滤波器。
50 确定图 14-87 所示滤波器的类型，并计算转折频率 f_c 。

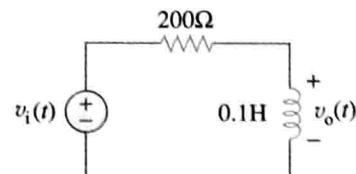


图 14-87 习题 50 图

51 利用一个 40mH 线圈设计一个截止频率为 5kHz 的 RL 低通滤波器。 **ED**

52 设计一个问题帮助其他同学更好地理解无源高通滤波器。 **ED**

53 设计一个截止频率为 10kHz 与 11kHz 的 RLC 串联带通滤波器，假设 $C=80\text{pF}$ ，求 R 、 L 与 Q 。 **ED**

54 设计一个 $\omega_0 = 10\text{rad/s}$, $Q = 20$ 的无源带通滤波器。 **ED**

55 确定 $R = 10\text{k}\Omega$, $L = 25\text{mH}$, $C = 0.4\mu\text{F}$ 的 RLC 串联带通滤波器的频率范围，并计算其品质因数。

56 (a) 证明带通滤波器的传递函数为：

$$H(s) = \frac{sB}{s^2 + sB + \omega_0^2}, \quad s = j\omega$$

其中， B 是滤波器的带宽， ω_0 是中心频率。

(b) 证明带阻滤波器的传递函数为：

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + sB + \omega_n^2}, \quad s = j\omega$$

57 计算图 14-88 所示带通滤波器的中心频率与带宽。

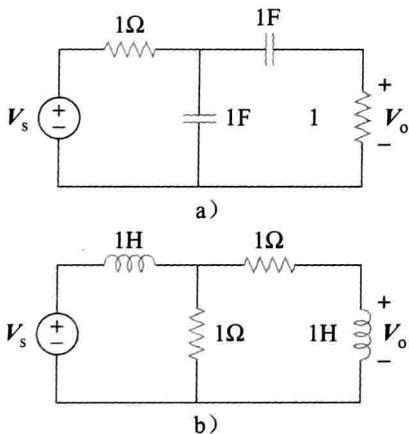


图 14-88 习题 57 图

58 某 RLC 串联带阻滤波器的电路参数为： $R = 2\text{k}\Omega$, $L = 0.1\text{H}$, $C = 40\text{pF}$ ，计算：(a) 中心频率；(b) 半功率频率；(c) 品质因数。

59 计算图 14-89 所示带阻滤波器的带宽与中心频率。

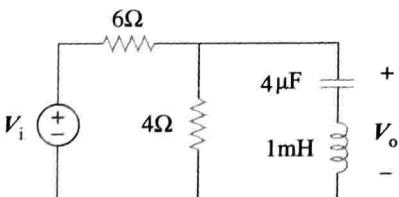


图 14-89 习题 59 图

14.8 节

60 求通带增益为 10，截止频率为 50rad/s 的高通滤波器的传递函数。

61 求图 14-90 所示各有源滤波器的传递函数。

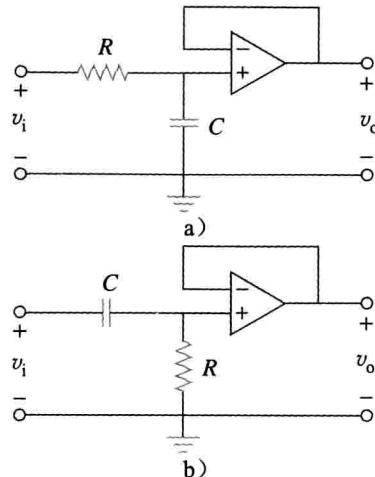


图 14-90 习题 61 与习题 62 图

62 图 14-90b 所示滤波器的 3dB 截止频率为 1kHz 。如果输入与一个 120mV 频率可变信号相连，求如下频率处的输出电压：(a) 200Hz ; (b) 2kHz ; (c) 10kHz 。

63 利用 $1\mu\text{F}$ 电容器设计一个传递函数为： **ED**

$$H(s) = -\frac{100s}{s + 10}, \quad s = j\omega$$

的一阶有源高通滤波器。

64 确定图 14-91 所示有源滤波器的传递函数，并说明该滤波器属于哪种类型。

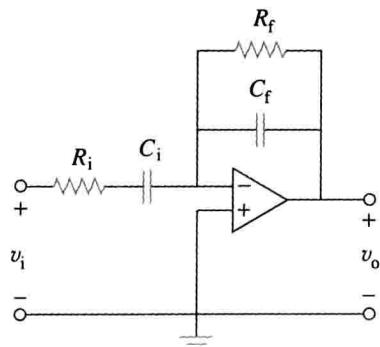


图 14-91 习题 64 图

65 某高通滤波器如图 14-92 所示，证明其传递函数为：

$$H(\omega) = \left(1 + \frac{R_f}{R_i}\right) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

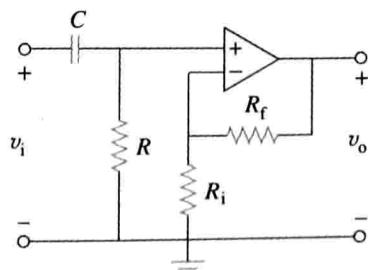


图 14-92 习题 65 图

- 66 通用一阶滤波器如图 14-93 所示。(a)证明其传递函数为:

$$H(s) = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \times \frac{s + (1/R_1 C)[R_1/R_2 - R_3/R_4]}{s + 1/R_2 C}$$

$$s = j\omega$$

(b)要使电路成为一个高通滤波器, 必须满足什么条件? (c)要使电路成为一个低通滤波器, 必须满足什么条件?

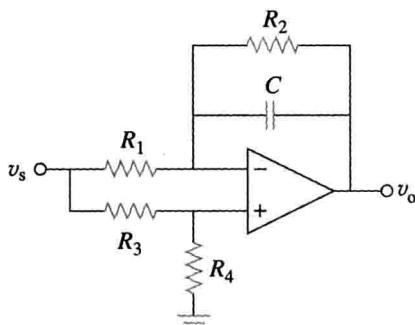


图 14-93 习题 66 图

- 67 设计一个直流增益为 0.25, 转折频率为 500Hz 的有源低通滤波器。 **ED**

- 68 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解有源高通滤波器的设计。其中, 高频增益和转折频率已给定。 **ED**

- 69 设计满足下列要求的如图 14-94 所示的滤波器: (a) 滤波器在 2kHz 时的输出信号比 10MHz 时的输出信号衰减 3dB; (b) 滤波器对于输入 $v_s(t) = 4\sin(2\pi \times 10^8 t)$ V 的稳态输出为 $v_o(t) = 10\sin(2\pi \times 10^8 t + 180^\circ)$ V。 **ED**

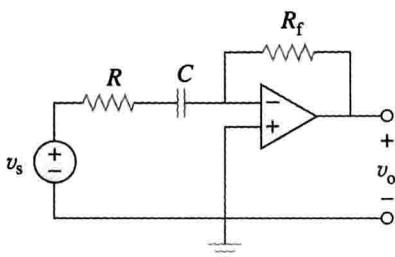


图 14-94 习题 69 图

- * 70 某二阶有源巴特沃思滤波器如图 14-95 所示。

(a)求传递函数 V_o/V_i ; (b)证明该滤波器为低

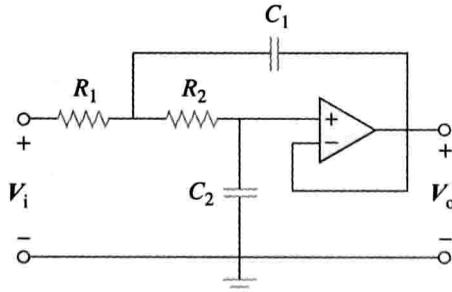


图 14-95 习题 70 图

通滤波器。

14.9 节

- 71 利用幅度与频率比例变换求图 14-79 所示电路的等效电路, 图中电感器与电容器分别为 1H 与 1F。

- 72 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解幅度比例转换和频率比例转换。 **ED**

- 73 当幅度转换比例为 800, 频率转换比例为 1000 时, 计算得到 $R = 12k\Omega$, $L = 40\mu H$, $C = 300nF$ 所需的 R 、 L 、 C 的值。

- 74 某电路的 $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 2H$, $C = 1/10F$, 电路转换的幅度比例因子为 100, 频率比例因子为 10^6 , 求电路元件的新值。

- 75 在某 RLC 电路中, $R = 20\Omega$, $L = 4H$, $C = 1F$, 对该电路进行转换的幅度比例因子为 10, 频率比例因子为 10^5 , 计算元件的新值。

- 76 已知某 RLC 并联电路的 $R = 5k\Omega$, $L = 10mH$, $C = 20\mu F$, 如果该电路的幅度比例转换因子为 $K_m = 500$, 频率比例转换因子 $K_f = 10^5$, 求所得到的 R 、 L 与 C 的值。

- 77 某 RLC 串联电路的 $R = 10\Omega$, $\omega_0 = 40\text{ rad/s}$, $B = 5\text{ rad/s}$, 求电路进行如下比例转换后的 L 与 C 的值。(a)幅度比例转换因子 $K_m = 600$; (b)频率比例转换因子 $K_f = 1000$; (c)幅度比例转换因子 $K_m = 400$ 且频率比例因子 $K_f = 10^5$ 。

- 78 重新设计图 14-85 所示电路, 使所有电阻元件的比例转换因子为 1000, 所有频率元件的比例转换为 10^4 。

- * 79 对于图 14-96 所示网络: (a)求 $Z_{in}(s)$; (b)通过 $K_m = 10$, $K_f = 100$ 对元件进行比例转换, 求 $Z_{in}(s)$ 与 ω_0 。

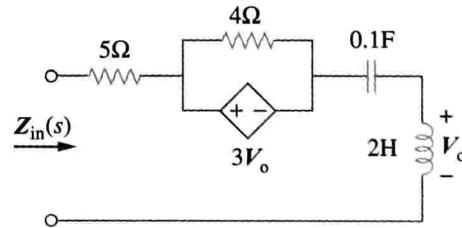


图 14-96 习题 79 图

- 80 (a)对于图 14-97 所示电路, 画出经 $K_m = 200$ 与 $K_f = 10^4$ 比例转换后的新电路。(b)确定转换后的新电路在 $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ 时从端口 a-b 处看进去的戴维南等效阻抗。

- 81 图 14-98 所示电路的阻抗为:

$$Z(s) = \frac{1000(s+1)}{(s+1+j50)(s+1-j50)}, \quad s = j\omega$$

求: (a) R 、 L 、 C 与 G 的值; (b)通过频率比例转换将谐振频率提高 10^3 倍的元件值。

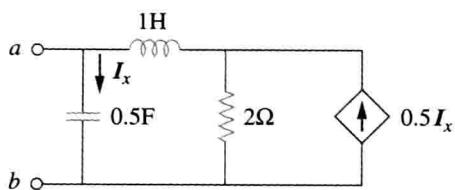


图 14-97 习题 80 图

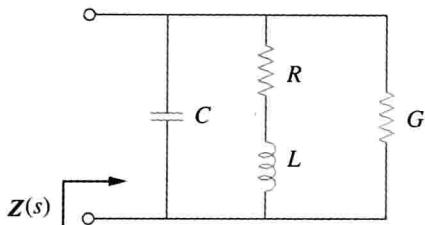


图 14-98 习题 81 图

- 82 对图 14-99 所示有源低通滤波器进行比例转换，使其转折频率从 1rad/s 升高至 200rad/s 。采用 $1\mu\text{F}$ 电容器。

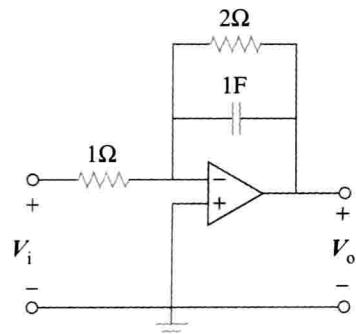


图 14-99 习题 82 图

- 83 图 14-100 所示运算放大器电路的幅度比例转换因子为 100，频率比例转换因子为 10^5 ，求得到的元件值。

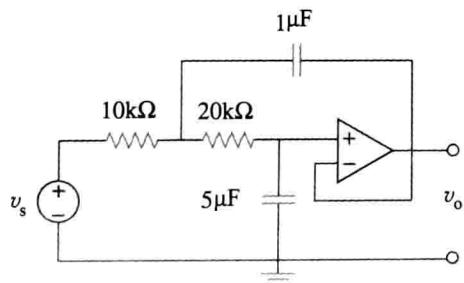


图 14-100 习题 83 图

14.10 节

- 84 利用 PSpice 或 MultiSim 确定图 14-101 所示电路的频率响应。
- 85 利用 PSpice 或 MultiSim 确定图 14-102 所示电路 V_o/V_s 的幅频特性曲线与相频特性曲线。
- 86 利用图 14-103 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何运用 PSpice 求解频率响应(I 的幅频和相频响应)。

ED

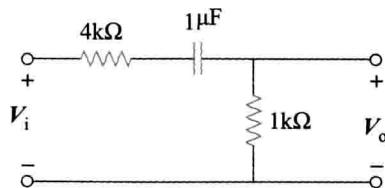


图 14-101 习题 84 图

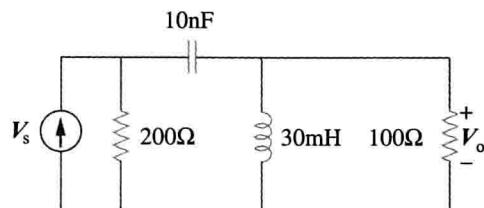


图 14-102 习题 85 图

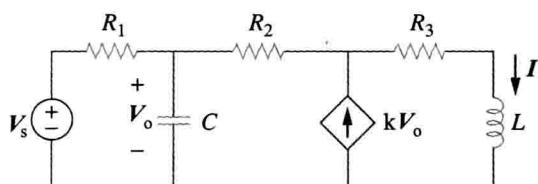


图 14-103 习题 86 图

- 87 画出图 14-104 所示网络在区间 $0.1\text{Hz} < f < 100\text{Hz}$ 内的响应曲线，并确定该滤波器的类型及 ω_0 。

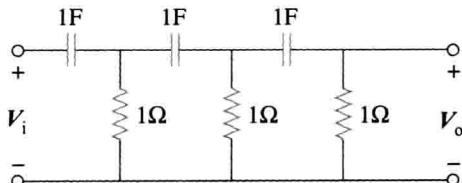


图 14-104 习题 87 图

- 88 利用 PSpice 或 MultiSim 绘制图 14-105 所示电路中 V_o 的幅度伯德图与相位伯德图。

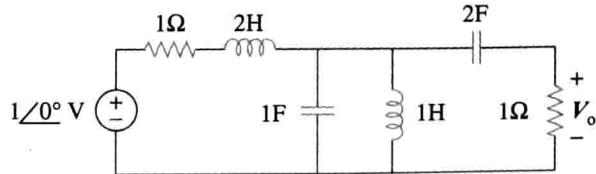


图 14-105 习题 88 图

- 89 确定图 14-106 所示网络中响应 V_o 在频率区间 $100\text{Hz} < f < 1000\text{Hz}$ 内的幅频特性曲线。
- 90 确定图 14-40 所示电路(见练习 14-10)的频率响应，假设 $R_1 = R_2 = 100\Omega$ ， $L = 2\text{mH}$ 且频率区间为 $1\text{Hz} < f < 100\ 000\text{Hz}$ 。
- 91 对于图 14-79 所示储能电路，利用 PSpice 或 MultiSim 确定(电容器两端电压的)频率响应，并计算该电路的谐振频率。
- 92 利用 PSpice 或 MultiSim 绘制图 14-85 所示电

路的幅频特性曲线。

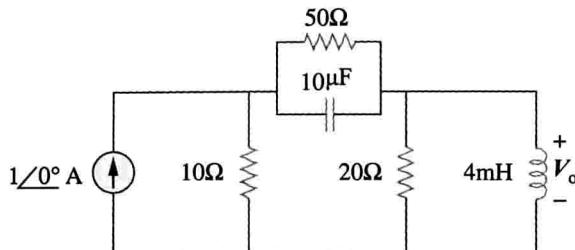


图 14-106 习题 89 图

14.12 节

- 93 对于图 14-107 所示的移相器电路，求 $H = V_o/V_s$ 。

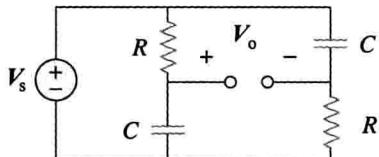


图 14-107 习题 93 图

- 94 某紧急情况下，工程师需要构造一个 RC 高通滤波器，现有 10pF 电容器、 30pF 电容器、 $1.8\text{k}\Omega$ 电阻器及 $3.3\text{k}\Omega$ 电阻器各一个。求利用上述元件可能得到的最高截止频率。
95 某串联调谐天线电路由可变电容器($40\sim360\text{pF}$)与直流电阻值为 12Ω 的 $240\mu\text{H}$ 天线线圈构成。(a)求该收音机可调谐的无线电信号

综合理解题

- 98 一个电子测试电路产生的谐振曲线的半功率频率为 432Hz 与 454Hz ，如果 $Q=20$ ，求该电路的谐振频率。
99 某电子设备中使用了一个串联电路，该串联电路在 2MHz 时的电阻值为 100Ω ，容性电抗为 $5\text{k}\Omega$ ，感性电抗为 300Ω ，求电路的谐振频率与带宽。
100 在某应用中需设计一个简单的 RC 低通滤波器降低高频噪声。如果所需的转折频率为 20kHz 、 $C=0.5\mu\text{F}$ ，求电阻值 R 。
101 在放大器电路中需要采用一个简单的高通 RC 滤波器来阻隔直流分量，同时通过时变分量，如果要求滚降频率为 15Hz 、 $C=10\mu\text{F}$ ，求电阻值 R 。
102 实际的 RC 滤波器应包括电源电阻与负载电阻，如图 14-110 所示，如果 $R=4\text{k}\Omega$ ， $C=40\text{nF}$ ，确定如下两种情况下的截止频率：(a) $R_s=0$ ， $R_L=\infty$ ；(b) $R_s=1\text{k}\Omega$ ， $R_L=5\text{k}\Omega$ 。
103 在系统设计中采用图 14-111 所示的 RC 电路作相位超前补偿器，确定该电路的传递函数。
104 某低品质因数、双调谐带通滤波器如图 14-112 所示，利用 PSpice 或 MultiSim 绘制 $V_o(\omega)$ 的幅

的频率范围；(b)计算该频率范围两端的 Q 值。

ED

- 96 图 14-108 所示的交叉电路是与低频扬声器相连的低通滤波器，求传递函数 $H(\omega)=V_o(\omega)/V_i(\omega)$ 。
97 图 14-109 所示的交叉电路是与高频扬声器相连的高通滤波器，求传递函数 $H(\omega)=V_o(\omega)/V_i(\omega)$ 。

ED

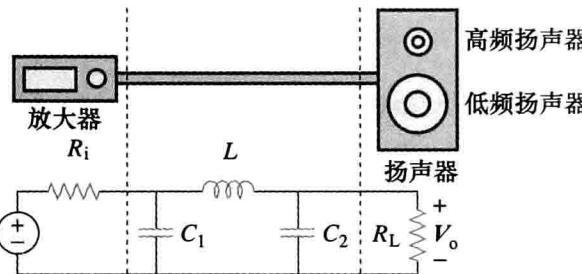


图 14-108 习题 96 图

- 98 一个电子测试电路产生的谐振曲线的半功率频率为 432Hz 与 454Hz ，如果 $Q=20$ ，求该电路的谐振频率。
99 某电子设备中使用了一个串联电路，该串联电路在 2MHz 时的电阻值为 100Ω ，容性电抗为 $5\text{k}\Omega$ ，感性电抗为 300Ω ，求电路的谐振频率与带宽。
100 在某应用中需设计一个简单的 RC 低通滤波器降低高频噪声。如果所需的转折频率为 20kHz 、 $C=0.5\mu\text{F}$ ，求电阻值 R 。
101 在放大器电路中需要采用一个简单的高通 RC 滤波器来阻隔直流分量，同时通过时变分量，如果要求滚降频率为 15Hz 、 $C=10\mu\text{F}$ ，求电阻值 R 。
102 实际的 RC 滤波器应包括电源电阻与负载电阻，如图 14-110 所示，如果 $R=4\text{k}\Omega$ ， $C=40\text{nF}$ ，确定如下两种情况下的截止频率：(a) $R_s=0$ ， $R_L=\infty$ ；(b) $R_s=1\text{k}\Omega$ ， $R_L=5\text{k}\Omega$ 。
103 在系统设计中采用图 14-111 所示的 RC 电路作相位超前补偿器，确定该电路的传递函数。
104 某低品质因数、双调谐带通滤波器如图 14-112 所示，利用 PSpice 或 MultiSim 绘制 $V_o(\omega)$ 的幅

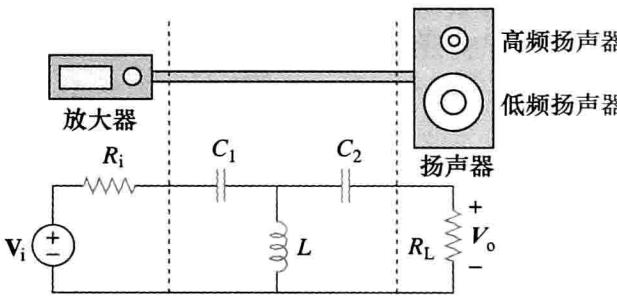


图 14-109 习题 97 图

频特性曲线。

PS

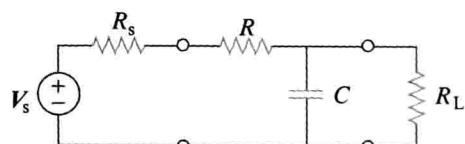


图 14-110 习题 102 图

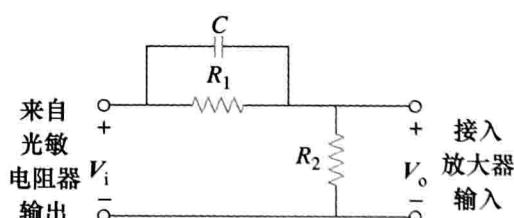


图 14-111 习题 103 图

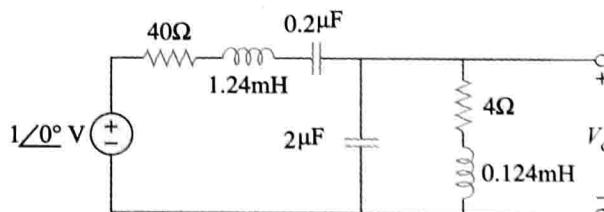
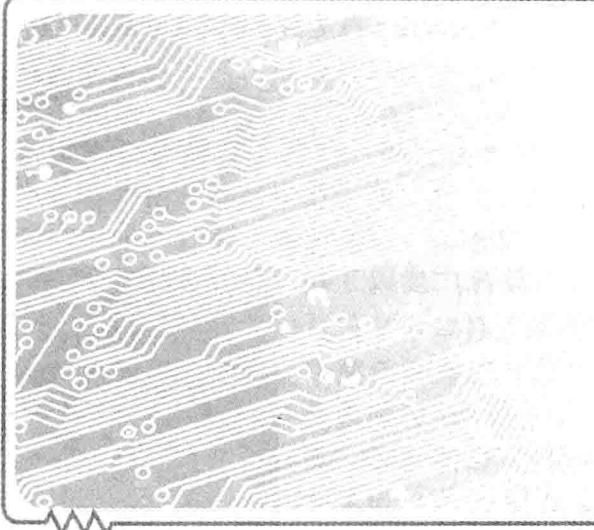


图 14-112 习题 104 图



第三部分

高级电路分析

- 第 15 章 拉普拉斯变换简介
- 第 16 章 拉普拉斯变换的应用
- 第 17 章 傅里叶级数
- 第 18 章 傅里叶变换
- 第 19 章 二端口网络

第 15 章

拉普拉斯变换简介

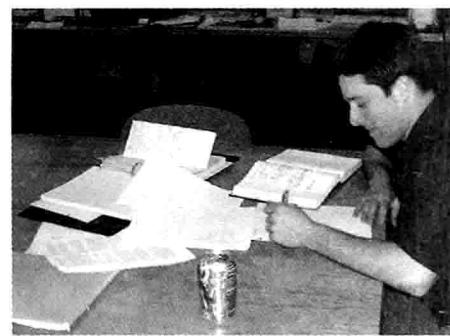
对于一个问题而言，最重要的不是它的解决方法，而是在寻求解决方法的过程中获得的进步。

——佚名

增强技能与拓展事业

ABET EC 2000 标准(3. h), “足够的教育广度以了解工程解决方案在全球和社会中产生的影响”

作为一名学生，你必须具备这种“足够的教育广度以了解工程解决方案在全球和社会中产生的影响”。如果你所在学校的专业培养方案已通过 ABET 工程师认证，则某些必修课必然要满足上述要求。我的建议是，如果你所在的院系已经通过 ABET 认证，则可以全面地考虑各种选修课，从中选择那些能扩展自己在全球和社会层面上的知识广度的课程来学习。作为未来的工程师，你必须认识到自己及自己的行为将以某种方式影响到所有人。



ABET EC 2000 标准(3. i), “具有致力于终身学习所需的能力”

你必须充分认识到“具有致力于终身学习所需的能力”的重要性。将此项列入准则中似乎有些荒谬，但是你将会惊奇地发现其实很多工程师并没有真正地理解这一概念。目前，科技知识呈爆炸性增长，我们只有坚持不断学习，才能跟上时代步伐。这里的学习既包括非技术问题，也包括本领域的最新进展。

跟上科技前沿领域最好的方式就是与同事和通过参加学术组织(比如 IEEE)的活动所结识的同行进行充分的交流。此外，阅读最前沿领域的技术文章也是一种很好的方法。

历史珍闻

皮埃尔·西蒙·拉普拉斯 (Pierre Simon Laplace, 1749—1827)，法国天文学家和数学家。他于 1779 年首次提出拉普拉斯变换，并将其应用于求解微分方程。拉普拉斯出生于法国诺曼底博蒙昂诺日一个贫困家庭，20 岁时成为一名数学教授。他在数学方面的能力激励了著名的数学家西米恩·泊松 (Simeon Poisson)。泊松将拉普拉斯称为法国的艾萨克·牛顿。拉普拉斯在位势理论、概率论、天文学和天体力学等方面做出了重大贡献。他的著作《天体力学》在天文学领域推广了牛顿理论。本章主题“拉普拉斯变换”就是以他的名字命名的。



© Time & Life Pictures/Getty

15.1 引言

本章和下一章将讨论具有不同激励和响应的电路的分析方法。这样的电路可建模为微分

方程(differential equation)，方程的解描述了电路的全响应。求解微分方程可采用系统的数学方法，本章介绍一种强有力的方法——拉普拉斯变换(Laplace transformation)，它将微分方程转换成代数方程(algebraic equation)，因此使求解过程更加方便。

变换的思想现在已经广为人知。使用相量分析电路时，我们把电路从时域转换到频域或相量域，获得相量域的结果后，再把它转换到时域。拉普拉斯变换法遵循相同的过程，首先用拉普拉斯变换将电路由时域转换到频域，并求解频域方程，然后再用拉普拉斯反变换将结果变换回时域。

拉普拉斯变换非常重要，首先，相比于相量分析法，它适用于更多种类的输入；其次，对于求解具有初始条件的电路问题，拉普拉斯变换提供了一种简易方法，因为它求解的是代数方程而不是解微分方程；最后，拉普拉斯变换能够一次求得电路的全部响应，包括自然响应和强迫响应。

本章首先给出拉普拉斯的定义及其基本性质。分析拉普拉斯变换的性质，不仅有助于掌握变换的过程和原理，也有助于更深刻地理解数学变换的思想。之后重点介绍电路分析中常用的几个性质，此外还将介绍拉普拉斯反变换、传递函数和卷积的概念。本章集中研究拉普拉斯变换的数学性质，第 16 章将主要研究拉普拉斯变换在电路分析、网络稳定性分析和网络综合中的应用。

15.2 拉普拉斯变换的定义

给定函数 $f(t)$ ，其拉普拉斯变换表示为 $F(s)$ 或 $L[f(t)]$ ，定义为：

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (15.1)$$

其中， s 是一个复数变量：

$$s = \sigma + j\omega \quad (15.2)$$

因为式(15.1)中 e 的指数 st 是无量纲的，所以 s 的量纲为“ s^{-1} ”或“频率”。在式(15.1)中，下限 0^- 表示时间刚好在 $t=0$ 时刻之前，包含起始条件，考虑了函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时刻的不连续性，可处理奇异函数等在 $t=0$ 时不连续函数。

提示：对于普通函数 $f(t)$ ，下限可以用 0 代替。

注意，式(15.1)的积分是一个关于时间的定积分，因此，积分结果与时间无关，仅涉及变量“ s ”。

式(15.1)表明了变换的一般概念。函数 $f(t)$ 被转换成函数 $F(s)$ ，前者以 t 为变量，后者以 s 为变量，变换是从 t 域到 s 域的变换。若把 s 解释为频率，便可把拉普拉斯变换描述为：

拉普拉斯变换是将函数 $f(t)$ 从时域变换到复频域的积分变换，变换结果记为 $F(s)$ 。

将拉普拉斯变换用于电路分析时，对表示电路时域模型的微分方程两边作拉普拉斯变换，用 $F(s)$ 代替微分方程中的 $f(t)$ ，将产生 s 域代数方程，它代表电路的频域模型。

假设不考虑式(15.1)中 $t < 0$ 时的情况，通常将函数乘以单位阶跃函数。因此， $f(t)$ 被写成 $f(t)u(t)$ 或 $f(t)$ ， $t \geq 0$ 。

式(15.1)中的拉普拉斯变换称为单边拉普拉斯变换。双边拉普拉斯变换表示为：

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (15.3)$$

式(15.1)中的单边拉普拉斯变换足以满足需求，本书只研究单边拉普拉斯变换。

函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换可能不存在。为了使 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在，式(15.1)中的积分必须收敛到一个有限值。因为对任意的 t 有 $|e^{j\omega t}| = 1$ ，所以对于实数 $\sigma = \sigma_c$ ，积分收敛的条件为：

$$\int_{0^-}^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt < \infty \quad (15.4)$$

提示: $|e^{j\omega t}| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1$ 。

因此, 拉普拉斯变换的收敛域为 $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_c$, 如图 15-1 所示。在这个区域, $|F(s)| < \infty$ 且 $F(s)$ 存在。在收敛域外, $F(s)$ 未定义。幸运的是, 本书电路分析中的所有函数都满足式(15.4)的收敛准则, 且其拉普拉斯变换存在。因此, 在以后的讨论中, 没有必要指定 σ_c 的值。

与式(15.1)所示拉普拉斯正变换相对应的拉普拉斯反变换表示为:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (15.5)$$

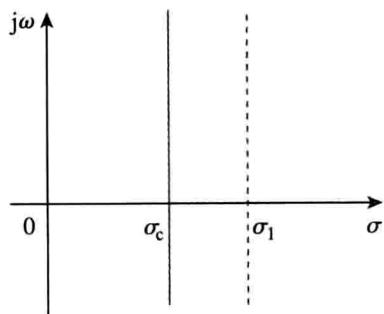


图 15-1 拉普拉斯变换的收敛域

其中积分沿收敛域内直线 $(\sigma_1 + j\omega, -\infty < \omega < \infty)$ 进行计算, $\sigma_1 > \sigma_c$, 见图 15-1。直接应用式(15.5)需要某些复分析的知识, 这超出了本书范围。因此, 通常不用式(15.5)求拉普拉斯反变换, 而是采用查表法, 这将在 15.3 节研究。函数 $f(t)$ 和 $F(s)$ 被视为一组拉普拉斯变换对:

$$f(t) \Leftrightarrow F(s) \quad (15.6)$$

$f(t)$ 和 $F(s)$ 之间是一一对应的, 下面通过例题推导某些重要函数的拉普拉斯变换。

例 15-1 求下列函数的拉普拉斯变换: (a) $u(t)$; (b) $e^{-at}u(t)$, $a \geq 0$; (c) $\delta(t)$

解: (a) 单位阶跃函数 $u(t)$ 如图 15-2a 所示, 拉普拉斯变换是:

$$L[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} 1 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s}(0) + \frac{1}{s}(1) = \frac{1}{s} \quad (15.1.1)$$

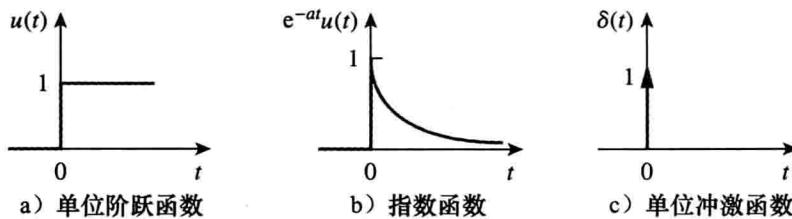


图 15-2 例 15-1 图

(b) 指数函数如图 15-2b 所示, 拉普拉斯变换是:

$$L[e^{-at}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (15.1.2)$$

(c) 单位冲激函数如图 15-2c 所示,

$$L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-0} = 1 \quad (15.1.3)$$

因为冲激函数除 $t=0$ 时刻外, $\delta(t)=0$ 。式(15.1.3)使用了式(7.33)中 $\delta(t)$ 函数的筛选性。

练习 15-1 求斜坡函数 $r(t) = tu(t)$ 、 $Ae^{-at}u(t)$ 和 $Be^{-j\omega t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。

答案: $1/s^2$, $A/(s+a)$, $B/(s+j\omega)$

例 15-2 求 $f(t) = \sin \omega t u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 利用式(15.1), 求得正弦函数的拉普拉斯变换为:

$$\begin{aligned} F(s) = L[\sin \omega t] &= \int_0^{\infty} (\sin \omega t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}) dt = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

练习 15-2 求 $f(t) = 50 \cos \omega t u(t)$ 的拉普拉斯变换。

答案: $50s/(s^2 + \omega^2)$

15.3 拉普拉斯变换的性质

运用拉普拉斯变换的性质有助于求解拉普拉斯变换对，而不需要像例 15-1 和 15-2 那样直接使用式(15.1)。推导这些性质时，要牢记式(15.1)拉普拉斯变换的定义式。

1. 线性性质

如果 $F_1(s)$ 、 $F_2(s)$ 分别是函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (15.7)$$

式中， a_1 和 a_2 是常数。式(15.7)表明了拉普拉斯变换的线性性质，从拉普拉斯变换的定义式(15.1)容易证明式(15.7)。

例如，由式(15.7)的线性性质可以得到：

$$L[\cos \omega t u(t)] = L\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}L[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2}L[e^{-j\omega t}] \quad (15.8)$$

但由例 15-1(b)知， $L[e^{-at}] = 1/(s+a)$ 。因此：

$$L[\cos \omega t u(t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (15.9)$$

2. 尺度变换性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$L[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(at)e^{-st} dt \quad (15.10)$$

式中， a 是一个常数且 $a > 0$ 。设 $x = at$, $dx = adt$, 则有：

$$L[f(at)] = \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-x(s/a)} dx \quad (15.11)$$

与拉普拉斯变换的定义式(15.1)相比较，这个积分表明式(15.1)中的 s 被 s/a 代替，而积分变量 t 被 x 代替。因此，比例性质如下：

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (15.12)$$

例如，由例 15-2 可知：

$$L[\sin \omega t u(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (15.13)$$

使用尺度变换式(15.12)，则有：

$$L[\sin 2\omega t u(t)] = \frac{1}{2} \frac{\omega}{(s/2)^2 + \omega^2} = \frac{2\omega}{s^2 + 4\omega^2} \quad (15.14)$$

将式(15.13)中的 ω 用 2ω 代替，也可得到该式。

3. 时域平移性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$L[f(t-a)u(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st} dt \quad a \geq 0 \quad (15.15)$$

当 $t < a$ 时， $u(t-a) = 0$ ；当 $t > a$ 时， $u(t-a) = 1$ 。因此有：

$$L[f(t-a)u(t-a)] = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt \quad (15.16)$$

令 $x = t-a$ ，则 $dx = dt$, $t = x+a$ 。当 $t \rightarrow a$ 时， $x \rightarrow 0$ ；当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x \rightarrow \infty$ 。因此：

$$L[f(t-a)u(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)} dx = e^{-as} \int_{0^-}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = e^{-as}F(s)$$

即

$$L[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as}F(s) \quad (15.17)$$

这意味着，如果一个函数在时域延迟 a ，则其拉普拉斯变换在 s 域乘以 e^{-as} （没有延迟），称为拉普拉斯变换的时延或时域平移性质。

例如，由式(15.9)可知：

$$L[\cos\omega t u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

使用式(15.17)的时域平移性质，有：

$$L[\cos\omega(t-a)u(t-a)] = e^{-as} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (15.18)$$

4. 频域平移性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$L[e^{-at}f(t)u(t)] = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a)$$

即

$$L[e^{-at}f(t)u(t)] = F(s+a) \quad (15.19)$$

将 $f(t)$ 的拉普拉斯变换中的每一个 s 用 $(s+a)$ 代替，即可得到 $e^{-at}f(t)$ 的拉普拉斯变换，称为频域平移性质。

例如，已知：

$$\cos\omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

和

$$\sin\omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (15.20)$$

利用式(15.19)的频域平移性质，得到衰减的正弦和余弦函数的拉普拉斯变换为：

$$L[e^{-at}\cos\omega t u(t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (15.21a)$$

$$L[e^{-at}\sin\omega t u(t)] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (15.21b)$$

5. 时域微分性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则它的导数的拉普拉斯变换是：

$$L\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] = \int_{0^-}^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt \quad (15.22)$$

用分部积分法求积分，令 $u = e^{-st}$, $du = -se^{-st}dt$, $dv = (df/dt)dt = df(t)$, $v = f(t)$ 。则有：

$$\begin{aligned} L\left[\frac{df}{dt}u(t)\right] &= f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^\infty - \int_{0^-}^\infty f(t)[-se^{-st}]dt \\ &= 0 - f(0^-) + s \int_{0^-}^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

即

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) \quad (15.23)$$

重复应用式(15.23)可求得 $f(t)$ 二阶导数的拉普拉斯变换：

$$L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = sL[f'(t)] - f'(0^-) = s[sF(s) - f(0^-)] - f'(0^-) = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

即

$$L[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) \quad (15.24)$$

继续以这种方式可以求得 $f(t)$ 的 n 阶导数的拉普拉斯变换：

$$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - s^0 f^{(n-1)}(0^-) \quad (15.25)$$

例如，可以使用式(15.23)从余弦函数的拉普拉斯变换得到正弦函数的拉普拉斯变换。如果设 $f(t) = \cos \omega t u(t)$ ，那么 $f(0) = 1$, $f'(t) = -\omega \sin \omega t u(t)$ 。由式(15.23)和比例性质，则有：

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t u(t)] &= -\frac{1}{\omega} L[f'(t)] = -\frac{1}{\omega} [sF(s) - f(0^-)] \\ &= -\frac{1}{\omega} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (15.26)$$

和已知结果相同。

6. 时域积分性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则它的积分的拉普拉斯变换为：

$$L\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_0^t f(x) dx \right] e^{-st} dt \quad (15.27)$$

用分部积分法求积分，令：

$$du = \int_0^t f(x) dx, \quad du = f(t) dt$$

和

$$dv = e^{-st} dt, \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

则：

$$L\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \left[\int_0^t f(x) dx \right] \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} f(t) dt$$

等式右边的第一项在 $t=\infty$ 时的值为 0，因为 $e^{-s\infty}$ 为 0；在 $t=0$ 时的值为 $\frac{1}{s} \int_0^0 f(x) dx = 0$ 。因此，第一项为 0，故：

$$L\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s)$$

或者简写为：

$$L\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (15.28)$$

例如，如果令 $f(t) = u(t)$ ，由例 15-1(a) 可知， $F(s) = 1/s$ 。由式(15.28)可知：

$$L\left[\int_0^t u(x) dx\right] = L[t] = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} \right)$$

因此，斜坡函数的拉普拉斯变换为：

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad (15.29)$$

继续使用式(15.28)，则有：

$$L\left[\int_0^t x dx\right] = L\left[\frac{t^2}{2}\right] = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2}$$

即

$$L[t^2] = \frac{2}{s^3} \quad (15.30)$$

重复使用式(15.28)可得：

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (15.31)$$

同样，用分部积分法，可以证明：

$$L\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0^-) \quad (15.32)$$

式中：

$$f^{-1}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$$

7. 频域微分性质

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换，则：

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

对 s 求导，则有：

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-te^{-st})dt = \int_{0^-}^{\infty} (-tf(t))e^{-st}dt = L[-tf(t)]$$

于是，频域微分性质变为：

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (15.33)$$

重复运用这个等式，则有：

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (15.34)$$

例如，由例 15-1(b) 可知 $L[e^{-at}] = 1/(s+a)$ 。使用式(15.33)，有：

$$L[te^{-at}u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad (15.35)$$

注意，如果 $a=0$ ，则有 $L[t] = 1/s^2$ ，同式(15.29)。重复使用式(15.33)，则得式(15.31)。

8. 时域周期性质

如果函数 $f(t)$ 是图 15-3 所示的周期函数，它可以表示成图 15-4 所示的时移函数求和的形式。因此：

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots \\ &= f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) + f_1(t-2T)u(t-2T) + \dots \end{aligned} \quad (15.36)$$

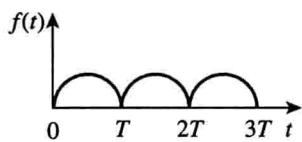


图 15-3 周期函数

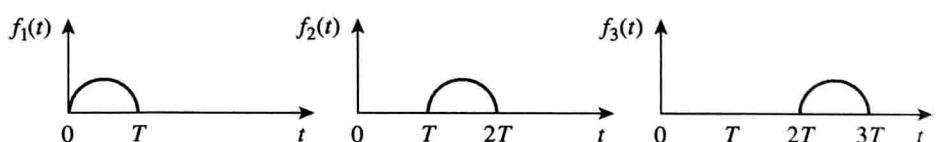


图 15-4 图 15-2 周期函数的分解

其中， $f_1(t)$ 是函数 $f(t)$ 在区间 $0 < t < T$ 中的部分，即：

$$f_1(t) = f(t)[u(t) - u(t-T)] \quad (15.37a)$$

即

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15.37b)$$

对式(15.36)中的各项求变换，并应用时域平移性质，得：

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + F_1(s)e^{-3Ts} + \dots \\ &= F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots] \end{aligned} \quad (15.38)$$

如果 $|x| < 1$ ，则有：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (15.39)$$

因此：

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (15.40)$$

式中, $F_1(s)$ 是 $f_1(t)$ 的拉普拉斯变换, 即 $F_1(s)$ 是 $f(t)$ 在第一周期的拉普拉斯变换。式(15.40)表明周期函数的拉普拉斯变换是函数的第一周期的拉普拉斯变换除以 $(1 - e^{-Ts})$ 。

9. 初值和终值定理

利用初值和终值定理, 可以直接由拉普拉斯变换 $F(s)$ 求得函数 $f(t)$ 的初值 $f(0)$ 和终值 $f(\infty)$ 。为了得到这些定理, 从式(15.23)的微分性质出发, 即:

$$sF(s) - f(0) = L\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \quad (15.41)$$

如果令 $s \rightarrow \infty$, 由于指数衰减因子变为 0, 式(15.41)变为:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = 0$$

因为 $f(0)$ 独立于 s , 由此可得:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (15.42)$$

式(15.42)称为初值定理。例如, 由式(15.21a)可知:

$$f(t) = e^{-2t} \cos 10t \Leftrightarrow F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 10^2} \quad (15.43)$$

使用初值定理, 则有:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 4s + 104} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/s}{1 + 4/s + 104/s^2} = 1$$

这恰好是从 $f(t)$ 中获得的初值。

在式(15.41)中, 令 $s \rightarrow 0$; 则有:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{0t} dt = \int_{0^-}^{\infty} df = f(\infty) - f(0^-)$$

即

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (15.44)$$

式(15.44)称为终值定理。为了使终值定理成立, $F(s)$ 的所有极点必须在 s 平面的左半平面(见图 15-1 和图 15-9), 即极点必须有负实部。唯一例外是 $F(s)$ 在 $s=0$ 时有单极点, 此时式(15.44)中的 $sF(s)$ 将会抵消 $1/s$ 的影响。例如, 由式(15.21b)可知:

$$f(t) = e^{-2t} \sin 5tu(t) \Leftrightarrow F(s) = \frac{5}{(s+2)^2 + 5^2} \quad (15.45)$$

应用终值定理, 有:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s}{s^2 + 4s + 25} = 0$$

与由 $f(t)$ 求得的终值一样。另一个例子:

$$f(t) = \sin tu(t) \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (15.46)$$

故有:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

这是不正确的, 因为当 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t) = \sin t$ 在 $+1$ 和 -1 之间摆动, 没有极限。因此, 终值定理不能用来求 $f(t) = \sin t$ 的终值, 这是因为 $F(s)$ 的极点为 $s = \pm j$, 并非在 s 平面的左半平面。终值定理通常不用于求正弦函数的终值——这些函数永远振荡没有终值。

初值和终值定理描述了在时域和 s 域的原点和无穷远点的关系，可用于拉普拉斯变换的验证。

表 15-1 总结了拉普拉斯变换的性质。最后一个性质(卷积性质)将在 15.5 节证明。还有一些其他性质，但就目前的需求而言，这些性质已经足够用了。表 15-2 总结了一些常用函数的拉普拉斯变换，除必需之外外，均略去了因子 $u(t)$ 。

表 15-1 拉普拉斯变换的性质

性质	$f(t)$	$F(s)$
线性性质	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
尺度变换性质	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
时域平移性质	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
频域平移性质	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
时域微分性质	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - \dots - f'''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - sf'(0^-) - \dots - f^{n-1}(0^-)$
时域积分性质	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{1}{s} F(s)$
频域微分性质	$t f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
频域积分性质	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$
时域周期性质	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$
初值定理	$f(0)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
终值定理	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
卷积性质	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

表 15-2 拉普拉斯变换对^①

	$f(s)$	$F(s)$
$\delta(t)$		1
$u(t)$		$\frac{1}{s}$
e^{-at}		$\frac{1}{s+a}$
t		$\frac{1}{s^2}$
t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t e^{-at}$		$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$		$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$		$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)$		$\frac{s \cos \theta + \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$		$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

① $t \geq 0$ ； $t < 0$ 时， $f(t) = 0$ 。

Mathcad、MATLAB、Maple 和 Mathematica 等软件可提供变换的数学符号。例如，Mathcad 包含拉普拉斯变换、傅里叶变换和 Z 变换及其反函数的数学符号。

例 15-3 求函数 $f(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：由线性性质可知：

$$F(s) = L[\delta(t)] + 2L[u(t)] - 3L[e^{-2t}u(t)] = 1 + 2 \frac{1}{s} - 3 \frac{1}{s+2} = \frac{s^2 + s + 4}{s(s+2)}$$

练习 15-3 求 $f(t) = (\cos(2t) + e^{-4t})u(t)$ 的拉普拉斯变换。

答案： $\frac{2s^2 + 4s + 4}{(s+4)(s^2 + 4)}$

例 15-4 求 $f(t) = t^2 \sin 2tu(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：已知：

$$L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

使用式(15.34)的频域微分性质，可得：

$$F(s) = L[t^2 \sin 2t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{s^2 + 4} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{-4s}{(s^2 + 4)^2} \right) = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}$$

练习 15-4 求 $f(t) = t^2 \cos 3tu(t)$ 的拉普拉斯变换。

答案： $\frac{2s(s^2 - 27)}{(s^2 + 9)^3}$

例 15-5 求图 15-5 所示门函数的拉普拉斯变换。

解：图 15-5 所示的门函数表达式为：

$$g(t) = 10[u(t-2) - u(t-3)]$$

$u(t)$ 的拉普拉斯变换已知，运用时移性可得：

$$G(s) = 10\left(\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right) = \frac{10}{s}(e^{-2s} - e^{-3s})$$

练习 15-5 求图 15-6 所示函数 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

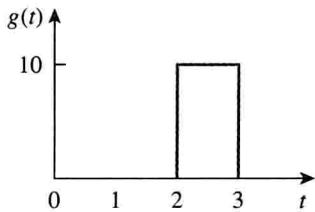


图 15-5 例 15-5 的门函数

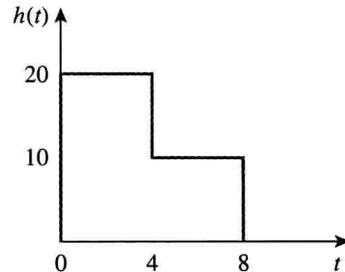


图 15-6 练习 15-5 图

$$\text{答案: } \frac{10}{s}(2 - e^{-4s} - e^{-8s})$$

例 15-6 计算图 15-7 所示的周期函数的拉普拉斯变换。

解：函数的周期为 $T=2$ ，为了应用式(15.40)，先求函数第一周期的变换。

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 2t[u(t) - u(t-1)] = 2tu(t) - 2tu(t-1) \\ &= 2tu(t) - 2(t-1+1)u(t-1) = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) - 2u(t-1) \end{aligned}$$

使用时域平移性质，可得：

$$F_1(s) = \frac{2}{s^2} - 2 \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2}{s} e^{-s} = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-s} - se^{-s})$$

因此，图 15-7 的周期函数的变换为：

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} = \frac{2}{s^2(1 - e^{-2s})}(1 - e^{-s} - se^{-s})$$

练习 15-6 求图 15-8 所示周期函数的拉普拉斯变换。

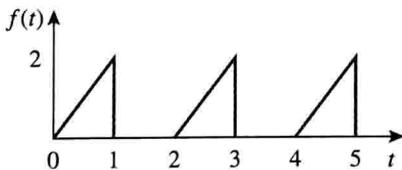


图 15-7 例 15-6 图



图 15-8 练习 15-6 图

$$\text{答案: } \frac{1 - e^{-2s}}{s(1 - e^{-5s})}$$

例 15-7 已知函数的拉普拉斯变换为 $H(s)$ ，求其初值和终值：

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

解：由初值定理可得：

$$\begin{aligned} h(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{20s}{(s+3)(s^2+8s+25)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{20/s^2}{(1+3/s)(1+8/s+25/s^2)} = \frac{0}{(1+0)(1+0+0)} = 0 \end{aligned}$$

为了确保终值定理可用，应检查 $H(s)$ 的极点位置。 $H(s)$ 的极点是 $s = -3, -4, \pm j3$ ，它们都有负实部，位于 s 平面的左半平面（见图 15-9）。因此，终值定理适用，并且：

$$\begin{aligned} h(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20s}{(s+3)(s^2+8s+25)} \\ &= \frac{0}{(0+3)(0+0+25)} = 0 \end{aligned}$$

如果已知 $h(t)$ ，则初值和终值都可以由 $h(t)$ 确定，参见例 15-11，其中 $h(t)$ 是给定函数。◀

 **练习 15-7** 已知 $G(s) = \frac{6s^3 + 2s + 5}{s(s+2)^2(s+3)}$ ，求其初值和终值。

答案：6, 0.4167

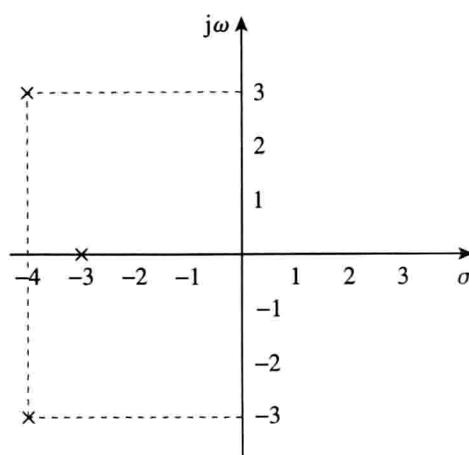


图 15-9 例 15-7 中 $H(s)$ 的极点分布图

15.4 拉普拉斯反变换

给定 $F(s)$ ，怎样把它变换回时域，得到相应的 $f(t)$ 呢？通过查找表 15-2 的相应条目，可以避免用式(15.5)来求 $f(t)$ 。

假设 $F(s)$ 的一般形式为：

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (15.47)$$

式中， $N(s)$ 是分子多项式， $D(s)$ 是分母多项式。 $N(s)=0$ 的根称为 $F(s)$ 的零点(zero)， $D(s)=0$ 的根称为 $F(s)$ 的极点(pole)。尽管式(15.47)的形式与式(14.3)很相似，但 $F(s)$ 是函数的拉普拉斯变换，未必是一个传输函数。用部分分式法将 $F(s)$ 分解成简单项之和，这些简单项的反变换可以从表 15-2 查到。因此，求 $F(s)$ 的反变换分成两步。

求解拉普拉斯反变换的步骤：

1. 用部分分式展开法将 $F(s)$ 分解成简单项之和。
2. 查表 15-2 求得每一展开项的反变换。

下面考虑 $F(s)$ 的三种可能形式，分析对于每一种形式的 $F(s)$ 如何运用两步法求拉普拉斯反变换。

提示：利用 MATLAB、Mathcad、Maple 可以非常容易地进行部分分式分解。

15.4.1 单极点

回顾第 14 章中单极点是一阶极点的情况。如果 $F(s)$ 只有一阶极点，那么 $D(s)$ 变成一阶因子的乘积，得到：

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (15.48)$$

提示：否则，必须先用长除法，求得 $F(s) = N(s)/D(s) = Q(s) + R(s)/D(s)$ ，其中，长除法的余式 $R(s)$ 的幂次小于 $D(s)$ 的幂次。

式中 $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$ 是单极点，且对于任何 $i \neq j$ 有 $p_i \neq p_j$ （极点不同）。假设 $N(s)$ 的阶数小于 $D(s)$ 的阶数，用式(15.48)的部分分式法分解 $F(s)$ ，则有：

$$F(s) = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+p_n} \quad (15.49)$$

展开系数 k_1, k_2, \dots, k_n 称为 $F(s)$ 的留数(residue)。有很多种方法可以求出展开系数，方法之一便是留数法。式(15.49)两边同乘以 $(s+p_1)$ ，得：

$$(s+p_1)F(s) = k_1 + \frac{(s+p_1)k_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{(s+p_1)k_n}{s+p_n} \quad (15.50)$$

因为 $p_i \neq p_j$ ，在式(15.50)中，令 $s = -p_1$ ，式(15.50)的右边仅剩 k_1 。因此，

$$(s+p_1)F(s)|_{s=-p_1} = k_1 \quad (15.51)$$

所以，一般表达式为：

$$k_i = (s+p_i)F(s)|_{s=-p_i} \quad (15.52)$$

式(15.52)称为海维西特定理。一旦 k_i 已知，用式(15.49)即可得到 $F(s)$ 的反变换。因为式(15.49)中每一项的反变换为 $L^{-1}[k/(s+a)] = ke^{-at}u(t)$ ，从表 15-2 可得，

$$f(t) = (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \cdots + k_n e^{-p_n t})u(t) \quad (15.53)$$

提示：奥利弗·海维西特(Oliver Heaviside, 1850—1925)，英国工程师，运算微积分的先驱。

15.4.2 多重极点

假设 $F(s)$ 在 $s = -p$ 处有 n 重极点。则可以把 $F(s)$ 表示为：

$$F(s) = \frac{k_n}{(s+p)^n} + \frac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_2}{(s+p)^2} + \frac{k_1}{s+p} + F_1(s) \quad (15.54)$$

其中， $F_1(s)$ 是 $F(s)$ 在 $s = -p$ 处没有极点的部分。按前述方法，可求得展开系数 k_n 为：

$$k_n = (s+p)^n F(s)|_{s=-p} \quad (15.55)$$

为了确定 k_{n-1} ，将式(15.54)的每一项乘以 $(s+p)^n$ 并对其微分以除去 k_n ，然后令 $s = -p$ 除去除 k_{n-1} 以外的其他系数，得到：

$$k_{n-1} = \frac{d}{ds} [(s+p)^n F(s)]|_{s=-p} \quad (15.56)$$

重复上述步骤可得：

$$k_{n-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s+p)^n F(s)]|_{s=-p} \quad (15.57)$$

第 m 项变为：

$$k_{n-m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{ds^m} [(s+p)^n F(s)]|_{s=-p} \quad (15.58)$$

其中 $m=1, 2, \dots, n-1$ 。随着 m 的增加，微分变得难以处理。用部分分式法获得 k_1, k_2, \dots, k_n 后，用反变换式：

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^n}\right] = \frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t) \quad (15.59)$$

求(15.54)右边的每一项的反变换，得到：

$$f(t) = (k_1 e^{-pt} + k_2 t e^{-pt} + \frac{k_3}{2!} t^2 e^{-pt} + \cdots + \frac{k_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-pt})u(t) + f_1(t) \quad (15.60)$$

15.4.3 复极点

不重复的一对复极点称为简单复极点，重复的复极点称为双重或多重复极点。简单复极点可以和简单的实极点一样处理，但是因为涉及复数，运算比较麻烦。一种简单的方法是完全平方法(completing the square)，其思想是把 $D(s)$ 的每对复极点(二次项)表示为形如 $((s+\alpha)^2 + \beta^2)$ 的完全平方，然后用表 15-2 求出该项的反变换。

由于 $N(s)$ 和 $D(s)$ 具有实系数，故其复根一定是共轭成对出现的，所以 $F(s)$ 的一般形式为：

$$F(s) = \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + as + b} + F_1(s) \quad (15.61)$$

式中, $F_1(s)$ 是 $F(s)$ 中不含有共轭极点对的部分。为了构造完全平方, 令

$$s^2 + as + b = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = (s + \alpha)^2 + \beta^2 \quad (15.62)$$

同时令:

$$A_1 s + A_2 = A_1(s + \alpha) + B_1 \beta \quad (15.63)$$

则式(15.61)变为:

$$F(s) = \frac{A_1(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B_1 \beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + F_1(s) \quad (15.64)$$

从表 15-2 可知, 反变换为:

$$\boxed{f(t) = (A_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + B_1 e^{-\alpha t} \sin \beta t) u(t) + f_1(t)} \quad (15.65)$$

正弦和余弦项可以根据式(9.11)组合。

无论是单极点、多重极点还是复极点, 计算展开系数的一般方法是代数方法, 正像例 15-9 和 15-11 所示的一样。为了应用这种方法, 首先令 $F(s) = N(s)/D(s)$ 等于一个含有未知常数的展开式, 再用公共分母遍乘以展开式, 然后令其系数相等, 即可确定未知常数(即通过代数方法求解一组由比较 s 的同次幂系数所得的联立方程)。

另一种一般方法是代入特定的、方便计算的 s 值, 得到方程个数与未知系数个数相同的联立方程, 然后确定这些未知系数。应用此法时, 必须确保所选择的每一个 s 值不是 $F(s)$ 的极点。例 15-11 说明了这种方法。

例 15-8 求 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换:

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4}$$

解: 反变换为:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{6}{s^2+4}\right) = (3 - 5e^{-t} + 3\sin 2t)u(t), t \geq 0$$

每一项的反变换可以查表 15-2 得到。

练习 15-8 求 $F(s)$ 的拉普拉斯反变换:

$$F(s) = 5 + \frac{6}{s+4} - \frac{7s}{s^2+25}$$

$$\text{答案: } 5\delta(t) + (6e^{-4t} - 7\cos(5t))u(t)$$

例 15-9 已知 $F(S)$, 求 $f(t)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)}$$

解: 前面的例题中已经给出部分分式。对于本题, 首先要求出部分分式展开式。因为它有 3 个极点, 令:

$$\frac{s^2 + 12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \quad (15.9.1)$$

其中 A 、 B 和 C 是待定常数。可用两种方法确定这些待定常数。

方法 1 留数法

$$A = sF(s)|_{s=0} = \frac{s^2 + 12}{(s+2)(s+3)}|_{s=0} = \frac{12}{2 \times 3} = 2$$

$$B = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{s^2 + 12}{s(s+3)}|_{s=-2} = \frac{4 + 12}{-2 \times 1} = -8$$

$$C = (s+3)F(s)|_{s=-3} = \frac{s^2 + 12}{s(s+2)}|_{s=-3} = \frac{9 + 12}{-3 \times (-1)} = 7$$

方法 2 代数法 式(15.9.1)两边同乘以 $s(s+2)(s+3)$ 得:

$$s^2 + 12 = A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2)$$

或

$$s^2 + 12 = A(s^2 + 5s + 6) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + 2s)$$

令 s 的同次幂的系数相等, 得:

$$\begin{array}{lll} \text{常数} & 12 = 6A & \Rightarrow A = 2 \\ s^0 & 0 = 5A + 3B + 2C & \Rightarrow 3B + 2C = -10 \\ s^2 & 1 = A + B + C & \Rightarrow B + C = -1 \end{array}$$

因此, $A=2$, $B=-8$, $C=7$, 式(15.9.1)变为:

$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

求出每一项的反变换, 得到:

$$f(t) = (2 - 8e^{-2t} + 7e^{-3t})u(t)$$

练习 15-9 已知 $F(s)$, 求 $f(t)$:

$$F(s) = \frac{6(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$\text{答案: } f(t) = (e^{-t} + 3e^{-3t} - 4e^{-4t})u(t)$$

例 15-10 已知 $V(s)$, 求 $v(t)$:

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$$

解: 前面的例题中, 函数具有单根, 本例中, 函数 $V(s)$ 有重根。令:

$$V(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2} \quad (15.10.1)$$

方法 1 留数法

$$A = sV(s)|_{s=0} = \frac{10s^2 + 4}{(s+1)(s+2)^2}|_{s=0} = \frac{4}{1 \times 2^2} = 1$$

$$B = (s+1)V(s)|_{s=-1} = \frac{10s^2 + 4}{s(s+2)^2}|_{s=-1} = \frac{14}{(-1) \times 1^2} = -14$$

$$C = (s+2)^2 V(s)|_{s=-2} = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)}|_{s=-2} = \frac{44}{(-2) \times (-1)} = 22$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{ds}[(s+2)^2 V(s)]|_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{10s^2 + 4}{s^2 + s}\right)|_{s=-2} \\ &= \frac{(s^2 + s)(20s) - (10s^2 + 4)(2s+1)}{(s^2 + s)^2}|_{s=-2} = \frac{52}{4} = 13 \end{aligned}$$

方法 2 代数法 式(15.10.1)两边同乘以 $s(s+1)(s+2)^2$, 得:

$$10s^2 + 4 = A(s+1)(s+2)^2 + Bs(s+2)^2 + Cs(s+1) + Ds(s+1)(s+2)$$

或

$$10s^2 + 4 = A(s^3 + 5s^2 + 8s + 4) + B(s^3 + 4s^2 + 4s) + C(s^2 + s) + D(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

令 s 的同次幂系数相等, 得:

$$\begin{array}{lll} \text{常数} & 4 = 4A & \Rightarrow A = 1 \\ s^0 & 0 = 8A + 4B + C + 2D & \Rightarrow 4B + C + 2D = -8 \\ s^2 & 10 = 5A + 4B + C + 3D & \Rightarrow 4B + C + 3D = 5 \\ s^3 & 0 = A + B + D & \Rightarrow B + D = -1 \end{array}$$

解联立方程得, $A=1$, $B=-14$, $C=22$, $D=13$, 所以:

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{14}{s+1} + \frac{13}{s+2} + \frac{22}{(s+2)^2}$$

求各项的反变换，得：

$$v(t) = (1 - 14e^{-t} + 13e^{-2t} + 22te^{-2t})u(t)$$

练习 15-10 已知 $G(s)$, 求 $g(t)$:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 6}{s(s+1)^2(s+3)}$$

$$\text{答案: } (2 - 3.25e^{-t} - 1.5te^{-t} + 2.25e^{-3t})u(t)$$

例 15-11 求例 15-7 频域函数的反变换：

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

解：本例中， $H(s)$ 在 $s^2+8s+25=0$ 处有一对复极点 $s=-4\pm j3$ 。令：

$$H(s) = \frac{20}{(s+3)(s^2+8s+25)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+8s+25} \quad (15.11.1)$$

现在用两种方法确定展开系数。

方法 1 组合法 使用留数法求得 A ：

$$A = (s+3)H(s)|_{s=-3} = \frac{20}{s^2+8s+25}|_{s=-3} = \frac{20}{10} = 2$$

尽管 B 和 C 也可以使用留数法求解，但是为了避免复数运算，此处不用此法，而是将 s 的两个特定值代入式(15.11.1)（如 $s=0, 1$ ，它们不是 $F(s)$ 的极点），这将产生两个求解 B 和 C 的联立方程。如果在式(15.11.1)中令 $s=0$ ，有：

$$\frac{20}{75} = \frac{A}{3} + \frac{C}{25}$$

即

$$20 = 25A + 3C \quad (15.11.2)$$

因为 $A=2$ ，由式(15.11.2)求出 $C=-10$ 。将 $s=1$ 带入式(15.11.1)，得：

$$\frac{20}{4 \times 34} = \frac{A}{4} + \frac{B+C}{34}$$

即

$$20 = 34A + 4B + 4C \quad (15.11.3)$$

因为 $A=2$, $C=-10$ ，因此，由式(15.11.3)得 $B=-2$ 。

方法 2 代数法 式(15.11.1)两边同乘以 $(s+3)(s^2+8s+25)$ ，得：

$$20 = A(s^2 + 8s + 25) + (Bs + C)(s + 3) = A(s^2 + 8s + 25) + B(s^2 + 3s) + C(s + 3) \quad (15.11.4)$$

令 s 的同次幂的系数相等，得：

$$s^2: \quad 0 = A + B \Rightarrow A = -B$$

$$s: \quad 0 = 8A + 3B + C = 5A + C \Rightarrow C = -5A$$

$$\text{常数: } 20 = 25A + 3C = 25A - 15A \Rightarrow A = 2$$

即 $B=-2$, $C=-10$ 。因此：

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2}{s+3} - \frac{2s+10}{s^2+8s+25} = \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)+2}{(s+4)^2+9} \\ &= \frac{2}{s+3} - \frac{2(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{2}{3} \frac{3}{(s+4)^2+9} \end{aligned}$$

求出每一项的反变换，得到：

$$h(t) = (2e^{-3t} - 2e^{-4t}\cos 3t - \frac{2}{3}e^{-4t}\sin 3t)u(t) \quad (15.11.5)$$

式(15.11.5)可以作为最终结果, 但也可把余弦项和正弦项合并, 得到:

$$h(t) = (2e^{-3t} - Re^{-4t}\cos(3t - \theta))u(t) \quad (15.11.6)$$

为从式(15.11.5)得到式(15.11.6), 需运用式(9.11)。下一步, 确定系数 R 和相位角 θ :

$$R = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 2.108, \quad \theta = \arctan \frac{\frac{2}{3}}{2} = 18.43^\circ$$

因此:

$$h(t) = (2e^{-3t} - 2.108e^{-4t}\cos(3t - 18.43^\circ))u(t)$$

 练习 15-11 已知 $G(s)$, 求 $g(t)$:

$$G(s) = \frac{60}{(s+1)(s^2+4s+13)}$$

$$\text{答案: } 6e^{-t} - 6e^{-2t}\cos 3t - 2e^{-2t}\sin 3t, t \geq 0$$

15.5 卷积积分

卷积(convolution)的意思就是“折叠”。卷积对于工程师来说是一个非常重要的工具, 它提供了观察和描述物理系统的方法。比如, 已知系统的冲激响应 $h(t)$, 求解系统对于激励 $x(t)$ 的响应 $y(t)$, 可通过卷积积分实现, 系统的响应为:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (15.66)$$

或简写成:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (15.67)$$

式中, λ 是一个虚拟变量, 星号表示卷积。式(15.66)和(15.67)表明输出等于输入与单位冲激响应的卷积。卷积过程是可以交换的:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (15.68a)$$

即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \quad (15.68b)$$

这表明两个函数卷积的顺序是不重要的。后面将介绍如何利用卷积积分的可交换性质来完成它的图解计算。

两个信号的卷积过程: 将其中一个信号按时间反转、平移, 并与第二个信号逐点相乘, 然后对其结果求积分。

式(15.66)的卷积积分是一种一般形式, 它适合于任何线性系统。但是, 如果系统有如下两个性质, 那么卷积积分可以简化。首先, 如果当 $t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 那么:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (15.69)$$

其次, 如果系统的冲激响应是因果的(即当 $t < 0$ 时, $h(t) = 0$), 那么对于 $t - \lambda < 0 (\lambda > t)$ 有 $h(t-\lambda) = 0$, 所以, 式(15.69)变为:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda \quad (15.70)$$

下面是卷积积分的一些性质。

1. $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ (可交换性)
2. $f(t) * [x(t) + y(t)] = f(t) * x(t) + f(t) * y(t)$ (分配性)
3. $f(t) * [x(t) * y(t)] = [f(t) * x(t)] * y(t)$ (结合性)
4. $f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = f(t)$

$$5. f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

$$6. f(t) * \delta'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta'(t-\lambda) d\lambda = f'(t)$$

$$7. f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$$

在学习如何计算式(15.70)的卷积积分之前，首先建立拉普拉斯变换和卷积积分之间的联系。给定两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 及其相应的拉普拉斯变换 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ ，它们的卷积是：

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \quad (15.71)$$

两边取拉普拉斯变换，得：

$$F(s) = L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (15.72)$$

为了证明式(15.72)的正确性，从 $F_1(s)$ 的定义出发：

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \quad (15.73)$$

两边同乘以 $F_2(s)$ ，得：

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) [F_2(s)e^{-s\lambda}] d\lambda \quad (15.74)$$

考虑式(15.17)的时移性质，括号里的项可以写为：

$$F_2(s)e^{-s\lambda} = L[f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)] = \int_0^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st} dt \quad (15.75)$$

将式(15.75)代入式(15.74)，有：

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_0^{\infty} f_2(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st} dt \right] d\lambda \quad (15.76)$$

交换积分的次序，得：

$$F_1(s)F_2(s) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt \quad (15.77)$$

括号内的积分仅从 0 到 t ，因为延迟的单位阶跃信号 $u(t-\lambda)$ 在 $\lambda < t$ 时为 1，在 $\lambda > t$ 时为 0。注意，积分就是式(15.71)中的 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积。因此：

$$F_1(s)F_2(s) = L[f_1(t) * f_2(t)] \quad (15.78)$$

此即期望的结果。这表明时域的卷积等同于 s 域的相乘。比如，如果 $x(t) = 4e^{-t}$ ， $h(t) = 5e^{-2t}$ ，由式(15.78)可得：

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) &= L^{-1}[H(s)X(s)] = L^{-1}\left[\left(\frac{5}{s+2}\right)\left(\frac{4}{s+1}\right)\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{20}{s+1} + \frac{-20}{s+2}\right] = 20(e^{-t} - e^{-2t}), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (15.79)$$

尽管由式(15.78)可以获得两个信号的卷积，就像刚才做的那样，但如果 $F_1(s)F_2(s)$ 非常复杂，求出它的反变换也是很困难的。并且， $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 可能是实验数据，没有明确的拉普拉斯变换。在这种情况下，必须在时域做卷积。

在时域中，可以从图形角度更好地理解两个信号的卷积过程。用图解法计算式(15.70)的卷积积分包含四个步骤。

计算卷积积分的步骤：

1. 折叠：取 $h(\lambda)$ 关于纵坐标的镜像，得到 $h(-\lambda)$ 。
2. 移位：将 $h(-\lambda)$ 移动或延迟 t ，得到 $h(t-\lambda)$ 。
3. 相乘：求出 $h(t-\lambda)$ 和 $x(\lambda)$ 的乘积。
4. 积分：对于给定的时间 t ，计算乘积 $h(t-\lambda)x(\lambda)$ 在区间 $0 < \lambda < t$ 的面积，得到 $y(t)$ 。

第一步的折叠运算是术语卷积的来源，函数 $h(t-\lambda)$ 扫描或掠过 $x(\lambda)$ 。由于这一叠加过程，卷积积分也叫做叠加积分。

为了应用这四步，需要画出 $x(\lambda)$ 和 $h(t-\lambda)$ 的草图。从原始函数 $x(t)$ 获得 $x(\lambda)$ 只需要将 t 用 λ 替换。画出 $h(t-\lambda)$ 的草图是卷积过程的关键，它涉及将 $h(\lambda)$ 关于纵坐标反折并且移动 t ，即将 $h(t)$ 中的每一个 t 用 $(t-\lambda)$ 替换获得 $h(t-\lambda)$ 。由于卷积是可以交换的，对 $x(t)$ 使用步骤 1 和 2 可能更方便。下面通过例题说明这些步骤。

例 15-12 求图 15-10 所示两个信号的卷积。

解：按照计算卷积积分的四个步骤计算 $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$ 。首先折叠 $x_1(t)$ 如图 15-11a 所示，然后平移 t ，如图 15-11b 所示。对于不同的 t 值，将两个函数相乘，然后积分确定重叠区域的面积。

$0 < t < 1$ 时，如图 15-12(a) 所示，两个函数没有交叠。因此：

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (15.12.1)$$

$1 < t < 2$ 时，如图 15-12(b) 所示，两个信号在 $1 \sim t$ 之间交叠。

$$y(t) = \int_1^t 2 \times 1 d\lambda = 2\lambda \Big|_1^t = 2(t-1)$$

$$1 < t < 2 \quad (15.12.2)$$

$2 < t < 3$ 时，两个信号在 $(t-1) \sim t$ 之间完全交叠，如图 15-12c 所示。容易看出曲线内的面积为 2。即：

$$y(t) = \int_{t-1}^t 2 \times 1 d\lambda = 2\lambda \Big|_{t-1}^t = 2, \quad 2 < t < 3 \quad (15.12.3)$$

$3 < t < 4$ 时，两个信号在 $(t-1) \sim 3$ 之间有交叠，如图 15-12d 所示。

$$y(t) = \int_{t-1}^3 2 \times 1 d\lambda = 2\lambda \Big|_{t-1}^3 = 2(3-t+1) = 8-2t, \quad 3 < t < 4 \quad (15.12.4)$$

$t > 4$ 时，两个信号没有交叠，见图 15-12e，并且：

$$y(t) = 0, \quad t > 4 \quad (15.12.5)$$

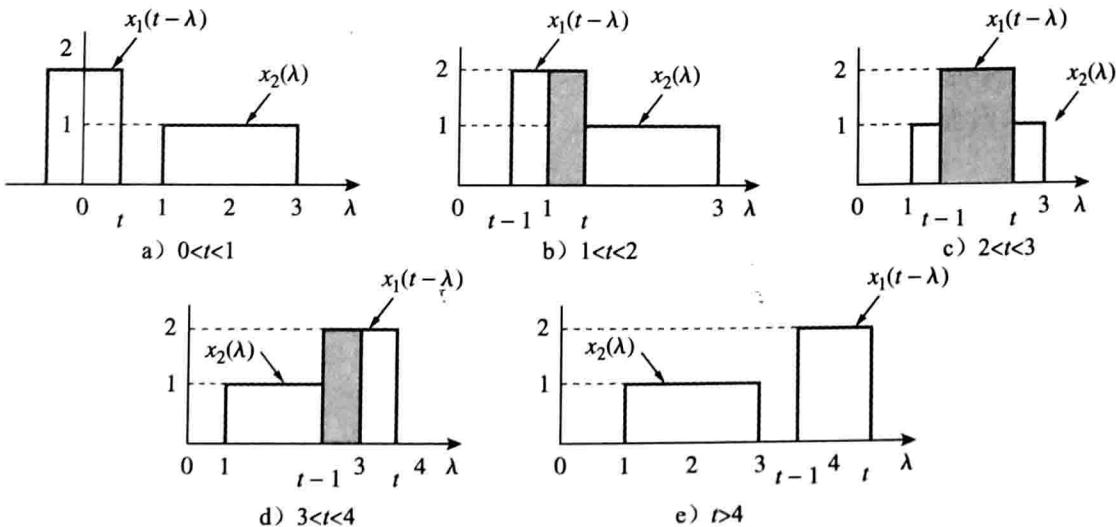


图 15-12 $x_1(t-\lambda)$ 和 $x_2(\lambda)$ 的交叠区

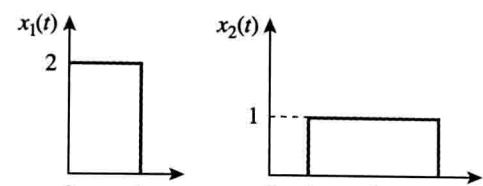


图 15-10 例 15-12 图

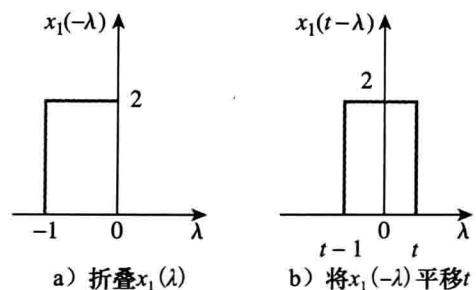


图 15-11

结合式(15.12.1)~式(15.12.5), 得:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ 2t - 2, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 3 \\ 8 - 2t, & 3 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases} \quad (15.12.6)$$

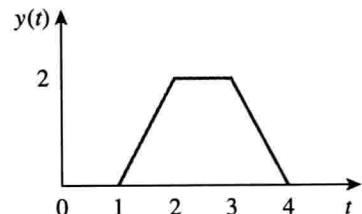


图 15-13 图 15-10 中信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的卷积

图 15-13 是式(15.12.6)的草图, 注意, 式中 $y(t)$ 是连续的, 这可以用于检验当 t 从一个区域

向另一区域移动时的结果。可以不用图解法计算式(15.12.6)表示的结果, 而直接使用式(15.70)和阶跃函数的性质计算卷积积分。这将在例 15-14 中予以说明。

 **练习 15-12** 用图解法计算图 15-14 所示两个函数的卷积。为了显示 s 域方法的高效性, 可在 s 域计算该卷积积分以验证你的答案。

答案: 卷积 $y(t)$ 的结果如图 15-15 所示, 其中:

$$y(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 6 - 2t, & 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

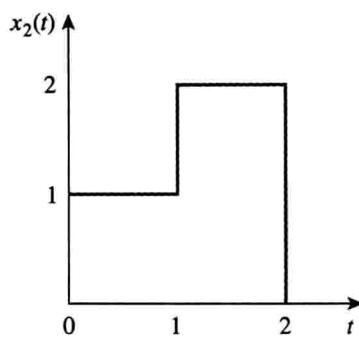
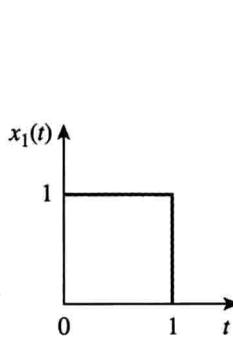


图 15-14 练习 15-12 图

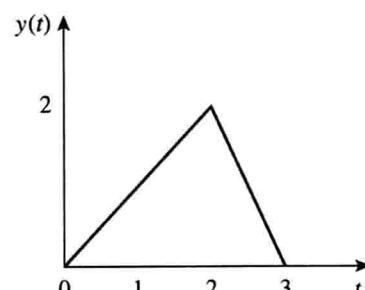


图 15-15 图 15-14 所示信号的卷积

例 15-13 用图解法计算图 15-16 所示 $g(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积。

解: 令 $y(t) = g(t) * u(t)$, 以两种方法求 $y(t)$ 。

方法 1 假设折叠 $g(t)$, 如图 15-17a 所示, 然后将折叠后的 $g(t)$ 平移 t , 如图 15-17b 所示。因为当 $0 < t < 1$ 时, $g(t) = t$, 故当 $0 < t - \lambda < 1$ 或 $t - 1 < \lambda < t$ 时, $g(t - \lambda) = t - \lambda$ 。当 $t < 0$ 时, 两个函数没有交叠, 因此 $y(0) = 0$ 。

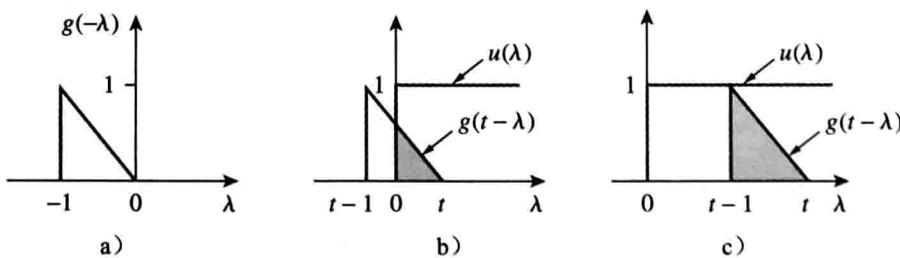


图 15-17 图 15-16 所示信号 $g(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积, 折叠 $g(t)$

当 $0 < t < 1$ 时, $g(t - \lambda)$ 和 $u(\lambda)$ 在 $0 \sim t$ 之间交叠, 如图 15-17b 所示。因此:

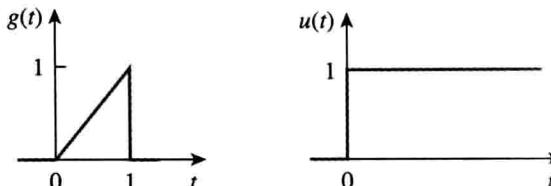


图 15-16 例 15-13 图

$$y(t) = \int_0^t 1 \times (t-\lambda) d\lambda = \left(t\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 \right) \Big|_0^t = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}, 0 \leq t \leq 1 \quad (15.13.1)$$

当 $t > 1$ 时, 两个函数在 $(t-1) \sim t$ 之间完全交叠, 如图 15-17c 所示。因此:

$$y(t) = \int_{t-1}^t 1 \times (t-\lambda) d\lambda = \left(t\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 \right) \Big|_{t-1}^t = \frac{1}{2}, \quad t \geq 1 \quad (15.13.2)$$

因此, 结合式(15.13.1)和式(15.13.2)得:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

方法2 假设不折叠 $g(t)$, 而折叠单位阶跃函数 $u(t)$, 如图 15-18a 所示, 然后将折叠后的 $u(t)$ 平移 t , 如图 15-18b 所示。因为 $t > 0$ 时, $u(t) = 1$, $t - \lambda > 0$ 或 $\lambda < t$ 时, $u(t-\lambda) = 1$, 所以两个函数在 $0 \sim t$ 内交叠, 因此:

$$y(t) = \int_0^t 1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (15.13.3)$$

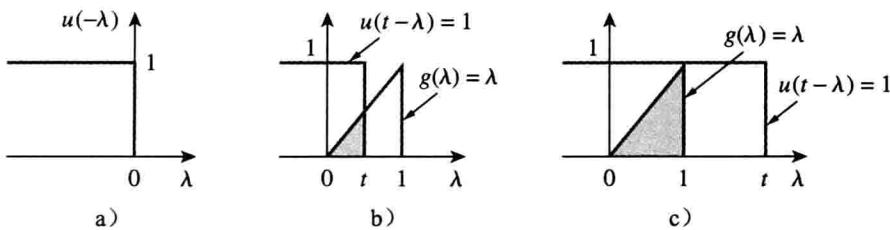


图 15-18 图 15-16 所示信号 $g(t)$ 和 $u(t)$ 的卷积, 折叠 $u(t)$

当 $t > 1$ 时, 这两个函数在 $0 \sim 1$ 之间交叠, 如图 15-18c 所示。因此:

$$y(t) = \int_0^1 1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}, \quad t \geq 1 \quad (15.13.4)$$

由式(15.13.3)和式(15.13.4)得:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

尽管两种方法得到的结果相同, 但本例中折叠单位阶跃函数 $u(t)$ 比折叠 $g(t)$ 更简单。图 15-19 给出了 $y(t)$ 的图形。

练习 15-13 对于图 15-20 所示的 $g(t)$ 和 $f(t)$ 波形, 用图解法求 $y(t) = g(t) * f(t)$ 。

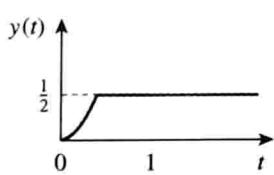


图 15-19 例 15-13 的结果

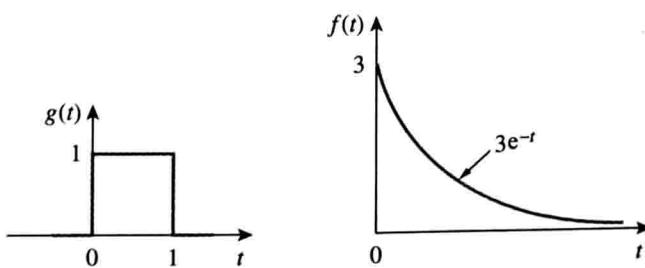


图 15-20 练习 15-13 图

$$\text{答案: } y(t) = \begin{cases} 3(1-e^{-t}), & 0 \leq t \leq 1 \\ 3(e-1)e^{-t}, & t \geq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例 15-14 对于图 15-21a 所示 RL 电路，使用卷积积分求出图 15-21b 所示的激励产生的响应 $i_o(t)$ 。

解：

1. 明确问题。问题描述清晰，求解方法也已详细说明。

2. 列出已知条件。使用卷积积分来求解图 15-21b 中的 $i_s(t)$ 产生的响应 $i_o(t)$ 。

3. 确定备选方案。已经学习过用卷积积分计算卷积和用图解法计算卷积积分。此外，也可以用 s 域方法求解电流 $i_o(t)$ 。对于本例，使用卷积积分来求解电流 $i_o(t)$ ，然后使用图解法进行验证。

4. 尝试求解。如上所述，这个问题可以用两种方法解决：直接使用卷积积分或者使用图解法。无论使用哪种方法，首先要知道电路的单位冲激响应 $h(t)$ 。在 s 域，对图 15-22a 所示电路应用分流原理，得：

$$I_o = \frac{1}{s+1} I_s$$

因此：

$$H(s) = \frac{I_o}{I_s} = \frac{1}{s+1} \quad (15.14.1)$$

其拉普拉斯反变换为：

$$h(t) = e^{-t} u(t) \quad (15.14.2)$$

图 15-22b 为电路的冲激响应 $h(t)$ 的图形。

为了直接用卷积积分，利用 s 域中的响应：

$$I_o(s) = H(s) I_s(s)$$

对于图 15-21b 给出的激励 $i_s(t)$ ，有：

$$i_s(t) = u(t) - u(t-2)$$

因此：

$$i_o(t) = h(t) * i_s(t) = \int_0^t i_s(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t [u(\lambda) - u(\lambda-2)] e^{-(t-\lambda)} d\lambda \quad (15.14.3)$$

因为当 $0 < \lambda < 2$ 时， $u(\lambda-2)=0$ ，所以与 $u(\lambda)$ 相关的积分函数对任意 $\lambda > 0$ 都是非 0 的。而涉及 $u(\lambda-2)$ 的积分函数仅当 $\lambda > 2$ 时非 0。计算积分的最好方法是两部分分开处理，当 $0 < \lambda < 2$ 时：

$$i'_o(t) = \int_0^t 1 \times e^{-(t-\lambda)} d\lambda = e^{-t} \int_0^t 1 \times e^\lambda d\lambda = e^{-t} (e^t - 1) = 1 - e^{-t}, \quad 0 < t < 2 \quad (15.14.4)$$

当 $t > 2$ 时：

$$i''_o(t) = \int_2^t 1 \times e^{-(t-\lambda)} d\lambda = e^{-t} \int_2^t e^\lambda d\lambda = e^{-t} (e^t - e^2) = 1 - e^2 e^{-t}, \quad t > 2 \quad (15.14.5)$$

将式(15.14.4)和式(15.14.5)代入(15.14.3)得：

$$\begin{aligned} i_o(t) &= i'_o(t) - i''_o(t) = (1 - e^{-t})[u(t-2) - u(t)] - (1 - e^2 e^{-t})u(t-2) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-t}A, & 0 < t < 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t}A, & t > 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (15.14.6)$$

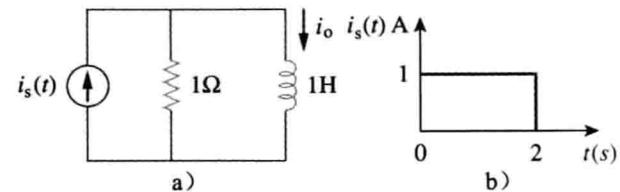


图 15-21 例 15-14 图

5. 评价结果。为了应用图解法，折叠图 15-21b 中的 $i_s(t)$ 并平移 t ，如图 15-23a 所示。当 $0 < t < 2$ 时， $i_s(t-\lambda)$ 和 $h(\lambda)$ 之间的交叠区间为 $0 \sim t$ ，因此：

$$i_o(t) = \int_0^t 1 e^{-\lambda} d\lambda = -e^{-\lambda} \Big|_0^t = (1 - e^{-t}) A, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (15.14.7)$$

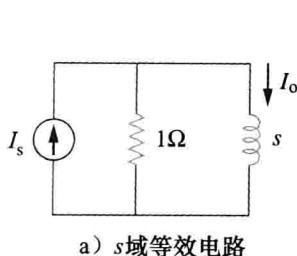
当 $t > 2$ 时，如图 15-23b 所示，两个函数从 $(t-2) \sim t$ 交叠。因此：

$$i_o(t) = \int_{t-2}^t 1 \times e^{-\lambda} d\lambda = -e^{-\lambda} \Big|_{t-2}^t = -e^{-t} + e^{-(t-2)} = (e^2 - 1)e^{-t} A, \quad t \geq 0 \quad (15.14.8)$$

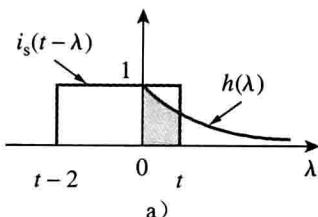
由式(15.14.7)和式(15.14.8)可知，响应为：

$$i_o = \begin{cases} (1 - e^{-t}) A, & 0 \leq t \leq 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t} A, & t \geq 2 \end{cases} \quad (15.14.9)$$

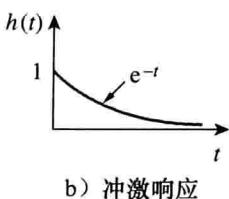
结果与式(15.14.6)相同。响应 $i_o(t)$ 和激励 $i_s(t)$ 示于图 15-24。



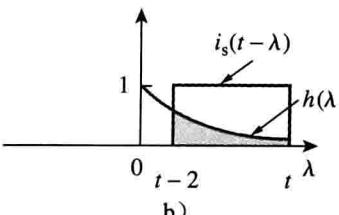
a) s 域等效电路



a)



b) 冲激响应



b)

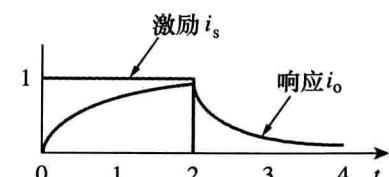


图 15-22 图 15-21a 的电路

图 15-23 例 15-14 图

图 15-24 例 15-14 的激励和响应波形

6. 是否满意？成功地解决了这个问题，可以提交解决方案。

练习 15-14 用卷积法求图 15-25a 所示电路的 $v_o(t)$ ，它的激励信号如图 15-25b 所示。为了显示 s 域方法的高效性，用 s 域方法验证结果。

答案： $20(e^{-t} - e^{-2t})u(t) V$

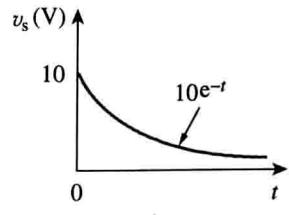
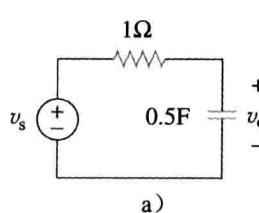


图 15-25 练习 15-14 图

† 15.6 拉普拉斯变换在微积分方程求解中的应用

拉普拉斯变换在求解线性微积分方程时是很有用的。利用拉普拉斯变换的微分和积分性质，对微积分方程的每一项做拉普拉斯变换，使时域的微积分方程变成了 s 域的代数方程，且初始条件自动包含在内。求解 s 域的代数方程，然后再通过反变换将结果转换回时域。下面的例子描述了这个过程。

例 15-15 用拉普拉斯变换求解微分方程，初始条件为 $v(0)=1$, $v'(0)=-2$:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 6 \frac{dv(t)}{dt} + 8v(t) = 2u(t)$$

解：对微分方程的两边做拉普拉斯变换，由拉氏变换的线性性质可得：

$$[s^2 V(s) - sv(0) - v'(0)] + 6[sV(s) - v(0)] + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

代入初始值 $v(0)=1$, $v'(0)=-2$, 有:

$$s^2V(s) - s + 2 + 6sV(s) - 6 + 8V(s) = \frac{2}{s}$$

即

$$(s^2 + 6s + 8)V(s) = s + 4 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s}$$

因此:

$$V(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

式中:

$$A = sV(s)|_{s=0} = \left. \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+2)(s+4)} \right|_{s=0} = \frac{2}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$B = (s+2)V(s)|_{s=-2} = \left. \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+4)} \right|_{s=-2} = \frac{-2}{-2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$C = (s+4)V(s)|_{s=-4} = \left. \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+2)} \right|_{s=-4} = \frac{2}{-4 \times (-2)} = \frac{1}{4}$$

因此:

$$V(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+4}$$

求拉普拉斯反变换, 得:

$$v(t) = \frac{1}{4}(1 + 2e^{-2t} + e^{-4t})u(t)$$

 **练习 15-15** 用拉普拉斯变换法求解微分方程, 其中 $v(0)=v'(0)=2$:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4 \frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 2e^{-t}$$

答案: $(2e^{-t} + 4te^{-2t})u(t)$

例 15-16 求解下列微积分方程的响应 $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} + 5y(t) + 6 \int_0^t y(\tau) d\tau = u(t), \quad y(0) = 2$$

解: 对微积分方程的两边做拉普拉斯变换, 由拉氏变换的线性性质可得:

$$[sY(s) - y(0)] + 5Y(s) + \frac{6}{s}Y(s) = \frac{1}{s}$$

代入 $y(0)=2$, 两边乘以 s , 得:

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = 1 + 2s$$

即

$$Y(s) = \frac{1 + 2s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

式中:

$$A = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = \left. \frac{2s+1}{s+3} \right|_{s=-2} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$B = (s+3)Y(s)|_{s=-3} = \left. \frac{2s+1}{s+2} \right|_{s=-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

因此:

$$Y(s) = \frac{-3}{s+2} + \frac{5}{s+3}$$

其反变换为：

$$y(t) = (-3e^{-2t} + 5e^{-3t})u(t)$$

练习 15-16 用拉普拉斯变换法求解微积分方程：

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = 2e^{-3t}, \quad y(0) = 0$$

答案：($-e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$) $u(t)$

15.7 本章小结

1. 拉普拉斯变换使时域函数表示的信号可在 s 域(复频域)进行分析。它的定义为：

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

2. 表 15-1 列出了拉普拉斯变换的性质，表 15-2 中列出了常用函数的拉普拉斯变换。

3. 拉普拉斯反变换可以使用部分分式展开法结合表 15-2 提供的拉普拉斯变换对，通过查表的方法求得。实极点产生指数函数，复极点产生阻尼正弦振荡。

4. 两个信号的卷积过程：将其中一个信号进行时间翻折、平移，和第二个信号逐点相乘，再将乘积积分。两个信号在时域的卷积积分等于它们的拉普拉斯变换乘积的反变换：

$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)d\lambda$$

5. 在时域中，网络输出 $y(t)$ 是其冲激响应 $h(t)$ 和输入信号 $x(t)$ 的卷积：

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

卷积可以视为翻折、移位、相乘、求面积的过程。

6. 拉普拉斯变换可以用来求解线性微积分方程。

复习题

1 任意函数 $f(t)$ 都有拉普拉斯变换。

- (a) 正确 (b) 错误

2 拉普拉斯变换 $H(s)$ 中的变量 s 称为：

- (a) 复频率 (b) 传输函数
(c) 零点 (d) 极点

3 $u(t-2)$ 的拉普拉斯变换是：

- (a) $\frac{1}{s+2}$ (b) $\frac{1}{s-2}$
(c) $\frac{e^{2s}}{s}$ (d) $\frac{e^{-2s}}{s}$

4 函数 $F(s)$ 的零点是：

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

- (a) -4 (b) -3
(c) -2 (d) -1

5 函数 $F(s)$ 的极点是：

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

- (a) -4 (b) -3
(c) -2 (d) -1

6 如果 $F(s) = \frac{1}{(s+2)}$ ，那么 $f(t)$ 为：

- (a) $e^{2t}u(t)$ (b) $e^{-2t}u(t)$

- (c) $u(t-2)$ (d) $u(t+2)$

7 $F(s) = e^{-2s}/(s+1)$ ，那么 $f(t)$ 为：

- (a) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$ (b) $e^{-(t-2)}u(t-2)$
(c) $e^{-t}u(t-2)$ (d) $e^{-t}u(t+1)$
(e) $e^{-(t-2)}u(t)$

8 已知 $F(s)$ ，求 $f(t)$ 的初值：

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

- (a) 不存在 (b) ∞
(c) 0 (d) 1 (e) $\frac{1}{6}$

9 如下函数的拉普拉斯反变换为：

$$\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1}$$

- (a) $e^{-t}\cos 2t$ (b) $e^{-t}\sin 2t$
(c) $e^{-2t}\cos t$ (d) $e^{-2t}\sin 2t$

(e) 以上都不是

10 $u(t) * u(t)$ 的结果是：

- (a) $u^2(t)$ (b) $tu(t)$
(c) $t^2u(t)$ (d) $\delta(t)$

答案：(1)b; (2)a; (3)d; (4)d; (5)a, b, c;
(6)b; (7)b; (8)d; (9)c; (10)b

习题

15.2 和 15.3 节

- 1 求下列函数的拉普拉斯变换：(a) $\cosh at$ ；
(b) $\sinh at$ 。

[提示： $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$]

- 2 求下列函数的拉普拉斯变换：(a) $\cos(\omega t + \theta)$ ；
(b) $\sin(\omega t + \theta)$ 。

- 3 求下列各函数的拉普拉斯变换：(a) $e^{-2t} \cos 3tu(t)$ ；

(b) $e^{-2t} \sin 4tu(t)$ ；(c) $e^{-3t} \cosh 2tu(t)$ ；

(d) $e^{-4t} \sinh tu(t)$ ；(e) $te^{-t} \sin 2tu(t)$ 。

- 4 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何求出不同时变函数的拉普拉斯变换。 **ED**

- 5 求下列各函数的拉普拉斯变换：

(a) $t^2 \cos(2t + 30^\circ) u(t)$ (b) $3t^4 te^{-2t} u(t)$

(c) $2tu(t) - 4 \frac{d}{dt} \delta(t)$ (d) $2e^{-(t-1)} u(t)$

(e) $5u(t/2)$

(f) $6e^{-t/3} u(t)$

(g) $\frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$

- 6 假设 $f(t) = \begin{cases} 5t, & 0 < t < 1 \\ -5t, & 1 < t < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 求 $F(s)$

- 7 求下列信号的拉普拉斯变换：(a) $f(t) = (2t+4)u(t)$ ；(b) $g(t) = (4+3e^{-2t})u(t)$ ；(c) $h(t) = (6\sin(3t)+8\cos(3t))u(t)$ ；(d) $x(t) = (e^{-2t}\cosh(4t))u(t)$ 。

- 8 求下列信号的拉普拉斯变换 $F(s)$ ：(a) $2tu(t-4)$ ；(b) $5\cos(t)\delta(t-2)$ ；(c) $e^{-t}u(t-t)$ ；
(d) $\sin(2t)u(t-\tau)$ 。

- 9 求下列信号的拉普拉斯变换：(a) $f(t) = (t-4)u(t-2)$ ；(b) $g(t) = 2e^{-4t}u(t-1)$ ；(c) $h(t) = 5\cos(2t-1)u(t)$ ；(d) $p(t) = 6[u(t-2)-u(t-4)]$ 。

- 10 用两种方法求 $g(t)$ 的拉普拉斯变换：

$$g(t) = \frac{d}{dt}(te^{-t} \cos t)$$

- 11 如果：(a) $f(t) = 6e^{-t} \cosh 2t$ ；(b) $f(t) = 3te^{-2t} \sinh 4t$ ；(c) $f(t) = 8e^{-3t} \cosh tu(t-2)$ 。求 $F(s)$ 。

- 12 如果 $g(t) = e^{-2t} \cos 4t$ ，求 $G(s)$ 。

- 13 求下列函数的拉普拉斯变换：(a) $tcostu(t)$

(b) $e^{-t}tsintu(t)$ (c) $\frac{\sin \beta t}{t} u(t)$

- 14 求图 15-26 所示信号的拉普拉斯变换。

- 15 求图 15-27 所示函数的拉普拉斯变换。

- 16 求图 15-28 所示信号 $f(t)$ 的拉普拉斯反变换。

- 17 利用图 15-29 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何求出一个简单非周期波形函数

的拉普拉斯变换。

ED

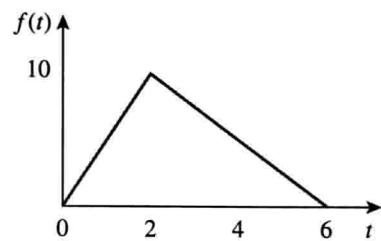


图 15-26 习题 14 图

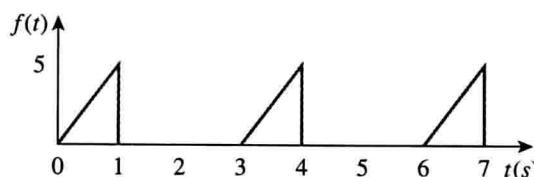


图 15-27 习题 15 图

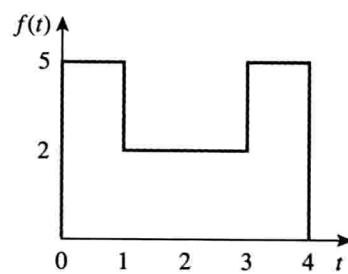


图 15-28 习题 16 图

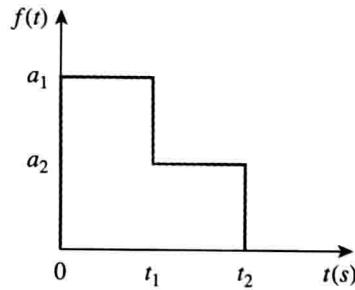
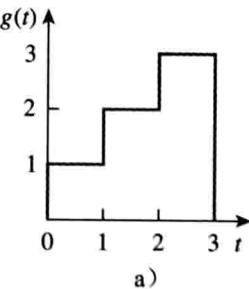
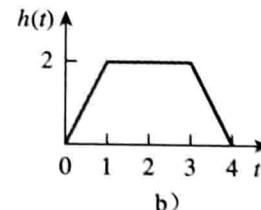


图 15-29 习题 17 图

- 18 求图 15-30 中函数的拉普拉斯变换。



a)



b)

图 15-30 习题 18 图

- 19 求图 15-31 所示无限单位冲激序列的拉普拉斯变换。

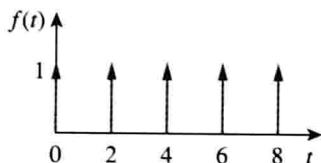


图 15-31 习题 19 图

- 20 利用图 15-32 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何求出一个简单周期波形函数的拉普拉斯变换。
ED

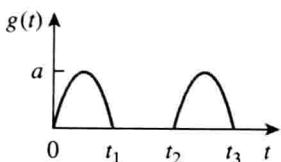


图 15-32 习题 20 图

- 21 求图 15-33 所示周期波形的拉普拉斯变换。

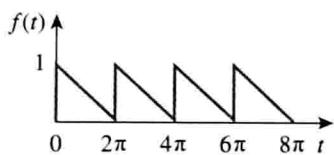


图 15-33 习题 21 图

- 22 求图 15-34 所示函数的拉普拉斯变换。

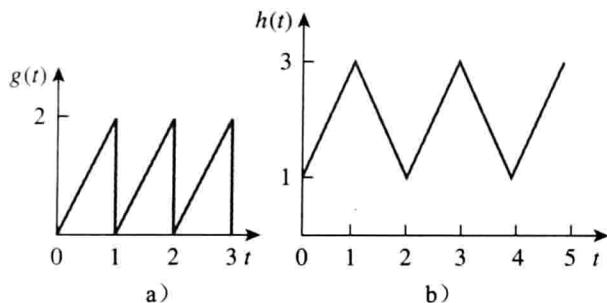


图 15-34 习题 22 图

- 23 求图 15-35 所示周期函数的拉普拉斯变换。

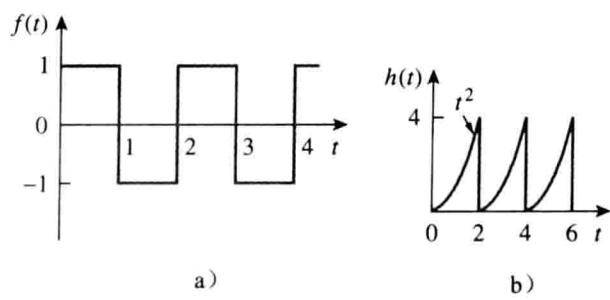


图 15-35 习题 23 图

- 24 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何求传输函数的初值和终值。
ED

25 已知：

$$F(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- (a) 使用初值和终值定理求 $f(0)$ 和 $f(\infty)$ ；

(b) 用部分分式法求 $f(t)$ ，验证(a)的答案。

- 26 假设 $F(s)$ 形式如下，判断 $f(t)$ 的初值和终值是否存在，如果存在，求出 $f(t)$ 的初值和终值。

$$(a) F(s) = \frac{5s^2 + 3}{s^3 + 4s^2 + 6}$$

$$(b) F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{4(s-2)(s^2 + 2s + 4)}$$

15.4 节

- 27 求下列函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \quad (b) G(s) = \frac{3s+1}{s+4}$$

$$(c) H(s) = \frac{4}{(s+1)(s+3)}$$

$$(d) J(s) = \frac{12}{(s+2)^2(s+4)}$$

- 28 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何求拉普拉斯反变换。
ED

- 29 求 $V(s)$ 的拉普拉斯反变换：

$$V(s) = \frac{2s+26}{s(s^2+4s+13)}$$

- 30 求出下列函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) F_1(s) = \frac{6s^2+8s+3}{s(s^2+2s+5)}$$

$$(b) F_2(s) = \frac{s^2+5s+6}{(s+1)^2(s+4)}$$

$$(c) F_3(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+4s+8)}$$

- 31 求与下列各 $F(s)$ 对应的 $f(t)$ ：

$$(a) \frac{10s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (b) \frac{2s^2+4s+1}{(s+1)(s+2)^3}$$

$$(c) \frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}$$

- 32 求下列各函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) \frac{8(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)} \quad (b) \frac{s^2-2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$(c) \frac{s^2+1}{(s+3)(s^2+4s+5)}$$

- 33 计算下列函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) \frac{6(s-1)}{s^4-1} \quad (b) \frac{se^{-\pi s}}{s^2+1} \quad (c) \frac{8}{s(s+1)^3}$$

- 34 求下列拉普拉斯变换对应的时域函数：

$$(a) F(s) = 10 + \frac{s^2+1}{s^2+4}$$

$$(b) G(s) = \frac{e^{-s} + 4e^{-2s}}{s^2 + 6s + 8}$$

$$(c) H(s) = \frac{(s+1)e^{-2s}}{s(s+3)(s+4)}$$

- 35 求与下列变换对应的 $f(t)$ ：

$$(a) F(s) = \frac{(s+3)e^{-6s}}{(s+1)(s+2)}$$

$$(b) F(s) = \frac{4-e^{-2s}}{s^2+5s+4}$$

$$(c) F(s) = \frac{s e^{-s}}{(s+3)(s^2+4)}$$

36 求下列函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) X(s) = \frac{3}{s^2(s+2)(s+3)}$$

$$(b) Y(s) = \frac{2}{s(s+1)^2}$$

$$(c) Z(s) = \frac{5}{s(s+1)(s^2+6s+10)}$$

37 求下列函数的拉普拉斯反变换：

$$(a) H(s) = \frac{s+4}{s(s+2)}$$

$$(b) G(s) = \frac{s^2+4s+5}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

$$(c) F(s) = \frac{e^{-4s}}{s+2}$$

$$(d) D(s) = \frac{10s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

38 求下列变换的 $f(t)$ ：

$$(a) F(s) = \frac{s^2+4s}{s^2+10s+26}$$

$$(b) F(s) = \frac{5s^2+7s+29}{s(s^2+4s+29)}$$

* 39 求下列变换的 $f(t)$ ：

$$(a) F(s) = \frac{2s^3+4s^2+1}{(s^2+2s+17)(s^2+4s+20)}$$

$$(b) F(s) = \frac{s^2+4}{(s^2+9)(s^2+6s+3)}$$

40 证明：

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{4s^2+7s+13}{(s+2)(s^2+2s+5)}\right] \\ = [\sqrt{2}e^{-t}\cos(2t+45^\circ) + 3e^{-2t}]u(t) \end{aligned}$$

15.5 节

* 41 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的波形如图 15-36 所示，求 $z(t) = x(t) * y(t)$ 。

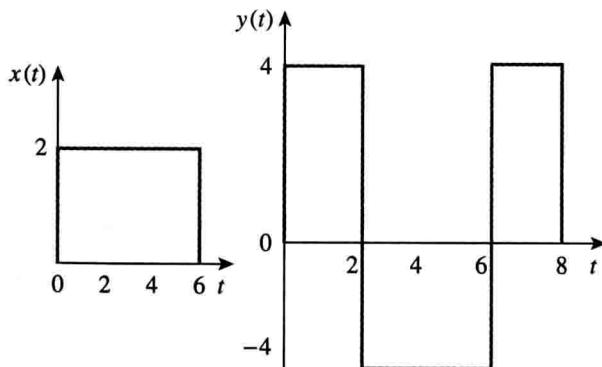


图 15-36 习题 41 图

42 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何计算两个函数的卷积。 **ED**

43 对图 15-37 所示的每一组 $x(t)$ 和 $h(t)$ ，求 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

44 求图 15-38 中每一对信号的卷积。

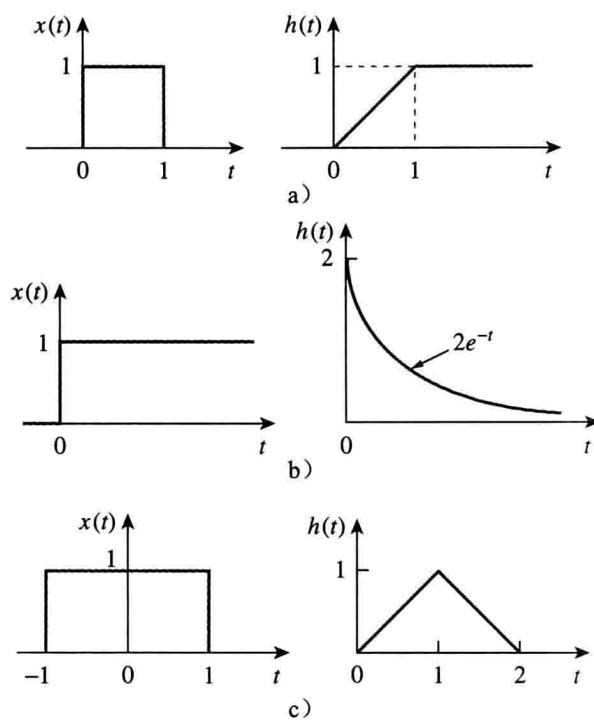
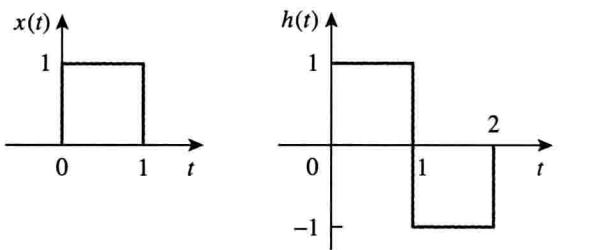
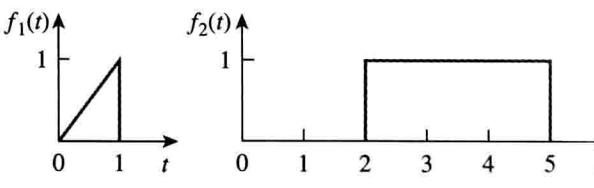


图 15-37 习题 43 图



a)



b)

图 15-38 习题 44 图

45 给定 $h(t) = 4e^{-2t}u(t)$, $x(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$ ，求 $y(t) = x(t) * h(t)$ 。

46 给定函数 $x(t) = 2\delta(t)$, $y(t) = 4u(t)$, $z(t) = e^{-2t}u(t)$ ，计算下列卷积：(a) $x(t) * y(t)$; (b) $x(t) * z(t)$; (c) $y(t) * z(t)$; (d) $y(t) * [y(t) + z(t)]$ 。

47 系统的传输函数：

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

(a) 求系统的冲激响应；(b) 假设输入为 $x(t) = u(t)$ ，求系统的输出 $y(t)$ 。

48 用卷积法求下列变换函数对应的 $f(t)$ ：

$$(a) F(s) = \frac{4}{(s^2+2s+5)^2}$$

$$(b) F(s) = \frac{2s}{(s+1)(s^2+4)}$$

- * 49 用卷积积分法求: (a) $t * e^{at} u(t)$; (b) $\cos(t) * \cos(t)u(t)$ 。

15.6 节

50 用拉普拉斯变换求解微分方程:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 2 \frac{dv(t)}{dt} + 10v(t) = 3\cos 2t$$

初值 $v(0)=1$, $dv(0)/dt=-2$ 。

- 51 假设初值 $v(0)=2$, $\frac{dv}{dt}|_{t=0}=4$, 求解微分方程:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 10e^{-t}u(t)$$

- 52 如果 $d^2 i/dt^2 + 3di/dt + 2i + \delta(t) = 0$, $i(0)=0$, $i'(0)=3$, 用拉普拉斯变换求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

- * 53 用拉普拉斯变换法求解 $x(t)$:

$$x(t) = \cos t + \int_0^t e^{\lambda-t} x(\lambda) d\lambda$$

- 54 设计一个问题帮助其他同学更好地理解有时变输入的二阶微分方程。 **ED**

- 55 如果初始条件为 0, 求解下面微分方程中的 $y(t)$:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} = e^{-t} \cos 2t$$

- 56 假设 $v(0)=2$, 求解下面微积分方程中的 $v(t)$:

$$4 \frac{dv}{dt} + 12 \int_{-\infty}^t v dt = 0$$

- 57 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何用拉普拉斯变换求解具有周期性输入的微积分方程。**ED**

- 58 假设 $dv/dt + 2v + 5 \int_0^t v(\lambda) d\lambda = 4u(t)$, 其中 $v(0)=-1$, 求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

- 59 求解微积分方程:

$$\frac{dy}{dt} + 4y + 3 \int_0^t y dt = 6e^{-2t}, y(0) = -1$$

- 60 求解微积分方程:

$$2 \frac{dx}{dt} + 5x + 3 \int_0^t x dt + 4 = \sin 4t, x(0) = 1$$

- 61 在特定初始值条件下求解下列微分方程:

$$(a) \frac{d^2 v}{dt^2} + 4v = 12, v(0) = 0,$$

$$dv(0)/dt = 2;$$

$$(b) \frac{d^2 i}{dt^2} + 5di/dt + 4i = 8, i(0) = -1,$$

$$di(0)/dt = 0;$$

$$(c) \frac{d^2 v}{dt^2} + 2dv/dt + v = 3, v(0) = 5,$$

$$dv(0)/dt = 1;$$

$$(d) \frac{d^2 i}{dt^2} + 2di/dt + 5i = 10, i(0) = 4,$$

$$di(0)/dt = -2.$$

第16章

拉普拉斯变换的应用

沟通能力是任何一个工程师必须具备的最重要的能力，其中非常关键的一点就是能够提出问题和理解答案。这件事情看似简单，却可以在成功和失败之间产生不同的结果。

——James A. Watson

增强技能与拓展事业

提出问题

在30多年的教学生涯中，我一直都在探索如何帮助学生提高学习效果。对学生而言，不管在一门功课上花费多少时间，最有效的学习方式是学会如何提问并在课堂上提出这些问题。通过提问环节，学生变被动接受为主动获取知识。这种主动获取知识的能力在学习过程中非常重要，是培养现代工程师的非常重要的环节。事实上，提出问题是科学工作者的基本素质，正如Charles P. Steinmetz所言：“只有不提问题的人才会变成傻瓜”。

提出问题似乎是非常直接和简单的事情，我们在生活中不是每天都在做这件事么？其实不尽然，问题要以恰当的方式提出，而且必须深思熟虑，才能取得最好效果。

大家可以采用许多有效的方式提出问题，这里我来与大家分享一下我是怎样做的。首先不必一开始就形成一个完美的问题。问答形式可以使你的问题在反复探讨中不断深化，使最初的问题就提炼成一个完美的问题。我经常建议学生们在课堂上读出他们的问题，这也是一个很好的方式。

在提出问题时要谨记如下三点：第一，精心准备问题，如果你很腼腆，很少在课堂上提问，那么可以在课前将问题记下来；第二，等到一个恰当的时机提出问题，这要根据你自己的判断来把握；第三，准备好解释你自己的问题，或用另一种方法表达，以防被要求复述问题。

最后，给大家一点建议：并非所有教授都喜欢学生在课堂上提问，即使他们可能说允许学生提问，因此你需要弄清哪些教授喜欢课堂提问。祝同学们不断提升专业技能，成为一名优秀的工程师。



由 Charles Alexander 摄影

16.1 引言

第15章介绍了拉普拉斯变换，本章将介绍其应用。拉普拉斯变换是电路分析、综合和设计的最有力的数学工具之一。在s域分析电路和系统能帮助我们理解电路和系统的实际功能。本章将深入研究电路的s域分析方法如何使问题得到简化，此外还将简要分析物理系统。本章假定读者已经有了一些机械系统方面的知识，会用微分方程来描述它们，就像描述电路一样。事实上，我们所处的物理世界具有惊人的相似性，微分方程可以用来描述任何线性电路、系统或过程，其中的关键是线性性质。

系统是物理过程的数学模型，用以描述其输入-输出关系。

把电路视为系统是完全合适的。历史上曾将电路与系统分开讨论，本章将讨论电路和系统的联系，并认为电路只是一类电气系统。

记住，本章和上一章所讨论内容仅适用于线性系统。上一章讨论了如何利用拉普拉斯变换求解线性微分方程和积分方程，本章将引入建立电路的 s 域模型的概念，使用该模型可以求解任何线性电路。之后将简要介绍多输入多输出系统的状态变量分析法。最后研究拉普拉斯变换在网络稳定性分析和网络综合中的应用。

16.2 电路元件的 s 域模型

掌握了拉普拉斯变换和反变换的求解方法后，现在准备用拉普拉斯变换来分析电路。这包括三个步骤。

应用拉普拉斯变换求解问题的步骤：

1. 把电路从时域变换到 s 域。
2. 用节点分析法、网孔分析法、电源变换、叠加定理或其他电路分析方法求解 s 域电路。
3. 求频域解的反变换，得到电路的时域解。

三个步骤中，只有第一步是新的，将在下面讨论。正如相量分析过程一样，对组成电路的每一元件求得其变换域模型（求元件时域特性方程的拉普拉斯变换），将会把电路由时域转换到频域或 s 域。

提示：由第二个步骤可知，适用于直流电路的所有电路分析方法同样可以利用到 s 域的电路分析中。

对于电阻，其时域的电压电流关系为：

$$v(t) = R i(t) \quad (16.1)$$

对式(16.1)两边做拉普拉斯变换，得：

$$V(s) = R I(s) \quad (16.2)$$

对于电感器，它的电流-电压的时域关系为：

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (16.3)$$

对式(16.3)两边做拉普拉斯变换，得：

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-) \quad (16.4)$$

即

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0^-)}{s} \quad (16.5)$$

图 16-1 是该电路的 s 域等效电路，图中电压源或电流源作为初始条件被用于建模。

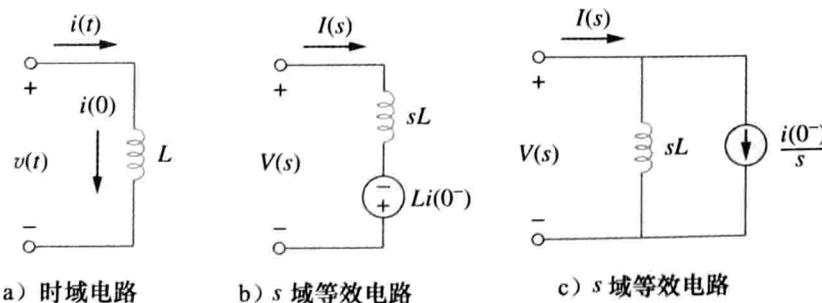


图 16-1 电感器的电路模型

对于电容器，它的时域电流-电压关系为：

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (16.6)$$

s 域关系变为：

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)] = sCV(s) - Cv(0^-) \quad (16.7)$$

即

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^-)}{s} \quad (16.8)$$

它的 s 域等效电路如图 16-2 所示。使用 s 域等效电路，可以用拉普拉斯变换来解第 7 章和第 8 章讨论的一阶或二阶电路。观察式(16.3)~(16.8)可知，初始条件是变换的一部分，这是用拉普拉斯变换分析电路的一个优点。拉普拉斯变换法的另一优点是：一次可以求得网络的全响应——暂态和稳态响应。例 16-2 和 16-3 将展示这些优点。观察式(16.5)~(16.8)的对偶性，就会验证在第 8 章已知的对偶关系（见表 8-1），如 L 和 C 、 $I(s)$ 和 $V(s)$ 、 $v(0)$ 和 $i(0)$ 都是对偶对。

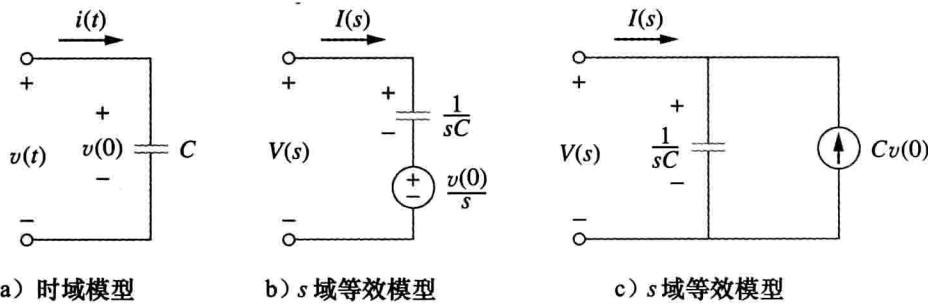


图 16-2 电容器电路模型

提示：在电路分析中使用拉普拉斯变换的简明之处在于：变换过程中将初始条件自动包含其中，因而得到的是全响应（暂态和稳态响应）。

如果假设电感和电容的初始条件为零，则上面的方程化简为：

$$\text{电阻: } V(s) = RI(s), \quad \text{电感: } V(s) = sLI(s), \quad \text{电容: } V(s) = \frac{1}{sC}I(s) \quad (16.9)$$

s 域等效电路如图 16-3 所示。

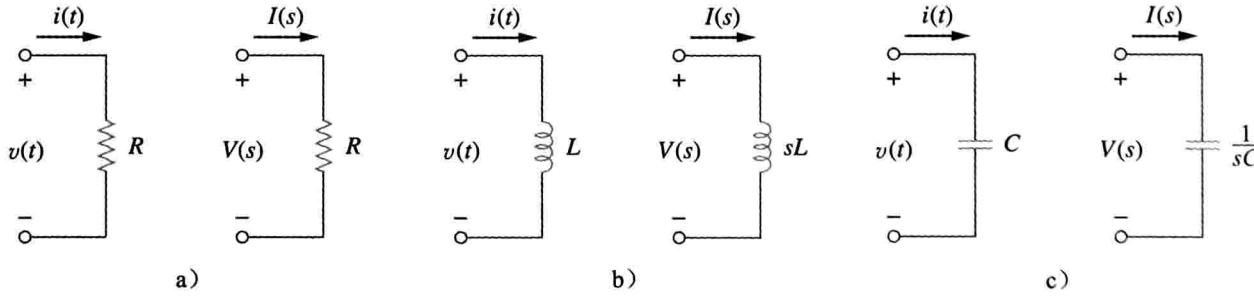


图 16-3 零初始条件下无源元件的时域和 s 域模型

定义 s 域阻抗为零初始条件下的变换电压与变换电流之比，即：

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (16.10)$$

因此，上述三个电路元件的阻抗为：

$$\text{电阻: } Z(s) = R, \quad \text{电感: } Z(s) = sL, \quad \text{电容: } Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (16.11)$$

表 16-1 对此做了总结。 s 域导纳是阻抗的倒数，即：

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{I(s)}{V(s)} \quad (16.12)$$

在电路分析中，使用拉普拉斯变换便于使用各种信号源，比如冲激信号、阶跃信号、斜坡信号、指数和正弦信号。

由拉普拉斯变换的线性性质，若 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $F(s)$ ，那么 $a f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $a F(s)$ ，便于建立受控源和运算放大器的模型。由于仅涉及单值函数，受控源的模型比较简单。受控源仅有两个控制变量：电流或电压，其输出为电压乘以常数或电流乘以常数。因此

$$L[av(t)] = aV(s) \quad (16.13)$$

$$L[ai(t)] = aI(s) \quad (16.14)$$

理想运算放大器可以当做一个电阻器，无论运放是实际的还是理想的，在其内部都是将输入电压乘以常数。因此，利用输入电压和输入电流为零的理想运放条件，即可写出运算放大器的方程。

例 16-1 求图 16-4 所示电路的 $v_o(t)$ ，假设初始条件为零。

解：首先将电路由时域转换到 s 域。

$$u(t) \Rightarrow \frac{1}{s}$$

$$1H \Rightarrow sL = s$$

$$\frac{1}{3}F \Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}$$

产生的 s 域电路如图 16-5 所示，应用网孔法分析法分析电路。

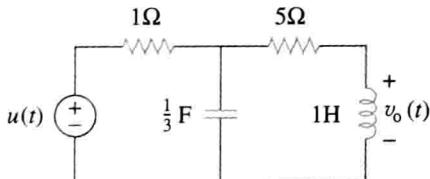


图 16-4 例 16-1 图

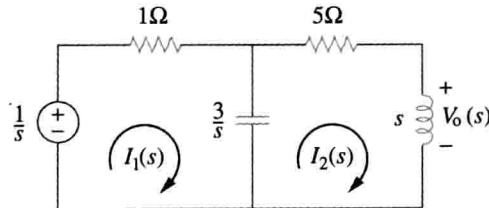


图 16-5 图 16-4 频域等效电路的网孔分析

对于网孔 1：

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)I_1 - \frac{3}{s}I_2 \quad (16.1.1)$$

对于网孔 2：

$$0 = -\frac{3}{s}I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right)I_2$$

即

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 \quad (16.1.2)$$

将式(16.1.2)代入式(16.1.1)，得：

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)\frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3)I_2 - \frac{3}{s}I_2$$

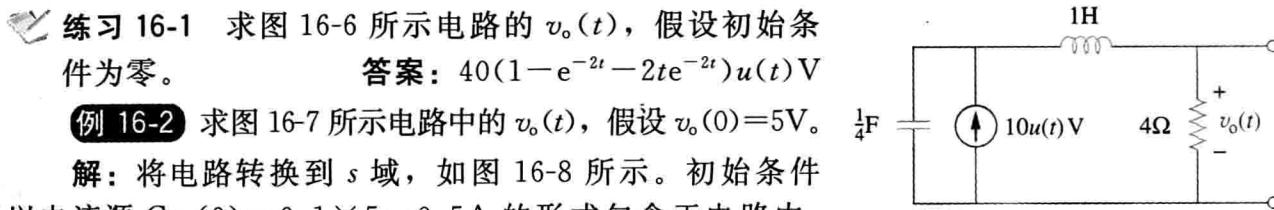
两边乘以 $3s$ 得：

$$3 = (s^3 + 8s^2 + 18s)I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}$$

$$V_o(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 4)^2 + (\sqrt{2})^2}$$

做反变换域，得：

$$v_o(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \sin \sqrt{2}t V, \quad t \geq 0$$

 练习 16-1 求图 16-6 所示电路的 $v_o(t)$ ，假设初始条件为零。

答案： $40(1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t)V$

例 16-2 求图 16-7 所示电路中的 $v_o(t)$ ，假设 $v_o(0)=5V$ 。

解：将电路转换到 s 域，如图 16-8 所示。初始条件以电流源 $Cv_o(0)=0.1 \times 5=0.5A$ 的形式包含于电路中。（见图 16-2c），采用节点分析法，对顶端的节点，有：

$$\frac{10/(s+1) - V_o}{10} + 2 + 0.5 = \frac{V_o}{10} + \frac{V_o}{10/s}$$

即

$$\frac{1}{s+1} + 2.5 = \frac{2V_o}{10} + \frac{sV_o}{10} = \frac{1}{10}V_o(s+2)$$

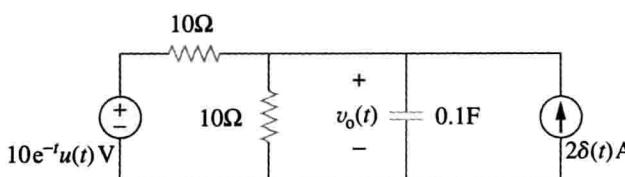


图 16-7 例 16-2 图

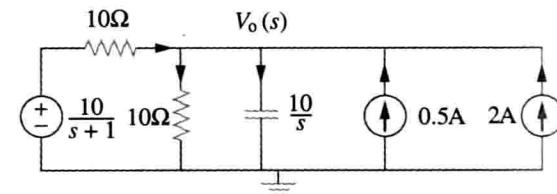


图 16-8 图 16-7 等效电路的节点法分析

两边乘以 10，得：

$$\frac{10}{s+1} + 25 = V_o(s+2)$$

即

$$V_o = \frac{25s + 35}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

其中：

$$A = (s+1)V_o(s)|_{s=-1} = \frac{25s+35}{(s+2)}|_{s=-1} = \frac{10}{1} = 10$$

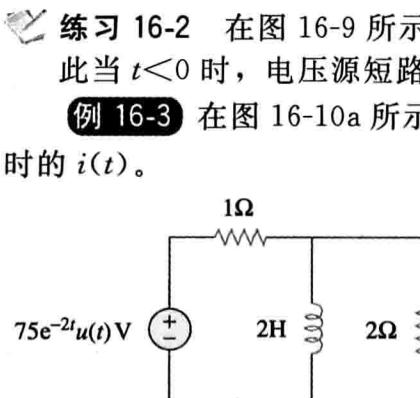
$$B = (s+2)V_o(s)|_{s=-2} = \frac{-15}{-1} = 15$$

因此：

$$V_o(s) = \frac{10}{s+1} + \frac{15}{s+2}$$

求拉普拉斯反变换，得：

$$v_o(t) = (10e^{-t} + 15e^{-2t})u(t)V$$

 练习 16-2 在图 16-9 所示的电路中，求 $v_o(t)$ 。注意，因为输入电压与 $u(t)$ 相乘，因此当 $t < 0$ 时，电压源短路，且 $i_L(0) = 0$ 。

答案： $(60e^{-2t} - 10e^{-t/3})u(t)V$

例 16-3 在图 16-10a 所示的电路中，开关在 $t=0$ 时刻从位置 a 切换至位置 b 。求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

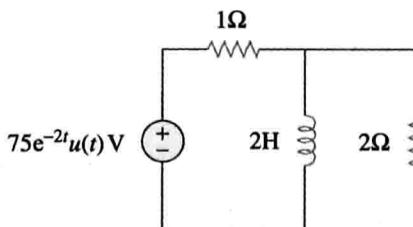


图 16-9 练习 16-2 图

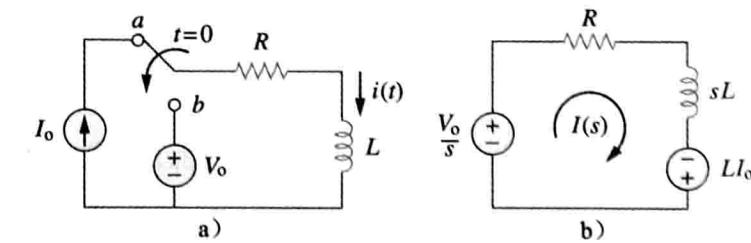


图 16-10 例 16-3 图

解：电感器的初始电流是 $i(0)=I_0$ 。图 16-10b 是 $t>0$ 时的 s 域电路。初始条件以电压源 $Li(0)=LI_0$ 的形式包含其中。用网孔分析法可得：

$$I(s)(R+sL)-LI_0-\frac{V_o}{s}=0 \quad (16.3.1)$$

即

$$I(s)=\frac{LI_0}{R+sL}+\frac{V_o}{s(R+sL)}=\frac{I_0}{s+R/L}+\frac{V_o/L}{s(s+R/L)} \quad (16.3.2)$$

将式(16.3.2)右边第二项用部分分式展开，得：

$$I(s)=\frac{I_0}{s+R/L}+\frac{V_o/R}{s}-\frac{V_o/R}{s(s+R/L)} \quad (16.3.3)$$

拉普拉斯反变换为：

$$i(t)=\left(I_0-\frac{V_o}{R}\right)e^{-t/\tau}+\frac{V_o}{R}, t \geq 0 \quad (16.3.4)$$

式中 $\tau=R/L$ 。式(16.3.4)中的第一项是暂态响应，第二项是稳态响应。即终值是 $i(\infty)=V_o/R$ ，对式(16.3.2)或(16.3.3)应用终值定理可得到相同结果，即：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s I(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s I_0}{s+R/L} + \frac{V_o/L}{s+R/L} \right) = \frac{V_o}{R} \quad (16.3.5)$$

方程(16.3.4)也可以写为：

$$i(t)=I_0 e^{-t/\tau}+\frac{V_o}{R}(1-e^{-t/\tau}), t \geq 0 \quad (16.3.6)$$

第一项是自然响应，第二项是强迫响应。如果初始条件 $I_0=0$ ，式(16.3.6)变为：

$$i(t)=\frac{V_o}{R}(1-e^{-t/\tau}), t \geq 0 \quad (16.3.7)$$

此即阶跃响应，它是阶跃输入 V_o 作用于零状态电路时产生的响应。

练习 16-3 在图 16-11 所示电路中，开关长时间处在 b 位，
置，在 $t=0$ 时刻开关移向 a 处。求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

答案： $v(t)=(V_o-I_0 R)e^{-t/\tau}+I_0 R$, $t>0$, 其中 $\tau=RC$

16.3 电路分析

在 s 域进行电路分析相对比较简单，一组复杂的时域数学关系转换到 s 域后，时域的微积分运算转换成简单的乘子 s 和 $1/s$ 。这样需要建立和求解的电路方程变成了代数方程，而且所有直流电路中的定理和关系在 s 域中均成立。

记住，带有电感器和电容器的等效电路仅仅存在于 s 域，它们不能反变换至时域。

例 16-4 考虑图 16-12a 所示的电路。假设 $v_s=10u(t)V$ ，且当 $t=0$ 时，流过电感的电流为 $-1A$ ，电容两端的电压为 $+5V$ ，求电容两端电压值。

解：图 16-12b 是包括了初始条件的 s 域电路。采用节点分析法。因为 V_1 的值也是时域电容电压值，是唯一未知的节点电压，故只需写出一个方程：

$$\frac{V_1-10/s}{10/3}+\frac{V_1-0}{5s}+\frac{i(0)}{s}+\frac{V_1-[v(0)/s]}{1/(0.1s)}=0 \quad (16.4.1)$$

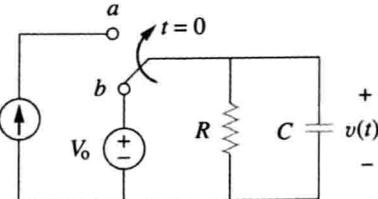


图 16-11 练习 16-3 图

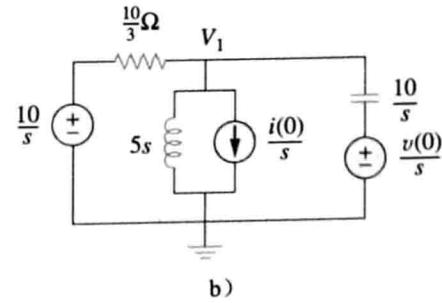
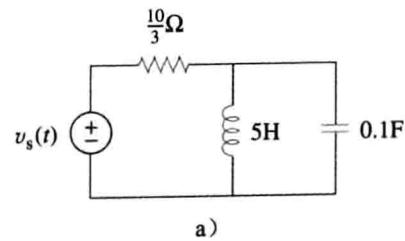


图 16-12 例 16-4 图

即

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_1 = \frac{3}{s} + \frac{1}{s} + 0.5 \quad (16.4.2)$$

式中 $v(0)=5V$, $i(0)=-1A$ 。化简后得到:

$$(s^2 + 3s + 2)V_1 = 40 + 5s$$

即

$$V_1 = \frac{40 + 5s}{(s+1)(s+2)} = \frac{35}{s+1} - \frac{30}{s+2} \quad (16.4.3)$$

求拉普拉斯反变换, 得:

$$v_1(t) = (35e^{-t} - 30e^{-2t})u(t)V \quad (16.4.4)$$

练习 16-4 对于图 16-12 所示电路, 初始条件同例 16-4, 求 $t > 0$ 时电感电流。

答案: $i(t) = (3 - 7e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)A$

例 16-5 对于图 16-12 所示电路, 初始条件同例 16-4, 用叠加定理求电容电压。

解: 由于 s 域电路实际上含有三个独立源, 求解时一次考虑一个独立源。图 16-13 是每次只考虑一个电源的 s 域电路。现在有三个节点分析问题, 首先, 求解图 16-13a 所示电路的电容电压。

$$\frac{V_1 - 10/s}{10/3} + \frac{V_1 - 0}{5s} + 0 + \frac{V_1 - 0}{1/(0.1s)} = 0$$

即

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_1 = \frac{3}{s}$$

化简得:

$$(s^2 + 3s + 2)V_1 = 30$$

$$V_1 = \frac{30}{(s+1)(s+2)} = \frac{30}{s+1} - \frac{30}{s+2}$$

即

$$v_1(t) = (30e^{-t} - 30e^{-2t})u(t)V \quad (16.5.1)$$

对图 16-13b 有:

$$\frac{V_2 - 0}{10/3} + \frac{V_2 - 0}{5s} - \frac{1}{s} + \frac{V_2 - 0}{1/(0.1s)} = 0$$

即

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_2 = \frac{1}{s}$$

由上式得:

$$V_2 = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

求拉普拉斯反变换得:

$$v_2(t) = (10e^{-t} - 10e^{-2t})u(t)V \quad (16.5.2)$$

对图 16-13c 有:

$$\frac{V_3 - 0}{10/3} + \frac{V_3 - 0}{5s} - 0 + \frac{V_3 - 5/s}{1/(0.1s)} = 0$$

即

$$0.1\left(s+3+\frac{2}{s}\right)V_3 = 0.5$$

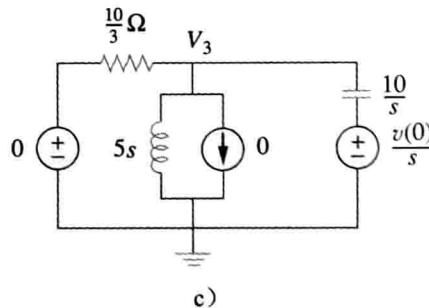
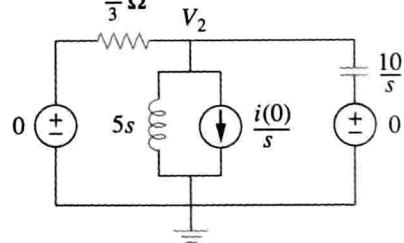
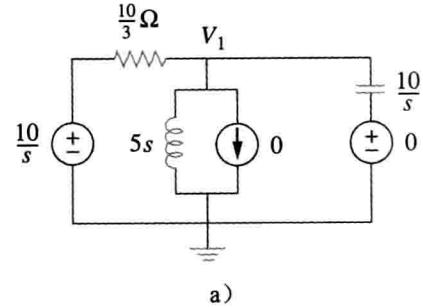


图 16-13 例 16-5 图

$$V_3 = \frac{5s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-5}{s+1} + \frac{10}{s+2}$$

由此可得：

$$v_3(t) = (-5e^{-t} + 10e^{-2t})u(t)V \quad (16.5.3)$$

结合式(16.5.1)、(16.5.2)和(16.5.3)，得：

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = [(30 + 10 - 5)e^{-t} + (-30 + 10 - 10)e^{-2t}]u(t)V$$

即

$$v(t) = (35e^{-t} - 30e^{-2t})u(t)V$$

与例16-4答案相同。

练习 16-5 图16-12所示电路中，初始条件与例16-4相同，用叠加定理求 $t > 0$ 时的电感电流。

$$\text{答案: } i(t) = (3 - 7e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)A$$

例 16-6 假设在图16-14所示的电路中， $t=0$ 时无初始储能，且 $i_s = 10u(t)A$ 。(a)用戴维南定理求出 $V_o(s)$ ；(b)用初值和终值定理求 $v_o(0^+)$ 和 $v_o(\infty)$ ；(c)求 $v_o(t)$ 。

解：因为电路中没有初始储能，因此假设在 $t=0$ 时，电感初始电流和电容初始电压都是0。

(a)为求戴维南等效电路，移去 5Ω 的电阻，然后求出 $V_{oc}(V_{Th})$ 和 I_{sc} 。为求 V_{Th} ，使用图16-15a所示的拉普拉斯变换电路。因为 $I_x = 0$ ，受控电压源不起作用，因此：

$$V_{oc} = V_{Th} = 5 \times \frac{10}{s} = \frac{50}{s}$$

为了求得 Z_{Th} ，考虑图16-15b所示的电路，先求 I_{sc} 。用节点分析法求解 V_1 ，得 $I_{sc}(I_{sc} = I_x = V_1/2s)$ ：

$$-\frac{10}{s} + \frac{(V_1 - 2I_x) - 0}{5} + \frac{V_1 - 0}{2s} = 0$$

并且：

$$I_x = \frac{V_1}{2s}$$

由此得：

$$V_1 = \frac{100}{2s+3}$$

因此：

$$I_{sc} = \frac{V_1}{2s} = \frac{100/(2s+3)}{2s} = \frac{50}{s(2s+3)}$$

和

$$Z_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{50/s}{50/[s(2s+3)]} = 2s+3$$

在图16-16中，用戴维南等效电路代替端点a和b的电路，由此可得：

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{5}{5+Z_{Th}}V_{Th} = \frac{5}{5+2s+3}\left(\frac{50}{s}\right) \\ &= \frac{250}{s(2s+8)} = \frac{125}{s(s+4)} \end{aligned}$$

(b)由初值定理得：

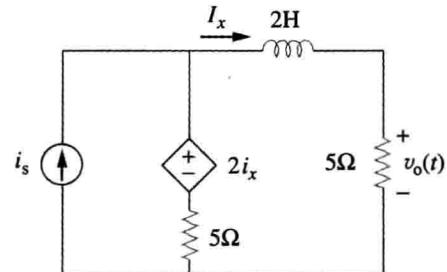
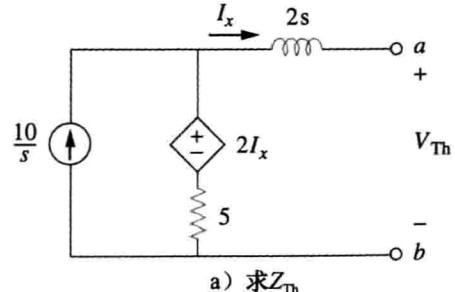
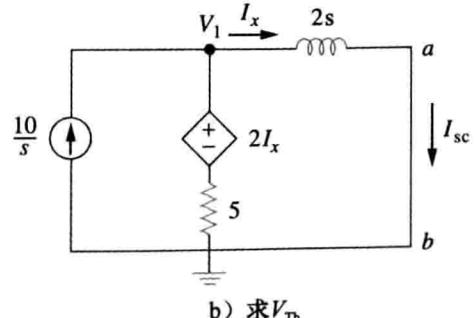


图16-14 例16-6图



a) 求 Z_{Th}



b) 求 V_{Th}

图16-15 例16-6图

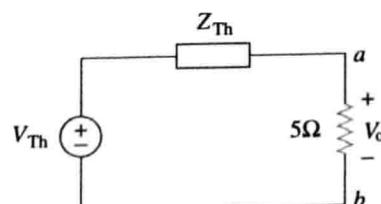


图16-16 图16-14的s域
戴维南等效电路

$$v_o(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV_o(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{125}{s+4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{125/s}{1+4/s} = \frac{0}{1} = 0$$

由终值定理得：

$$v_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{125}{s+4} = \frac{125}{4} = 31.25(V)$$

(c) 通过部分分式展开，得：

$$V_o = \frac{125}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

$$A = sV_o(s)|_{s=0} = \frac{125}{s+4}|_{s=0} = 31.25$$

$$B = (s+4)V_o(s)|_{s=-4} = \frac{125}{s}|_{s=-4} = -31.25$$

$$V_o = \frac{31.25}{s} - \frac{31.25}{s+4}$$

求拉普拉斯反变换得：

$$v_o(t) = 31.25(1 - e^{-4t})u(t)V$$

这个结果也验证了在(b)中求得的 $v_o(0)$ 和 $v_o(\infty)$ 。

练习 16-6 图 16-17 所示的电路中，在 $t=0$ 时的初始储能为 0。假设 $v_s = 30u(t)V$ 。（a）用戴维南定理求 $V_o(s)$ ；（b）用初值和终值定理求出 $v_o(0)$ 和 $v_o(\infty)$ ；（c）求 $v_o(t)$ 。

答案：(a) $V_o(s) = \frac{24(s+0.25)}{s(s+0.3)}$; (b) 24V,
20V; (c) $(20 + 4e^{-0.3t})u(t)V$

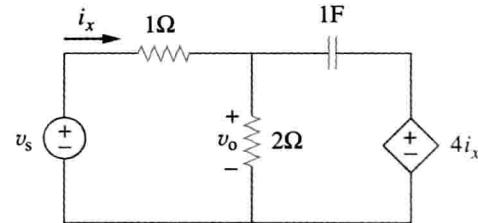


图 16-17 练习 16-6 图

16.4 传递函数

传递函数(transfer function)是信号处理中的一个重要的概念，因为它表明信号在通过网络时是如何被处理的，是求解网络响应、确定(设计)网络稳定性和网络综合的恰当的工具。网络的传递函数描述了网络输出是如何随输入而变化的。它描述了 s 域中无初始能量时从输入到输出的传递情况。

提示：对于电路网络，传递函数也称为网络函数。

传递函数 $H(s)$ 是零初始条件下的输出响应 $Y(s)$ 和输入激励 $X(s)$ 之比。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (16.15)$$

传递函数与所定义的输入和输出有关。因为输入和输出可以是电路任何地方的电流或电压，所以有四种可能的传递函数：

$$H(s) = \text{电压增益} = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (16.16a)$$

$$H(s) = \text{电流增益} = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \quad (16.16b)$$

$$H(s) = \text{阻抗} = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (16.16c)$$

$$H(s) = \text{导纳} = \frac{I(s)}{V(s)} \quad (16.16d)$$

因此，一个电路可能有多个传递函数。注意，式(16.16a)和(16.16b)中的 $H(s)$ 是无量

纲的。

提示：一些学者可能认为式(16.16c)和(16.16d)不是传递函数。

式(16.16)中的每一个传递函数都可以用两种方法来求。一种方法是假设任意便于计算的输入 $X(s)$ ，使用任意的电路分析技术（比如分流或分压，节点或网孔分析法）求出输出 $Y(s)$ ，然后求得两者的比值。另一种方法是梯形电路分析法，该方法遍历整个电路。假设电路的输出是 1V 或 1A，用欧姆定律和基尔霍夫定律（仅 KCL）求得输入，则传递函数便为 1 除以输入。该方法在电路有多个回路或多个节点时更方便，而用节点或网孔分析法则变得麻烦。第一种方法假设输入求输出，第二种方法假设输出求输入，用输出和输入的比值来计算 $H(s)$ 。两种方法仅依赖线性性质，因为本书只处理线性电路。例 16-8 说明了这些方法。

式(16.15)假设 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 已知，有时，已知是输入 $X(s)$ 和传递函数 $H(s)$ ，则可求出输出 $Y(s)$ 为：

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (16.17)$$

求反变换得到 $y(t)$ 。一个特殊情况是当输入是单位冲激函数时， $x(t)=\delta(t)$ ，它的拉普拉斯变换 $X(s)=1$ 。对此，有：

$$Y(s) = H(s) \quad , \quad y(t) = h(t) \quad (16.18)$$

式中：

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] \quad (16.19)$$

$h(t)$ 为单位冲激响应 (unit impulse response)——它是网络对单位冲激信号的时域响应。因此，式(16.19)是传递函数一种新的表示方法： $H(s)$ 是网络单位冲激响应的拉普拉斯变换。一旦知道了网络的冲激响应 $h(t)$ ，便可以对任何输入信号用式(16.17)在 s 域求得网络的响应，或者在时域用卷积积分（参见 15.5 节）求得网络的响应。

提示：单位冲激响应是指输入为单位冲激函数时电路的输出响应。

例 16-7 某线性系统中，当输入 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 时，输出 $y(t)=10e^{-t}\cos 4tu(t)$ ，求系统的传递函数和冲激响应。

解：如果 $x(t)=e^{-t}u(t)$ 且 $y(t)=10e^{-t}\cos 4tu(t)$ ，则：

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, Y(s) = \frac{10(s+1)}{(s+1)^2 + 4^2}$$

因此：

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2 + 16} = \frac{10(s^2 + 2s + 1)}{s^2 + 2s + 17}$$

为求 $h(t)$ ，将 $H(s)$ 表示为：

$$H(s) = 10 - 40 \frac{4}{(s+1)^2 + 4^2}$$

由表 15-2，得：

$$h(t) = 10\delta(t) - 40e^{-t}\sin 4tu(t)$$

练习 16-7 线性系统的传递函数为：

$$H(s) = \frac{2s}{s+6}$$

求输入 $10e^{-3t}u(t)$ 产生的输出 $y(t)$ 及其冲激响应。

答案： $-20e^{-3t} + 40e^{-6t}$, $t \geq 0$, $2\delta(t) - 12e^{-6t}u(t)$

例 16-8 对于图 16-18 所示电路，求传递函数 $H(s)=V_o(s)/I_o(s)$ 。

解：方法 1 由分电流公式，有：

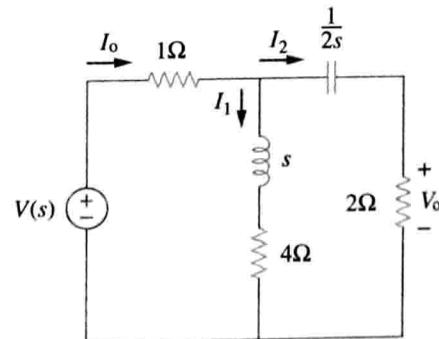


图 16-18 例 16-8 图

$$I_2 = \frac{(s+4)I_o}{s+4+2+1/2s}$$

而

$$V_o = 2I_2 = \frac{2(s+4)I_o}{s+6+1/2s}$$

因此：

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_o(s)} = \frac{4s(s+4)}{2s^2 + 12s + 1}$$

方法 2 用梯形电路分析法。令 $V_o = 1V$ 。由欧姆定律， $I_2 = V_o/2 = 1/2A$ 。 $(2+1/2s)$ 阻抗两端的电压为：

$$V_1 = I_2 \left(2 + \frac{1}{2s} \right) = 1 + \frac{1}{4s} = \frac{4s+1}{4s}$$

这与 $(s+4)$ 阻抗两端的电压相同。因此：

$$I_1 = \frac{V_1}{s+4} = \frac{4s+1}{4s(s+1)}$$

对顶部节点应用 KCL，得：

$$I_o = I_1 + I_2 = \frac{4s+1}{4s(s+4)} + \frac{1}{2} = \frac{2s^2 + 12s + 1}{4s(s+4)}$$

因此：

$$H(s) = \frac{V_o}{I_o} = \frac{1}{I_o} = \frac{4s(s+4)}{2s^2 + 12s + 1}$$

和方法 1 结果一样。

 **练习 16-8** 求图 16-18 所示电路中的传递函数 $H(s) = I_1(s)/I_o(s)$ 。

答案： $\frac{4s+1}{2s^2 + 12s + 1}$

例 16-9 对于图 16-9 所示的 s 域电路，求：(a) 传递函数 $H(s) = V_o/V_i$ ；(b) 冲激响应；(c) 当 $v_i(t) = u(t)V$ 时的响应；(d) 当 $v_i(t) = 8\cos 2tV$ 时的响应。

解：(a) 用分压法求解：

$$V_o = \frac{1}{s+1} V_{ab} \quad (16.9.1)$$

而

$$V_{ab} = \frac{1/(s+1)}{1+1/(s+1)} V_i = \frac{(s+1)/(s+2)}{1+(s+1)/(s+2)} V_i$$

即

$$V_{ab} = \frac{s+1}{2s+3} V_i \quad (16.9.2)$$

将式(16.9.2)代入式(16.9.1)得：

$$V_o = \frac{V_i}{2s+3}$$

因此，传递函数为：

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2s+3}$$

(b) 把 $H(s)$ 写为：

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+3/2}$$

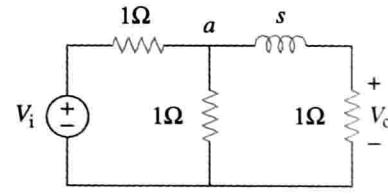


图 16-19 例 16-9 图

它的拉普拉斯反变换就是所要求的冲激响应：

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t/2}u(t)$$

(c) 当 $v_i(t) = u(t)$ 时, $V_i(s) = 1/s$, 则:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{1}{2s(s+3/2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3/2}$$

式中:

$$A = sV_o(s)|_{s=0} = \frac{1}{2(s+3/2)}|_{s=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = (s+3/2)V_o(s)|_{s=-3/2} = \frac{1}{2s}|_{s=-3/2} = -\frac{1}{3}$$

因此, 当 $v_i(t) = u(t)$ 时:

$$V_o(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3/2}\right)$$

它的拉普拉斯反变换为:

$$v_o(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t/2})u(t)V$$

(d) 当 $v_i(t) = 8\cos 2t$ 时, $V_i(s) = \frac{8s}{s^2+4}$, 则:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{4s}{\left(s+\frac{3}{2}\right)(s^2+4)} = \frac{A}{\left(s+\frac{3}{2}\right)} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

式中:

$$A = \left(s+\frac{3}{2}\right)V_o(s)|_{s=-\frac{3}{2}} = \frac{4s}{s^2+4}|_{s=-\frac{3}{2}} = -\frac{24}{25}$$

为求 B 和 C , 将方程(16.9.3)乘以 $\left(\frac{s+3}{2}\right)(s^2+4)$, 得:

$$4s = A(s^2+4) + B\left(s^2+\frac{3}{2}s\right) + C\left(s+\frac{3}{2}\right)$$

令 s 的同次幂的系数相等, 得:

$$\text{常数 } 0 = 4A + \frac{3}{2}C \Rightarrow C = -\frac{8}{3}A$$

$$s^1 4 = \frac{3}{2}B + C, \quad s^2 0 = A + B \Rightarrow B = -A$$

解方程得: $A = -24/25$, $B = 24/25$, $C = 64/25$ 。因此, 当 $v_i(t) = 8\cos 2tV$ 时:

$$V_o(s) = \frac{-\frac{24}{25}}{s+\frac{3}{2}} + \frac{24}{25}\frac{s}{s^2+4} + \frac{32}{25}\frac{2}{s^2+4}$$

其逆变换为:

$$v_o(t) = \frac{24}{25}\left(-e^{-3t/2} + \cos 2t + \frac{4}{3}\sin 2t\right)u(t)V$$

练习 16-8 对于图 16-20 所示电路, 重做例 16-9。

答案: (a) $2/(s+4)$; (b) $2e^{-4t}u(t)$; (c) $\frac{1}{2}(1-e^{-4t})u(t)V$;

$$(d) 3.2\left(-e^{-4t} + \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)u(t)V$$

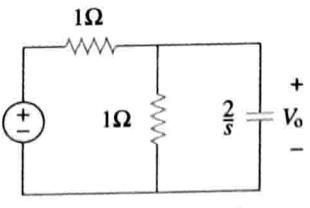


图 16-20 例 16-9 图

16.5 状态变量

前面章节仅考虑了单输入-单输出系统的分析技术。然而，许多实际的工程系统是多输入-多输出系统，如图 16-21 所示。状态变量法是分析和理解这种高度复杂系统的非常重要的工具。因此，状态变量模型比单输入-单输出系统模型（如传递函数）更为广泛。状态变量模型内容广泛，不可能用一章的篇幅论述清楚，一节的篇幅就更不可能了，此处只作简要概述。

在状态变量模型中，指定一些描述系统内部行为的变量集合，这些变量称为系统的状态变量。当系统的当前状态和输入信号已知时，状态变量能决定系统的未来行为。即当状态变量已知时，系统的其他参数仅用代数方程即可确定。

状态变量是描述系统状态的物理特性，而与系统如何达到该状态无关。

常见的状态变量有压力、体积和温度。电路系统的状态变量是电感电流和电容电压，因为它们共同描述了系统的能量状态。

表示状态方程的标准方法是把它们写成一阶微分方程的集合：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz} \quad (16.20)$$

式中：

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \text{代表 } n \text{ 个状态变量的状态向量}$$

“·”代表关于时间的一阶导数，即：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

和

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{bmatrix} = \text{代表 } m \text{ 个输入的输入矢量}$$

\mathbf{A} 和 \mathbf{B} 分别为 $n \times n$ 和 $n \times m$ 阶矩阵。除了式(16.20)所示的状态方程外，还需要输出方程，完整的状态模型或状态空间方程为：

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bz}} \quad (16.21a)$$

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dz}} \quad (16.21b)$$

式中：

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \text{代表 } p \text{ 个输出的输出矢量}$$

\mathbf{C} 和 \mathbf{D} 分别代表 $p \times n$ 和 $p \times m$ 阶矩阵。对于单输入-单输出这种特例， $n=m=p=1$ 。

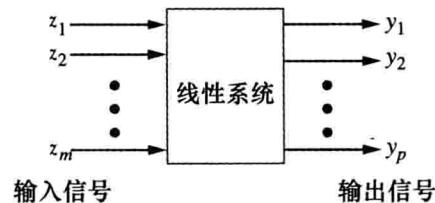


图 16-21 具有 m 个输入 n 个输出的线性系统

假设初始条件为零, 对式(16.21a)做拉普拉斯变换可求得系统的传递函数; 由此可得:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BZ}(s) \rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{BZ}(s)$$

即

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BZ}(s) \quad (16.22)$$

式中, \mathbf{I} 是单位矩阵。对(16.21b)求拉普拉斯变换, 得:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DZ}(s) \quad (16.23)$$

将式(16.22)代入(16.23), 然后再除以 $\mathbf{Z}(s)$ 得传递函数:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{Z}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (16.24)$$

式中:

\mathbf{A} = 系统矩阵, \mathbf{B} = 输入耦合矩阵, \mathbf{C} = 输出矩阵, \mathbf{D} = 前馈矩阵

在大多数情况下, $\mathbf{D}=0$, 故式(16.24)中 $\mathbf{H}(s)$ 的分子的阶数比分母的阶数低。因此:

$$\boxed{\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}} \quad (16.25)$$

因为涉及矩阵计算, 所以可用 MATLAB 求得传递函数。

用状态变量法分析电路, 需遵循下面三步骤。

用状态变量法进行电路分析的步骤:

1. 选电感电流 i 和电容电压 v 作为状态变量, 确保符合无源符号约定。
2. 对电路应用 KCL 和 KVL, 并且以状态变量表示电路变量(电压和电流)。这将产生一组一阶微分方程, 它们对确定所有的状态变量是充分必要的。
3. 写出输出方程, 并将最终结果用状态空间表示。

第一步和第三步通常很简单, 主要工作在第二步。

下面举例说明状态变量法的应用。

例 16-10 对于图 16-22 所示电路, 写出状态空间方程, 并求以 v_s 为输入、以 i_x 为输出时电路的传递函数。已知 $R=1\Omega$, $C=0.25F$, $L=0.5H$ 。

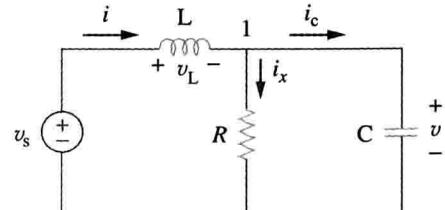


图 16-22 例 16-10 图

解: 取电感电流 i 和电容电压 v 作为状态变量, 得到:

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (16.10.1)$$

$$i_x = C \frac{dv}{dt} \quad (16.10.2)$$

对节点 1 写 KCL 方程, 得:

$$i = i_x + i_c \rightarrow C \frac{dv}{dt} = i - \frac{v}{R}$$

即

$$\dot{v} = -\frac{v}{RC} + \frac{i}{C} \quad (16.10.3)$$

因为 R 和 C 两端的电压相同, 沿外回路写 KVL 方程, 有:

$$v_s = v_L + v \rightarrow L \frac{di}{dt} = -v + v_s \quad i = -\frac{v}{L} + \frac{v_s}{L} \quad (16.10.4)$$

方程(16.10.3)和(16.10.4)构成状态方程。如果将 i_x 作为输出, 则:

$$i_x = \frac{v}{R} \quad (16.10.5)$$

将式(16.10.3)、(16.10.4)和(16.10.5)表示成标准形式, 得:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v_s \quad (16.10.6a)$$

$$\dot{i}_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (16.10.6b)$$

代入 $R=1$, $C=1/4$, $L=1/2$, 由式(16.10.6)得矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+4 & -4 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

求该矩阵的逆矩阵, 得:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{A} \text{ 的伴随矩阵}}{\mathbf{A} \text{ 的行列式}} = \frac{\begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 8}$$

因此, 传递函数为:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 8} = \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 2s+8 \end{bmatrix}}{s^2 + 4s + 8} = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}$$

这和对电路直接用拉普拉斯变换, 然后求 $\mathbf{H}(s) = I_x(s)/V_s(s)$ 得到的结果是一样的。状态变量法的真正优势在于处理多输入-多输出系统。本例中, 系统有一个输入 v_s 和一个输出 i_x 。在下面的例题中, 系统有两个输入和两个输出。◆

练习 16-10 对于图 16-23 所示电路, 求状态变量模型。设 $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C = 0.5$, $L = 0.2$, 求电路的传递函数。

答案: $\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} v_s, \quad v_o = [0 \quad R_2] \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \frac{20}{s^2 + 12s + 30}$

例 16-11 图 16-24 所示电路是一个两输入-两输出系统。确定其状态变量模型并求出系统的传递函数。

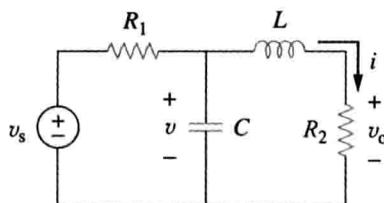


图 16-23 练习 16-10 图

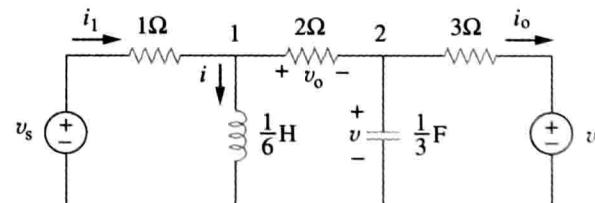


图 16-24 例 16-11 图

解: 本例中, 有两个输入 v_s 和 v_i , 两个输出 v_o 和 i_o 。依然选择电感电流 i 和电容电压 v 作为状态变量。对于左边的回路应用 KVL, 得:

$$-v_s + i_1 + \frac{1}{6}i = 0 \rightarrow i = 6v_s - 6i_1 \quad (16.11.1)$$

消去非状态变量 i_1 , 对于包含 v_s 、 1Ω 电阻、 2Ω 电阻和 $1/3F$ 电容的回路应用 KVL, 得:

$$v_s = i_1 + v_o + v \quad (16.11.2)$$

节点 1 的 KCL 方程为:

$$i_1 = i + \frac{v_o}{2} \rightarrow v_o = 2(i_1 - i) \quad (16.11.3)$$

将式(16.11.3)代入式(16.11.2), 有:

$$v_s = 3i_1 + v - 2i \rightarrow i_1 = \frac{2i - v + v_s}{3} \quad (16.11.4)$$

将式(16.11.4)代入式(16.11.1), 得:

$$\dot{i} = 2v - 4i + 4v_s \quad (16.11.5)$$

这是一个状态方程。为了获得第二个状态方程, 写出节点2的KCL方程:

$$\frac{v_o}{2} = \frac{1}{3}\dot{v} + i_o \rightarrow \dot{v} = \frac{3}{2}v_o - 3i_o \quad (16.11.6)$$

需要消去非状态变量 v_o 和 i_o 。对电路的右边回路, 显然有:

$$i_o = \frac{v - v_i}{3} \quad (16.11.7)$$

将式(16.11.4)代入(16.11.3), 得:

$$v_o = 2\left(\frac{2i - v + v_s}{3} - i\right) = -\frac{2}{3}(v + i - v_s) \quad (16.11.8)$$

将式(16.11.7)和(16.11.8)代入式(16.11.6), 得到第二个状态方程:

$$\dot{v} = -2v - i + v_s + v_i \quad (16.11.9)$$

式(16.11.7)和(16.11.8)已给出了两个输出方程。将式(16.11.5)、式(16.11.7)~(16.11.9)一起用标准形式表示, 得到电路的状态模型为:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_i \end{bmatrix} \quad (16.11.10a)$$

$$\begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ v_i \end{bmatrix} \quad (16.11.10b) \blacktriangleleft$$

练习 16-11 对于图 16-25 所示电路, 求其状态模型。以 v_o 和 i_o 作为输出变量。

答案: $\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} v_o \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

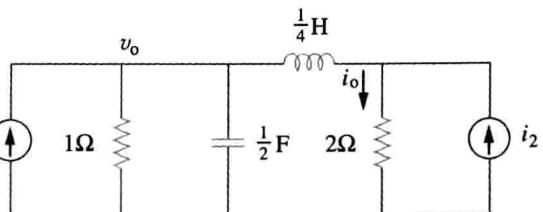


图 16-25 练习 16-11 图

例 16-12 假设系统的输出是 $y(t)$, 输入是 $z(t)$, 描述系统输入和输出关系的微分方程为:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5z(t) \quad (16.12.1)$$

求系统的状态模型和传递函数。

解: 首先选择状态变量。令 $x_1(t) = y(t)$, 因此:

$$\dot{x}_1 = \dot{y}(t) \quad (16.12.2)$$

设:

$$x_2 = \dot{x}_1 = \ddot{y}(t) \quad (16.12.3)$$

注意, 系统是二阶的, 状态方程应包含两个一阶方程。

现在有 $\dot{x}_2 = \ddot{y}(t)$, 从式(16.12.1)可求出 \dot{x}_2 的值, 即:

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = -2y(t) - 3\dot{y}(t) + 5z(t) = -2x_1 - 3x_2 + 5z(t) \quad (16.12.4)$$

据式(16.12.2)~(16.12.4), 可写出下面的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} z(t) \quad (16.12.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (16.12.6)$$

现在求传输函数：

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

求逆得：

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{s(s+3)+2}$$

所以，传输函数为：

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{(1 \ 0) \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{s(s+3)+2} = \frac{(1 \ 0) \begin{pmatrix} 5 \\ 5s \end{pmatrix}}{s(s+3)+2} = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

为了检验结果的正确性，对式(16.12.1)的每一项直接求拉普拉斯变换。因为初始条件为零，故有：

$$[s^2 + 3s + 2]Y(s) = 5Z(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$$

与前面的结果相同。

练习 16-12 写出如下微分方程所描述的系统状态变量方程：

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 18 \frac{d^2y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} + 5y = z(t)$$

答案： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -20 & -18 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0 \ 0]$

† 16.6 应用实例

前面已经讨论了拉普拉斯变换的三种应用：电路分析，求传递函数和解线性微积分方程。拉普拉斯变换在其他领域也有广泛使用，如信号处理和控制系统。本节将考虑两种更重要的应用：网络稳定性和网络综合。

16.1.1 网络稳定性

如果电路的冲激响应在 $t \rightarrow \infty$ 时是有界的 ($h(t)$ 收敛于一个有限值)，则电路是稳定的；如果在 $t \rightarrow \infty$ 时 $h(t)$ 的增长没有边界，则电路是不稳定的。用数学语言表示，电路稳定的条件为：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = \text{有限值} \quad (16.26)$$

因为传递函数 $H(s)$ 是冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换，为了使式(16.26)成立， $H(s)$ 必须满足一定要求。 $H(s)$ 可以表示为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (16.27)$$

式中， $N(s)=0$ 的根称为 $H(s)$ 的零点，因为它们使 $H(s)=0$ ，而 $D(s)=0$ 的根称为 $H(s)$ 的极点，因为它们使 $H(s) \rightarrow \infty$ 。 $H(s)$ 的零点和极点通常位于图 16-26a 所示的 s 平面内。参考式(15.47)和(15.48)， $H(s)$ 还可以写成极点形式：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (16.28)$$

为使电路稳定, $H(s)$ 必须满足两个要求。首先, $N(s)$ 的阶数必须低于 $D(s)$ 的阶数; 否则, 用长除法将 $H(s)$ 表示成:

$$H(s) = k_n s^n + k_{n-1} s^{n-1} + \cdots + k_1 s + k_0 + \frac{R(s)}{D(s)} \quad (16.29)$$

式中, $R(s)$ 是长除法的余项, 它的阶数比 $D(s)$ 的阶数低。

式(16.29)中 $H(s)$ 的反变换不满足式(16.26)的条件。其次, 式(16.27)中 $H(s)$ 的所有极点($D(s)=0$ 的根)必须有负实部, 即所有的极点必须落在 s 平面的左半平面, 如图 16-26b 所示。为此, 若对式(16.27)中的 $H(s)$ 做拉普拉斯反变换, 其理由将更加明显。因为式(16.27)与式(15.48)相似, 它的部分分式展开与式(15.49)相似, 因而 $H(s)$ 的反变换与式(15.53)相似。因此:

$$h(t) = (k_1 e^{-p_1 t} + k_2 e^{-p_2 t} + \cdots + k_n e^{-p_n t}) u(t) \quad (16.30)$$

由式(16.30)可知, 为了使 $e^{-p_i t}$ 随着 t 的增加而减小, 每个 p_i 必须是正的(极点 $s = -p_i$ 在 s 平面的左半平面)。

当传输函数 $H(s)$ 的所有极点落在 s 域平面的左半平面时, 电路稳定。

不稳定的电路不会达到稳定状态, 因为其暂态响应不会衰减到零。因此, 稳态分析仅适用于稳定电路。

仅由无源元件(R , L 和 C)和独立电源组成的电路是稳定的, 否则, 当电源为零时, 一些支路电流和电压将无限增长。无源元件不能产生无限增长的响应, 无源电路要么是稳定的, 要么有零实部的极点。为了说明这种情况, 考虑图 16-27 所示串联 RLC 电路。其传递函数为:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC}$$

即 $H(s) = \frac{1/L}{s^2 + sR/L + 1/LC} \quad (16.31)$

注意: $D(s) = s^2 + sR/L + 1/LC = 0$ 和串联 RLC 电路的特征方程(式 8.8)一样。电路的极点在:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (16.32)$$

式中:

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC}$$

当 $R, L, C > 0$ 时, 两个极点总是落在 s 平面的左半平面, 表明电路总是稳定的。但是, 当 $R=0$, $\alpha=0$ 时电路变得不稳定。尽管理想条件下可能出现不稳定状态, 但实际上不会真正发生, 因为 R 不可能为 0。

另一方面, 有源电路或含有受控源的无源电路能提供能量, 它们可能是不稳定的。事实上, 振荡器就是不稳定电路的一个典型的例子。振荡器的传递函数为:

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}$$

因此, 它的输出是正弦波。

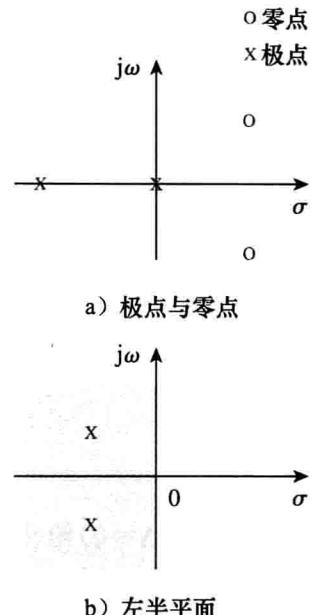


图 16-26 复 s 平面

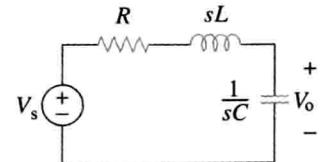


图 16-27 一个典型的 RLC 电路

例 16-13 对于图 16-13 所示电路，确定使电路稳定的 k 值。

解：对图 16-28 所示的一阶电路运用网孔法分析法，得：

$$V_i = \left(R + \frac{1}{sC} \right) I_1 - \frac{I_2}{sC} \quad (16.13.1)$$

和

$$0 = -kI_1 + \left(R + \frac{1}{sC} \right) I_2 - \frac{I_1}{sC}$$

即

$$0 = -\left(k + \frac{1}{sC} \right) I_1 + \left(R + \frac{1}{sC} \right) I_2 \quad (16.13.2)$$

以矩阵形式表示式(16.13.1)和(16.13.2)，得：

$$\begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(R + \frac{1}{sC} \right) & -\frac{1}{sC} \\ -\left(k + \frac{1}{sC} \right) & \left(R + \frac{1}{sC} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

行列式为：

$$\Delta = \left(R + \frac{1}{sC} \right)^2 - \frac{k}{sC} - \frac{1}{s^2 C^2} = \frac{sR^2 C + 2R - k}{sC} \quad (16.13.3)$$

特征方程($\Delta=0$)给出单极点：

$$p = \frac{k - 2R}{R^2 C}$$

当 $k < 2R$ 时， p 是负的。因此，当 $k < 2R$ 时电路稳定，当 $k > 2R$ 时电路不稳定。

练习 16-1 对于图 16-29 所示电路，确定使电路稳定的 β 值。

答案： $\beta > -1/R$

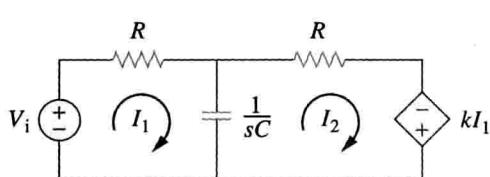


图 16-28 例 16-13 图

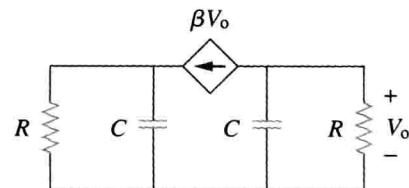


图 16-29 练习 16-13 图

例 16-14 有源滤波器的传递函数如下，求使滤波器稳定的 k 值：

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + s(4-k) + 1}$$

解：该滤波器是二阶滤波器，其传递函数 $H(s)$ 可以写为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{s^2 + bs + c}$$

其中， $b = 4 - k$ ， $c = 1$ ， $N(s) = k$ 。当 $p^2 + bp + c = 0$ 时有极点，极点是：

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

为使电路稳定，极点必须位于 s 域平面的左半平面。这表明 $b > 0$ 。

将其用于给定的 $H(s)$ ，为使电路稳定，应有 $4 - k > 0$ ，即 $k < 4$ 。

练习 16-14 二阶有源电路的传输函数为：

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s(25 + \alpha) + 25}$$

求使电路稳定的 α 的取值范围。产生振荡的 α 值是多少？

答案： $\alpha > -25$ ， $\alpha = -25$

16.6.2 网络综合

网络综合可以视为用一个适当的网络表示给定的传递函数的过程。网络综合在 s 域中比时域中简单。

网络分析的任务是求给定网络的传递函数。在网络综合中，过程反过来：给定传递函数，要设计一个合适的网络实现它。

网络综合就是寻找一个网络表示给定传递函数的过程。

记住，在网络综合中，同一问题可能有多个不同的解，但也可能无解，因为有多个电路可表示同一传递函数。而在网络分析中，只有一个解。

网络综合是一个极具工程重要性的领域。考察传递函数并且提出能表示该传递函数的电路，这对电路设计者来说既是一项令人兴奋的挑战也是一种重要的能力。尽管网络综合本身就是一门课程且需要实践经验，但为激起大家研究网络综合的兴趣，设计了下面两道例题。

例 16-15 若系统的传递函数为：

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{10}{s^2 + 3s + 10}$$

用图 16-30a 所示电路实现这个函数。(a)若 $R=5\Omega$ ，求 L 和 C ；(b)若 $R=1\Omega$ ，求 L 和 C 。

解：1. 明确问题定义。问题已被清晰且完整地定义。这个问题是综合问题：给定传递函数，综合一个能产生该传递函数的电路。但是，为使问题便于处理，给出了期望的电路模型。

如果本例中变量 R 没有给定，那么将会有无穷多个解，因此需要一些附加的假设以限制解的范围。

2. 列出已知条件。表示输出电压与输入电压之比的传递函数是 $10/(s^2 + 3s + 10)$ 。图 16-30 所示电路能够实现期望的传递函数。两个不同的 R 值(5Ω 和 1Ω)用来计算产生给定传递函数的 L 和 C 值。

3. 确定备选方案。所有求解方案都要先确定图 16-30 所示的传递函数，然后匹配传递函数的各项。可用网孔或节点分析法完成该任务。因为求电压比，所以节点分析法最方便。

4. 尝试求解。使用节点分析，得：

$$\frac{V_o(s) - V_i(s)}{sL} + \frac{V_o(s) - 0}{1/(sC)} + \frac{V_o(s) - 0}{R} = 0$$

两边同乘以 sLR ，有：

$$RV_o(s) - RV_i(s) + s^2 RLC V_o(s) + sLV_o(s) = 0$$

合并同类项，得：

$$(s^2 RLC + sL + R)V_o(s) = RV_i(s)$$

即

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/(LC)}{s^2 + [1/(RC)]s + 1/(LC)}$$

匹配两个传递函数，产生两个方程，有三个未知数：

$$LC = 0.1 \quad , \quad L = \frac{0.1}{C}$$

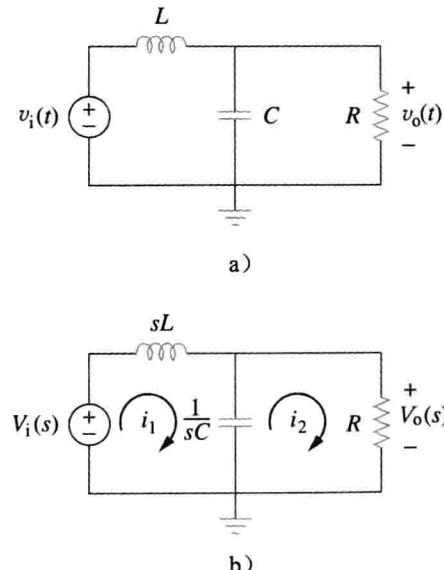


图 16-30 例 16-15 图

和

$$RC = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3R}$$

利用约束方程(a) $R=5\Omega$, (b) $R=1\Omega$, 可求得:

(a) $C=1/(3\times 5)=66.67\text{mF}$, $L=1.5\text{H}$

(b) $C=1/(3\times 1)=333.3\text{mF}$, $L=300\text{mH}$

5. 评估结果。有多种检验答案的方法。用网孔分析法求传递函数是最直接的, 在此, 使用网孔分析法检验答案。但是需要指出, 该方法在数学上更复杂, 且比节点分析法花费的时间更长。当然, 也有其他方法。可以假设输入为 $v_i(t)$, $v_i(t)=u(t)V$, 用网孔分析法或节点分析法, 验证用之前的传递函数能否得到相同的结果。下面用网孔分析法求解上述问题。

设 $v_i(t)=u(t)V$ 或 $V_i(s)=1/s$ 。得:

$$V_o(s) = 10/(s^3 + 3s^2 + 10s)$$

由图 16-30, 用网孔分析法可得:

(a) 对回路 1:

$$-(1/s) + 1.5sI_1 + [1/(0.06667s)](I_1 - I_2) = 0$$

即

$$(1.5s^2 + 15)I_1 - 15I_2 = 1$$

对回路 2:

$$(15/s)(I_2 - I_1) + 5I_2 = 0$$

即

$$-15I_1 + (5s + 15)I_2 = 0 \quad \text{或} \quad I_1 = (0.3333s + 1)I_2$$

代入第一个回路方程, 得:

$$(0.5s^3 + 1.5s^2 + 5s + 15)I_2 - 15I_2 = 1$$

即

$$I_2 = 2/(s^3 + 3s^2 + 10s)$$

所以:

$$V_o(s) = 5I_2 = 10/(s^3 + 3s^2 + 10s)$$

答案得到检验。

(b) 对回路 1:

$$-(1/s) + 0.3sI_1 + [1/(0.3333s)](I_1 - I_2) = 0$$

即

$$(0.3s^2 + 3)I_1 - 3I_2 = 1$$

对回路 2:

$$(3/s)(I_2 - I_1) + I_2 = 0$$

即

$$-3I_1 + (s + 3)I_2 = 0 \quad \text{或} \quad I_1 = (0.3333s + 1)I_2$$

代入第一个回路方程, 得:

$$(0.09999s^3 + 0.3s^2 + s + 3)I_2 - 3I_2 = 1$$

即

$$I_2 = 10/(s^3 + 3s^2 + 10s)$$

所以:

$$V_o(s) = 1 \times I_2 = 10/(s^3 + 3s^2 + 10s)$$

答案得到验证。

6. 是否满意? 对于每一种情况, 明确地给出了 L 和 C 的值。此外, 对结果的正确性

进行了认真的检查。这个问题已经被充分地解决，结果可以作为问题的解提交。

练习 16-15 用图 16-31 所示电路实现如下函数：

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{4s}{s^2 + 4s + 20}$$

设 $R=2\Omega$, 确定 L 和 C 。

答案: 500mH , 100mF

例 16-16 用图 16-32 的拓扑结构, 综合函数：

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$$

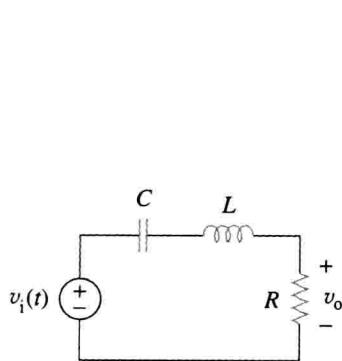


图 16-31 练习 16-15 图

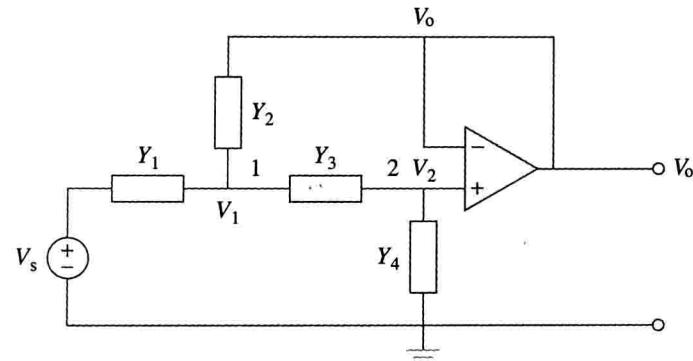


图 16-32 例 16-16 图

解: 对节点 1 和节点 2 应用节点电压分析法, 对节点 1:

$$(V_s - V_1)Y_1 = (V_1 - V_o)Y_2 + (V_1 - V_2)Y_3 \quad (16.16.1)$$

对节点 2:

$$(V_1 - V_2)Y_3 = (V_2 - 0)Y_4 \quad (16.16.2)$$

$V_2 = V_o$, 因此, 式(16.16.1)变为:

$$Y_1 V_s = (Y_1 + Y_2 + Y_3) V_1 - (Y_2 + Y_3) V_o \quad (16.16.3)$$

式(16.16.2)变为:

$$V_1 Y_3 = (Y_3 + Y_4) V_o$$

即

$$V_1 = \frac{1}{Y_3} (Y_3 + Y_4) V_o \quad (16.16.4)$$

将式(16.16.4)代入(16.16.3)得:

$$Y_1 V_s = (Y_1 + Y_2 + Y_3) \frac{1}{Y_3} (Y_3 + Y_4) V_o - (Y_2 + Y_3) V_o$$

即

$$Y_1 Y_3 V_s = [Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)] V_o$$

因此:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)} \quad (16.16.5)$$

为了综合给定的传递函数 $T(s)$, 将它和式(16.16.5)比较。注意两点: (1) $Y_1 Y_3$ 必须不能涉及 s , 因为 $T(s)$ 的分子是常数; (2) 给定的传递函数是二阶的, 这隐含了必须有两个电容。因此, Y_1 和 Y_3 是电阻, 而 Y_2 和 Y_4 是电容。因此, 选择:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = sC_1, \quad Y_3 = \frac{1}{R_2}, \quad Y_4 = sC_2 \quad (16.16.6)$$

将式(16.16.6)代入式(16.16.5), 得:

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{1/(R_1 R_2)}{1/(R_1 R_2) + sC_2(1/R_1 + 1/R_2 + sC_1)} = \frac{1/(R_1 R_2 C_1 C_2)}{s^2 + s(R_1 + R_2)/(R_1 R_2 C_1) + 1/(R_1 R_2 C_1 C_2)}$$

将它和给定的传递函数 $T(s)$ 对比, 得到:

$$\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 10^6, \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} = 100$$

如果选 $R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega$, 则:

$$C_1 = \frac{R_1 + R_2}{100 R_1 R_2} = \frac{20 \times 10^3}{100 \times 100 \times 10^6} = 2\mu\text{F}, \quad C_2 = \frac{10^{-6}}{R_1 R_2 C_1} = \frac{10^{-6}}{100 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6}} = 5\text{nF}$$

至此, 给定的传递函数已用图 16-33 所示电路实现。

练习 16-16 用图 16-34 所示的运算放大器电路, 综合函数:

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}} = \frac{-2s}{s^2 + 6s + 10}$$

选择:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, Y_2 = sC_1, Y_3 = sC_2, Y_4 = \frac{1}{R_2}$$

设 $R_1 = 1\text{k}\Omega$, 确定 C_1 、 C_2 和 R_2 的值。

答案: $100\mu\text{F}$, $500\mu\text{F}$, $2\text{k}\Omega$

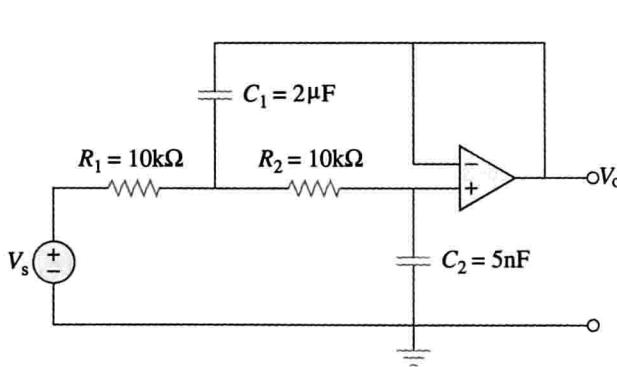


图 16-33 例 16-16 图

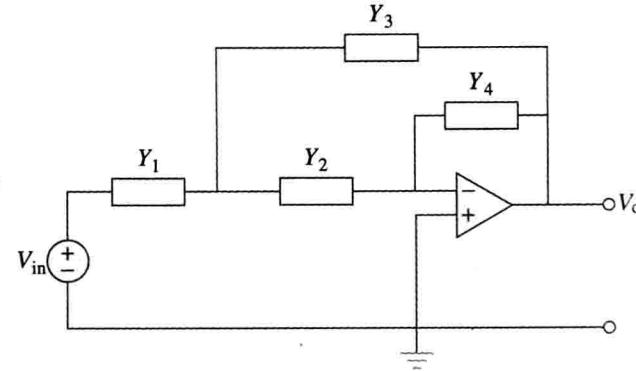


图 16-34 练习 16-16 图

16.7 本章小结

- 拉普拉斯变换可用来分析电路, 将电路元件模型从时域变换到 s 域, 使用电路分析技术求解问题, 再将结果由 s 域转换回时域。
- 在 s 域, 电路元件用具有 $t=0$ 时刻的初始条件的模型替代如下(注意, 下面给出的是电压模型, 但同样可以给出相应的电流模型):

电阻	$v_R = Ri \rightarrow v_R = RI$
电感	$v_L = L \frac{di}{dt} \rightarrow V_L = sLI - Li(0^-)$
电容	$v_C = \int idt \rightarrow V_C = \frac{1}{sC} - \frac{v(0^-)}{s}$
- 使用拉普拉斯变换分析电路得到的结果是全响应(暂态响应和稳态响应), 因为初始条件包含在变换过程中。
- 网络的传递函数 $H(s)$ 是冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。
- 在 s 域, 传递函数 $H(s)$ 将输出响应 $Y(s)$ 与输入激励 $X(s)$ 联系了起来, 即 $H(s) = Y(s)/X(s)$ 。
- 状态变量模型是分析多输入-多输出复杂系统的有用工具。状态变量分析是一项强有力的技术, 它在电路理论和控制系统中应用广泛。系统的状态是为了决定系统对任意给定输入的响应所必须知道的最少物理量(状态变量)的集合。用状态变量表示的状态方程为:

$$\dot{x} = Ax + Bz$$

而其输出方程为:

$$y = Cx + Dz$$

如果初始条件为 $v(0)=0=\frac{dv(0)}{dt}$, 求 $v(t)$ 。

- 9 描述串联 RLC 电路的微分方程为:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 2$$

当 $L=0.5\text{H}$ 、 $R=4\Omega$ 、 $C=0.2\text{F}$ 时, 求电路响应。设 $i(0^-)=1\text{A}$, $[di(0^-)/dt]=0$ 。

- 10 串联 RLC 电路的阶跃响应是:

$$V_C = (40 - 10e^{-2000t} - 10e^{-4000t})\text{V}, t > 0$$

$$i_L(t) = (3e^{-2000t} + 6e^{-4000t})\text{mA}, t > 0$$

(a)求 C ; (b)确定电路的阻尼类型。

- 11 并联 RLC 电路的阶跃响应是:

$$v = 10 + 20e^{-300t}(\cos 400t - 2\sin 400t)\text{V}, t \geq 0$$

电感是 50mH , 求 R 和 C 。

- 12 用拉普拉斯变换求图 16-35 所示电路的 $i(t)$ 。

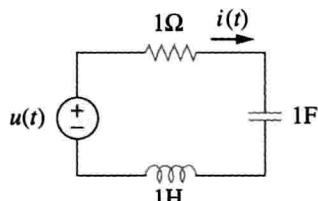


图 16-35 习题 12 图

- 13 利用图 16-36 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何用拉普拉斯变换进行电路分析。 ED

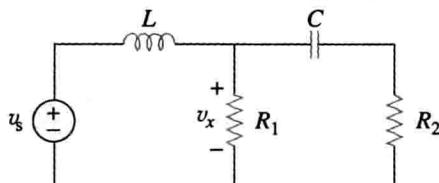


图 16-36 习题 13 图

- 14 对于图 16-37 所示电路, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。
假设 $i_s(t) = [4u(t) + 2\delta(t)]\text{mA}$ 。

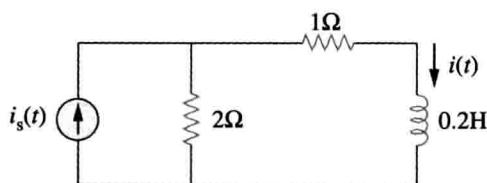


图 16-37 习题 14 图

- 15 对于图 16-38 所示电路, 求使电路处于临界阻尼响应的 R 值。

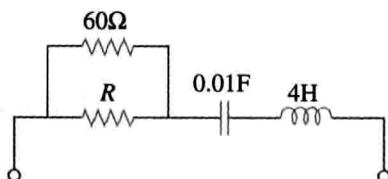


图 16-38 习题 15 图

- 16 在图 16-39 所示的电路中, 电容初始时没充电。求 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。

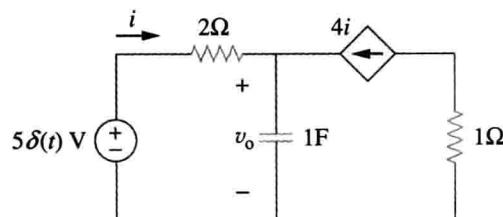


图 16-39 习题 16 图

- 17 在图 16-40 所示电路中, 如果 $i_s(t) = e^{-2t}u(t)\text{A}$, 求 $i_o(t)$ 的值。

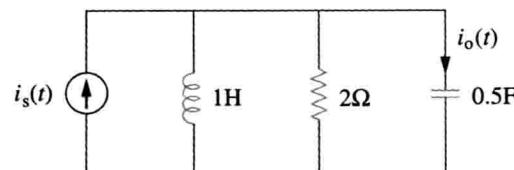


图 16-40 习题 17 图

- 18 在图 16-41 所示电路中, 设 $v_s = 20\text{V}$, 求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

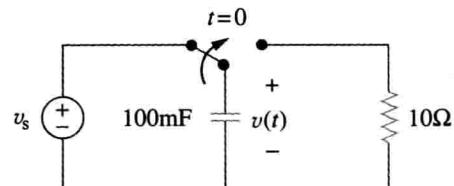


图 16-41 习题 18 图

- 19 图 16-42 所示电路中, 在 $t=0$ 时开关由位置 A 移向位置 B(注意, 开关在与 A 点断开之前必须连接到 B 点, 即先通后断开关)。求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

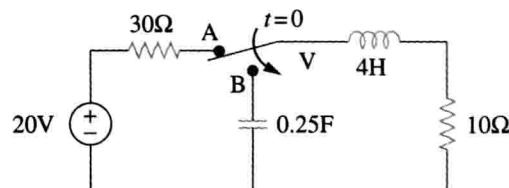


图 16-42 习题 19 图

- 20 对于图 16-43 所示电路, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

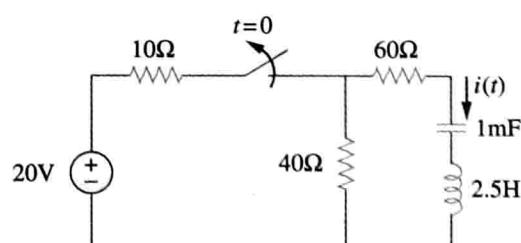


图 16-43 习题 20 图

- 21 在图 16-44 所示电路中, 开关在 $t=0$ 时刻从位置 A 移动(先通后断开关)到位置 B。求 $t \geq 0$ 时的 $v(t)$ 。

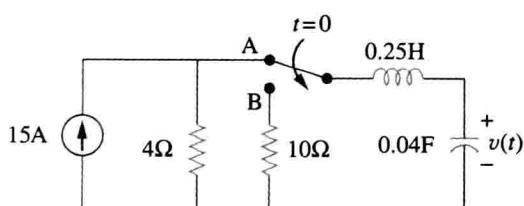


图 16-44 习题 21 图

- 22 对于图 16-45 所示电路，求 $t > 0$ 时电容两端的电压。假设 $t = 0^-$ 时电路处于稳态。

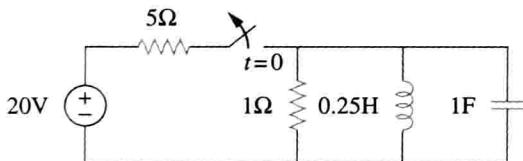


图 16-45 习题 22 图

- 23 对于图 16-46 所示电路，求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

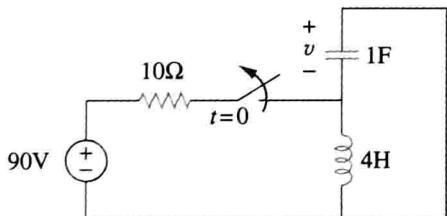


图 16-46 习题 23 图

- 24 对于图 16-47 所示电路，换路前开关已经闭合很长时间，在 $t = 0$ 时开关断开，求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

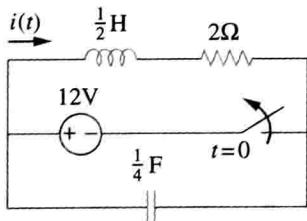


图 16-47 习题 24 图

- 25 在图 16-48 所示电路中，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

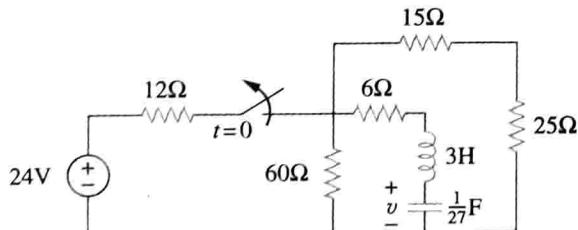


图 16-48 习题 25 图

- 26 图 16-49 中的开关在 $t = 0$ 时从 A 位置移动到 B 位置(注意，开关在和 A 点断开连接之前必须连接到 B 点，即先通后断开关)。求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。假设电容的初始电压为零。

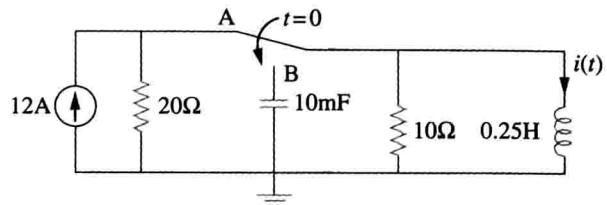


图 16-49 习题 26 图

- 27 在图 16-50 所示电路中，求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

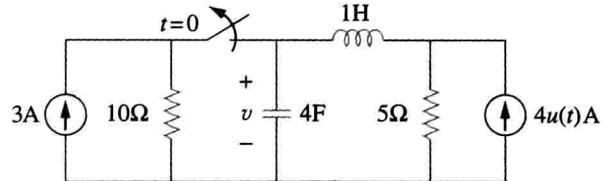


图 16-50 习题 27 图

- 28 对于图 16-51 所示电路，求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

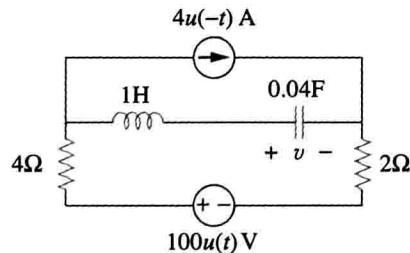


图 16-51 习题 28 图

- 29 在图 16-52 所示电路中，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

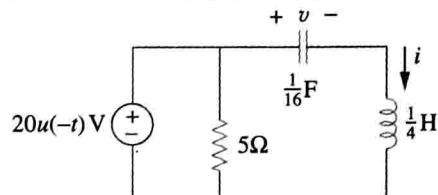


图 16-52 习题 29 图

- 30 在图 16-53 所示电路中，求 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。

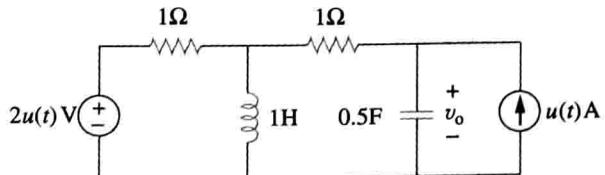


图 16-53 习题 30 图

- 31 在图 16-54 所示电路中，求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

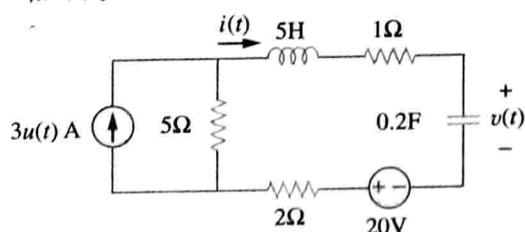


图 16-54 习题 31 图

32 对于图 16-55 所示网络，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

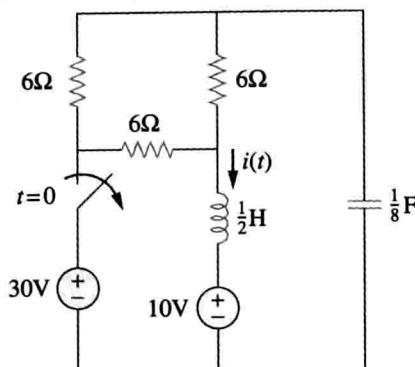


图 16-55 习题 32 图

33 使用图 16-56 设计一个问题，帮助其他同学理解怎样使用戴维南定理(在 s 域)辅助电路分析。
ED

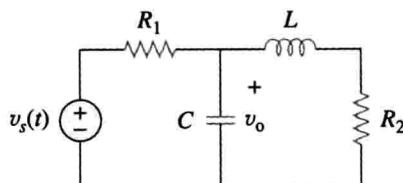


图 16-56 习题 33 图

34 求解图 16-57 所示电路的网孔电流，给出 s 域结果。

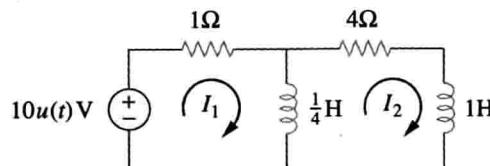


图 16-57 习题 34 图

35 求图 16-58 所示电路的 $v_o(t)$ 。

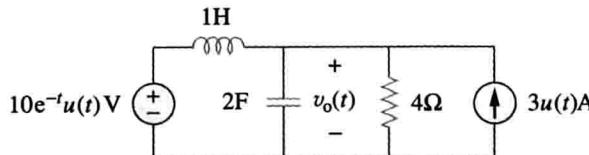


图 16-58 习题 35 图

36 对于图 16-59 所示电路，计算 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

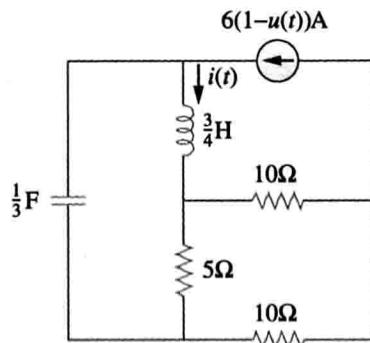


图 16-59 习题 36 图

37 在图 16-60 所示电路中，求 $t>0$ 时的 v 。

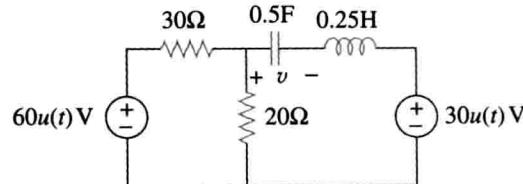


图 16-60 习题 37 图

38 图 16-61 中的电路的开关在 $t=0$ 时从位置 a 移到位置 b (先通后断开关)，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

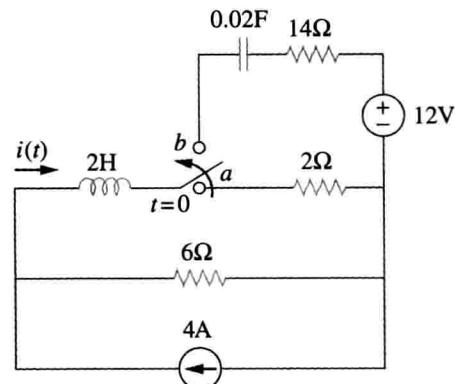


图 16-61 习题 38 图

39 对于图 16-62 所示网络，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

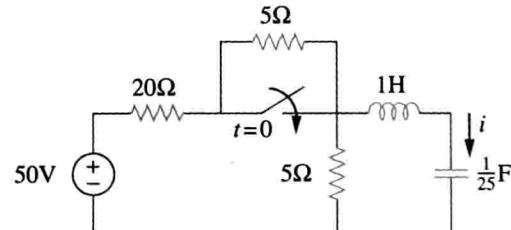


图 16-62 习题 39 图

40 在图 16-63 所示电路中，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。假设 $v(0)=0V$, $i(0)=1A$ 。

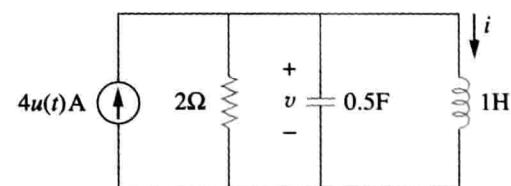


图 16-63 习题 40 图

41 在图 16-64 所示电路中，求输出电压 $v_o(t)$ 。

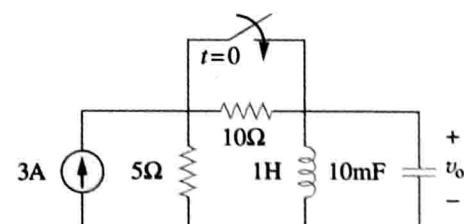


图 16-64 习题 41 图

42 电路如图 16-65 所示，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

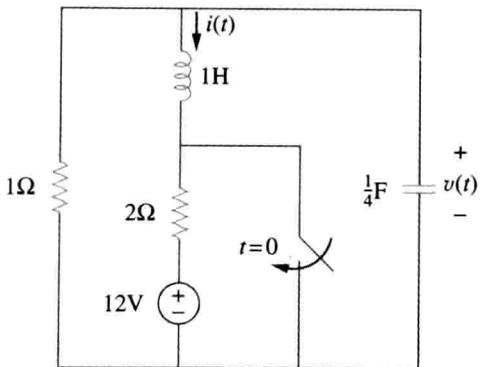


图 16-65 习题 42 图

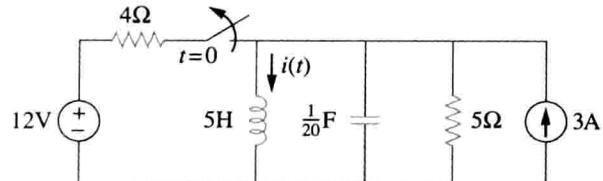
43 电路如图 16-66 所示, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

图 16-66 习题 43 图

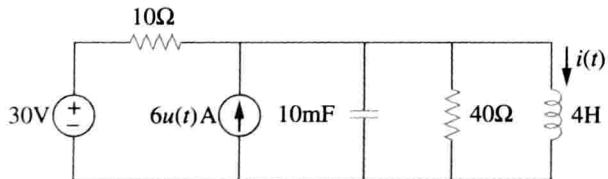
44 电路如图 16-67 所示, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

图 16-67 习题 44 图

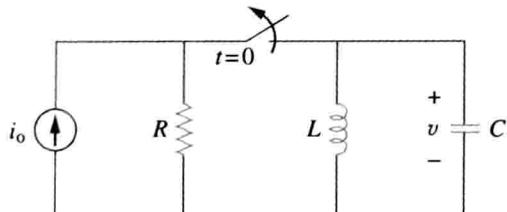
45 求图 16-68 所示电路在 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

图 16-68 习题 45 图

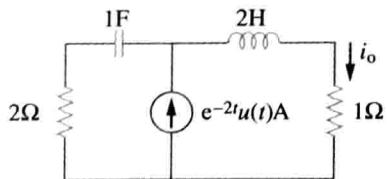
46 在图 16-69 所示电路中, 求 $i_o(t)$ 。

图 16-69 习题 46 图

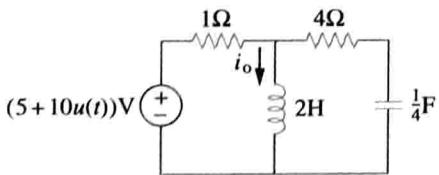
47 求图 16-70 所示网络的 $i_o(t)$ 。

图 16-70 习题 47 图

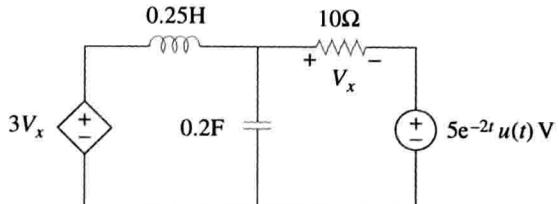
48 在图 16-71 所示电路中, 求 $V_x(s)$ 。

图 16-71 习题 48 图

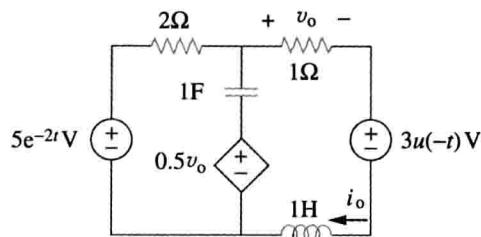
49 电路如图 16-72 所示, 求 $t>0$ 时的 $i_o(t)$ 。

图 16-72 习题 49 图

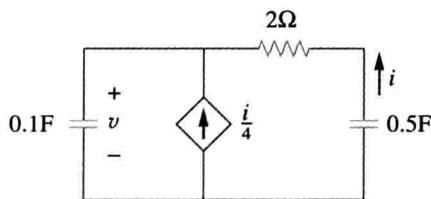
50 对于图 16-73 所示电路, 求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。假设 $v(0^+)=4V$, $i(0^+)=2A$ 。

图 16-73 习题 50 图

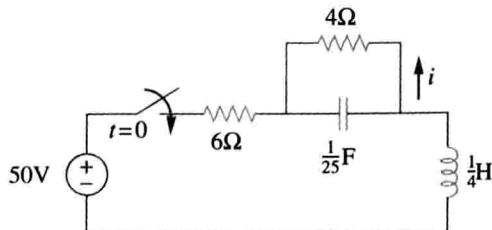
51 电路如图 16-74 所示, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

图 16-74 习题 51 图

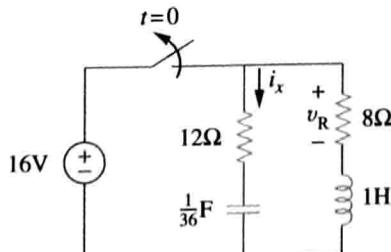
52 在图 16-75 所示的电路中, 开关在 $t=0$ 时已经闭合了很长时间, 在 $t=0$ 时开关断开, 求 $t>0$ 时的 i_x 、 v_R 。

图 16-75 习题 52 图

53 在图 16-76 所示电路中, 开关处在位置 1 很长时间, 但在 $t=0$ 时刻切换到位置 2, 求: (a)

$v(0^+)$, $dv(0^+)/dt$; (b) $t \geq 0$ 时的 $v(t)$ 。

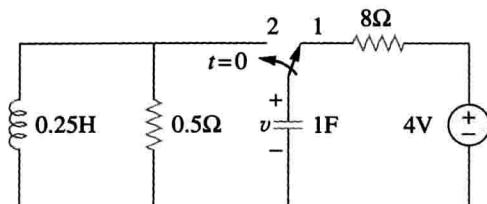


图 16-76 习题 53 图

- 54 在图 16-77 所示电路中, $t < 0$ 时开关一直在位置 1, 在 $t = 0$ 时开关从位置 1 切换到电容顶端。注意, 此开关为先通后断开关, 即开关将处在位置 1 直到它连接电容的顶端, 然后再断开与位置 1 的连接。求 $v(t)$ 。

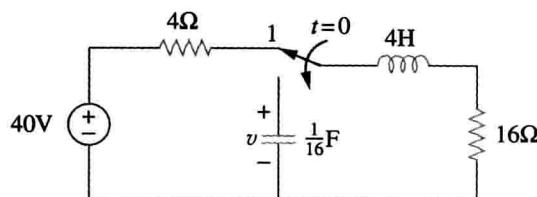


图 16-77 习题 54 图

- 55 在图 16-78 所示电路中, 求 $t > 0$ 时的 i_1 、 i_2 。

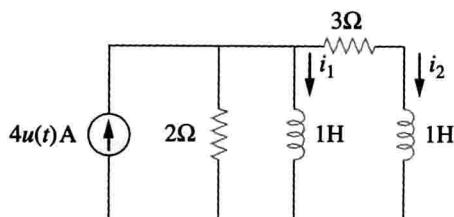


图 16-78 习题 55 图

- 56 在图 16-79 所示网络中, 计算 $t > 0$ 时的 $i_o(t)$ 。

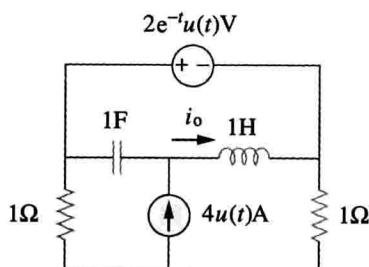


图 16-79 习题 56 图

- 57 (a)求图 16-80a 所示电路中电压的拉普拉斯变换; (b)在图 16-80b 所示电路中, 用给定的 $v_s(t)$ 值求 $v_o(t)$ 的值。

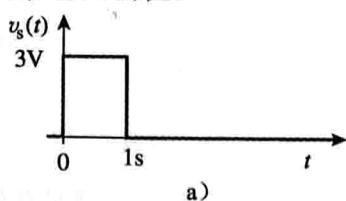


图 16-80 习题 57 图

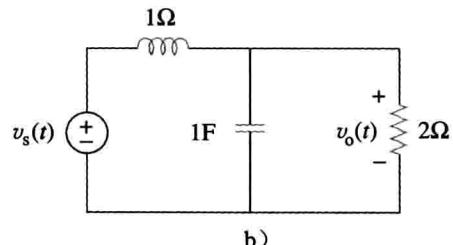


图 16-80 (续)

- 58 利用图 16-81 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解 s 域的带有受控源的电路分析。 ED

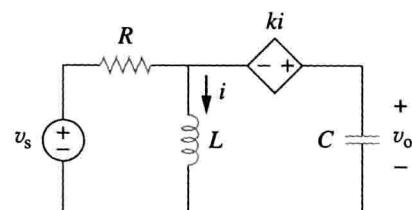


图 16-81 习题 58 图

- 59 在图 16-82 所示电路中, 如果 $v_x(0) = 2V$, $i(0) = 1A$, 求 $v_o(t)$ 。

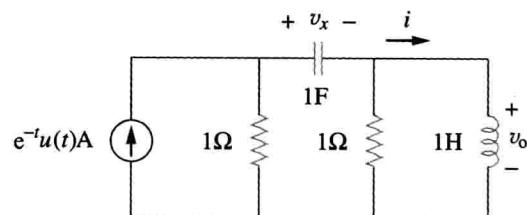


图 16-82 习题 59 图

- 60 在图 16-83 所示电路中, 求 $t > 0$ 时的响应 $v_R(t)$, 设 $R = 3\Omega$, $L = 2H$, $C = 1/18F$ 。

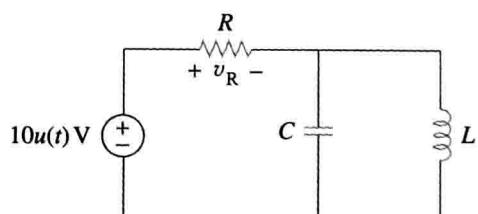


图 16-83 习题 60 图

- * 61 在图 16-84 所示电路中, 用拉普拉斯变换法求电压 $v_o(t)$ 。

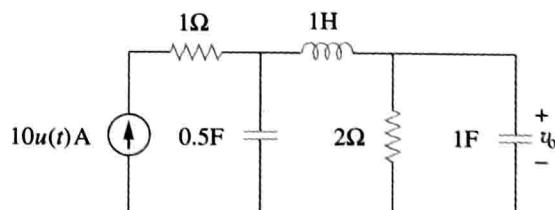


图 16-84 习题 61 图

- 62 利用图 16-85 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何用 s 域方法求节点电压。 ED

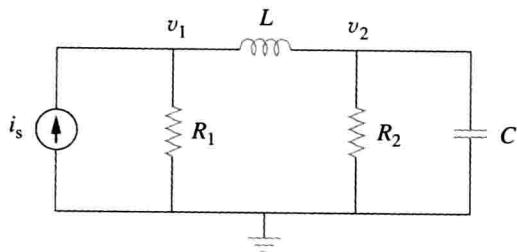


图 16-85 习题 62 图

- 63 考虑图 16-86 所示的并联 RLC 电路，假设 $v(0)=5V$, $i(0)=-2A$, 求 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

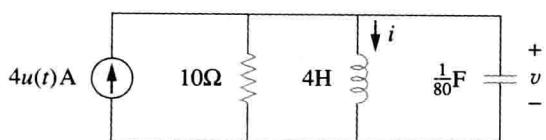


图 16-86 习题 63 图

- 64 图 16-87 所示电路中，开关在 $t=0$ 时从位置 1 切换到位置 2，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

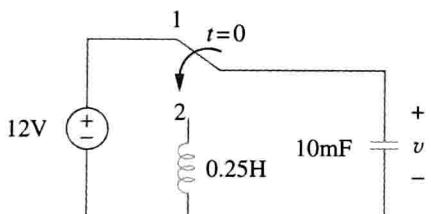


图 16-87 习题 64 图

- 65 在图 16-88 所示的 RLC 电路中，当 $v(0)=2V$ 时开关闭合时，求全响应。

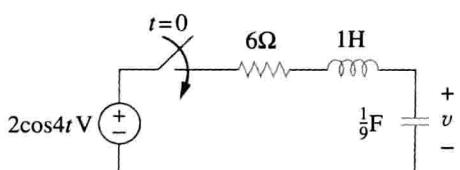


图 16-88 习题 65 图

- 66 对于图 16-89 所示的运算放大器电路，求 $t>0$ 时的 $v_o(t)$ ，其中 $v_s=3e^{-5t}u(t)V$ 。

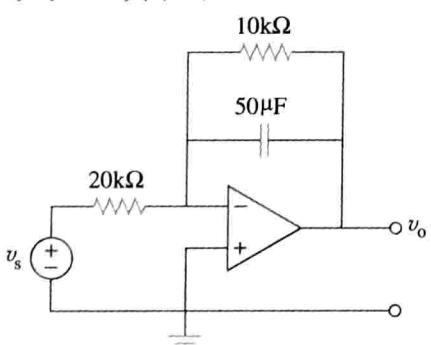


图 16-89 习题 66 图

- 67 图 16-90 所示的运算大电路中，如果 $v_1(0^+)=2V$, $v_2(0^+)=0V$, 求 $t>0$ 时的 v_o 。设 $R=100k\Omega$, $C=1\mu F$ 。

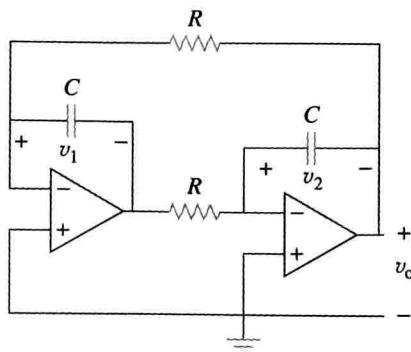


图 16-90 习题 67 图

- 68 在图 16-91 所示的运算放大电路中，求 V_o/V_s 。

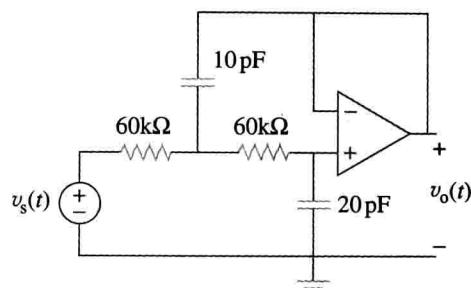


图 16-91 习题 68 图

- 69 在图 16-92 所示的电路中，求 $I_1(s)$ 和 $I_2(s)$ 。

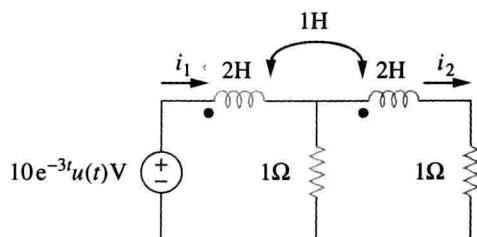


图 16-92 习题 69 图

- 70 利用图 16-93 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解怎样在 s 域分析含有互耦合元件电路。 ED

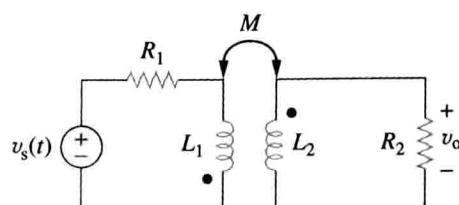


图 16-93 习题 70 图

- 71 对于图 16-94 所示含有理想变压器的电路，求 $i_o(t)$ 。

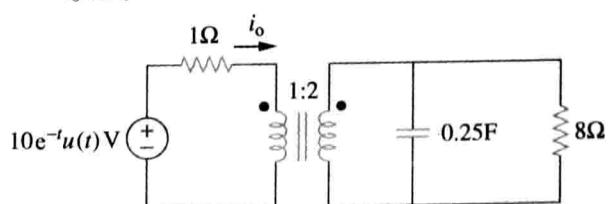


图 16-94 习题 71 图

16.4 节

72 系统的传递函数为:

$$H(s) = \frac{s^2}{3s+1}$$

当系统输入为 $4e^{-t/3}u(t)$ 时求输出。

73 系统的单位阶跃响应为 $10\cos 2tu(t)$, 求系统的传递函数。

74 设计一个问题帮助其他同学更好地理解给定传递函数和输入激励时如何求输出。 **ED**

75 系统单位阶跃响应为:

$$y(t) = \left[4 + \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t}(2\cos 4t + 3\sin 4t) \right] u(t)$$

求系统的传递函数。

76 对于图 16-95 所示电路, 假设初始条件为零, 求 $H(s) = V_o(s)/V_s(s)$ 。

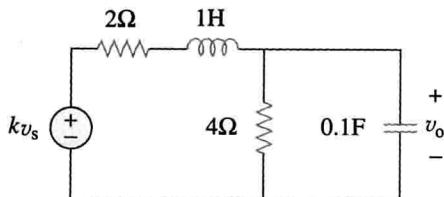


图 16-95 习题 76 图

77 对于图 16-96 所示电路, 求传递函数 $H(s) = V_o/V_s$ 。

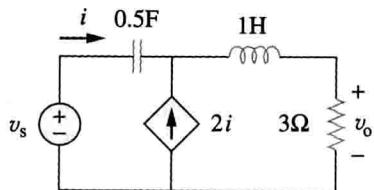


图 16-96 习题 77 图

78 电路的传递函数为:

$$H(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{6}{s+4}$$

求电路的冲激响应。

79 对于图 16-97 所示电路, 求: (a) I_1/V_s ; (b) I_2/V_x 。

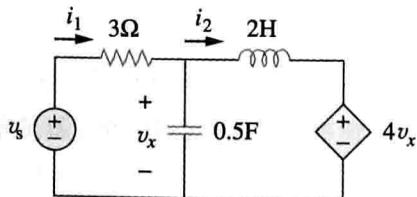


图 16-97 习题 79 图

80 根据图 16-98 所示的网络, 求出下面的传递函数:
(a) $H_1(s) = V_o(s)/V_s(s)$; (b) $H_2(s) = V_o(s)/I_s(s)$;
(c) $H_3(s) = I_o(s)/I_s(s)$; (d) $H_4(s) = I_o(s)/V_s(s)$

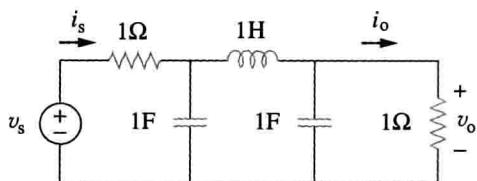


图 16-98 习题 80 图

81 对于图 16-99 所示的运算放大器电路, 假设所有的初始条件为零, 求传递函数 $T(s) = I_o(s)/V_s(s)$ 。

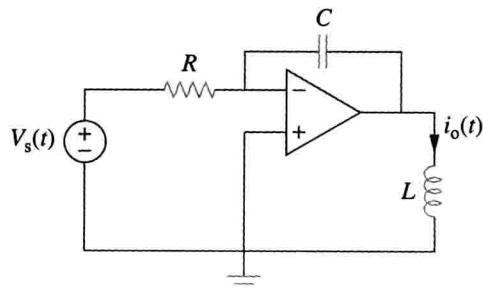


图 16-99 习题 81 图

82 对于图 16-100 所示的运算放大电路, 计算增益 $H(s) = V_o/V_s$ 。

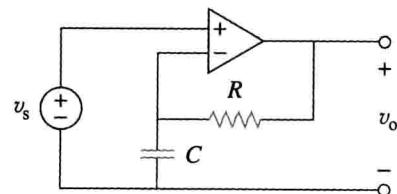


图 16-100 习题 82 图

83 依据图 16-101 所示的 RL 电路, 求: (a) 电路的冲激响应 $h(t)$; (b) 电路的单位阶跃响应。

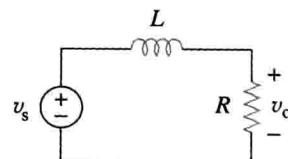


图 16-101 习题 83 图

84 并联 RL 电路中 $R=4\Omega$, $L=1H$, 输入是 $i_s(t)=2e^{-2t}u(t)A$ 。假设 $i_L(0)=-2A$, 求 $t>0$ 时的电感电流 $i_L(t)$ 。

85 电路的传输函数如下, 求冲激响应:

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

16.5 节

86 求习题 12 的状态方程。

87 求习题 13 中你设计的问题的状态方程。

88 求图 16-102 所示电路的状态方程。

89 求图 16-103 所示电路的状态方程。

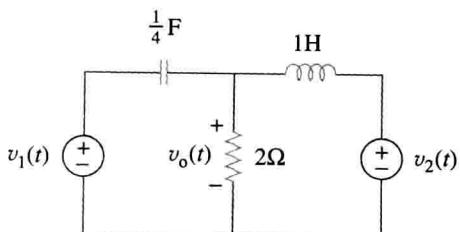


图 16-102 习题 88 图

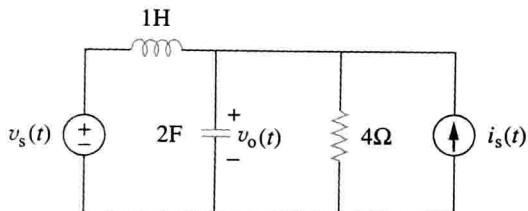


图 16-103 习题 89 图

90 求图 16-104 所示电路的状态方程。

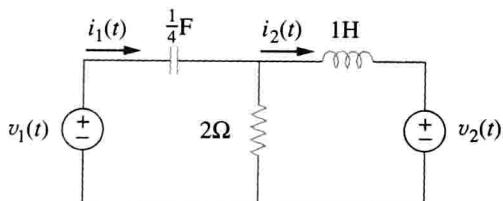


图 16-104 习题 90 图

91 求下面微分方程的状态方程:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{6dy(t)}{dt} + 7y(t) = z(t)$$

* 92 求下面微分方程的状态方程:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{7dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + z(t)$$

* 93 求下面微分方程的状态方程:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{6d^2y(t)}{dt^2} + \frac{11dy(t)}{dt} + 6y(t) = z(t)$$

* 94 给定下面的状态方程, 求解 $y(t)$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0]x$$

* 95 给定下面的状态方程, 求 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ 2u(t) \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ 2u(t) \end{bmatrix}$$

16.6 节

96 证明图 16-105 所示并联 RLC 电路是稳定的。

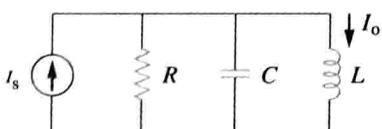


图 16-105 习题 96 图

97 图 16-106 所示系统由两个系统级联而成, 假

设系统的冲激响应为:

$$h_1(t) = 3e^{-t}u(t), \quad h_2(t) = e^{-4t}u(t)$$

(a) 求整个系统的冲激响应。(b) 检查整个系统是否是稳定。

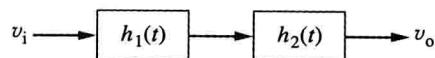


图 16-106 习题 97 图

98 确定图 16-107 所示运算放大电路是否稳定。

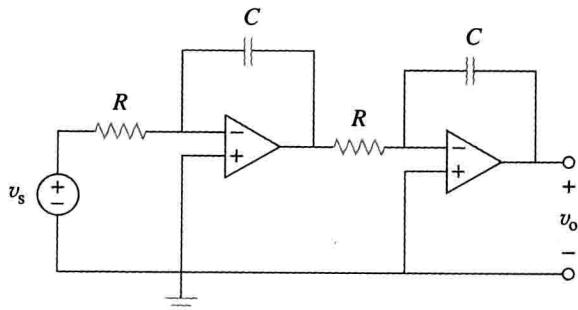


图 16-107 习题 98 图

99 用图 16-108 所示电路实现传递函数:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 6}$$

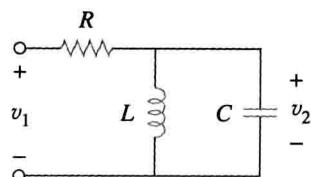
选择 $R=1\text{k}\Omega$, 求 L 和 C 。

图 16-108 习题 99 图

100 利用图 16-109 设计一个运算放大电路, 实现下面的传递函数:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{s+1000}{2(s+4000)}$$

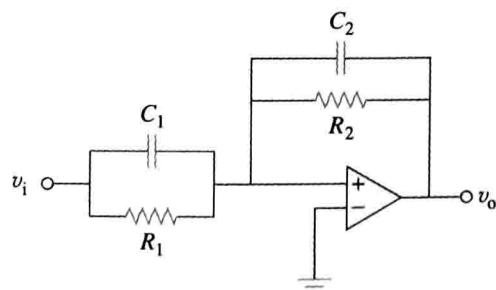
选择 $C_1=10\mu\text{F}$, 求 R_1 、 R_2 和 C_2 。

图 16-109 习题 100 图

101 用图 16-110 所示的电路实现传递函数:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{s}{s+10}$$

设 $Y_1 = sC_1$, $Y_2 = 1/R_1$, $Y_3 = sC_2$ 。选择 $R_1=1\text{k}\Omega$, 求 C_2 和 C_3 。

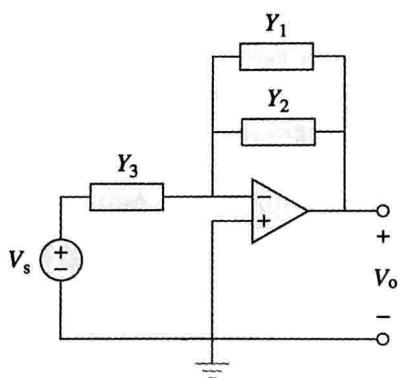


图 16-110 习题 101 图

102 用图 16-111 所示的拓扑结构综合传递函数：

综合理解题

103 图 16-112 所示运放电路的传递函数为：

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{as}{s^2 + bs + c}$$

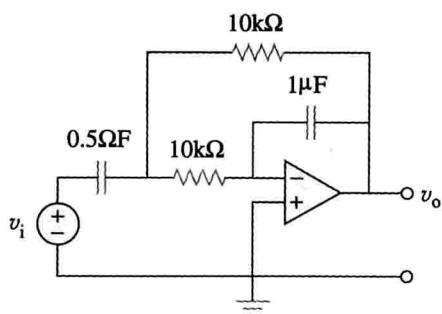
其中 a 、 b 和 c 为常数，确定这些常数。

图 16-112 习题 103 图

104 某网络的输入导纳为 $Y(s)$ ，它在 $s = -3$ 处有一个极点，在 $s = -1$ 处有一个零点，且 $Y(\infty) = 0.25S$ 。（a）求 $Y(s)$ 。（b）一个端电

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{10^6}{s^2 + 100s + 10^6}$$

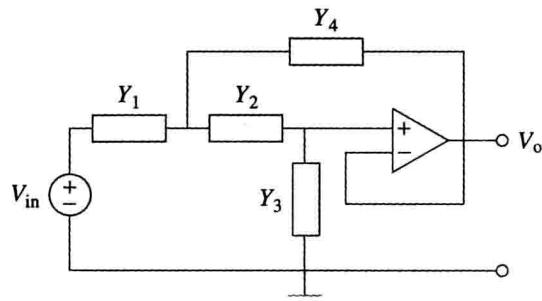
设 $Y_1 = 1/R_1$, $Y_2 = 1/R_2$, $Y_3 = sC_1$, $Y_4 = sC_2$, 选择 $R_1 = 1\text{k}\Omega$, 求 C_1 、 C_2 和 R_2 。

图 16-111 习题 102 图

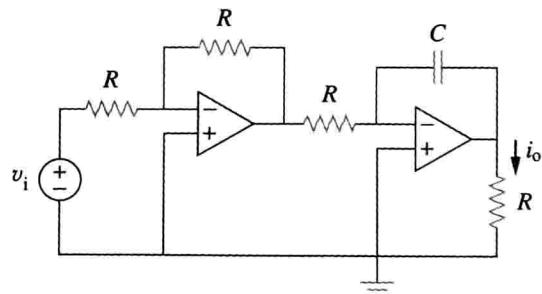
压 8V 的电池通过一个开关连接到该网络上，如果开关在 $t=0$ 时刻闭合，用拉普拉斯变换求出通过 $Y(s)$ 的电流 $i(t)$ 。105 回转器是一个模拟网络中电感器的装置。图 16-113 是一个基本的回转器电路，通过求 $V_i(s)/I_o(s)$ ，证明回转器产生的电感为 $L = CR^2$ 。
ED

图 16-113 习题 105 图

第17章

傅里叶级数

研究就是先了解别人都发现了什么，然后思考还有那些别人没考虑到的地方。

——Albert Szen Györgyi

增强技能与拓展事业

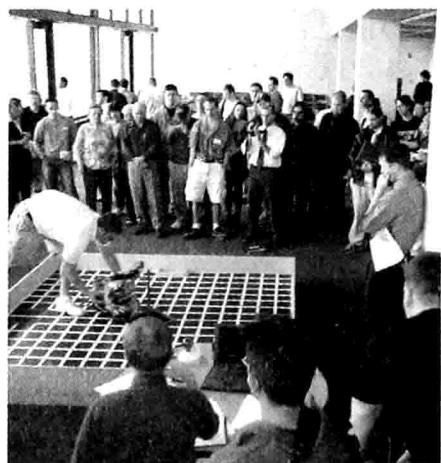
ABET 工程标准 2000(3.j), “与当代问题相关的知识。”

工程师必须具备与当代问题相关的知识。为了在 21 世纪获得真正有意义的职业，你必须掌握和当代问题相关的知识，特别是那些可能直接影响你工作的知识。实现这一目标的最简单的方法就是大量地阅读报纸、杂志和当代书籍。如果你注册了 ABET 认证项目，可以通过学习相关课程满足这个标准。

ABET 工程标准 2000(3.k), “工程实践所需的技术、能力和现代工程工具的运用能力”

一名成功的工程师必须具备“工程实践所需的技术、能力和现代工程工具的运用能力”。本书主要目标是帮助大家获取这种能力。能够灵活使用工具来构建“知识获取集成设计环境”(KCIDE)是一个现代工程师应具备的最基本素质。在一个现代的 KCIDE 环境中工作，必须全面地掌握相关的工具。

成功的工程师必须掌握设计、分析和仿真工具的最新情况。工程师应该不断使用这些工具直到能灵活运用它们。工程师也必须确保软件结果与实际情况相一致，这个问题困扰着大多数工程师。因此，若要成功地将这些工具应用于你所从事的领域，必须不断地学习新知识，温习旧知识。



由 Charles Alexander 摄拍

历史珍闻

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768—1830)，法国数学家，提出了傅里叶级数和傅里叶变换。傅里叶的研究成果起初并未得到科学界的接受，甚至未能发表。

傅里叶出生在法国的欧克塞尔(Auxerre)，在 8 岁时成了孤儿。他加入了由圣本笃会(Benedictine)僧侣开办的军事学院，在那里他展示了非凡的数学才能。像他的大多数同龄人一样，傅里叶被卷入了法国革命的政治运动中。在 18 世纪 90 年代后期，傅里叶在拿破仑对埃及的远征中起到了很重要的作用。由于介入政治太深，他两次险些丧命。



© Hulton Archive/Getty

17.1 引言

前面已经使用了相当多的篇幅介绍正弦信号源电路的分析。本章将主要介绍激励源为周期非正弦信号的电路分析方法。第9章已经介绍了周期函数的概念，同时指出正弦函数是最简单、同时也是最有用的周期函数。本章将要介绍的傅里叶级数是利用正弦信号表示周期函数的一种方法。一旦激励源被表示成正弦函数之和，就可以应用相量法进行电路分析。

傅里叶级数以傅里叶(1768—1830)的名字命名。1822年，傅里叶创造性地提出，任何实际的周期函数都可以表示成若干个正弦函数之和。将这种表示方法与叠加定理相结合，就可以利用相量分析法分析任意周期输入信号下的响应函数。

本章首先介绍三角函数形式的傅里叶级数和指数形式的傅里叶级数，然后讨论利用傅里叶级数进行电路分析的方法，最后介绍傅里叶级数的两个实际应用——频谱分析仪和滤波器。

17.2 三角函数形式的傅里叶级数

在研究热流的过程中，傅里叶发现，一个非正弦的周期函数能表示成无限多项正弦函数和的形式。回顾前面学习的内容，周期函数就是每隔 T 秒重复一次的函数，即周期函数 $f(t)$ 满足：

$$f(t) = f(t + nT) \quad (17.1)$$

式中， n 是整数， T 是周期函数的周期。

根据傅里叶定理，任何一个频率为 ω_0 的实际周期函数都可以表示成无穷多个频率为 ω_0 的整数倍的正弦或余弦函数之和。因此， $f(t)$ 可以表示为：

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t \\ & + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots \end{aligned} \quad (17.2)$$

即

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{直流}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)}_{\text{交流}} \quad (17.3)$$

其中， $\omega_0 = 2\pi/T$ ，称为基波频率(fundamental frequency)，单位是弧度每秒。 $\sin n\omega_0 t$ 或 $\cos n\omega_0 t$ 称为 $f(t)$ 的第 n 次谐波；如果 n 是奇数，则称为奇次谐波，如果 n 是偶数，则称为偶次谐波。式(17.3)称为 $f(t)$ 的三角函数形式的傅里叶级数。常数 a_n 和 b_n 是傅里叶系数，系数 a_0 是直流分量或 $f(t)$ 的平均值(正弦函数的平均值为零)。系数 a_n 和 b_n ($n \neq 0$)是正弦交流分量的振幅。

周期函数 $f(t)$ 的傅里叶级数是将 $f(t)$ 分解为直流分量和无穷多个正弦谐波级数组成的交流分量的表示形式。

提示：谐波频率 ω_n 是基频 ω_0 的整数倍，即 $\omega_n = n\omega_0$ 。

因为式(17.3)中的无穷级数可能收敛，可能不收敛，所以能够表示成式(17.3)所示傅里叶级数的函数必须满足一定要求。可以用收敛的傅里叶级数表示的 $f(t)$ 应满足如下条件：

1. $f(t)$ 处处为单值函数。

2. $f(t)$ 在任一周期内的有限间断点(第一类间断点)个数有限。

3. $f(t)$ 在任一周期内的极大值和极小值个数有限。

4. 对于任意 t_0 ，积分 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$ 。

这些条件称为狄利克雷条件，尽管不是必要条件，但它们却是傅里叶级数存在的充分条件。

提示：尽管傅里叶在 1822 年发表他的定理，却是狄利克雷(1805—1895)后来给出了这个定理令人信服的证明。

傅里叶级数展开的主要任务就是确定傅里叶系数 a_0 、 a_n 、 b_n 。确定这些系数的过程称为傅里叶分析。在傅里叶分析中，下面的三角函数积分是非常有用的。对于任意整数 m 和 n 而言：

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (17.4a)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (17.4b)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad (17.4c)$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0, \quad (m \neq n) \quad (17.4d)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0, \quad (m \neq n) \quad (17.4e)$$

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (17.4f)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (17.4g)$$

提示：Mathcad 或 Maple 等软件也可以用来求傅里叶级数。

下面利用上述等式求傅里叶系数。

首先求 a_0 ，在一个周期内，对式(17.3)两边求积分，得：

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] dt \\ &= \int_0^T a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t dt + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t dt \right] dt \end{aligned} \quad (17.5)$$

由式(17.4a)和(17.4b)可知，包含交流项的两个积分为零，因此：

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt = a_0 T$$

即

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (17.6)$$

表明 a_0 是函数 $f(t)$ 的平均值。

为了求 a_n ，将式(17.3)两边同乘以 $\cos n\omega_0 t$ ，然后计算其在一个周期内的积分，得到：

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right] \cos n\omega_0 t dt \\ &= \int_0^T a_0 \cos n\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_n \cos n\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T b_n \sin n\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt \right] dt \end{aligned} \quad (17.7)$$

由式(17.4b)可知，包含 a_0 的积分为 0，同理根据式(17.4c)，包含 b_n 的积分也为零。根据式(17.4e)和(17.4g)，包含 a_n 的积分除了 $m=n$ 的情况外，其余值均为零。当 $m=n$ 时，积分值为 $T/2$ ，因此：

$$\int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt = a_n \frac{T}{2}, \quad m = n$$

即

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (17.8)$$

同样地，式(17.3)两边同乘以 $\sin n\omega_0 t$ ，并计算一周期内的积分，即可求得 b_n 。其结果为：

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (17.9)$$

由于 $f(t)$ 是周期函数，在 $-T/2$ 到 $T/2$ 区间计算积分或者更一般地在 t_0 到 $t_0 + T$ 区间计算积分，比在 0 到 T 区间计算积分更方便，其结果是一样的。

式(17.3)的另一种表示形式是振幅-相位(amplitude-phase)形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (17.10)$$

用式(9.11)和(9.12)建立式(17.3)和式(17.10)间的联系，或对式(17.10)中的交流项运用三角恒等式：

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (17.11)$$

可以得到：

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\phi_n) \cos n\omega_0 t - (A_n \sin\phi_n) \sin n\omega_0 t \quad (17.12)$$

令式(17.3)和式(17.12)级数展开式中对应项系数相等，则有：

$$a_n = A_n \cos\phi_n, \quad b_n = -A_n \sin\phi_n \quad (17.13a)$$

即

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (17.13b)$$

为了避免在求 ϕ_n 时产生混淆，最好将其关系表示成式(17.14)所示的复数形式：

$$A_n / \underline{\phi_n} = a_n - jb_n \quad (17.14)$$

在 17.6 节将会看到上述复数表示形式的方便之处。 n 次谐波的振幅 A_n 与 $n\omega_0$ 的关系曲线称为 $f(t)$ 的振幅频谱(amplitude spectrum)； n 次谐波的相位 ϕ_n 与 $n\omega_0$ 的关系曲线称为 $f(t)$ 的相位频谱(phase spectrum)。幅度谱和相位谱一起组成了 $f(t)$ 的频率谱。

信号的频率谱由其谐波的幅频特性曲线和相频特性曲线组成。

提示：从离散频率分量的角度来讲，频谱也称线谱。

因此，傅里叶分析也是确定周期信号频谱的一种数学工具。17.6 节将更加详细地阐述信号的频谱。

在计算傅里叶系数 a_0 、 a_n 、 b_n 时，经常需要运用如下的积分公式：

$$\int \cos at dt = \frac{1}{a} \sin at \quad (17.15a)$$

$$\int \sin at dt = -\frac{1}{a} \cos at \quad (17.15b)$$

$$\int t \cos at dt = \frac{1}{a^2} \cos at + \frac{1}{a} t \sin at \quad (17.15c)$$

$$\int t \sin at dt = \frac{1}{a^2} \sin at - \frac{1}{a} t \cos at \quad (17.15d)$$

此外，还要知道余弦、正弦和指数函数在 π 的倍数处的值，这些值见表 17-1，其中 n 是整数。

表 17-1 余弦、正弦和指数函数在 π 的整数倍处的值

函数	值	函数	值
$\cos 2n\pi$	1	$\sin 2n\pi$	0
$\cos n\pi$	$(-1)^n$	$\sin n\pi$	0
$\cos \frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases} (-1)^{n/2}, & n=\text{偶数} \\ 0, & n=\text{奇数} \end{cases}$	$\sin \frac{n\pi}{2}$	$\begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}, & n=\text{奇数} \\ 0, & n=\text{偶数} \end{cases}$
$e^{j2n\pi}$	1	$e^{jn\pi}$	$(-1)^n$
$e^{jn\pi/2}$	$\begin{cases} (-1)^{n/2}, & n=\text{偶数} \\ j(-1)^{(n-1)/2}, & n=\text{奇数} \end{cases}$		

例 17-1 求图 17-1 所示方波信号的傅里叶级数，并求出幅度谱和相位谱。

解：傅里叶级数的表达式由式(17.3)给出，即：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (17.1.1)$$

本例的目的是利用式(17.6)、(17.8)和(17.9)确定傅里叶系数 a_0 、 a_n 、 b_n 。

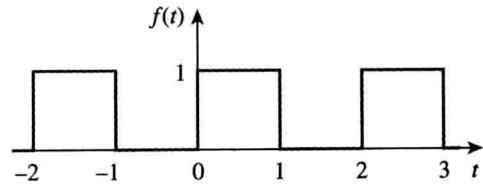


图 17-1 例 17-1 图

首先，将本例给出的波形表示为如下函数：

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad (17.1.2)$$

且 $f(t)=f(t+T)$ 。因为 $T=2$, $\omega_0=2\pi/T=\pi$ 。因此：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 1 dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (17.1.3)$$

利用式(17.8)和(17.15a)可得：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 1 \cos n\pi t dt + \int_1^2 0 \cos n\pi t dt \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} [\sin n\pi - \sin(0)] = 0 \end{aligned} \quad (17.1.4)$$

由式(17.9)和(17.15b)得：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 1 \sin n\pi t dt + \int_1^2 0 \sin n\pi t dt \right] = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi t \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \\ \cos n\pi &= (-1)^n = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n = \text{奇数} \\ 0, & n = \text{偶数} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.1.5)$$

将式(17.1.3)~(17.1.5)中的傅里叶系数带入式(17.1.1)，得傅里叶级数为：

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi t + \dots \quad (17.1.6)$$

由于 $f(t)$ 仅包含直流分量以及基波与奇次谐波的正弦分量，所以可以表示为：

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k-1 \quad (17.1.7)$$

提示：手工计算傅里叶级数是非常繁琐的，可以利用计算机计算级数的各项，并画出和的曲线，如图 17-2 所示。

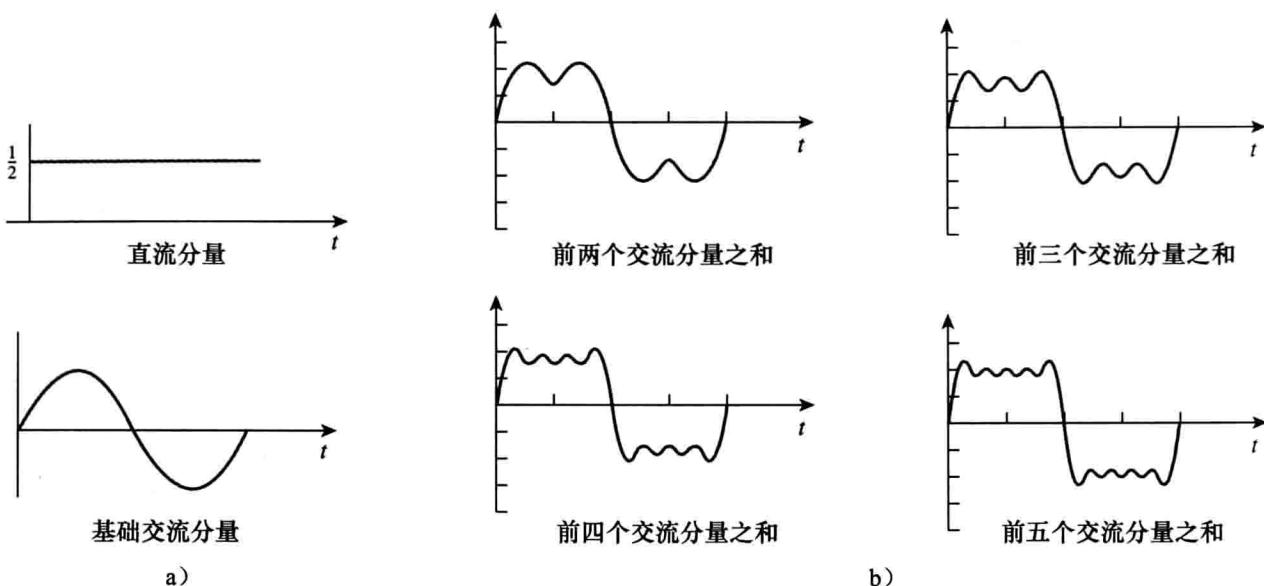


图 17-2 由傅里叶分量叠加近似方波信号的过程

逐项相加的结果如图 17-2 所示，可以看到如何通过逐项叠加形成原始的方波信号。参与叠加的傅里叶分量越多，其结果就越接近原来的方波。但是，实际上不可能将式(17.1.6)或(17.1.7)的级数无限求和，仅可以求得有限项的部分和($n=1, 2, 3, \dots, N$ ，其中 N 是有限的)。图 17-3 给出了 N 比较大时的一个周期部分和(截断级数)的波形图，注意，这个部分和在 $f(t)$ 的真实值上方和下方振荡。在不连续点的附近($x=0, 1, 2, \dots$)有过冲和阻尼振荡。事实上，无论用来近似 $f(t)$ 的项数有多少，总有大小为峰值 9% 的过冲，这种现象称为吉布斯现象(Gibbs phenomenon)。

提示：吉布斯现象以数学物理学家约西亚·威拉德·吉布斯命名，他于 1899 年首先观察到了这种现象。

最后，确定图 17-1 所示信号的幅度谱和相位谱。因为 $a_n=0$ ，故：

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n=\text{奇数} \\ 0, & n=\text{偶数} \end{cases} \quad (17.1.8)$$

和

$$\phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} -90^\circ, & n=\text{奇数} \\ 0, & n=\text{偶数} \end{cases} \quad (17.1.9)$$

$n\omega_0 = n\pi$ 不同取值时幅度频谱 A_n 和相位频谱 ϕ 如图 17-4 所示。由图可知，谐波的振幅随频率衰减得特别快。

练习 17-1 求图 17-5 所示方波信号的傅里叶级数，并画出其幅度谱和相位谱。

答案： $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, n=2k-1.$

频谱图见图 17-6

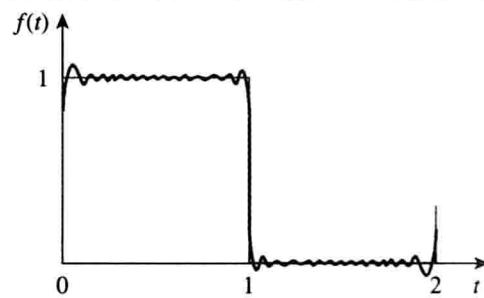
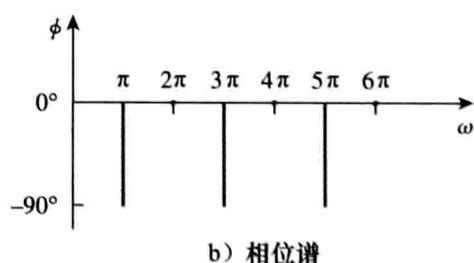
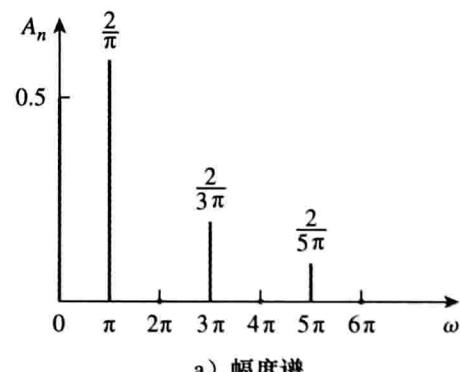
图 17-3 在 $N=11$ 处截断傅里叶级数的波形图；吉布斯现象

图 17-4 例 17-1 图

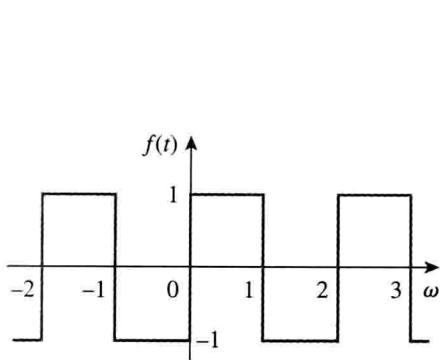


图 17-5 练习 17-1 图

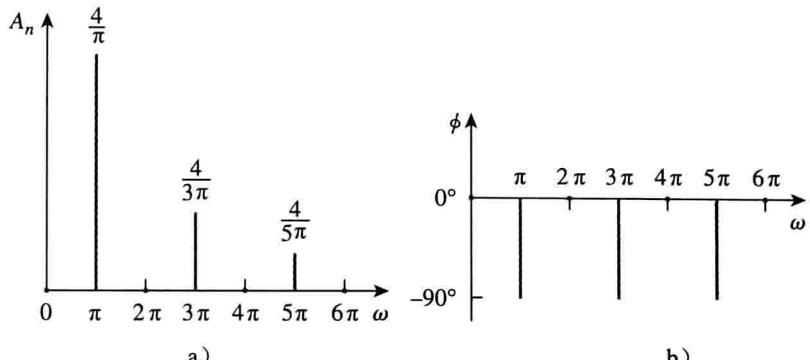


图 17-6 练习 17-1 的幅度谱和相位谱

例 17-2 求图 17-7 所示周期函数的傅里叶级数，并画出幅度谱和相位谱。

解：图 17-7 所示的周期信号可表示为：

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

因为 $T=2$, $\omega_0=2\pi/T=\pi$, 所以：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 t dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \quad (17.2.1)$$

为了计算 a_n 和 b_n , 需要利用式(17.15)所示的积分和关系式 $\cos n\pi = (-1)^n$, 得到：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 t \cos n\pi t dt + \int_1^2 0 \cos n\pi t dt \right] \\ &= \left[\frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi t + \frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) + 0 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \end{aligned} \quad (17.2.2)$$

和

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{2} \left[\int_0^1 t \sin n\pi t dt + \int_1^2 0 \sin n\pi t dt \right] \\ &= \left[\frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi t - \frac{t}{n\pi} \cos n\pi t \right] \Big|_0^1 = 0 - \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned} \quad (17.2.3)$$

将上述傅里叶系数代入式(17.3)得：

$$f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi t + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi t \right]$$

下面确定幅度谱和相位谱，对于偶次谐波， $a_n=0$, $b_n=-1/n\pi$, 故：

$$A_n \angle \phi_n = a_n - jb_n = 0 + j \frac{1}{n\pi} \quad (17.2.4)$$

因此：

$$A_n = |b_n| = \frac{1}{n\pi}, \quad \phi_n = 90^\circ, \quad n = 2, 4, \dots \quad (17.2.5)$$

对于奇次谐波， $a_n=-2/(n^2\pi^2)$, $b_n=1/(n\pi)$, 因此：

$$A_n \angle \phi_n = a_n - jb_n = -\frac{2}{n^2\pi^2} - j \frac{1}{n\pi} \quad (17.2.6)$$

即

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{4}{n^4\pi^4} + \frac{1}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{n^2\pi^2} \sqrt{4 + n^2\pi^2}, \quad n = 1, 3, \dots \quad (17.2.7)$$

由式(17.2.6)可知， ϕ 位于第三象限，所以：

$$\phi_n = 180^\circ + \arctan \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 3, \dots \quad (17.2.8)$$

由式(17.2.5)、(17.2.7)和(17.2.8)，可以画出不同谐波频率 $\pi\omega_0 = n\pi$ 时的幅度谱和相位谱，如图 17-8 所示。

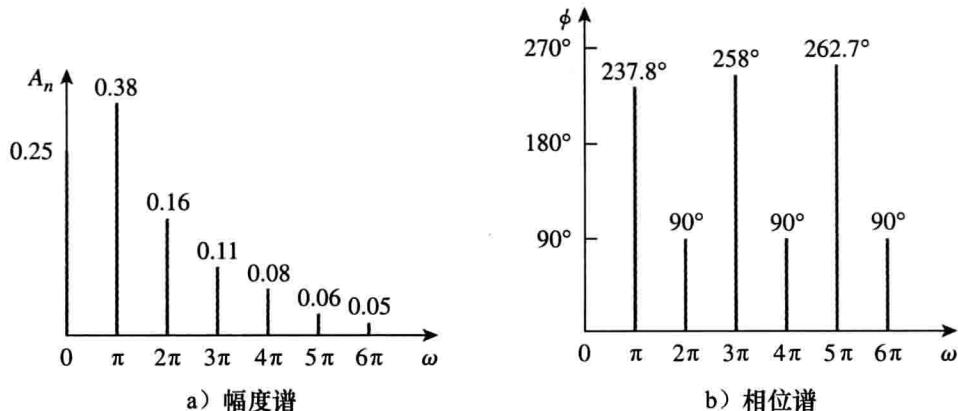


图 17-8 例 17-2 的频谱图

练习 17-2 求图 17-9 所示锯齿波的傅里叶级数。

$$\text{答案: } f(t) = 3 - \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi nt$$

17.3 对称周期函数的频谱分析

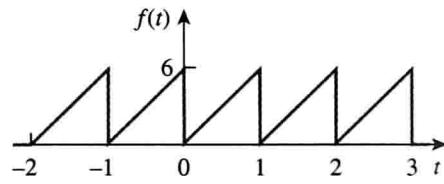


图 17-9 练习 17-2 图

例 17-1 中傅里叶级数仅仅包含正弦项，那么是否存在一种方法能够预先知道某些傅里叶级数的系数等于零，这样可以避免不必要的繁琐计算过程。这样的方法是存在的，其基础是信号的对称性。本节讨论三种对称性：(1)偶对称；(2)奇对称；(3)半波对称。

17.3.1 偶对称周期函数的频谱

如果函数 $f(t)$ 的波形是关于纵坐标对称的，则称 $f(t)$ 是偶函数；即：

$$f(t) = f(-t) \quad (17.16)$$

偶函数的例子有 t^2 、 t^4 、 $\cos t$ ，图 17-10 显示了更多周期偶函数的例子。可以看出，图中每个函数均满足式(17.16)的条件。偶函数 $f_e(t)$ 一个主要的特性是：

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_e(t) dt = 2 \int_0^{T/2} f_e(t) dt \quad (17.17)$$

显然， $-T/2 \sim 0$ 的积分等于 $0 \sim T/2$ 的积分。利用这个性质，可以得到偶函数的傅里叶系数为：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= 0 \end{aligned} \quad (17.18)$$

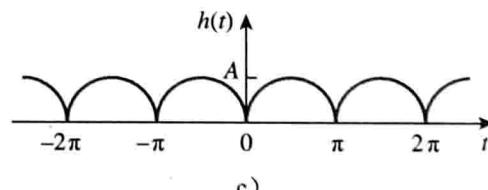
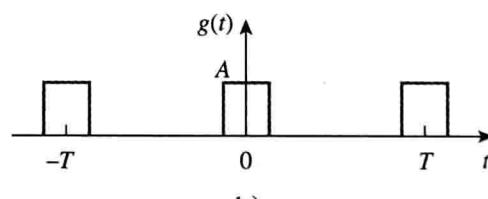
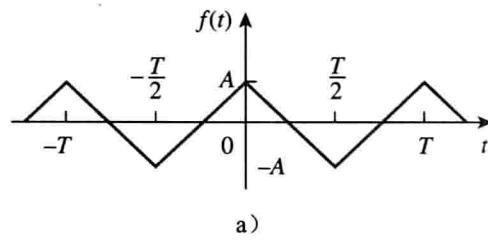


图 17-10 周期偶函数的典型实例

因为 $b_n = 0$ ，式(17.18)变为余弦傅里叶级数(Fourier cosine series)。这也可以从余弦函数自身是偶函数的角度来理解。同时，由于正弦函数为奇函数，所以偶函数中不包含正弦项。

式(17.18)的定量证明需要利用式(17.17)给出的偶函数的性质来求式(17.6)、(17.8)

和(17.9)的傅里叶系数。在每种情况下，计算 $-T/2 < t < T/2$ 时的积分都很方便，因为该积分是关于原点对称的。因此：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) dt + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \quad (17.19)$$

对于 $-T/2 < t < 0$ 区间的积分，进行积分变换，令 $t = -x$ ，则有 $dt = -dx$ ，并且由于 $f(t)$ 是偶函数，所以 $f(t) = f(-t) = f(x)$ ，当 $t = -T/2$ ， $x = T/2$ 。因此：

$$a_0 = \frac{1}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} f(x) dx + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \quad (17.20)$$

因为两个积分是完全相同的，所以：

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (17.21)$$

同理，由式(17.8)可得：

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (17.22)$$

利用与式(17.20)相同的变换，并且注意到 $f(t)$ 和 $\cos n\omega_0 t$ 都是偶函数，即 $f(-t) = f(t)$ ， $\cos(-n\omega_0 t) = \cos n\omega_0 t$ 。于是，式(17.22)变为：

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(-x) \cos(-n\omega_0 x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(x) \cos(n\omega_0 x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \end{aligned} \quad (17.23a)$$

即

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (17.23b)$$

计算 b_n 时，需利用式(17.9)：

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \quad (17.24)$$

采用同样的积分变换，并注意到 $f(-t) = f(t)$ ，而 $\sin(-n\omega_0 t) = -\sin n\omega_0 t$ 。于是，式(17.24)变为：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(-x) \sin(-n\omega_0 x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_{T/2}^0 f(x) \sin(n\omega_0 x) dx + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17.25)$$

从而证明了式(17.18)的正确性。

17.3.2 奇对称周期函数的频谱

如果函数 $f(t)$ 的波形是关于纵坐标反对称的，则 $f(t)$ 为奇函数：

$$f(-t) = -f(t) \quad (17.26)$$

t 、 t^3 及 $\sin t$ 等均为奇函数，图17-11给出了一些周期奇函数的例子，所有这些例子都满足式(17.26)的条件。奇函数 $f_o(t)$ 的主要性质是：

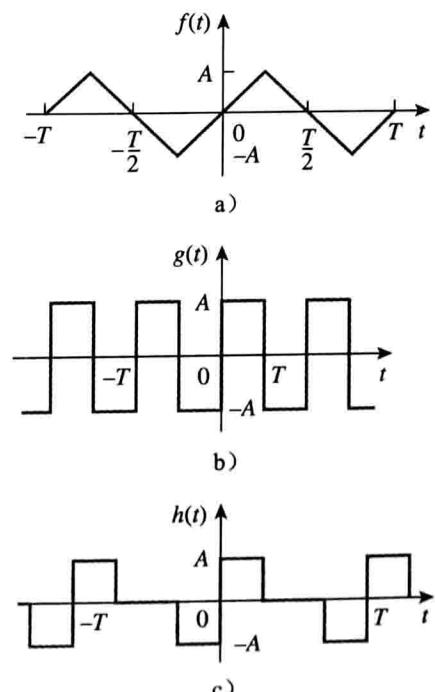


图17-11 周期奇函数的典型例子

$$\int_{-T/2}^{T/2} f_o(t) dt = 0 \quad (17.27)$$

$-T/2 \sim 0$ 的积分与 $0 \sim T/2$ 的积分互为相反数。利用这一性质，可以得到奇函数的傅里叶系数为：

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (17.28)$$

奇函数的傅里叶级数称为正弦傅里叶级数(Fourier sine series)。从正弦函数本身为奇函数的角度即可理解这一结论。同时应该注意，奇函数的傅里叶级数展开项中没有直流项。

式(17.28)的定量证明与式(17.18)的证明过程相同，由于现在的 $f(t)$ 是奇函数，可得 $f(t) = -f(-t)$ 。利用这个基本的简单的区别，容易得到式(17.20)中 $a_0 = 0$ ，式(17.23a)中 $a_n = 0$ ，式(17.24)中的 b_n 变为：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(-x) \sin(-n\omega_0 x) (-dx) + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 f(x) \sin n\omega_0 x dx + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \quad (17.29)$$

式(17.28)得证。有趣的是，任何一个既非奇对称也非偶对称的周期函数 $f(t)$ 都可以被分解成偶函数部分和奇函数部分。使用式(17.16)和(17.26)给出的偶函数和奇函数性质，可以得到：

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]}_{\text{偶数}} + \underbrace{\frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]}_{\text{奇数}} = f_e(t) + f_o(t) \quad (17.30)$$

由此可得， $f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$ 满足式(17.16)所示的偶函数的性质，而 $f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$ 满足式(17.26)所示的奇函数性质。事实上， $f_e(t)$ 仅仅包括直流分量和余弦项，而 $f_o(t)$ 仅有正弦项，将 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式进行分组：

$$f(t) = a_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t}_{\text{偶数}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t}_{\text{奇数}} = f_e(t) + f_o(t) \quad (17.31)$$

从式(17.31)可得，当 $f(t)$ 是偶函数时， $b_n = 0$ ；当 $f(t)$ 是奇函数时， $a_0 = 0 = a_n$ 。

另外，奇函数和偶函数还具有如下性质：

1. 两个偶函数的乘积为偶函数。
2. 两个奇函数的乘积为偶函数。
3. 一个偶函数和一个奇函数的乘积为奇函数。
4. 两个偶函数的和(差)是仍为偶函数。
5. 两个奇函数的和(差)是仍为奇函数。
6. 一个偶函数和一个奇函数的和(差)既不是偶函数也不是奇函数。

以上各性质均可使用式(17.16)~(17.26)证明。

17.3.3 半波对称周期函数的频谱

满足如下关系的函数 $f(t)$ 称为半波(奇)对称函数：

$$f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad (17.32)$$

即前半周为后半周的镜像。注意，函数 $\cos n\omega_0 t$ 和 $\sin n\omega_0 t$ 在 n 是奇数时满足式(17.32)，

因此当 n 是奇数时具有半波对称性。图 17-12 是半波对称函数的另外几个例子。图 17-11a 和 17-11b 中的函数也是半波对称的。注意，对于图中各函数，其一个半周期是相邻半周期的反转。半波对称函数的傅里叶系数为：

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \\ b_n &= \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned} \quad (17.33)$$

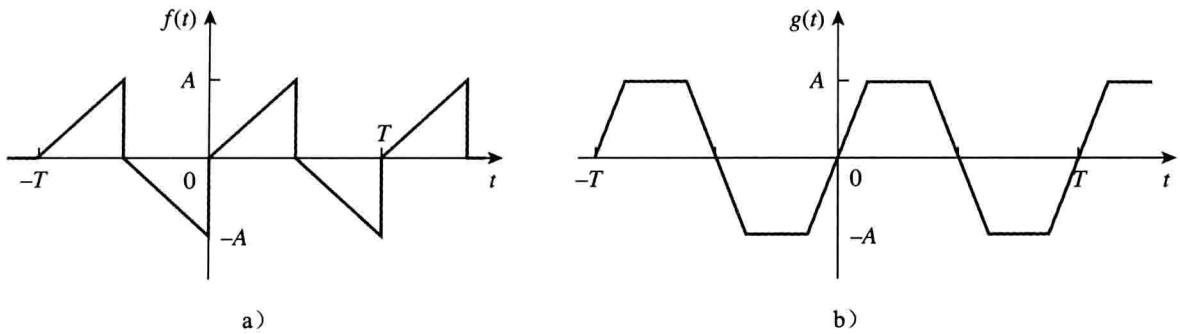


图 17-12 半波奇对称函数的典型例子

由此可见，半波对称函数的傅里叶级数仅仅包含奇次谐波。

为了推导式(17.33)，运用式(17.32)中半波对称函数的性质来求得式(17.6)、(17.8)和(17.9)中的傅里叶系数。因此：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) dt + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \quad (17.34)$$

对于区间 $-T/2 < t < 0$ 的积分，进行积分变换，令 $x = t + T/2$ ，则有 $dx = dt$ ；当 $t = -T/2$ 时， $x = 0$ ；当 $t = 0$ 时， $x = T/2$ 。同时，按照式(17.32)，有 $f(x - T/2) = -f(x)$ 。所以：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} f\left(x - \frac{T}{2}\right) dx + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(x) dx + \int_0^{T/2} f(t) dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (17.35)$$

从而证明了式(17.33)中 a_0 的表达式。同理可得：

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (17.36)$$

利用与推导式(17.35)相同的积分变量替换，式(17.36)变为：

$$a_n = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f\left(x - \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 \left(x - \frac{T}{2}\right) dx + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \quad (17.37)$$

由于 $f(x - T/2) = -f(x)$ ，并且：

$$\begin{aligned} \cos n\omega_0 \left(x - \frac{T}{2}\right) &= \cos(n\omega_0 t - n\pi) = \cos n\omega_0 t \cos n\pi + \sin n\omega_0 t \sin n\pi \\ &= (-1)^n \cos n\omega_0 t \end{aligned} \quad (17.38)$$

代入式(17.37)得：

$$a_n = \frac{2}{T} [1 - (-1)^n] \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (17.39)$$

从而证明了式(17.33)中 a_n 的表达式。按照类似的方法，可以证明式(17.33)中的 b_n

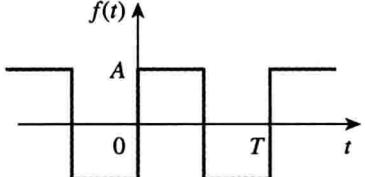
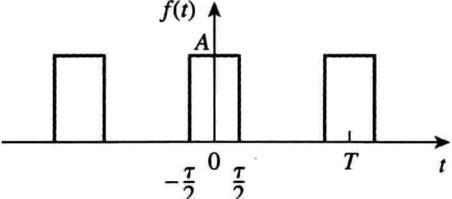
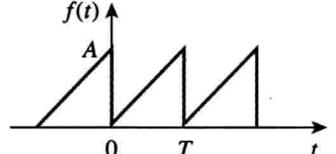
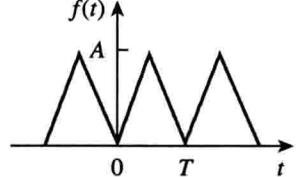
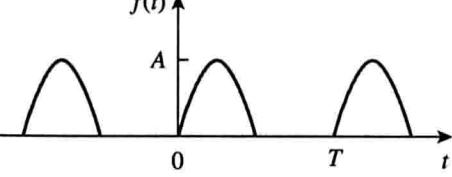
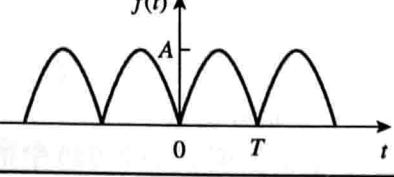
的表达式。

表 17-2 总结了上述对称性对傅里叶系数的影响。表 17-3 提供了一些常用普通周期函数的傅里叶级数。

表 17-2 函数的对称性对傅里叶系数的影响

对称性	a_0	a_n	b_n	说 明
偶对称	$a_0 \neq 0$	$a_n \neq 0$	$b_n = 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2, 得到系数
奇对称	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n \neq 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2, 得到系数
半波对称	$a_0 = 0$	$a_{2n} = 0$	$b_{2n} = 0$	对函数在 $T/2$ 内积分并乘以 2, 得到系数
		$a_{2n+1} \neq 0$	$b_{2n+1} \neq 0$	

表 17-3 常见函数的傅里叶级数

函 数	傅里叶级数
1. 方波	 $f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega_0 t)$
2. 矩形脉冲序列	 $f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos n\omega_0 t$
3. 锯齿波	 $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n}$
4. 三角波	 $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\omega_0 t)$
5. 半波整流的正弦波	 $f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\omega_0 t$
6. 全波整流的正弦波	 $f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos n\omega_0 t$

例 17-3 求图 17-13 所示函数的傅里叶级数展开式。

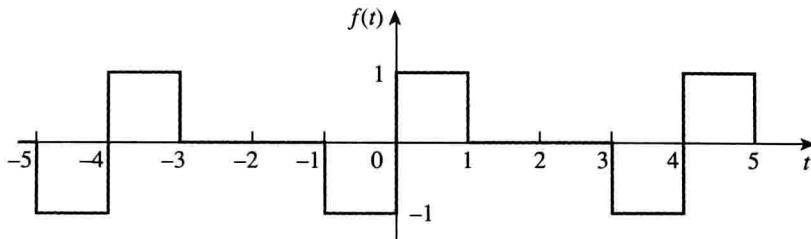


图 17-13 例 17-3 图

解：函数 $f(t)$ 为奇函数，所以 $a_0 = 0 = a_n$ 。周期是 $T=4$, $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$, 所以：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{4} \left[\int_0^1 1 \sin \frac{n\pi}{2} t dt + \int_1^2 0 \sin \frac{n\pi}{2} t dt \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

因此：

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} t$$

函数 $f(t)$ 的傅里叶级数为正弦级数。

练习 17-3 求图 17-14 所示函数 $f(t)$ 的傅里叶级数。

答案: $f(t) = -\frac{32}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt, n = 2k - 1$

例 17-4 求图 17-15 所示半波整流余弦函数的傅里叶级数。

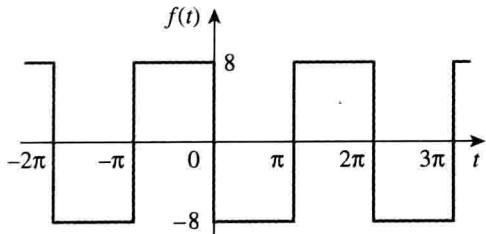


图 17-14 练习 17-3 图

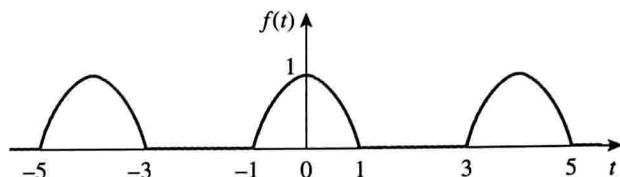


图 17-15 例 17-4 的半波整流余弦函数波形图

解：这是一个偶函数，因此 $b_n = 0$ 。同时， $T=4$, $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$ 。在一个周期内：

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < -1 \\ \cos \frac{\pi}{2} t, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{4} \left[\int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} t dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{4}{4} \left[\int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} t \cos \frac{n\pi t}{2} dt + 0 \right]$$

由于 $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ 。则有：

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\cos \frac{\pi}{2} (n+1)t + \cos \frac{\pi}{2} (n-1)t \right] dt$$

当 $n=1$ 时：

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos \pi t + 1] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi t}{\pi} + t \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

当 $n > 1$ 时：

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin \frac{\pi}{2}(n+1) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin \frac{\pi}{2}(n-1)$$

当 n 为奇数 ($n=1, 3, 5, \dots$) 时, $(n+1)$ 和 $(n-1)$ 都是偶数, 则有:

$$\sin \frac{\pi}{2}(n+1) = 0 = \sin \frac{\pi}{2}(n-1), \quad n = \text{奇数}$$

当 n 为偶数 ($n=2, 4, 6, \dots$) 时, $(n+1)$ 和 $(n-1)$ 都是奇数, 则有:

$$\sin \frac{\pi}{2}(n+1) = -\sin \frac{\pi}{2}(n-1) = \cos \frac{n\pi}{2} = (-1)^{n/2}, \quad n = \text{偶数}$$

因此:

$$a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi(n+1)} + \frac{-(-1)^{n/2}}{\pi(n-1)} = \frac{-2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)}, \quad n = \text{偶数}$$

所以:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=\text{偶数}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2}}{(n^2-1)} \cos \frac{n\pi}{2} t$$

为了避免使用 $n=2, 4, 6, \dots$, 同时便于计算, 可以利用 $2k$ 取代 n , 其中 $k=1, 2, 3, \dots$, 从而得到:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)} \cos k\pi t$$

这是一个余弦傅里叶级数。

 练习 17-4 求图 17-16 所示函数的傅里叶级数展开式。

答案: $f(t) = 4 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt, n = 2k-1$

例 17-5 计算图 17-17 所示函数的傅里叶级数。

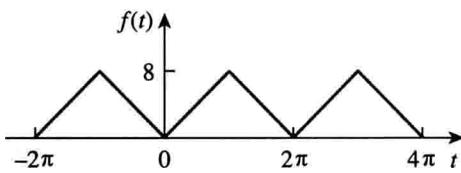


图 17-16 练习 17-4 图

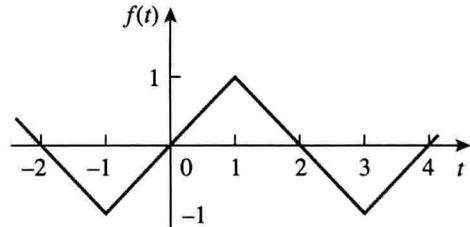


图 17-17 例 17-5 图

解: 图 17-17 所示函数为半波奇对称函数, 因此, $a_0=0=a_n$ 。在半个周期内该函数的表达式为:

$$f(t) = t, \quad -1 < t < 1$$

周期 $T=4$, $\omega_0=2\pi/T=\pi/2$ 。因此:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

计算中将 $f(t)$ 的积分从 $0 \sim 2$ 替换为 $-1 \sim 1$ 更方便。利用式(17.15d)可以得到:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{4} \int_{-1}^1 t \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \left[\frac{\sin n\pi t / 2}{n^2 \pi^2 / 4} - \frac{t \cos n\pi t / 2}{n\pi / 2} \right] \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \left[\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \left(-\frac{n\pi}{2} \right) \right] - \frac{2}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{2} - \cos \left(-\frac{n\pi}{2} \right) \right] = \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

因为 $\sin(-x) = -\sin x$ 是奇函数, $\cos(-x) = \cos x$ 是偶函数。利用表 17-1 所示的 $\sin n\pi / 2$

Θ 这一步求解过程有误, 读者可自行更正。——译者注

的恒等式，可得：

$$b_n = \frac{8}{n^2 \pi^2} (-1)^{(n-1)/2}, \quad n = \text{奇数} = 1, 3, 5, \dots$$

因此，

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{2} t$$

练习 17-5 求图 17-12a 所示函数的傅里叶级数。取 $A=5$, $T=2\pi$ 。

答案: $f(t) = \frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{n^2 \pi} \cos nt + \frac{1}{n} \sin nt \right), n = 2k - 1$

17.4 傅里叶级数在电路分析中的应用

在工程实践中，许多电路的激励为非正弦的周期函数。为了求解一个有非正弦周期函数激励的电路的稳态响应，需要采用傅里叶级数、交流相位分析和叠加定理。分析过程通常包括四个步骤。

运用傅里叶级数求解电路的步骤：

1. 将激励表示为傅里叶级数。
2. 将电路由时域变为频域。
3. 求解傅里叶级数中的直流分量和交流分量响应。
4. 利用叠加定理将直流响应和交流响应相加。

第一步是求出激励的傅里叶级数展开式。例如，对于图 17-18a 所示的周期电压源，傅里叶级数表示为：

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (17.40)$$

(对于周期电流源可以进行相同的操作。)式(17.40)表明， $v(t)$ 包括两部分：直流分量 V_0 和各次谐波的交流分量 $V_n = V_n \angle \theta_n$ 。这种傅里叶级数表示可以看做是一组串联的正弦电源，各电源有自己的振幅和频率，如图 17-18b 所示。

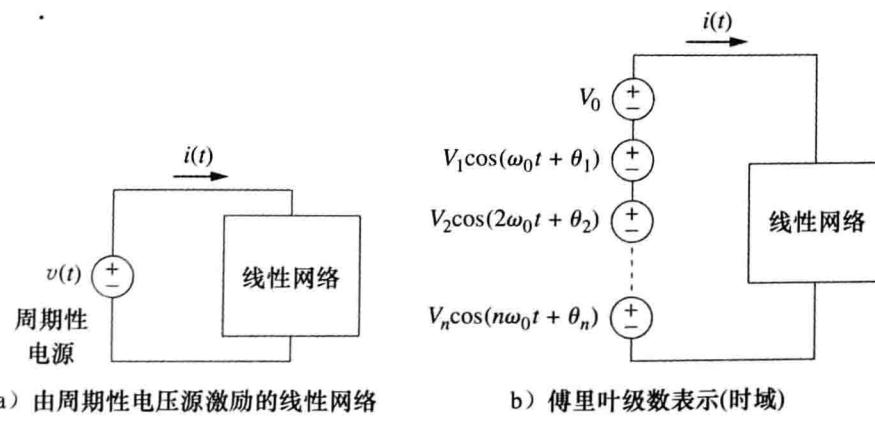


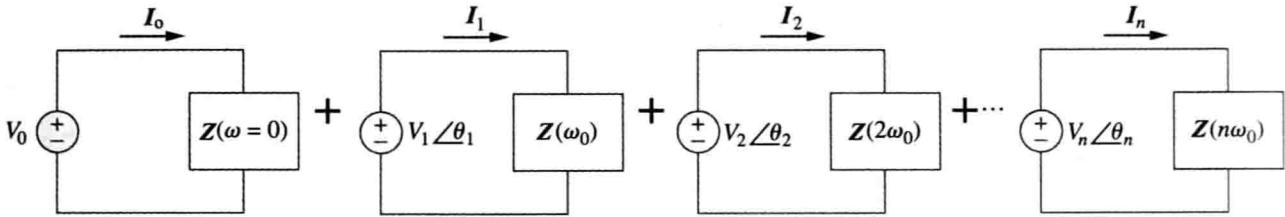
图 17-18 傅里叶级数电路分析实例

第三步是求出傅里叶级数各项的响应。在频域中设置 $n=0$ 或 $\omega=0$ ，如图 17-19a 所示，或在时域中将所有电感器短路，将所有电容器开路，即可确定电路对直流分量的响应。运用第 9 章所介绍的相量分析法可以确定电路对交流分量的响应，如图 17-19b 所示。电路网络可以利用它的阻抗 $Z(n\omega_0)$ 或导纳 $Y(n\omega_0)$ 表示。 $Z(n\omega_0)$ 是指用 $n\omega_0$ 取代 ω 后的电源端的输入阻抗，而 $Y(n\omega_0)$ 是 $Z(n\omega_0)$ 的倒数。

最后，根据叠加定理，将所有单独求出的电路响应相加。对于图 17-19 所示情

况，有：

$$i(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_2(t) + \dots = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (17.41)$$



a) 直流分量

b) 交流分量（频域）

图 17-19 稳态响应

其中每一个频率为 $n\omega_0$ 的分量 I_n 已经变换到时域，从而得到 $i_n(t)$ ， ϕ_n 是 I_n 的辐角。

例 17-6 设例 17-1 中的函数 $f(t)$ 为图 17-20 所示

电路的电压源 $v_s(t)$ 。求电路的响应 $v_o(t)$ 。

解：由例 17-1 可知：

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi t, \quad n = 2k - 1$$

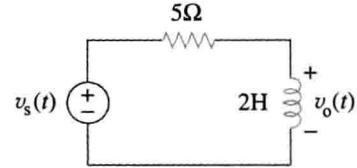


图 17-20 例 17-6 图

其中 $\omega_n = n\omega_0 = n\pi \text{ rad/s}$ 。使用相量法和分压原理，可以得到图 17-20 所示电路的响应 V_o ：

$$V_o = \frac{j\omega_n L}{R + j\omega_n L} V_s = \frac{j2n\pi}{5 + j2n\pi} V_s$$

对于直流分量 ($\omega_n = 0$ 或 $n = 0$)：

$$V_s = \frac{1}{2} \Rightarrow V_o = 0$$

由于电感器对于直流相当于短路，可得上述结果。对于 n 次谐波而言：

$$V_s = \frac{2}{n\pi} \angle -90^\circ \quad (17.6.1)$$

相应的电路响应为：

$$V_o = \frac{2n\pi \angle 90^\circ}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2} \angle \arctan 2n\pi/5} \left(\frac{2}{n\pi} \angle -90^\circ \right) = \frac{4 \angle -\arctan 2n\pi/5}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}} \quad (17.6.2)$$

在时域中的电路响应：

$$v_o(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{25 + 4n^2\pi^2}} \cos \left(n\pi t - \arctan \frac{2n\pi}{5} \right), \quad n = 2k - 1$$

以上求和式中奇数次谐波的前 3 项 ($k=1, 2, 3$ 或 $n=1, 3, 5$) 为：

$$v_o(t) = 0.4981 \cos(\pi t - 51.49^\circ) + 0.2051 \cos(3\pi t - 75.14^\circ) + 0.1257 \cos(5\pi t - 80.96^\circ) + \dots (V)$$

图 17-21 给出了输出电压 $v_o(t)$ 的振幅频谱，而图 17-4a 给出的则是输入电压源 $v_s(t)$ 的幅度谱。可以看出，这两个频谱非常接近。原因在于，图 17-20 所示电路是一个转折频率为 $\omega_c = R/L = 2.5 \text{ rad/s}$ 的高通滤波器，其 ω_c 小于信号的基频 $\omega_0 = \pi \text{ rad/s}$ 。直流分量不能通过该电路，一次谐波分量稍有衰减，而高次谐波分量则可以通过。事实上，由式(17.6.1)和(17.6.2)可见，当 n 较大时， V_o 与 V_s 基本相同，这就是高通滤波器的

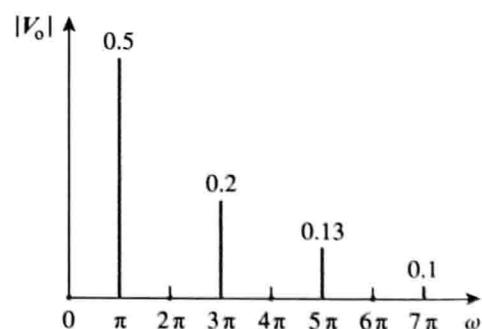


图 17-21 例 17-6 输出电压的振幅频谱

特征。

练习 17-6 图 17-22 的电压源 $v_s(t)$ 为图 17-9 所示锯齿波形(见练习 17-2)，求电路响应 $v_o(t)$ 。

$$\text{答案: } v_o(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt - \arctan 4n\pi)}{n \sqrt{1 + 16n^2\pi^2}} (\text{V})$$

例 17-7 求图 17-23 所示电路的响应 $i_o(t)$ ，该电路输入电压 $v(t)$ 的傅里叶级数展开式为：

$$v(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt)$$

解：利用式(17.13)可以将输入电压表示为：

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} \cos(nt + \arctan n) \\ &= 1 - 1.414 \cos(t + 45^\circ) + 0.8944 \cos(2t + 63.45^\circ) - \\ &\quad 0.6345 \cos(3t + 71.56^\circ) - 0.4851 \cos(4t + 78.7^\circ) + \dots \end{aligned}$$

由此可见， $\omega_0 = 1$ ， $\omega_n = n \text{ rad/s}$ 。在输入端的阻抗是：

$$Z = 4 + j\omega_n 2 \| 4 = 4 + \frac{j\omega_n 8}{4 + j\omega_n 2} = \frac{8 + j\omega_n 8}{2 + j\omega_n}$$

输入电流为：

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{2 + j\omega_n 8}{8 + j\omega_n 8} V$$

其中， V 是电压源 $v(t)$ 的相量形式。根据分流原理，有：

$$I_o = \frac{4}{4 + j\omega_n 2} I = \frac{V}{4 + j\omega_n 4}$$

因为 $\omega_n = n$ ， I_o 可以表达为：

$$I_o = \frac{V}{4 \sqrt{1+n^2} / \arctan n}$$

对于直流分量($\omega_n = 0$ 或 $n = 0$)而言：

$$V = 1 \Rightarrow I_o = \frac{V}{4} = \frac{1}{4}$$

对于 n 次谐波而言：

$$V = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} / \arctan n$$

所以：

$$I_o = \frac{1}{4 \sqrt{1+n^2} / \arctan n} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+n^2}} / \arctan n = \frac{(-1)^n}{2(1+n^2)}$$

在时域中的表达式为：

$$i_o(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(1+n^2)} \cos nt (\text{A})$$

练习 17-7 图 17-24 所示电路的输入电压为：

$$v(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nt - \frac{\pi}{n} \sin nt \right) (\text{V})$$

求该电路的响应 $i_o(t)$ 。

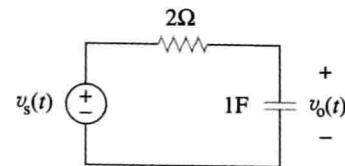


图 17-22 练习 17-6 图

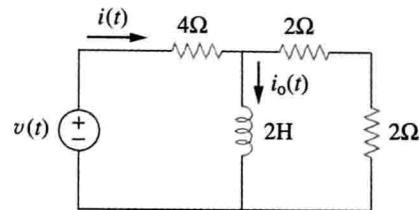


图 17-23 例 17-7 图

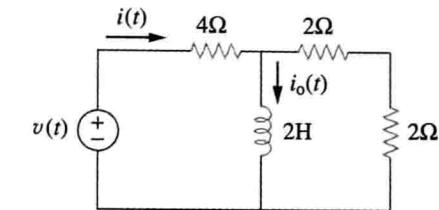


图 17-24 练习 17-7 图

$$\text{答案: } \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n^2\pi^2}}{n^2\pi^2} \cos\left(nt - \arctan \frac{2n}{3} + \arctan n\pi\right) A$$

17.5 平均功率与方均根值

第11章曾介绍过周期信号的平均功率和方均根值的概念。为了求出激励为周期函数的电路的平均功率，可以将电压和电流写成振幅-相位形式(见式(17.10))：

$$v(t) = V_{dc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (17.42)$$

$$i(t) = I_{dc} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m \cos(m\omega_0 t - \phi_m) \quad (17.43)$$

按照无源符号约定(见图17-25)，平均功率为：

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T vi dt \quad (17.44)$$

将式(17.42)和(17.43)带入式(17.44)得：

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T V_{dc} I_{dc} dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m V_{dc}}{T} \int_0^T \cos(m\omega_0 t - \phi_m) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_{dc}}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t - \theta_n) dt \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_m}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \cos(m\omega_0 t - \phi_m) dt \end{aligned} \quad (17.45)$$

由于余弦信号在一个周期内的积分为零，所以上式中第二个和第三个积分项均为零。根据式(17.4e)，当 $m \neq n$ 时，第四个积分项的所有项都是0。求出第一个积分项，并在 $m=n$ 时将式(17.4g)用于第四个积分项，可以得到：

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n) \quad (17.46)$$

上式表明，在包含周期性电压与电流的平均能量的计算中，总的平均功率等于各对应谐波电压和电流所产生的平均功率之和。

给定任一个周期函数 $f(t)$ ，方均根值(有效值)定义为：

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (17.47)$$

将式(17.10)中的 $f(t)$ 带入式(17.47)，由 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，得：

$$\begin{aligned} F_{rms}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[a_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_0 A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \cos(m\omega_0 t + \phi_m) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T a_0^2 dt + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_0 A_n \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t + \phi_n) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \cos(m\omega_0 t + \phi_m) dt \end{aligned} \quad (17.48)$$

式中采用不同的整数 m 和 n 来处理两个级数的和。运用相同的推导过程可以得到：

$$F_{rms}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

即

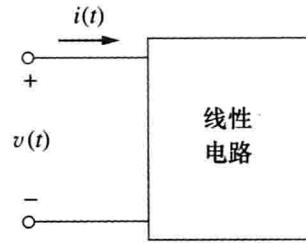


图 17-25 电压参考极性与电流参考方向

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \quad (17.49)$$

利用傅里叶系数 a_n 和 b_n , 式(17.49)可以写为:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (17.50)$$

如果 $f(t)$ 是通过电阻 R 的电流, 那么电阻消耗的功率为:

$$P = RF_{\text{rms}}^2 \quad (17.51)$$

如果 $f(t)$ 是电阻 R 两端的电压, 那么电阻上耗散的功率为:

$$P = \frac{F_{\text{rms}}^2}{R} \quad (17.52)$$

选择 1Ω 电阻即可避免考虑信号的属性。 1Ω 电阻消耗的功率为:

$$P_{1\Omega} = F_{\text{rms}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (17.53)$$

这个结果称为帕塞瓦尔定理(Parseval's theorem)。注意, a_0^2 是直流分量的功率, 而 $1/2(a_n^2 + b_n^2)$ 是 n 次谐波的交流功率。因此, 帕塞瓦尔定理表明, 任何周期信号的平均功率等于直流分量和谐波的交流分量的平均能量之和。

提示: 帕塞瓦尔定理是以法国数学家安东尼·帕塞瓦尔(1755—1836)的名字命名的。

例 17-8 如果 $i(t) = [2 + 10\cos(t + 10^\circ) + 6\cos(3t + 35^\circ)]A$ 。求图 17-26 所示电路的平均功率。

解: 该电路网络的输入阻抗为:

$$Z = 10 \parallel \frac{1}{j2\omega} = \frac{10(1/j2\omega)}{10 + 1/j2\omega} = \frac{10}{1 + j20\omega}$$

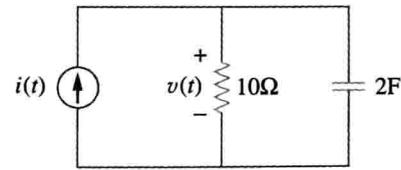


图 17-26 例 17-8 图

所以:

$$V = IZ = \frac{10I}{\sqrt{1 + 400\omega^2} / \arctan 20\omega}$$

对于直流分量, $\omega=0$, 因此:

$$I = 2A \Rightarrow V = 10 \times 2 = 20V$$

因为电容对于直流相当于是开路, 2A 电流全部流过电阻。如果 $\omega=1\text{rad/s}$, 则:

$$I = 10 \angle 10^\circ \Rightarrow V = \frac{10(10 \angle 10^\circ)}{\sqrt{1 + 400} \angle \arctan 20} = 5 \angle -77.14^\circ$$

如果 $\omega=3\text{rad/s}$, 则:

$$I = 6 \angle 35^\circ \Rightarrow V = \frac{10(6 \angle 35^\circ)}{\sqrt{1 + 3600} \angle \arctan 60} = 1 \angle -54.04^\circ$$

因此, 在时域中有:

$$v(t) = 20 + 5\cos(t - 77.14^\circ) + 1\cos(3t - 54.04^\circ)(V)$$

运用式(17.46)求得电路提供的平均功率为:

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n)$$

将本例中 v 和 i 与使用式(17.42)和(17.43)相比较, 即可确定 θ_n 和 ϕ_n 的符号。所以:

$$P = 20 \times 2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 10\cos[77.14^\circ - (-10^\circ)] + \frac{1}{2} \times 1 \times 6\cos[54.04^\circ - (-35^\circ)]$$

$$= 40 + 1.247 + 0.05 = 41.5(\text{W})$$

另外，还可以求得电阻消耗的平均功率为：

$$P = \frac{V_{dc}^2}{R} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|V_n|^2}{R} = \frac{20^2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5^2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{1^2}{10} = 40 + 1.25 + 0.05 = 41.5(\text{W})$$

与电源提供的功率相等，因为电容不吸收平均功率。

练习 17-8 某电路终端的电压和电流如下，试求电路吸收的平均能量：

$$v(t) = 128 + 192\cos 120\pi t + 96\cos(360\pi t - 30^\circ)$$

$$i(t) = 4\cos(120\pi t - 10^\circ) + 1.6\cos(360\pi t - 60^\circ)$$

答案：444.7W

例 17-9 求例 17-7 中电压方均根值的估计值。

解：例 17-7 中 $v(t)$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} v(t) = & 1 - 1.414\cos(t + 45^\circ) + 0.8944\cos(2t + 63.45^\circ) \\ & - 0.6345\cos(3t + 71.56^\circ) - 0.4851\cos(4t + 78.7^\circ) + \dots (\text{V}) \end{aligned}$$

利用式(17.49)，得到：

$$\begin{aligned} V_{rms} &= \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \frac{1}{2} [(-1.414)^2 + 0.8944^2 + (-0.6345)^2 + (-0.4851)^2 + \dots]} \\ &= \sqrt{2.7186} = 1.649(\text{V}) \end{aligned}$$

因为所取的级数项不够多，所以上式仅是方均根的一个估计值。用傅里叶级数表示的实际函数为：

$$v(t) = \frac{\pi e^t}{\sinh \pi}, \quad -\pi < t < \pi$$

且 $v(t) = v(t+T)$ 。其精确的均方根值为 1.776V。

练习 17-9 求如下周期电流 $i(t)$ 的方均根值：

$$i(t) = 8 + 30\cos 2t - 20\sin 2t + 15\cos 4t - 10\sin 4t(\text{A}) \quad \text{答案：29.61A}$$

17.6 指数形式的傅里叶级数

式(17.3)所示傅里叶级数的一种紧凑的表达方式就是将其写为指数形式。这就要求利用欧拉公式将正弦函数和余弦函数表示为指数形式：

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}] \quad (17.54a)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}] \quad (17.54b)$$

将式(17.54)带入式(17.3)，合并同类项后，得到：

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + (a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}] \quad (17.55)$$

定义一个新的系数 c_n ，使得：

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{(a_n - jb_n)}{2}, \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{(a_n + jb_n)}{2} \quad (17.56)$$

于是， $f(t)$ 变为：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \quad (17.57)$$

即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.58)$$

这就是 $f(t)$ 的复数或指数傅里叶级数 (complex or exponential Fourier series)。注意，指数形式比式 (17.3) 的正弦-余弦形式更简洁紧凑。尽管指数形式傅里叶级数系数 c_n 也可以使用式 (17.56) 由 a_n 和 b_n 求得。但也可直接由 $f(t)$ 求得：

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.59)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。 c_n 的振幅和相位与 $n\omega_0$ 的函数曲线分别称为 $f(t)$ 的复振幅频谱和复相位频谱。这两个频谱构成了 $f(t)$ 的复频谱。

周期函数 $f(t)$ 的指数傅里叶级数通过正负谐波频率交流分量的振幅和相位角描述了 $f(t)$ 的频谱。

傅里叶级数的三种形式 (正弦-余弦形式，幅度-相位形式和指数形式) 的系数之间的关系为：

$$A_n / \phi_n = a_n - jb_n = 2c_n \quad (17.60)$$

即

$$c_n = |c_n| / \theta_n = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} / -\arctan b_n / a_n \quad (17.61)$$

其中， $a_n > 0$ 。注意， c_n 的相位 θ_n 等于 ϕ_n 。

周期信号 $f(t)$ 的均方根值利用傅里叶系数 c_n 可以表示为：

$$\begin{aligned} F_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned} \quad (17.62)$$

即

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2} \quad (17.63)$$

式 (17.62) 可以写成：

$$F_{\text{rms}}^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (17.64)$$

同样，一个 1Ω 电阻消耗的功率为：

$$P_{1\Omega} = F_{\text{rms}}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (17.65)$$

这是帕塞瓦尔定理的又一种形式。信号 $f(t)$ 的功率谱 (Power spectrum) 是指 $|c_n|^2$ 和 $n\omega_0$ 的关系曲线。如果 $f(t)$ 是电阻 R 两端的电压，则电阻吸收的平均功率为 F_{rms}^2/R ；如果 $f(t)$ 是流过电阻 R 的电流，能量为 $F_{\text{rms}}^2 R$ 。

下面通过图 17-27 所示的周期脉冲序列具体说明。目标是求得该脉冲序列的振幅频谱和相位频谱。周期脉冲序列的周期是 $T=10$ ， $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/5$ 。利用式 (17.59) 可得：

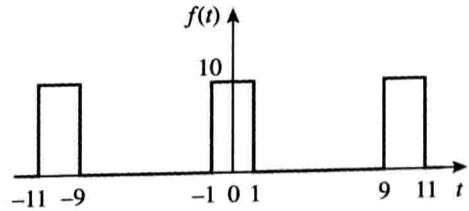


图 17-27 周期脉冲序列

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{10} \int_{-1}^1 10 e^{-jn\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{jn\omega_0} (e^{-jn\omega_0} - e^{jn\omega_0}) \\
 &= \frac{2}{n\omega_0} \frac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{2j} = 2 \frac{\sin n\omega_0}{n\omega_0} = 2 \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5}, \quad \omega_0 = \frac{\pi}{5}
 \end{aligned} \tag{17.66}$$

且

$$f(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} e^{jn\pi t/5} \tag{17.67}$$

由式(17.66)可知, c_n 是 2 和一个形式为 $\sin x/x$ 的函数的乘积。这个函数叫做 sinc 函数, 即:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{17.68}$$

提示: sinc 函数在通信原理中称为抽样函数(Sampling function), 是非常有用的。

sinc 函数的一些性质对于本章而言是非常重要的。当自变量为零时, sinc 函数的值等于单位 1, 即:

$$\text{sinc}(0) = 1 \tag{17.69}$$

对式(17.68)运用洛必达法则即可获得上述结果。当自变量为 π 的整数倍时, sinc 函数的值是 0, 即:

$$\text{sinc}(n\pi) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{17.70}$$

另外, sinc 函数是偶对称函数。利用这些性质, 即可求出 $f(t)$ 的振幅频谱和相位频谱。由式(17.66)可得其振幅为:

$$|c_n| = 2 \left| \frac{\sin n\pi/5}{n\pi/5} \right| \tag{17.71}$$

相位为:

$$\theta_n = \begin{cases} 0^\circ, & \sin \frac{n\pi}{5} > 0 \\ 180^\circ, & \sin \frac{n\pi}{5} < 0 \end{cases} \tag{17.72}$$

图 17-28 给出了 c_n 从 -10 到 10 变化时, 振幅 $|c_n|$ 与 n 的函数关系曲线, 其中 $n = \omega/\omega_0$ 是归一化频率。图 17-29 给出了 θ_n 和 n 的函数关系曲线。振幅频谱和相位频谱均称为线谱, 因为 $|c_n|$ 和 θ_n 的值仅仅出现在频率的离散点处。相邻谱线之间的间隔为 ω_0 。同样, 也可画出 $|c_n|^2$ 和 $n\omega_0$ 的关系曲线, 即功率谱。注意, 振幅频谱的包络具有 sinc 函数的形式。

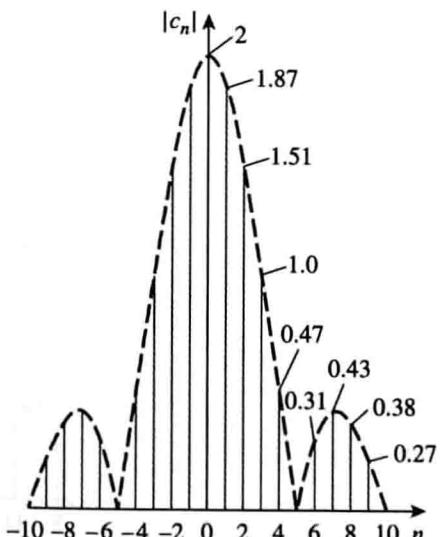


图 17-28 周期脉冲序列的幅度谱

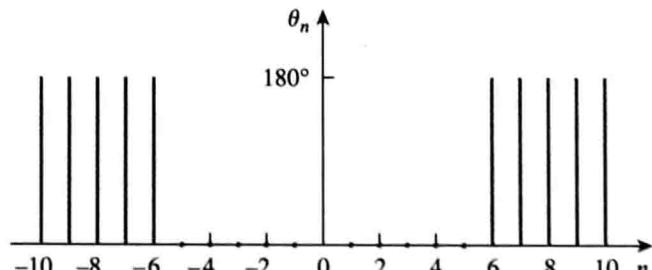


图 17-29 周期脉冲序列的相位谱

提示：由输入输出频谱可以看出电路对周期信号的作用。

例 17-10 求周期函数 $f(t) = e^t$, $0 < t < 2\pi$, 且 $f(t+2\pi) = f(t)$ 的指数傅里叶级数展开式。

解：因为 $T = 2\pi$, $\omega_0 = 2\pi/T = 1$, 因此:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^t e^{-jnt} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-jn} e^{(1-jn)t} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi(1-jn)} [e^{2\pi} e^{-j2\pi n} - 1]$$

由欧拉公式可知:

$$e^{-j2\pi n} = \cos 2\pi n - j \sin 2\pi n = 1 - j0 = 1$$

因此:

$$c_n = \frac{1}{2\pi(1-jn)} [e^{2\pi} - 1] = \frac{85}{1-jn}$$

复数傅里叶级数为:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{85}{1-jn} e^{jnt}$$

下面绘制 $f(t)$ 的复数频谱图。如果令 $c_n = |c_n| \angle \theta_n$, 那么:

$$|c_n| = \frac{85}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \theta_n = \arctan n$$

n 取不同的正、负整数值, 即可获得 c_n 关于 $n\omega_0 = n$ 的振幅频谱和相位频谱, 如图 17-30 所示。

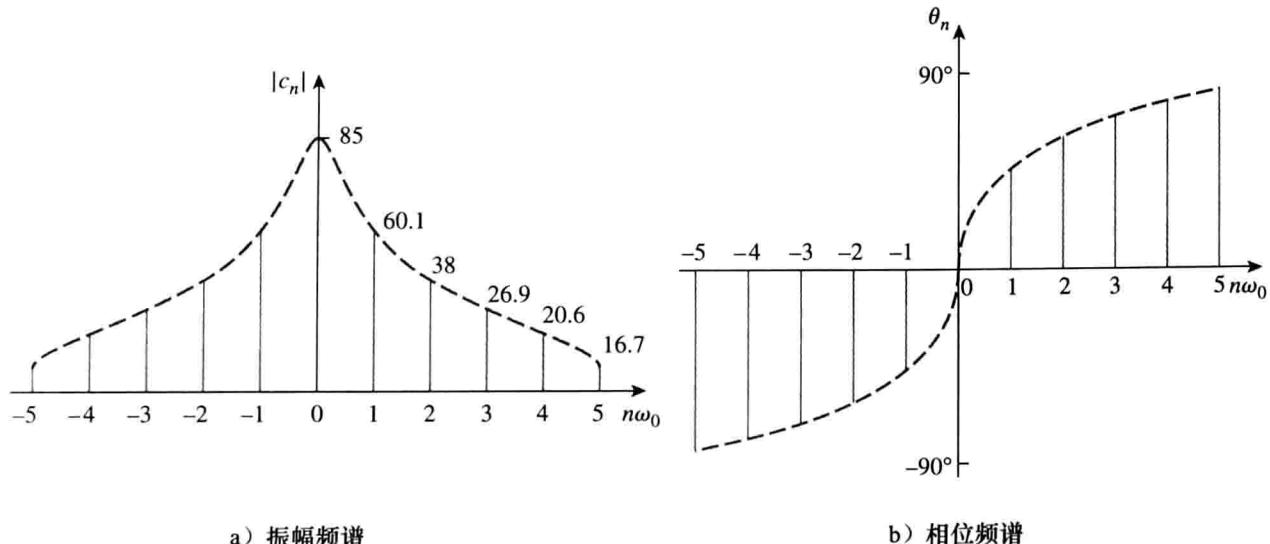


图 17-30 例 17-10 中函数的复数频谱

练习 17-10 求图 17-1 所示函数的复数傅里叶级数。

$$\text{答案: } f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \\ n = \text{奇数}}}^{\infty} \frac{j}{n\pi} e^{jnt}$$

例 17-11 求图 17-9 所示锯齿波的复数傅里叶级数, 画出振幅频谱和相位频谱。

解: 由图 17-9 可知, $f(t) = t$, $0 < t < 1$, $T = 1$ 。则有 $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$ 。因此:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t e^{-j2\pi nt} dt \quad (17.11.1)$$

因为:

$$\int t e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (ax - 1) + C$$

代入式(17.11.1)可得:

$$c_n = \frac{e^{-j2n\pi t}}{(-j2n\pi)^2} (-j2n\pi t - 1) \Big|_0^1 = \frac{e^{-j2n\pi} (-j2n\pi - 1) + 1}{-4n^2\pi^2} \quad (17.11.2)$$

同理:

$$e^{-j2\pi n} = \cos 2\pi n - j \sin 2\pi n = 1 - j0 = 1$$

式(17.11.2)变为:

$$c_n = \frac{-j2n\pi}{-4n^2\pi^2} = \frac{j}{2n\pi} \quad (17.11.3)$$

但上式不包含 $n=0$ 的情况, 当 $n=0$ 时, 有:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{1} \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 0.5 \quad (17.11.4)$$

因此:

$$f(t) = 0.5 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j}{2n\pi} e^{j2n\pi t} \quad (17.11.5)$$

且

$$|c_n| = \begin{cases} \frac{1}{2|n|\pi}, & n \neq 0 \\ 0.5, & n = 0 \end{cases}, \quad \theta_n = 90^\circ, n \neq 0 \quad (17.11.6)$$

对于 n 的不同取值, 绘制出 $|c_n|$ 和 θ_n 的曲线, 即可得到图 17-31 所示的振幅频谱和相位频谱。

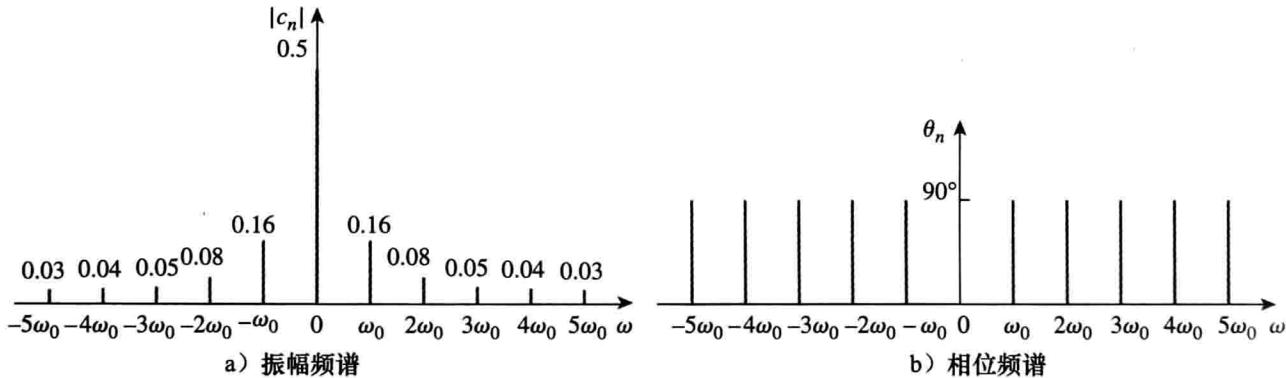


图 17-31 例 17-11 图

练习 17-11 求图 17-17 所示 $f(t)$ 的复数傅里叶级数展开式, 并画出振幅频谱和相位频谱。

答案: $f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j(-1)^n}{n\pi} e^{jn\pi t}$, 频谱图如图 17-32 所示

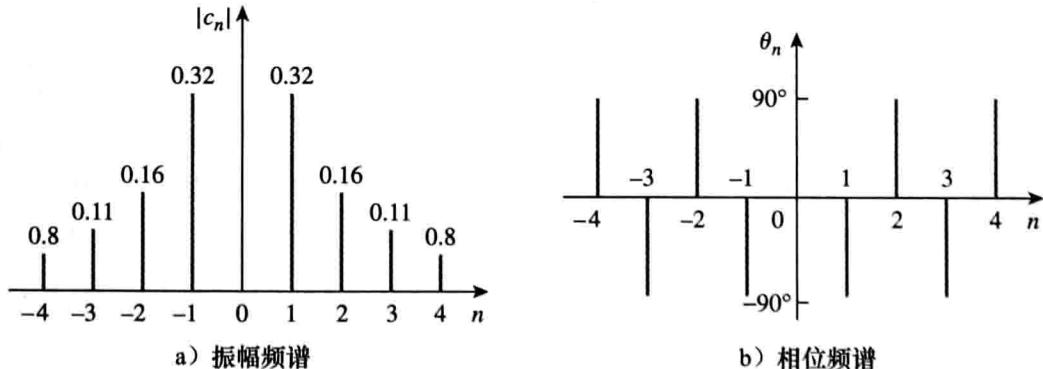


图 17-32 练习 17-11 图

17.7 基于 PSpice 的傅里叶分析

利用 PSpice 软件进行电路的暂态分析时，通常可以实现傅里叶分析。因此，进行傅里叶分析时必须做暂态分析。

对一个波形进行傅里叶分析时，需要一个输入是波形、输出是傅里叶分解的电路。图 17-33 所示由一个电流(电压)源与一个 1Ω 电阻串联的电路，就是一个适用于傅里叶分析的电路。输入波形为电压源 $v_s(t)$ 时，可以用 VPULSE 来表示脉冲电压，用 VSIN 表示正弦电压，并在周期 T 内设置波形的属性。节点 1 的输出电压 $V(1)$ 包含直流电平(a_0)，以及前 9 个谐波(A_n)及其对应相位 Ψ_n ，即：

$$v_o(t) = a_0 + \sum_{n=1}^9 A_n \sin(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (17.73)$$

其中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \psi_n = \phi_n - \frac{\pi}{2}, \quad \phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (17.74)$$

由式(17.74)可以看出，PSpice 输出是正弦函数及其辐角的形式，而不是式(17.10)所示的余弦函数及其辐角的形式。PSpice 输出中还包括归一化傅里叶系数。各系数 a_n 通过除以基本振幅 a_1 可以实现归一化，即归一化分量为 a_n/a_1 。相应的相位 Ψ_n 的归一化则是通过减去基本相位 Ψ_1 实现的，因此归一化相位为 $(\Psi_n - \Psi_1)$ 。

Windows 版本的 PSpice 提供了两种类型的傅里叶分析：由 PSpice 程序进行的离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)和由 PSpice A/D 程序进行的快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)。DFT 是指数傅里叶级数的近似，而 FFT 则是 DFT 的一种快速有效的数值算法。DFT 和 FFT 的详尽讨论并不在本书的范围之内。

17.7.1 离散傅里叶变换

PSpice 程序执行离散傅里叶变换(DFT)后，将所得到的谐波信息在输出文件中以表格形式给出。为了进行傅里叶分析，需选择 Analysis/Setup/Transient，出现图 17-34 所示的暂态分析对话框。其中 Print Step 应该远小于一个周期 T ，Final Time 可以设置为 $6T$ 。Center Frequency 是基频 $f_0 = 1/T$ 。将待进行 DFT 的变量输入到 Output Vars 对话框中，例如图 17-34 中的 $V(1)$ 。除了填写暂态分析对话框外，还应选中 Enable Fourier。允许进行傅里叶分析并保存电路原理图之后，即可选择 Analysis/Simulate 运行 PSpice 程序。该程序执行谐波分解，得到暂态分析的傅里叶分量。选择 Analysis/Examine Output，即可读取输出文件。输出文件包括直流值和前 9 个谐波分量，当然也可以在 Number of harmonics 对话框(见图 17-34)中规定更多的谐波分量。

17.7.2 快速傅里叶变换

快速傅里叶变换(FFT)由 PSpice A/D 程序执行，并将暂态分析表达式的整个频谱以 PSpice A/D 曲线展示。如前所述，首先构造图 17-33b 所示的电路原理图，并输入波形的

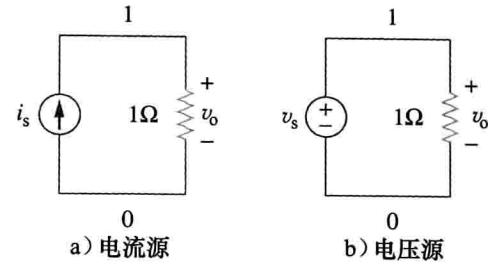


图 17-33 使用 PSpice 实现傅里叶分析

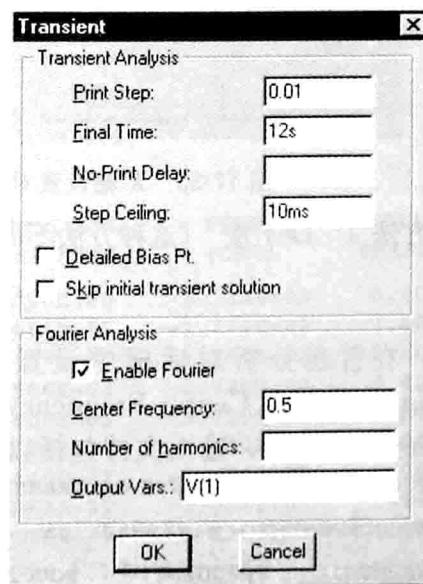


图 17-34 暂态分析对话框

属性。同时，还要在暂态对话框输入 Print Step 和 Final Time 的值。完成上述设置后，即可通过两种方法确定波形的 FFT。

一种方法是在图 17-33b 所示的电路的节点 1 插入一个电压探针。保存电路并选择 Analysis/Simulate 后，波形 V(1)将在 PSpice A/D 窗口显示。双击 PSpice A/D 窗口中的 FFT 的图标后，就会自动将波形替换为 FFT 波形，从 FFT 图形中即可得到谐波信息。如果 FFT 图形很密集，可以在 User Defined 对话框(见图 17-35)中设置一个较小的数据范围。

另一种确定 V(1) 的 FFT 的方法则无需在原理图的节点 1 插入电压探针。在选择了 Analysis/Simulate 之后，PSpice A/D 窗口不会出现任何曲线，之后选择 Trace/Add，并在 Trace Command 框输入 V(1)，再双击 OK 按钮。下面选择 Plot/X-Axis Settings 调出图 17-35 所示的 X 轴设置对话框，并选择 Fourier/OK，就会显示所选轨迹的 FFT。第二个方法对于确定任何与电路相关的轨迹的 FFT 是非常有用的。

FFT 分析法的主要优点是可以提供图形输出，但其缺点是一些谐波太小，以至于无法显示出来。

在 DFT 和 FFT 程序运行中，为了保证结果的精度，应该在较长的周期内运行仿真程序，并设置较小的 Step Ceiling(在暂态对话框中)。暂态对话框中的终止时间应该至少是信号周期的 5 倍，这样才能确保仿真达到稳态。

例 17-12 利用 PSpice 求图 17-1 所示信号的傅里叶系数。

解：图 17-36 所示为确定傅里叶系数的电路原理图。根据图 17-1 所示的信号，输入电压源 VPULSE 的属性如图 17-36 所示。下面利用 DFT 和 FFT 方法来求解本例。

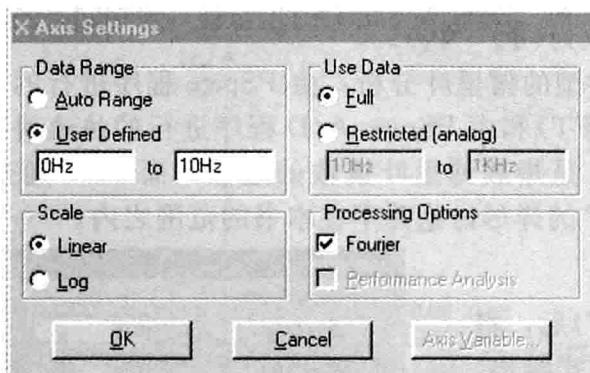


图 17-35 X 轴设置对话框

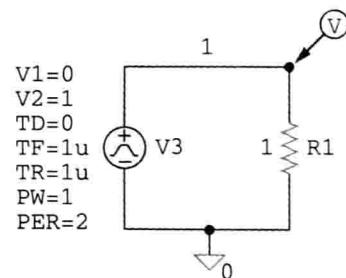


图 17-36 例 17-12 原理图

方法 1 DFT 法 (这种方法不需要图 17-36 的电压探针)由图 17-1 可知， $T=2\text{s}$ ，所以：

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0.5\text{Hz}$$

于是，在暂态分析对话框中设置 Final Time 为 $6T=12\text{s}$ ，Print Time 为 0.01s ，Step Ceiling 为 10ms ，Center Frequency 为 0.5Hz ，设置输出变量为 V(1)(如图 17-34 所示)。当 PSpice 运行时，输出文件包括以下结果：

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

DC COMPONENT = 4.989950E-01

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	5.000E-01	6.366E-01	1.000E+00	-1.809E-01	0.000E+00
2	1.000E+00	2.012E-03	3.160E-03	-9.226E+01	-9.208E+01
3	1.500E+00	2.122E-01	3.333E-01	-5.427E-01	-3.619E-01
4	2.000E+00	2.016E-03	3.167E-03	-9.451E+01	-9.433E+01
5	2.500E+00	1.273E-01	1.999E-01	-9.048E-01	-7.239E-01
6	3.000E+00	2.024E-03	3.180E-03	-9.676E+01	-9.658E+01
7	3.500E+00	9.088E-02	1.427E-01	-1.267E+00	-1.086E+00

8	4.000E+00	2.035E-03	3.197E-03	-9.898E+01	-9.880E+01
9	4.500E+00	7.065E-02	1.110E-01	-1.630E+00	-1.449E+00

将上述结果与式(17.1.7)(见例 17-1)进行比较或者与图 17-4 的频谱进行比较, 可见结果相当一致。在式(17.1.7)中, 直流分量是 0.5, 而 PSpice 给出的结果是 0.498 995。并且, 该信号仅有相位为 $\Psi_n = -90^\circ$ 的奇次谐波, 虽然 PSpice 给出的结果有偶次谐波, 但是偶次谐波的振幅很小。

方法 2 FFT 法 设置如图 17-36 所示的电压探针, 运行 PSpice 后, 即可在 PSpice A/D 窗口得到 V(1) 的波形, 如图 17-37a 所示。在 PSpice A/D 菜单上双击 FFT 的图标, 并将 X-axis Settings 设置为从 0 到 10Hz, 即可得到 V(1) 的 FFT, 如图 17-37b 所示。该 FFT 频谱图中包括所选频率范围内的直流分量和各谐波分量。注意, 各谐波的幅度和频率与 DFT 产生的列表值相一致。

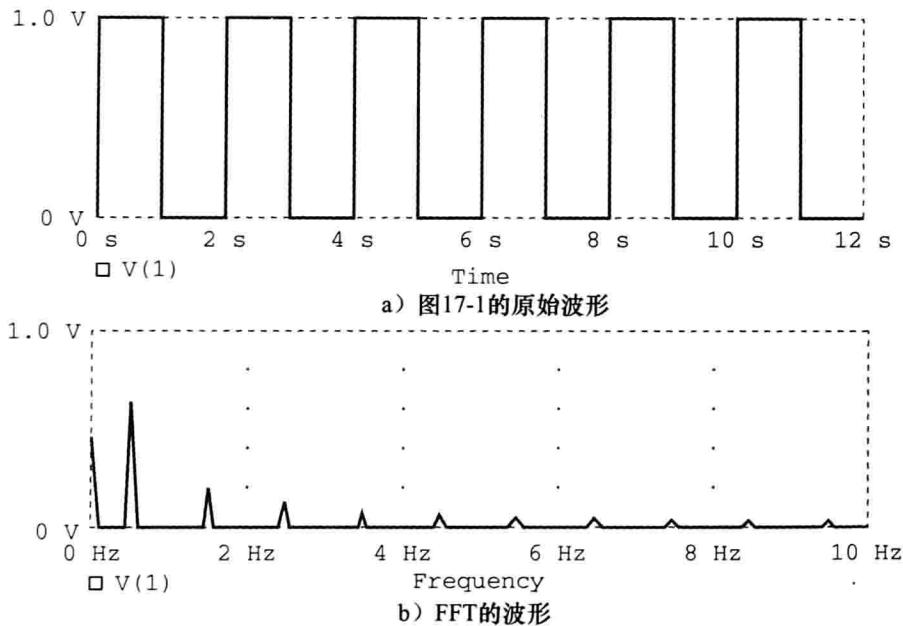


图 17-37 FFT 波形图

练习 17-12 利用 PSpice 求图 17-7 所示函数的傅里叶系数。

答案: FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(1)

DC COMPONENT = 4.950000E-01

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	1.000E+00	3.184E-01	1.000E+00	-1.782E+02	0.000E+00
2	2.000E+00	1.593E-01	5.002E-01	-1.764E+02	1.800E+00
3	3.000E+00	1.063E-01	3.338E-01	-1.746E+02	3.600E+00
4	4.000E+00	7.979E-02	2.506E-03	-1.728E+02	5.400E+00
5	5.000E+00	6.392E-01	2.008E-01	-1.710E+02	7.200E+00
6	6.000E+00	5.337E-02	1.676E-03	-1.692E+02	9.000E+00
7	7.000E+00	4.584E-02	1.440E-01	-1.674E+02	1.080E+01
8	8.000E+00	4.021E-02	1.263E-01	-1.656E+02	1.260E+01
9	9.000E+00	3.584E-02	1.126E-01	-1.638E+02	1.440E+01

例 17-13 在图 17-38 所示电路中, $v_s = 12\sin(200\pi t)u(t)$,

求电流 $i(t)$ 。

解: 1. 明确问题。虽然本例要求解决的问题从表面看已经阐述清楚, 但仍然建议读者明确所要求解的是暂态响应, 而不是稳态响应。因为在后一种情况下, 问题会变得非常容易。

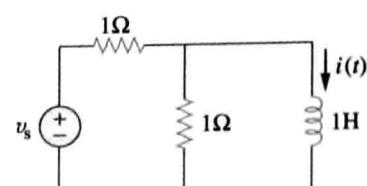


图 17-38 例 17-13 图

2. 列出已知条件。本例利用 PSpice 和傅里叶分析，从而确定给定输入 $v_s(t)$ 的响应 $i(t)$ 。

3. 确定备选方案。首先利用 DFT 进行初始分析，然后使用 FFT 法验证答案。

4. 尝试求解。本例的电路原理图如图 17-39 所示。可以使用 DFT 法来确定 $i(t)$ 的傅里叶级数。因为输入波形的周期是 $T = 1/100 = 10\text{ms}$ ，在暂态对话框中设置 Print Step 为 0.1ms ，Final Time 为 100ms ，Center Frequency 为 100Hz ，Number of harmonics 为 4，Output 为 $I(L1)$ 。电路仿真时，其输出文件的内容如下：

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE I(VD)

DC COMPONENT = 8.583269E-03

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	1.000E+02	8.730E-03	1.000E+00	-8.984E+01	0.000E+00
2	2.000E+02	1.017E-04	1.165E-02	-8.306E+01	6.783E+00
3	3.000E+02	6.811E-05	7.802E-03	-8.235E+01	7.490E+00
4	4.000E+02	4.403E-05	5.044E-03	-8.943E+01	4.054E+00

求出傅里叶系数之后，电流 $i(t)$ 的傅里叶级数可以利用式(17.73)写出，即：

$$i(t) = 8.5833 + 8.73 \sin(2\pi \cdot 100t - 89.84^\circ) + 0.1017 \sin(2\pi \cdot 200t - 83.06^\circ) \\ + 0.068 \sin(2\pi \cdot 300t - 82.35^\circ) + \dots (\text{mA})$$

5. 评价结果。还可以通过 FFT 法来验证上述结果的正确性。此时需要在图 17-39 所示电感的节点 1 插入电流探针。运行 PSpice 将自动在 PSpice A/D 窗口产生 $I(L1)$ 的曲线，如图 17-40a 所示。双击 FFT 图标并将 X 轴的范围设置为 $0 \sim 200\text{Hz}$ ，得到 $I(L1)$ 的 FFT 如图 17-40b 所示。从 FFT 频谱图中可以很清晰地看到直流分量和第一个谐波。其他高次谐波均很小可以忽略不计。

最后需要考虑这一结果是否与实际情况相符。该电路真实的暂态响应为 $i(t) = (9.549e^{-0.5t} - 9.549)\cos(200\pi t)u(t)$ mA。余弦波的周期是 10ms ，而指数信号的时间常数为 $2000\text{ms}(2\text{s})$ 。因此，该结果与傅里叶分析得到的结果是一致的。

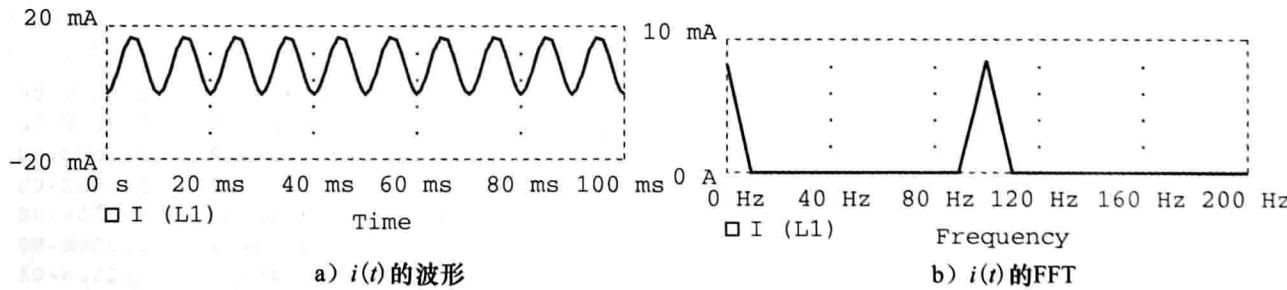


图 17-40 $i(t)$ 的波形图和频谱图

6. 是否满意？显然，已经利用规定的方法成功地求解了本例，可以将得到的结果作为本题的答案。

练习 17-13 某振幅为 4A 、频率为 2kHz 的正弦电流源应用于图 17-41 所示电路中。利用 PSpice 求 $v(t)$ 。

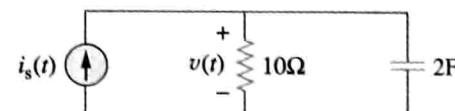


图 17-41 练习 17-13 图

答案: $v(t) = -150.72 + 145.5 \sin(4\pi \cdot 10^3 t + 90^\circ) + \dots (\mu V)$ 。傅里叶系数如下所示:

FOURIER COEFFICIENTS OF TRANSIENT RESPONSE V(R1:1)

DC COMPONENT = -1.507169E-04

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	2.000E+03	1.455E-04	1.000E+00	9.006E+01	0.000E+00
2	4.000E+03	1.851E-06	1.273E-02	9.597E+01	5.910E+00
3	6.000E+03	1.406E-06	9.662E-03	9.323E+01	3.167E+00
4	8.000E+03	1.010E-06	6.946E-02	8.077E+01	-9.292E+00

† 17.8 应用实例

17.4 节已经指出, 傅里叶级数展开可以利用向量分析方法, 这种方法被用在包含非正弦周期激励的电路的交流分析中。傅里叶级数的实际应用非常广泛, 特别是在通信和信号处理领域。典型的应用包括频谱分析、滤波、检波整流和失真等。本章将讨论其中的两个应用: 频谱分析仪和滤波。

17.8.1 频谱分析仪

傅里叶级数给出了信号的频谱。信号频谱由各次谐波的振幅和相位与频率的关系组成。通过提供信号 $f(t)$ 的频谱, 傅里叶级数有助于识别信号的相关特征, 即哪些频率成分对输出信号的波形起到主要作用, 哪些则不起作用。例如, 可听见的声音包含的主要频率成分位于 $20\text{Hz} \sim 15\text{kHz}$ 的频率范围内, 而可见光信号的频率范围则为 $10^5 \sim 10^6\text{GHz}$ 。表 17-4 列出了一些常见信号及其频率范围。如果周期信号的振幅频谱仅仅包含有限个傅里叶系数 A_n 或 C_n , 则称为带限周期信号。其傅里叶级数变为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (17.75) \end{aligned}$$

上式表明, 如果 ω_0 已知, 仅需要 $(2N+1)$ 项 ($a_0, A_1, A_2, \dots, A_N, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$) 即可完全确定信号 $f(t)$ 。由这一结果可以得到抽样定理(sampling theorem): 傅里叶级数中含有 N 个谐波的带限周期函数可以由其一个周期内 $(2N+1)$ 个暂态值唯一确定。

频谱分析仪(spectrum analyzer)是一种显示各频率成分的幅度分布情况的仪器。即可以显示出表示各频率处能量大小的各频率分量(谱线)的分布情况。

频谱分析仪与显示整个信号(所有分量)与时间关系的示波器是不同的。示波器在时域中显示信号, 而频谱分析仪则是在频域显示信号。作为一种电路分析仪器, 恐怕没有其他设备比频谱分析仪更有用。频谱分析仪可以实现噪声与杂波信号分析、相位检测、电磁干扰和滤波器测量、振动测量、雷达测量等功能。商用频谱分析仪具有不同的尺度和形状, 图 17-42 所示是一个典型的频谱分析仪。

表 17-4 典型信号的频率范围

信 号	频 率 范 围
可听到的声音	$20 \sim 15\text{kHz}$
调幅无线电	$540 \sim 1600\text{kHz}$
短波无线电	$3 \sim 36\text{MHz}$
视频信号(美国标准)	$\text{dc} \sim 4.2\text{MHz}$
甚高频(VHF)电视, 调频无线电	$54 \sim 216\text{MHz}$
超高频(UHF)电视	$470 \sim 806\text{MHz}$
蜂窝电话	$824 \sim 891.5\text{MHz}$
微波	$2.4 \sim 300\text{GHz}$
可见光	$10^5 \sim 10^6\text{GHz}$
X 射线	$10^8 \sim 10^9\text{GHz}$

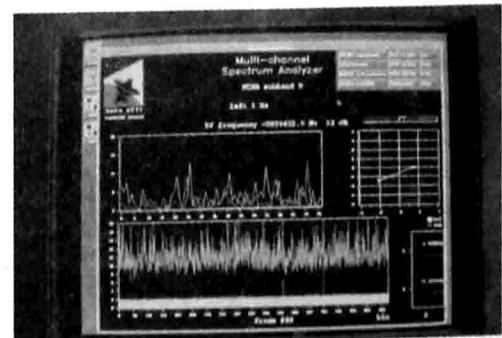
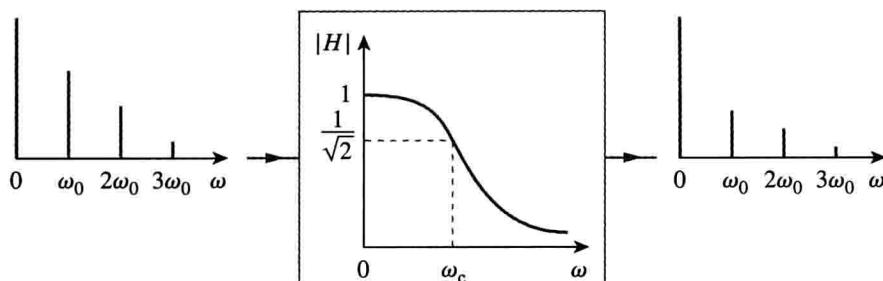


图 17-42 典型的频谱分析仪

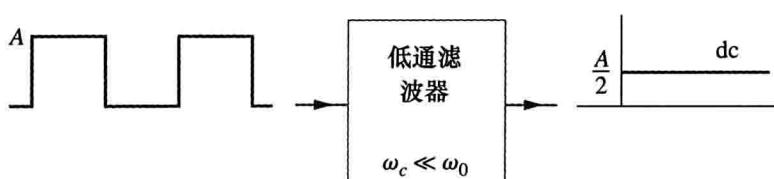
17.8.2 滤波器

滤波器是电子与通信系统中的一类重要仪器。第14章已经全面介绍了有源滤波器和无源滤波器。本节将介绍如何设计用于选择输入信号的基本成分(或任何需要的谐波)且滤除其他谐波的滤波器。需要借助输入信号的傅里叶级数展开来实现这一滤波过程,为了便于说明,本节将讨论低通滤波器和带通滤波器两种情况。 RL 高通滤波器的情况在例17-6中已经介绍过了。

低通滤波器的输出取决于输入信号、滤波器的传递函数 $H(\omega)$ 和转折频率或半功率点频率 ω_c 。对于 RC 无源滤波器, $\omega_c = 1/RC$ 。低通滤波器允许直流分量和低频分量通过,而阻止高频成分通过,如图17-43a所示。如果使得 ω_c 足够大($\omega_c \gg \omega_0$, 例如使得 C 足够小),则可使大量的谐波通过滤波器。然而,如果使得 ω_c 足够小($\omega_c \ll \omega_0$),则将阻止所有的交流分量,而仅允许通过直流分量,如图17-43b所示(见图17-2a所示的方波的傅里叶级数展开)。



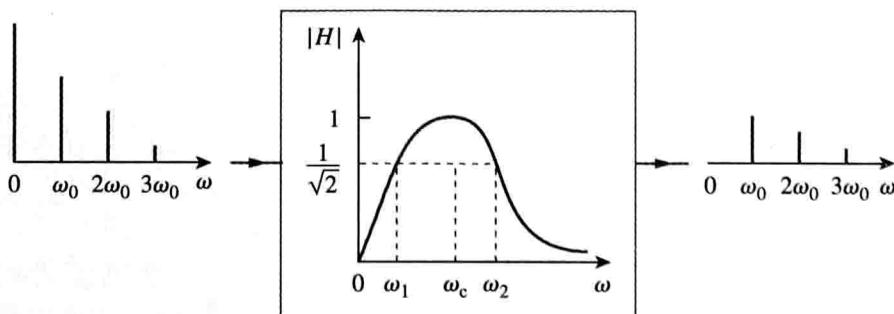
a) 低通滤波器的输入和输出谱



b) 当 $\omega_c \ll \omega_0$ 时, 低通滤波器仅通过直流分量

图 17-43 低通滤波器

同理,带通滤波器的输出取决于输入信号、滤波器的传递函数 $H(\omega)$ 、滤波器带宽 B 和中心频率 ω_c 。如图17-44a所示,低通滤波器允许以频率 ω_c 为中心的有限频带范围($\omega_1 < \omega < \omega_2$)的所有谐波分量通过。假设 ω_0 、 $2\omega_0$ 和 $3\omega_0$ 均位于带通频带范围内。如果滤波器选择性特别好($B \ll \omega_0$),且 $\omega_c = \omega_0$,其中 ω_0 是输入信号的基频,则滤波器仅允许输入信号的基本分量($n=1$)通过,而阻止所有其他的高次谐波。因此,如果输入为一个方波,则所得的输出是一个与方波基频相等的正弦波,如图17-44b所示(亦可参见图17-2a)。



a) 带通滤波器的输入和输出频谱

图 17-44 带通滤波器

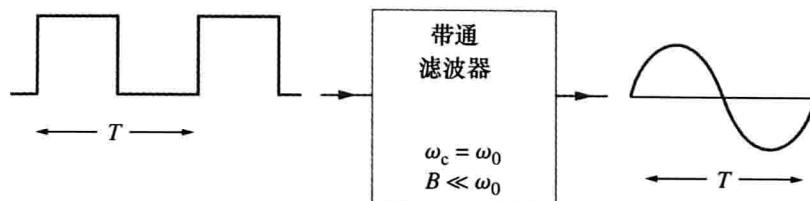


图 17-44 (续)

提示：本节中使用 ω_c 作为带通滤波器的中心频率，而第 14 章则是用 ω_0 表示，这是为了避免将 ω_0 与输入信号的基频混淆。

例 17-14 如果将图 17-45a 中的锯齿波输入理想低通滤波器，其传递函数如图 17-45b 所示，试确定其输出。

解：图 17-45a 所示的输入信号与图 17-9 所示输入信号相同，由练习 17-2 可知傅里叶级数展开式为：

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\omega_0 t - \frac{1}{3\pi} \sin 3\omega_0 t - \dots$$

其中，周期 $T=1s$ ，基频 $\omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$ 。因为滤波器的截止频率为 $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ ，所以只有直流分量和 $n\omega_0 < 10$ 的谐波分量可以通过。当 $n=2$ 时， $n\omega_0 = 4\pi = 12.566 \text{ rad/s}$ ，大于 10 rad ，意味着二次与更高次谐波将无法通过该滤波器。因此，仅仅直流分量和基频分量可以通过。因此，滤波器的输出为：

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t$$

练习 17-14 如果例 17-14 中的低通滤波器被图 17-46 所示理想带通滤波器代替，试重做例 17-14。

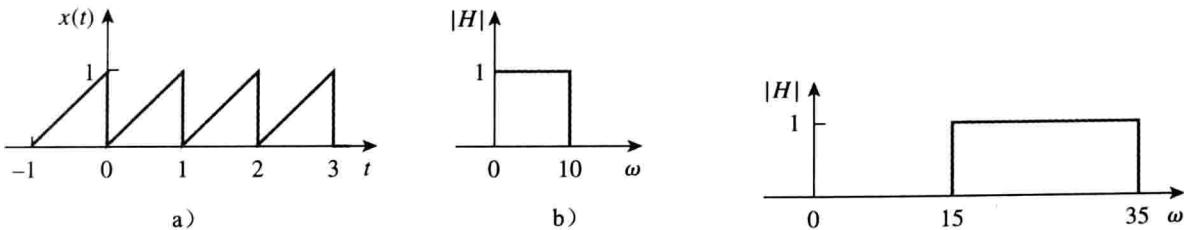


图 17-45 例 17-14 图

图 17-46 练习 17-14 图

答案： $y(t) = -\frac{1}{3\pi} \sin 3\omega_0 t - \frac{1}{4\pi} \sin 4\omega_0 t - \frac{1}{5\pi} \sin 5\omega_0 t$

17.9 本章小结

1. 周期函数就是每 T_s 重复自身的函数， $f(t \pm nT) = f(t)$ ， $n=1, 2, 3, \dots$
2. 电子工程中所遇到的任何非正弦周期函数 $f(t)$ 都可用傅里叶级数表示成正余弦函数之和：

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{dc} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)}_{ac}$$

其中， $\omega_0 = 2\pi/T$ 是基频。傅里叶级数将函数分解为直流分量 a_0 和由无穷多个正弦谐波成分构成的交流分量。傅里叶系数由以下各式确定：

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

如果 $f(t)$ 是偶函数，则 $b_n = 0$ ；如果 $f(t)$ 是奇函数，则 $a_0 = 0$, $a_n = 0$ ；如果 $f(t)$ 是半波对称函数，则当 n 为偶数时，有 $a_0 = a_n = b_n = 0$ 。

3. 三角(正弦-余弦)傅里叶级数的另一种表达式是振幅-相位形式：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

其中：

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}$$

4. 当源函数是非正弦周期函数时，利用傅里叶级数分析电路时可以采用相量方法，即利用相位技术确定傅里叶级数中各谐波的响应，并将其变换到时域中逐个相加，从而得到电路的全响应。

5. 周期电压和电流的平均功率为：

$$P = V_{dc} I_{dc} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\theta_n - \phi_n)$$

即总的平均功率就是各同次谐波电压和电流谐波的平均功率之和。

6. 周期函数也可以表示成指数(复数)傅里叶级数形式：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中：

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$\omega_0 = 2\pi/T$ 。指数傅里叶级数通过正负谐波频率处交流分量的振幅和相位描述了 $f(t)$ 的频谱。因此，傅里叶级数表示法有三种形式：三角函数形式，振幅-相位形式和指数形式。

7. 频率(线)谱是 A_n 和 ϕ_n 或 $|c_n|$ 和 θ_n 随频率的变化曲线。

8. 周期函数的方均根值为：

$$F_{rms} = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2}$$

一个 1Ω 电阻消耗的功率为：

$$P_{1\Omega} = F_{rms}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

该关系称为帕塞瓦尔定理。

9. 利用 PSpice 软件可以在电路的暂态分析中实现该电路的傅里叶分析。

10. 傅里叶级数可以应用于频谱分析仪和滤波器中，频谱分析仪是一个显示输入信号离散傅里叶频谱的仪器，工程分析人员可以利用频谱分析仪确定信号分量的频率和相应的能量。因为傅里叶谱是离散谱，所以可以设计滤波器有效地阻止期望频率范围以外的频率分量通过。

复习题

1. 以下哪些表达式不是傅里叶级数？

- (a) $t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5}$
- (b) $5\sin t + 3\sin 2t - 2\sin 3t + \sin 4t$
- (c) $\sin t - 2\cos 3t + 4\sin 4t + \cos 4t$
- (d) $\sin t + 3\sin 2t. 7t - \cos \pi t + 2\tan \pi t$

(e) $1 + e^{-j\pi t} + \frac{e^{-j2\pi t}}{2} + \frac{e^{-j3\pi t}}{3}$

2. 如果 $f(t) = t$, $0 < t < \pi$, $f(t + n\pi) = f(t)$, 则 ω_0 的值为：

- (a) 1
- (b) 2
- (c) π
- (d) 2π

3. 下面哪些函数是偶函数？

- (a) $t+t^2$ (b) $t^2 \cos t$ (c) e^{t^2}
 (d) $t^2 + t^4$ (e) \sinht
- 4 下面哪些函数是奇函数?
 (a) $\sin t + \cos t$ (b) $t \sin t$ (c) $t \ln t$
 (d) $t^3 \cos t$ (e) \sinht
- 5 如果 $f(t) = 10 + 8\cos t + 4\cos 3t + 2\cos 5t + \dots$,
 则直流分量的幅度为:
 (a) 10 (b) 8 (c) 4 (d) 2 (e) 0
- 6 如果 $f(t) = 10 + 8\cos t + 4\cos 3t + 2\cos 5t + \dots$,
 其六次谐波的角频率为
 (a) 12 (b) 11 (c) 9 (d) 6 (e) 1
- 7 图 17-14 所示函数是半波对称函数。
 (a) 正确 (b) 错误

习题

17.2 节

- 1 判断以下各函数是否为周期函数, 如果是周期函数, 确定其周期。
 (a) $f(t) = \cos \pi t + 2\cos 3\pi t + 3\cos 5\pi t$
 (b) $y(t) = \sin t + 4\cos 2\pi t$
 (c) $g(t) = \sin 3t \cos 4t$
 (d) $h(t) = \cos^2 t$
 (e) $z(t) = 4.2\sin(0.4\pi t + 10^\circ) + 0.8\sin(0.6\pi t + 50^\circ)$
 (f) $p(t) = 10$
 (g) $q(t) = e^{-\pi t}$

- 2 某周期函数的三角傅里叶级数为: **ML**

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \dots \right)$$

利用 MATLAB 合成该周期函数的波形。

- 3 求图 17-47 所示波形的傅里叶系数 a_0 、 a_n 和 b_n , 并画出其幅度谱和相位谱。

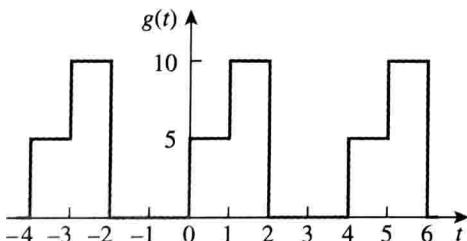


图 17-47 习题 3 图

- 4 求图 17-48 所示反向锯齿波的傅里叶级数展开式, 并绘制其振幅频谱和相位频谱。

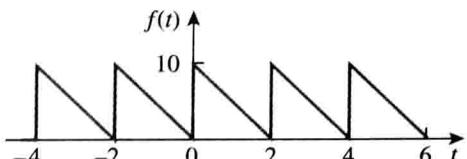


图 17-48 习题 4 和习题 66 图

- 5 求图 17-49 所示波形的傅里叶级数展开式。

- 8 $|c_n|$ 和 $n\omega_0$ 的关系曲线为:
 (a) 复频率谱 (b) 复振幅频谱
 (c) 复相位频谱
- 9 如果将周期电压 $(2 + 6\sin\omega_0 t)$ 作用于 1Ω 电阻, 则电阻消耗的功率(单位为瓦特)最接近的整数为:
 (a) 5 (b) 8 (c) 20
 (d) 22 (e) 40
- 10 可以显示信号频谱的仪器称为:
 (a) 示波器 (b) 光谱图
 (c) 谱分析仪 (d) 傅里叶光谱图

答案: (1) a, d; (2) b; (3) b, c, d; (4) d, e;
 (5) a; (6) d; (7) a; (8) b; (9) d; (10) c

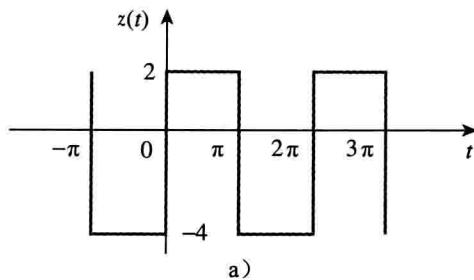


图 17-49 习题 5 图

- 6 求如下信号的三角傅里叶级数:

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ 10, & \pi < t < 2\pi \end{cases}, \text{同时 } f(t+2\pi) = f(t)$$

- * 7 求图 17-50 所示周期函数的傅里叶级数。 **ML**

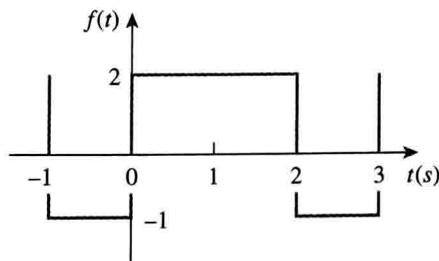


图 17-50 习题 7 图

- 8 利用图 17-51 所示信号设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何由周期性波形确定其指数傅里叶级数。 **ED**

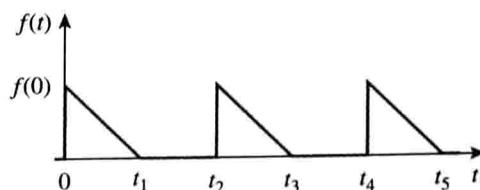


图 17-51 习题 8 图

- 9 求图 17-52 所示整流余弦波前三个谐波项的傅里叶系数 a_n 和 b_n 。

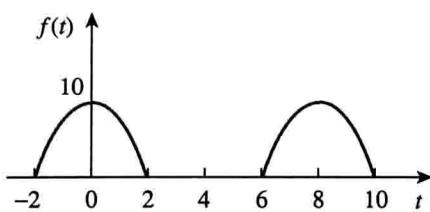


图 17-52 习题 9 图

- 10 求图 17-53 所示波形的指数傅里叶级数。

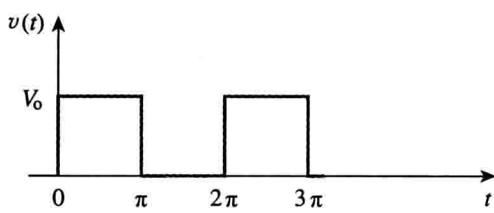


图 17-53 习题 10 图

- 11 求图 17-54 所示信号的指数傅里叶级数。

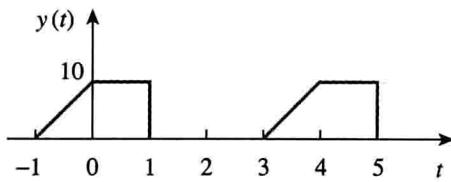


图 17-54 习题 11 图

- * 12 某电压源为周期性波形，其一个周期内的表达式为：

$$v(t) = 10t(2\pi - t) \text{ V}, \quad 0 < t < 2\pi$$

求该电压的傅里叶级数。

- 13 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何由周期函数确定其傅里叶级数。 **ED**

- 14 求如下傅里叶级数的正交(余弦和正弦)形式：

$$f(t) = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{n^3 + 1} \cos\left(2nt + \frac{n\pi}{4}\right)$$

- 15 将如下傅里叶级数表示为(a)余弦和幅角的形式；(b)正弦和幅角的形式。

$$f(t) = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 1} \cos 10nt + \frac{1}{n^3} \sin 10nt$$

- 16 图 17-55a 所示波形的傅里叶级数为：

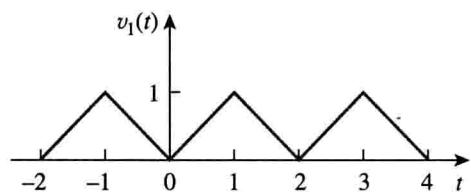
$$v_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi t + \frac{1}{9} \cos 3\pi t + \frac{1}{25} \cos 5\pi t + \dots \right) \text{ V}$$

求图 17-55b 所示 $v_2(t)$ 的傅里叶级数。

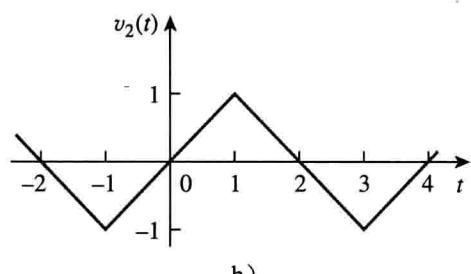
17.3 节

- 17 确定下列函数的奇偶性。

$$(a) 1+t; \quad (b) t^2 - 1; \quad (c) \cos n\pi t \sin n\pi t;$$



a)

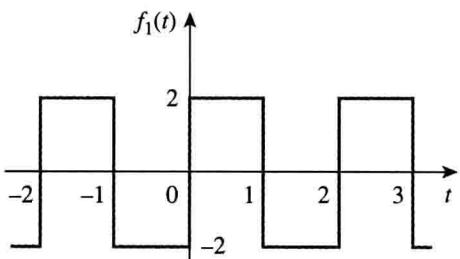


b)

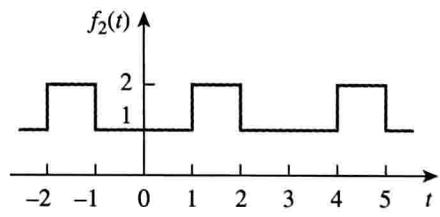
图 17-55 习题 16 和习题 69 图

$$(d) \sin^2 \pi t; \quad (e) e^{-t}$$

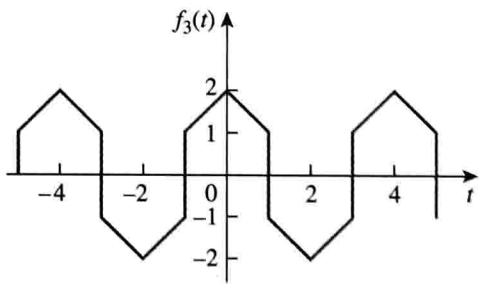
- 18 确定图 17-56 所示函数的基频，并指出其对称类型。



a)



b)



c)

图 17-56 习题 18 和习题 63 的图

- 19 求图 17-57 所示周期波形的傅里叶级数。

- 20 求图 17-58 所示信号的傅里叶级数。并利用前三个非零谐波计算 $t=2$ 时的 $f(t)$ 。 **ML**

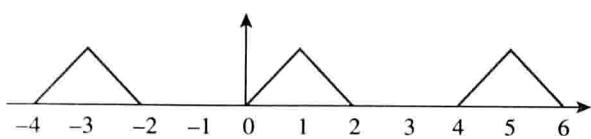


图 17-57 习题 19 图

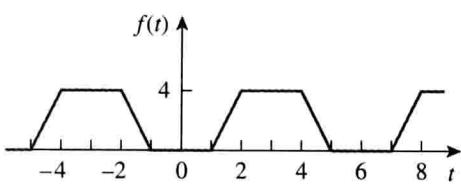


图 17-58 习题 20 和习题 67 图

21 求图 17-59 所示信号的三角傅里叶级数。

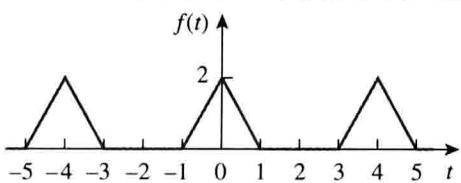


图 17-59 习题 21 图

22 求图 17-60 所示函数的傅里叶系数。

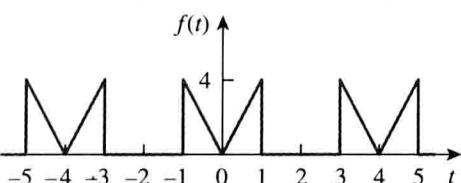


图 17-60 习题 22 图

23 利用图 17-61 所示信号设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何确定一个周期波形的傅里叶级数。
ED

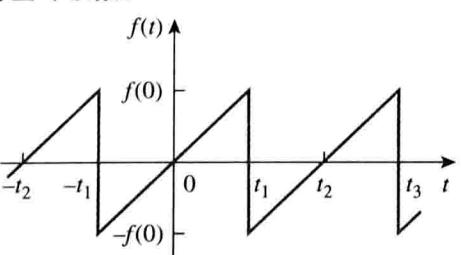


图 17-61 习题 23 图

24 对于图 17-62 所示的周期函数，(a)求三角傅里叶级数的系数 a_2 和 b_2 ；(b)计算 $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ 的 $f(t)$ 分量的振幅和相位；(c)利用前四个非零项来估计 $f(\pi/2)$ ；(d)证明：

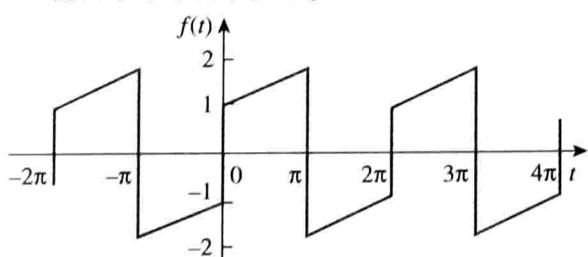


图 17-62 习题 24 和习题 60 图

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

25 求图 17-63 所示函数的傅里叶级数表达式。

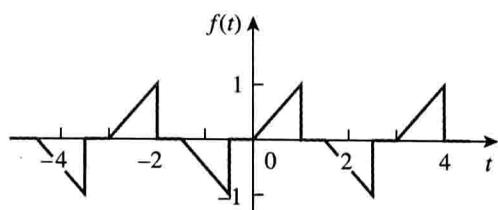


图 17-63 习题 25 图

26 求图 17-64 所示信号的傅里叶级数表达式。

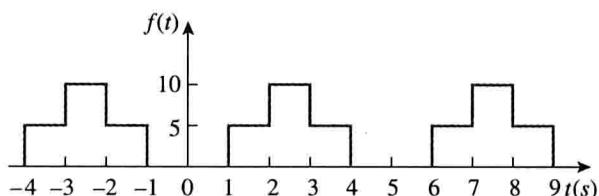


图 17-64 习题 26 图

27 对于图 17-65 所示波形，(a)确定该波形的对称类型；(b)计算 a_3 和 b_3 ；(c)利用前 5 项非零谐波确定均方根值。

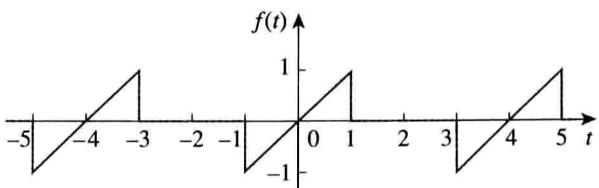


图 17-65 习题 27 图

28 求图 17-66 所示电压波形的三角傅里叶级数。
ML

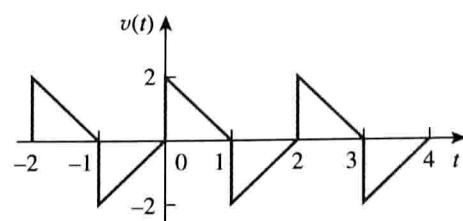


图 17-66 习题 28 图

29 求图 17-67 所示锯齿波的傅里叶级数展开式。

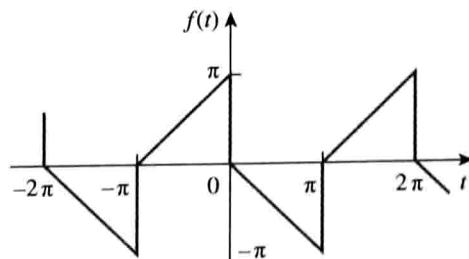


图 17-67 习题 29 图

- 30 (a)如果 $f(t)$ 是偶函数, 证明:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

- (b)如果 $f(t)$ 是奇函数, 证明:

$$c_n = -\frac{j2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

- 31 设 a_n 和 b_n 为 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数, ω_0 为基频。对 $f(t)$ 进行时间尺度变换得到 $h(t) = f(\alpha t)$, 利用 $f(t)$ 的 a_n 、 b_n 和 ω_0 表示 $h(t)$ 的 a'_n 、 b'_n 和 ω'_0 。

17.4 节

- 32 图 17-68 所示电路的 $i_s(t)$ 如下, 求 $i(t)$:

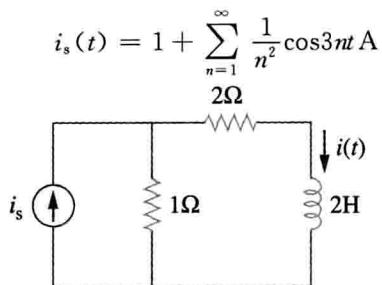


图 17-68 习题 32 图

- 33 在图 17-69 所示电路中, $v_s(t)$ 的傅里叶级数展开式如下, 求 $v_o(t)$:

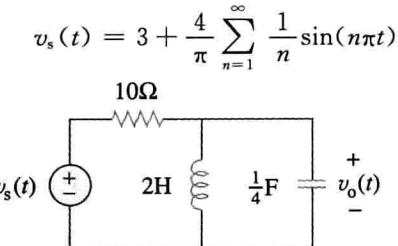


图 17-69 习题 33 图

- 34 利用图 17-70 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解傅里叶级数的电路响应。

ED

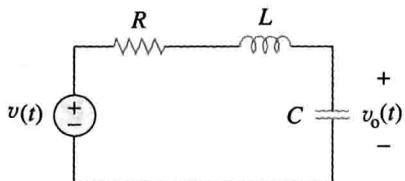


图 17-70 习题 34 图

- 35 如果图 17-71 所示电路中 v_s 和图 17-56b 所示的函数 $f_2(t)$ 是一样的, 求直流分量和前三个非零谐波分量。

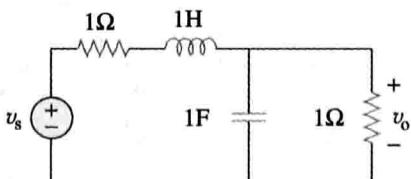


图 17-71 习题 35 图

- * 36 求图 17-72a 所示电路的响应 i_o , 其中 $v_s(t)$ 如图 17-72b 所示。

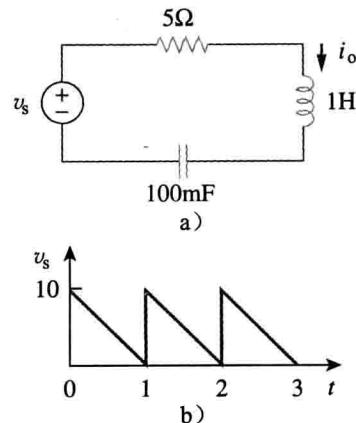


图 17-72 习题 36 图

- 37 如果图 17-73a 所示的周期电流作用于图 17-33b 所示的电路中, 试求 v_o 。

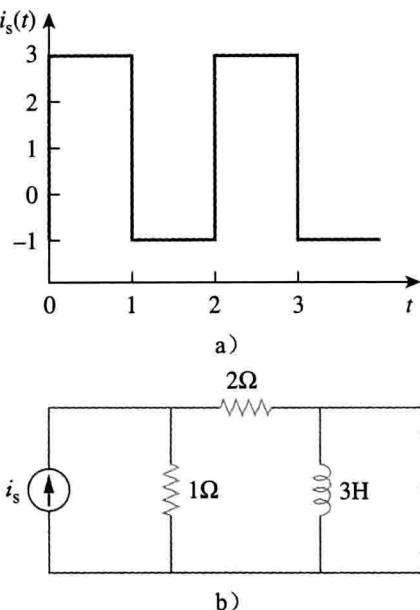


图 17-73 习题 37 图

- 38 如果图 17-74a 所示的方波作用于图 17-74b 所示的电路中, 求 $v_o(t)$ 的傅里叶级数。

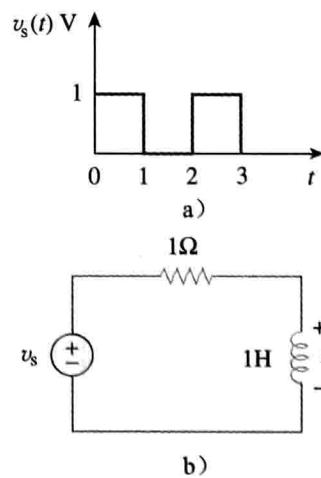


图 17-74 习题 38 图

- 39 如果图 17-75a 所示的周期电压作用于图 17-75b 所示的电路中, 求 $i_o(t)$ 。

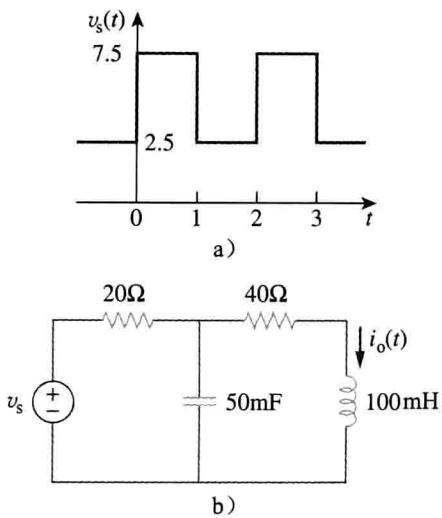


图 17-75 习题 39 图

- * 40 图 17-76a 所示信号作用于图 17-76b 所示电路中, 求 $v_o(t)$ 。

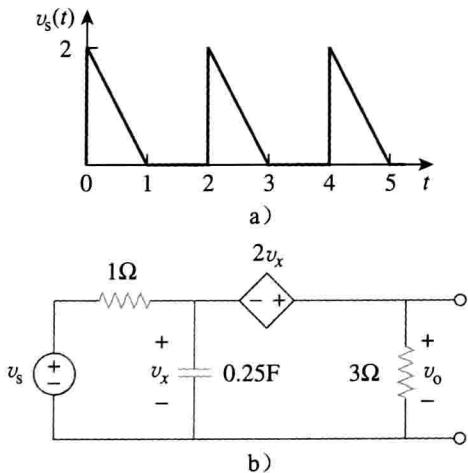


图 17-76 习题 40 图

- 41 图 17-77a 所示的全波整流正弦电压作用于图 17-77b 中的低通滤波器。求滤波器的输出电压 $v_o(t)$ 。

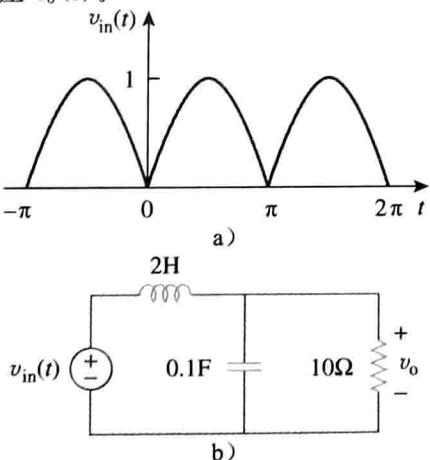


图 17-77 习题 41 图

- 42 图 17-78a 所示方波作用于图 17-78b 中的电路上, 求 $v_o(t)$ 的傅里叶级数。

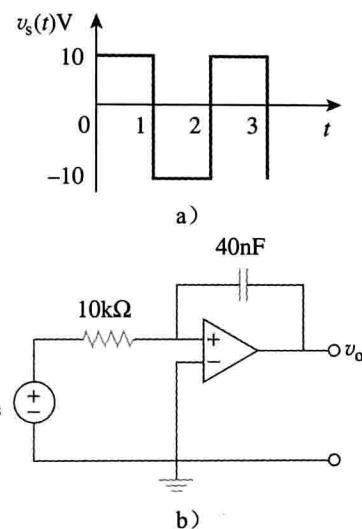


图 17-78 习题 42 图

17.5 节

- 43 某电路两端的电压为:

$$v(t) = [30 + 20\cos(60\pi t + 45^\circ) + 10\cos(60\pi t - 45^\circ)]V$$

如果流入高电位端的电流为:

$$i(t) = [6 + 4\cos(60\pi t + 10^\circ) - 2\cos(120\pi t - 60^\circ)]A$$

求: (a) 电压的方均根值; (b) 电流的方均根值; (c) 该电路吸收的平均功率。

- * 44 设计一个问题帮助其他同学更好地理解已知一个电路元件电压和电流的傅里叶级数时, 如何求该电压和电流的方均根值, 如何计算该元件的平均功率并画出功率谱。
ED

- 45 某串联 RLC 电路, $R = 10\Omega$, $L = 2mH$, $C = 40\mu F$ 。如果作用于该电路的电压为:

$$v(t) = (100\cos 1000t + 50\cos 2000t + 25\cos 3000t)V$$

求电流的有效值和电路吸收的平均功率。

- 46 利用 MATLAB 画出如下正弦信号, 其中, $0 < t < 5$: (a) $5\cos 3t - 2\cos(3t - \pi/3)$; (b) $8\sin(\pi t + \pi/4) + 10\cos(\pi t - \pi/8)$ 。
ML

- 47 图 17-79 所示的周期电流波形作用于 $2k\Omega$ 的电阻。求直流分量消耗平均功率占总的平均功率的百分比。

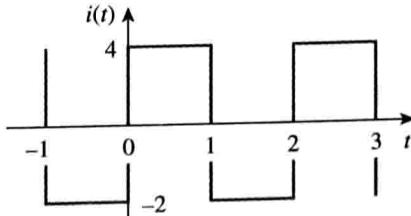


图 17-79 习题 47 图

- 48 对于如图 17-80 所示电路：

$$i(t) = [20 + 16\cos(10t + 45^\circ) + 12\cos(20t - 60^\circ)] \text{mA}$$

(a) 求 $v(t)$; (b) 计算电阻消耗的平均能量。

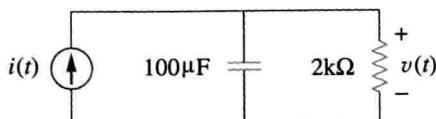


图 17-80 习题 48 图

- 49 (a) 求习题 5 中周期性波形的均方根的值;

(b) 利用图 17-5 中傅里叶级数的前五个谐波项求信号的有效值; (c) 计算 $z(t)$ 估计方均根值的百分比误差:

$$\text{误差} = \left(\frac{\text{估计值}}{\text{真实值}} - 1 \right) \times 100$$

17.6 节

- 50 如果 $f(t) = t$, $-1 < t < 1$, 并且对于所有的整数 n , 有 $f(t+2n) = f(t)$, 求该信号的指数傅里叶级数。

- 51 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何求得给定周期函数的指数傅里叶级数。 ED

- 52 如果 $f(t) = e^t$, $-\pi < t < \pi$, 并且对于所有的整数 n , 有 $f(t+2\pi n) = f(t)$, 求该信号的复数傅里叶级数。

- 53 如果 $f(t) = e^{-t}$, $0 < t < 1$, 并且对于所有的整数 n , 有 $f(t+n) = f(t)$, 求该信号的复数傅里叶级数。

- 54 求图 17-81 所示函数的指数傅里叶级数。

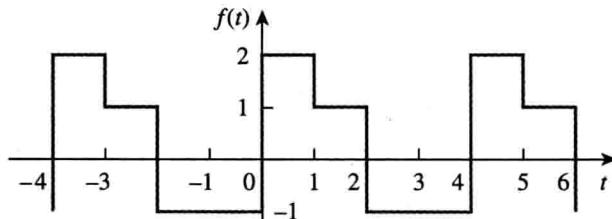


图 17-81 习题 54 图

- 55 求图 17-82 所示半波整流正弦电流函数的指数傅里叶级数展开式。

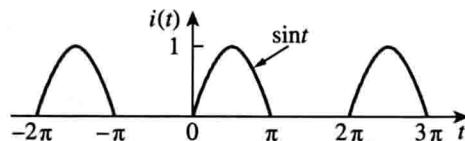


图 17-82 习题 55 图

- 56 某周期函数的三角傅里叶级数表示为:

$$f(t) = 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} \cos n\pi t + \frac{n}{n^2 + 1} \sin n\pi t \right)$$

求 $f(t)$ 的指数傅里叶级数表达式。

- 57 某函数的三角傅里叶级数表达式的系数为:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{6}{n^3 - 2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

如果 $\omega_n = 50n$, 求这个函数的指数傅里叶级数。

- 58 某函数的三角傅里叶级数表达式的系数为:

$$a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

求函数的指数傅里叶级数, 取 $T = 2\pi$ 。

- 59 图 17-83a 所示函数的复数傅里叶级数为:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{je^{-(2n+1)t}}{(2n+1)\pi}$$

求图 17-83b 所示函数 $h(t)$ 的复数傅里叶级数。

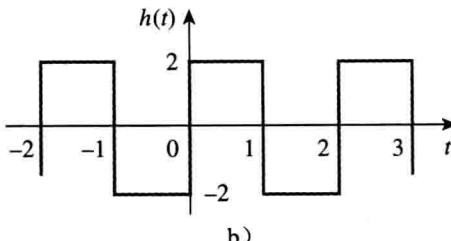
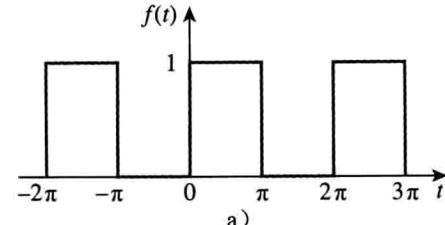


图 17-83 习题 59 图

- 60 求图 17-62 所示信号的复数傅里叶系数。

- 61 某函数的傅里叶级数的频谱如图 17-84a 所示。
(a) 求其三角傅里叶级数。
(b) 计算该函数的方均根值。

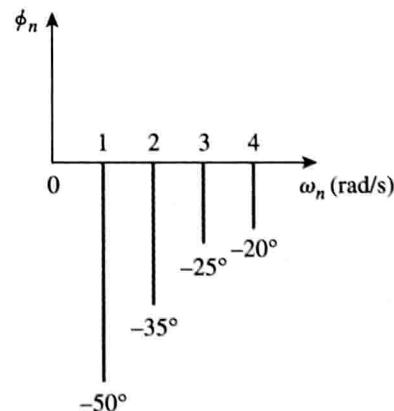
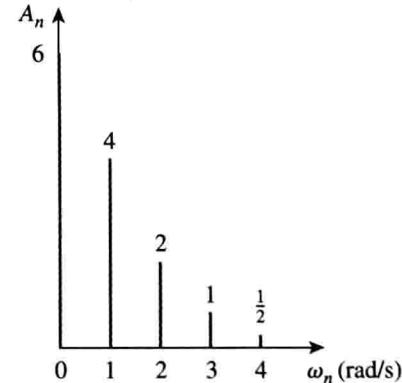


图 17-84 习题 61 图

- 62 某截断傅里叶级数的振幅频谱和相位频谱如图 17-85 所示。(a)求该周期信号的振幅-相位表达式。参见式(17.10); (b)该电压是 t 的偶函数还是奇函数?

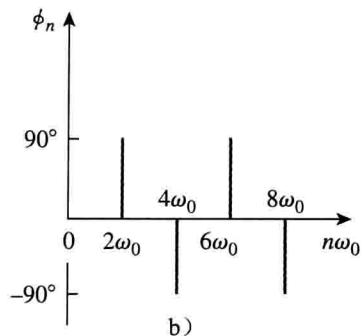
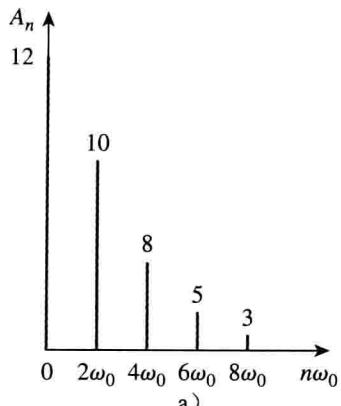


图 17-85 习题 62 图

- 63 画出图 17-56b 所示信号 $f_2(t)$ 的幅度谱, 考虑前五项即可。
64 设计一个问题帮助其他同学更好地理解给定傅里叶级数的振幅频谱和相位频谱。 **ED**
65 已知函数如下, 画出振幅频谱和相位频谱的前五项:

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{奇数}}}^{\infty} \left(\frac{20}{n^2 \pi^2} \cos 2nt - \frac{3}{n\pi} \sin 2nt \right)$$

17.7 节

- 66 使用 PSpice 或 MultiSim 计算图 17-48 所示波形的傅里叶系数。
67 使用 PSpice 或 MultiSim 计算图 17-58 所示信号的傅里叶系数。
68 使用 PSpice 或 MultiSim 计算习题 7 中信号的傅里叶分量。
69 使用 PSpice 或 MultiSim 计算图 17-55a 所示波形的傅里叶系数。
70 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何

使用 PSpice 或 MultiSim 解决含有周期输入的电路问题。 **ED**

- 71 使用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 40。

17.8 节

- 72 某医疗设备显示的信号可以用图 17-86 所示波形近似, 求该信号的傅里叶级数表达式。

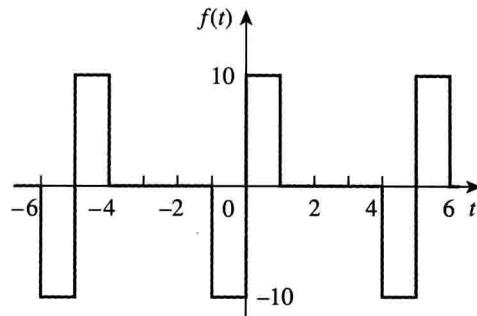


图 17-86 习题 72 图

- 73 频谱分析仪指示某信号仅由三个分量组成: 640kHz 时为 2V, 644kHz 时为 1V, 636kHz 时为 1V。如果将该信号作用于 10Ω 电阻, 该电阻吸收的平均功率是多少?
74 某带限周期电流的傅里叶级数展开式中仅有三个频率分量: 直流, 50Hz 和 100Hz。该电流可以表示成:

$$i(t) = (4 + 6\sin 100\pi t + 8\cos 100\pi t - 3\sin 200\pi t - 4\cos 200\pi t) A$$

- (a)写出 $i(t)$ 的振幅-相位表达式; (b)如果 $i(t)$ 流过 2Ω 电阻, 该电阻消耗的平均功率为多少瓦?

- 75 设计一个电阻 $R=2k\Omega$ 的低通 RC 滤波器。滤波器的输入为周期矩形脉冲序列(见表 17-3), 其中 $A=1V$, $T=10ms$, $\tau=1ms$ 。确定 C 的值使得输出的直流分量为输出的基波分量的 50 倍。 **ED**
76 某周期信号在 $0 < t < 1$ 时 $v_s(t) = 10V$, 而在 $1 < t < 2$ 时 $v_s(t) = 0V$, 该信号作用于图 17-87 所示的高通滤波器。确定 R 的值使得输出信号 $v_o(t)$ 的平均功率至少是输入信号平均功率的 70%。

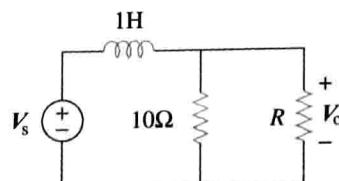


图 17-87 习题 76 图

综合理解题

- 77 某器件两端的电压为:
 $v(t) = (-2 + 10\cos 4t + 8\cos 6t + 6\cos 8t -$

$$5\sin 4t - 3\sin 6t - \sin 8t) V$$

求: (a) $v(t)$ 的周期; (b) $v(t)$ 的平均值;

- (c) $v(t)$ 的有效值。
- 78 某带限周期电压在其傅里叶级数表达式中仅有三个谐波。各谐波的方均根值为：基波 40V，三次谐波 20V 和五次谐波 10V。(a)如果将该电压作用于 5Ω 的电阻，求电阻消耗的平均功率；(b)如果一将个直流分量加到该周期电压上，测量的能量消耗增加 5%，确定所增加的直流分量的值。
- 79 编写程序计算表 17-3 中方波的傅里叶系数(计算到十次谐波即可)，其中， $A=10$ ， $T=2$ 。
- 80 编写程序计算图 17-82 所示半波整流正弦电流的指数傅里叶级数，计算到十次谐波即可。
- 81 表 17-3 所示为全波整流正弦电流。假设该电流通过一个 1Ω 的电阻。(a)求电阻吸收的平均功率；(b)确定 c_n ， $n=1, 2, 3$ 和 4；(c)直流
- 分量的功率占总功率的百分比为多少？(d)二次谐波($n=2$)消耗的功率占总功率的百分比为多少？
- 82 某带限电压信号的复数傅里叶系数如下表所示。试计算该信号将提供给 4Ω 电阻的平均功率。

$n\omega_0$	$ c_n $	θ_n
0	10.0	0°
ω	8.5	15°
2ω	4.2	30°
3ω	2.1	45°
4ω	0.5	60°
5ω	0.2	75°

第18章

傅里叶变换

计划意味着通过今天的努力让明天变得更好，因为未来属于那些在今天艰苦付出的人。

——《新闻周刊》

增强技能与拓展事业

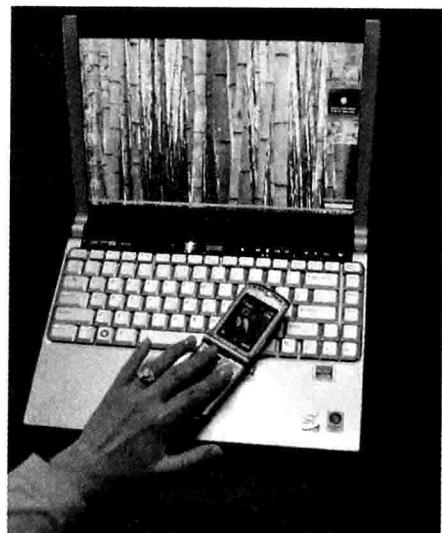
通信系统领域的职业生涯

通信系统基于电路分析原理，其功能是通过信道（传播介质）从源端（发送端）到目的端（接收端）传输信息。通信工程师设计各种系统就是为了实现信息的发射和接收，这里的信息指的是声音、数据或视频等。

我们生活在一个信息化的时代，通过通信系统可以快捷地获取新闻、天气、运动、购物、财经、商业库存及其他信息。常见的通信系统有电话网络、移动蜂窝电话、收音机、有线电视、卫星电视、传真及雷达等。此外，警察、消防部门、航空器及各行各业的移动无线通信也是典型的通信系统。

通信领域可能是电气工程增长最快的领域。近年来，通信和电脑技术的融合催生了大量数字通信网络，如局域网、城域网及宽带综合服务数字网。互联网（“信息高速公路”）的出现使得教育工作者、商人等可以通过个人计算机向世界各地发送电子邮件，登录远程数据库和传输各种文件等。互联网对于整个世界形成了巨大的冲击波，彻底地改变了人们经商、通信和获取信息的方法，而且这种趋势将延续。

通信工程师可以设计高质量的信息服务系统，包括产生、传输和接收信号的硬件装置。通信工程师可以在许多通信行业和通信部门任职。越来越多的政府机构，学术部门和商业部门需要更快、更多准确的信息传输，因此对通信工程师的需求量很大。未来是通信的时代，每一个电子工程师都必须积极地为此做好准备。



由 Charles Alexander 摄影

18.1 引言

利用傅里叶级数可以将周期函数表示为正弦信号之和的形式，同时可以确定信号的频谱。本章介绍的傅里叶变换将频谱的概念延伸到非周期函数。傅里叶变换假设非周期函数是周期为无穷大的周期函数。因此，傅里叶变换是一个非周期函数的积分表达式，与周期函数的傅里叶级数表达式相似。

傅里叶变换是一种与拉普拉斯变换类似的积分变换，它将一个函数由时域变到频域。傅里叶变换在通信系统、数字信号处理以及拉普拉斯变换不适用的场合非常有用。拉普拉斯变换只能处理具有初始条件，在 $t > 0$ 时有输入的电路，而傅里叶变换不仅可以处理在 $t < 0$ 时有输入的电路，又可以处理在 $t > 0$ 时有输入的电路。

本章首先以傅里叶级数作为过渡来定义傅里叶变换。接着在给出傅里叶变换的一些性

质之后，将傅里叶变换应用于电路分析中，讨论帕塞瓦尔定理并比较拉普拉斯变换和傅里叶变换。最后说明傅里叶变换在振幅调制和信号抽样中的应用。

18.2 傅里叶变换的定义

由前一章可知，如果非正弦周期函数满足狄利克雷条件，就可以用傅里叶级数表示。如果函数不是周期性的，会出现什么情况呢？实际上，有许多非常重要的非周期函数——例如单位阶跃函数或指数函数等——都不能用傅里叶级数表示。通过本章的学习，即使函数不是周期函数，也可以通过傅里叶变换实现从时域变到频域的转换。

假设要确定图 18-1a 所示非周期函数 $p(t)$ 的傅里叶变换。考虑图 18-1b 所示周期函数 $f(t)$ ，该函数一个周期内的形状与 $p(t)$ 相同。如果令周期 $T \rightarrow \infty$ ，则相邻的脉冲均被移至无穷远处，所以仅剩下单个宽度为 τ （如图 18-1a 的非周期函数）的脉冲。因此，函数 $f(t)$ 不再是周期函数。即当 $T \rightarrow \infty$ 时， $f(t) = p(t)$ 。下面讨论 $A=10$, $\tau=0.2$ （见 17.6 节）时 $f(t)$ 的频谱。图 18-2 给出了 T 增大对频谱的影响。首先，可以看出，频谱的基本形状保持不变，包络第一个零点对应的频率同样保持不变。然而，频谱的振幅和相邻分量之间的间距均随 T 的增大而减小，同时谐波的数目随之增多。因此，在信号频率范围内，谐波的振幅之和几乎保持不变。由于在一个频带范围内，各分量的总“强度”，即能量保持不变，谐波幅度必须随着 T 增加而减小。因为 $f=1/T$ ，随着 T 增加， f 或 ω 减小，从而使得离散频谱最终成为连续频谱。

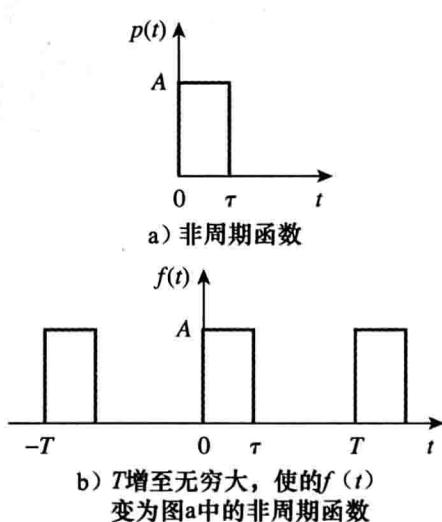


图 18-1 非周期函数 $p(t)$ 的傅里叶变换

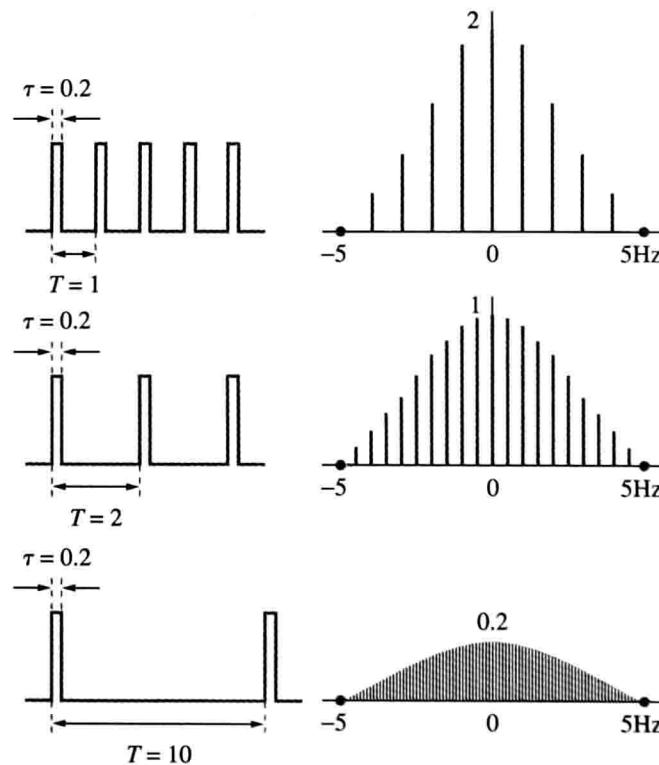


图 18-2 增大 T 对图 18-1b 所示周期脉冲序列频谱的影响

为了进一步理解非周期函数与其对应的周期函数之间的关系，考虑式(17.58)中指数形式的傅里叶级数，即：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.1)$$

其中：

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.2)$$

基频是：

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (18.3)$$

相邻谐波频率之间的间隔为：

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (18.4)$$

将式(18.2)带入(18.1)得：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \Delta\omega e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (18.5)$$

令 $T \rightarrow \infty$, 求和变成积分, 增量间隔 $\Delta\omega$ 变为微分增量 $d\omega$, 离散谐波频率 $n\omega_0$ 变为连续频率 ω 。因此, 当 $T \rightarrow \infty$ 时:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \\ \Delta\omega &\Rightarrow d\omega \\ n\omega_0 &\Rightarrow \omega \end{aligned} \quad (18.6)$$

因此, 式(18.5)变为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (18.7)$$

上式中括号里的项叫做 $f(t)$ 的傅里叶变换(Fourier transform), 表示为 $F(\omega)$ 。因此:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (18.8)$$

其中 \mathcal{F} 是傅里叶变换算子。显然, 由式(18.8)可知:

傅里叶变换是 $f(t)$ 从时域到频域的积分变换。

提示: 有些学者使用 $F(j\omega)$ 代替 $F(\omega)$ 来表示傅里叶变换。

总之, $F(\omega)$ 是一个复函数。其振幅称为振幅频谱, 相位称为相位频谱, $F(\omega)$ 称为频谱。

式(18.7)可以用 $F(\omega)$ 来表示, 得到傅里叶逆变换(Inverse Fourier Transform)为:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.9)$$

函数 $f(t)$ 及其傅里叶变换 $F(\omega)$ 构成傅里叶变换对:

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \quad (18.10)$$

由其中一者可以推出另一者。

如果式(18.8)中的傅里叶积分收敛, 则其傅里叶变换 $F(\omega)$ 存在。 $f(t)$ 存在傅里叶变换的充分但非必要条件是 $f(t)$ 绝对可积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (18.11)$$

例如, 单位斜坡函数 $t u(t)$ 就不存在傅里叶变换, 因为该函数不满足上述条件。

为了避免傅里叶变换中出现复数运算, 有时可以暂且将 $j\omega$ 用 s 代替, 最终再用 $j\omega$ 将结果中的 s 换回。

例 18-1 求下面函数的傅里叶变换: (a) $\delta(t-t_0)$, (b) $e^{j\omega_0 t}$, (c) $\cos\omega_0 t$ 。

解: (a) 该函数为冲激函数, 其傅里叶变换为:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (18.1.1)$$

上式计算中应用了式(7-32)给出的冲激函数的筛选性质。对于特殊情况 $t_0=0$, 有:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (18.1.2)$$

这表明冲激函数频谱的振幅是一个常数, 即在冲激函数的频谱中, 所有频率的振幅均相同。

(b) 可以用两种方法求得傅里叶变换 $e^{j\omega_0 t}$ 。如果令:

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

则可以利用式(18.9)求出 $f(t)$, 即:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

使用冲激函数的筛选性质得:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

由于 $F(\omega)$ 和 $f(t)$ 组成傅里叶变换对, 所以 $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ 和 $e^{j\omega_0 t}$ 也是一对傅里叶变换对, 即:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (18.1.3)$$

另外, 由式(18.1.2)可知:

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1]$$

使用式(18.9)的傅里叶逆变换公式, 可得:

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j\omega t} d\omega$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t) \quad (18.1.4)$$

交换变量 t 和 ω , 得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (18.1.5)$$

利用这个结果, 可以得到已知函数的傅里叶变换为:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega_0 - \omega)$$

由于冲激函数是偶函数, 即 $\delta(\omega_0 - \omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, 因此:

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (18.1.6)$$

改变 ω_0 的符号, 则有:

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (18.1.7)$$

同样, 令 $\omega_0 = 0$, 可得:

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega) \quad (18.1.8)$$

(c) 由式(18.1.6)和(18.1.7)的结果, 可以得到:

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (18.1.9)$$

(d) 该余弦信号的傅里叶变换如图 18-3 所示。

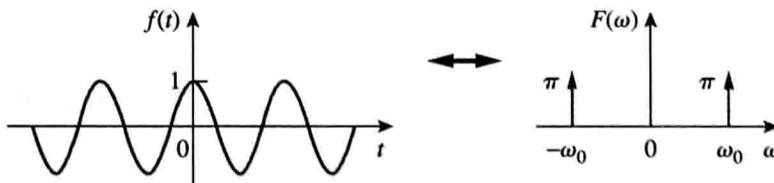


图 18-3 $f(t) = \cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换

练习 18-1 求下面函数的傅里叶变换：(a) 门函数 $g(t) = 4u(t+1) - 4u(t-2)$ ；(b) $4\delta(t+2)$ ；(c) $10\sin\omega_0 t$ 。

答案：(a) $4(e^{-j\omega} - e^{-j2\omega})/j\omega$ ；(b) $4e^{j2\omega}$ ；(c) $j10\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

例 18-2 求图 18-4 所示宽度为 τ ，高度为 A 的单矩形脉冲的傅里叶变换。

解：

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} \right) = A\tau \frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2} = A\tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$

如果令 $A=10$, $\tau=2$, 如图 17-27 所示(参见 17.6 节), 则有:

$$F(\omega) = 20 \operatorname{sinc}\omega$$

其振幅频谱如图 18-5 所示。比较图 18-4 和图 17-28 所示的矩形脉冲频谱, 可见图 17-28 的频谱是离散的, 其包络与单个矩形脉冲的傅里叶变换的形状相同。◆

练习 18-2 求图 18-6 所示函数的傅里叶变换。

$$\text{答案: } \frac{2(\cos\omega - 1)}{j\omega}$$

例 18-3 求图 18-7 所示“开启(switched-on)”指数函数的傅里叶变换。

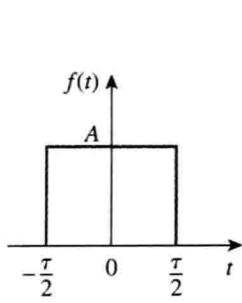


图 18-4 例 18-2 的矩形脉冲

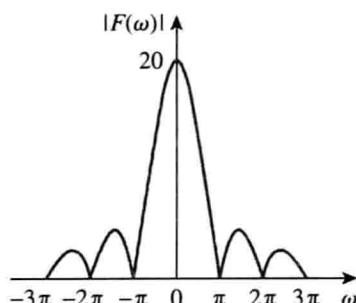


图 18-5 图 18-4 的幅度谱

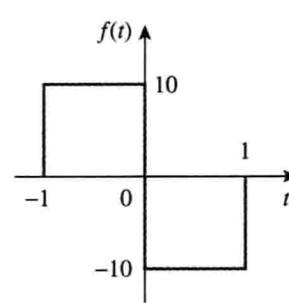


图 18-6 练习 18-2 图

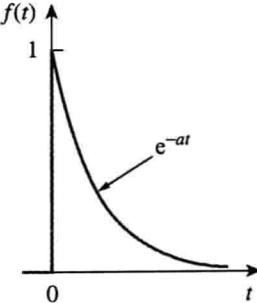


图 18-7 例 18-3 图

解：由图 18-7 可知：

$$f(t) = e^{-at} u(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

练习 18-3 求图 18-8 所示“闭合(switched-on)”指数函数的傅里叶变换。

$$\text{答案: } \frac{10}{a-j\omega}$$

18.3 傅里叶变换的性质

本节介绍傅里叶变换的性质, 利用这些性质可以由简单函数的傅里叶变换求出复杂函数的傅里叶变换。对于每一个性质, 都包含定义、推导以及举例说明等内容。

1. 线性性质

如果 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换, 则:

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \quad (18.12)$$

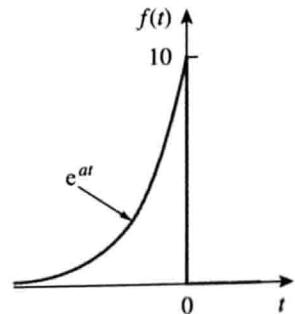


图 18-8 练习 18-3 图

其中, a_1 和 a_2 是常数。线性性质表明, 若干函数线性组合的傅里叶变换等于各自函数的傅里叶变换的线性组合。式(18.12)的线性性质的证明简单而直观。由定义可得:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)\end{aligned}\quad (18.13)$$

例如, $\sin\omega_0 t = 1/2j(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$, 利用线性性质, 可以得到:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] &= \frac{1}{2j} [\mathcal{F}(e^{j\omega_0 t}) - \mathcal{F}(e^{-j\omega_0 t})] = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]\end{aligned}\quad (18.14)$$

2. 时域变换性质

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则有:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)} \quad (18.15)$$

其中, a 是常数, 式(18.15)表明, 时域的扩展($|a| > 1$)对应频域的压缩, 反之, 时域的压缩($|a| < 1$)对应频域的扩展。时域尺度性的证明过程如下:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt \quad (18.16)$$

令 $x = at$, 则 $dx = adt$, 因此:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (18.17)$$

例如, 对于例 18-2 中的矩形脉冲 $p(t)$, 有:

$$\mathcal{F}[p(t)] = A\tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2} \quad (18.18a)$$

利用式(18.15), 可得:

$$\mathcal{F}[p(2t)] = \frac{A\tau}{2} \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{4} \quad (18.18b)$$

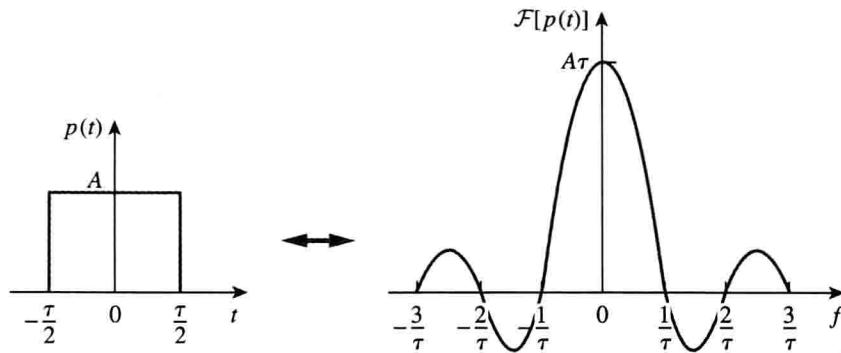
画出 $p(t)$ 和 $p(2t)$, 及其傅里叶变换的图形将有助于读者理解该性质。由于:

$$p(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (18.19a)$$

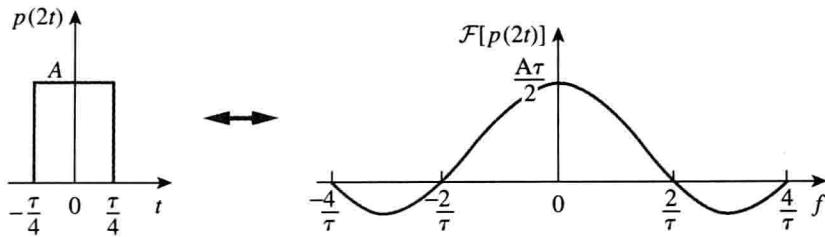
用 $2t$ 代替 t , 得到:

$$p(2t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < 2t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{4} < t < \frac{\tau}{4} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (18.19b)$$

上式表明 $p(2t)$ 在时域中被压缩了, 如图 18-9b 所示。为了画出式(18.18)所示的 $p(t)$ 与 $p(2t)$ 的傅里叶变换, 需利用 sinc 函数在自变量为 $n\pi$ 时函数值为零的性质, 其中 n 为整数。因此, 对于式(18.18a)所示 $p(t)$ 的傅里叶变换而言, $\omega\tau/2 = 2\pi f\tau/2 = n\pi \rightarrow f = n/\tau$, 对于式(18.18b)所示 $p(2t)$ 的傅里叶变换而言, $\omega\tau/4 = 2\pi f\tau/4 = n\pi \rightarrow f = 2n/\tau$ 。这两个傅里叶变换如图 18-9 所示, 表明时域的压缩对应于频域的扩展。从直观角度分析也可得出相同的结论, 因为当信号时域压缩时, 意味着信号变化更快, 从而导致更高频率分量的出现。



a) 脉冲的傅里叶变换



b) 脉冲的时域压缩导致频域扩展

图 18-9 时域尺度变换

3. 时移性质

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则有:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)} \quad (18.20)$$

即时域的延迟对应于频域的相移。时域性质可以推导如下:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt \quad (18.21)$$

令 $x=t-t_0$, 则有 $dx=dt$ 和 $t=x+t_0$, 因此:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (18.22)$$

同理可得, $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = e^{j\omega t_0} F(\omega)$ 。

例如, 由例 18-3 得到:

$$\mathcal{F}[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a+j\omega} \quad (18.23)$$

所以 $f(t)=e^{-(t-2)} u(t-2)$ 的傅里叶变换为:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[e^{-(t-2)} u(t-2)] = \frac{e^{-j2\omega}}{1+j\omega} \quad (18.24)$$

4. 频移性质(振幅调制)

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则有:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)} \quad (18.25)$$

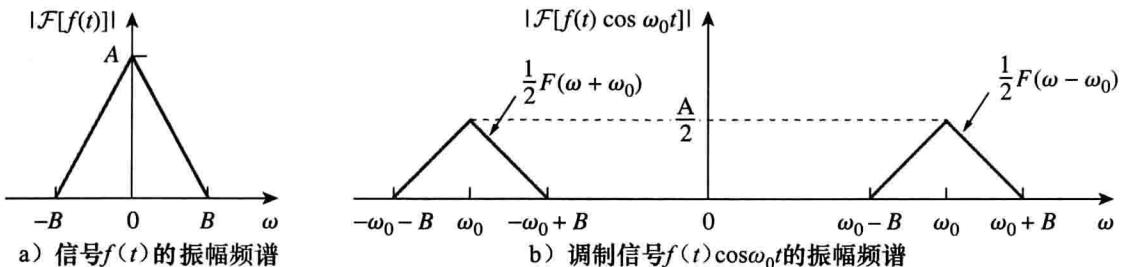
上式表明, 频域的频移对应于时间函数的相移。由定义得:

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0) \quad (18.26)$$

例如, $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ 。利用式(18.25)的性质得:

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) \quad (18.27)$$

这是频率分量发生平移的信号调制方面的一个重要结论。例如，如果 $f(t)$ 的振幅频谱如图 18-10a 所示，则 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的振幅频谱如图 18-10b 所示。18.7.1 节将更加详细地讨论振幅调制问题。

图 18-10 $f(t)$ 与 $f(t)\cos\omega_0 t$ 的振幅频谱

5. 时域微分性质

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)} \quad (18.28)$$

即 $f(t)$ 导数的傅里叶变换等于 $f(t)$ 的傅里叶变换与 $j\omega$ 的乘积。根据定义：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.29)$$

将上式两边同时关于 t 求导得：

$$f'(t) = \frac{j\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = j\omega \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

即

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)} \quad (18.30)$$

重复利用式(18.30)，可以得到：

$$\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega)} \quad (18.31)$$

例如，如果 $f(t) = e^{-at} u(t)$ ，则有：

$$f'(t) = -ae^{-at} u(t) + e^{-at} \delta(t) = -af(t) + e^{-at} \delta(t) \quad (18.32)$$

上式取傅里叶变换，得到：

$$j\omega F(\omega) = -aF(\omega) + 1 \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad (18.33)$$

与例 18-3 的结果相同。

6. 时域积分性质

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，则有：

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)} \quad (18.34)$$

即 $f(t)$ 积分的傅里叶变换可以通过将 $f(t)$ 的傅里叶变换除以 $j\omega$ 再加上反映直流分量 $F(0)$ 的冲激项而得到。在求 $f(t)$ 积分的傅里叶变换时， $f(t)$ 的积分限是 $(-\infty, t]$ ，而不是 $(-\infty, \infty)$ 。这是因为，如果在区间 $(-\infty, \infty)$ 积分，则其结果不再依赖于时间，而总是一个常数。当积分限为 $(-\infty, t]$ 时，才能得到函数从过去到时间 t 的积分，从而得到与 t 有关的结果，才能求得傅里叶变换。

如果在式(18.8)中取 $\omega=0$ ，则有：

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (18.35)$$

上式表明，当 $f(t)$ 在所有时间的积分等于零时，直流分量就是零。式(18.34)所示时域积

分性质的证明将在稍后介绍卷积性质时给出。

例如, 已知 $F[\delta(t)] = 1$ 且冲激函数的积分为单位阶跃函数(见式(7-39a))。利用式(18.34)给出的性质, 得到单位阶跃函数的傅里叶变换为:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t \delta(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (18.36)$$

7. 翻转性质

如果 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 则有:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega) = F^*(\omega)} \quad (18.37)$$

其中, 星号表示复共轭。该性质表明, $f(t)$ 关于时间轴翻转对应于 $F(\omega)$ 关于频率轴翻转。翻转性质可以看做是式(18.15)所示时间尺度性质在 $a=1$ 时的特殊情况。

例如, $1 = u(t) + u(-t)$ 。因此:

$$\mathcal{F}[1] = \mathcal{F}[u(t)] + \mathcal{F}[u(-t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

8. 对偶性质

对偶性质可以表述为, 如果 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换, 那么 $F(t)$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(-\omega)$, 即:

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)} \quad (18.38)$$

上式表明傅里叶变换具有对称性质。对偶性的推导过程如下:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

即

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (18.39)$$

将 t 用 $-t$ 替换, 可得:

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将 t 和 ω 互换, 可以得到:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[F(t)] \quad (18.40)$$

提示: 因为 $f(t)$ 是图 18-7 和图 18-8 所示两个信号的和, 所以 $F(\omega)$ 是例 18-3 和练习 18-3 中两个结果的和。

例如, 如果 $f(t) = e^{-|t|}$, 则:

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} \quad (18.41)$$

根据对偶性, 可得 $F(t) = 2/(t^2 + 1)$ 的傅里叶变换为:

$$2\pi f(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \quad (18.42)$$

图 18-11 是对偶性的另一个例子。如果 $f(t) = \delta(t)$, 则 $F(\omega) = 1$, 如图 18-11a 所示, 于是 $F(t) = 1$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, 如图 18-11b 所示。

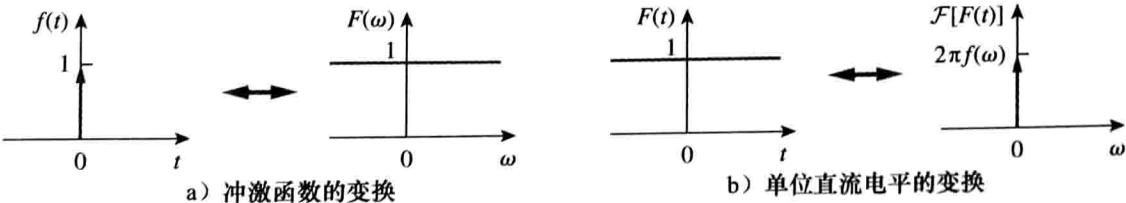


图 18-11 傅里叶变换的对偶性的典型实例

9. 卷积性质

由第 15 章的学习可知, 如果 $x(t)$ 是一个冲激函数为 $h(t)$ 的电路的输入激励, 那么该电路的输出响应 $y(t)$ 可以由如下卷积积分确定:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda \quad (18.43)$$

如果 $X(\omega)$ 、 $H(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 分别是 $x(t)$ 、 $h(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换, 那么

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[h(t) * x(t)] = H(\omega)X(\omega) \quad (18.44)$$

上式表明, 时域卷积对应频域的乘积。

为了推导卷积性质, 对式(18.43)两边取傅里叶变换, 可以得到:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda \right] e^{-j\omega t} dt \quad (18.45)$$

改变积分次序, 并提出与 t 无关的 $h(\lambda)$ 项, 有:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda)e^{-j\omega t} dt \right] d\lambda$$

对于括号内的积分, 令 $\tau = t - \lambda$, 则有 $t = \tau + \lambda$, $dt = d\tau$ 。因此:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau+\lambda)} d\tau \right] d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)e^{-j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(\omega)X(\omega) \end{aligned} \quad (18.46)$$

上述傅里叶变换的卷积性质扩展了前一章介绍的基于傅里叶级数的相量分析法。

提示: 式(18.46)所示的重要关系是在线性系统的电路分析中采用傅里叶变换的关键原因。

为了举例说明卷积的性质, 假设 $h(t)$ 和 $x(t)$ 都是相同的矩形脉冲, 如图 18-12a 和 18-12b 所示。由例 18-2 和图 18-5 可知, 矩形脉冲的傅里叶变换为 sinc 函数, 如图 18-12c 和 18-12d 所示。根据卷积性质, 两个 sinc 函数的乘积应该对应于时域中两个矩形脉冲的卷积。因此, 图 18-12e 所示两个矩形脉冲的卷积和图 18-12f 所示 sinc 函数的乘积组成一个傅里叶变换对。

根据对偶性质, 如果时域卷积对应于频域乘积, 那么时域乘积应该对应频域卷积。事实正是如此, 如果 $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, 则有:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (18.47)$$

即

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)F_2(\omega - \lambda) d\lambda \quad (18.48)$$

这是频域的卷积。式(18.48)的证明容易由式(18.38)的对偶性得到。

下面推导式(18.34)所示的傅里叶变换的时域积分性质。如果利用单位阶跃函数 $u(t)$ 与 $f(t)$ 分别代替式(18.43)中的 $x(t)$ 与 $h(t)$, 则有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)u(t - \lambda)d\lambda = f(t) * u(t) \quad (18.49)$$

按照单位阶跃函数的定义:

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} 1, & t - \lambda > 0 \\ 0, & t - \lambda \leq 0 \end{cases}$$

也可写为:

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < t \\ 0, & \lambda \geq t \end{cases}$$

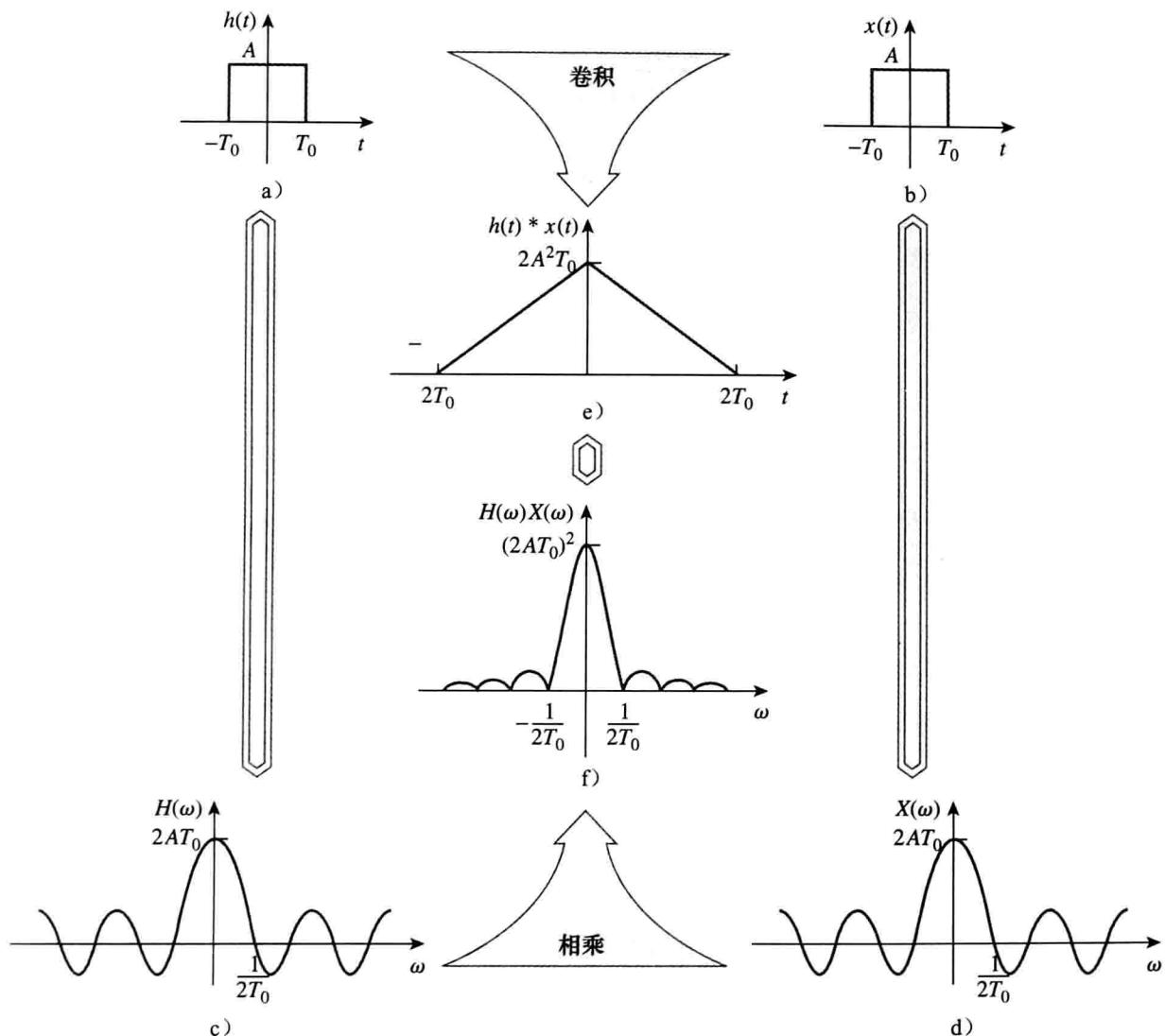


图 18-12 卷积性质的图解说明

将上式代入式(18.49),使得积分区间由 $(-\infty, \infty)$ 变为 $(-\infty, t]$,因此,式(18.49)变为:

$$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda = u(t) * f(t)$$

将两边同时做傅里叶变换得:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda\right] = U(\omega) F(\omega) \quad (18.50)$$

由式(18.36)可知,单位阶跃函数的傅里叶变换为:

$$U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

代入式(18.50)得:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda\right] = \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) F(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (18.51)$$

这就是式(18.34)的时域积分性质。由式(18.51)可得,因为 $\delta(\omega)$ 仅当 $\omega=0$ 时才非零,所以 $F(\omega)\delta(\omega)=F(0)\delta(\omega)$ 。

表18-1列出了傅里叶变换的性质。表18-2呈现了一些常用函数的傅里叶变换对。注意这两个表和表15-1与表15-2的相似性。

表 18-1 傅里叶变换的性质

性质	$f(t)$	$F(\omega)$
线性性质	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
尺度变换性质	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时移性质	$f(t-a)$	$e^{-j\omega a} F(\omega)$
频移性质	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
调制性质	$\cos(\omega_0 t) f(t)$	$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
时域微分性质	$\frac{df}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
时域积分性质	$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$
频域微分性质	$t^n f(t)$	$(j\omega)^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
翻转性质	$f(-t)$	$F(-\omega)$ 或 $F^*(\omega)$
对偶性质	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时域卷积性质	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
频域卷积性质	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

表 18-2 傅里叶变换对

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(t+\tau) - u(t-\tau)$	$2 \frac{\sin\omega\tau}{\omega}$
$ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{at} u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{-at} \sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$

例 18-4 求如下函数的傅里叶变换：(a) 符号函数 $\operatorname{sgn}(t)$ ，如图 18-13 所示；(b) 双边指数函数 $e^{-a|t|}$ ；(c) sinc 函数 $(\sin\omega_0 t)/t$ 。

解：(a) 可以用三种方法确定符号函数的傅里叶变换。

方法 1 符号函数可以利用单位阶跃函数表示为：

$$\operatorname{sgn}(t) = f(t) = u(t) - u(-t)$$

由式(18.36)可知：

$$U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

运用上式及其翻转性质，得到：

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = U(\omega) - U(-\omega) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) - \left(\pi\delta(-\omega) + \frac{1}{-j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega}$$

方法 2 由于 $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ ，所以利用单位阶跃函数来表示符号函数的另一种方法为：

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) = -1 + 2u(t)$$

对上式各项取傅里叶变换得：

$$F(\omega) = -2\pi\delta(\omega) + 2\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) = \frac{2}{j\omega}$$

方法 3 对图 18-13 所示符号函数求导，可以得到：

$$f'(t) = 2\delta(t)$$

两边取傅里叶变换：

$$j\omega F(\omega) = 2 \quad \Rightarrow \quad F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

(b) 双边指数函数可以表示为：

$$f(t) = e^{-a|t|} = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t) = y(t) + y(-t)$$

其中 $y(t) = e^{-at} u(t)$ ，所以 $Y(\omega) = 1/(a+j\omega)$ ，运用翻转性质可得：

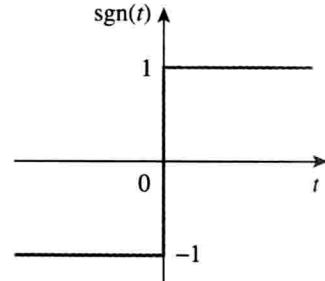


图 18-13 例 18-4 的符号函数

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = Y(\omega) + Y(-\omega) = \left(\frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} \right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

(c) 由例 18-2 可知：

$$\mathcal{F}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] = \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$

设 $\tau/2=1$, 代入上式得到：

$$\mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

运用对偶原理得：

$$\mathcal{F}\left[2 \frac{\sin t}{t}\right] = 2\pi[U(\omega+1) - U(\omega-1)]$$

即

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \pi[U(\omega+1) - U(\omega-1)]$$

练习 18-4 求如下函数的傅里叶变换：(a) 门函数 $g(t) = u(t) - u(t-1)$; (b) $f(t) = te^{-2t}u(t)$; (c) 锯齿脉冲 $p(t) = 50t[u(t) - u(t-2)]$ 。

答案：(a) $(1-e^{-j\omega})\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$; (b) $\frac{1}{(2+j\omega)^2}$; (c) $\frac{50(e^{-j2\omega}-1)}{\omega^2} + \frac{100j}{\omega}e^{-j2\omega}$

例 18-5 求图 18-14 所示函数的傅里叶变换。

解：直接利用式(18.8)可以求出该函数的傅里叶变换，但是利用微分性质求解更为容易。图 18-14 所示函数可以表示为：

$$f(t) = \begin{cases} 1+t, & -1 < t < 0 \\ 1-t, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

其一阶导数如图 18-15a 所示，可以表示为：

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

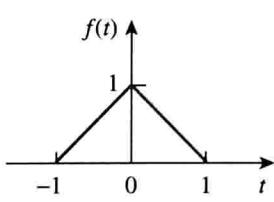


图 18-14 例 18-5 图

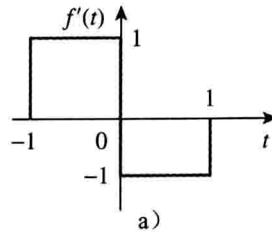


图 18-15 图 18-14 所示 $f(t)$ 的一阶导数和二阶导数

其二阶导数如图 18-15b 所示，可以表示为：

$$f''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

两边取傅里叶变换得：

$$(j\omega)^2 F(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = -2 + 2\cos\omega$$

即

$$F(\omega) = \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}$$

练习 18-5 求图 18-16 所示函数的傅里叶变换。

答案： $(20\cos 3\omega - 10\cos 4\omega - 10\cos 2\omega)/\omega^2$

例 18-6 求下列傅里叶变换的逆变换：

(a) $F(\omega) = \frac{10j\omega + 4}{(\omega^2 + 6j\omega + 8)}$; (b) $G(\omega) = \frac{\omega^2 + 21}{\omega^2 + 9}$

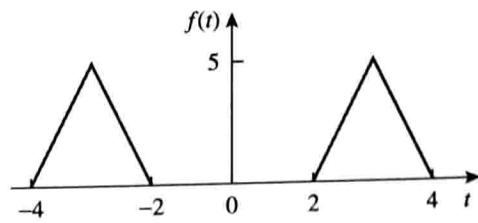


图 18-16 练习 18-5 图

解：为了避免复数运算，暂时用 s 替换 $j\omega$ 。利用部分分式展开得到：

$$F(s) = \frac{10s+4}{s^2+6s+8} = \frac{10s+4}{(s+4)(s+2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+2}$$

其中：

$$A = (s+4)F(s)|_{s=-4} = \frac{10s+4}{(s+2)}|_{s=-4} = \frac{-36}{-2} = 18$$

$$B = (s+2)F(s)|_{s=-2} = \frac{10s+4}{(s+4)}|_{s=-2} = \frac{-16}{2} = -8$$

将 $A=18$, $B=-8$ 代入 $F(s)$, 将 s 替换为 $j\omega$, 可以得到：

$$F(j\omega) = \frac{18}{j\omega+4} + \frac{-8}{j\omega+2}$$

查表 18-2, 可以确定其傅里叶逆变换为：

$$f(t) = (18e^{-4t} - 8e^{-2t})u(t)$$

(b) 化简 $G(\omega)$ 得：

$$G(\omega) = \frac{\omega^2 + 21}{\omega^2 + 9} = 1 + \frac{12}{\omega^2 + 9}$$

查表 18-2, 可以得到其傅里叶逆变换为：

$$g(t) = \delta(t) + 2e^{-3|t|}$$

练习 18-6 求下列函数的傅里叶逆变换：

$$(a) H(\omega) = \frac{6(3+j2\omega)}{(1+j\omega)(4+j\omega)(2+j\omega)}; \quad (b) Y(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \frac{2(1+j\omega)}{(1+j\omega)^2 + 16}$$

$$\text{答案: (a) } h(t) = (2e^{-t} + 3e^{-2t} - 5e^{-4t})u(t); \quad (b) y(t) = (1 + 2e^{-t}\cos 4t)u(t)$$

18.4 傅里叶变换在电路分析中的应用

傅里叶变换将相量分析技术扩展到非周期函数的一般情况。因此，运用傅里叶变换分析非正弦激励电路的方法与运用相量技术分析正弦激励电路的方法是完全相同的。因此，欧姆定律仍然有效：

$$V(\omega) = Z(\omega)I(\omega) \quad (18.52)$$

其中， $V(\omega)$ 和 $I(\omega)$ 分别是电压和电流的傅里叶变换， $Z(\omega)$ 是阻抗。电阻、电感及其电容的阻抗表达式与相量分析中的一样，即：

R	\Rightarrow	R
L	\Rightarrow	$j\omega L$
C	\Rightarrow	$\frac{1}{j\omega C}$

(18.53)

只要将电路元件函数变换到频域，并取激励的傅里叶变换，就可以使用分压原理、电源转换、网孔分析法、节点电压法以及戴维南定理等电路分析技术求解电路的未知响应（电流或电压）。最后，取傅里叶反逆换即可得到时域的响应函数。

尽管应用傅里叶变换法可以得到 $-\infty < t < \infty$ 时的响应，但是傅里叶分析并不能处理具有初始条件的电路。

传递函数定义为输出响应 $Y(\omega)$ 和输入激励 $X(\omega)$ 的比值，即：

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

(18.54)

即

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (18.55)$$

频域的输入-输出关系如图18-17所示。式(18.55)表明，如果已知传递函数和输入，则可以很方便地求得电路的输出。式(18.54)所示关系正是电路分析中使用傅里叶变换的主要原因。注意，当 $s=j\omega$ 时， $H(\omega)$ 与 $H(s)$ 相等。并且，如果输入是冲激函数($x(t)=\delta(t)$)，那么 $X(\omega)=1$ ，因此，响应为：

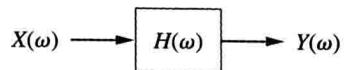


图18-17 频域电路的输入-输出关系

$$Y(\omega) = H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] \quad (18.56)$$

表明 $H(\omega)$ 是电路冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。

例18-7 求图18-18所示电路对于 $v_i(t)=2e^{-3t}u(t)$ 的输出 $v_o(t)$ 。

解：输入电压的傅里叶变换为：

$$V_i(\omega) = \frac{2}{3+j\omega}$$

通过分压原理可得电路传递函数为：

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1/j\omega}{2+1/j\omega} = \frac{1}{1+j2\omega}$$

因此：

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega) = \frac{2}{(3+j\omega)(1+j2\omega)}$$

即

$$V_o(\omega) = \frac{1}{(3+j\omega)(0.5+j\omega)}$$

由部分分式展开可得：

$$V_o(\omega) = \frac{-0.4}{3+j\omega} + \frac{0.4}{0.5+j\omega}$$

取傅里叶逆变换，可得：

$$v_o(t) = 0.4(e^{-0.5t} - e^{-3t})u(t)$$

练习18-7 如果 $v_i(t)=5\text{sgn}(t)=(-5+10u(t))V$ ，求图18-19所示电路的 $v_o(t)$ 。

答案： $-5+10(1-e^{-4t})u(t)V$

例18-8 利用傅里叶变换方法求当 $i_s(t)=10\sin 2t A$ 时，图18-20所示电路的输出 $i_o(t)$ 。

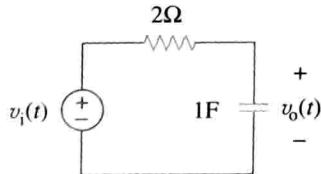


图18-18 例18-7图

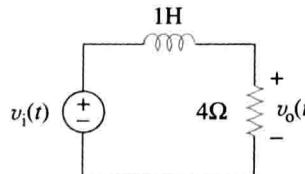


图18-19 练习18-7图

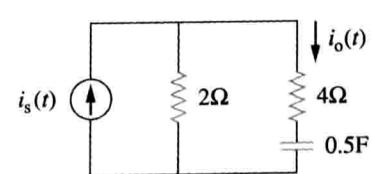


图18-20 例18-8图

解：由分流定理得：

$$H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)} = \frac{2}{2+4+2/j\omega} = \frac{j\omega}{1+j\omega 3}$$

如果 $i_s(t)=10\sin 2t A$ ，则有：

$$I_s(\omega) = j\pi 10[\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$$

因此：

$$I_o(\omega) = H(\omega)I_s(\omega) = \frac{10\pi\omega[\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)]}{1+j\omega 3}$$

$I_o(\omega)$ 的傅里叶逆变换不能由表 18-2 得到。必须利用式(18.9)给出的逆傅里叶变换公式, 可得:

$$i_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[I_o(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{10\pi\omega[\delta(\omega-2) - \delta(\omega+2)]}{1+j\omega 3} e^{j\omega t} d\omega$$

运用冲激函数的筛选性质, 得:

$$\delta(\omega - \omega_0) f(\omega) = f(\omega_0)$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) f(\omega) d\omega = f(\omega_0)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} i_o(t) &= \frac{10\pi}{2\pi} \left[\frac{2}{1+j6} e^{j2t} - \frac{-2}{1-j6} e^{-j2t} \right] = 10 \left[\frac{e^{j2t}}{6.082 e^{j80.54^\circ}} + \frac{e^{-j2t}}{6.082 e^{-j80.54^\circ}} \right] \\ &= 1.644 [e^{j(2t-80.54^\circ)} + e^{-j(2t-80.54^\circ)}] = 3.288 \cos(2t - 80.54^\circ) \end{aligned} \quad (\text{A})$$

 练习 18-8 已知 $i_s(t) = 20 \cos 4t$ A, 求图 18-21 所示电路中电流的 $i_o(t)$ 。

答案: $11.18 \cos(4t + 26.57^\circ)$ A

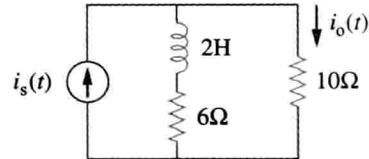


图 18-21 练习 18-8 图

18.5 帕塞瓦尔定理

帕塞瓦尔定理是傅里叶变换的一个应用实例, 它将信号携带的能量与其傅里叶变换联系在了一起。如果 $p(t)$ 是信号的功率, 则信号携带的能量为:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt \quad (18.57)$$

为了比较电压信号和电流信号的能量, 利用 1Ω 的电阻作为能量计算的基准会更方便。对于 1Ω 的电阻, $p(t) = v^2(t) = i^2(t) = f^2(t)$, 其中 $f(t)$ 可以代表电压或电流。因此, 传递给 1Ω 的电阻的能量为:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (18.58)$$

帕塞瓦尔定理表明, 在频域也可以计算出相同能量:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.59)$$

帕塞瓦尔定理表明, 信号 $f(t)$ 传递给 1Ω 电阻的总能量等于 $f(t)$ 平方曲线所覆盖的总面积, 也等于 $f(t)$ 的傅里叶变换的振幅平方曲线所覆盖的总面积的 $1/2\pi$ 。

提示: 实际上, 有时也将 $|F(\omega)|^2$ 称为信号 $f(t)$ 的能量谱密度。

帕塞瓦尔定理建立了信号的能量及其傅里叶变换之间的联系, 从而提供了 $F(\omega)$ 的物理意义, 即 $|F(\omega)|^2$ 是对应于信号 $f(t)$ 的能量密度的一个度量(单位为焦耳每赫兹)。

推导式(18.59)时, 需利用式(18.58), 并将式(18.9)代入其中一个 $f(t)$, 得到:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt \quad (18.60)$$

因为上述积分结果中不涉及时间变量, 所以可将上式中的 $f(t)$ 函数移到方括号内的积分中, 从而得到:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) F(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \quad (18.61)$$

交换积分次序得:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \quad (18.62)$$

如果 $z = x + jy$, 则有 $zz^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 = |z|^2$ 。因此:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.63)$$

式(18.63)表明: 信号携带的能量可通过 $f(t)$ 的平方在时域积分或者 $F(\omega)$ 的平方在频域积分再乘以 $1/2\pi$ 求得。

因为 $|F(\omega)|^2$ 是偶函数, 因此只需要从 0 到 ∞ 积分, 再将结果翻倍即可:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.64)$$

另外, 还可在任何频带 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 计算信号能量, 即:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.65)$$

注意, 本节介绍的帕塞瓦尔定理适用于非周期函数。周期函数的帕塞瓦尔定理已在 17.5 节和 17.6 节介绍过。式(18.63)所示帕塞瓦尔定理表明, 非周期函数的能量分布在整个频谱范围内, 然而周期函数的能量则主要集中在各个谐波分量的频率处。

例 18-9 10Ω 电阻两端的电压是 $v(t) = 5e^{-3t}u(t)V$, 求电阻上消耗的总能量。

解: 1. 明确问题。问题的定义已经阐述得非常清楚。

2. 列出已知条件。已知电阻两端在所有时刻的电压, 要求该电阻消耗的能量。可以看出, 电压在零时刻之前均为零。因此, 仅需考虑零时刻以后的情况。
3. 确定备选方案。求解方法主要有两种。第一种是在时域求解, 此处采用第二种方法——傅里叶分析法求解。
4. 尝试求解。在时域中:

$$W_{10\Omega} = 0.1 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = 0.1 \int_0^{\infty} 25e^{-6t} dt = 2.5 \left. \frac{e^{-6t}}{-6} \right|_0^{\infty} = \frac{2.5}{6} = 416.7(\text{mJ})$$

5. 评价结果。在频域中:

$$F(\omega) = V(\omega) = \frac{5}{3 + j\omega}$$

所以:

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega) F(\omega)^* = \frac{25}{9 + \omega^2}$$

因此, 消耗的能量为:

$$\begin{aligned} W_{10\Omega} &= \frac{0.1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{0.1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{25}{9 + \omega^2} d\omega = \frac{2.5}{\pi} \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\omega}{3} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2.5}{\pi} \times \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = 416.7(\text{mJ}) \end{aligned}$$

6. 是否满意? 对上述问题的求解是满意的, 可将所得到的解作为本题的答案。

练习 18-9 (a) 在时域中计算 1Ω 电阻从电流 $i(t) = 10e^{-2|t|}$ 中吸收的总能量; (b) 在频域中重做问题(a)。
答: (a) 50J; (b) 50J

例 18-10 如果电阻两端电压为 $v(t) = e^{-2t}u(t)$, 计算 1Ω 电阻在频带 $-10\text{rad/s} < \omega < 10\text{rad/s}$ 内消耗的能量占总能量的百分比。

解: 已知 $f(t) = v(t) = e^{-2t}u(t)$, 则:

$$F(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \Rightarrow |F(\omega)|^2 = \frac{1}{4 + \omega^2}$$

该电阻消耗的总能量为：

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{4 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \arctan \frac{\omega}{2} \Big|_0^\infty \right) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 0.25(J)$$

在频率范围 $-10 < \omega < 10 \text{ rad/s}$ 内的能量为：

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi} \int_0^{10} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{10} \frac{d\omega}{4 + \omega^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \arctan \frac{\omega}{2} \Big|_0^{10} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \arctan 5 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{78.69^\circ}{180^\circ} \pi \right) = 0.218(J) \end{aligned}$$

占总能量的百分比为：

$$\frac{W}{W_{1\Omega}} = \frac{0.218}{0.25} = 87.4\%$$

 练习 18-10 通过 2Ω 电阻的电流为 $i(t) = 2e^{-t}u(t) \text{ A}$, 求在频带 $-4 \text{ rad/s} < \omega < 4 \text{ rad/s}$ 内的能量占总能量的百分比。

答案：84.4%

18.6 傅里叶变换和拉普拉斯变换的比较

利用一定的篇幅来比较拉普拉斯变换和傅里叶变换是很有价值的。二者具有如下相似之处和不同之处：

1. 第 15 章中定义的拉普拉斯变换是单边变换，因为其积分区间是 $0 < t < \infty$ 。单边拉普拉斯变换仅适用于正时间函数，即 $f(t)$, $t > 0$ 。而傅里叶变换适用于定义在整个时间范围内的函数。

2. 对于正时间非零的函数 $f(t)$ （例如， $f(t) = 0$, $t < 0$ ），且 $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$ ，则两个变换之间的关系为：

$$F(\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (18.66)$$

上式同时表明：傅里叶变换可以视为拉普拉斯变换在 $s = j\omega$ 时的特例。由于 $s = \sigma + j\omega$ ，因此，式(18.66)说明拉普拉斯变换与整个 s 平面有关，而傅里叶变换局限于 $j\omega$ 轴上，参见图 15-1。

提示：换言之，如果 $F(s)$ 所有的极点落在 s 平面的左半平面，那么只要将拉普拉斯变换中的 s 用 $j\omega$ 代替，就可得到相应的傅里叶变换 $F(\omega)$ 。注意：对于 $u(t)$ 或 $\cos au(t)$ 这样的函数，上述结论不成立。

3. 拉普拉斯变换比傅里叶变换适用函数范围更广。例如，函数 $tu(t)$ 存在拉普拉斯变换而不存在傅里叶变换。但是，某些物理不可实现信号或拉普拉斯变换不存在的信号却存在傅里叶变换。

4. 拉普拉斯变换更适用于包含初始条件的暂态问题的分析，因为拉普拉斯变换允许包含初始条件，而傅里叶变换则不可以。傅里叶变换特别适用于求解稳态电路问题。

5. 与拉普拉斯变换相比，傅里叶变换有助于更全面地了解信号的频率特性。

通过比较表 15-1、15-2 与表 18-1、18-2，就可以观察到两个变换的某些相似之处与不同之处。

† 18.7 应用实例

傅里叶变换除了用于电路分析以外，还广泛应用于光学、光谱学、声学、计算机科学及电子工程等各种不同的应用领域。在电子工程领域，傅里叶变换被广泛应用于通信系统和信号处理中，此时频率响应和频谱是很重要的。本章介绍两个简单应用：调幅(AM)和

采样。

18.7.1 调幅

电磁辐射或通过大气空间的信息传输已经变成现代技术社会不可或缺的一部分。但是，空间传输仅仅在高频(20kHz以上)才是经济有效的，传输50Hz~20kHz低频段的智能信号，如语音、音乐等，是非常昂贵的，需要大量的功率设备和大型天线。发送低音频信息的一种常用方法是发射一个称为载波(carrier)的高频信号，该载波以某种方式受到相应的音频信号的控制。可以通过控制载波的三个特征值(幅度、频率或相位)来承载智能信号，称为调制信号。本节仅讨论载波幅度的控制，称为调幅(amplitude modulation)。

调幅(AM)是指载波的幅度受到调制信号控制的过程。

调幅通常用于商业广播频段及商业电视的视频部分。

假设待发射的音频信息，例如语音或音乐(或一般的调制信号)，可以表示为 $m(t)=V_m \cos \omega_m t$ ，而高频载波可以表示为 $c(t)=V_c \cos \omega_c t$ ，其中 $\omega_c \gg \omega_m$ 。那么调幅信号 $f(t)$ 可以表示为：

$$f(t) = V_c [1 + m(t)] \cos \omega_c t \quad (18.67)$$

图18-22说明了调制信号 $m(t)$ 、载波 $c(t)$ 和幅度调制信号 $f(t)$ 的波形。利用式(18.27)的结果以及余弦函数的傅里叶变换(参见例18-1或表18-1)，可以确定调幅信号的频谱：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[V_c \cos \omega_c t] + \mathcal{F}[V_c m(t) \cos \omega_c t] \\ &= V_c \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{V_c}{2} [M(\omega - \omega_c) + M(\omega + \omega_c)] \end{aligned} \quad (18.68)$$

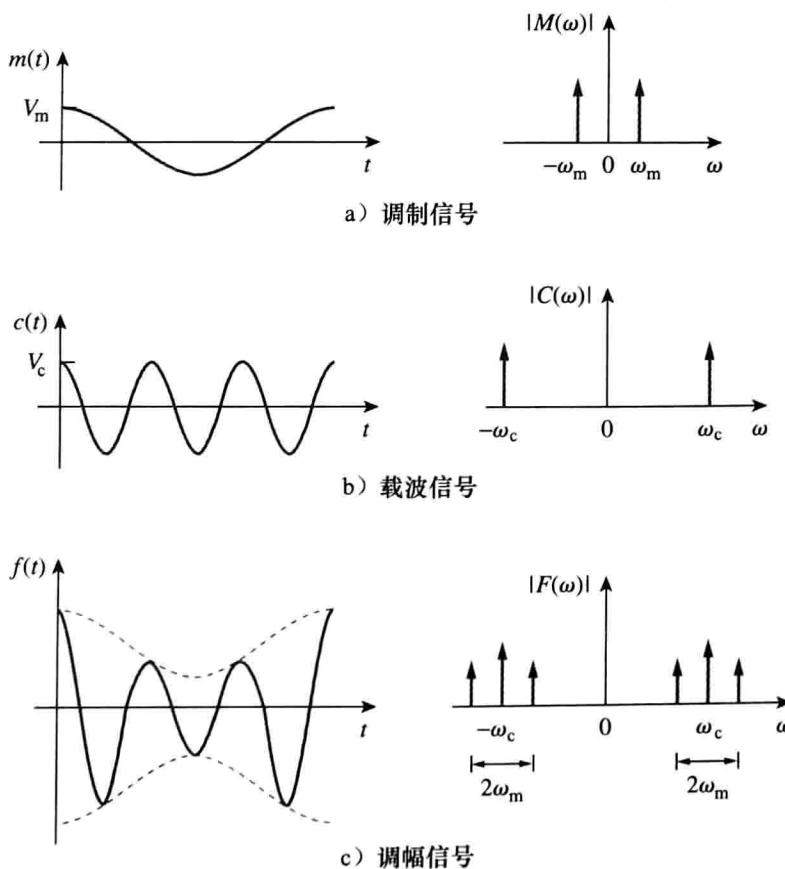


图18-22 调幅举例

其中 $M(\omega)$ 是调制信号 $m(t)$ 的傅里叶变换。图18-23所示是调幅信号的频谱。由

图 18-23 可见，调幅信号包含载波和两个其他的正弦波。频率为 $(\omega_c - \omega_m)$ 的正弦波称为下边带，频率为 $(\omega_c + \omega_m)$ 的正弦波称为上边带。

为了便于分析，上述推导中假设调制信号为正弦波。实际上， $m(t)$ 是非正弦带限信号，其频谱位于 $0 \sim \omega_u = 2\pi f_u$ 之间（信号有频率上限）。对于调幅无线电信号而言， $f_u = 5\text{kHz}$ 。如果调制信号的频谱如图 18-24a 所示，那么调幅信号的频谱如图 18-24b 所示。因此，为了避免出现任何干扰，调幅无线电台的载波间隔应大于 10kHz 。

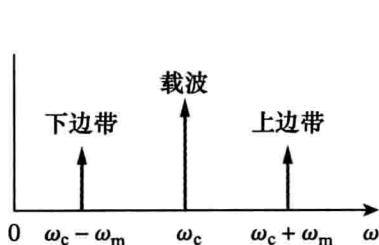


图 18-23 调幅信号的频谱

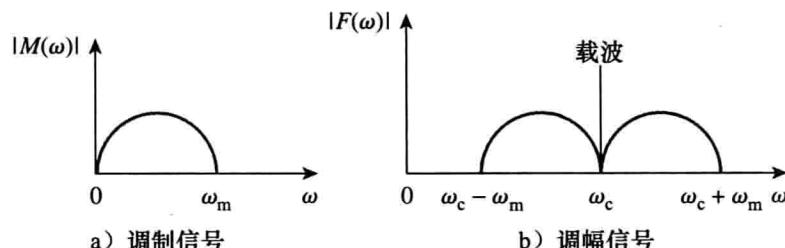


图 18-24 频谱

在传输系统的接收端，通过解调（demodulation）的过程将音频信息从调制载波中恢复出来。

例 18-11 某音乐信号包含 $15 \sim 30\text{Hz}$ 的频率分量，如果利用该信号对一个 1.2MHz 的载波进行幅度调制，求其下边带和上边带的频率范围。

解：下边带是载波频率和调制频率之差，包含的频率范围从：

$$1200000 - 30000 = 1170000(\text{Hz})$$

到

$$1200000 - 15 = 1199985(\text{Hz})$$

上边带是载波频率和调制频率之和，其所包含的频率范围从：

$$1200000 + 15 = 1200015(\text{Hz})$$

到

$$1200000 + 30000 = 1230000(\text{Hz})$$

 **练习 18-11** 如果某 2MHz 的载波被一个 4kHz 的智能信号调制，求所得调幅信号三种分量的频率。
答案： 2004000Hz , 2000000Hz , 1996000Hz

18.7.2 采样

在模拟系统中，信号是进行整体处理的。但是，在现代数字系统中，仅需对信号样本进行处理，这正是 17.8.1 节介绍的采样定理的结果。利用脉冲序列或冲激序列即可实现采样，本节采用冲激采样。

考虑图 18-25a 所示的连续信号 $g(t)$ ，该信号可以乘以图 18-25b 所示的冲激序列 $\delta(t - nT_s)$ ，其中 T_s 是采样间隔， $f_s = 1/T_s$ 是采样频率或采样速率。因此采样后的信号 $g_s(t)$ 为：

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (18.69)$$

其傅里叶变换为：

$$G_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) \mathcal{F}[\delta(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) e^{-jn\omega T_s} \quad (18.70)$$

可以证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT_s) e^{-jn\omega T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega + n\omega_s) \quad (18.71)$$

其中， $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。因此，式(18.70)变为：

$$G_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega + n\omega_s) \quad (18.72)$$

上式表明：采样信号的傅里叶变换 $G_s(\omega)$ 是速率为 $1/T_s$ 的原始信号傅里叶变换的各平移项之和。

为了确保原始信号的最佳恢复，应考虑采样间隔问题，这可以用采样定理的等效原理来解释。

某频率分量不高于 W Hz 的带限信号，可以从采样频率至少为 $2W$ Hz 进行采样得到的样本中完全恢复。

即对于一个带宽为 W Hz 的信号，如果采样频率不低于调制信号最高频率的两倍，则没有信息的丢失或交叠。表达式为：

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2W \quad (18.73)$$

采样频率 $f_s = 2W$ 称为奈奎斯特频率(Nyquist frequency)或速率，而 $1/f_s$ 则称为奈奎斯特间隔(Nyquist interval)。

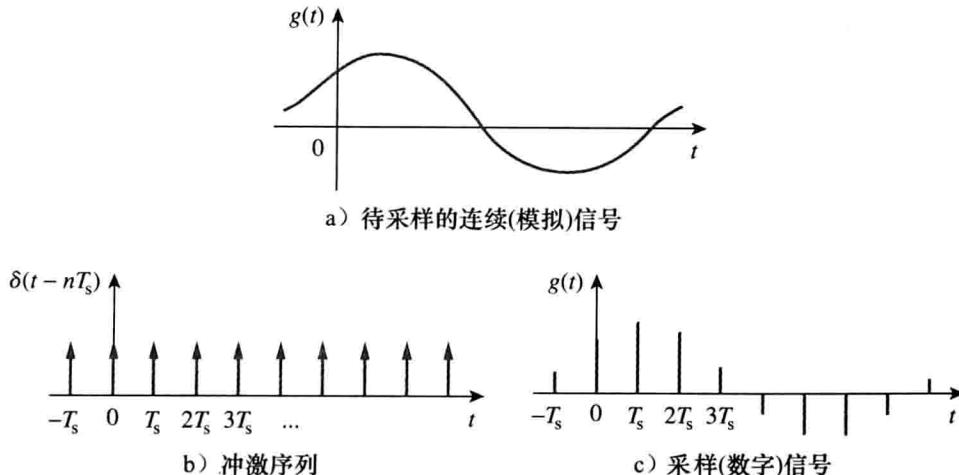


图 18-25 连续信号

例 18-12 某截断频率为 5kHz 的电话信号，以高于最小允许速率 60% 的速率被采样，求采样速率。

解：最小采样速率为奈奎斯特频率 $= 2W = 2 \times 5 = 10$ kHz。因此：

$$f_s = 1.60 \times 2W = 16$$
 kHz

练习 18-12 某带宽为 12.5kHz 的音频信号被数字化为 8bit 的样本。为了保证样本能够完全恢复，可以使用的最大采样间隔是多少？

答案：40μs

18.8 本章小结

1. 傅里叶变换将非周期函数 $f(t)$ 转换为 $F(\omega)$ ：

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

2. $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换为：

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

3. 傅里叶变换的重要性质和常用傅里叶变换对分别总结于表 18-1 和 18-2 中。

4. 利用傅里叶变换方法分析电路的步骤包括：求出激励源的傅里叶变换，将电路元件变换至频域，求解未知响应，利用傅里叶逆变换将响应变换至时域。

5. 如果 $H(\omega)$ 是网络的传递函数，那么 $H(\omega)$ 是网络冲激响应的傅里叶变换，即：

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$$

网络的输出 $V_o(\omega)$ 可以由其输入 $V_i(\omega)$ 通过如下关系确定：

$$V_o(\omega) = H(\omega)V_i(\omega)$$

6. 帕塞瓦尔定理给出了函数 $f(t)$ 和其傅里叶变换 $F(\omega)$ 之间的能量关系。1Ω 消耗的能量为：

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

该定理在时域或频域中计算信号携带的能量是非常有用的。

7. 傅里叶变换的典型应用包括调幅(AM)和采样。对于调幅而言，根据傅里叶变换的调制性质可以推导出确定调幅波边带的一种方法。对于采样而言，如果采样的频率不低于奈奎斯特频率，则采样(数字传输所需的)不会导致任何信息的丢失。

复习题

1 下列函数中哪个不存在傅里叶变换？

- (a) $e^t u(-t)$ (b) $te^{-3t}u(t)$
 (c) $1/t$ (d) $|t|u(t)$

2 $e^{j\omega t}$ 的傅里叶变换为：

- (a) $\frac{1}{2+j\omega}$ (b) $\frac{1}{-2+j\omega}$
 (c) $2\pi\delta(\omega-2)$ (d) $2\pi\delta(\omega+2)$

3 $\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$ 的傅里叶逆变换为：

- (a) e^{-2t} (b) $e^{-2t}u(t-1)$
 (c) $e^{-2(t-1)}$ (d) $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

4 $\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换为：

- (a) $\delta(t)$ (b) $u(t)$
 (c) 1 (d) $1/2\pi$

5 $j\omega$ 的傅里叶逆变换为：

- (a) $\delta'(t)$ (b) $u'(t)$
 (c) $1/t$ (d) 未定义

6 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10\delta(\omega)}{4+\omega^2} d\omega$ 的计算结果为：

- (a) 0 (b) 2

- (c) 2.5 (d) ∞

7 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{10\delta(\omega-1)}{4+\omega^2} d\omega$ 的计算结果为：

- (a) 0 (b) 2
 (c) 2.5 (d) ∞

8 通过无初始充电的 1F 电容的电流为 $\delta(t)$ A。则该电容两端的电压为：

- (a) $u(t)$ V (b) $(-1/2 + u(t))$ V
 (c) $e^{-t}u(t)$ V (d) $\delta(t)$ V

9 通过 1H 电感的电流为单位阶跃电流，则电感两端的电压为：

- (a) $u(t)$ V (b) $\operatorname{sgn}(t)$ V
 (c) $e^{-t}u(t)$ V (d) $\delta(t)$ V

10 帕塞瓦尔定理仅适用于非周期函数。

- (a) 正确 (b) 错误

答案：(1)c; (2)c; (3)d; (4)d; (5)a; (6)c;
 (7)b; (8)a; (9)d; (10)b

习题

18.2 节和 18.3 节

1 求图 18-26 所示函数的傅里叶变换。

ML

2 利用图 18-27 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何求解已知波形的傅里叶变换。ED

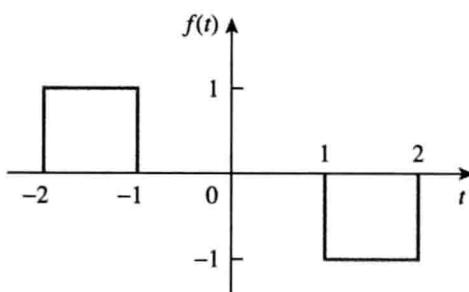


图 18-26 习题 1 图

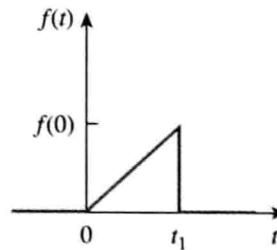


图 18-27 习题 2 图

3 求图 18-28 所示信号的傅里叶变换。

ML

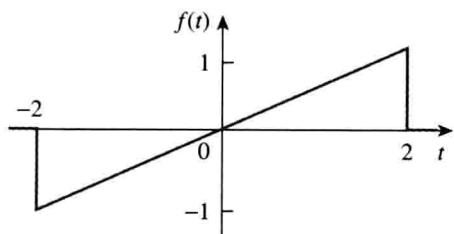


图 18-28 习题 3 图

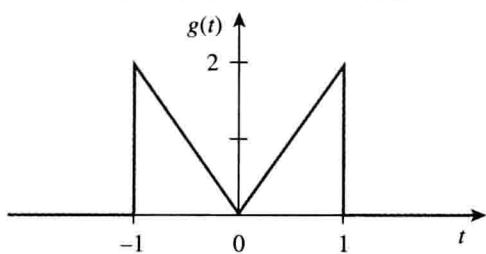
4 求图 18-29 所示波形的傅里叶变换。 ML

图 18-29 习题 4 图

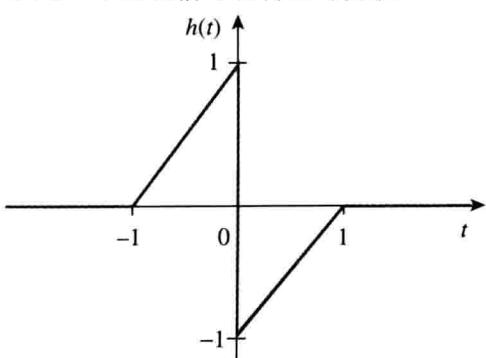
5 求图 18-30 所示信号的傅里叶变换。 ML

图 18-30 习题 5 图

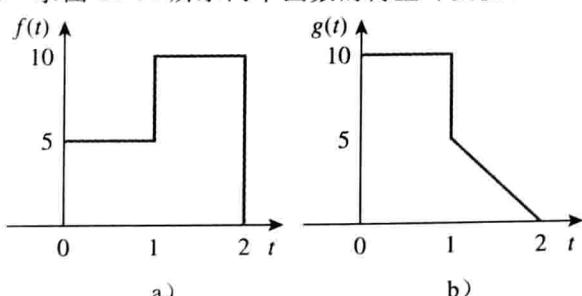
6 求图 18-31 所示两个函数的傅里叶变换。 ML

图 18-31 习题 6 图

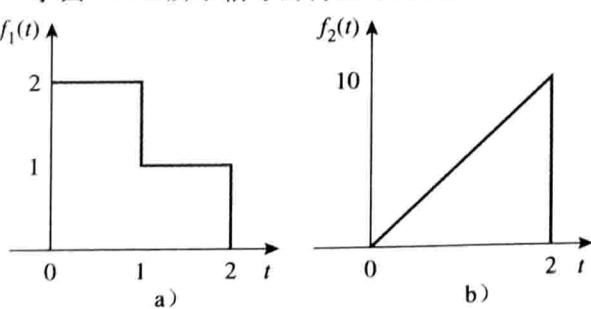
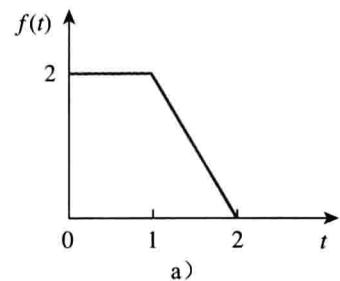
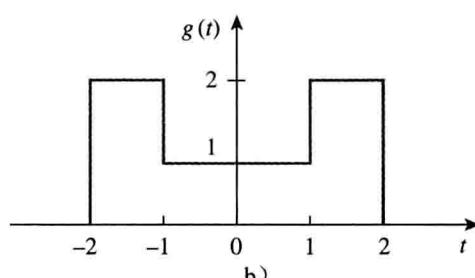
7 求图 18-32 所示信号的傅里叶变换。 ML

图 18-32 习题 7 图

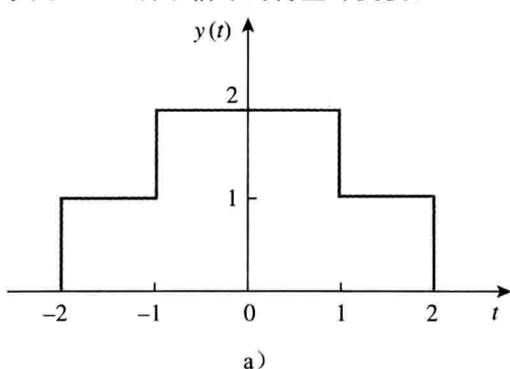
8 求图 18-33 所示信号的傅里叶变换。 ML

a)

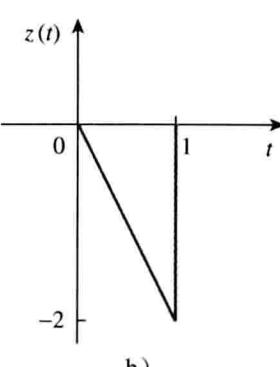


b)

图 18-33 习题 8 图

9 求图 18-34 所示信号的傅里叶变换。 ML

a)



b)

图 18-34 习题 9 图

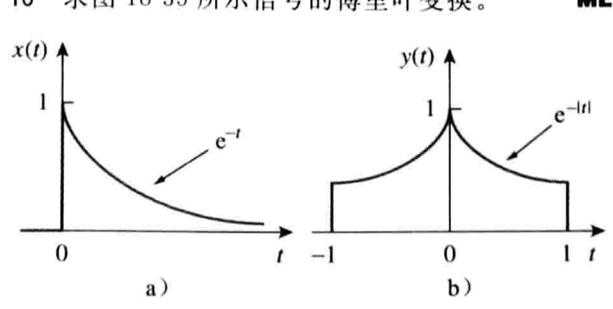
10 求图 18-35 所示信号的傅里叶变换。 ML

图 18-35 习题 10 图

11 求图 18-36 所示“正弦波脉冲”的傅里叶变换。

ML

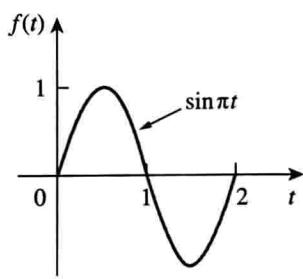


图 18-36 习题 11 图

12 试求下列函数的傅里叶变换：

$$(a) f_1(t) = e^{-3t} \sin(10t) u(t)$$

$$(b) f_2(t) = e^{-4t} \cos(10t) u(t)$$

13 试求下列信号的傅里叶变换：

$$(a) f(t) = \cos(at - \pi/3), -\infty < t < \infty$$

$$(b) g(t) = u(t+1) \sin \pi t, -\infty < t < \infty$$

$$(c) h(t) = (1 + A \sin at) \cos bt, -\infty < t < \infty,$$

其中 A, a 和 b 为常数

$$(d) i(t) = 1 - t, 0 < t < 4$$

14 设计一个问题帮助其他同学更好地理解确定各种时变函数的傅里叶变换的方法(至少三种)。

ED

15 试求下列函数的傅里叶变换：

$$(a) f(t) = \delta(t+3) - \delta(t-3)$$

$$(b) f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t-1) dt$$

$$(c) f(t) = \delta(3t) - \delta'(2t)$$

* 16 试求下列函数的傅里叶变换：

$$(a) f(t) = 4/t^2 \quad (b) g(t) = 8/(4+t^2)$$

17 试求下列函数的傅里叶变换：

$$(a) \cos 2tu(t) \quad (b) \sin 10tu(t)$$

18 已知 $F(\omega) = F[f(t)]$, 利用傅里叶变换的定义证明如下结论：

$$(a) \mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$(b) \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

$$(c) \mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

$$(d) \mathcal{F}[tf(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(\omega)$$

19 求函数 $f(t) = \cos 2\pi t [u(t) - u(t-1)]$ 的傅里叶变换。

20 (a) 证明具有指数傅里叶级数的周期函数：ML

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

的傅里叶变换为：

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

其中， $\omega_0 = 2\pi/T$ 。

(b) 求图 18-37 所示信号的傅里叶变换。

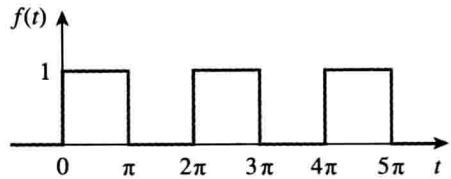


图 18-37 习题 20(b) 图

21 证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{a}$$

提示：可使用如下公式。

$$\mathcal{F}[u(t+a) - u(t-a)] = 2a \left(\frac{\sin a\omega}{a\omega}\right)$$

22 如果 $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换，证明：

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{j}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

23 如果 $f(t)$ 的傅里叶变换为：

$$F(\omega) = \frac{10}{(2+j\omega)(5+j\omega)}$$

求下列函数的傅里叶变换：

$$(a) f(-3t) \quad (b) f(2t-1)$$

$$(c) f(t) \cos 2t \quad (d) \frac{d}{dt} f(t)$$

$$(e) \int_{-\infty}^t f(t) dt$$

24 已知 $\mathcal{F}[f(t)] = (j/\omega)(e^{-j\omega} - 1)$, 求下列函数的傅里叶变换。

$$(a) x(t) = f(t) + 3 \quad (b) y(t) = f(t-2)$$

$$(c) h(t) = f'(t) \quad (d) g(t) = 4f\left(\frac{2}{3}t\right) + 10f\left(\frac{5}{3}t\right)$$

25 求下列信号的傅里叶逆变换：

$$(a) G(\omega) = \frac{5}{j\omega - 2} \quad (b) H(\omega) = \frac{12}{\omega^2 + 4}$$

$$(c) X(\omega) = \frac{10}{(j\omega - 1)(j\omega - 2)}$$

26 求下列信号的傅里叶逆变换：

$$(a) F(\omega) = \frac{e^{-j2\omega}}{1+j\omega} \quad (b) H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 4)^2}$$

$$(c) G(\omega) = 2u(\omega+1) - 2u(\omega-1)$$

27 求下列信号的傅里叶逆变换：

$$(a) F(\omega) = \frac{100}{j\omega(j\omega + 10)}$$

$$(b) G(\omega) = \frac{10j\omega}{(-j\omega + 2)(j\omega + 3)}$$

$$(c) H(\omega) = \frac{60}{-\omega^2 + j40\omega + 1300}$$

$$(d) Y(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$$

28 试求下列信号的傅里叶逆变换：

$$(a) \frac{\pi\delta(\omega)}{(5+j\omega)(2+j\omega)} \quad (b) \frac{10\delta(\omega+2)}{j\omega(j\omega+1)}$$

$$(c) \frac{20\delta(\omega-1)}{(2+j\omega)(3+j\omega)}$$

$$(d) \frac{5\pi\delta(\omega)}{5+j\omega} + \frac{5}{j\omega(5+j\omega)}$$

* 29 试求下列信号的傅里叶逆变换:

$$(a) F(\omega) = 4\delta(\omega+3) + \delta(\omega) + 4\delta(\omega-3)$$

$$(b) G(\omega) = 4u(\omega+2) - 4u(\omega-2)$$

$$(c) H(\omega) = 6\cos 2\omega$$

30 对于输入为 $x(t)$ 、输出为 $y(t)$ 的线性系统, 试求以下几种情况下的冲激响应:

$$(a) x(t) = e^{-at}u(t), y(t) = u(t) - u(-t)$$

$$(b) x(t) = e^{-t}u(t), y(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$(c) x(t) = \delta(t), y(t) = e^{-at}\sin btu(t)$$

31 对于输出为 $y(t)$ 、冲激响应为 $h(t)$ 的线性系统, 试求以下几种情况下的输入 $x(t)$:

$$(a) y(t) = te^{-at}u(t), h(t) = e^{-at}u(t)$$

$$(b) y(t) = u(t+1) - u(t-1), h(t) = \delta(t)$$

$$(c) y(t) = e^{-at}u(t), h(t) = \operatorname{sgn}(t)$$

* 32 求下列傅里叶变换所对应的函数:

$$(a) F_1(\omega) = \frac{e^{j\omega}}{-j\omega+1} \quad (b) F_2(\omega) = 2e^{|j\omega|}$$

$$(c) F_3(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2} \quad (d) F_4(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{1+j2\omega}$$

* 33 求以下 $F(\omega)$ 对应的 $f(t)$:

$$(a) F(\omega) = 2\sin\pi\omega[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$$

$$(b) F(\omega) = \frac{1}{\omega}(\sin 2\omega - \sin \omega) + \frac{j}{\omega}(\cos 2\omega - \cos \omega)$$

34 已知傅里叶变换如图 18-38 所示, 求相应的信号 $f(t)$ 。(提示: 使用对偶性。) **ML**

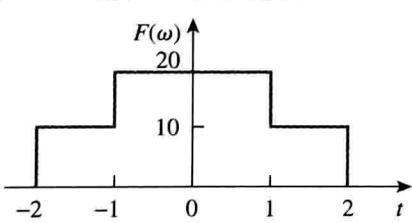


图 18-38 习题 34 图

35 已知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为:

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega+2}$$

求下列信号的傅里叶变换:

$$(a) x(t) = f(3t-1) \quad (b) y(t) = f(t)\cos 5t$$

$$(c) z(t) = \frac{d}{dt}f(t) \quad (d) h(t) = f(t) * f(t)$$

$$(e) i(t) = tf(t)$$

18.4 节

36 某电路的传递函数为:

$$H(\omega) = \frac{2}{j\omega+2}$$

如果电路输入信号是 $v_s(t) = e^{-4t}u(t) V$, 求输

出信号。假设所有的初始条件为零。

37 求图 18-39 所示电路的传递函数 $I_o(\omega)/I_s(\omega)$ 。

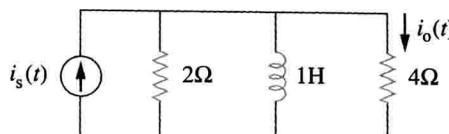


图 18-39 习题 37 图

38 利用图 18-40 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何使用傅里叶变换进行电路分析。**ED**

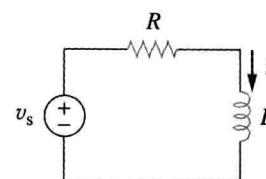


图 18-40 习题 38 图

39 已知图 18-41 所示电路及其激励, 求 $i(t)$ 的傅里叶变换。

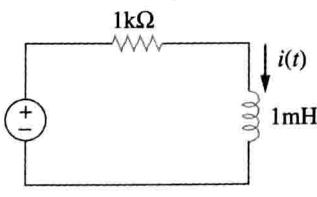
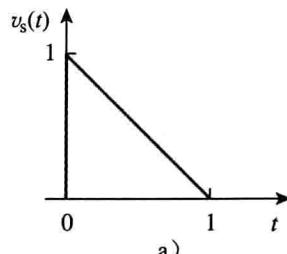


图 18-41 习题 39 图

40 已知电压源如图 18-42a 所示, 求图 18-42(b) 所示电路中的电流 $i(t)$ 。

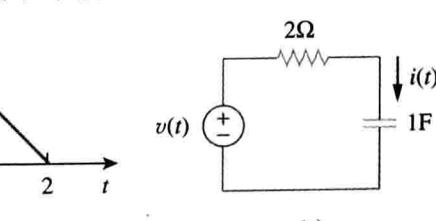
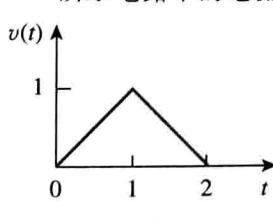


图 18-42 习题 40 图

41 求图 18-43 所示电路中 $v(t)$ 的傅里叶变换。

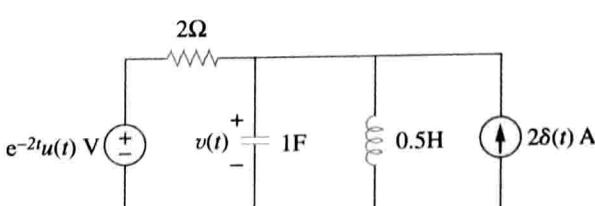


图 18-43 习题 41 图

42 求图 18-44 所示电路中的电流 $i_o(t)$ 。

$$(a) i(t) = \text{sgn}(t) \text{ A}$$

$$(b) i(t) = 4[u(t) - u(t-1)] \text{ A}$$

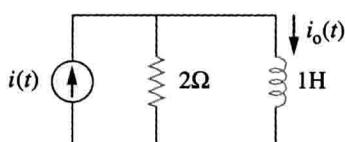


图 18-44 习题 42 图

43 求图 18-45 电路中的 $v_o(t)$, 其中 $i_s = 5e^{-t}u(t) \text{ A}$ 。

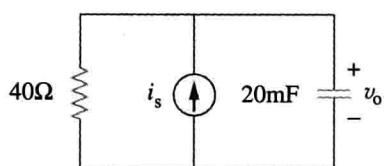


图 18-45 习题 43 图

44 图 18-46a 所示的矩形脉冲作用于图 18-46b 所示电路, 求 $t=1\text{s}$ 时的 v_o 。

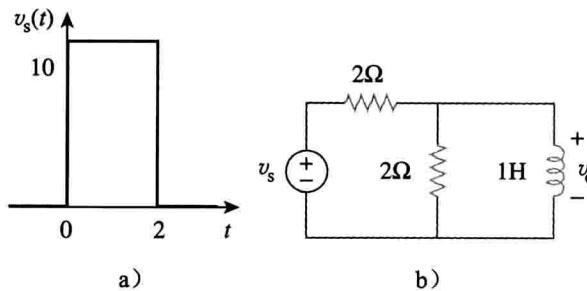


图 18-46 习题 44 图

45 $v_s(t) = 10e^{-2t}u(t)$, 利用傅里叶变换求图 18-47 所示电路中的 $i(t)$ 。

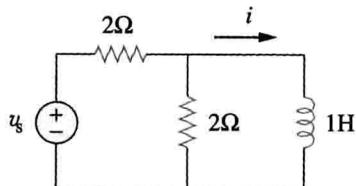


图 18-47 习题 45 的图

46 求图 18-48 所示电路中的 $i_o(t)$ 的傅里叶变换。

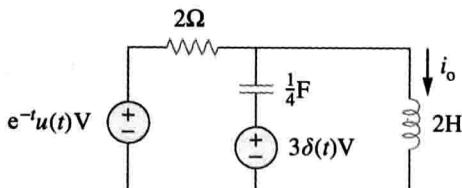


图 18-48 习题 46 图

47 求图 18-49 所示电路的电压 $v_o(t)$ 。假设 $i_s(t) = 8e^{-t}u(t) \text{ A}$ 。

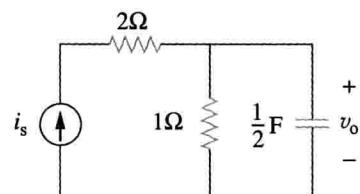


图 18-49 习题 47 图

48 求图 18-50 所示运放电路中的 $i_o(t)$ 。

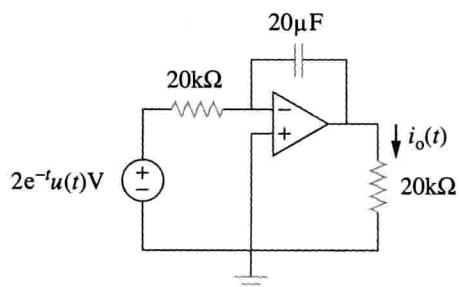


图 18-50 习题 48 图

49 利用傅里叶变换求图 18-51 所示电路中的 $v_o(t)$ 。

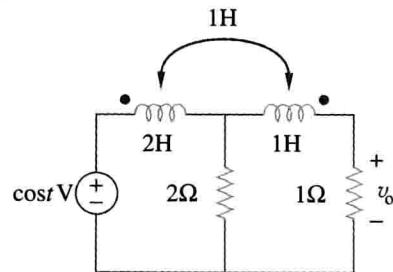


图 18-51 习题 49 图

50 求图 18-52 所示变压器电路中的 $v_o(t)$ 。

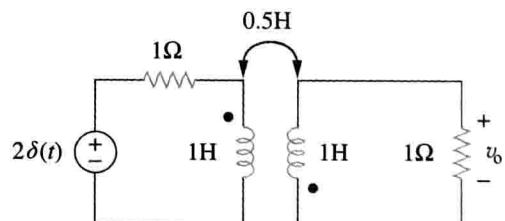


图 18-52 习题 50 图

51 求图 18-53 所示电路中电阻消耗的能量。

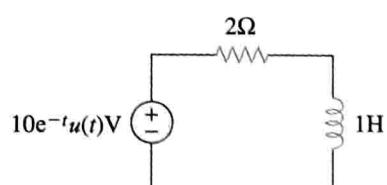


图 18-53 习题 51 图

18.5 节

52 如果 $F(\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$, 求 $J = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$ 。

- 53 如果 $f(t) = e^{-2|t|}$, 求 $J = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ 。
 54 设计一个问题帮助其他同学更好地理解如何求解已知信号的总能量。 **ED**
 55 假设 $f(t) = 5e^{-(t-2)} u(t)$, 求 $F(\omega)$ 并由此确定 $f(t)$ 的总能量。
 56 某 1Ω 电阻两端的电压为 $v(t) = te^{-2t} u(t)$ V。
 (a) 该电阻吸收的总能量为多少? (b) 在频带 $-2 \leq \omega \leq 2$ rad/s 范围内吸收的能量占总能量的百分比。
 57 假设 $i(t) = 2e^t u(-t)$ A。求 $i(t)$ 传递的总能量, 并确定在频带 $-5 \text{ rad/s} < \omega < 5 \text{ rad/s}$ 范围内 1Ω 电阻吸收能量的百分比。

18.6 节

- 58 调幅信号为 $f(t) = 10(1 + 4\cos 200\pi t)\cos \pi \times 10^4 t$ 。确定下列各项: (a) 载波频率; (b) 下边带频率; (c) 上边带频率。 **ED**
 59 对于图 18-54 所示的线性系统, 当输入电压为 $v_i(t) = 2\delta(t)$ V 时, 输出电压为 $v_o(t) = (10e^{-2t} - 6e^{-4t})$ V。求当输入电压为 $v_i(t) = 4e^{-t}u(t)$ V 时的输出电压。

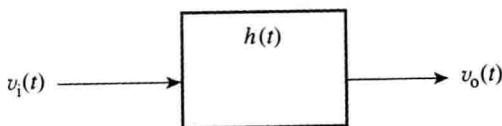


图 18-54 习题 59 图

- 60 某带限信号的傅里叶级数可以表示为:

综合理解题

- 68 如果某滤波器的输入电压信号为 $v(t) = 50e^{-2|t|}$ V。则在 $1 < \omega < 5$ rad/s 频率范围内, 1Ω 电阻所消耗的能量占总能量的百分比为多少?
 69 某傅里叶变换为:

$$i_s(t) = (10 + 8\cos(2\pi t + 30^\circ) + 5\cos(4\pi t - 150^\circ)) \text{ mA}$$

如果该信号作用于图 18-55 所示电路, 试求 $v(t)$ 。 **ED**

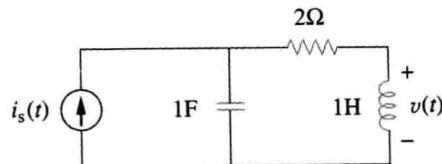


图 18-55 习题 60 图

- 61 在某系统中, 输入信号 $x(t)$ 受到 $m(t) = 2 + \cos \omega_0 t$ 幅度调制, 响应为 $y(t) = m(t)x(t)$ 。根据 $X(\omega)$ 求出 $Y(\omega)$ 。
 62 频带位于 $0.4 \sim 3.5$ kHz 的某语音信号对 10 MHz 的载波进行幅度调制, 求下边带和上边带的频率范围。
 63 计算某地区 AM 广播频带 ($540 \sim 1600$ kHz) 内允许的无相互干扰的电台数量。 **ED**
 64 对于 FM 广播频带 ($88 \sim 108$ MHz), 重做上题, 假设载波频率间隔为 200 kHz。 **ED**
 65 语音信号的最高频率成分为 3.4 kHz, 该语音信号采样器的奈奎斯特频率为多少?
 66 某电视信号的带宽限制在 4.5 MHz。如果在远处利用样本重建该信号, 则允许的最大采样间隔为多少? **ED**
 * 67 已知信号 $g(t) = \operatorname{sinc}(200\pi t)$, 求该信号的奈奎斯特频率和奈奎斯特间隔。

$$F(\omega) = \frac{20}{4 + j\omega}$$

该信号通过一个截止频率为 2 rad/s 的滤波器 ($0 < \omega < 2$ rad/s), 则输出信号能量占输入信号能量的百分比为多少?

第19章

二端口网络

今日事今日毕；自己能完成之事自己做；不要寅时吃卯粮；别因为便宜就花钱；与饥饿、干渴与寒冷相比，骄傲带来的损失更大；我们很少会后悔吃得太少；做乐意做的事就不会带来烦恼；别让不会发生的事给你带来痛苦；只以正当方式获胜；生气时，在说话之前数到 10，如果很生气就数到 100。

——Thomas Jefferson

拓展事业

教育领域的职业生涯

大约有三分之二的工程师在私人企业工作，也有一部分在学术界工作，帮助学生为今后的工程职业做好充分的准备，打下良好的基础。学习这门电路分析课程是培养过程中非常重要的环节。如果你喜爱教学，可以考虑成为一名工程教育工作者。

工程教授通常从事前沿课题研究，为本科生、研究生授课，并且为其所在的专业学会或协会提供服务。他们应该在其擅长的领域有创新贡献。因此，该职业需要广博的电气工程理论基础和将知识传授于他人的沟通能力。

如果乐意做科研工作，或在工程前沿领域工作，为科技进步做贡献，或从事发明、咨询、教学方面的工作，可以考虑把工程教育作为职业。最佳起步方式是与教授进行交谈，并从他们的经验中获益。

要想成功地成为一名工程领域的教授，那么本科学习阶段打下坚实的数学和物理基础至关重要。如果你在求解工程课程的课后习题中遇到困难，那么请找出自己数理基础知识中的不足之处，并加以巩固。

目前，多数的大学都要求工程教授有博士学位。另外，有些大学要求他们能够积极主动地参与研究，并在知名学术期刊上发表论文。因为电子工程学发展迅速，并且已经成为一个多学科交叉的领域，所以要为今后的工程教育职业做好充分的准备，就必须接受尽可能广泛的教育。毫无疑问，工程教育是一份有意义的职业。当教授们看到他们的学生毕业后，在专业领域成为领导者，并为人类社会做出贡献时，他们都会感到无以言表的成就感和满足感。



由 James Watson 拍摄

19.1 引言

电流流入或流出电路网络所通过的一对端子叫做一个端口(port)。双端子设备或元件(如电阻、电容及电感)可以构成一个单口网络。目前所接触的大多数电路都是双端子电路，即单口电路或单端口电路，如图 19-1a 所示。前面章节已经介绍了通过一对端子的电压或者电流，比如电阻、电容、电感两端的电压或流过他们的电流；也研究了包括运算放大器、晶体管和变压器在内的四端子电路，即双口电路或二端口电路，如图 19-1b 所示。一般情况下，一个网络可以有 n 个端口，端口是电路网络的介入通道，由一对端子组成；电流从一个端子流入，并从另一个端子流出，所以流入端口的净电流等于零。

本章主要介绍二端口网络的有关问题。

二端口网络是指具有输入与输出两个不同端口的电路网络。

因此，二端口网络具有两对端子作为电路的接入通道。如图19-1b所示，电流从一对端子的其中一个端子流入，并从另外一个端子流出。晶体管等三端子设备可以配置成一个二端口网络。

学习二端口网络的主要原因主要有两个。首先，该网络在通信、控制系统、电力系统以及电子学中非常有用。例如，在电子学中，二端口网络可以作为晶体管的模型，从而使得这类电路的级联设计变得更为方便。其次，在大型网络应用中，知道二端口网络的参数，就可以将其处理为一个“黑匣子”，无需关注其内部结构。

描述二端口网络的特征就是要确定图19-1b所示的端子变量 V_1 、 V_2 、 I_1 和 I_2 ，这四个变量是独立的。描述电压-电流关系的项称为参数。本章的目的是推导出六组参数，并给出这些参数之间的关系及实现二端口网络串联、并联或级联的方法。对于运算放大器而言，本章仅分析电路的端口特性，并假设双口电路中不包含独立电源。本章最后运用所介绍的概念来分析晶体管电路和合成阶梯网络。

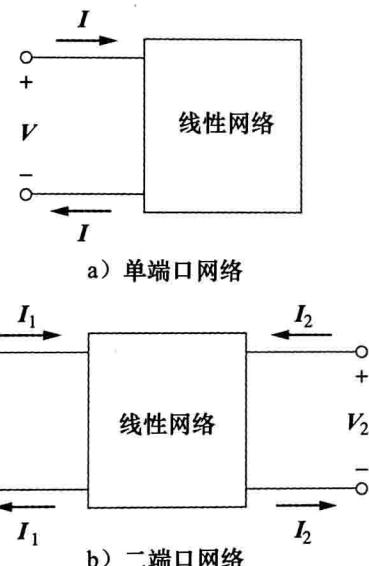


图19-1 端口网络

19.2 阻抗参数

阻抗参数和导纳参数通常用在滤波器综合中，在阻抗匹配网络以及电力配送网络的设计与分析中也十分有用。本节介绍阻抗参数，下一节介绍导纳参数。

二端口网络可以是电压驱动的，如图19-2a所示，也可以是电流驱动的，如图19-2b所示。无论是图19-2a还是19-2b，端子电压与端子电流之间的关系可以表示为：

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (19.1)$$

提示：四个变量(V_1 ， V_2 ， I_1 和 I_2)中仅有两个是独立的，另外两个可以由式(19.1)求得。

或者利用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (19.2)$$

其中， z 称为阻抗参数(impedance parameter)，或者简称 z 参数(z parameter)，单位是 Ω 。

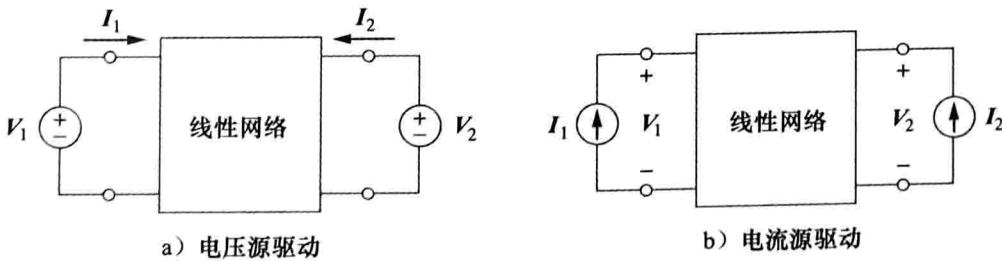


图19-2 线性二端口网络

令 $I_1=0$ (输入端口开路)或 $I_2=0$ (输出端口开路)即可计算出各参数的值。即：

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0}, \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (19.3)$$

由于 z 参数是通过输入或输出端口开路获得的，所以称为开路阻抗参数。特别地：

$$\begin{aligned} z_{11} &= \text{开路输入阻抗} & z_{12} &= \text{从端口 1 到端口 2 的开路转移阻抗} \\ z_{21} &= \text{从端口 2 到端口 1 的开路转移阻抗} & z_{22} &= \text{开路输出阻抗} \end{aligned} \quad (19.4)$$

根据式(19.3)，在端口 2 开路的情况下，在端口 1 接入电压 V_1 (或电流源 I_1)，求出 I_1 和 V_2 ，如图 19-3a 所示，即可确定 z_{11} 和 z_{21} ，得到：

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \quad (19.5)$$

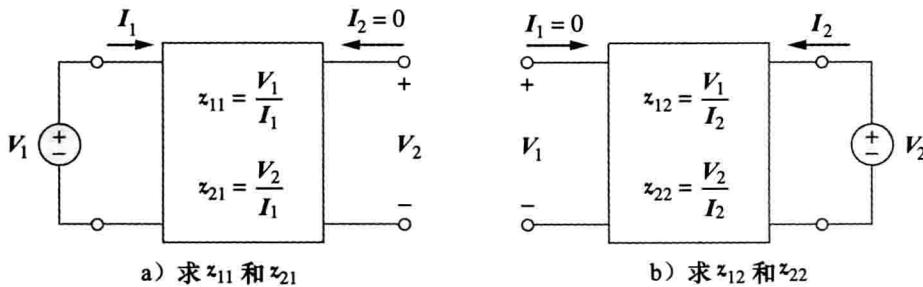


图 19-3 z 参数的确定

类似地，在端口 1 开路的情况下，在端口 2 接入电压 V_2 (或电流源 I_2)，求出 I_2 和 V_1 ，如图 19-3b 所示，即可确定 z_{12} 和 z_{22} ，得到：

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}, \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \quad (19.6)$$

上述过程提供了一种计算和测量 z 参数的方法。

z_{11} 和 z_{22} 有时也称为策动点阻抗(driving-point imedance)，而 z_{21} 和 z_{12} 称为转移阻抗(transfer impedance)。策动点阻抗是两端子(单端口)器件的输入阻抗。因此， z_{11} 是输出端口开路时的输入策动点阻抗，而 z_{22} 是输入端口开路时的输出策动点阻抗。

当 $z_{11} = z_{22}$ 时，二端口网络是对称的，这意味着网络关于一条中心线呈镜像对称，即能够找到一条把网络划分为两个相同部分的线。

当二端口网络为线性网络且不包含受控源时，如果转移阻抗是相等的($z_{12} = z_{21}$)，则称该二端口网络为互易(reciprocal)网络。对于该网络而言，如果网络的激励点和响应点相互交换，其转移阻抗保持不变。如图 19-4 所示，如果把两个端口的理想电压源和理想电流表相互交换，电流表读数保持不变，则该二端口网络就是互易网络。根据式(19.1)，对于图 19-4a 所示的互易网络，可以得到 $\mathbf{V} = z_{12}\mathbf{I}$ ，对于图 19-4b 所示的互易网络，可得到 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2\mathbf{I}$ 。而这种结果仅仅在 $z_{12} = z_{21}$ 时才成立。任何全部由电阻、电容、电感组成的二端口网络都必须是互易网络。互易网络可以用图 19-5a 的 T 形电路来等效。对于非互易二端口网络而言，更常用的等效电路如图 19-5b 所示，注意，该等效电路可由式(19.1)直接得出。

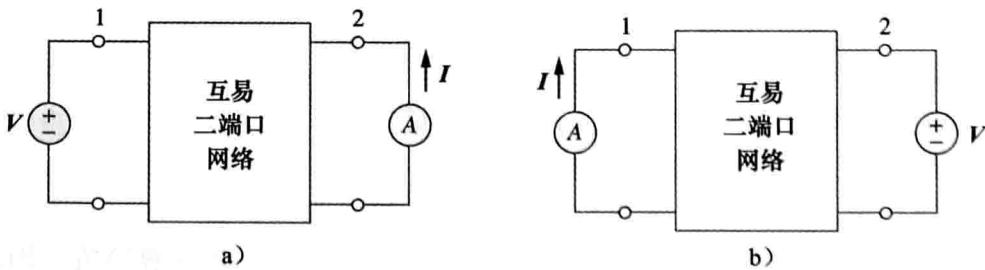


图 19-4 互易二端口网络中，交换两个端口的理想电压源和理想电流表后，电流表读数不变

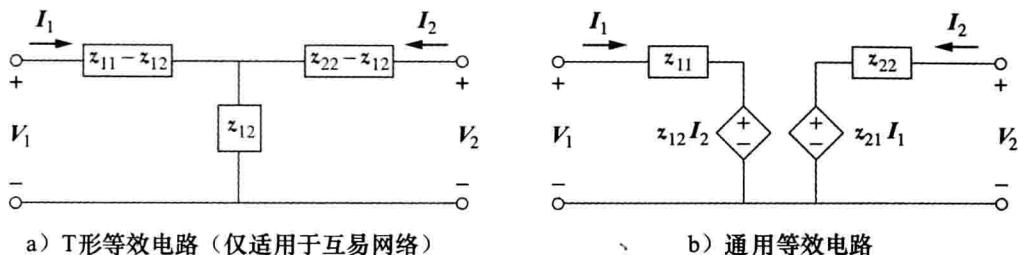


图 19-5 网络等效电路

应当指出，某些二端口网络不存在 z 参数，因为这类网络不能由式(19.1)描述。例如，对于图19-6所示理想变压器，其二端口网络的定义方程为：

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{n} \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{I}_1 = -n \mathbf{I}_2 \quad (19.7)$$

可见，不可能像式(19.1)那样利用电流来表示电压，反之亦然。因此，理想变压器不存在 z 参数。然而，它存在混合参数，具体内容将在19.4节详细介绍。

例 19-1 求图19-7所示电路的 z 参数。

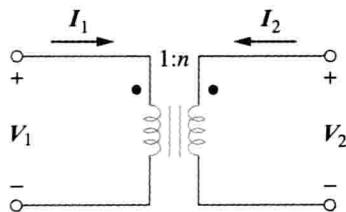
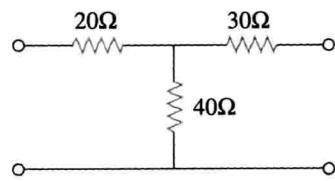
图 19-6 理想变压器不存在 z 参数

图 19-7 例 19-1 图

解：方法1 为了计算 z_{11} 和 z_{21} ，在输入端口加上电压源 \mathbf{V}_1 ，保持输出端口开路，如图19-8a所示，得到：

$$z_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{(20+40)\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = 60(\Omega)$$

即 z_{11} 是端口1的输入阻抗。

$$z_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} = \frac{40\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = 40(\Omega)$$

为了确定 z_{12} 和 z_{22} ，在输出端口加上电压源 \mathbf{V}_2 ，保持输入端口开路，如图19-8b所示，得到：

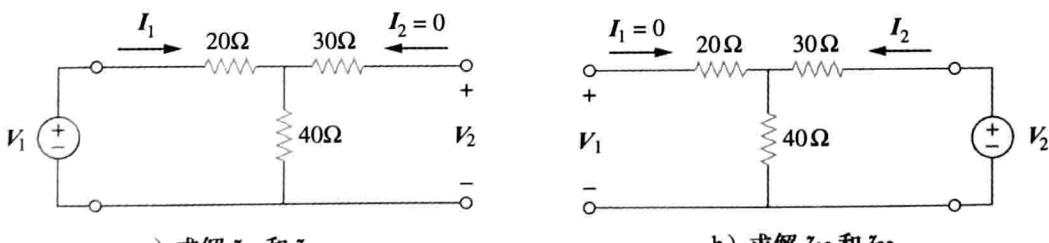


图 19-8 例 19-1 图

$$z_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{40\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = 40(\Omega), \quad z_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{(30+40)\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_2} = 70(\Omega)$$

因此：

$$[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 60\Omega & 40\Omega \\ 40\Omega & 70\Omega \end{bmatrix}$$

方法 2 由于已知电路中没有受控源, 因此 $z_{12}=z_{21}$, 并且可以利用图 19-5a 所示的 T 形电路。比较图 19-7 和图 19-5a, 可以得到:

$$z_{12} = 40\Omega = z_{21}$$

$$z_{11} - z_{12} = 20 \Rightarrow z_{11} = 20 + z_{12} = 60(\Omega)$$

$$z_{22} - z_{12} = 30 \Rightarrow z_{22} = 30 + z_{12} = 70(\Omega)$$

练习 19-1 求图 19-9 所示二端口网络的 z 参数。 答案: $z_{11}=7\Omega$, $z_{12}=z_{21}=z_{22}=3\Omega$

例 19-2 求图 19-10 所示电路的 I_1 和 I_2 。

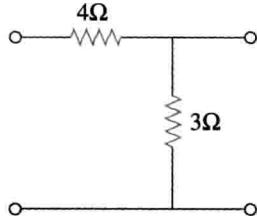


图 19-9 练习 19-1 图

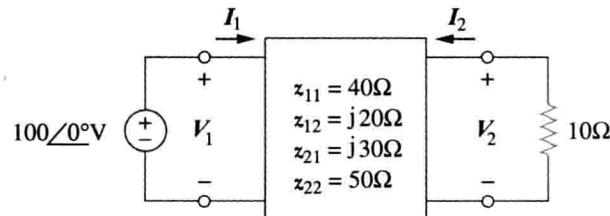


图 19-10 例 19-2 图

解: 该网络不是互易网络。可利用图 19-5b 所示等效电路计算, 也可以直接用式(19.1)计算。将已知 z 参数代入式(19.1)得:

$$V_1 = 40I_1 + j20I_2 \quad (19.2.1)$$

$$V_2 = j30I_1 + 50I_2 \quad (19.2.2)$$

因为 I_1 和 I_2 为待求量, 所以将如下电压:

$$V_1 = 100 \angle 0^\circ, \quad V_2 = -10I_2$$

代入式(19.2.1)和(19.2.2)中, 可得:

$$100 = 40I_1 + j20I_2 \quad (19.2.3)$$

$$-10I_2 = j30I_1 + 50I_2 \Rightarrow I_1 = j2I_2 \quad (19.2.4)$$

将式(19.2.4)代入式(19.2.3)得:

$$100 = j80I_2 + j20I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{100}{j100} = -j$$

由式(19.2.4)可得, $I_1 = j2(-j) = 2$, 因此:

$$I_1 = 2 \angle 0^\circ \text{ A}, \quad I_2 = 1 \angle -90^\circ \text{ A}$$

练习 19-2 求图 19-11 所示二端口网络中的 I_1 和 I_2 。 答案: $200 \angle 30^\circ \text{ mA}$, $100 \angle 120^\circ \text{ mA}$

19.3 导纳参数

通过前一节的学习可知, 某些二端口网络可能不存在阻抗参数。因此需要采用另一种方式来描述这类网络。利用网络的端子电压表示端子电流可以得到另一组网络参数。对于图 19-12a 或 b 所示电路, 端子电流可以由端子电压表示为:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}} \quad (19.8)$$

或利用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (19.9)$$

其中, y 称为导纳参数(admittance parameter)(或简称 y 参数(y parameter)), 单位是西

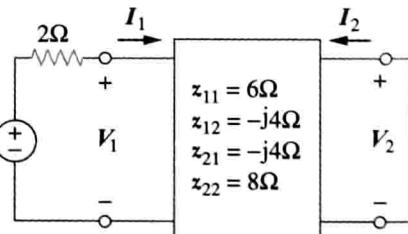


图 19-11 练习 19-2 图

门子。

令 $V_1=0$ (输入端口短路)或 $V_2=0$ (输出端口短路), 即可得到导纳参数的值, 因此:

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}, \quad \mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0} \quad (19.10)$$

由于 y 参数是通过输入端口短路和输出端口短路获得, 所以也称为短路导纳参数。

$$\begin{array}{ll} \mathbf{y}_{11} = \text{短路输入导纳} & \mathbf{y}_{12} = \text{从端口 2 到端口 1 短路转移导纳} \\ \mathbf{y}_{21} = \text{从端口 1 到端口 2 短路转移导纳} & \mathbf{y}_{22} = \text{短路输出导纳} \end{array} \quad (19.11)$$

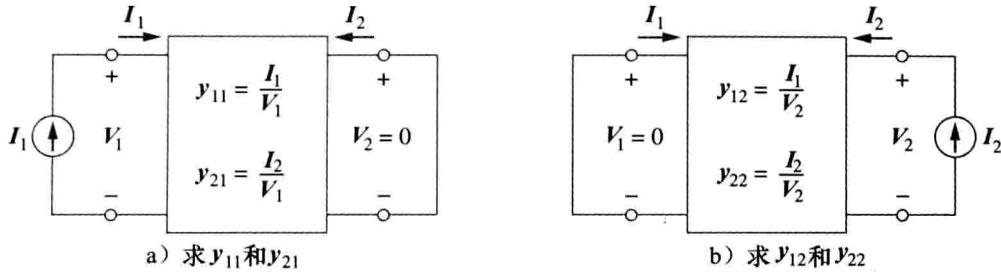


图 19-12 参数 y 的测定

由式(19.10)可知, 在端口 2 短路的情况下, 在端口 1 连接电流源 \mathbf{I}_1 , 如图 19-12a 所示, 求出 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{I}_2 , 即可确定 \mathbf{y}_{11} 和 \mathbf{y}_{21} :

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}, \quad \mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \quad (19.12)$$

同理, 在端口 1 短路的情况下, 在端口 2 连接电流源 \mathbf{I}_2 , 如图 19-12b 所示, 求出 \mathbf{V}_2 和 \mathbf{I}_1 , 即可确定 \mathbf{y}_{12} 和 \mathbf{y}_{22} :

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}, \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \quad (19.13)$$

上述过程提供了一种计算或测量 y 参数的方法。阻抗和导纳参数统称为导抗(immittance)参数。

对于不包含受控源的线性二端口网络, 转移导纳是相等的($\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}$), 其证明方法与 z 参数的证明方法相同。互易网络($\mathbf{y}_{12}=\mathbf{y}_{21}$)能够被建模成图 19-13a 中的 π 形等效电路。如果网络不是互易的, 通用等效网络如图 19-13b 所示。

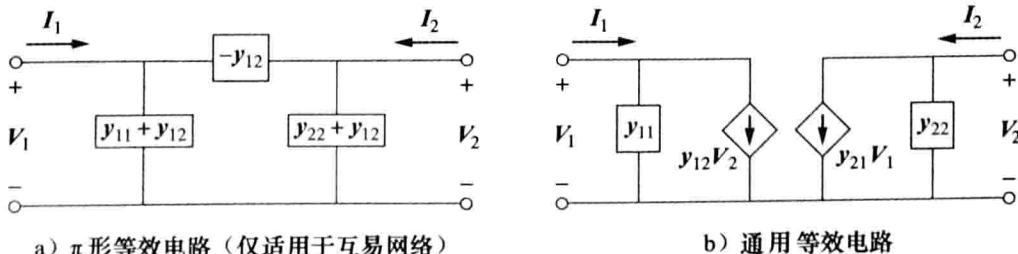


图 19-13 网络等效电路

例 19-3 求图 19-14 所示的 π 网络的 y 参数。

解: 方法 1 令输出端口短路, 并在输入端口连接一个电流源 \mathbf{I}_1 , 即可求得 \mathbf{y}_{11} 和 \mathbf{y}_{21} , 如图 19-15a 所示。由于此时 8Ω 电阻是短路的, 2Ω 电阻和 4Ω 是并联的, 因此:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_1 (4 \parallel 2) = \frac{4}{3} \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{\mathbf{I}_1}{\frac{4}{3} \mathbf{I}_1} = 0.75(\text{S})$$

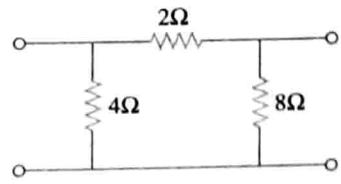


图 19-14 例 19-3 图

由分流定理得：

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{4}{4+2}\mathbf{I}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{I}_1, \quad \mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{-\frac{2}{3}\mathbf{I}_1}{\frac{4}{3}\mathbf{I}_1} = -0.5(\text{S})$$

令输入端口短路，并在输出端口连接一个电流源 \mathbf{I}_2 ，即可求得 \mathbf{y}_{12} 和 \mathbf{y}_{22} ，如图 19-15b 所示。此时 4Ω 电阻短路， 2Ω 电阻和 8Ω 电阻是并联的，因此：

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2(8\parallel 2) = \frac{8}{5}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} = \frac{\mathbf{I}_2}{\frac{8}{5}\mathbf{I}_2} = \frac{5}{8} = 0.625(\text{S})$$

由分流定理得：

$$-\mathbf{I}_1 = \frac{8}{8+2}\mathbf{I}_2 = \frac{4}{5}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{-\frac{4}{5}\mathbf{I}_2}{\frac{8}{5}\mathbf{I}_2} = -0.5(\text{S})$$

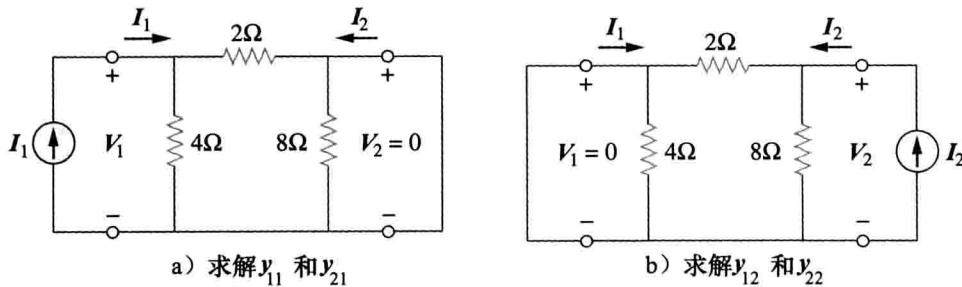


图 19-15 例 19-3 图

方法 2 比较图 19-14 和图 19-13a 可以得到：

$$\mathbf{y}_{12} = -\frac{1}{2}\text{S} = \mathbf{y}_{21}$$

$$\mathbf{y}_{11} + \mathbf{y}_{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{11} = \frac{1}{4} - \mathbf{y}_{12} = 0.75(\text{S})$$

$$\mathbf{y}_{22} + \mathbf{y}_{12} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{1}{8} - \mathbf{y}_{12} = 0.625(\text{S})$$

与之前获得的结果一样。

练习 19-3 求图 19-16 所示 T 形网络的 y 参数。

答案： $\mathbf{y}_{11} = 227.3\text{mS}$, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21} = -90.91\text{mS}$, $\mathbf{y}_{22} = 136.36\text{mS}$

例 19-4 求图 19-17 所示二端口网络的 y 参数。

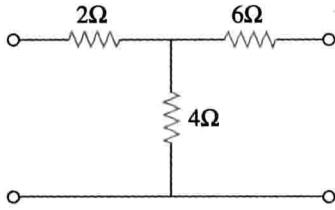


图 19-16 练习 19-3 图

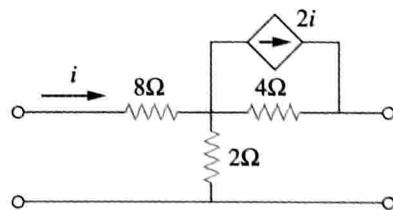


图 19-17 例 19-4 图

解：本题的求解过程与例 19-3 中方法 1 的求解过程相同。为了确定 \mathbf{y}_{11} 和 \mathbf{y}_{21} ，需利用如图 19-18a 所示电路，即端口 2 短路，在端口 1 加入电流源。于是，在节点 1 处有：

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o}{8} = 2\mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{V}_o}{2} + \frac{\mathbf{V}_o - 0}{4}$$

因为 $\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o}{8}$ ，所以：

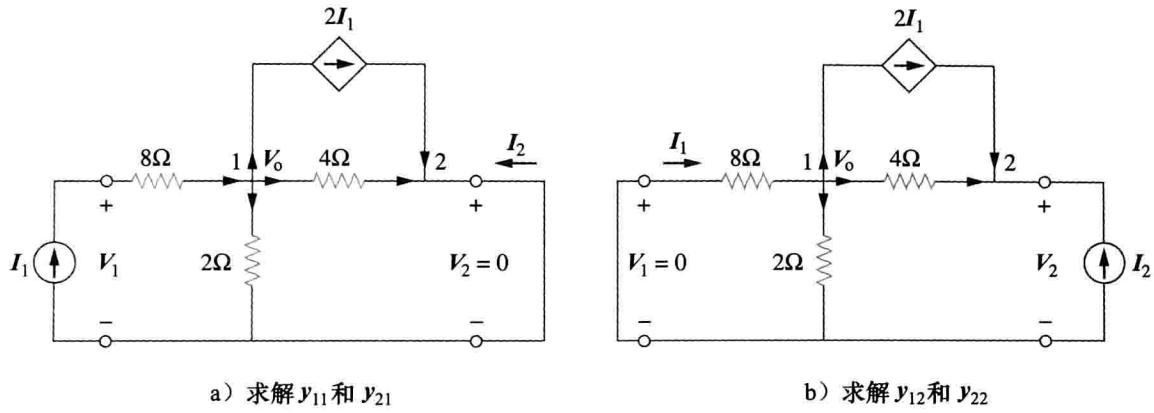


图 19-18 例 19-4 的求解

$$0 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o}{8} + \frac{3\mathbf{V}_o}{4}$$

$$0 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_o + 6\mathbf{V}_o \Rightarrow \mathbf{V}_1 = -5\mathbf{V}_o$$

因此：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{-0.75\mathbf{V}_o}{-5\mathbf{V}_o} = 0.15(\text{S})$$

且

$$\mathbf{y}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{-0.75\mathbf{V}_o}{-5\mathbf{V}_o} = 0.15(\text{S})$$

在节点 2 处，有：

$$\frac{\mathbf{V}_o - 0}{4} + 2\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$-\mathbf{I}_2 = 0.25\mathbf{V}_o - 1.5\mathbf{V}_o = -1.25\mathbf{V}_o$$

因此：

$$\mathbf{y}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1.25\mathbf{V}_o}{-5\mathbf{V}_o} = -0.25(\text{S})$$

同理，可以利用图 19-18b 求出 \mathbf{y}_{12} 和 \mathbf{y}_{22} 。在节点 1 处，有：

$$\frac{0 - \mathbf{V}_o}{8} = 2\mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{V}_o}{2} + \frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_2}{4}$$

因为 $\mathbf{I}_1 = \frac{0 - \mathbf{V}_o}{8}$ ，所以：

$$0 = -\frac{\mathbf{V}_o}{8} + \frac{\mathbf{V}_o}{2} + \frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_2}{4}$$

即

$$0 = -\mathbf{V}_o + 4\mathbf{V}_o + 2\mathbf{V}_o - 2\mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{V}_2 = 2.5\mathbf{V}_o$$

因此：

$$\mathbf{y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{-\mathbf{V}_o/8}{2.5\mathbf{V}_o} = -0.05(\text{S})$$

在节点 2 处，有：

$$\frac{\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_2}{4} + 2\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$-\mathbf{I}_2 = 0.25\mathbf{V}_o - \frac{1}{4} \times 2.5\mathbf{V}_o - \frac{2\mathbf{V}_o}{8} = -0.625\mathbf{V}_o$$

所以：

$$\mathbf{y}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} = \frac{0.625\mathbf{V}_o}{2.5\mathbf{V}_o} = 0.25(\text{S})$$

注意，本例中 \mathbf{y}_{12} 不等于 \mathbf{y}_{21} ，因此网络不是互易网络。

练习 19-4 求图 19-19 所示电路中的 y 参数。

答案： $\mathbf{y}_{11} = 0.625\text{S}$, $\mathbf{y}_{12} = -0.125\text{S}$,
 $\mathbf{y}_{21} = 0.375\text{S}$, $\mathbf{y}_{22} = 0.125\text{S}$

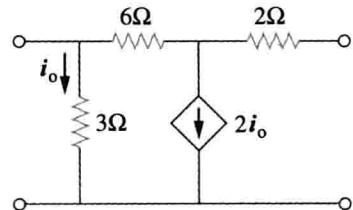


图 19-19 练习 19-4 图

19.4 混合参数

二端口网络的 z 参数和 y 参数并不是总存在，

所以有必要建立另外一组参数来描述二端口网络。第三组参数是以 \mathbf{V}_1 与 \mathbf{I}_2 作为独立变量而得到的。即：

$$\boxed{\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2} \quad (19.14)$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (19.15)$$

其中， \mathbf{h} 称为混合参数(hybrid parameter)(或简称 h 参数(h parameter))，因为这组参数是由电压与电流之间的混合比构成的。 h 参数在描述晶体管之类的电子器件时非常有用(参见 19.1 节)，对于这类器件而言，采用实验方法测量 h 参数要比测量 z 参数或 y 参数容易得多。实际上，式(19.7)描述的如图 19-6 所示的理想变压器不存在 z 参数，但是由于式(19.7)与式(19.17)形式一致，所以可以用混合参数描述理想变压器。

h 参数的值可以用下式确定：

$$\boxed{\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{I}_1=0}, \quad \mathbf{h}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{I}_1=0}} \quad (19.16)$$

由式(19.16)显然可见，参数 \mathbf{h}_{11} 、 \mathbf{h}_{12} 、 \mathbf{h}_{21} 、 \mathbf{h}_{22} 分别代表阻抗、电压增益、电流增益和导纳，因而称为混合参数。

$$\begin{array}{ll} \mathbf{h}_{11} = \text{短路输入阻抗} & \mathbf{h}_{12} = \text{开路逆电压增益} \\ \mathbf{h}_{21} = \text{短路正电压增益} & \mathbf{h}_{22} = \text{开路输出导纳} \end{array} \quad (19.17)$$

计算 h 参数的过程和计算 z 参数和 y 参数的过程相似。根据所要计算的参数，在适当的端口加电压源或电流源，将另一个端口短路或开路，并进行电路分析即可。对于互易网络， $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$ ，其证明过程与证明 $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$ 的过程相同。图 19-20 给出了二端口网络的混合模型。

与 h 参数密切相关的另一组参数为是 g 参数(g parameter)或逆混合参数(inverse hybrid parameter)。利用 g 参数描述的端子电流与端子电压方程为：

$$\boxed{\mathbf{I}_1 = \mathbf{g}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{12}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{g}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{22}\mathbf{I}_2} \quad (19.18)$$

即

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{g}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}} \quad (19.19)$$

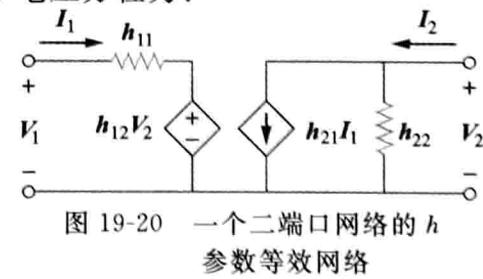


图 19-20 一个二端口网络的 h 参数等效网络

g 参数的值可以由下式确定：

$$\boxed{\mathbf{g}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{I}_2=0}, \quad \mathbf{g}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}, \quad \mathbf{g}_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{I}_2=0}, \quad \mathbf{g}_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}} \quad (19.20)$$

因此，逆混合参数分别为：

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{11} &= \text{开路输入导纳} & \mathbf{g}_{12} &= \text{短路逆电流增益} \\ \mathbf{g}_{21} &= \text{开路正电压增益} & \mathbf{g}_{22} &= \text{短路输出阻抗} \end{aligned} \quad (19.21)$$

图 19-21 给出了二端口网络的逆混合电路模型。 g 参数通常用于场效应晶体管的建模。

例 19-5 求图 19-22 所示二端口网络的混合参数。

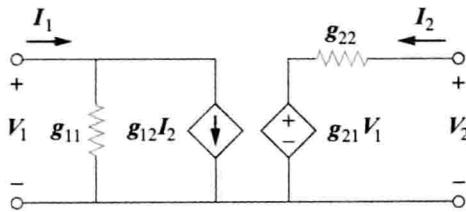


图 19-21 二端口网络 g 参数模型

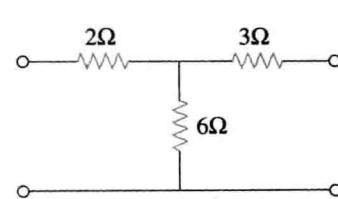
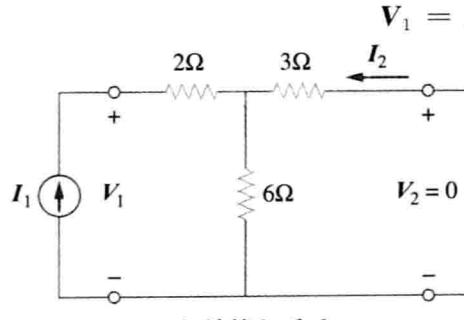
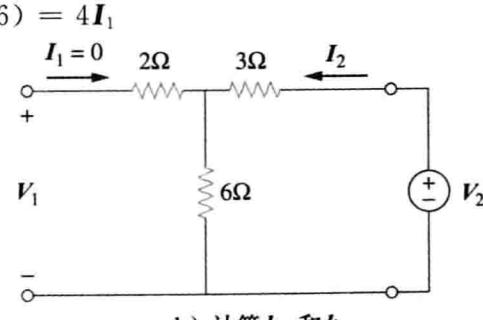


图 19-22 例 19-5 图

解：为了确定 \mathbf{h}_{11} 和 \mathbf{h}_{21} ，需将输出端口短路，并在输入端口连接一个电流源 \mathbf{I}_1 ，如图 19-23a 所示，由图可知：



a) 计算 \mathbf{h}_{11} 和 \mathbf{h}_{21}



b) 计算 \mathbf{h}_{12} 和 \mathbf{h}_{22}

图 19-23 求解例 19-5

因此：

$$\mathbf{h}_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = 4(\Omega)$$

利用分流定理，由图 19-23a 可知：

$$-\mathbf{I}_2 = \frac{6}{6+3}\mathbf{I}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{I}_1$$

因此：

$$\mathbf{h}_{21} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} = -\frac{2}{3}$$

为了求得 \mathbf{h}_{12} 和 \mathbf{h}_{21} ，需将输入端口开路，并在输出端口加上电压源 \mathbf{V}_2 ，如图 19-23b 所示，根据分压定理得：

$$\mathbf{V}_1 = \frac{6}{6+3}\mathbf{V}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{V}_2$$

因此：

$$\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} = \frac{2}{3}$$

另外：

$$\mathbf{V}_2 = (3 + 6)\mathbf{I}_2 = 9\mathbf{I}_2$$

因此：

$$\mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2} = \frac{1}{9} (\text{S})$$

练习 19-5 求图 19-24 所示电路的 h 参数。

答案： $\mathbf{h}_{11} = 1.2\Omega$, $\mathbf{h}_{12} = 0.4$, $\mathbf{h}_{21} = -0.4$, $\mathbf{h}_{22} = 400\text{mS}$

例 19-6 求图 19-25 所示电路从输出端口看进去的戴维南等效电路。

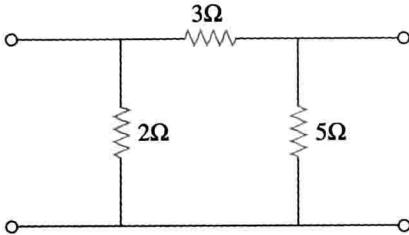


图 19-24 练习 19-5 图

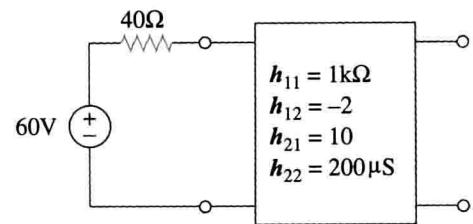


图 19-25 例 19-6 图

解：采用确定戴维南等效 \mathbf{Z}_{th} 和 \mathbf{V}_{th} 的通用过程求解本例，其间会用到 h 参数模型中描述输入端口与输出端口关系的公式。确定 \mathbf{Z}_{th} 时，需将输入端的 60V 的电压源短路，并在输出端加上一个 1V 的电压源，如图 19-26a 所示。由式(19.14)得：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad (19.6.1)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \quad (19.6.2)$$

$\mathbf{V}_2 = 1$, $\mathbf{V}_1 = -40\mathbf{I}_1$, 将其代入式(19.6.1)和式(19.6.2)中，可以得到：

$$-40\mathbf{I}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12} \Rightarrow \mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_{12}}{40 + \mathbf{h}_{11}} \quad (19.6.3)$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22} \quad (19.6.4)$$

将式(19.6.3)代入式(19.6.4)中得：

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{22} - \frac{\mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11} + 40} = \frac{\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - \mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12} + \mathbf{h}_{22}40}{\mathbf{h}_{11} + 40}$$

因此：

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{1}{\mathbf{I}_2} = \frac{\mathbf{h}_{11} + 40}{\mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - \mathbf{h}_{21}\mathbf{h}_{12} + \mathbf{h}_{22}40}$$

代入 h 参数的值，可得：

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{1000 + 40}{10^3 \times 200 \times 10^{-6} + 20 + 40 \times 200 \times 10^{-6}} = \frac{1040}{20.21} = 51.46(\Omega)$$

为了求出 \mathbf{V}_{th} ，需确定图 19-26b 所示开路电压 \mathbf{V}_2 。在输入端，有：

$$-60 + 40\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_1 = 60 - 40\mathbf{I}_1 \quad (19.6.5)$$

在输出端，有：

$$\mathbf{I}_2 = 0 \quad (19.6.6)$$

将式(19.6.5)和(19.6.6)代入式(19.6.1)和(19.6.2)中，可以得到：

$$60 - 40\mathbf{I}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$

即

$$60 = (\mathbf{h}_{11} + 40)\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2 \quad (19.6.7)$$

且

$$0 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{I}_1 = -\frac{\mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2}{\mathbf{h}_{21}} \quad (19.6.8)$$

将式(19.6.8)代入式(19.6.7)中得到：

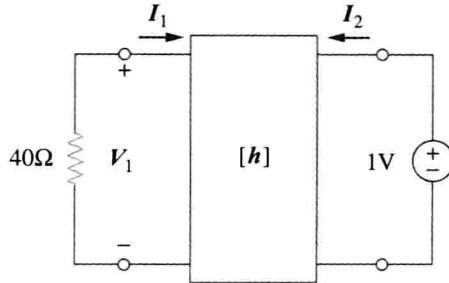
$$60 = \left[-(\mathbf{h}_{11} + 40) \frac{\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}} + \mathbf{h}_{12} \right] \mathbf{V}_2$$

即

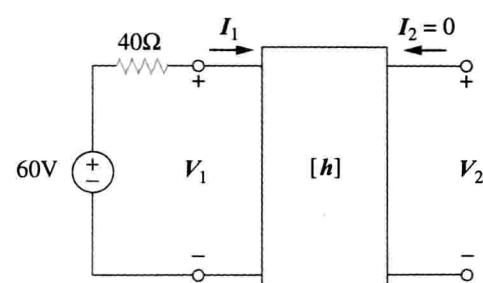
$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_2 = \frac{60}{-(\mathbf{h}_{11} + 40)\mathbf{h}_{22}/\mathbf{h}_{21} + \mathbf{h}_{12}} = \frac{60\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{12}\mathbf{h}_{21} - \mathbf{h}_{11}\mathbf{h}_{22} - 40\mathbf{h}_{22}}$$

把 h 参数的值代入，得：

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = \frac{60 \times 10}{-20.21} = -29.69(\text{V})$$



a) 求解 Z_{th}



b) 求解 V_{th}

图 19-26 例 19-6 图

练习 19-6 求图 19-27 所示电路的输入阻抗。

答案：1.6667 kΩ

例 19-7 求图 19-28 所示电路 s 域的 g 参数。

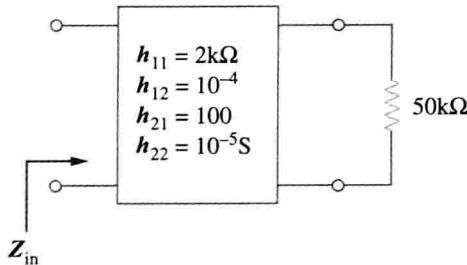


图 19-27 练习 19-6 图

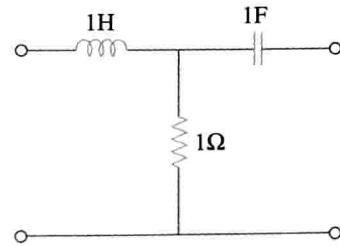


图 19-28 例 18-7 图

解：在 s 域中：

$$1H \Rightarrow sL = s, \quad 1F \Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{1}{s}$$

为了确定 g_{11} 和 g_{21} ，需将输出端开路，并且在输入端连接电压源 \mathbf{V}_1 。如图 19-29a 所示，由图可知：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{s+1}$$

即

$$\mathbf{g}_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{s+1}$$

根据分压定理可得：

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{s+1} \mathbf{V}_1$$

即

$$\mathbf{g}_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{1}{s+1}$$

为了确定 \mathbf{g}_{12} 和 \mathbf{g}_{22} ，需将输入端短路，并且在输出端连接一个电流源 \mathbf{I}_2 。如图 19-29b 所示，由图可知：

$$\mathbf{I}_1 = -\frac{1}{s+1} \mathbf{I}_2$$

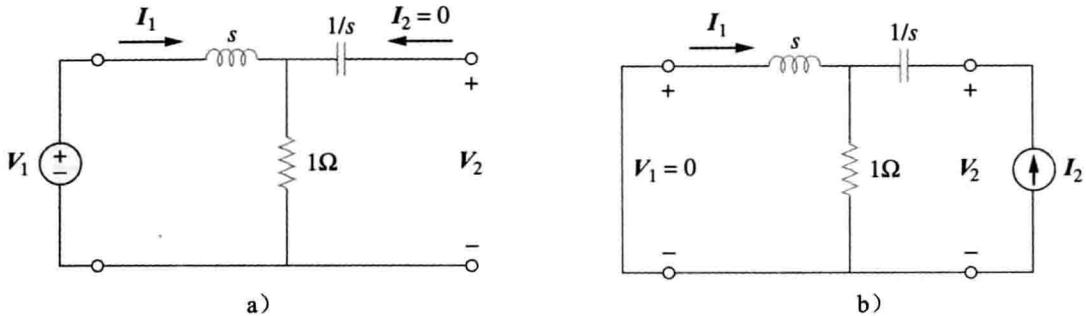


图 19-29 求解图 19-28 所示电路 s 域的 g 参数

即

$$\mathbf{g}_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = -\frac{1}{s+1}$$

且

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_2 \left(\frac{1}{s} + s \parallel 1 \right)$$

即

$$\mathbf{g}_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{1}{s} + \frac{s}{s+1} = \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)}$$

因此：

$$[\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s^2 + s + 1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

练习 19-7 求图 19-30 所示梯形网络中 s 域的 g 参数。

$$\text{答案: } [\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+3s+1} & -\frac{1}{s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^2+3s+1} & \frac{s(s+2)}{s^2+3s+1} \end{bmatrix}$$

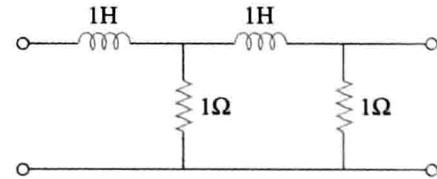


图 19-30 练习 19-7 图

19.5 传输参数

对于端子电压和电流，哪个作为独立变量或哪个作为受控变量并没有限制，所以，可以产生很多组不同的参数。其中一组参数表示了输入端口变量和输出端口变量之间关系，因此：

$$\boxed{\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 - \mathbf{B}\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 - \mathbf{D}\mathbf{I}_2} \quad (19.22)$$

即

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}} \quad (19.23)$$

式(19.22)和式(19.23)给出了输入变量(\mathbf{V}_1 和 \mathbf{I}_1)和输出变量(\mathbf{V}_2 和 $-\mathbf{I}_2$)之间的关系。注意，在计算传输参数时，用的是 $-\mathbf{I}_2$ 而不是 \mathbf{I}_2 ，因为电流是流出网络的，如图 19-31 所示，与图 19-1b 所示的流入网络的电流方向相反。这种方向的规定是符合常理的，如果将两个二端口网络级联(输出端到输入端)，通常认为 \mathbf{I}_2 是从二端口网络流出的。同时，在电力工业中，认为 \mathbf{I}_2 从双口网络流出也是合理的。

式(19.22)和式(19.23)中的二端口参数提供了电路如何从电源向负载传输电压和电流的一种度量方法。因为这种参数表达的是接收端变量(\mathbf{V}_2 和 $-\mathbf{I}_2$)与发送端变量(\mathbf{V}_1 和 \mathbf{I}_1)之间的关系，所以它们在传输线(如电缆、光缆等)分析中非常有用。因此，通常称其为传输参数(transmission parameter)，或者称为 $ABCD$ 参数或 T 参数。传输参数可以用在电话系统、微波网络和雷达系统的设计中。

传输参数可以通过下式确定：

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{I}_2=0}, \quad \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2} \Big|_{\mathbf{I}_2=0}, \quad \mathbf{D} = -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} \Big|_{\mathbf{V}_2=0}} \quad (19.24)$$

因此，传输参数分别为：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{开路电压比} & \mathbf{B} &= \text{负短路转移阻抗} \\ \mathbf{C} &= \text{开路转移导纳} & \mathbf{D} &= \text{负短路电流比} \end{aligned} \quad (19.25)$$

参数 \mathbf{A} 和 \mathbf{D} 没有量纲，参数 \mathbf{B} 的单位为欧姆，参数 \mathbf{C} 的单位为西门子。因为传输参数提供了输入变量和输出变量的直接关系，因此在级联网络的分析中非常有用。

本节要介绍的二端口网络的最后一组参数是将输入端的变量作为自变量，将输出端的变量作为因变量，其方程为：

$$\boxed{\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}\mathbf{V}_1 - \mathbf{b}\mathbf{I}_1, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{c}\mathbf{V}_1 - \mathbf{d}\mathbf{I}_1} \quad (19.26)$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix} \quad (19.27)$$

参数 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 称为反向传输(inverse transmission)参数，或者称为 t 参数(t parameter)。其定义如下：

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{I}_1=0}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \Big|_{\mathbf{I}_1=0}, \quad \mathbf{d} = -\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \Big|_{\mathbf{V}_1=0}} \quad (19.28)$$

由式(19.28)可得，这组参数分别为：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \text{开路电压增益} & \mathbf{b} &= \text{负短路转移阻抗} \\ \mathbf{c} &= \text{开路转移导纳} & \mathbf{d} &= \text{负短路电流增益} \end{aligned} \quad (19.29)$$

参数 \mathbf{a} 和 \mathbf{d} 没有量纲，参数 \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 的单位分别是欧姆和西门子。

如果二端口网络的传输参数或反向传输参数满足：

$$\boxed{\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1, \quad \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1} \quad (19.30)$$

则该网络为互易网络。

这组关系式的证明方法与 z 参数转移阻抗的证明方法相同。另外，稍后还可以利用表 19-1，从互易网络 $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$ 的性质来推导式(19.30)。

例 19-8 求图 19-32 所示二端口网络的传输参数。

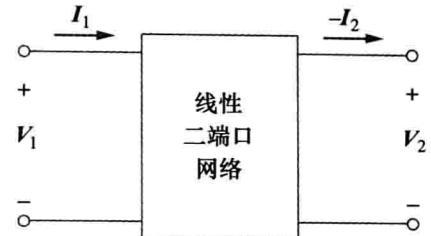


图 19-31 终端变量用来定义 $ABCD$ 参数

解：为了确定参数 A 和 C ，需将输出端开路，如图 19-33a 所示，即 $I_2=0$ ，并在输入端加上电压源 V_1 ，则有：

$$V_1 = (10 + 20)I_1 = 30I_1, \quad V_2 = 20I_1 - 3I_1 = 17I_1$$

因此：

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{30I_1}{17I_1} = 1.765, \quad C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{17I_1} = 0.0588(S)$$

为了确定参数 B 和 D ，需将输出端口短路，使得 $V_2=0$ ，

如图 19-33b 所示，并且在输入端加上电压源 V_1 。在图 19-33b 电路的节点 a 处，由 KCL 可以得到：

$$\frac{V_1 - V_a}{10} - \frac{V_a}{20} + I_2 = 0 \quad (19.8.1)$$

由 $V_a = 3I_1$ 和 $I_1 = (V_1 - V_a)/10$ ，合并得到：

$$V_a = 3I_1 \quad V_1 = 13I_1 \quad (19.8.2)$$

把式(19.8.2)代入式(19.8.1)，并用 I_1 替换第一项，得到：

$$I_1 - \frac{3I_1}{20} + I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{17}{20}I_1 = -I_2$$

因此：

$$D = -\frac{I_1}{I_2} = \frac{20}{17} = 1.176, \quad B = -\frac{V_1}{I_2} = \frac{-13I_1}{(-17/20)I_1} = 15.29(\Omega)$$

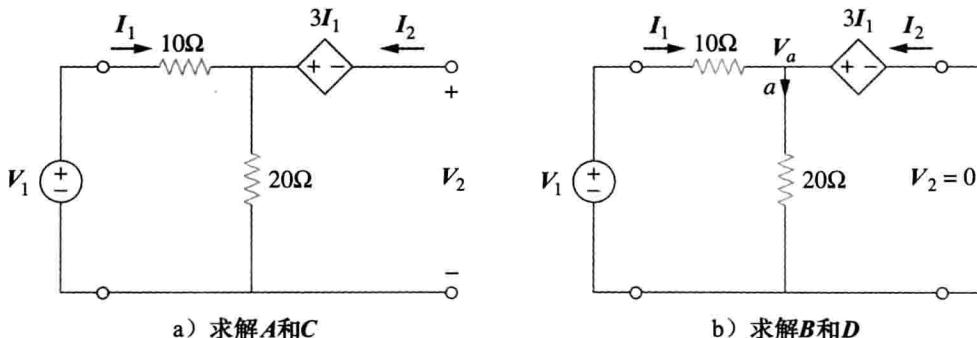


图 19-33 例 19-8 图

练习 19-8 求图 19-16 所示电路(参见练习 19-3)的传输参数。

答案： $A=1.5$, $B=11\Omega$, $C=250mS$, $D=2.5$

例 19-9 图 19-34 中的二端口网络的 $ABCD$ 参数是：

$$\begin{bmatrix} 4 & 20\Omega \\ 0.1S & 2 \end{bmatrix}$$

为了实现最大功率传输，将一可变负载与输出端口相连接，试求 R_L 和传输的最大的功率。

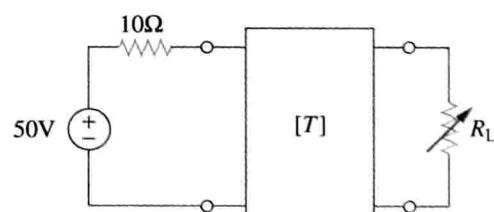


图 19-34 例 19-9 图

解：本题需求负载端或输出端的戴维南等效参数(Z_{th} 和 V_{th})。下面利用图 19-35a 所示电路来求 Z_{th} ，目的是得到 $Z_{th}=V_2/I_2$ 。把已知参数 $ABCD$ 代入式(19.22)，可以得到：

$$V_1 = 4V_2 - 20I_2 \quad (19.9.1)$$

$$I_1 = 0.1V_2 - 2I_2 \quad (19.9.2)$$

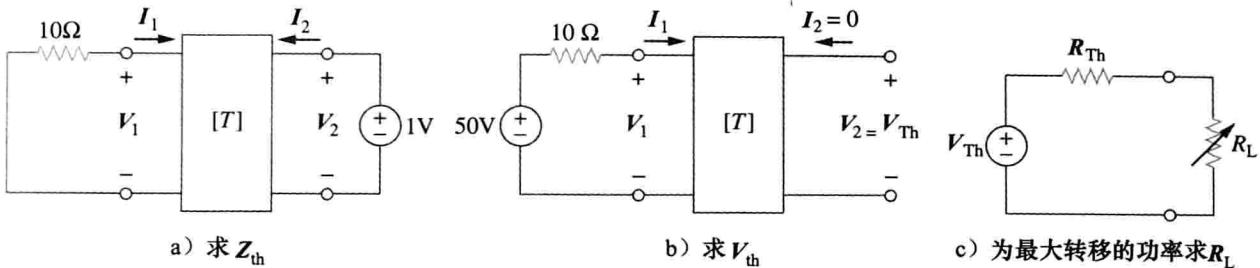


图 19-35 例 19-9 的求解

在输入端口, $V_1 = -10I_1$, 将其代入式(19.9.1)可以得到:

$$-10I_1 = 4V_2 - 20I_2$$

即

$$I_1 = -0.4V_2 + 2I_2 \quad (19.9.3)$$

令式(19.9.2)和(19.9.3)的右边相等, 可以得到:

$$0.1V_2 - 2I_2 = -0.4V_2 + 2I_2 \Rightarrow 0.5V_2 = 4I_2$$

因此:

$$Z_{th} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{4}{0.5} = 8(\Omega)$$

下面利用图 19-35b 所示电路求解 V_{th} 。在输出端处, $I_2 = 0$, 而在输入端处, $V_1 = 50 - 10I_1$ 。把这些代入式(19.9.1)和(19.9.2)中, 得到:

$$50 - 10I_1 = 4V_2 \quad (19.9.4)$$

$$I_1 = 0.1V_2 \quad (19.9.5)$$

把式(19.9.5)代入(19.9.4)中, 得到:

$$50 - V_2 = 4V_2 \Rightarrow V_2 = 10$$

因此:

$$V_{th} = V_2 = 10(V)$$

戴维南等效电路图 19-35c 所示, 实现最大功率传输时, 有:

$$R_L = Z_{th} = 8\Omega$$

由式(4-24)可知, 传输的最大功率为:

$$P = I^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{2R_L}\right)^2 R_L = \frac{V_{th}^2}{4R_L} = \frac{100}{4 \times 8} = 3.125(W)$$

练习 19-9 图 19-36 所示二端口网络传输参数为:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10\Omega \\ 0.4S & 1 \end{bmatrix}$$

求 I_1 和 I_2 。

答案: 1A, -0.2A

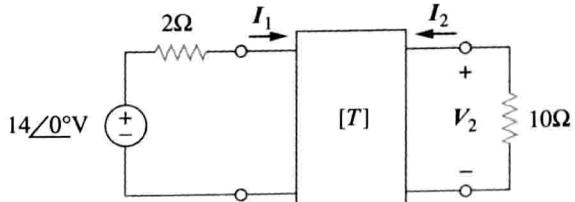


图 19-36 练习 19-9 图

† 19.6 六组参数之间的关系

由于前几节介绍的六组参数描述的是同一二端口网络的相同输入端和输出端变量之间的关系, 所以, 它们彼此之间是可以相互换算的。如果两组参数存在, 则可以建立这两组参数之间的关系。下面通过两个例子说明这一过程。

已知 z 参数, 要确定 y 参数, 由式(19.2)可以得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{z}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (19.31)$$

即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{z}]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (19.32)$$

同样，由式(19.9)可以得到：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{y}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (19.33)$$

比较式(19.32)和(19.33)，可知：

$$[\mathbf{y}] = [\mathbf{z}]^{-1} \quad (19.34)$$

矩阵 $[\mathbf{z}]$ 的伴随矩阵是：

$$\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

其行列式是：

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

代入式(19.34)，可以得到：

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_z} \quad (19.35)$$

令对应项相等，可得：

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}, \quad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z}, \quad y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z}, \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z} \quad (19.36)$$

第二个例子是已知 z 参数，要确定 h 参数。由式(19.1)可得：

$$\mathbf{V}_1 = z_{11}\mathbf{I}_1 + z_{12}\mathbf{I}_2 \quad (19.37a)$$

$$\mathbf{V}_2 = z_{21}\mathbf{I}_1 + z_{22}\mathbf{I}_2 \quad (19.37b)$$

由式(19.37b)得到 \mathbf{I}_2 为：

$$\mathbf{I}_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22}}\mathbf{I}_1 + \frac{1}{z_{22}}\mathbf{V}_2 \quad (19.38)$$

将其代入式(19.37a)得到：

$$\mathbf{V}_1 = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{22}}\mathbf{I}_1 + \frac{z_{12}}{z_{22}}\mathbf{V}_2 \quad (19.39)$$

将式(19.38)和(19.39)表示成矩阵形式，即：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad (19.40)$$

由式(19.15)可知：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

将其与式(19.40)相比较，可以得到：

$$h_{11} = \frac{\Delta_z}{z_{22}}, \quad h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}}, \quad h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}}, \quad h_{22} = \frac{1}{z_{22}} \quad (19.41)$$

表19-1提供了六组二端口参数之间的转换公式。已知其中一组参数，可以利用表19-1求出其他参数。例如，已知 T 参数，可以利用第三行第五列公式来求相应的 h 参数。

表 19-1 二端口参数之间的转换

	z	y		h		g		T		t		
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta_t}{c}$	$\frac{a}{c}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta_t}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{\Delta_t}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$	$\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta_t}{d}$	$-\frac{b}{d}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta_t}$	$\frac{b}{\Delta_t}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta_t}$	$\frac{a}{\Delta_t}$
t	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$	a	b
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$	c	d

注: $\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$, $\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$, $\Delta_T = AD - BC$ 。

$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$, $\Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$, $\Delta_t = ad - bc$ 。

对于互易网络而言, $z_{21} = z_{12}$, 则同样可以借助该表确定由其他参数表示的互易网络条件。另外, 还可以证明:

$$[g] = [h]^{-1} \quad (19.42)$$

但

$$[t] \neq [T]^{-1} \quad (19.43)$$

例 19-10 如果 T 参数如下, 求该二端口网络的 $[z]$ 和 $[g]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & 1.5\Omega \\ 2S & 4 \end{bmatrix}$$

解: 如果 $A=10$, $B=1.5$, $C=2$, $D=4$, 则矩阵行列式的值为:

$$\Delta_T = AD - BC = 40 - 3 = 37$$

从表 19-1 可得:

$$z_{11} = \frac{A}{C} = \frac{10}{2} = 5, \quad z_{12} = \frac{\Delta_T}{C} = \frac{37}{2} = 18.5$$

$$z_{21} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2} = 0.5, \quad z_{22} = \frac{D}{C} = \frac{4}{2} = 2$$

$$g_{11} = \frac{C}{A} = \frac{2}{10} = 0.2, \quad g_{12} = -\frac{\Delta_T}{A} = -\frac{37}{10} = -3.7$$

$$g_{21} = \frac{1}{A} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad g_{22} = \frac{B}{A} = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

因此:

$$[z] = \begin{bmatrix} 5 & 18.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \Omega, [g] = \begin{bmatrix} 0.2S & -3.7 \\ 0.1 & 0.15 \Omega \end{bmatrix}$$

练习 19-10 已知某二端口网络的 z 参数如下，求该网络的 $[y]$ 和 $[T]$ ：

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Omega$$

$$\text{答案: } [y] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix} S, [T] = \begin{bmatrix} 1.5 & 5\Omega \\ 0.25S & 1.5 \end{bmatrix}$$

例 19-11 求图 19-37 所示运放电路的 y 参数，并证明该电路没有 z 参数。

解：因为运算放大器的输入端没有电流流入，则 $I_1 = 0$ ，利用 V_1 和 V_2 表示为：

$$I_1 = 0V_1 + 0V_2 \quad (19.11.1)$$

将上式与式(19.8)比较得出：

$$y_{11} = 0 = y_{12}$$

另外：

$$V_2 = R_3 I_2 + I_o (R_1 + R_2)$$

图 19-37 例 19-11 图

其中， I_o 是流过 R_1 和 R_2 的电流。由于 $I_o = V_1 / R_1$ ，因此：

$$V_2 = R_3 I_2 + \frac{V_1 (R_1 + R_2)}{R_1}$$

也可以写成：

$$I_2 = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3} V_1 + \frac{V_2}{R_3}$$

将其和式(19.8)比较得出：

$$y_{21} = -\frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_3}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_3}$$

矩阵 $[y]$ 的行列式为：

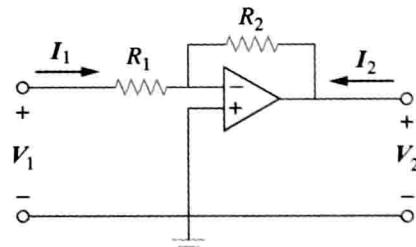
$$\Delta_y = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21} = 0$$

因为矩阵 $[y]$ 不存在逆矩阵，所以由式(19.34)可知，矩阵 $[z]$ 不存在，由于运算放大器是有源器件，因而该电路不是互易的。

练习 19-11 求图 19-38 所示运放电路的 z 参数，并证明该电路不存在 y 参数。

$$\text{答案: } [z] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $[z]^{-1}$ 不存在，因此 $[y]$ 也不存在。



19.7 二端口网络的互联

图 19-38 练习 19-11 图

为了便于分析和设计，大型的复杂网络可以划分为若干子网络，并可以将这些子网络建模成二端口网络，相互连接后构成原来的网络。因此，二端口网络可以看做是组成复杂网络的基本模块。二端口网络的相互连接可以是串联、并联或者级联。虽然相互连接的二端口网络可以是上述六组参数中任一组描述，但是，其中某一种参数可能具有明显的优势。例如，当网络是相互串联的，各个网络的 z 参数相加即可得到较大网络的 z 参数。当网络是相互并联的，各个网络的 y 参数相加即可得到较大网络的 y 参数。当网络是级联的，各传输参数相乘即可得到级联网络的传输参数。

相互串联的二端口网络如图19-39所示。之所以认为该网络是串联的，是因为两个网络的输入电流相同，端口电压相加。另外，每个网络有一个公共参考点，对于串联电路而言，电路的两个公共参考点是连接在一起的。对于网络 N_a ，有：

$$\begin{aligned} V_{1a} &= z_{11a}I_{1a} + z_{12a}I_{2a} \\ V_{2a} &= z_{21a}I_{1a} + z_{22a}I_{2a} \end{aligned} \quad (19.44)$$

对于网络 N_b ，有：

$$\begin{aligned} V_{1b} &= z_{11b}I_{1b} + z_{12b}I_{2b} \\ V_{2b} &= z_{21b}I_{1b} + z_{22b}I_{2b} \end{aligned} \quad (19.45)$$

由图19-39可以得到：

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}, \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b} \quad (19.46)$$

并且：

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{1a} + V_{1b} = (z_{11a} + z_{11b})I_1 + (z_{12a} + z_{12b})I_2 \\ V_2 &= V_{2a} + V_{2b} = (z_{21a} + z_{21b})I_1 + (z_{22a} + z_{22b})I_2 \end{aligned} \quad (19.47)$$

因此，整个网络的 z 参数为：

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \quad (19.48)$$

即

$$[z] = [z_a] + [z_b] \quad (19.49)$$

上式表明，整个网络的 z 参数为单个网络 z 参数之和，该结论也可以推广到 n 个网络的串联。如果采用 $[h]$ 模型描述的两个双口网络相互串联，则可以利用表19-1将 h 参数转换为 z 参数，之后利用式(19.49)得到串联网络的 z 参数，最后再利用表19-1把结果转换回 h 参数。

如果两个二端口网络的端口电压相等，且较大网络的端口电流为各个端口电流之和，则这两个二端口网络是并联的。另外，每个电路都必须有一个公共参考点，当两个网络相互连接起来时，必须将各自的公共参考点连接在一起，两个二端口网络的并联连接如图19-40所示。对于两个网络而言，有：

$$\begin{aligned} I_{1a} &= y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a} \\ I_{2a} &= y_{21a}V_{1a} + y_{22a}V_{2a} \end{aligned} \quad (19.50)$$

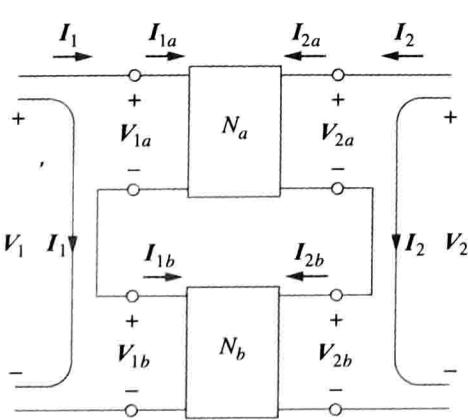


图19-39 两个二端口网络的串联连接

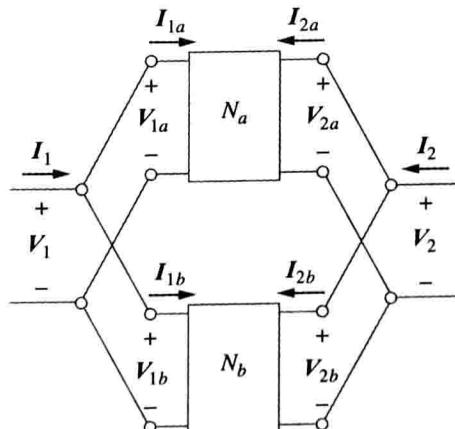


图19-40 两个二端口网络的并联连接

并且：

$$\begin{aligned} I_{1b} &= y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b} \\ I_{2a} &= y_{21b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b} \end{aligned} \quad (19.51)$$

由图19-40得：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{1b}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2a} = \mathbf{V}_{2b} \quad (19.52a)$$

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1a} + \mathbf{I}_{1b}, \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2a} + \mathbf{I}_{2b} \quad (19.52b)$$

将式(19.50)和(19.51)代入式(19.52a)中, 得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (\mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b})\mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b})\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 &= (\mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b})\mathbf{V}_1 + (\mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b})\mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (19.53)$$

因此, 整个网络的 y 参数是:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11a} + \mathbf{y}_{11b} & \mathbf{y}_{12a} + \mathbf{y}_{12b} \\ \mathbf{y}_{21a} + \mathbf{y}_{21b} & \mathbf{y}_{22a} + \mathbf{y}_{22b} \end{bmatrix} \quad (19.54)$$

即

$$[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_a] + [\mathbf{y}_b] \quad (19.55)$$

上式表明, 整个网络的 y 参数是各个网络 y 参数之和。该结论可以扩展到 n 个二端口网络的并联。

当一个网络的输出端是另一个网络的输入端时, 则称这两个二端口网络是级联的。相互级联的两个二端口网络如图 19-41 所示。对于这两个网络而言, 有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1a} \\ \mathbf{I}_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2a} \\ -\mathbf{I}_{2a} \end{bmatrix} \quad (19.56)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1b} \\ \mathbf{I}_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2b} \\ -\mathbf{I}_{2b} \end{bmatrix} \quad (19.57)$$

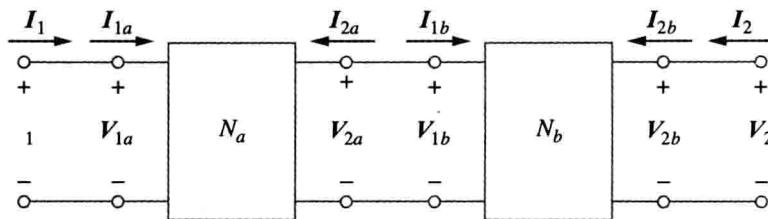


图 19-41 两个二端口网络的级联连接

由图 19-41 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1a} \\ \mathbf{I}_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2a} \\ -\mathbf{I}_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1b} \\ \mathbf{I}_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2b} \\ -\mathbf{I}_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (19.58)$$

把上述各式代入式(19.56)和(19.57)中, 得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (19.59)$$

因此, 整个网络的传输参数是各个传输参数的乘积:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{C}_b & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \quad (19.60)$$

即

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_a][\mathbf{T}_b] \quad (19.61)$$

正是因为这个性质, 使得网络的传输参数非常有用。注意, 矩阵的相乘必须同二端口网络 N_a 与 N_b 的级联次序相一致。

例 19-12 计算图 19-42 所示电路的 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ 。

解: 本例电路可以看做是两个二端口网络的串联。对于网络 N_b 而言, 其 z 参数为:

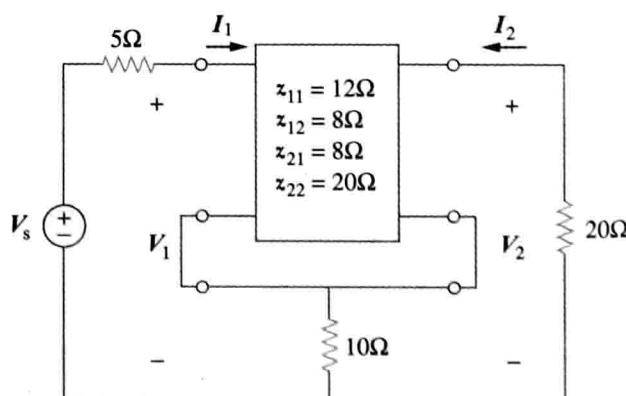


图 19-42 例 19-12 图

$$z_{12b} = z_{21b} = 10 = z_{11b} = z_{22b}$$

因此：

$$[z] = [z_a] + [z_b] = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$$

所以：

$$\mathbf{V}_1 = z_{11}\mathbf{I}_1 + z_{12}\mathbf{I}_2 = 22\mathbf{I}_1 + 18\mathbf{I}_2 \quad (19.12.1)$$

$$\mathbf{V}_2 = z_{21}\mathbf{I}_1 + z_{22}\mathbf{I}_2 = 18\mathbf{I}_1 + 30\mathbf{I}_2 \quad (19.12.2)$$

另外，在输入端口处有：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_s - 5\mathbf{I}_1 \quad (19.12.3)$$

在输出端口处有：

$$\mathbf{V}_2 = -20\mathbf{I}_2 \Rightarrow \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{V}_2}{20} \quad (19.12.4)$$

将式(19.12.3)和(19.12.4)代入式(19.12.1)，可以得到：

$$\mathbf{V}_s - 5\mathbf{I}_1 = 22\mathbf{I}_1 - \frac{18}{20}\mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{V}_s = 27\mathbf{I}_1 - 0.9\mathbf{V}_2 \quad (19.12.5)$$

再将式(19.12.4)代入式(19.12.2)得到：

$$\mathbf{V}_2 = 18\mathbf{I}_1 - \frac{30}{20}\mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{I}_1 = \frac{2.5}{18}\mathbf{V}_2 \quad (19.12.6)$$

将式(19.12.6)代入式(19.12.5)，可以得到：

$$\mathbf{V}_s = 27 \times \frac{2.5}{18}\mathbf{V}_2 - 0.9\mathbf{V}_2 = 2.85\mathbf{V}_2$$

因此：

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{2.85} = 0.3509$$

练习 19-12 求图 19-43 所示电路的 $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_s$ 。

答案：0.6799 $\angle -29.05^\circ$

例 19-13 求图 19-44 所示二端口网络的 y 参数。

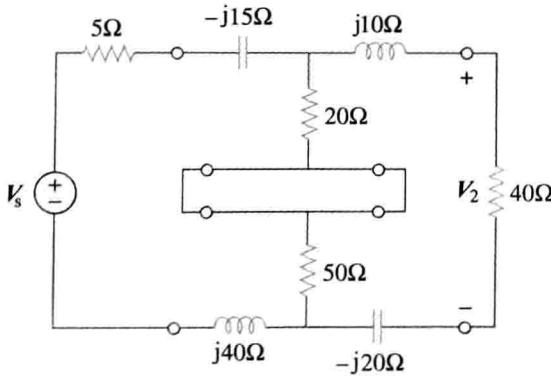


图 19-43 练习 19-12 图

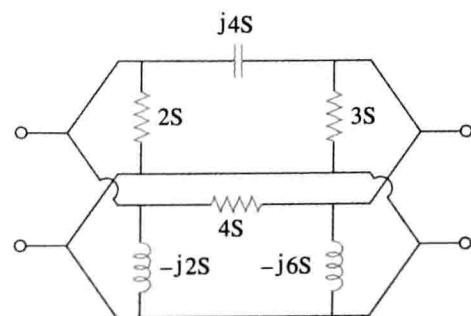


图 19-44 例 19-13 图

解：将上图中上面的网络称为 N_a ，下面的网络称为 N_b ，则这两个网络是并联连接的。将 N_a 和 N_b 电路与图 19-13a 进行比较，可以得到：

$$y_{12a} = -j4 = y_{21a}, \quad y_{11a} = 2 + j4, \quad y_{22a} = 3 + j4$$

即

$$[y_a] = \begin{bmatrix} 2 + j4 & -j4 \\ -j4 & 3 + j4 \end{bmatrix} S$$

且

$$y_{12b} = -4 = y_{21b}, \quad y_{11b} = 4 - j2, \quad y_{22b} = 4 - j6$$

即

$$[\mathbf{y}_b] = \begin{bmatrix} 4 - j2 & -4 \\ -4 & 4 - j6 \end{bmatrix} S$$

于是，整个网络的 y 参数为：

$$[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}_a] + [\mathbf{y}_b] = \begin{bmatrix} 6 + j2 & -4 - j4 \\ -4 - j4 & 7 - j2 \end{bmatrix} S$$

练习 19-13 求图 19-45 所示网络的 y 参数。

答案： $\begin{bmatrix} 27 - j15 & -25 + j10 \\ -25 + j10 & 27 - j5 \end{bmatrix} S$

例 19-14 求图 19-46 所示电路的传输参数。

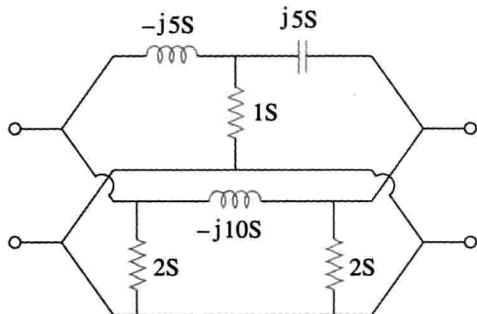


图 19-45 练习 19-13 图

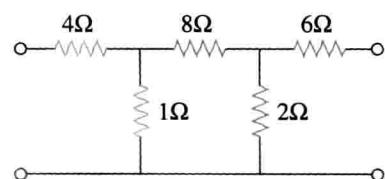
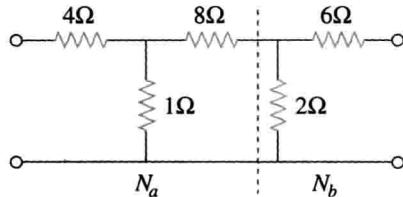


图 19-46 例 19-14 图

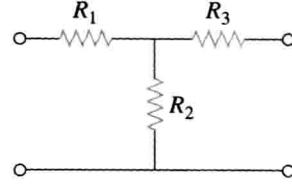
解：可以将图 19-46 所示电路看成是两个 T 形网络的级联，如图 19-47a 所示。可以证明图 19-47b 所示的 T 形网络的传输参数为（参见 19-42b）：

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \quad B = R_3 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_2}$$

$$C = \frac{1}{R_2}, \quad D = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$



a) 将图 19-46 分割成两个二端口网络



b) 通用 T 形二端口网络

图 19-47 例 19-14 图

将其应用于图 19-47a 所示的级联网络 N_a 和 N_b 中，得到：

$$A_a = 1 + 4 = 5, \quad B_a = 8 + 4 \times 9 = 44 (\Omega)$$

$$C_a = 1S, \quad D_a = 1 + 8 = 9$$

或者写为矩阵形式：

$$[\mathbf{T}_a] = \begin{bmatrix} 5 & 44\Omega \\ 1S & 9 \end{bmatrix}$$

同理可得：

$$A_b = 1, \quad B_b = 6\Omega, \quad C_b = 0.5S, \quad D_b = 1 + \frac{6}{2} = 4$$

即

$$[\mathbf{T}_b] = \begin{bmatrix} 1 & 6\Omega \\ 0.5S & 4 \end{bmatrix}$$

因此,对于图19-46的整个网络, T 参数为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}] &= [\mathbf{T}_a][\mathbf{T}_b] = \begin{bmatrix} 5 & 44 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \times 1 + 44 \times 0.5 & 5 \times 6 + 44 \times 4 \\ 1 \times 1 + 9 \times 0.5 & 1 \times 6 + 9 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 206\Omega \\ 5.5S & 42 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意:

$$\Delta_{T_a} = \Delta_{T_b} = \Delta_T = 1$$

表明该网络是互易的。

练习 19-14 求图19-48所示电路的 $ABCD$ 参数。

$$\text{答案: } [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 6.3 & 472\Omega \\ 0.425S & 32 \end{bmatrix}$$

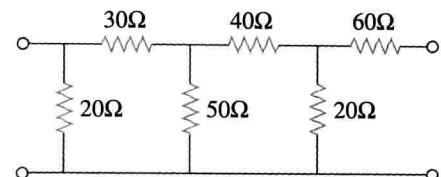


图 19-48 练习 19-14 图

19.8 基于 PSpice 的二端口网络参数计算

当二端口网络比较复杂时,手工计算二端口网络参数就会变得较为困难。这种情况下,可以利用 PSpice 来解决。如果是纯电阻电路,则可以用 PSpice 的直流分析进行计算;否则,需在指定频率处利用 PSpice 进行交流分析。利用 PSpice 计算二端口网络某个特定参数的关键是:牢记参数的定义,将适当的端口变量设置为 1A 或 1V 的电源,同时将其他必要的端口设置为开路或短路。下面通过两个例子说明上述过程。

例 19-15 求图 19-49 所示网络的 h 参数。

解:由式(19.16)可得:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0}, \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0}$$

上式表明,通过设置 $V_2=0$,可以确定 h_{11} 和 h_{21} ,同时设定 $I_1=1A$,则 h_{11} 为 $V_1/1$, h_{21} 变为 $I_2/1$ 。据此可以画出

图 19-50a 所示的电路原理图,图中插入一个 1A 的直流电流源 IDC,使得 $I_1=1A$,插入两个伪元件 VPOINT 和 IPROBE 分别用于显示 V_1 和 I_2 。保存原理图之后,选择 Analysis/Simulate 运行 PSpice 程序,并观测伪元件的显示值,得到:

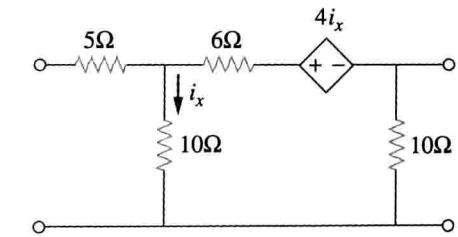
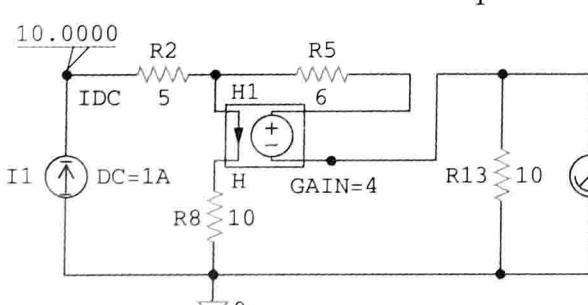
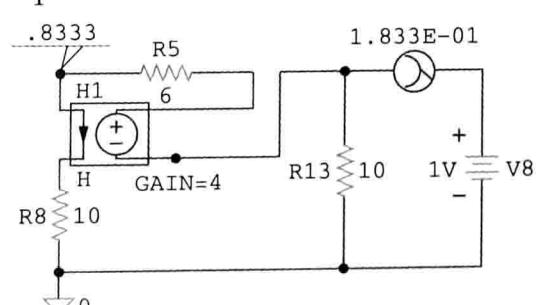


图 19-49 例 19-15 图



a) 计算 h_{11} 和 h_{21}



b) 计算 h_{12} 和 h_{22}

图 19-50 求解例 19-15

同理,由式(19.16)可得:

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0}, \quad h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0}$$

由此可见,将电路的输入端口开路($I_1=0$),可以确定 h_{12} 和 h_{22} 。令 $V_2=1V$, h_{12} 为 $V_1/1$,同

时 \mathbf{h}_{22} 变为 $\mathbf{I}_2/1$ 。因此，可以利用图 19-50b 所示的电路原理图，图中在输出端口处插入 1V 直流电压源 VDC，作为 $\mathbf{V}_2=1\text{V}$ 。插入两个伪元件 VIEWPOINT 和 IPROBE 分别用于显示 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{I}_2 的值。(注意，在图 19-50b 所示电路中，输入端口是开路的，而这是 PSpice 所不允许的，因此可将 5Ω 电阻器忽略。如果用一个非常大的电阻器，比如 $10\text{M}\Omega$ 电阻器取代开路，则可以包括这个 5Ω 电阻器。)对该电路原理图进行仿真后，即可得到图 19-50b 所示伪元件显示的值。因此：

$$\mathbf{h}_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{1} = 0.8333, \quad \mathbf{h}_{22} = \frac{\mathbf{I}_2}{1} = 0.1833(\text{S})$$

 练习 19-15 利用 PSpice 确定图 19-51 所示网络的 h 参数。

答案： $\mathbf{h}_{11}=4.238\Omega$, $\mathbf{h}_{21}=-0.6190$, $\mathbf{h}_{12}=-0.7143$, $\mathbf{h}_{22}=-0.1429\text{S}$

例 19-16 求图 19-52 中电路在 $\omega=10^6\text{rad/s}$ 时的 z 参数。

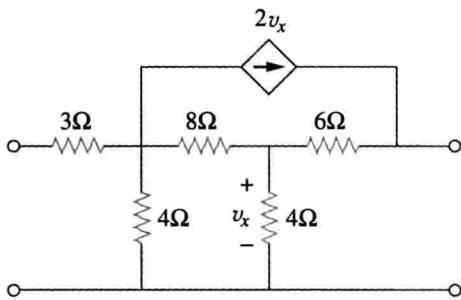


图 19-51 练习 19-15 图

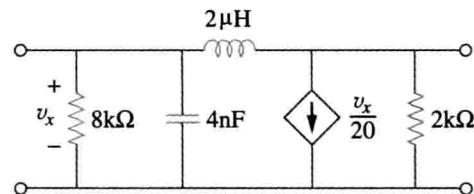


图 19-52 例 19-16 图

解：因为图 19-49 所示电路为纯电阻电路，所以在例 19-15 中采用直流分析。本例中因为 L 和 C 与频率有关，所以采用频率为 $f=\omega/2\pi=0.15915\text{MHz}$ 的交流分析。

在式(19.3)中，定义参数 z 为：

$$z_{11} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0}, \quad z_{21} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \right|_{\mathbf{I}_2=0}$$

如果令 $\mathbf{I}_1=1\text{A}$ ，并使输出端断开，即 $\mathbf{I}_2=0$ ，则可得到：

$$z_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{1}, \quad z_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{1}$$

由图 19-53a 所示电路原理图即可确定上述参数。在该电路的输入端口插入一个 1A 交流电流源 IAC，同时插入两个伪元件 VPRINT1 确定 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 。每个 VPRINT1 的属性均设置为 AC=yes, MAG=yes, PHASE=yes，以便打印电压的幅度和相位。运行 Analysis/Set up/AC Sweep 程序，并在 AC Sweep and Noise Analysis 对话框中输入 Total Pts=1, Start Freq=0.1519MEG, Final Freq=0.1519MEG。保存电路原理图后，选择 Analysis/Simulate 对电路进行仿真。由输出文件即可确定 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 。因此：

$$z_{11} = \frac{\mathbf{V}_1}{1} = 19.70 \angle 175.7^\circ (\Omega), \quad z_{21} = \frac{\mathbf{V}_2}{1} = 19.79 \angle 170.2^\circ (\Omega)$$

类似地，由式(19.3)可得：

$$z_{12} = \left. \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0}, \quad z_{22} = \left. \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

表明如果令 $\mathbf{I}_2=1\text{A}$ ，并使输入端开路，则有：

$$z_{12} = \frac{\mathbf{V}_1}{1}, \quad z_{22} = \frac{\mathbf{V}_2}{1}$$

从而得到图 19-53b 所示的电路原理图，该原理图与图 19-53a 所示原理图唯一的区别在于现在的 1A 电流源 IAC 插入电路的输出端。对图 19-53b 所示电路进行仿真，即可由输出文件确定 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 。所以，

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_1} = 19.70 / 175.7^\circ (\Omega), \quad z_{22} = \frac{V_2}{I_1} = 19.56 / 175.7^\circ (\Omega)$$

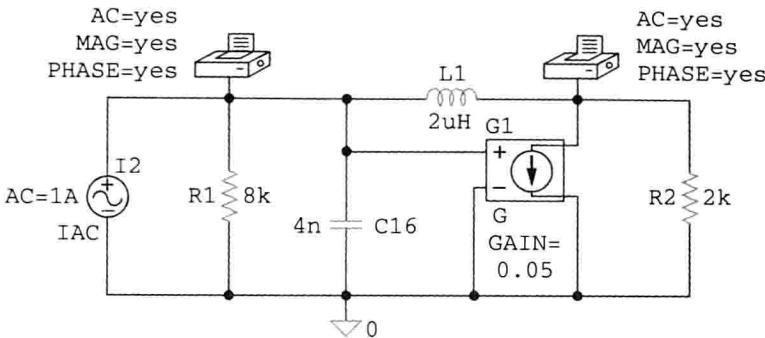
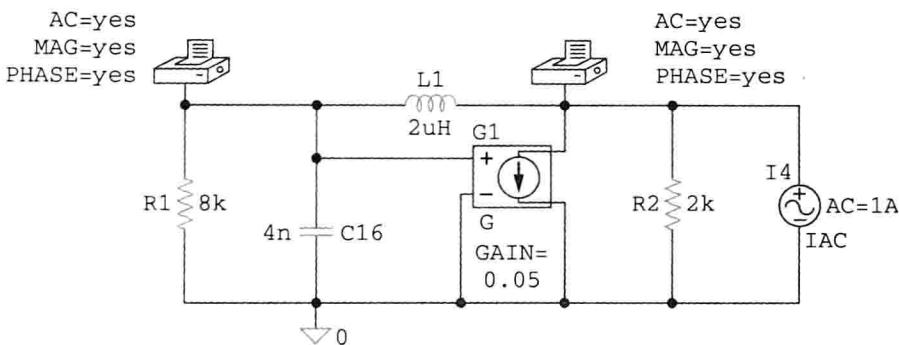
a) 求 z_{11} 和 z_{21} 的电路b) 求 z_{12} 和 z_{22} 的电路

图 19-53 求解例 19-16

练习 19-16 求图 19-54 所示电路在 $f=60\text{Hz}$ 时的 z 参数。

答案: $z_{11} = 3.987 / 175.5^\circ \Omega$, $z_{21} = 0.0175 / -2.65^\circ \Omega$,
 $z_{12} = 0$, $z_{22} = 0.2651 / 91.9^\circ \Omega$

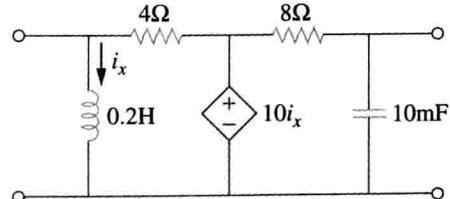


图 19-54 练习 19-16 图

† 19.9 应用实例

前面已经学习了如何利用六组网络参数来描述各类二端口网络的特性。根据大型网络中二端口网络的不同连接方式，某一特定的参数比起其他参数具有明显的优势，正如 19.7 节所述。本节将讨论二端口网络参数的两个重要的应用领域：晶体管电路和梯形网络的综合。

19.9.1 晶体管电路

通常可以采用二端口网络将负载与电路的激励相互隔离。例如，图 19-55 所示的二端口网络可以表示放大器、滤波器、或其他的电路网络。如果二端口表示的是放大器，则容易推导出电压增益 A_v ，电流增益 A_i ，输入阻抗 Z_{in} ，以及输出阻抗 Z_{out} 的表达式，分别定义如下：

$$A_v = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \quad (19.62)$$

$$A_i = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad (19.63)$$

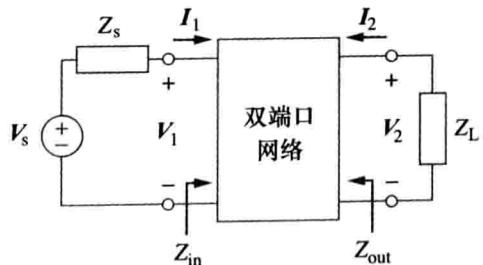


图 19-55 隔离电源和负载的二端口网络

$$Z_{\text{in}} = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \quad (19.64)$$

$$Z_{\text{out}} = \left. \frac{V_2(s)}{I_2(s)} \right|_{V_s=0} \quad (19.65)$$

六组二端口网络参数中任何一组都可以用于推导式(19.62)~(19.65)中的表达式。但是，对于晶体管来说，混合参数(*h*参数)是最有用的，这些参数很容易测量，通常可以从制造商的数据手册或说明书中获得。参数*h*提供了晶体管电路性能的快速估计，可以用于确定晶体管的准确电压增益、输入阻抗及输出阻抗。

晶体管*h*参数的下标具有特定含义，第一个下标字母与*h*参数之间的关系如下：

$$h_i = h_{11}, \quad h_r = h_{12}, \quad h_f = h_{21}, \quad h_o = h_{22} \quad (19.66)$$

下标*i*、*r*、*f*和*o*分别表示输入、反向、前向和输出之意。晶体管*h*参数的第二个下标字母表示晶体管的连接类型：*e*是共发射极(CE)，*c*是共集电极(CC)，*b*是共基极(CB)。本节主要讨论共发射极连接，相关的四个*h*参数分别为：

$$h_{ie} = \text{基极输入阻抗} \quad h_{re} = \text{反向电压反馈比}$$

$$h_{fe} = \text{基极-集电极电流增益} \quad h_{oe} = \text{输出导纳} \quad (19.67)$$

上述参数的计算或测量方法和一般*h*参数的计算或测量方法相同。其典型值为： $h_{ie} = 6\text{k}\Omega$ ， $h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}$ ， $h_{fe} = 200$ ， $h_{oe} = 8\mu\text{S}$ 。记住，这些参数值是在特定条件下测量的表示晶体管交流特性的值。

图19-56给出了共发射极放大器的电路原理图及其等效的混合参数模型。由图可见：

$$V_b = h_{ie}I_b + h_{re}V_c \quad (19.68a)$$

$$I_c = h_{fe}I_b + h_{oe}V_c \quad (19.68b)$$

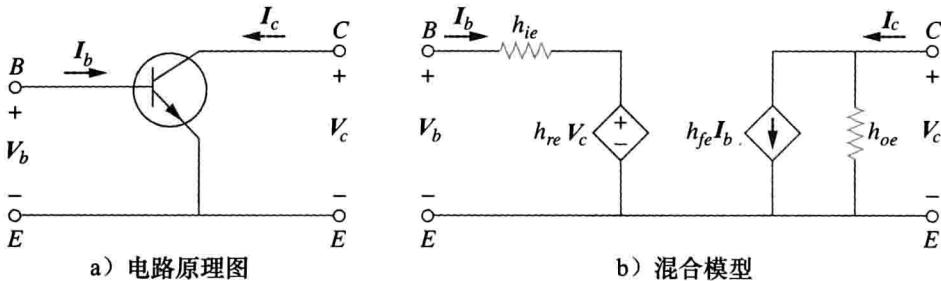


图 19-56 共射极放大器

考虑图19-57所示的与交流电源和负载相连接的晶体管放大器，这是二端口网络嵌入大型网络的一个实例。利用式(19.68)分析该混合等效电路(参见例19-6)，由图19-57可知， $V_c = -R_L I_c$ ，将其代入式(19.68b)得到：

$$I_c = h_{fe}I_b - h_{oe}R_L I_c$$

即

$$(1 + h_{oe}R_L)I_c = h_{fe}I_b \quad (19.69)$$

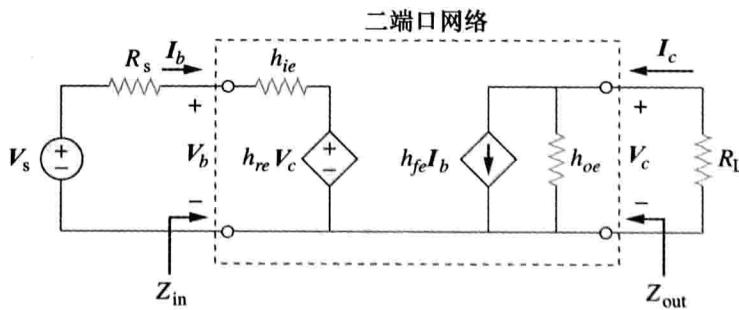


图 19-57 具有电源和负载电阻的晶体管放大器

据此, 可以确定电流增益为:

$$A_i = \frac{\mathbf{I}_c}{\mathbf{I}_b} = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} \quad (19.70)$$

由式(19.68b)和(19.70)可得, 用 \mathbf{V}_c 表示 \mathbf{I}_b 为:

$$\mathbf{I}_c = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} \mathbf{I}_b = h_{fe} \mathbf{I}_b + h_{oe} \mathbf{V}_c$$

即

$$\mathbf{I}_b = \frac{h_{oe} \mathbf{V}_c}{\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} \quad (19.71)$$

把式(19.71)代入式(19.68a)中并除以 \mathbf{V}_c , 得到:

$$\frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{V}_c} = \frac{h_{oe}h_{ie}}{\frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} - h_{fe}} + h_{re} = \frac{h_{ie} + h_{ie}h_{oe}R_L - h_{re}h_{fe}R_L}{-h_{fe}R_L} \quad (19.72)$$

因此, 电压增益为:

$$A_v = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{V}_b} = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} \quad (19.73)$$

将 $\mathbf{V}_c = -R_L \mathbf{I}_c$ 代入式(19.68a)中得出:

$$\mathbf{V}_b = h_{ie} \mathbf{I}_b - h_{re}R_L \mathbf{I}_c$$

即

$$\frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{I}_b} = h_{ie} - h_{re}R_L \frac{\mathbf{I}_c}{\mathbf{I}_b} \quad (19.74)$$

利用式(19.70)中的电流增益替换 $\mathbf{I}_c/\mathbf{I}_b$, 输入阻抗为:

$$Z_{in} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{I}_b} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} \quad (19.75)$$

输出阻抗 Z_{out} 就是输出终端的戴维南等效电阻, 按照常规方法, 将电压源短路, 并在输出端设置一个 1V 电压源, 得到图 19-58 所示电路, 于是输出阻抗 Z_{out} 为 $1/\mathbf{I}_c$ 。由于 $\mathbf{V}_c = 1V$, 对于输入回路有:

$$\begin{aligned} h_{re}(1) &= -\mathbf{I}_b(R_s + h_{ie}) \\ \Rightarrow \mathbf{I}_b &= -\frac{h_{re}}{R_s + h_{ie}} \end{aligned} \quad (19.76)$$

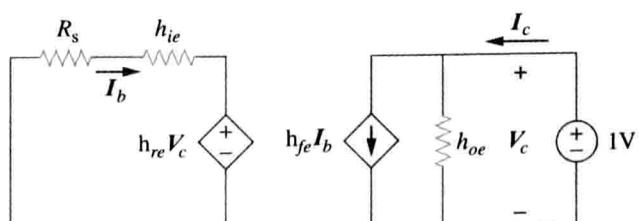


图 19-58 确定图 19-57 所示放大电路的输出阻抗

对于输出回路, 有:

$$\mathbf{I}_c = h_{oe}(1) + h_{fe} \mathbf{I}_b \quad (19.77)$$

将式(19.76)代入式(19.77)中, 可以得到:

$$\mathbf{I}_c = \frac{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}}{R_s + h_{ie}} \quad (19.78)$$

由此可以确定输出阻抗 Z_{out} 为 $1/\mathbf{I}_c$, 即:

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} \quad (19.79)$$

例 19-17 对于图 19-59 所示共射极放大器电路, 试利用如下 h 参数:

$$h_{ie} = 1k\Omega, \quad h_{re} = 2.5 \times 10^{-4}, \quad h_{fe} = 50, \quad h_{oe} = 20\mu S$$

测定电压增益、电流增益、输入阻抗及输出阻抗, 并求输出电压 V_o 。

解：1. 明确问题。初看时，这个问题似乎描述得很清楚。但是，当需要求输入阻抗和电压增益时，并未指出是晶体管的还是整个电路的。就电流增益和输出阻抗而言，两种情况下的这两个参数是相同的。

必须明确，所要求计算的输入阻抗、输出阻抗及电压增益是指电路的参数，而不是晶体管的参数。有趣的是，重新叙述该问题即可将其变为一个设计问题：已知 h 参数，设计一个增益为 -60 的基本放大器。

2. 列出已知条件。给定基本晶体管电路，输入电压为 3.2mV ，已知其 h 参数，要求计算输出电压。

3. 确定备选方案。求解本例的方法很多，其中最直接的方法就是利用图 19-57 所示的等效电路。一旦得到等效电路，就可以利用电路分析来得到答案。求得答案后，可将结果代入电路方程中，检验其正确性。另一种方法是简化等效电路的右侧，并进行倒推，看是否可以得到近似相等的解，下面就采用这种方法进行求解。

4. 尝试求解。由图 19-59 可见， $R_s = 0.8\text{k}\Omega$ ， $R_L = 1.2\text{k}\Omega$ 将图 19-59 中所示晶体管视为二端口网络，并由式(19.70)~(19.79)可以得到：

$$h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe} = 10^3 \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 7.5 \times 10^{-3}$$

$$A_v = \frac{-h_{fe}R_L}{h_{ie} + (h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe})R_L} = \frac{-50 \times 1200}{1000 + 7.5 \times 10^{-3} \times 1200} = -59.46$$

$A_v = V_o/V_b$ 是放大器的电压增益。为了计算该电路增益，需要求得 V_o/V_s 。利用左侧电路的网孔方程以及式(19.71)~(19.73)可以得到：

$$-V_s + R_s I_b + V_b = 0$$

即

$$V_s = 800 \frac{\frac{20 \times 10^{-6}}{50} - \frac{1}{59.46} V_o}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1.2 \times 10^3 - 50} = -0.03047 V_o$$

因此，电路增益为 **-32.82**。下面计算输出电压：

$$V_o = \text{增益} \times V_s = -105.09 / 0^\circ (\text{mV})$$

$$A_i = \frac{h_{fe}}{1 + h_{oe}R_L} = \frac{50}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 48.83$$

$$Z_{in} = h_{ie} - \frac{h_{re}h_{fe}R_L}{1 + h_{oe}R_L} = 1000 - \frac{2.5 \times 10^{-4} \times 50 \times 1200}{1 + 20 \times 10^{-6} \times 1200} = 985.4(\Omega)$$

改变 Z_{in} 即可包括 800Ω 电阻，因此，电路输入阻抗 $= 800 + 985.4 = 1758.4\Omega$ 。

$$(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe} = (800 + 1000) \times 20 \times 10^{-6} - 2.5 \times 10^{-4} \times 50 = 23.5 \times 10^{-3}$$

$$Z_{out} = \frac{R_s + h_{ie}}{(R_s + h_{ie})h_{oe} - h_{re}h_{fe}} = \frac{800 + 1000}{23.5 \times 10^{-3}} = 76.6(\text{k}\Omega)$$

5. 评价结果。在等效电路中， h_{oe} 代表 50000Ω 的电阻，与 $1.2\text{k}\Omega$ 的负载电阻并联。负载电阻的阻值相对于 h_{oe} 小得多，因而 h_{oe} 可以忽略，得到：

$$I_c = h_{fe}I_b = 50I_b, \quad V_c = -1200I_c$$

以及左边电路的回路方程为：

$$-0.0032 + (800 + 1000)I_b + 0.00025 \times (-1200) \times 50I_b = 0$$

$$I_b = 0.0032/1785 = 1.7927(\mu\text{A})$$

$$I_c = 50 \times 1.7927 = 89.64(\mu\text{A}), V_c = -1200 \times 89.64 \times 10^{-6} = -107.57(\text{mV})$$

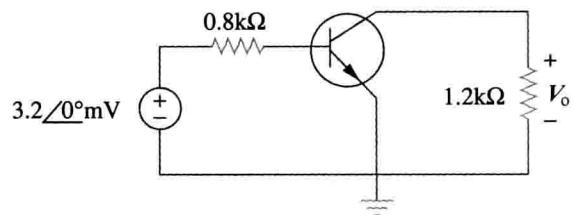


图 19-59 例 19-17 图

这是 -105.09mV 的良好近似。

$$\text{电压增益} = -107.57/3.2 = -33.62$$

同样，这也是对 32.83 的良好近似。

$$\text{电路输入阻抗} = 0.032/1.7927 \times 10^{-6} = 1785(\Omega)$$

显然，与前面得到的 1785.4Ω 是一致的。

上述计算均假设 $Z_{\text{out}} = \infty\Omega$ 。计算结果为 $76.6\text{k}\Omega$ ，求出该电阻与负载电阻的等效电阻即可验证上述假设。

$$76600 \times 1200 / (76600 + 1200) = 1181.5 = 1.1815(\text{k}\Omega)$$

同样得到较好的近似。

6. 是否满意程度？上述过程令人满意地解决了这个问题并验证了结果。可以将所得到的结果作为本题的答案。◆

练习 19-17 对于图 19-60 所示的晶体管放大器，求电压增益、电流增益、输入阻抗及输出阻抗。假设：

$$h_e = 6\text{k}\Omega, \quad h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}, \quad h_{fe} = 200, \quad h_{oe} = 8\mu\text{S}$$

答案： -123.61 (晶体管), -4.753 (电路), 194.17 , $6\text{k}\Omega$ (晶体管), $156\text{k}\Omega$ (电路), $128.08\text{k}\Omega$

19.9.2 梯形网络综合

二端口参数的另一个应用是梯形网络综合(构建)，梯形网络在实际电路中经常出现，特别是在无源低通滤波器的设计中更为常用。根据第 8 章中关于二阶电路的讨论可知，滤波器的阶数是描述该滤波器特征方程的阶数，并且由不能合并的电抗元件(即不能通过串联或并联合并的元件)的数目决定。图 19-61a 给出了一个具有奇数个元件的 LC 梯形网络(奇次滤波器)，而图 19-61b 给出了一个具有偶数个元件的 LC 梯形网络(偶次滤波器)。无论哪种网络，如果其负载阻抗为 Z_L ，源阻抗为 Z_s ，即可得到图 19-62 所示的网络结构。为了使设计不至过于复杂，假设 $Z_s = 0$ ，目的是综合出 LC 梯形网络的传递函数。首先利用导纳参数来刻画梯形网络的特征，即：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2 \quad (19.80\text{a})$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2 \quad (19.80\text{b})$$

(当然，也可以利用阻抗参数取代导纳参数。)在输入端口处，因为 $Z_s = 0$ ，所以 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_s$ 。在输出端口处， $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_o$ ，并且 $\mathbf{I}_2 = -\mathbf{V}_2/Z_L = \mathbf{V}_o Y_L$ 。因此，式 (19.80b) 变为：

$$-\mathbf{V}_o Y_L = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_s + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_o$$

即

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{-\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{Y}_L + \mathbf{y}_{22}} \quad (19.81)$$

也可将其写为：

$$\boxed{\mathbf{H}(s) = -\frac{\mathbf{y}_{21}/\mathbf{Y}_L}{1 + \mathbf{y}_{22}/\mathbf{Y}_L}} \quad (19.82)$$

因为滤波器通常利用传递函数的幅度表示，所以式(19.82)中的符号可以忽略不计。滤波

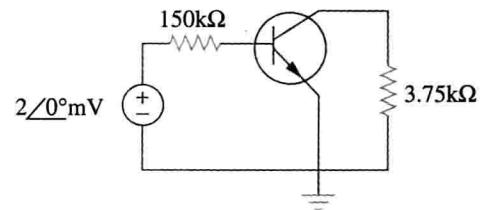
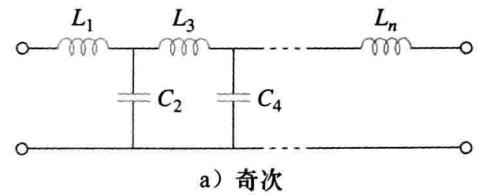
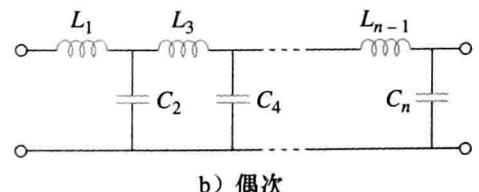


图 19-60 练习 19-17 图



a) 奇次



b) 偶次

图 19-61 低通滤波器的 LC 梯形网络

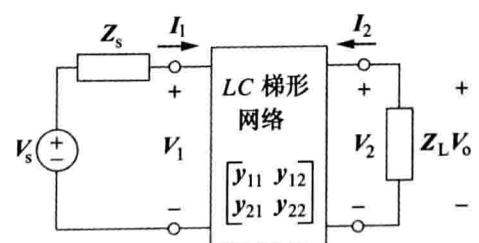


图 19-62 具有终端阻抗的 LC 梯形网络

器设计的主要任务是选择电容与电感，从而综合出参数 y_{21} 和 y_{22} ，由此实现所期望的传递函数。为了实现上述目标，需要利用 LC 梯形网络的重要性质：梯形网络所有 z 参数和 y 参数均为仅包含 s 偶数幂或 s 奇数幂的多项式之比，即 z 参数和 y 参数可以表示为 $Od(s)/Ev(s)$ 或 $Ev(s)/Od(s)$ ，其中 Od 和 Ev 分别是奇函数和偶函数。令：

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{\mathbf{N}_o + \mathbf{N}_e}{\mathbf{D}_o + \mathbf{D}_e} \quad (19.83)$$

其中， $\mathbf{N}(s)$ 和 $\mathbf{D}(s)$ 是传递函数 $\mathbf{H}(s)$ 的分子和分母； \mathbf{N}_o 和 \mathbf{N}_e 分别为 \mathbf{N} 的奇次部分和偶次部分； \mathbf{D}_o 和 \mathbf{D}_e 是 \mathbf{D} 的奇次部分和偶次部分。由于 $\mathbf{N}(s)$ 或者为奇函数，或者为偶函数，所以式(19.83)可以写为：

$$\mathbf{H}(s) = \begin{cases} \frac{\mathbf{N}_o}{\mathbf{D}_o + \mathbf{D}_e}, & (\mathbf{N}_e = 0) \\ \frac{\mathbf{N}_e}{\mathbf{D}_o + \mathbf{D}_e}, & (\mathbf{N}_o = 0) \end{cases} \quad (19.84)$$

或者将其重新写为：

$$\mathbf{H}(s) = \begin{cases} \frac{\mathbf{N}_o/\mathbf{D}_e}{1 + \mathbf{D}_o/\mathbf{D}_e}, & (\mathbf{N}_e = 0) \\ \frac{\mathbf{N}_e/\mathbf{D}_o}{1 + \mathbf{D}_e/\mathbf{D}_o}, & (\mathbf{N}_o = 0) \end{cases} \quad (19.85)$$

将其与式(19.82)进行比较，可以确定网络的 y 参数为：

$$\frac{y_{21}}{Y_L} = \begin{cases} \frac{\mathbf{N}_o}{\mathbf{D}_e}, & (\mathbf{N}_e = 0) \\ \frac{\mathbf{N}_e}{\mathbf{D}_o}, & (\mathbf{N}_o = 0) \end{cases} \quad (19.86)$$

和

$$\frac{y_{22}}{Y_L} = \begin{cases} \frac{\mathbf{D}_o}{\mathbf{D}_e}, & (\mathbf{N}_e = 0) \\ \frac{\mathbf{D}_e}{\mathbf{D}_o}, & (\mathbf{N}_o = 0) \end{cases} \quad (19.87)$$

下面通过例题说明上述过程。

例 19-18 设计一个终端为 1Ω 电阻的 LC 梯形网络，其归一化的传递函数为：

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

(这是巴特沃斯低通滤波器的传递函数。)

解：传递函数的分母表明这是一个三阶网络，因此其 LC 梯形网络如图 19-63a 所示，包括两个电感和一个电容。为了确定电感和电容的值，将分母各项划分为奇次项和偶次项两部分：

$$\mathbf{D}(s) = (s^3 + 2s) + (2s^2 + 1)$$

因此：

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{(s^3 + 2s) + (2s^2 + 1)}$$

分子和分母同时除以分母的奇数部分得到：

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\frac{1}{s^3 + 2s}}{1 + \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}} \quad (19.18.1)$$

由式(19.82)可知, 当 $Y_L=1$ 时:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-\mathbf{y}_{21}}{1 + \mathbf{y}_{22}} \quad (19.18.2)$$

比较式(19.18.1)和(19.18.2), 可以得到:

$$\mathbf{y}_{21} = -\frac{1}{s^3 + 2s}, \quad \mathbf{y}_{22} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

由于 \mathbf{y}_{22} 是输出端驱动点导纳, 即输入端短路时, 网络的输出导纳, 所以 \mathbf{y}_{22} 的实现将自动实现 \mathbf{y}_{21} 。所以, 确定图 19-63a 所示网络的 L 和 C 的值, 即可得到 \mathbf{y}_{22} 。由于 \mathbf{y}_{22} 为短路输出导纳, 所以应将输入端口短路, 如图 19-63b 所示。首先确定 L_3 , 令:

$$\mathbf{Z}_A = \frac{1}{\mathbf{y}_{22}} = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1} = sL_3 + \mathbf{Z}_B \quad (19.18.3)$$

通过长除法, 可得:

$$\mathbf{Z}_A = 0.5s + \frac{1.5s}{2s^2 + 1} \quad (19.18.4)$$

比较式(19.18.3)和(19.18.4), 可以得到:

$$L_3 = 0.5H, \quad \mathbf{Z}_B = \frac{1.5s}{2s^2 + 1}$$

下面确定图 19-63c 所示网络中的 C_2 , 令:

$$\mathbf{Y}_B = \frac{1}{\mathbf{Z}_B} = \frac{2s^2 + 1}{1.5s} = 1.333s + \frac{1}{1.5s} = sC_2 + Y_c$$

由此可得 $C_2 = 1.33F$, 且:

$$Y_c = \frac{1}{1.5s} = \frac{1}{sL_1} \Rightarrow L_1 = 1.5H$$

因此, 综合结果如图 19-63(a)所示, LC 梯形网络中, $L_1 = 1.5H$ 、 $C_2 = 1.333F$ 、 $L_3 = 0.5H$, 从而得到给定的传递函数 $\mathbf{H}(s)$ 。求出图 18-63a 中的 $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$, 或者求出 \mathbf{y}_{21} 的值, 即可验证上述结果的正确性。

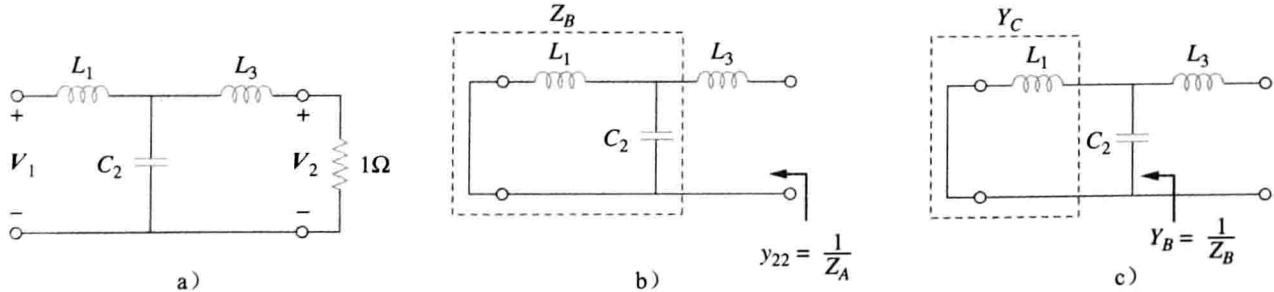


图 19-63 例 19-18 图

练习 19-18 利用终端连接 1Ω 电阻的 LC 梯形网络实现如下转移函数:

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + 4s + 2}$$

答案: 梯形网络如图 19-63a 所示, $L_1 = L_3 = 1.0H$, $C_2 = 500mH$

19.10 本章小结

1. 二端口网络具有两个端口(或者两对接入通道), 称为输入端口和输出端口。
2. 用于二端口网络建模的六组参数包括阻抗参数[\mathbf{z}], 导纳参数[\mathbf{y}], 混合参数[\mathbf{h}], 逆混合参数[\mathbf{g}], 传输参数[\mathbf{T}]以及反向传输参数[\mathbf{t}]。

3. 描述输入端口变量与输出端口变量之间关系的参数为：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{z}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{y}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{g}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{t}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ -\mathbf{I}_1 \end{bmatrix}$$

4. 将适当的输入端口或输出端口短路或开路即可计算或测量出网络的参数。

5. 如果 $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$, $\mathbf{y}_{12} = \mathbf{y}_{21}$, $\mathbf{h}_{12} = -\mathbf{h}_{21}$, $\mathbf{g}_{12} = -\mathbf{g}_{21}$, $\Delta_T = 1$ 或 $\Delta_t = 1$, 则该二端口网络是互易网络。包含受控源的网络不是互易网络。

6. 表 19-1 表达了六组参数之间的换算关系, 其中三个重要的关系为:

$$[\mathbf{y}] = [\mathbf{z}]^{-1}, \quad [\mathbf{g}] = [\mathbf{h}]^{-1}, \quad [\mathbf{t}] \neq [\mathbf{T}]^{-1}$$

7. 二端口网络的连接方式包括串联、并联与级联。在串联连接时, \mathbf{z} 参数是相加的; 在并联连接时, \mathbf{y} 参数是相加的; 而在级联时, 传输参数是依次相乘的。

8. 把适当的端口变量定为 1A 或 1V 电源, 并将其他端口开路或短路后, 可以利用 PSpice 来计算二端口网络的参数。

9. 在晶体管电路的分析和 LC 梯形网络的综合中, 都会用到网络参数。因为晶体管电路很容易建模为一个二端口网络, 所以网络参数在晶体管电路分析中尤为重要。无源低通滤波器设计中的重要模块—— LC 梯形网络, 与级联 T 形网络非常相似, 所以可以看做二端口网络进行分析。

复习题

1 在图 19-64a 所示的单个元件的二端口网络中,

\mathbf{z}_{11} 是:

- (a) 0 (b) 5 (c) 10
 (d) 20 (e) 不存在

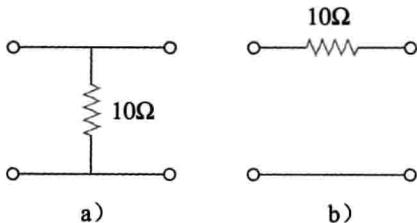


图 19-64 复习题图

2 在图 19-64b 所示的单个元件的二端口网络中,

\mathbf{z}_{11} 是:

- (a) 0 (b) 5 (c) 10
 (d) 20 (e) 不存在

3 在图 19-64a 所示的单个元件的二端口网络中,

\mathbf{y}_{11} 是:

- (a) 0 (b) 5 (c) 10
 (d) 20 (e) 不存在

4 在图 19-64b 所示的单个元件的二端口网络中,

\mathbf{h}_{21} 是:

- (a) -0.1 (b) -1 (c) 0
 (d) 10 (e) 不存在

5 在图 19-64a 所示的单个元件的二端口网络中,

\mathbf{B} 是:

- (a) 0 (b) 5 (c) 10
 (d) 20 (e) 不存在

6 在图 19-64b 所示的单个元件的二端口网络中,
 \mathbf{B} 是:

- (a) 0 (b) 5 (c) 10
 (d) 20 (e) 不存在

7 当某二端口电路的端口 1 短路时, $\mathbf{I}_1 = 4\mathbf{I}_2$,
 $\mathbf{V}_2 = 0.25\mathbf{I}_2$, 下述那个结论是正确的?

- (a) $\mathbf{y}_{11} = 4$ (b) $\mathbf{y}_{12} = 16$
 (c) $\mathbf{y}_{21} = 16$ (d) $\mathbf{y}_{22} = 0.25$

8 某二端口网络可以用如下方程描述:

$$\mathbf{V}_1 = 50\mathbf{I}_1 + 10\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{V}_2 = 30\mathbf{I}_1 + 20\mathbf{I}_2$$

以下哪个结论是不正确的?

- (a) $\mathbf{z}_{12} = 10$ (b) $\mathbf{y}_{12} = -0.0143$
 (c) $\mathbf{h}_{12} = 0.5$ (d) $\mathbf{A} = 50$

9 如果二端口网络为互易网络, 以下那个结论是不正确的?

- (a) $\mathbf{z}_{21} = \mathbf{z}_{12}$ (b) $\mathbf{y}_{21} = \mathbf{y}_{12}$
 (c) $\mathbf{h}_{21} = \mathbf{h}_{12}$ (d) $\mathbf{AD} = \mathbf{BC} + 1$

10 如果将图 19-64 所示两个单个元件的二端口网
络级联, 则 \mathbf{D} 为:

- (a) 0 (b) 0.1 (c) 2
 (d) 10 (e) 不存在

答案: (1)c; (2)e; (3)e; (4)b; (5)a; (6)c;
 (7)b; (8)d; (9)c; (10)c

习题

19.2节

1 求图19-65所示网络的 z 参数。

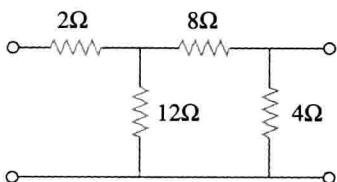


图19-65 习题1和习题28图

* 2 求图19-66所示网络的等效阻抗参数。

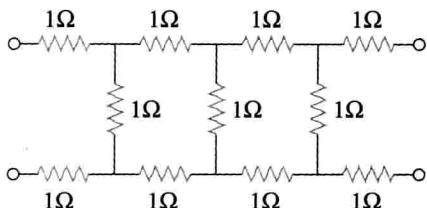


图19-66 习题2图

3 求图19-67所示电路的 z 参数。

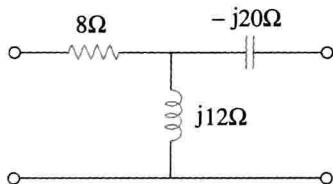


图19-67 习题3图

4 利用图19-68试设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何由一个电子线路求出 z 参数。 **ED**

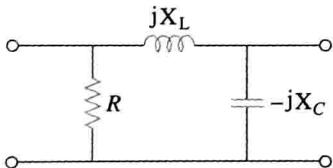


图19-68 习题4图

5 求图19-69所示网络的 s 域 z 参数。

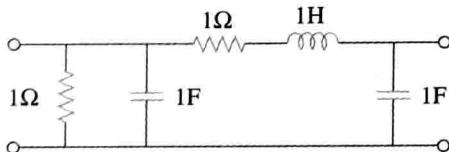


图19-69 习题5图

6 求图19-70所示电路的 z 参数。

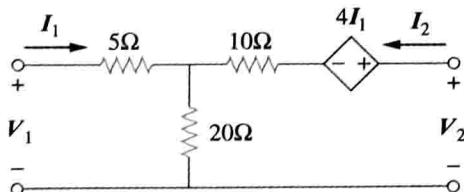


图19-70 习题6和习题73图

7 求图19-71所示的电路的等效阻抗参数。

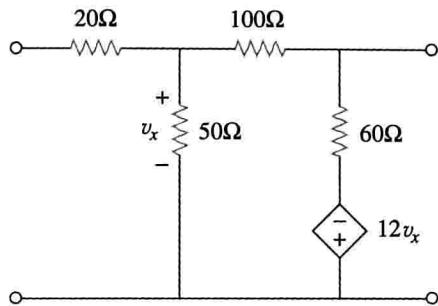


图19-71 习题7和80图

8 求图19-72所示二端口网络的 z 参数。

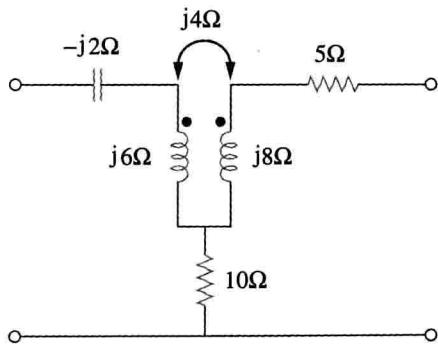


图19-72 习题8图

9 某网络的 y 参数为：

$$Y = [y] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} S$$

求该网络的 z 参数。

10 构建可实现如下 z 参数的二端口网络。

$$(a) [z] = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \Omega$$

$$(b) [z] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 2s + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \Omega$$

11 构建可以用如下 z 参数表示的二端口网络。

$$[z] = \begin{bmatrix} 6 + j3 & 5 - j2 \\ 5 - j2 & 8 - j \end{bmatrix} \Omega$$

12 对于图19-73所示电路，令：

$$[z] = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \Omega$$

求 I_1 、 I_2 、 V_1 和 V_2 。

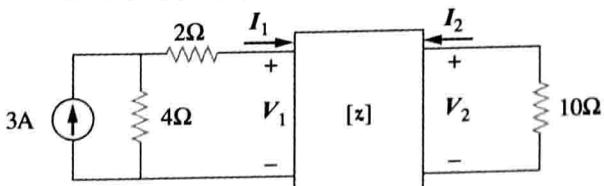


图19-73 习题12图

- 13 求图 19-74 所示网络中传递给 $Z_L = 5 + j4$ 的平均功率。注意：电压为方均根电压。

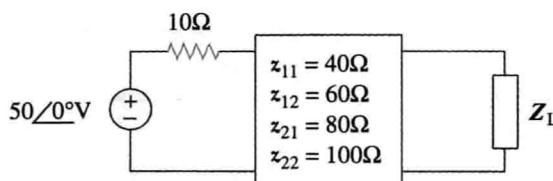


图 19-74 习题 13 图

- 14 对于图 19-75 所示的二端口网络，证明在输出端，

$$Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_s}, \quad V_{Th} = \frac{z_{21}}{z_{11} + z_s}V_s$$

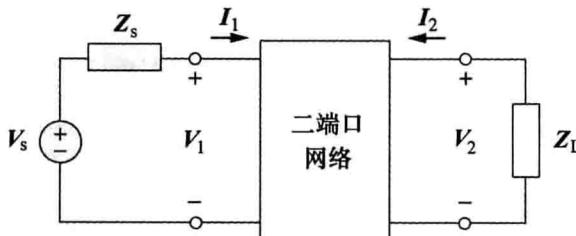


图 19-75 习题 14 和 41 图

- 15 对于图 19-76 所示的二端口电路，有：

$$[z] = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 80 & 120 \end{bmatrix} \Omega$$

- (a)求实现负载最大功率传输时的 Z_L 。
(b)计算传递给负载的最大功率。

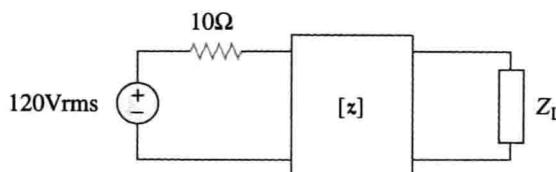


图 19-76 习题 15 图

- 16 对于图 19-77 所示电路，当 $\omega = 2\text{rad/s}$ 时， $z_{11} = 10\Omega$ ， $z_{12} = z_{21} = j6\Omega$ ， $z_{22} = 4\Omega$ ，求终端 a-b 处的戴维南等效电路，并计算 v_o 。

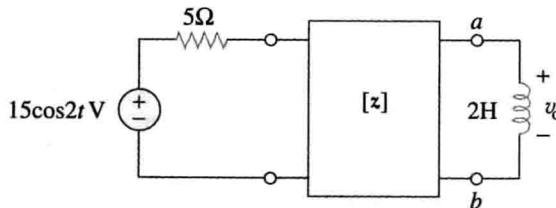


图 19-77 习题 16 图

- * 17 求图 19-78 所示电路的 z 参数和 y 参数。

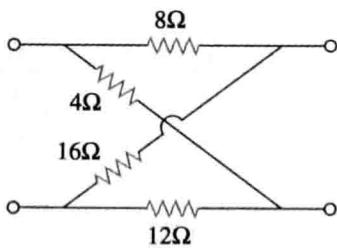


图 19-78 习题 17 图

- 18 求图 19-79 所示二端口电路的 y 参数。

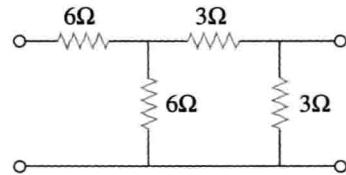


图 19-79 习题 18 和 37 图

- 19 利用图 19-80 试设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何在 s 域确定 y 参数。 ED

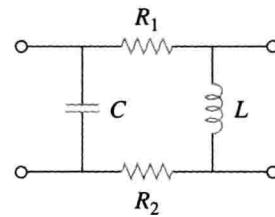


图 19-80 习题 19 图

- 20 求图 19-81 所示电路的 y 参数。

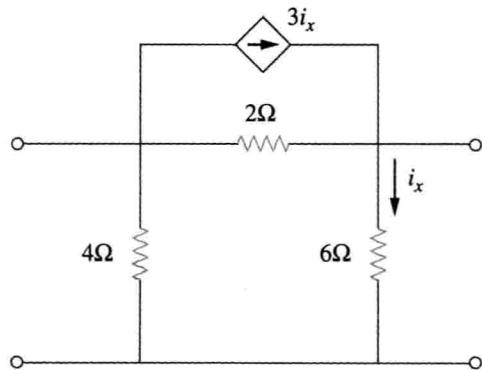


图 19-81 习题 20 图

- 21 求图 19-82 所示二端口网络的等效导纳参数。

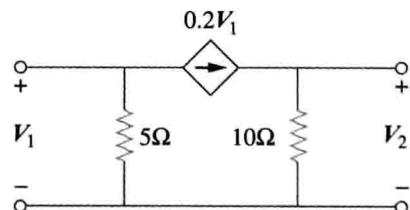


图 19-82 习题 21 图

- 22 求图 19-83 所示二端口网络的 y 参数。

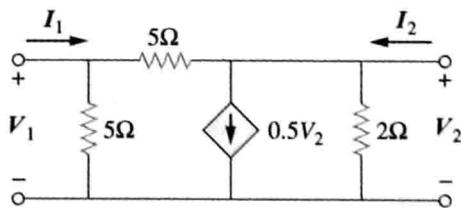


图 19-83 习题 22 图

- 23 (a)求图 19-84 所示二端口网络的 y 参数。

(b) 求 $v_s = 2u(t)$ V 时的 $V_2(s)$ 。

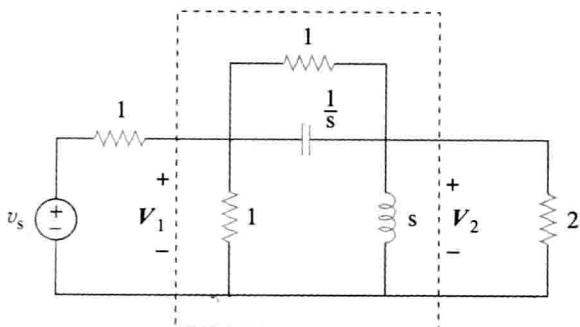


图 19-84 习题 23 图

24 求表示如下 y 参数的电阻电路:

$$[y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} S$$

25 画出具有如下 y 参数的二端口网络:

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} S$$

26 求图 19-85 所示二端口电路的 $[y]$ 。

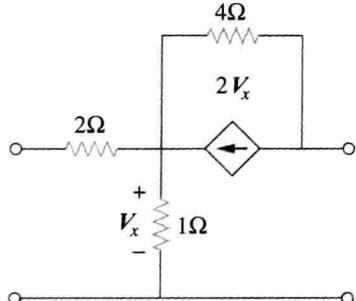


图 19-85 习题 26 图

27 求图 19-86 所示电路的 y 参数。

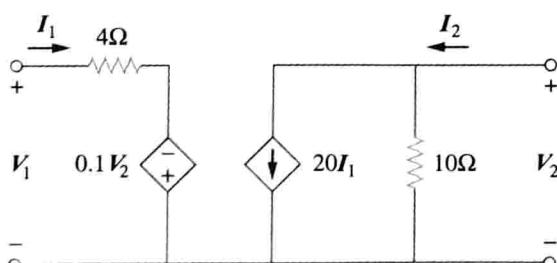


图 19-86 习题 27 图

28 在图 19-65 所示电路中, 输入端口连接一个 1A 的直流电流源。利用 y 参数计算 2Ω 电阻消耗的功率, 并通过直接电路分析验证计算结果。

29 在图 19-87 所示桥电路中, $I_1 = 10A$, $I_2 = -4A$ 。
(a) 利用 y 参数求 V_1 和 V_2 ; (b) 通过直接电路分析验证(a)中的结果。

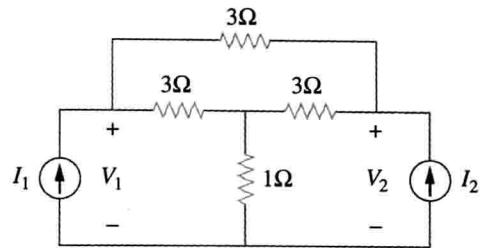


图 19-87 习题 29 图

19.4 节

30 求图 19-88 所示网络的 h 参数。

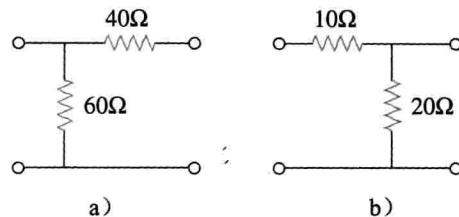


图 19-88 习题 30 图

31 求图 19-89 所示电路的混合参数。

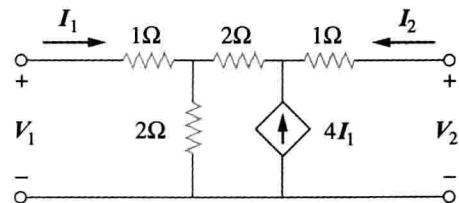


图 19-89 习题 31 图

32 利用图 19-90 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解如何求出电路 s 域的 h 参数和 g 参数。
ED

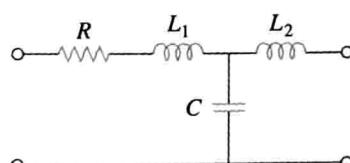


图 19-90 习题 32 图

33 求图 19-91 所示二端口电路的 h 参数。

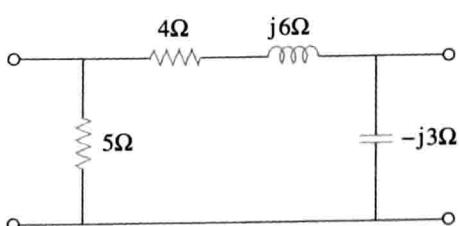


图 19-91 习题 33 图

34 求图 19-92 所示二端口电路的 h 参数和 g 参数。

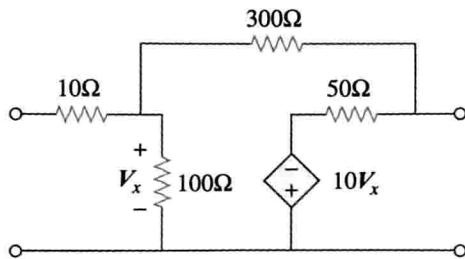


图 19-92 习题 34 图

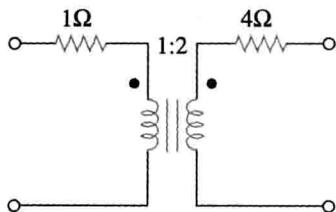
35 求图 19-93 所示网络的 h 参数。

图 19-93 习题 35 图

36 对于图 19-94 所示的二端口网络，有：

$$[h] = \begin{bmatrix} 16\Omega & 3 \\ -2 & 0.01S \end{bmatrix}$$

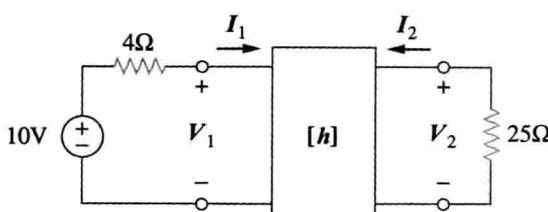
求(a) V_2/V_1 ; (b) I_2/I_1 ; (c) I_1/V_1 ;
(d) V_2/I_1 。

图 19-94 习题 36 图

37 图 19-79 所示电路的输入端与一个 10V 直流电压源相连接，同时输出端与一个 5Ω 电阻相连接。利用该电路的 h 参数求 5Ω 电阻两端的电压，并通过直接电路分析验证计算结果。38 图 19-95 所示二端口网络的 h 参数为：

$$[h] = \begin{bmatrix} 600\Omega & 0.04 \\ 30 & 2mS \end{bmatrix}$$

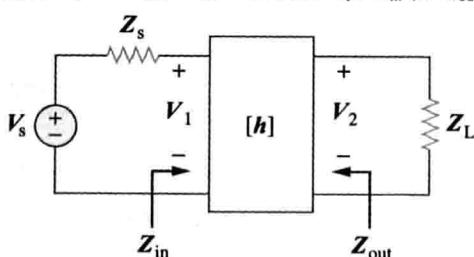
如果 $Z_s = 2k\Omega$, $Z_L = 400\Omega$, 求 Z_{in} 和 Z_{out} 。

图 19-95 习题 38 图

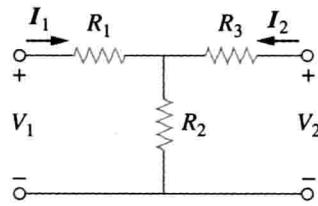
39 求图 19-96 所示 Y 形电路的 g 参数。

图 19-96 习题 39 图

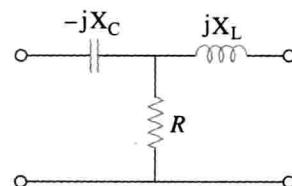
40 利用图 19-97 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何确定交流电路的 g 参数。 ED

图 19-97 习题 40 图

41 对于图 19-75 所示二端口网络，证明：

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta_g}$$

$$\frac{V_2}{V_s} = \frac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_s)(g_{22} + Z_L) - g_{21}g_{12}Z_s}$$

其中 Δ_g 是矩阵 $[g]$ 的行列式。42 某二端口器件的 h 参数如下：

$$h_{11} = 600\Omega, h_{12} = 10^{-3}$$

$$h_{21} = 120, h_{22} = 2 \times 10^{-6}s$$

画出包括各元件值在内的器件电路模型。

19.5 节

43 求图 19-98 所示单个元件二端口网络的传输参数。

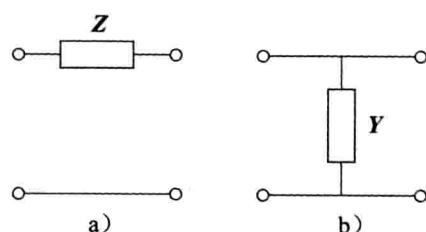


图 19-98 习题 43 图

44 利用图 19-99 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何确定一个交流电路的传输函数。 ED

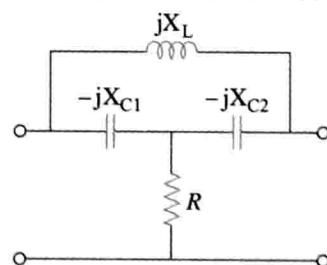


图 19-99 习题 44 图

45 求图 19-100 所示电路的 $ABCD$ 参数。

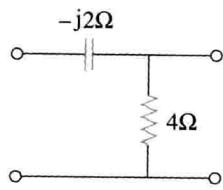


图 19-100 习题 45 图

46 求图 19-101 所示电路的传输函数。

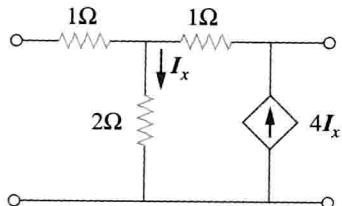


图 19-101 习题 46 图

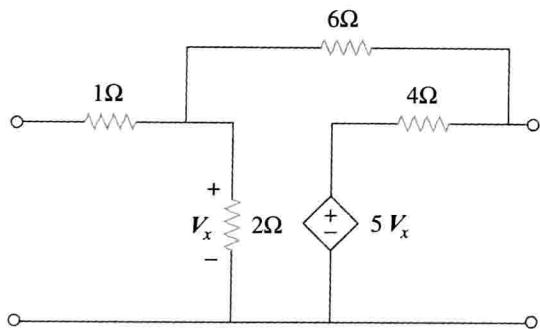
47 求图 19-102 所示网络的 $ABCD$ 参数。

图 19-102 习题 47 图

48 对于某二端口网络，令 $A=4$, $B=30\Omega$, $C=0.1S$, $D=1.5$ 。计算下列几种情况下的输入阻抗 $Z_{in}=V_1/I_1$: (a)输出端短路; (b)输出端开路; (c)输出端连接一个 10Ω 的负载。

49 利用 s 域阻抗求图 19-103 所示电路的传输参数。

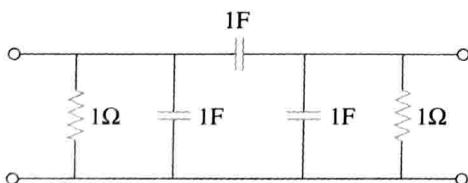


图 19-103 习题 49 图

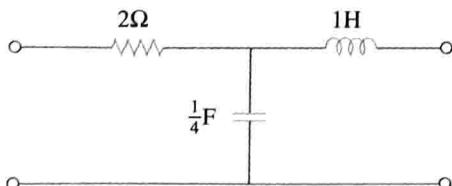
50 求图 19-104 所示电路的 t 参数的 s 域表示式。

图 19-104 习题 50 图

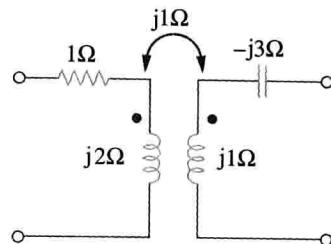
51 求图 19-105 所示电路的 t 参数。

图 19-105 习题 51 图

19.6 节

52 (a)对于图 19-106 所示 T 形网络，证明 h 参数为：

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3}, \quad h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$h_{21} = -\frac{R_2}{R_2 + R_3}, \quad h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

(b)对于同一网络，证明其传输参数为：

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \quad B = R_3 + \frac{R_1}{R_2}(R_2 + R_3)$$

$$C = \frac{1}{R_2}, \quad D = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

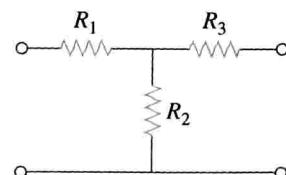


图 19-106 习题 52 图

53 推导出利用 $ABCD$ 参数表示的 z 参数表达式。

54 证明由 y 参数确定的二端口网络的传输参数为：

$$A = -\frac{y_{22}}{y_{21}}, \quad B = -\frac{1}{y_{21}}$$

$$C = -\frac{\Delta_y}{y_{21}}, \quad D = -\frac{y_{11}}{y_{21}}$$

55 证明由 z 参数确定的 g 参数可以表达为：

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}}, \quad g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}}, \quad g_{22} = \frac{\Delta_z}{z_{11}}$$

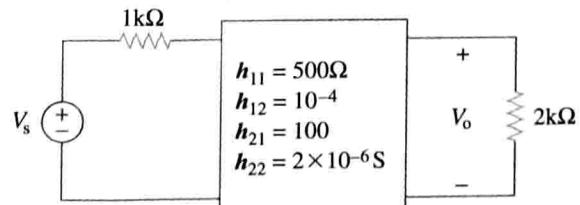
56 对于图 19-107 所示网络，求 V_o/V_s 。

图 19-107 习题 56 图

57 已知传输参数为：

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

求其他五组二端口网络参数。

- 58 设计一个问题帮助其他同学更好地理解在已知混合参数的方程时，如何求得二端口网络的 y 参数和传输函数。
ED
- 59 已知：

$$[g] = \begin{bmatrix} 0.06S & -0.4 \\ 0.2 & 2\Omega \end{bmatrix}$$

求：(a) $[z]$ ；(b) $[y]$ ；(c) $[h]$ ；(d) $[T]$ 。

- 60 设计一个在 $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$ 时实现如下 z 参数的 T 形网络：
ED

$$[z] = \begin{bmatrix} 4+3j & 2 \\ 2 & 5-j \end{bmatrix} \text{k}\Omega$$

- 61 对于图 19-108 所示桥式电路，求：(a) z 参数；(b) h 参数；(c) 传输参数。

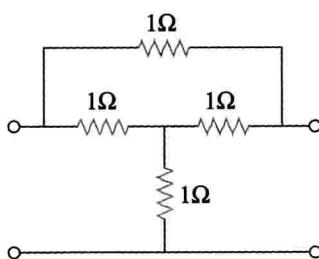


图 19-108 习题 61 图

- 62 求图 19-109 所示运算放大电路的 z 参数，并确定其传输参数。

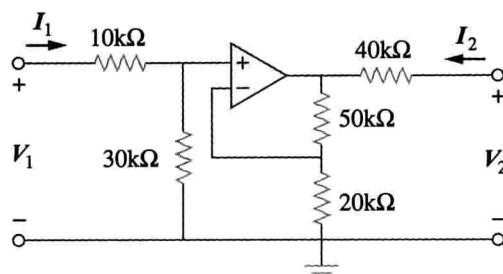


图 19-109 习题 62 图

- 63 求图 19-110 所示二端口网络的 z 参数。

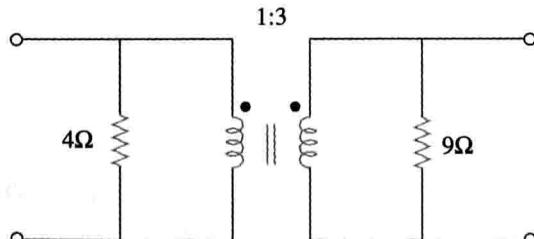


图 19-110 习题 63 图

- 64 求图 19-111 所示运算放大器电路在 $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ 时的 y 参数，并求出对应的 h 参数。

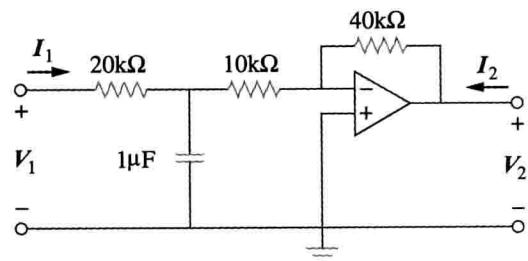


图 19-111 习题 64 图

19.7 节

- 65 图 19-112 所示电路的 y 参数表示的是什么？

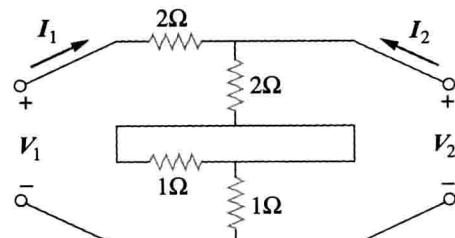


图 19-112 习题 65 图

- 66 在图 19-113 所示二端口电路中，令 $y_{12} = y_{21} = 0$ ， $y_{11} = 2 \text{ mS}$ ， $y_{22} = 10 \text{ mS}$ ，试求 V_o/V_s 。

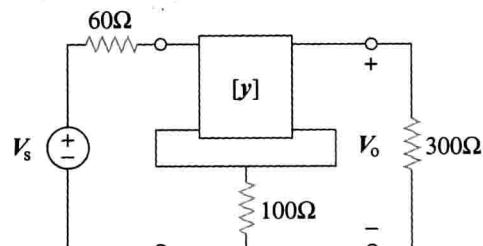


图 19-113 习题 66 图

- 67 如果将三个图 19-114 所示电路相互并联，求整个电路的传输函数。
ML

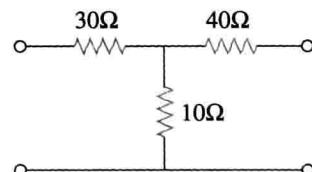


图 19-114 习题 67 图

- 68 求图 19-115 所示网络的 h 参数。

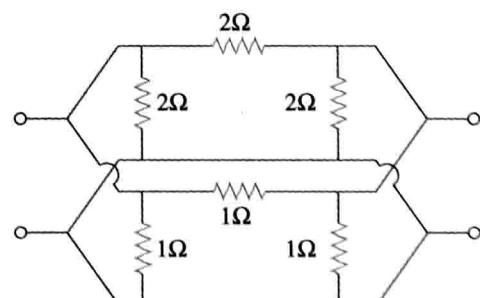


图 19-115 习题 68 图

- * 69 图 19-116 所示电路可以看做两个并联的二端口电路，求 s 域的 y 参数。

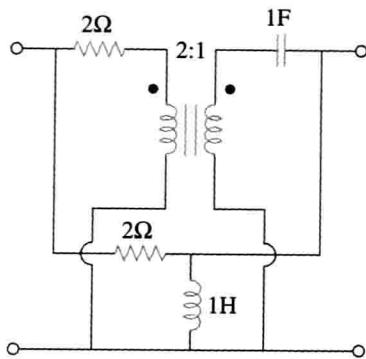


图 19-116 习题 69 图

- * 70 对于图 19-117 所示的两个二端口网络的并-串联电路，求其 g 参数。

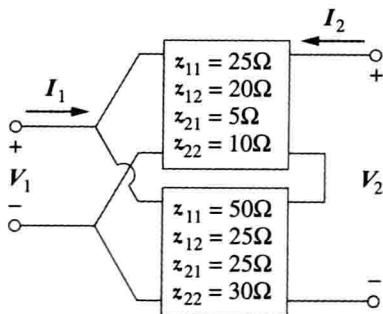


图 19-117 习题 70 图

- * 71 求图 19-118 所示网络的 z 参数。

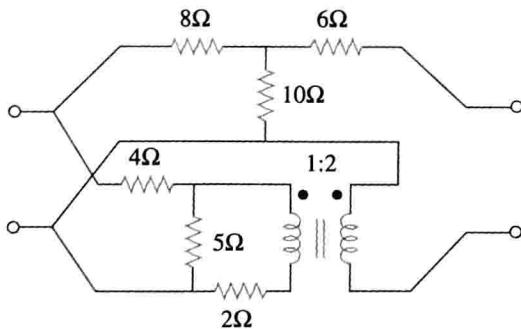


图 19-118 习题 71 图

- * 72 两个串-并连接的二端口电路如图 19-119 所示，求该网络的 z 参数。

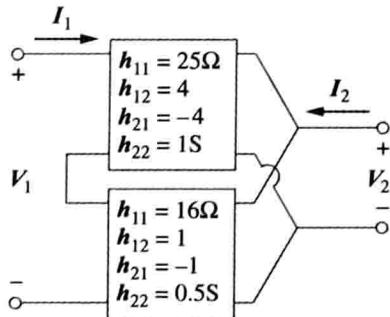


图 19-119 习题 72 图

- 73 如果将三个图 19-70 所示电路相互级联。求整个电路的 z 参数。 **ML**

- * 74 求图 19-120 所示电路的 s 域 $ABCD$ 参数(提示：可以将电路划分成若干个子电路，并利用习题 43 的结果将其级联起来)。 **ML**

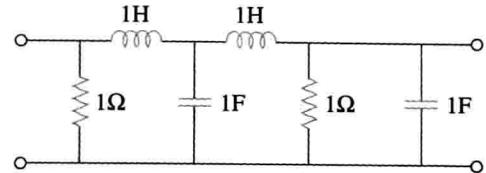


图 19-120 习题 74 图

- * 75 对于图 19-121 所示各二端口网络，其中： **ML**

$$[z_a] = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Omega, \quad [y_b] = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} S$$

- (a)求整个二端口网络的 y 参数；(b)求 $Z_L = 2\Omega$ 时的电压比 V_o/V_i 。

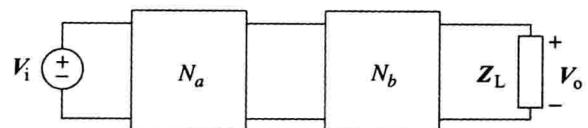


图 19-121 习题 75 图

19.8 节

- 76 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-112 所示网络的 z 参数。

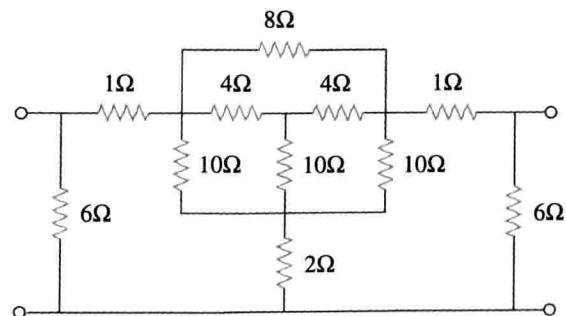


图 19-122 习题 76 图

- 77 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-123 所示电路的 h 参数，其中 $\omega=1\text{rad/s}$ 。

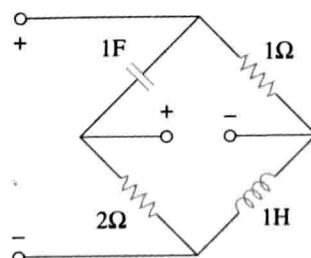


图 19-123 习题 77 图

- 78 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-124 所示电路

的 h 参数，其中 $\omega=4\text{rad/s}$ 。

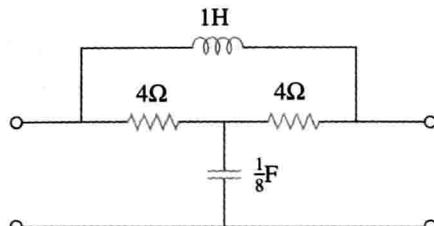


图 19-124 习题 78 图

- 79 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-125 中的 z 参数，其中 $\omega=2\text{rad/s}$ 。

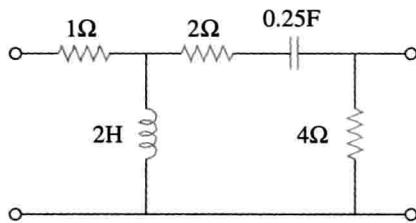


图 19-125 习题 79 图

- 80 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-71 所示电路的 z 参数。
 81 利用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 26。
 82 利用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 31。
 83 利用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 47。
 84 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-126 所示网络的传输参数。

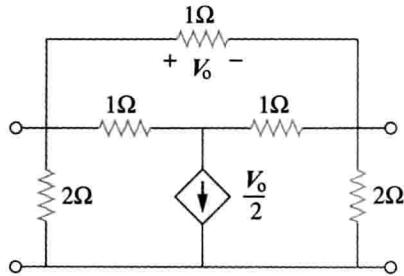


图 19-126 习题 84 图

- 85 当 $\omega=1\text{rad/s}$ 时，利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-127 所示网络的传输参数。

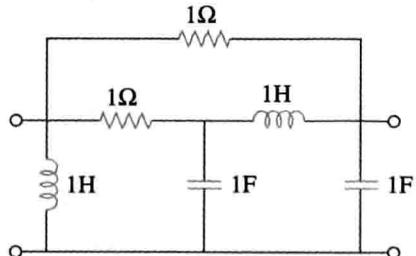


图 19-127 习题 85 图

- 86 利用 PSpice 或 MultiSim 求图 19-128 所示电路的 g 参数。

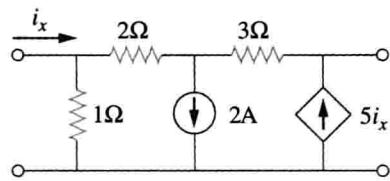


图 19-128 习题 86 图

- 87 对于图 19-129 所示电路，利用 PSpice 或 MultiSim 确定 t 参数，假设 $\omega=1\text{rad/s}$ 。

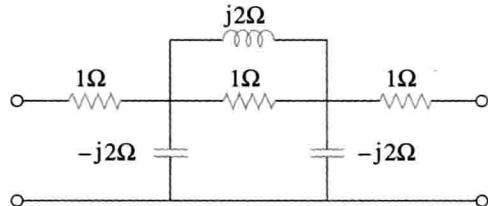


图 19-129 习题 87 图

19.9 节

- 88 利用 y 参数推导共射极晶体管电路的 Z_{in} 、 Z_{out} 、 A_i 、 A_v 的公式。
 89 共射极电路中的晶体管的参数如下：
 $h_{ie} = 2640\Omega$, $h_{re} = 2.6 \times 10^{-4}$
 $h_{fe} = 72$, $h_{oe} = 16\mu\text{S}$, $R_L = 100\text{k}\Omega$

该晶体管的电压放大倍数为多少？该放大倍数用分贝表示的增益是多少？

- 90 某晶体管具有如下参数： ED

$$h_{fe} = 120, h_{ie} = 2\text{k}\Omega \\ h_{re} = 10^{-4}, h_{oe} = 20\mu\text{S}$$

将其用在 CE 放大器中。提供 $1.5\text{k}\Omega$ 的输入电阻。(a)确定负载电阻 R_L ；(b)如果放大器被内阻 600Ω 的 4mV 电源驱动，计算 A_v 、 A_i 与 Z_{out} ；(c)求负载两端的电压。

- 91 对于图 19-130 所示的晶体管网络，有：

$$h_{fe} = 80, h_{ie} = 1.2\text{k}\Omega \\ h_{re} = 1.5 \times 10^{-4}, h_{oe} = 20\mu\text{S}$$

求：(a)电压增益 $A_v = V_o/V_s$ ；(b)电流增益 $A_i = I_o/I_i$ ；(c)输入阻抗 Z_{in} ；(d)输出阻抗 Z_{out} 。

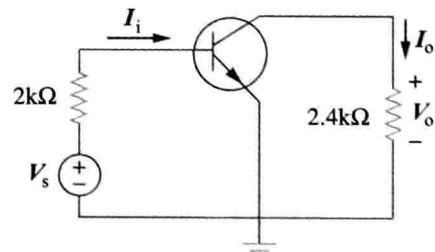


图 19-130 习题 91 图

- * 92 求图 19-131 所示的运算放大器的 A_v 、 A_i 、 Z_{in} 和 Z_{out} 。假设：

$$h_{ie} = 4\text{k}\Omega, h_{re} = 10^{-4} \\ h_{fe} = 100, h_{oe} = 30\mu\text{S}$$

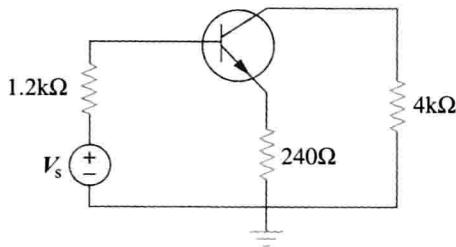


图 19-131 习题 92 图

- * 93 求图 19-132 所示晶体管电路的 A_v 、 A_i 、 Z_{in} 、 Z_{out} 。假设：

$$\begin{aligned} h_{ie} &= 2\text{k}\Omega, \quad h_{re} = 2.5 \times 10^{-4} \\ h_{fe} &= 150, \quad h_{oe} = 10\mu\text{s} \end{aligned}$$

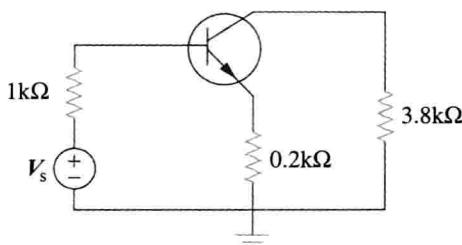


图 19-132 习题 93 图

- 94 某共发射级电路中的晶体管参数为： ED

$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 200\Omega & 0 \\ 100 & 10^{-6}\text{S} \end{bmatrix}$$

将这样两个完全相同的晶体管级联构成一个两级音频放大器。如果该放大器终端连接一个 $4\text{k}\Omega$ 的电阻，计算整体电路的 A_v 和 Z_{in} 。

- 95 设计一个 LC 梯形网络，使得：

$$y_{22} = \frac{s^3 + 5s}{s^4 + 10s^2 + 8}$$

- 96 设计一个 LC 梯形网络实现具有如下转移函数的低通滤波器：ED

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^2 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

- 97 利用图 19-133 所示的 LC 梯形电路综合如下转移函数：ED

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{s^3}{s^3 + 6s + 12s + 24}$$

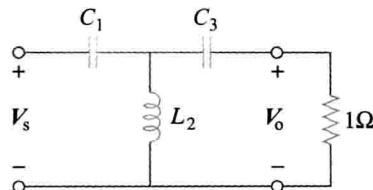


图 19-133 习题 97 图

- 98 图 19-134 所示两级放大器由两个完全相同的级构成，各级的 h 参数为：

$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} 2\text{k}\Omega & 0.004 \\ 200 & 500\mu\text{s} \end{bmatrix}$$

如果 $Z_L = 20\text{k}\Omega$ ，求使得输出为 $V_o = 16\text{V}$ 所需要的 V_s 。

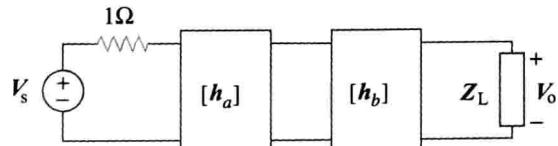
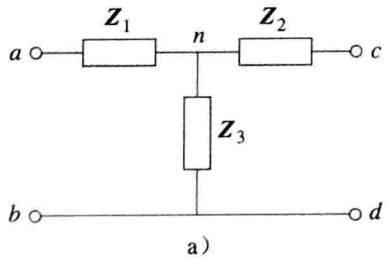


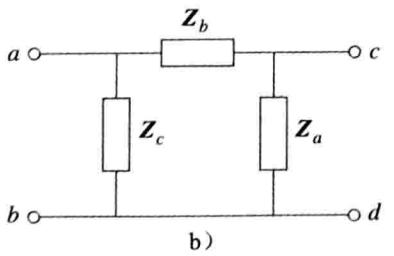
图 19-134 习题 98 图

综合理解题

- 99 假设图 19-135 所示的两个电路是等效的，那么这两个电路的参数必须是相等的。利用这一条件和 z 参数推导式(9.67)和式(9.68)。



a)



b)

图 19-135 习题 99 图

附录 A

奇数编号习题答案

第 1 章

1. 1 (a) -103.84mC , (b) -198.65mC ,
(c) -3.941C , (d) -26.08C
1. 3 (a) $(3t+1)\text{C}$, (b) $(t^2+5t)\text{mC}$,
(c) $[2\sin(10t+\pi/6)+1]\mu\text{C}$,
(d) $-e^{30t}[0.16\cos 40t+0.12\sin 40t]\text{C}$
1. 5 25C

1. 7 $i = \begin{cases} 25\text{A}, & 0 < t < 2 \\ -25\text{A}, & 2 < t < 6 \\ 25\text{A}, & 6 < t < 8 \end{cases}$

该电流波形曲线如图 A. 1 所示

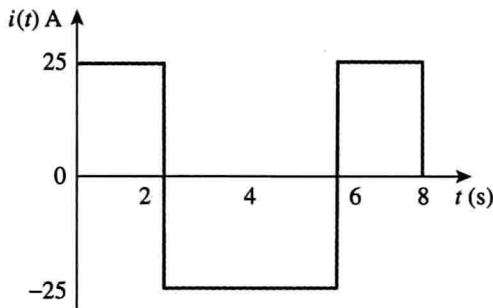


图 A. 1 习题 1.7 图

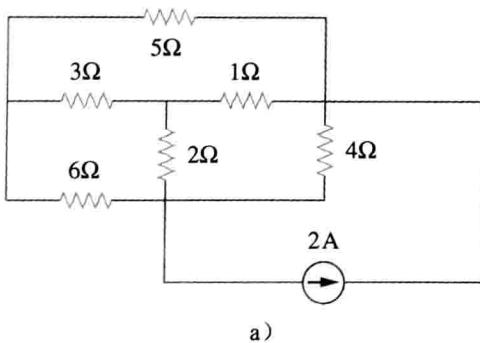
1. 9 (a) 10C , (b) 22.5C , (c) 30C
1. 11 3.888kC , 5.832kJ
1. 13 123.37mW , 58.76mJ
1. 15 (a) 2.945mC , (b) $-720e^{-4t}\mu\text{W}$,
(c) $-180\mu\text{J}$
1. 17 70W
1. 19 6A , -72W , 18W , 18W , 36W
1. 21 2.696×10^{23} 个电子, 43200C
1. 23 $\$1.35$
1. 25 21.52 美分
1. 27 (a) 43.2kC , (b) 475.2kJ , (c) 1.188 美分
1. 29 39.6 美分
1. 31 $\$42.05$
1. 33 6C
1. 35 $2.333\text{MW} \cdot \text{h}$
1. 37 1.728MJ
1. 39 24 美分
- 第 2 章
2. 1 答案不唯一
2. 3 184.3mm

2. 5 $n=9$, $b=15$, $l=7$
2. 7 6 条支路, 4 个节点
2. 9 7A , -1A , 5A
2. 11 6V , 3V
2. 13 12A , -10A , 5A , -2A
2. 15 6V , -4A
2. 17 2V , -22V , 10V
2. 19 -2A , 12W , -24W , 20W , 16W
2. 21 4.167V
2. 23 2V , 21.33W
2. 25 0.1A , 2kV , 0.2kW
2. 27 1A
2. 29 8.125Ω
2. 31 56A , 8A , 48A , 32A , 16A
2. 33 3V , 6A
2. 35 32V , 800mA
2. 37 2.5Ω
2. 39 (a) 727.3Ω , (b) $3\text{k}\Omega$
2. 41 16Ω
2. 43 (a) 12Ω , (b) 16Ω
2. 45 (a) 59.8Ω , (b) 32.5Ω
2. 47 24Ω
2. 49 (a) 4Ω , (b) $R_1=18\Omega$, $R_2=6\Omega$, $R_3=3\Omega$
2. 51 (a) 9.231Ω , (b) 36.25Ω
2. 53 (a) 142.32Ω , (b) 33.33Ω
2. 55 997.4mA
2. 57 12.21Ω 1.64A
2. 59 5.432W , 4.074W , 3.259W
2. 61 采用灯泡 R_1 和 R_3
2. 63 $0.4\Omega \approx 1\text{W}$
2. 65 $4\text{k}\Omega$
2. 67 (a) 4V , (b) 2.857V , (c) 28.57% , (d) 6.25%
2. 69 (a) 1.278V (包含电压表), 1.29V (不包含电压表)
(b) 9.30V (包含电压表), 10V (不包含电压表)
(c) 25V (包含电压表), 30.77V (不包含电压表)
2. 71 10Ω
2. 73 45Ω
2. 75 2Ω
2. 77 (a) 4 个 20Ω 电阻器并联

- (b) 1 个 300Ω 电阻器、1 个 1.8Ω 电阻器、
2 个并联 20Ω 电阻器相互串联
(c) 2 个并联 $24k\Omega$ 电阻器与两个并联 $56k\Omega$
电阻器相互串联
(d) 1 个 20Ω 电阻器、1 个 300Ω 电阻器、1
个 $24k\Omega$ 电阻器、2 个并联 $56k\Omega$ 电阻器
相互串联

2.79 75Ω 2.81 $38k\Omega$, $3.333k\Omega$ 2.83 $3k\Omega$, $\infty\Omega$ (最优解)**第 3 章**

3.1 答案不唯一

3.3 $-6A$, $-3A$, $-2A$, $1A$, $-60V$ 3.5 $20V$ 3.7 $5.714V$ 3.9 $79.34mA$ 3.11 $3V$, $293.9W$, $750mW$, $121.5W$ 3.13 $40V$, $40V$ 3.15 $29.45A$, $144.6W$, $129.6W$, $12W$ 3.17 $1.73A$ 3.19 $10V$, $4.933V$, $12.267V$ 3.21 $1V$, $3V$ 3.23 $22.34V$ 3.25 $25.52V$, $22.05V$, $14.842V$, $15.055V$ 3.27 $625mV$, $375mV$, $1.625V$ 3.29 $-0.7708V$, $1.209V$, $2.309V$, $0.7076V$ 3.31 $4.97V$, $4.85V$, $-0.12V$ 3.33 a 与 b 均为平面电路, 可以重画为图 A.2
所示电路

a)

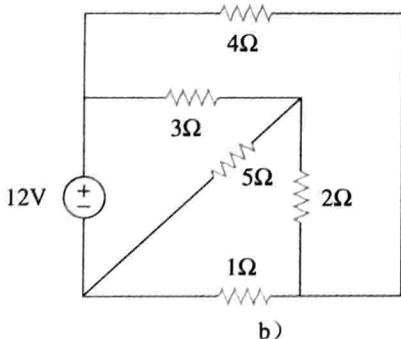


图 A.2 习题 3.33 图

- 3.35 $20V$
3.37 $12V$
3.39 答案不唯一
3.41 $1.188A$
3.43 $1.7778A$, $53.33V$
3.45 $8.561A$
3.47 $10V$, $4.933V$, $12.267V$
3.49 $57V$, $18A$
3.51 $20V$
3.53 $1.6196mA$, $-1.0202mA$, $-2.461mA$,
 $3mA$, $-2.423mA$
3.55 $-1A$, $0A$, $2A$
3.57 $6k\Omega$, $60V$, $30V$
3.59 $-4.48A$, $-1.0752kV$
3.61 -0.3
3.63 $-4V$, $2.105A$
3.65 $2.17A$, $1.9912A$, $1.8119A$, $2.094A$,
 $2.249A$
3.67 $-30V$
3.69
$$\begin{bmatrix} 1.75 & -0.25 & -1 \\ -0.25 & 1 & -0.25 \\ -1 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- 3.71 $6.255A$, $1.9599A$, $3.694A$
3.73
$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & -4 & 0 \\ -3 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.75 $-3A$, $0A$, $3A$
3.77 $3.111V$, $1.4444V$
3.79 $-10.556V$, $20.56V$, $1.3889V$, $-43.75V$
3.81 $26.67V$, $6.667V$, $173.33V$, $-46.67V$
3.83 参见图 A.3; $-12.5V$

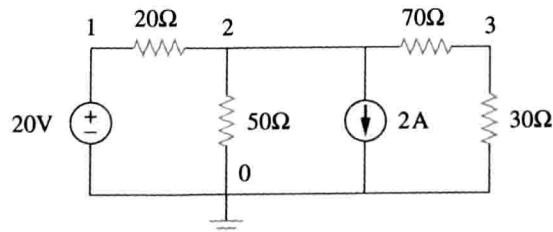


图 A.3 习题 3.83 图

- 3.85 9Ω
3.87 -8
3.89 $22.5\mu A$, $12.75V$
3.91 $0.6105\mu A$, $8.34V$, $49.08mV$
3.93 $1.333A$, $1.333A$, $2.6667A$

第 4 章4.1 $600mA$, $250V$ 4.3 (a) $0.5V$, $0.5A$, (b) $5V$, $5A$, (c) $5V$,

- 500mA
 4.5 4.5V
 4.7 888.9mV
 4.9 2A
 4.11 17.99V, 1.799A
 4.13 8.696V
 4.15 1.875A, 10.55W
 4.17 -8.571V
 4.19 -26.67V
 4.21 答案不唯一
 4.23 1A, 8W
 4.25 -6.6V
 4.27 -48V
 4.29 3V
 4.31 3.652V
 4.33 40V, 20Ω, 1.6A
 4.35 -125mA
 4.37 10Ω, 666.7mA
 4.39 20Ω, -49.2V
 4.41 4Ω, -8V, -2A
 4.43 10Ω, 0V
 4.45 3Ω, 2A
 4.47 1.1905V, 476.2mΩ, 2.5A
 4.49 28Ω, 3.286A
 4.51 (a) 2Ω, 7A, (b) 1.5Ω, 12.667A
 4.53 3Ω, 1A
 4.55 100kΩ, -20mA
 4.57 10Ω, 166.67V, 16.667A
 4.59 22.5Ω, 40V, 1.7778A
 4.61 1.2Ω, 9.6V, 8A
 4.63 -3.333Ω, 0A
 4.65 $V_o = 24 - 5I_o$
 4.67 25Ω, 7.84W
 4.69 ∞(理论值)
 4.71 8kΩ, 1.152W
 4.73 20.77W
 4.75 1kΩ, 3mW
 4.77 (a) 3.8Ω, 4V, (b) 3.2Ω, 15V
 4.79 10Ω, 167V
 4.81 3.3Ω, 10V(注意, 结果由图解法得到)
 4.83 8Ω, 12V
 4.85 (a) 24V, 30kΩ, (b) 9.6V
 4.87 (a) 10mA, 8kΩ (b) 9.926mA
 4.89 (a) 99.99μA, (b) 99.99μA
 4.91 (a) 100Ω, 20Ω, (b) 100Ω, 200Ω
 4.93 $\frac{V_s}{R_s + (1 + \beta)R_o}$
 4.95 5.333V, 66.67kΩ

4.97 2.4kΩ, 4.8V

第5章

- 5.1 (a) 1.5mΩ, (b) 60Ω, (c) 98.06dB
 5.3 10V
 5.5 0.999 990
 5.7 -100nV, -10mV
 5.9 2V, 2V
 5.11 答案不唯一
 5.13 2.7V, 288μA
 5.15 (a) $-\left(R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}\right)$, (b) -92kΩ
 5.17 (a) -2.4, (b) -16, (c) -400
 5.19 -562.5μA
 5.21 -4V
 5.23 $-\frac{R_f}{R_1}$
 5.25 2.312V
 5.27 2.7V
 5.29 $\frac{R_2}{R_1}$
 5.31 727.2μA
 5.33 12mW, -2mA
 5.35 如果 $R_i = 60k$, $R_f = 390k$.
 5.37 1.5V
 5.39 3V
 5.41 参见图 A.4

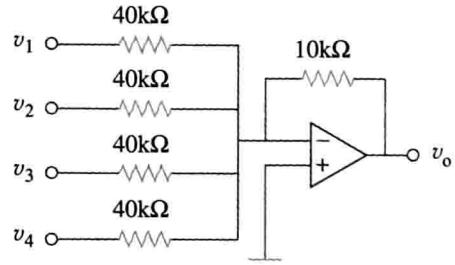


图 A.4 习题 5.41 图

5.43 20k

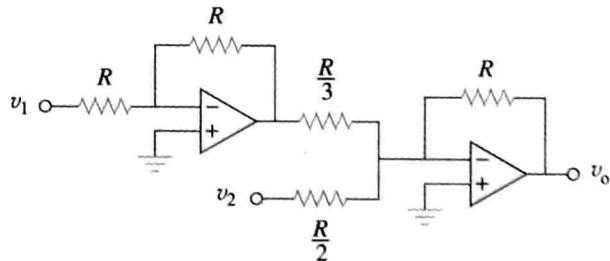
5.45 参见图 A.5 其中 $R \leq 100k\Omega$ 

图 A.5 习题 5.45 图

5.47 14.09V

5.49 $R_1 = R_3 = 20k\Omega$, $R_2 = R_4 = 80k\Omega$

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

- 12.59 $220.6 \angle -34.56^\circ$, $214.1 \angle -81.49^\circ$,
 $49.91 \angle -50.59^\circ$ V, 假设 N 接地
- 12.61 $11.15 \angle 37^\circ$ A, $230.8 \angle -133.4^\circ$ V, 假设 N 接地
- 12.63 $18.67 \angle 158.9^\circ$ A, $12.38 \angle 144.1^\circ$ A
- 12.65 $11.02 \angle 12^\circ$ A,
 $11.02 \angle -108^\circ$ A, $11.02 \angle 132^\circ$ A
- 12.67 (a) 97.67kW , 88.67kW , 82.67kW ,
(b) 108.97A
- 12.69 $I_a = 94.32 \angle -62.05^\circ$ A, $I_b = 94.32 \angle 177.95^\circ$ A,
 $I_c = 94.32 \angle 57.95^\circ$ A, $(28.8 + j18.03)\text{kV} \cdot \text{A}$
- 12.71 (a) 2590W , 4808W , (b) $8335\text{V} \cdot \text{A}$
- 12.73 2360W , -632.8W
- 12.75 (a) 20mA , (b) 200mA
- 12.77 320W
- 12.79 $17.15 \angle -19.65^\circ$, $17.15 \angle -139.65^\circ$,
 $17.15 \angle 100.35^\circ$ A,
 $223 \angle 2.97^\circ$, $223 \angle -117.03^\circ$,
 $223 \angle 122.97^\circ$ V
- 12.81 516V
- 12.83 183.42A
- 12.85 $Z_Y = 2.133\Omega$
- 12.87 $1.448 \angle -176.6^\circ$ A, $(1252 + j711.6)\text{V} \cdot \text{A}$,
 $(1085 + j721.2)\text{V} \cdot \text{A}$

第 13 章

(除非特殊说明, 否则所有给出的电流、电压值均指有效值)

- 13.1 20H
- 13.3 300mH , 100mH , 50mH , 0.2887
- 13.5 (a) 247.4mH , (b) 48.62mH
- 13.7 $1.081 \angle 144.16^\circ$ V
- 13.9 $2.074 \angle 21.12^\circ$ V
- 13.11 $461.9 \cos(600t - 80.26^\circ)$ mA
- 13.13 $[4.308 + j4.538]\Omega$
- 13.15 $[1.0014 + j19.498]\Omega$, $1.1452 \angle 6.37^\circ$ mA
- 13.17 $[25.07 + j25.86]\Omega$
- 13.19 参见图 A.22

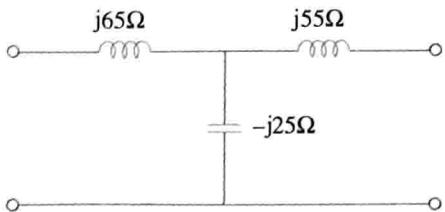


图 A.22 习题 13.19 图

- 13.21 答案不唯一
- 13.23 $3.081 \cos(10t + 40.74^\circ)$ A,

2. $367 \cos(10t - 99.46^\circ)$ A, 10.094J
- 13.25 $2.2 \sin(2t - 4.88^\circ)$ A, $1.5085 \angle 17.9^\circ$ Ω
- 13.27 11.608W
- 13.29 0.984 , 130.5mJ
- 13.31 答案不唯一
- 13.33 $(12.769 + j7.154)\Omega$
- 13.35 $1.4754 \angle -21.41^\circ$ A, $77.5 \angle -134.85^\circ$ mA,
 $77 \angle -110.41^\circ$ mA
- 13.37 (a) 5, (b) 104.17A , (c) 20.83A
- 13.39 $15.7 \angle 20.31^\circ$ A, $78.5 \angle 20.31^\circ$ A
- 13.41 500mA , -1.5A
- 13.43 4.186V , 16.744V
- 13.45 36.71mW
- 13.47 $2.656 \cos(3t + 5.48^\circ)$ V
- 13.49 $0.937 \cos(2t + 51.34^\circ)$ A
- 13.51 $[8 - j1.5]\Omega$, $8.95 \angle 10.62^\circ$ A
- 13.53 (a) 5, (b) 8W
- 13.55 1.6669Ω
- 13.57 (a) $25.9 \angle 69.96^\circ$, $12.95 \angle 69.96^\circ$ A(rms),
(b) $21.06 \angle 147.4^\circ$, $42.12 \angle 147.4^\circ$,
 $42.12 \angle 147.4^\circ$ V(rms),
(c) $1554 \angle 20.04^\circ$ V · A
- 13.59 24.69W , 16.661W , 3.087W
- 13.61 6A , 0.36A , -60V
- 13.63 $3.795 \angle 18.43^\circ$ A, $1.8975 \angle 18.43^\circ$ A,
 $0.6325 \angle 161.6^\circ$ A
- 13.65 11.05W
- 13.67 (a) 160V , (b) 31.25A , (c) 12.5A
- 13.69 $(1.2 - j2)\text{k}\Omega$, 5.333W
- 13.71 $[1 + (N_1/N_2)]^2 Z_L$
- 13.73 (a) 三相 Δ-Y 变压器
(b) $8.66 \angle 156.87^\circ$ A, $5 \angle -83.13^\circ$ A,
(c) 1.8kW
- 13.75 (a) 0.11547 , (b) 76.98A , 15.395A
- 13.77 (a) 单相变压器, $1:n$, $n=1/110$,
(b) 7.576mA
- 13.79 $1.306 \angle -68.01^\circ$ A, $406.8 \angle -77.86^\circ$ mA,
 $1.336 \angle -54.92^\circ$ A
- 13.81 $104.5 \angle 13.96^\circ$ mA, $29.54 \angle -143.8^\circ$ mA,
 $208.8 \angle 24.4^\circ$ mA
- 13.83 $1.08 \angle 33.91^\circ$ A, $15.14 \angle -34.21^\circ$ V
- 13.85 100 匝
- 13.87 0.5
- 13.89 0.5 , 41.67A , 83.33A
- 13.91 (a) $1875\text{kV} \cdot \text{A}$, (b) 7812A
- 13.93 (a) 参见图 A.23a; (b) 参见图 A.23b

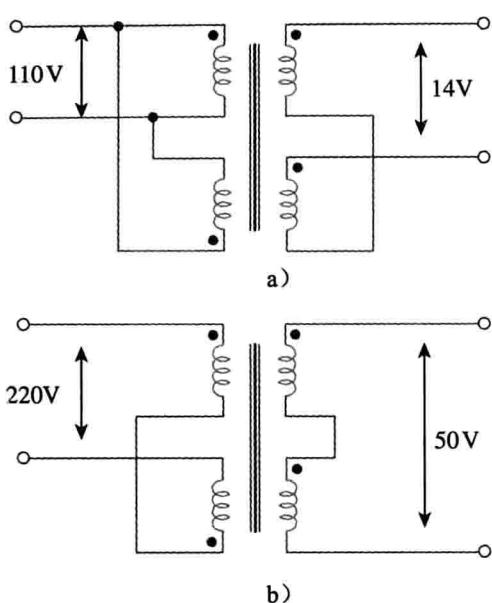


图 A.23 习题 13.93 图

13.95 (a) $1/60$, (b) 139mA

第 14 章

14.1 $\frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

14.3 $5s/(s^2 + 8s + 5)$

14.5 (a) $\frac{sRL}{(R+R_s)Ls+RR_s}$, (b) $\frac{R}{LRCs^2+Ls+R}$

14.7 (a) 1.005773 , (b) 0.4898 , (c) 1.718×10^5

14.9 参见图 A.24

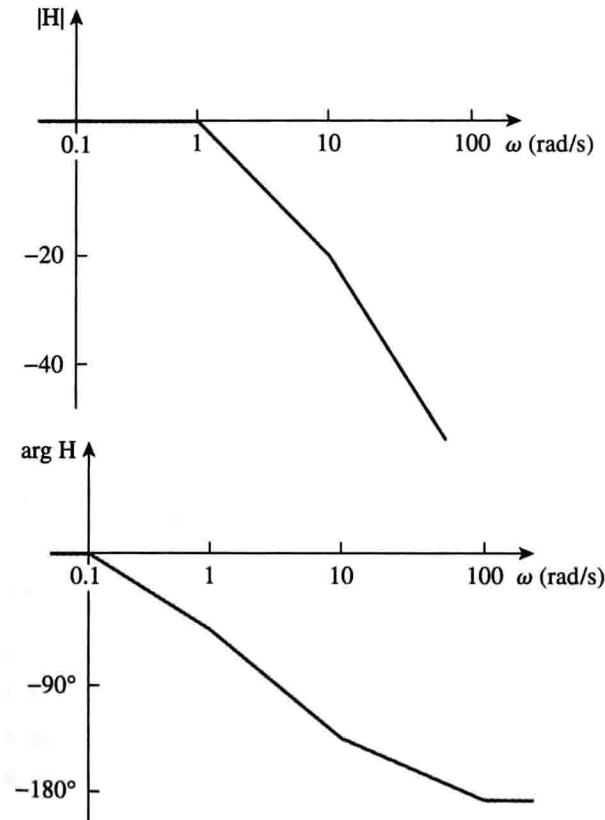


图 A.24 习题 14.9 图

14.11 参见图 A.25

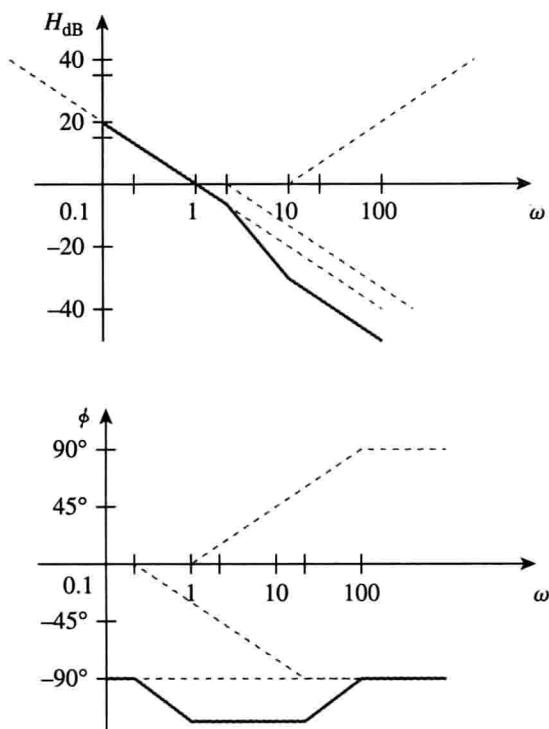


图 A.25 习题 14.11 图

14.13 参见图 A.26

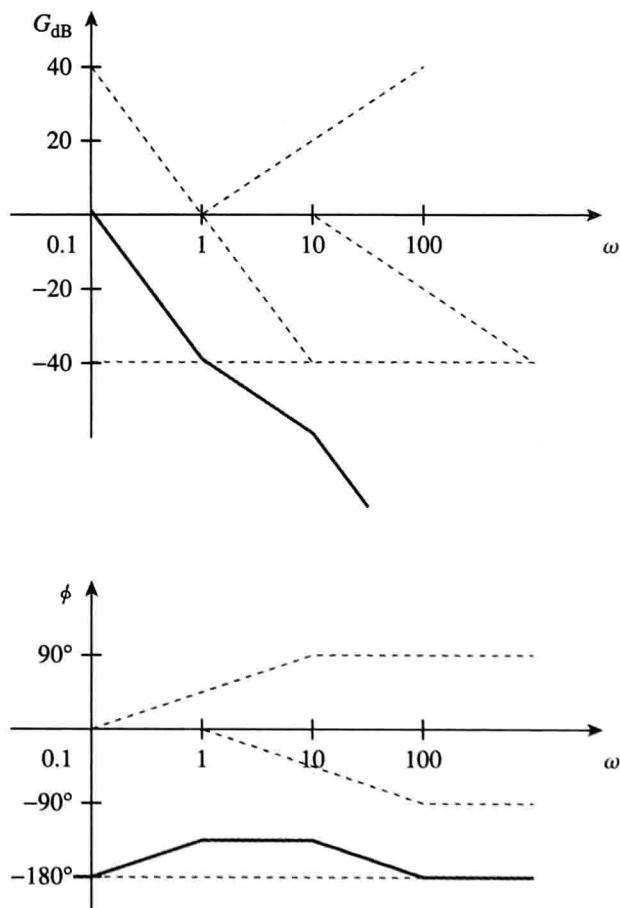


图 A.26 习题 14.13 图

14.15 参见图 A.27

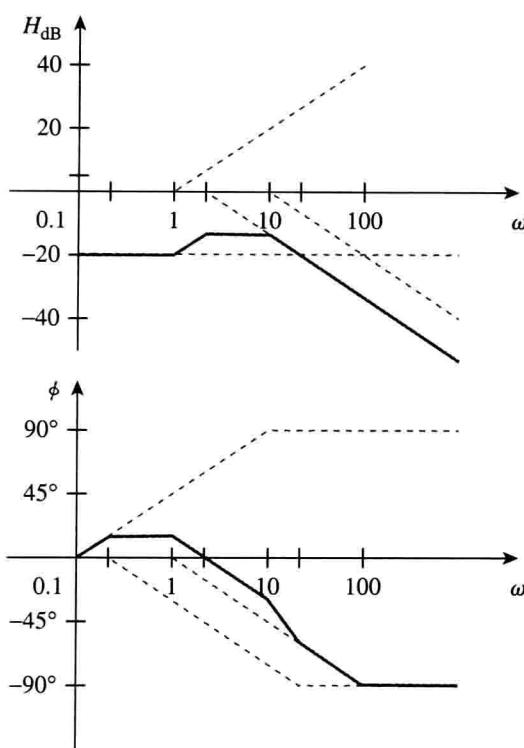


图 A.27 习题 14.15 图

14.17 参见图 A.28

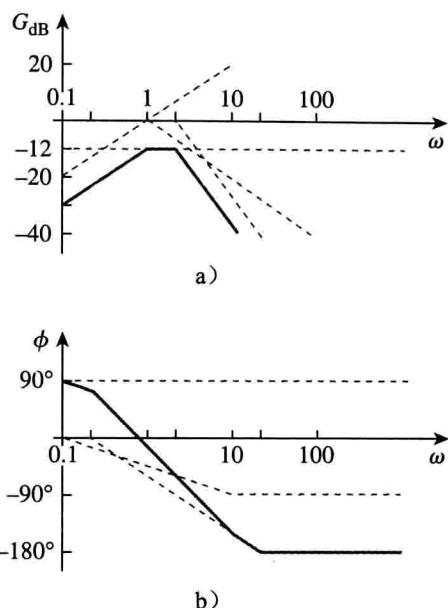


图 A.28 习题 14.17 图

14.19 参见图 A.29

14.21 参见图 A.30

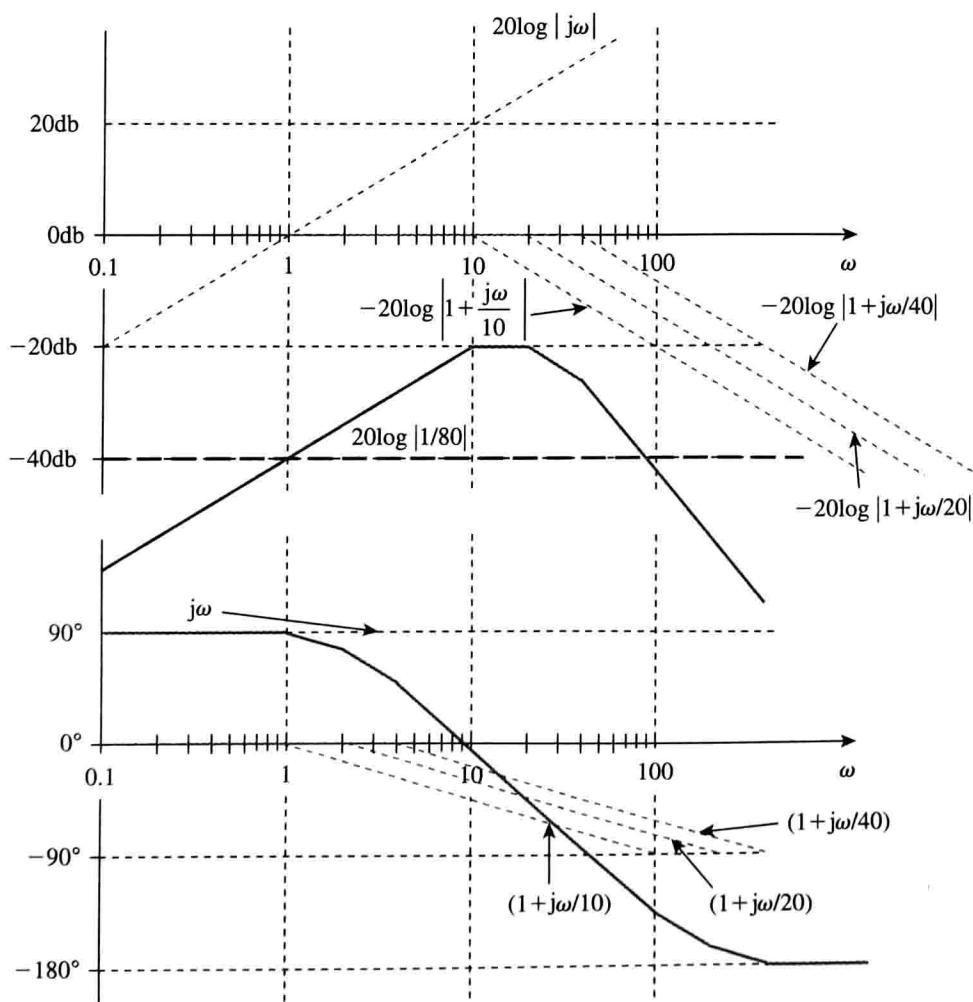


图 A.29 习题 14.19 图

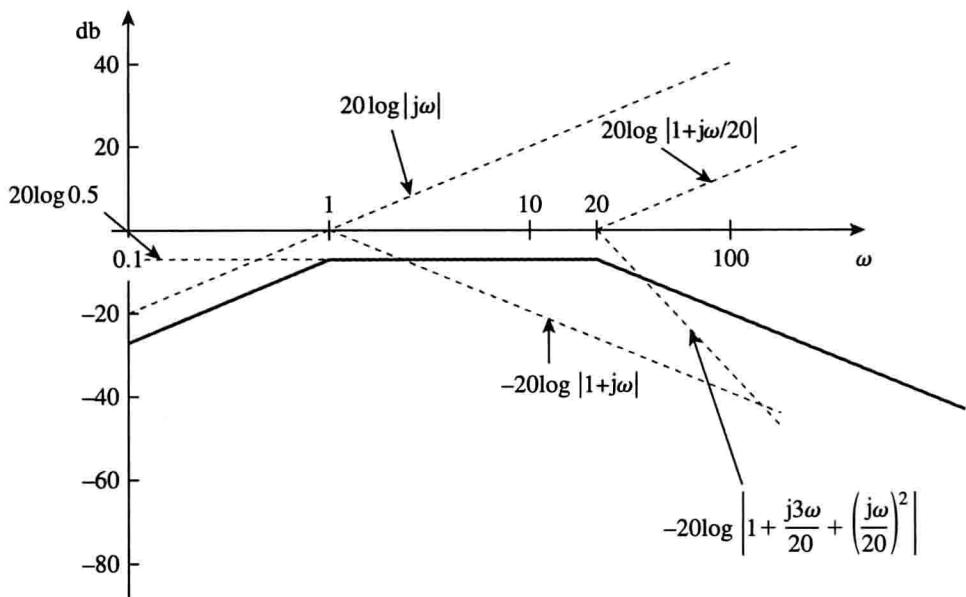


图 A.30 习题 14.21 图

14.23 $\frac{100j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)^2}$

(注意：函数之前有符号也是正确的。幅度图不包含此信息，它仅从相位图中计算得到)

14.25 $2k\Omega, (2-j0.75)k\Omega, (2-j0.3)k\Omega,$
 $2+j0.3k\Omega, 2+j0.75k\Omega$

14.27 $R=1\Omega, L=0.1H, C=25mF$

14.29 $4.082krad/s, 105.55rad/s, 38.67$

14.31 $50mH, 200mF, 0.5rad/s$

14.33 $50krad/s, 5.95 \times 10^6 rad/s, 6.05 \times 10^6 rad/s.$

14.35 (a) $1.443krad/s$, (b) $3.33rad/s$, (c) 432.9

14.37 $2k\Omega, (1.4212+j53.3)\Omega, (8.85+j132.74)\Omega,$
 $(8.85-j132.74)\Omega, (1.4212-j53.3)\Omega$

14.39 $4.841krad/s$

14.41 答案不唯一

14.43 $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}, \frac{1}{\sqrt{LC}}$

14.45 $447.2rad/s, 1.067rad/s, 419.1$

14.47 $796kHz$

14.49 答案不唯一

14.51 $1.256k\Omega$

14.53 $18.045k\Omega, 2.872H, 10.5$

14.55 $1.56kHz < f < 1.62kHz, 25$

14.57 (a) $1rad/s, 3rad/s$, (b) $1rad/s, 3rad/s$

14.59 $2.408krad/s, 15.811krad/s$

14.61 (a) $\frac{1}{1+j\omega RC},$ (b) $\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$

14.63 $10M\Omega, 100k\Omega$

14.65 证明略

14.67 如果 $R_f=20k\Omega$, 则 $R_i=80k\Omega$ and $C=15.915nF.$

14.69 令 $R=10k\Omega$, 则 $R_f=25k\Omega,$
 $C=7.96nF.$

14.71 $K_f=2 \times 10^{-4}, K_m=5 \times 10^{-3}$

14.73 $9.6M\Omega, 32\mu H, 0.375pF$

14.75 $200\Omega, 400\mu H, 1\mu F$

14.77 (a) $1200H, 0.5208\mu F$, (b) $2mH, 312.5nF$,
(c) $8mH, 7.81pF$

14.79 (a) $8s+5 + \frac{10}{s}$, (b) $0.8s+50 + \frac{10^4}{s},$
 $111.8rad/s$

14.81 (a) $0.4\Omega, 0.4H, 1mF, 1mS$,
(b) $0.4\Omega, 0.4mH, 1\mu F, 1mS$

14.83 $0.1pF, 0.5pF, 1M\Omega, 2M\Omega$

14.85 参见图 A.31

14.87 参见图 A.32; 高通滤波器, $f_0=1.2Hz$.

14.89 参见图 A.33

14.91 参见图 A.34, $f_0=800Hz$.

14.93 $\frac{-RCs+1}{RCs+1}$

14.95 (a) $0.541MHz < f_0 < 1.624MHz$,
(b) $67.98, 204.1$

14.97 $\frac{s^3 LR_L C_1 C_2}{(sR_1 C_1 + 1)(s^2 LC_2 + sR_L C_2 + 1) + s^2 LC_1 (sR_L C_2 + 1)}$

14.99 $8.165MHz, 4.188 \times 10^6 rad/s$

14.101 $1.061k\Omega$

14.103 $\frac{R_2(1+sCR_1)}{R_1+R_2+sCR_1R_2}$

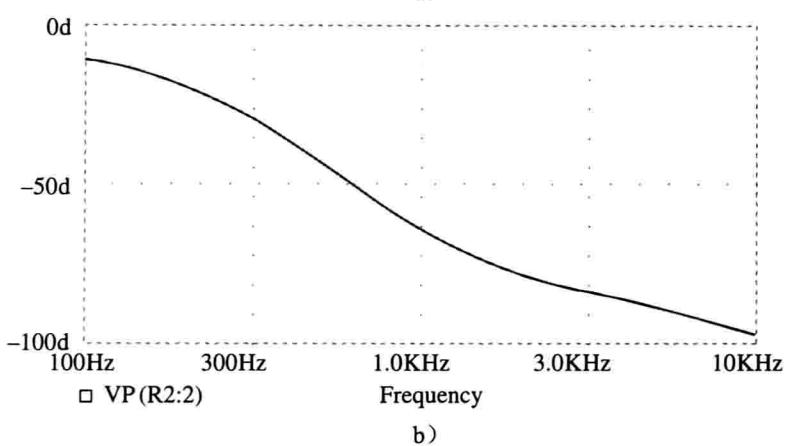
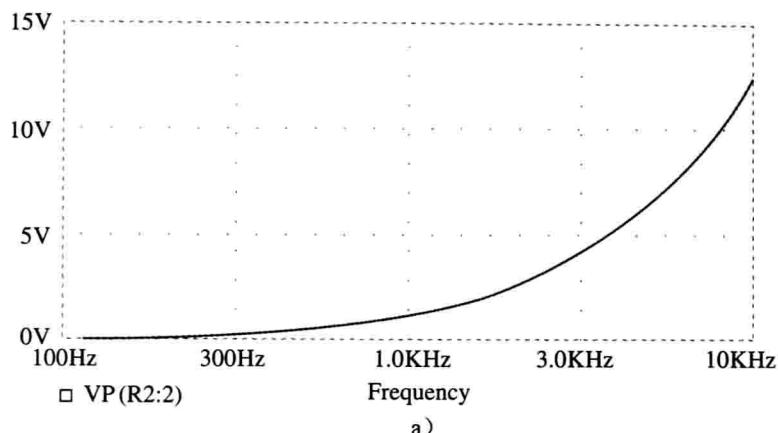


图 A.31 习题 14.85 图

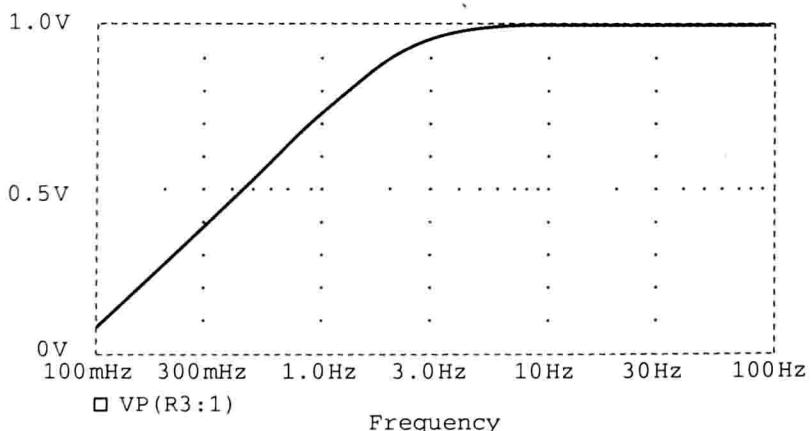


图 A.32 习题 14.87 图

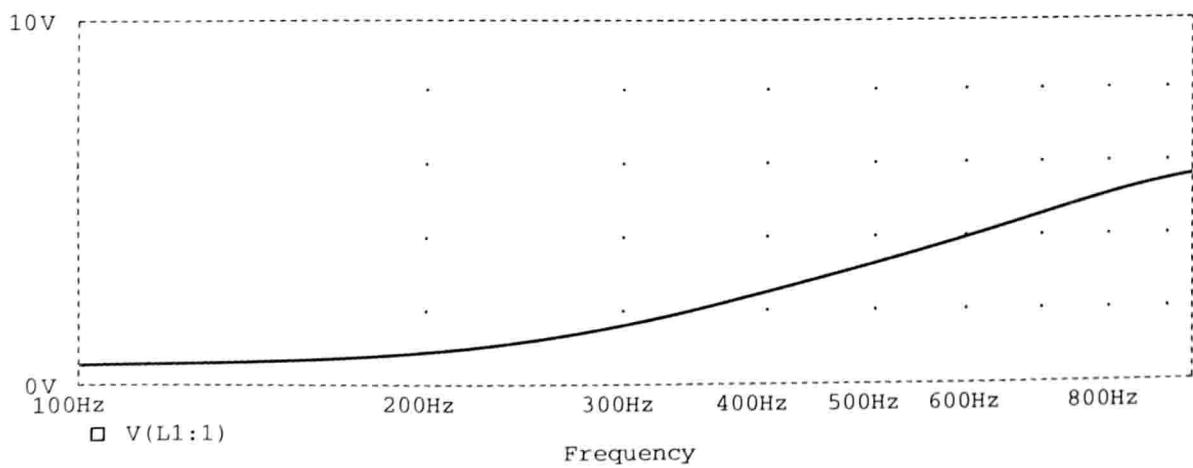


图 A.33 习题 14.89 图

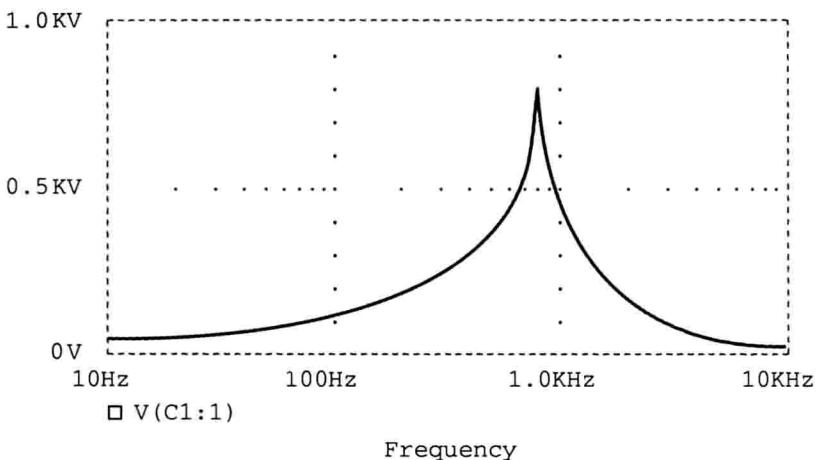


图 A.34 习题 14.91 图

第 15 章

15.1 (a) $\frac{s}{s^2 - a^2}$, (b) $\frac{a}{s^2 - a^2}$

15.3 (a) $\frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$, (b) $\frac{4}{(s+2)^2 + 16}$,
(c) $\frac{s+3}{(s+3)^2 - 4}$, (d) $\frac{1}{(s+4)^2 - 1}$,
(e) $\frac{4(s+1)}{[(s+1)^2 + 4]^2}$

15.5 (a) $\frac{8 - 12\sqrt{3}s - 6s^2 + \sqrt{3}s^3}{(s^2 + 4)^3}$,
(b) $\frac{72}{(s+2)^5}$, (c) $\frac{2}{s^2} - 4s$,
(d) $\frac{2e}{s+1}$, (e) $\frac{5}{s}$, (f) $\frac{18}{3s+1}$, (g) s^n

15.7 (a) $\frac{2}{s^2} + \frac{4}{s}$, (b) $\frac{4}{s} + \frac{3}{s+2}$,
(c) $\frac{8s+18}{s^2+9}$, (d) $\frac{s+2}{s^2+4s-12}$

15.9 (a) $\frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2}$, (b) $\frac{2e^{-s}}{e^4(s+4)}$,
(c) $\frac{2.702s}{s^2+4} + \frac{8.415}{s^2+4}$,
(d) $\frac{6}{s}e^{-2s} - \frac{6}{s}e^{-4s}$

15.11 (a) $\frac{6(s+1)}{s^2 + 2s - 3}$,
(b) $\frac{24(s+2)}{(s^2 + 4s - 12)^2}$,
(c) $\frac{e^{-(2s+6)} [(4e^2 + 4e^{-2})s + (16e^2 + 8e^{-2})]}{s^2 + 6s + 8}$

15.13 (a) $\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$,
(b) $\frac{2(s+1)}{(s^2 + 2s + 2)^2}$,
(c) $\tan^{-1} \left(\frac{\beta}{s} \right)$

15.15 5 $\frac{1 - e^{-s} - se^{-s}}{s^2(1 - e^{-3s})}$

15.17 答案不唯一

15.19 $\frac{1}{1 - e^{-2s}}$

15.21 $\frac{(2\pi s - 1 + e^{-2\pi s})}{2\pi s^2(1 - e^{-2\pi s})}$

15.23 (a) $\frac{(1 - e^{-s})^2}{s(1 - e^{-2s})}$,
(b) $\frac{2(1 - e^{-2s}) - 4se^{-2s}(s + s^2)}{s^3(1 - e^{-2s})}$

15.25 (a) 5 和 0, (b) 5 和 0

15.27 (a) $u(t) + 2e^{-t}u(t)$, (b) $3\delta(t) - 11e^{-4t}u(t)$,
(c) $(2e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$,
(d) $(3e^{-4t} - 3e^{-2t} + 6te^{-2t})u(t)$

15.29 $\left(2 - 2e^{-2t}\cos 3t - \frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t \right)u(t), t \geq 0$

15.31 (a) $(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t)$
(b) $\left(-e^{-t} + \left(1 + 3t - \frac{t^2}{2} \right)e^{-2t} \right)u(t)$,
(c) $(-0.2e^{-2t} + 0.2e^{-t}\cos(2t) + 0.4e^{-t}\sin(2t))u(t)$

15.33 (a) $(3e^{-t} + 3\sin(t) - 3\cos(t))u(t)$,
(b) $\cos(t - \pi)u(t - \pi)$,

(c) $8[1 - e^{-t} - te^{-t} - 0.5t^2e^{-t}]u(t)$

15.35 (a) $[2e^{-(t-6)} - e^{-2(t-6)}]u(t-6)$,
(b) $\frac{4}{3}u(t)[e^{-t} - e^{-4t}] - \frac{1}{3}u(t-2)[e^{-(t-2)} - e^{-4(t-2)}]$,
(c) $\frac{1}{13}u(t-1)[-3e^{-3(t-1)} + 3\cos 2(t-1) + 2\sin 2(t-1)]$

15.37 (a) $(2 - e^{-2t})u(t)$,
(b) $[0.4e^{-3t} + 0.6e^{-t}\cos t + 0.8e^{-t}\sin t]u(t)$,
(c) $e^{-2(t-4)}u(t-4)$,
(d) $\left(\frac{10}{3}\cos t - \frac{10}{3}\cos 2t \right)u(t)$

15.39 (a) $(-1.6e^{-t}\cos^4 t - 4.05e^{-t}\sin 4t + 3.6e^{-2t}\cos 4t + (3.45e^{-2t}\sin 4t))u(t)$,

$$(b) [0.08333\cos 3t + 0.02778\sin 3t + 0.0944e^{-0.551t} - 0.1778e^{-5.449t}]u(t)$$

$$15.41 \quad z(t) = \begin{cases} 8t, & 0 < t < 2 \\ 16 - 8t, & 2 < t < 6 \\ -16, & 6 < t < 8 \\ 8t - 80, & 8 < t < 12 \\ 112 - 8t, & 12 < t < 14 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$15.43 \quad (a) y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t < 2 \\ 1, & t > 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(b) y(t) = 2(1 - e^{-t}), \quad t > 0,$$

$$(c) y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}, & -1 < t < 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}, & 0 < t < 2 \\ \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$15.45 \quad (4e^{-2t} - 8te^{-2t})u(t)$$

$$15.47 \quad (a) (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t), \quad (b) (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$15.49 \quad (a) \left(\frac{t}{a}(e^{at} - 1) - \frac{1}{a^2}(at - 1) \right)u(t),$$

$$(b) [0.5\cos(t)(t + 0.5\sin(2t)) - 0.5\sin(t)(\cos(t) - 1)]u(t)$$

$$15.51 \quad (5e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

$$15.53 \quad \cos(t) + \sin(t) \text{ 或 } 1.4142 \cos(t - 45^\circ)$$

$$15.55 \quad \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{20}e^{-2t} - \frac{3}{104}e^{-4t} - \frac{3}{65}e^{-t}\cos(2t) - \frac{2}{65}e^{-t}\sin(2t) \right)u(t)$$

15.57 答案不唯一

$$15.59 \quad [-2.5e^{-t} + 12e^{-2t} - 10.5e^{-3t}]u(t)$$

$$15.61 \quad (a) [3 + 3.162\cos(2t - 161.12^\circ)]u(t)V,$$

$$(b) [2 - 4e^{-t} + e^{-4t}]u(t)A,$$

$$(c) [3 + 2e^{-t} + 3te^{-t}]u(t)V,$$

$$(d) [2 + 2e^{-t}\cos(2t)]u(t)A$$

第 16 章

$$16.1 \quad [(2 + 10t)e^{-5t}]u(t)A$$

$$16.3 \quad [(20 + 20t)e^{-t}]u(t)V$$

$$16.5 \quad 750\Omega, 25H, 200\mu F$$

$$16.7 \quad [2 + 4e^{-t}(\cos(2t) + 2\sin(2t))]u(t)A$$

$$16.9 \quad [400 + 789.8e^{-1.5505t} - 189.8e^{-6.45t}]u(t)mA$$

$$16.11 \quad 20.83\Omega, 80\mu F$$

16.13 答案不唯一

$$16.15 \quad 120\Omega$$

$$16.17 \quad \left(e^{-2t} - \frac{2}{\sqrt{7}}e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right)u(t)A$$

$$16.19 \quad [-1.3333e^{-t/2} + 1.3333e^{-2t}]u(t)V$$

$$16.21 \quad [64.65e^{-2.679t} - 4.65e^{-37.32t}]u(t)V$$

$$16.23 \quad 18\cos(0.5t - 90^\circ)u(t)V$$

$$16.25 \quad [18e^{-t} - 2e^{-9t}]u(t)V$$

$$16.27 \quad [20 - 10.206e^{-0.05051t} + 0.2052e^{-4.949t}]u(t)V$$

$$16.29 \quad 10\cos(8t + 90^\circ)u(t)A$$

$$16.31 \quad [35 + 25e^{-0.8t}\cos(0.6t + 126.87^\circ)]u(t)V, \\ 5e^{-0.8t}[\cos(0.6t - 90^\circ)]u(t)A$$

16.33 答案不唯一

$$16.35 \quad [5.714e^{-t} - 5.714e^{-t/2}\cos(0.866t) + 25.57e^{-t/2}\sin(0.866t)]u(t)V$$

$$16.37 \quad [-6 + 6.022e^{-0.1672t} - 0.021e^{-47.84t}]u(t)V$$

$$16.39 \quad [0.3636e^{-2t}\cos(4.583t - 90^\circ)]u(t)A$$

$$16.41 \quad [200te^{-10t}]u(t)V$$

$$16.43 \quad [3 + 3e^{-2t} + 6te^{-2t}]u(t)A$$

$$16.45 \quad [i_o / (\omega C)]\cos(\omega t + 90^\circ)u(t)V$$

$$16.47 \quad [15 - 10e^{-0.6t}(\cos(0.2t) - \sin(0.2t))]u(t)A$$

$$16.49 \quad [0.7143e^{-2t} - 1.7145e^{-0.5t}\cos(1.25t) + 3.194e^{-0.5t}\sin(1.25t)]u(t)A$$

$$16.51 \quad [-5 + 17.156e^{-15.125t}\cos(4.608t - 73.06^\circ)]u(t)A$$

$$16.53 \quad [4.618e^{-t}\cos(1.7321t + 30^\circ)]u(t)V$$

$$16.55 \quad [4 - 3.2e^{-t} - 0.8e^{-6t}]u(t)A, \\ [1.6e^{-t} - 1.6e^{-6t}]u(t)A$$

$$16.57 \quad (a) (3/s)[1 - e^{-s}], \quad (b) [(2 - 2e^{-1.5t})u(t) - (2 - 2e^{-1.5(t-1)})u(t-1)]V$$

$$16.59 \quad [e^{-t} - 2e^{-t/2}\cos(t/2)]u(t)V$$

$$16.61 \quad [6.667 - 6.8e^{-1.2306t} + 5.808e^{-0.6347t}\cos(1.4265t + 88.68^\circ)]u(t)V$$

$$16.63 \quad [5e^{-4t}\cos(2t) + 230e^{-4t}\sin(2t)]u(t)V, \\ [6 - 6e^{-4t}\cos(2t) - 11.375e^{-4t}\sin(2t)]u(t)A$$

$$16.65 \quad \{2.202e^{-3t} + 3.84te^{-3t} - 0.202\cos(4t) + 0.6915\sin(4t)\}u(t)V$$

$$16.67 \quad [e^{10t} - e^{-10t}]u(t)V; \quad \text{这是一个不稳定的电路}$$

$$16.69 \quad 6.667(s+0.5)/[s(s+2)(s+3)], \\ -3.333(s-1)/[s(s+2)(s+3)]$$

$$16.71 \quad 10[2e^{-1.5t} - e^{-t}]u(t)A$$

$$16.73 \quad \frac{10s^2}{s^2 + 4}$$

$$16.75 \quad 4 + \frac{s}{2(s+3)} - \frac{2s(s+2)}{s^2 + 4s + 20} - \frac{12s}{s^2 + 4s + 20}$$

$$16.77 \quad \frac{9s}{3s^2 + 9s + 2}$$

$$16.79 \quad (a) \frac{s^2 - 3}{3s^2 + 2s - 9}, \quad (b) \frac{-3}{2s}$$

16.81 $-1/(RLCs^2)$

16.83 (a) $\frac{R}{L}e^{-Rt/L}u(t)$, (b) $(1-e^{-Rt/L})u(t)$

16.85 $[3e^{-t}-3e^{-2t}-2te^{-2t}]u(t)$

16.87 答案不唯一

16.89 $\begin{bmatrix} v'_c \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_c \\ i'_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix};$

$v_o(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s \\ i_s \end{bmatrix}$

16.91 $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t);$

$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] z(t)$

16.93 $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t);$

$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0] z(t)$

16.95 $[-2.4 + 4.4e^{-3t}\cos(t) - 0.8e^{-3t}\sin(t)]u(t),$
 $[-1.2 - 0.8e^{-3t}\cos(t) + 0.6e^{-3t}\sin(t)]u(t)$

16.97 (a) $(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$, (b) 系统稳定

16.99 $500\mu\text{F}, 333.3\text{H}$

16.101 $100\mu\text{F}$

16.103 $-100, 400, 2 \times 10^4$

16.105 如果令 $L=R^2C$, 则 $V_o/I_o=sL$

第 17 章

17.1 (a) 周期的, 2, (b) 非周期的, (c) 周期的,
 2π , (d) 周期的, π , (e) 周期的, 10, (f) 非
周期的, (g) 非周期的

17.3 参见图 A.35

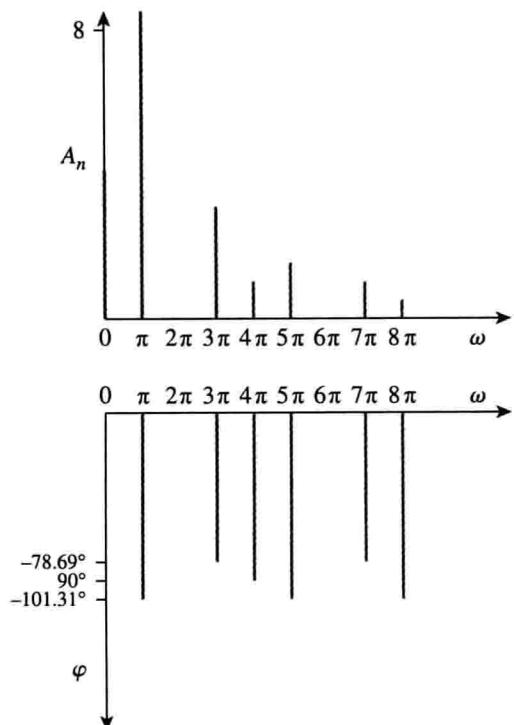


图 A.35 习题 17.3 图

17.5 $-1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n=\text{奇数}}}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \sin nt$

17.7 $1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{n\pi} \sin \frac{4n\pi}{3} \cos \frac{2n\pi t}{3} + \frac{3}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \sin \frac{2n\pi t}{3} \right], \text{ 参见图 A.36.}$

17.9 $a_0 = 3.183, a_1 = 10, a_2 = 4.244, a_3 = 0,$
 $b_1 = 0 = b_2 = b_3$

17.11 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{10}{n^2\pi^2} [1 + j(jn\pi/2 - 1) \sin n\pi/2 + n\pi \sin n\pi/2] e^{jn\pi t/2}$

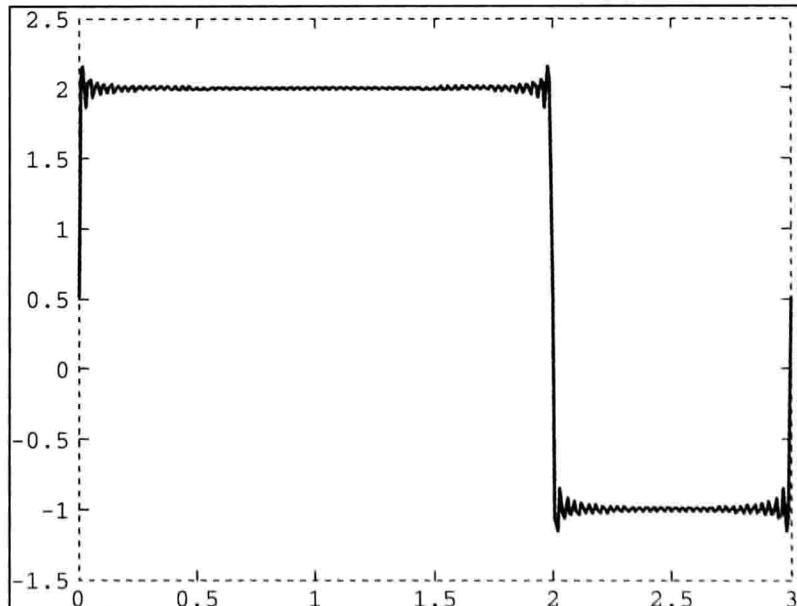


图 A.36 习题 17.7 图

17.13 答案不唯一

$$17.15 \quad (a) 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{16}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{n^6}} \cos\left(10nt - \tan^{-1}\frac{n^2+1}{4\pi^3}\right),$$

$$(b) 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{16}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{n^6}} \sin\left(10nt + \tan^{-1}\frac{4n^3}{n^2+1}\right)$$

17.17 (a) 非奇非偶, (b) 偶, (c) 奇, (d) 偶,
(e) 非奇非偶

$$17.19 \quad \frac{5}{n^2\omega_0^2} \sin n\pi/2 - \frac{10}{n\omega_0} (\cos n\pi - \cos n\pi/2) - \frac{5}{n^2\omega_0^2} (\sin n\pi - \sin n\pi/2) - \frac{2}{n\omega_0} \cos n\pi - \frac{\cos n\pi/2}{n\omega_0}$$

$$17.21 \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$$

17.23 答案不唯一

17.25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \left[\frac{3}{\pi^2 n^2} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - 1 \right) + \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \\ + \left[\frac{3}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) - \frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right] \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \end{cases}$$

17.27 (a) 奇对称, (b) -0.045, (c) 0.383

$$17.29 \quad 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n} \sin(n\pi) \right], \quad n=2k-1$$

$$17.31 \quad \omega'_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{T/\alpha} = \alpha\omega_0$$

$$a'_n = \frac{2}{T'} \int_0^{T'} f(\alpha t) \cos n\omega'_0 t dt$$

令 $\alpha t = \lambda$, $dt = d\lambda/\alpha$, $\alpha T' = T$, 则

$$a'_n = \frac{2\alpha}{T} \int_0^T f(\lambda) \cos n\omega_0 \lambda d\lambda/\alpha = a_n$$

类似地, $b'_n = b_n$

$$17.33 \quad v_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi t - \theta_n) V,$$

$$A_n = \frac{8(4-2n^2\pi^2)}{\sqrt{(20-10n^2\pi^2)^2 - 64n^2\pi^2}},$$

$$\theta_n = 90^\circ - \arctan\left(\frac{8n\pi}{20-10n^2\pi^2}\right)$$

$$17.35 \quad \frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{3} + \theta_n\right), \text{ 式中}$$

$$A_n = \frac{\frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{9\pi^2 n^2 + (2\pi^2 n^2/3 - 3)^2}},$$

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2n\pi}{9} - \frac{1}{n\pi}\right)$$

$$17.37 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos n\pi)}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} \cos(n\pi t - \arctan n\pi)$$

$$17.39 \quad \frac{1}{20} + \frac{200}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I_n \sin(n\pi t - \theta_n), \quad n=2k-1,$$

$$\theta_n = 90^\circ + \arctan \frac{2n^2\pi^2 - 1200}{802n\pi},$$

$$I_n = \frac{1}{n \sqrt{(804n\pi)^2 + (2n^2\pi^2 - 1200)}},$$

$$17.41 \quad \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2nt + \theta_n), \text{ 式中}$$

$$A_n = \frac{20}{\pi(4n^2-1)\sqrt{16n^2-40n+29}},$$

$$\theta_n = 90^\circ - \arctan(2n-2.5)$$

$$17.43 \quad (a) 33.91V,$$

$$(b) 6.782A,$$

$$(c) 203.1W$$

$$17.45 \quad 4.263A, 181.7W$$

$$17.47 \quad 10\%$$

$$17.49 \quad (a) 3.162,$$

$$(b) 3.065,$$

$$(c) 3.068\%$$

17.51 答案不唯一

$$17.53 \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{0.6321 e^{j2n\pi t}}{1+j2n\pi}$$

$$17.55 \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+e^{-jn\pi}}{2\pi(1-n^2)} e^{jnt}$$

$$17.57 \quad -3 + \sum_{n=\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{3}{n^3-2} e^{j50nt}$$

$$17.59 \quad - \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \frac{j4e^{-j(2n+1)\pi t}}{(2n+1)\pi}$$

$$17.61 \quad (a) 6 + 2.571 \cos t - 3.83 \sin t + 1.638 \cos 2t - 1.147 \sin 2t + 0.906 \cos 3t - 0.423 \sin 3t + 0.47 \cos 4t - 0.171 \sin 4t,$$

$$(b) 6.828$$

17.63 参见图 A.37

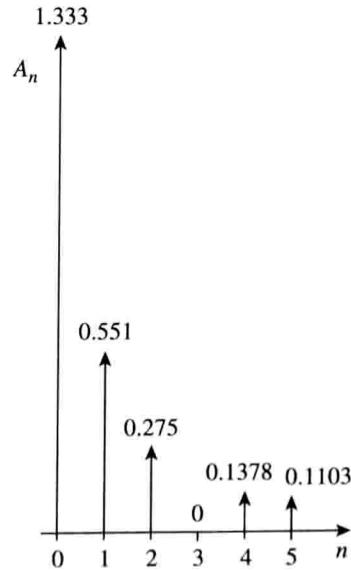


图 A.37 习题 17.63 图

17.65 参见图 A.38

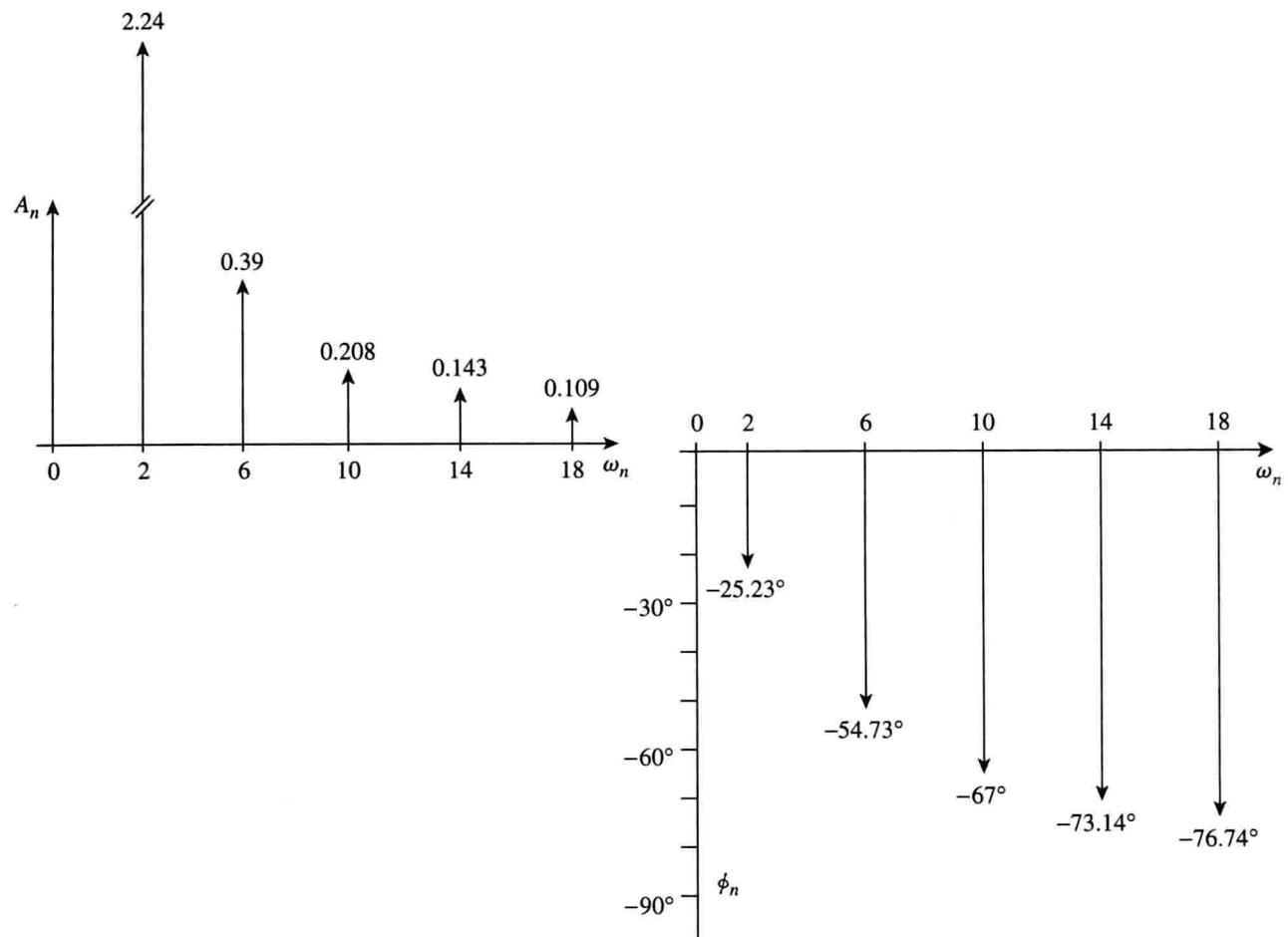


图 A.38 习题 17.65 图

17.67 DC COMPONENT = 2.000396E+00

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	1.667E-01	2.432E+00	1.000E+00	-8.996E+01	0.000E+00
2	3.334E-01	6.576E-04	2.705E-04	-8.932E+01	6.467E-01
3	5.001E-01	5.403E-01	2.222E-01	9.011E+01	1.801E+02
4	6.668E+01	3.343E-04	1.375E-04	9.134E+01	1.813E+02
5	8.335E-01	9.716E-02	3.996E-02	-8.982E+01	1.433E-01
6	1.000E+00	7.481E-06	3.076E-06	-9.000E+01	-3.581E-02
7	1.167E+00	4.968E-02	2.043E-01	-8.975E+01	2.173E-01
8	1.334E+00	1.613E-04	6.634E-05	-8.722E+01	2.748E+00
9	1.500E+00	6.002E-02	2.468E-02	-9.032E+01	1.803E+02

HARMONIC NO	FREQUENCY (HZ)	FOURIER COMPONENT	NORMALIZED COMPONENT	PHASE (DEG)	NORMALIZED PHASE (DEG)
1	5.000E-01	4.056E-01	1.000E+00	-9.090E+01	0.000E+00
2	1.000E+00	2.977E-04	7.341E-04	-8.707E+01	3.833E+00
3	1.500E+00	4.531E-02	1.117E-01	-9.266E+01	-1.761E+00
4	2.000E+00	2.969E-04	7.320E-04	-8.414E+01	6.757E+00
5	2.500E+00	1.648E-02	4.064E-02	-9.432E+01	-3.417E+00
6	3.000E+00	2.955E-04	7.285E-04	-8.124E+01	9.659E+00
7	3.500E+00	8.535E-03	2.104E-02	-9.581E+01	-4.911E+00
8	4.000E+00	2.935E-04	7.238E-04	-7.836E+01	1.254E+01
9	4.500E+00	5.258E-03	1.296E-02	-9.710E+01	-6.197E+00

TOTAL HARMONIC DISTORTION = 1.214285+01 PERCENT

17.71 参见图 A.39

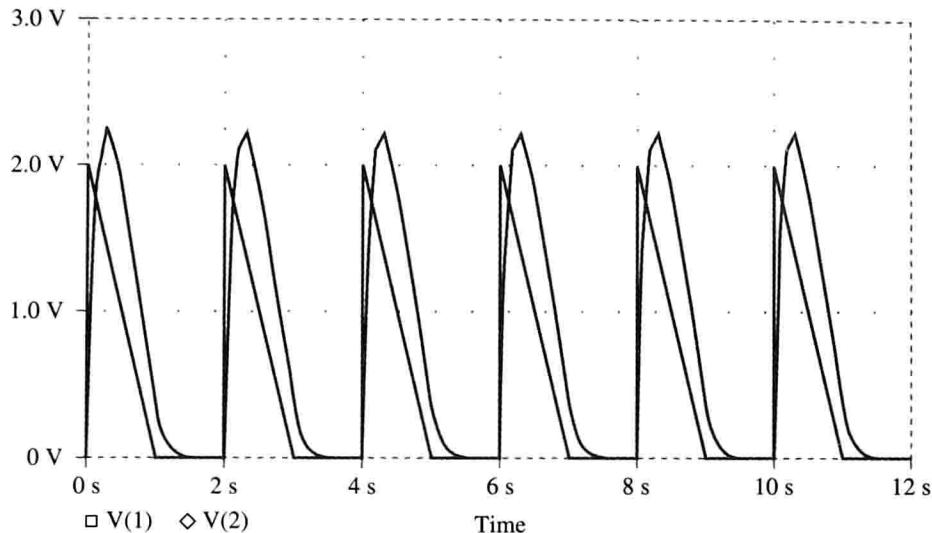


图 A.39 习题 17.71 图

17.73 300mW

17.75 24.59mF

17.77 (a) π , (b) -2V , (c) 11.02V

17.79 MATLAB 程序及其运行结果如下所示：

```
% for problem 17.79
a = 10;
c = 4.*a/pi
for n = 1:10
    b(n)=c/(2*n-1);
end
diary
n, b
diary off
```

n	b_n
1	12.7307
2	4.2430
3	2.5461
4	1.8187
5	1.414
6	1.1573
7	0.9793
8	0.8487
9	0.7488
10	0.6700

17.81 (a) $\frac{A^2}{2}$,

(b) $|c_1| = 2A/(3\pi)$, $|c_2| = 2A/(15\pi)$,
 $|c_3| = 2A/(35\pi)$, $|c_4| = 2A/(63\pi)$

(c) 81.1%, (d) 0.72%

第 18 章

18.1 $\frac{2(\cos 2\omega - \cos \omega)}{j\omega}$

18.3 $\frac{j}{\omega^2}(2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega)$

18.5 $\frac{2j}{\omega} - \frac{2j}{\omega^2} \sin \omega$

18.7 (a) $\frac{2 - e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{j\omega}$, (b) $\frac{5e^{-j2\omega}}{\omega^2}(1 + j\omega 2) - \frac{5}{\omega^2}$

18.9 (a) $\frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{4}{\omega} \sin \omega$,

(b) $\frac{2}{\omega^2} - \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2}(1 + j\omega)$

18.11 $\frac{\pi}{\omega^2 - \pi^2}(e^{-j\omega 2} - 1)$

18.13 (a) $\pi e^{-j\pi/3} \delta(\omega - a) + \pi e^{j\pi/3} \delta(\omega + a)$,

(b) $\frac{e^{j\omega}}{\omega^2 - 1}$, (c) $\pi [\delta(\omega + b) + \delta(\omega - b)]$

+ $\frac{j\pi A}{2} [\delta(\omega + a + b) - \delta(\omega - a + b)$

+ $\delta(\omega + a - b) - \delta(\omega - a - b)]$,

(d) $\frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{-j4\omega}}{j\omega} - \frac{e^{-j4\omega}}{\omega^2}(j4\omega + 1)$

18.15 (a) $2j \sin 3\omega$, (b) $\frac{2e^{-j\omega}}{j\omega}$, (c) $\frac{1}{3} - \frac{j\omega}{2}$

18.17 (a) $\frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)] - \frac{j\omega}{\omega^2 - 4}$,

(b) $\frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + 10) - \delta(\omega - 10)] - \frac{10}{\omega^2 - 100}$

18.19 $\frac{j\omega}{\omega^2 - 4\pi^2}(e^{-j\omega} - 1)$

18.21 证明略

18.23 (a) $\frac{30}{(6 - j\omega)(15 - j\omega)}$,

(b) $\frac{20e^{-j\omega/2}}{(4 + j\omega)(10 + j\omega)}$,

(c) $\frac{5}{[2 + j(\omega + 2)][5 + j(\omega + 2)]} +$

$$\frac{5}{[2+j(\omega-2)][5+j(\omega-2)]},$$

$$(d) \frac{j\omega 10}{(2+j\omega)(5+j\omega)},$$

$$(e) \frac{10}{j\omega(2+j\omega)(5+j\omega)} + \pi\delta(\omega)$$

18. 25 (a) $5e^{2t}u(t)$, (b) $6e^{-2t}$,
(c) $(-10e^t u(t) + 10e^{2t})u(t)$
18. 27 (a) $5\text{sgn}(t) - 10e^{-10t}u(t)$,
(b) $4e^{2t}u(-t) - 6e^{-3t}u(t)$,
(c) $2e^{-20t}\sin(30t)u(t)$, (d) $\frac{1}{4}\pi$

18. 29 (a) $\frac{1}{2\pi}(1+8\cos 3t)$, (b) $\frac{4\sin 2t}{\pi t}$,
(c) $3\delta(t+2) + 3\delta(t-2)$

18. 31 (a) $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$,
(b) $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$,
(c) $x(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha t}u(t)$

18. 33 (a) $\frac{2j\sin t}{t^2 - \pi^2}$, (b) $u(t-1) - u(t-2)$

18. 35 (a) $\frac{e^{-j\omega/3}}{6+j\omega}$,
(b) $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2+j(\omega+5)} + \frac{1}{2+j(\omega-5)} \right]$,
(c) $\frac{j\omega}{2+j\omega}$, (d) $\frac{1}{(2+j\omega)^2}$, (e) $\frac{1}{(2+j\omega)^2}$

$$18. 37 \frac{j\omega}{4+j3\omega}$$

$$18. 39 \frac{10^3}{10^6+j\omega} \left(\frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} e^{-j\omega} \right)$$

$$18. 41 \frac{2j\omega(4.5+j2\omega)}{(2+j\omega)(4-2\omega^2+j\omega)}$$

$$18. 43 1000(e^{-1t} - e^{-1.25t})u(t)V$$

$$18. 45 5(e^{-t} - e^{-2t})u(t)A$$

$$18. 47 16(e^{-t} - e^{-2t})u(t)V$$

$$18. 49 0.542\cos(t+13.64^\circ)V$$

$$18. 51 16.667J$$

$$18. 53 \pi$$

$$18. 55 682.5J$$

$$18. 57 2J, 87.43\%$$

$$18. 59 (16e^{-t} - 20e^{-2t} + 4e^{-4t})u(t)V$$

$$18. 61 2X(\omega) + 0.5X(\omega+\omega_0) + 0.5X(\omega-\omega_0)$$

18. 63 106个广播站

18. 65 6.8kHz

18. 67 200Hz, 5ms

18. 69 35.24%

第 19 章

$$19. 1 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3.333 \end{bmatrix} \Omega$$

$$19. 3 \begin{bmatrix} (8+j12) & j12 \\ j12 & -j8 \end{bmatrix} \Omega$$

$$19. 5 \begin{bmatrix} \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+3s+1} & \frac{1}{s^3+2s^2+3s+1} \\ \frac{1}{s^3+2s^2+3s+1} & \frac{s^2+2s+2}{s^3+2s^2+3s+1} \end{bmatrix}$$

$$19. 7 \begin{bmatrix} 29.88 & 3.704 \\ -70.37 & 11.11 \end{bmatrix} \Omega$$

$$19. 9 \begin{bmatrix} 2.5 & 1.25 \\ 1.25 & 3.125 \end{bmatrix} \Omega$$

19. 11 参见图 A. 40

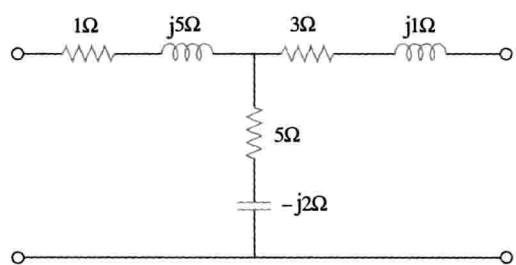


图 A. 40 习题 19.11 图

$$19. 13 329.9W$$

$$19. 15 24\Omega, 384W$$

$$19. 17 \begin{bmatrix} 9.6 & -0.8 \\ -0.8 & 8.4 \end{bmatrix} \Omega, \begin{bmatrix} 0.105 & 0.01 \\ 0.01 & 0.12 \end{bmatrix} S$$

19. 19 答案不唯一

19. 21 参见图 A. 41

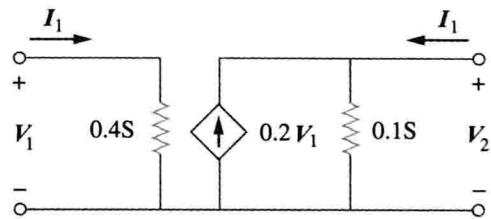


图 A. 41 习题 19.21 图

$$19. 23 \begin{bmatrix} s+2 & -(s+1) \\ -(s+1) & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}, \frac{0.8(s+1)}{s^2+1.8s+1.2}$$

19. 25 参见图 A. 42

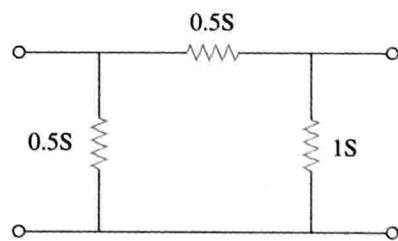
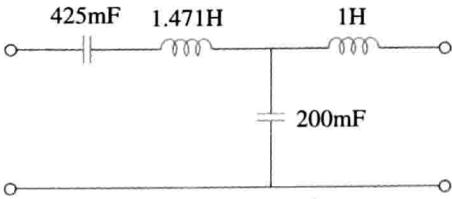


图 A. 42 习题 19.25 图

$$19. 27 \begin{bmatrix} 0.25 & 0.025 \\ 5 & 0.6 \end{bmatrix} S$$

19. 29 (a) 22V, 8V, (b) 相同

19. 31 $\begin{bmatrix} 3.8\Omega & 0.4 \\ -3.6 & 0.2S \end{bmatrix}$
19. 33 $\begin{bmatrix} (3.077+j1.2821)\Omega & 0.3846-j0.2564 \\ -0.3846+j0.2564 & (76.9+282.1)mS \end{bmatrix}$
19. 35 $\begin{bmatrix} 2\Omega & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$
19. 37 1.1905V
19. 39 $g_{11} = \frac{1}{R_1+R_2}, g_{12} = -\frac{R_2}{R_1+R_2}$
 $g_{21} = \frac{R_2}{R_1+R_2}, g_{22} = R_3 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$
19. 41 证明略
19. 43 (a) $\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$
19. 45 $\begin{bmatrix} 1-j0.5 & -j2\Omega \\ 0.25S & 1 \end{bmatrix}$
19. 47 $\begin{bmatrix} 0.3235 & 1.176\Omega \\ 0.02941S & 0.4706 \end{bmatrix}$
19. 49 $\begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & \frac{1}{s}\Omega \\ \frac{(s+1)(3s+1)}{s}S & 2+\frac{1}{s} \end{bmatrix}$
19. 51 $\begin{bmatrix} 2 & 2+j5 \\ j & -2+j \end{bmatrix}$
19. 53 $z_{11} = \frac{A}{C}, z_{12} = \frac{AD-BC}{C}, z_{21} = \frac{1}{C}, z_{22} = \frac{D}{C}$
19. 55 证明略
19. 57 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\Omega, \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{-1}{20} \\ \frac{-1}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}S, \begin{bmatrix} \frac{20}{7}\Omega & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{1}{7}S \end{bmatrix},$
 $\begin{bmatrix} \frac{1}{3}S & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{20}{3}\Omega \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 20\Omega \\ 1S & 3 \end{bmatrix}$
19. 59 $\begin{bmatrix} 16.667 & 6.667 \\ 3.333 & 3.333 \end{bmatrix}\Omega, \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix}S, \begin{bmatrix} 10\Omega & 2 \\ -1 & 0.3S \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 10\Omega \\ 0.3S & 1 \end{bmatrix}$
19. 61 (a) $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}\Omega, (b) \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\Omega & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5}S \end{bmatrix},$
(c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4}\Omega \\ \frac{3}{4}S & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$
19. 63 $\begin{bmatrix} 0.8 & 2.4 \\ 2.4 & 7.2 \end{bmatrix}\Omega$
19. 65 $\begin{bmatrix} \frac{0.5}{3} & -\frac{1}{-0.5} \\ -\frac{0.5}{3} & \frac{2}{5/6} \end{bmatrix}S$
19. 67 $\begin{bmatrix} 4 & 63.29\Omega \\ 0.1576S & 4.994 \end{bmatrix}$
19. 69 $\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} \\ \frac{-(3s+2)}{2(s+2)} & \frac{5s^2+4s+4}{2s(s+2)} \end{bmatrix}$
19. 71 $\begin{bmatrix} 2 & -3.334 \\ 3.334 & 20.22 \end{bmatrix}\Omega$
19. 73 $\begin{bmatrix} 14.628 & 3.141 \\ 5.432 & 19.625 \end{bmatrix}\Omega$
19. 75 (a) $\begin{bmatrix} 0.3015 & -0.1765 \\ 0.0588 & 10.94 \end{bmatrix}S, (b) -0.0051$
19. 77 $\begin{bmatrix} 0.9488 \angle -161.6^\circ & 0.3163 \angle 18.42^\circ \\ 0.3163 \angle -161.6^\circ & 0.9488 \angle -161.6^\circ \end{bmatrix}$
19. 79 $\begin{bmatrix} 4.669 \angle -136.7^\circ & 2.53 \angle -108.4^\circ \\ 2.53 \angle -108.4^\circ & 1.789 \angle -153.4^\circ \end{bmatrix}\Omega$
19. 81 $\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 3.5 & 1.5 \end{bmatrix}S$
19. 83 $\begin{bmatrix} 0.3235 & 1.1765\Omega \\ 0.02941S & 0.4706 \end{bmatrix}$
19. 85 $\begin{bmatrix} 1.581 \angle 71.59^\circ & -j\Omega \\ jS & 5.661 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$
19. 87 $\begin{bmatrix} -j1765 & -j1765\Omega \\ j888.2S & j888.2 \end{bmatrix}$
19. 89 -1613, 64.15dB
19. 91 (a) 晶体管电压增益为 -25.64, 整个电路的电压增益为 -9.615。
(b) 74.07, (c) 1.2kΩ, (d) 51.28kΩ
19. 93 -17.74, 144.5, 31.17Ω, -6.148MΩ
19. 95 参见图 A. 43
- 
- 图 A. 43 习题 19.95 图
19. 97 250mF, 333.3mH, 500mF
19. 99 证明略

[General Information]

书名=电路基础 第5版

作者=(美) 亚历山大著

丛书名=国外电子与电气工程技术丛书

页数=693

SS号=13608588

出版日期=2014. 07

出版社=北京：机械工业出版社

I SBN号=978-7-111-47088-5

中图法分类号=TM 3

原书定价=129. 00

参考文献格式=(美) 亚历山大著. 电路基础 第5版. 北京：机械工业出版社, 2014. 07.

内容提要=作者对本书作了许多教学方法上的精心细致的安排，这形成了本书的一个明显的特色：每章开头是与该章内容有关的专业性讨论，每章后有小结；所有的原理均通过清晰的逻辑推导得出，提供解答详细的例题和各种类型的大量习题；书中包含PSpice软件仿真内容，并有相应的习题；每章最后一节研究应用实例，帮助学生掌握相关概念和方法的应用。这些特色使本书成为一本明白易懂、内容丰富、条理清晰、富有趣味的教科书。本书除可供电类各...