



华章教育

Mc
Graw
Hill
Education

国外电子与电气工程技术丛书

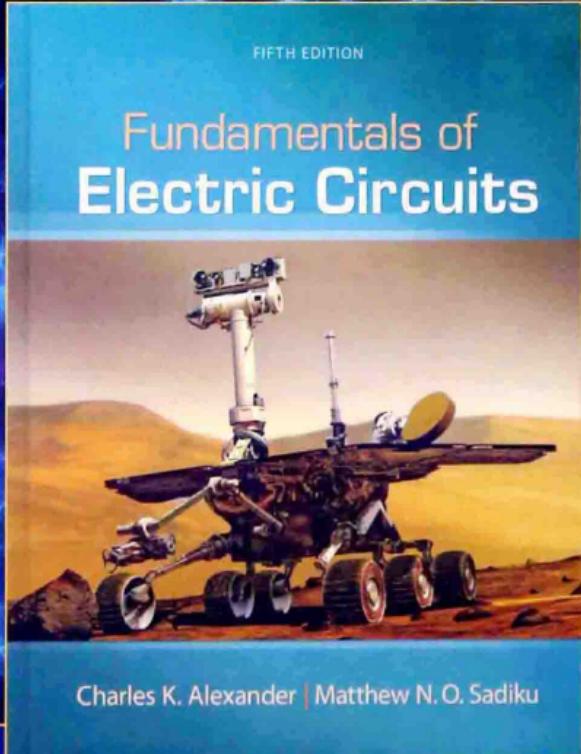
电路基础

(原书第5版)

[美] Charles K. Alexander 著
Matthew N. O. Sadiku 著

段哲民 周巍 李宏 尹熙鹏 等译

*Fundamentals
of Electric Circuits
Fifth Edition*



机械工业出版社
China Machine Press

本书是电路课程的经典教材，被美国众多名校采用，是美国最有影响力的教材之一。本书内容全面，涵盖了我国“电路分析基础”课程的全部教学要求和“电路理论基础”课程的大部分教学要求。

本书以电路基础知识和分析方法为主体，辅以大量例题、习题和应用实例，并穿插介绍电子工程领域的历史人物与知识。本书前4版获得了极大的成功，第5版更加清晰易懂，并反映了电路领域的最新技术进展。

本书特色

- 内容全面。全书分为直流电路、交流电路与高级电路分析三部分，还囊括了所需的常用数学公式和物理基本原理。
- 六步解题法。六步解题法为读者建立了求解电路问题的系统方法，可以帮助读者更好地理解理论知识并减少计算错误。
- 计算机仿真软件。书中使用面向Windows的PSpice软件，并新增了美国国家仪器公司（NI）的MultiSim解法，将理论与实际完美结合。

作者简介



Charles K. Alexander 分别于1967年和1971年获得俄亥俄大学的电气工程学硕士学位和博士学位，现任美国克利夫兰州立大学菲恩工学院电气与计算机工程系教授，并任电子学与航空航天技术研究中心主任。Alexander博士是IEEE的会士，曾任IEEE主席和CEO。他于1984年获得IEEE百年奖章，还先后荣获英国工程委员会颁发的杰出教育成就奖和杰出工程教育领导奖。



Matthew N. O. Sadiku 博士，美国普雷里维尤农工大学教授，兼任IEEE《Transactions on Education》杂志副主编。他曾在朗讯、波音等公司从事研发工作，发表过170余篇学术论文，出版过近30部著作。



www.mheducation.com

投稿热线：(010) 88379604

客服热线：(010) 88378991 88361066

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259



华章网站：www.hzbook.com

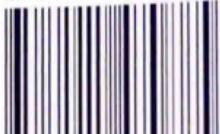
网上购书：www.china-pub.com

数字阅读：www.hzmedia.com.cn



上架指导：电路基础

ISBN 978-7-111-47088-5



9 787111 470885

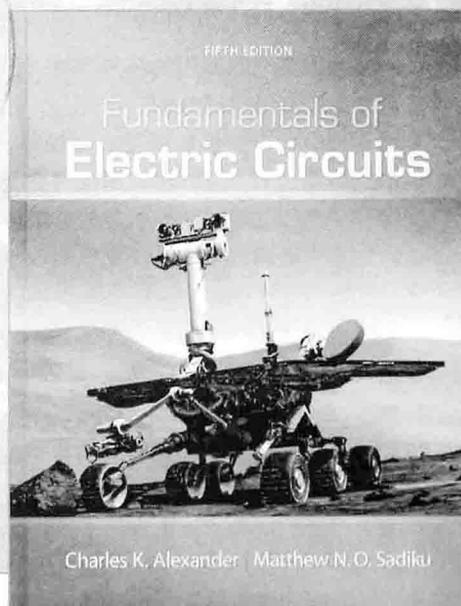
定价：129.00元

电路基础

(原书第5版)

[美] Charles K. Alexander
Matthew N. O. Sadiku 著
段哲民 周巍 李宏 尹熙鹏 等译

*Fundamentals
of Electric Circuits
Fifth Edition*



图书在版编目 (CIP) 数据

电路基础 (原书第 5 版) / (美) 亚历山大 (Alexander, C. K.) 等著; 段哲民等译. —北京: 机械工业出版社, 2014.7
(国外电子与电气工程技术丛书)

书名原文: Fundamentals of Electric Circuits, Fifth Edition

ISBN 978-7-111-47088-5

I. 电… II. ①亚… ②段… III. 电路理论 IV. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 131094 号

本书版权登记号: 图字: 01-2012-8917

Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku: Fundamentals of Electric Circuits, Fifth Edition (ISBN: 978-0-07-338057-5).

Copyright © 2013 by McGraw-Hill Education.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized Chinese translation edition is jointly published by McGraw-Hill Education and China Machine Press. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.

Copyright © 2014 by McGraw-Hill Education and China Machine Press.

版权所有。未经出版人事先书面许可, 对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播, 包括但不限于复印、录制、录音, 或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权中文简体字翻译版由麦格劳 - 希尔 (亚洲) 教育出版公司和机械工业出版社合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内 (不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾) 销售。

版权 © 2014 麦格劳 - 希尔 (亚洲) 教育出版公司与机械工业出版社所有。

本书封面贴有 McGraw-Hill Education 公司防伪标签, 无标签者不得销售。

本书是电路课程的经典教材, 以基础知识和分析方法为主, 内容细致易懂。全书分为直流电路、交流电路和高级电路分析三个部分, 包括基本定律和定理、一阶电路、二阶电路、正弦稳态分析、三相电路、拉普拉斯变换和傅里叶变换等, 附有大量的例题、习题及应用实例, 并结合 PSpice 和 MultiSim 电路仿真技术, 以六步解题法贯穿全书。此外, 书中还穿插有电子学领域的科学家简介, 并特别为读者提供了增强技能与拓展事业的方法与指导。

本书既可作为电子与电气专业学生的教科书, 也适于自学者使用, 或供相关技术人员参考。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 曲 熠

责任校对: 董纪丽

印 刷: 北京瑞德印刷有限公司

版 次: 2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

开 本: 185mm×260mm 1/16

印 张: 44.5

书 号: ISBN 978-7-111-47088-5

定 价: 129.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjsj@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

出版者的话

文艺复兴以降，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自 1998 年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与 Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer 等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出 Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Mark I. Montrose、David A. Johns、Peter Wilson、H. Vincent Poor、Dikshitulu K. Kalluri、Bhag Singh Guru、Stephane Mallat 等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气工程技术丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www.hzbook.com

电子邮件：hzjsj@hzbook.com

联系电话：(010) 88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街 1 号

邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译者序

“电路基础”这门课程是研究电路理论的基础课程，通过学习使学生掌握电路的基本概念、基本理论和分析电路的基本方法，为学习后续课程提供必要的理论知识，也为进一步研究电路理论和进行电路设计打好基础。

《Fundamentals of Electric Circuits》是由美国俄亥俄州克利夫兰州立大学的 Charles K. Alexander 教授和普雷里维尤农工大学的 Matthew N. O. Sadiku 教授为电类各专业大学生学习电路课程而编写的教科书，被众多国外著名大学选用。该书由 McGraw-Hill 公司于 2000 年出版第 1 版，2013 年出版第 5 版，译者受机械工业出版社委托对该教材第 5 版进行翻译。

《Fundamentals of Electric Circuits》(Fifth Edition) 讲述的是电路理论的基础知识，内容分为直流电路、交流电路、高级电路分析三大部分。第一部分讲述了电路分析的理论依据，包括电路的基本概念、基本定律和定理、基本分析方法和基本理论。第二部分讲述了交流电路的基本概念、基本分析方法和典型交流电路的实际应用。第三部分从更高理论层次对电路进行系统的分析。该教材内容丰富、概念清晰、层次分明、通俗易懂。每章的开始处都有一段题为“增强技能与拓展事业”的内容，介绍了与章节内容有关的工程应用背景，每章中还包括电学发展历史上若干名人的事迹，这些内容可以使读者从不同的侧面得到有益的启示。在每章的末尾给出了关键知识点的小结，有助于学生进一步理解所学知识，形成完整的知识体系。每一章都包含大量复习题和习题，并提供部分答案，十分有利于自学。本书还十分注重理论联系实际，每一章的应用实例部分通过讨论一两个实际问题或器件为读者提供了很大帮助。总之，本书的内容相当全面，基本涵盖了电路原理的各个方面，非常适合用作学习电路基本理论的本科生教科书，也适合作为正在从事电路设计的工程人员的参考书。

本书由西北工业大学电子信息学院的教师段哲民（第 1 章～第 6 章）、周巍（前言、第 9 章～第 14 章和附录）、李宏（第 15 章～第 19 章）、尹熙鹏（第 7 章～第 8 章）翻译，全书由段哲民审校和统稿，参加翻译的还有李茸、亢润龙、董兵超、张秀、郭龙和陈洋等，在此对他们表示衷心的感谢。由于水平所限，翻译不妥或错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

译者

2014 年 4 月于西北工业大学

前 言

或许你会好奇为什么我们会用美国宇航局（NASA）的火星探测器照片作为原书封面，实际上有许多理由。显然，这张照片让人振奋，探索太空代表了全世界最令人激动的科技前沿。另外，探测器本身大部分都是由各种各样的电路组成，并且必须在无人维护的环境下正常工作，因为一旦出现故障，不可能有人跑到火星上去维修。

探测器必须有能源系统，这个系统提供了探测器活动所需的所有能量，帮助探测器采集、分析样本，将结果反馈给地球并从地球接收指令。地球上的设备与探测器难以协同工作的一个重要原因是，地球与火星间的通信传输时间长达 20min，所以探测器无法根据 NASA 的指令迅速做出回应。

最令人惊讶的是，如此精密复杂的机电设备在飞行数百万公里并反弹到地面后竟能操作得如此精确、可靠。下面的视频介绍了什么是探测器及它是怎样前往火星的：<http://www.youtube.com/watch?v=5UmRx4dEdRI>。

特色

本版新增内容

第 13 章中增加了磁耦合模型，它可以简化分析过程并提高读者发现错误的能力。这个模型我们已成功运用多年，现在是时候把它加入本书中。另外，本书有 600 多道新增或修改过的章末习题和练习。

本书还为几乎所有可用 PSpice 解决的问题增加了 National Instruments MultiSim™ 解决方案，我们的网站上有 MultiSim 教程。增加 MultiSim 是因为其用户界面更友好且相对于 PSpice 有更多的分析选项。另外，它使得电路的修改更加容易，从而有利于观察电路参数是如何影响电压、电流和功率的。我们的网站上也有 PSpice、MATLAB® 和 KCIDE 的教程以供读者参考。

本书第 16 章新增了 43 道习题，目的在于强化运用 s 域分析技术求解电路中的电压与电流的方法。

从之前版本保留的特色

学习电路分析课程或许是学生第一次接触电气工程。通过这门课程，学生可以强化日后设计电路所需的技能。121 个“设计问题”是本书的重要部分，通过这些问题所强化的能力将会在以后的设计实践中发挥作用。但是，只学习电路基础课程不可能充分提升设计能力，若想全面提升设计能力，学生通常需要在大四那一年积累设计经验。但这并不意味着有些技能无法通过电路课程得到培养和锻炼。本书中包含帮助学生提高创新能力的开放性问题，这是学习电路设计的一个重要部分。之前版本已有一些开放性问题，在这一版中，我们希望在这个重要方面增加更多内容并且已经开发出一种实现方法。对于设计类问题，我们的目标是通过解决问题让学生学到更多理论和解决问题的方法。何不让学生跟我们一样设计问题呢？其实这正是我们在每个章节所做的事情。在常规题目里，我们让学生设计问题以帮助其他同学更好地理解概念。这将会带来两个非常重要的结果：第一是学生会对基础理论有更好的理解，第二是学生的基础设计能力会得到加强。通过教学能够更有效地学习课本的内容，并且通常会学得更好。设计问题是教学过程中的关键之一，在适当的情况下，应该鼓励学生自己设计问题，这些问题中的数字可以比较简单并且数学运算

也不必太复杂。

本书的一大优势是，书中共有 2447 道例题、练习、课后复习题、习题和综合理解题。所有练习和奇数编号的习题都提供答案。

本书第 5 版的主要目标与前几版一样——以相对于其他课本更清晰、更有趣、更易理解的方式展现电路分析过程，并且帮助学生在工程的入门阶段就看到乐趣。具体方式如下。

● 每章开篇与小结

每章以“增强技能与拓展事业”的讨论开篇，内容涉及电气工程的各个子学科，有助于读者成功解决问题并拓展职业生涯。之后的引言介绍当前章节与之前章节的关联和本章目标。每章最后是关键知识点和公式的小结。

● 解决问题的方法学

第 1 章介绍了解决电路问题的六步式方法，这种方法贯穿全书并配有软件仿真内容。

● 学生友好型书写风格

所有定律和定理都通过逻辑清晰、层层递进的方式呈现，我们尽可能地避免冗长的叙述及可能会隐藏概念或引起理解障碍的细节。

● 加框的公式与关键术语

书中的重要公式均带有方框，以帮助学生分清主次，同时可确保学生清楚地理解关键问题。关键术语均有明确的定义，并用突出的字体表示出来。

● 提示

提示可作为补充内容，是书中知识的附加阐述或交叉参考信息。有的提醒读者不要犯一些特定的常见错误，有的提供了解决问题的深刻见解。

● 典型例题

每一节的后面都给出了解法详尽的典型例题，它们是本书的重要组成部分。这些例题可以帮助学生更好地理解解题过程，有助于培养学生独立解决问题的信心。部分例题给出了两三种解法，以便学生比较不同的解法，加深对所学内容的理解。

● 练习

为了给学生提供实践的机会，紧接典型例题安排了一道提供答案的练习，学生可以按照例题中的步骤来求解练习题，无需从别处查阅或者翻看书末的答案。练习同时还可以检查学生对前述例题的理解程度，从而在学习下一节内容之前进一步掌握本节内容。学生可以通过网站获得练习的完整求解过程。

● 应用实例

各章的最后一节专门介绍与本章概念相关的实际应用，每章至少提供一个实际应用问题或实际器件，帮助学生了解如何将所学概念应用于实际系统中。

● 复习题

每章的结尾还给出了带有答案的多项选择题作为复习题，目的是提供典型例题或章末习题中未涉及的一些解题的小“窍门”，既可将其作为自测练习，同时也可以帮助学生了解自己对本章内容的掌握程度。

● 计算机工具

按照 ABET® 对集成计算机工具的要求，本书以友好型书写风格鼓励学生使用 PSpice、MATLAB 和 KCIDE 等计算机辅助分析软件，培养学生的分析能力。本书前面章节介绍了 PSpice 软件，为帮助学生熟练掌握这一软件，PSpice 内容贯穿全书。在我们的网站可以查看相关的学习指南。此外，本书也介绍了 MATLAB 软件。

● 设计问题

“设计问题”类习题旨在帮助学生提高设计能力。

● 历史珍闻

本书的历史珍闻介绍了电子工程相关领域的重要先驱人物和历史事件。

● 运算放大器的讨论

本书在较为靠前的章节中介绍了构成电路的基本元件——运算放大器 (op amp)。

● 傅里叶变换和拉普拉斯变换

为了方便读者从电路课程向信号与系统课程过渡，本书简明而全面地介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换。感兴趣的教师可以从讲述一阶电路求解的内容过渡到第 15 章，这样也就非常自然地从拉普拉斯变换过渡到交流傅里叶分析。

● 扩展的例题

按照六步解题法介绍的典型例题为学生提供了解题的统一途径，每章至少有一道例题以这种方式讲解。

● EC 2000 章节开场白

根据 ABET 最新技能标准 3，各章的开场白专门讨论学生应该如何掌握有效拓展工程师职业生涯所需的技能，这些技能对于学生在校学习和今后工作都是非常重要的，因此这部分内容采用标题“增强技能与拓展事业”。

● 课后习题

这版包含 468 道新增的或修改的章后习题，为学生提供了充分的练习，同时帮助学生掌握关键概念。

● 课后习题图标

与工程设计有关的习题以及能够利用 PSpice、MultiSim、KCIDE 或 MATLAB 求解的习题均采用图标予以标识。

本书的组织结构

本书可以作为两或三学期的线性电路分析教材，教师也可以选择适当的章节作为一学期课程的教材。全书可以分为三部分。

- 第一部分包括第 1~8 章，主要介绍直流电路，包括电路的基本定律和定理，电路分析方法以及有源元件与无源元件等内容。
- 第二部分包括第 9~14 章，主要介绍交流电路，包括相量、电路的正弦稳态分析、交流功率、交流电的有效值、三相系统以及频率响应等内容。
- 第三部分包括第 15~19 章，主要介绍高级电路分析方法，包括拉普拉斯变换、傅里叶级数、傅里叶变换以及二端口网络分析等内容。

这三部分所包含的内容已经超出了两学期课程的需要，因此教师应根据需要选择必要的章节。书中带剑号 (†) 的内容可以略去不讲或者简要讲解，也可以作为学生的作业，省略这些并不会影响内容的连贯性。各章都安排有按节编排的大量习题，教师可以选择其中一些作为课堂例题，另外一些作为课后作业。如前所述，这一版教材采用三种图标。我们使用 **PS** 图标标识需要利用 PSpice 求解的习题，这类习题的电路比较复杂，利用 PSpice 或 MultiSim 后可以使求解过程变得更加容易。另外，需要利用 PSpice 和 MultiSim 验证结果正确性的习题也有 **PS** 的图标。**ML** 图标标识需要利用 MATLAB 求解或使用 MATLAB 求解更有效的复杂习题，以及需利用 MATLAB 验证结果正确性的习题。最后，**ED** 图标标识有助于培养学生工程设计技能的习题。难度较大的习题前都标有星号 (*)。

综合理解题安排在每章最后，它们绝大多数是应用性问题，需要利用本章学到的各种解题技能。

对先修课程的要求

作为电路分析的基础课程，在学习本书之前需要先修物理学与微积分。虽然熟悉有关复数的知识对学

习本书后半部分的内容有所帮助，但它并不是必须掌握的内容。本书的主要优势在于，学生需要掌握的所有数学公式以及物理基本原理都包括在其中。

补充资源

麦格劳-希尔连接（McGraw-Hill Connect[®]）系统

麦格劳-希尔连接系统是一个基于网络的任务分配和评估平台，通过这个平台，学生与课程、教师以及现在或将来必须知道的重要概念之间建立了更好的连接。教师可以在系统中分配任务或组织在线测试，学生可以按自己的进度练习重要的技能。关于该系统的更多细节可访问网站 www.mcgrawhillconnect.com/engineering。

教师与学生网站

登录 www.mhhe.com/alexander 可以查找与本书相关的许多额外的教师与学生资源。包括所有练习和章末习题的答案、PSpice 和 MultiSim 问题的答案、电子课件、图像文件、教师指南、专题报告的网络分析，工程师考试问题、抽认卡，以及 PSpice、MultiSim、MATLAB 和 KCIDE 的引例。这个网站以 COSMOS 为特色，是一个完整的在线解决方案组织系统，它允许教师用本书的章末习题创建日常的家庭作业、小测验和考试。

电路集成设计环境 KCIDE

KCIDE 是由 NASA 资助、克利夫兰州立大学（Cleveland State University）开发的软件，利用本书中的六步问题求解方法帮助学生学习电路问题。KCIDE 电路软件允许学生利用 PSpice 和 MATLAB 解决电路问题、跟踪解题过程并存储解题过程供以后参考。另外，该软件可以自动生成 Word 文件以及 PowerPoint 演示文稿。KCIDE 软件可以免费下载。

希望本书及补充资源能够为教师提供有效组织教学所需的全部教辅工具。

麦格劳-希尔创建（McGraw-Hill CreateTM）系统

为你的教学制作精巧匹配的教育资源！有了麦格劳-希尔创建系统，你可以轻松地重排章节，结合其他内容源里的材料，快速上传已完成的课程大纲或者教学笔记。在创建系统中，你可以在数以万计的官方笔记中搜索需要的内容，并安排内容结构以适应自己的教学风格。创建系统甚至允许你选择封面并添加名字、学校和课程信息。订购创建的书籍后，你将在 3~5 个工作日内得到一本赠阅本，或者在几分钟内收到赠阅本的电子版。登录 www.mcgrawhillcreate.com 并注册麦格劳-希尔创建系统，量身定制你的教学方案。

致谢

在本书出版之际，首先要感谢来自我们的妻子（Hannah 与 Kikelomo）、女儿（Christina、Tamara、Jennifer、Motunrayo、Ann 和 Joyce）、儿子（Baixi）以及其他家庭成员的鼎力支持。此外，我们还要感谢 Baixi（现在是 Baixi Su Alexander 博士）悉心地审校了本书的习题，确保习题清晰易懂，准确无误。

在麦格劳-希尔集团，我们将要感谢以下编辑和工作人员：Raghu Srinivasan，出版商、高级赞助编辑；Lora Kalb-Neyens，开发编辑；Curt Reynolds，市场经理；Joyce Watters，产品经理；还有 Margarite Reynolds，设计者。

第 5 版得益于那些为前 4 版的成功做出贡献的杰出评论家和研讨会参与者！另外，以下人员为本书的

成功出版做出了重大贡献（按字母顺序排列）：

Alok Berry, 乔治梅森大学 (George Mason University)

Vahe Caliskan, 伊利诺大学芝加哥分校 (University of Illinois-Chicago)

Archie Holmes, 弗吉尼亚大学 (University of Virginia)

Anton Kruger, 爱荷华大学 (University of Iowa)

Arnost Neugroschel, 佛罗里达大学 (University of Florida)

Arun Ravindran, 北卡罗来纳大学夏洛特分校 (University of North Carolina-Charlotte)

最后，我们要感谢使用之前版本的教师和学生给我们提供的反馈，希望本书也能得到这样的反馈，读者可随时给我们发送电子邮件，或者直接与出版商联系。Charles Alexander 的联系方式是 c.alexander@ieee.org, Matthew Sadiku 的联系方式是 sadiku@ieee.org。

C. K. Alexander 与 M. N. O. Sadiku

学生须知

这可能是你的第一门电气工程课程。尽管电气工程是一门令人兴奋并具有挑战性的学科，但是这门课程可能会使你畏惧。为了消除这种恐惧心理，我们写作了此书。一本好的教科书和一位优秀的教授是你学习这门课程的优势——但是没人能代替你学习。如果能够记住下面几点，你将会在这门课中表现得更好。

- 因为本课程是大多数电气工程课程的基础，所以你要投入尽可能多的精力有规律地学习这门课程。
- 解题是学习过程中的一个必需部分，应当尽可能多地去解决问题。首先求解每个例题后边的练习，然后继续求解每章后边的习题，学习的最好方法就是解题。其中，星号表示有一定难度的习题。
- 全书都会用到 PSpice 和 MultiSim 两种计算机电路分析软件。PSpice 是个人计算机版本的 Spice，是很多大学里流行的标准电路分析软件。在我们的网站上介绍了 Windows 版本的 PSpice 和 MultiSim。认真学习 PSpice 和（或）MultiSim，因为你可以使用这些软件检查任何电路问题并确保得到正确的解决方案。
- MATLAB 是另一个电路分析中非常有用的软件，其他的课程中也会用到。在我们的网站上可以找到一个简短的 MATLAB 教程。学习 MATLAB 的最好方法是，一旦你知道了某个命令，就开始用它工作。
- 每一章的结尾部分都会介绍该章内容的应用实例。这部分中的概念可能较新且较为复杂，但你将会在其他课程中学到有关它们的更多细节。我们的主要目的在于使你对这些概念有大致的了解。
- 做一做每章后边的复习题，它们将帮助你发现一些在课堂上或者教科书中没有透露的小“窍门”。
- 显然，只要你付出足够多的努力，就会发现这本书中涉及的技术细节是容易理解的。此外，所有为理解这些理论所必需的数学和物理知识还将在其他工程课程中有所应用。同时，本书也专注于为相关专业的学生、工作者和研究生学位攻读者提供参考。
- 结束了此门课程后，你会很轻易地出售课本，然而，我们的建议是不要出售你的工具书！书一直是昂贵的，但这些书的花费和我早在 20 世纪 60 年代购买的电路书几乎是一样的。实际上，它是很便宜的。除此之外，过去的工程书远没有现在的有用。当我还是一个学生时，我没有卖掉任何工程课本，并且我很庆幸我没有！我发现在我的整个职业生涯中，大多数课本依然有用。
- 奇数编号习题答案见附录 A。

C. K. A 与 M. N. O. S

作者简介

Charles K. Alexander 是美国俄亥俄州克利夫兰州立大学菲恩 (Fenn) 工学院电气与计算机工程系教授，并担任电子学与航空航天技术研究中心的主任。2002~2006 年，他任 Fenn 工学院院长。2004~2007 年，他任俄亥俄 ICE 研究中心主任，即仪器、控制、电子学与传感器研究中心（克利夫兰州立大学、Case 大学，Akron 大学和俄亥俄工业组织联合成立）。1998~2002 年，他担任腐蚀与多相技术研究所代理主任（2000 年和 2001 年）和俄亥俄大学电气工程与计算机科学系的 Stocker 访问教授。1994~1996 年，他任加利福尼亚州立大学北岭分校电气工程与计算机科学系主任。

1989~1994 年，他担任 Temple 大学工学院代理院长，并在 1986~1989 年任 Temple 大学电气工程系的教授和系主任。1980~1986 年，他在田纳西技术大学担任同样职位。1972~1980 年，他分别是扬斯敦州立大学电气工程系的副教授和教授，并于 1977 年因“杰出的教学和研究”而获得了杰出教授的称号。1971~1972 年，他是俄亥俄大学电气工程系的助理教授。他 1965 年获得俄亥俄北方大学电气工程学学士学位，又分别于 1967 年和 1971 年获得俄亥俄大学的电气工程学硕士学位和博士学位。

Alexander 博士现在是 23 个公司和政府机构的顾问，包括空军、海军和一些法律公司。他已获得超过 8500 万美元的研究和开发基金，项目范围从太阳能应用到软件工程。他已出版 40 部著作，包括一套练习册和一系列讲课录像，他是麦格劳-希尔集团出版的《Fundamentals of Electric Circuits, Problem Solving Made Almost Easy》和《Standard Handbook of Electronic Engineering》（第 5 版）等书的合著者。他发表了 500 余篇论文和技术报告。

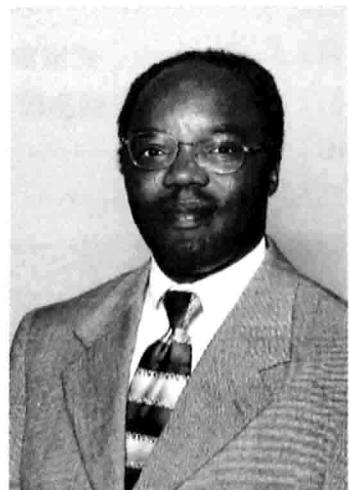
Alexander 博士是 IEEE 的合作伙伴并且在 1997 年担任其主席和 CEO。1993 年和 1994 年，他任 IEEE 专业机构的副主席，美国机构委员会（USAB）主席。1991~1992 年，他是 IEEE 第二区的主任，负责地区机构委员会（RAB）和 USAB。他还是教育机构委员会的委员。他担任过 USAB 会员机构委员会主席和 USAB 工程师专业机构委员会的副主席，以及 RAB 学生机构委员会和 USAB 学生专业教育委员会的主席。

1998 年，他获得了工程委员会的杰出工程教育成就奖，并于 1996 年获得了同一组织授予的杰出工程教育领导奖。1994 年，他因“在工程教育领域和工程类学生专业发展方面的领导才能”成为 IEEE 的合伙人。1984 年他获得了 IEEE 百年奖章，1983 年又被授予了 IEEE/RAB 改革奖以表彰他对 RAB 的目标和任务所做出的突出贡献。



Matthew N. O. Sadiku 是美国普雷里维尤农工大学教授。在就职于普雷里维尤农工大学之前，他在波卡拉顿的佛罗里达亚特兰大大学和费城的天普（Temple）大学任教。他也曾为朗讯/亚美亚和波音卫星系统工作。

Sadiku 博士发表过 170 余篇学术论文，出版过近 30 部著作，包括



《Elements of Electromagnetics》(第 3 版, 牛津大学出版社, 2001)、《Numerical Techniques in electromagnetics》(第 2 版, CRC 出版社, 2000)、《Simulation of Local Area Networks》(与 M. Ilyas 合著, CRC 出版社, 1994)、《Metropolitan Area Network》(CRC 出版社, 1994) 和《Fundamentals of Electric Circuits》(与麦克劳-希尔集团的 C. K. Alexander 合著)。他的书被翻译为韩语、汉语、意大利语和西班牙语, 读者遍布全球各地。他曾因电气工程领域的杰出贡献获得 2000 年麦克劳-希尔集团 Jacob Millman 奖。他曾任 IEEE 第 2 区学生活动组主席以及 IEEE “教育汇报”的副主编。他在库克维的田纳西工程大学获得博士学位。

目 录

出版者的话
译者序
前言
学生须知
作者简介

第一部分 直流电路

第 1 章 基本概念	2
1.1 引言	2
1.2 计量单位制	3
1.3 电荷与电流	4
1.4 电压	6
1.5 功率与能量	7
1.6 电路元件	10
†1.7 应用实例	12
†1.8 解题方法	14
1.9 本章小结	16
复习题	17
习题	17
综合理解题	19
第 2 章 基本定律	21
2.1 引言	21
2.2 欧姆定律	21
†2.3 节点、支路与回路	25
2.4 基尔霍夫定律	27
2.5 串联电阻及其分压	31
2.6 并联电阻及其分流	32
†2.7 Y-△变换	37
†2.8 应用实例	42
2.9 本章小结	46
复习题	47
习题	48
综合理解题	57
第 3 章 分析方法	59
3.1 引言	59

3.2 节点分析法	60
3.3 含有电压源电路的节点分析法	65
3.4 网孔分析法	68
3.5 含有电流源电路的网孔分析法	72
†3.6 基于观察法的节点分析与网孔分析	74
3.7 节点分析法与网孔分析法的比较	77
3.8 基于 PSpice 的电路分析	78
†3.9 应用实例：直流晶体管电路	79
3.10 本章小结	84
复习题	84
习题	85
综合理解题	95
第 4 章 电路定理	96
4.1 引言	96
4.2 线性性质	96
4.3 叠加定理	98
4.4 电源变换	102
4.5 戴维南定理	105
4.6 诺顿定理	110
†4.7 戴维南定理与诺顿定理的推导	113
4.8 最大功率传输定理	114
4.9 基于 PSpice 的电路定理验证	115
†4.10 应用实例	118
4.11 本章小结	122
复习题	122
习题	123
综合理解题	132
第 5 章 运算放大器	133
5.1 引言	133
5.2 运算放大器	134

5.3 理想运算放大器	136	8.3 无源串联 RLC 电路	239	
5.4 反相放大器	138	8.4 无源并联 RLC 电路	244	
5.5 同相放大器	139	8.5 串联 RLC 电路的阶跃响应	248	
5.6 加法放大器	141	8.6 并联 RLC 电路的阶跃响应	252	
5.7 差分放大器	142	8.7 一般二阶电路	253	
5.8 运算放大器的级联电路	144	8.8 二阶运算放大器电路	257	
5.9 基于 PSpice 的运算放大器 电路分析	146	8.9 基于 PSpice 的 RLC 电路 分析	259	
†5.10 应用实例	147	†8.10 对偶原理	262	
5.11 本章小结	150	†8.11 应用实例	264	
复习题	151	8.12 本章小结	266	
习题	152	复习题	267	
综合理解题	161	习题	268	
第6章 电容与电感	162	综合理解题	275	
6.1 引言	162	第二部分 交流电路		
6.2 电容	163			
6.3 电容的串并联	167	第9章 正弦量与相量	278	
6.4 电感	170	9.1 引言	279	
6.5 电感的串并联	173	9.2 正弦信号	279	
†6.6 应用实例	176	9.3 相量	283	
6.7 本章小结	181	9.4 电路元件的相量关系	288	
复习题	182	9.5 阻抗与导纳	290	
习题	182	†9.6 频域中的基尔霍夫定律	292	
综合理解题	190	9.7 阻抗合并	292	
第7章 一阶电路	191	†9.8 应用实例	296	
7.1 引言	191	9.9 本章小结	300	
7.2 无源 RC 电路	192	复习题	301	
7.3 无源 RL 电路	195	习题	302	
7.4 奇异函数	200	综合理解题	308	
7.5 RC 电路的阶跃响应	206	第10章 正弦稳态分析 310		
7.6 RL 电路的阶跃响应	210	10.1 引言	310	
†7.7 一阶运算放大器电路	214	10.2 节点分析法	311	
7.8 基于 PSpice 的暂态分析	217	10.3 网孔分析法	313	
†7.9 应用实例	220	10.4 叠加定理	315	
7.10 本章小结	224	10.5 电源变换	317	
复习题	225	10.6 戴维南等效电路与诺顿 等效电路	318	
习题	226	10.7 交流运算放大器电路	321	
综合理解题	234	10.8 基于 PSpice 的交流电路 分析	323	
第8章 二阶电路	235	†10.9 应用实例	326	
8.1 引言	235			
8.2 计算初值和终值	236			

10.10 本章小结	328	13.8 基于 PSpice 的磁耦合电路分析	432
复习题	329	†13.9 应用实例	436
习题	330	13.10 本章小结	440
第 11 章 交流功率分析	340	复习题	440
11.1 引言	340	习题	441
11.2 瞬时功率与平均功率	340	综合理解题	450
11.3 最大平均功率传输	344	第 14 章 频率响应	452
11.4 有效值	346	14.1 引言	452
11.5 视在功率与功率因数	349	14.2 传递函数	453
11.6 复功率	351	†14.3 分贝表示法	455
†11.7 交流功率守恒	353	14.4 伯德图	456
11.8 功率因数的校正	356	14.5 串联谐振电路	465
†11.9 应用实例	358	14.6 并联谐振电路	469
11.10 本章小结	361	14.7 无源滤波器	471
复习题	362	14.8 有源滤波器	475
习题	363	14.9 比例转换	480
综合理解题	370	14.10 基于 PSpice 的频率响应计算	482
第 12 章 三相电路	372	14.11 基于 MATLAB 的频率响应计算	485
12.1 引言	372	†14.12 应用实例	486
12.2 对称三相电压	374	14.13 本章小结	490
12.3 对称 Y-Y 联结	376	复习题	491
12.4 对称 Y-△ 联结	379	习题	492
12.5 对称 △-△ 联结	381	综合理解题	498
12.6 对称 △-Y 联结	382		
12.7 对称系统中的功率	384		
†12.8 非对称三相系统	388		
12.9 基于 PSpice 的三相电路分析	391		
†12.10 应用实例	395		
12.11 本章小结	401		
复习题	401		
习题	402		
综合理解题	408		
第 13 章 磁耦合电路	410		
13.1 引言	410		
13.2 互感	411		
13.3 耦合电路中的能量	416		
13.4 线性变压器	419		
13.5 理想变压器	423		
13.6 理想自耦变压器	428		
†13.7 三相变压器	430		

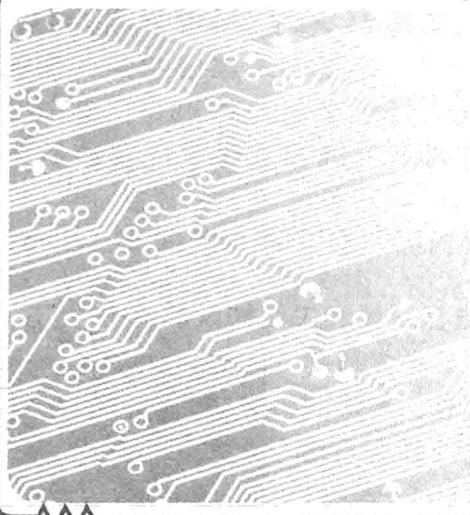
第三部分 高级电路分析

第 15 章 拉普拉斯变换简介	500
15.1 引言	500
15.2 拉普拉斯变换的定义	501
15.3 拉普拉斯变换的性质	503
15.4 拉普拉斯反变换	510
15.5 卷积积分	515
†15.6 拉普拉斯变换在微积分方程求解中的应用	521
15.7 本章小结	523
复习题	523
习题	524
第 16 章 拉普拉斯变换的应用	528
16.1 引言	528

16.2 电路元件的 s 域模型	529	18.3 傅里叶变换的性质	605
16.3 电路分析	533	18.4 傅里叶变换在电路分析中的应用	614
16.4 传递函数	536	18.5 帕塞瓦尔定理	616
16.5 状态变量	540	18.6 傅里叶变换和拉普拉斯变换的比较	618
†16.6 应用实例	544	†18.7 应用实例	618
16.7 本章小结	550	18.8 本章小结	621
复习题	551	复习题	622
习题	551	习题	622
综合理解题	560	综合理解题	627
第 17 章 傅里叶级数	561	第 19 章 二端口网络	628
17.1 引言	562	19.1 引言	628
17.2 三角函数形式的傅里叶级数	562	19.2 阻抗参数	629
17.3 对称周期函数的频谱分析	568	19.3 导纳参数	632
17.4 傅里叶级数在电路分析中的应用	575	19.4 混合参数	636
17.5 平均功率与方均根值	578	19.5 传输参数	640
17.6 指数形式的傅里叶级数	580	†19.6 六组参数之间的关系	643
17.7 基于 PSpice 的傅里叶分析	585	19.7 二端口网络的互联	646
†17.8 应用实例	589	19.8 基于 PSpice 的二端口网络参数计算	651
17.9 本章小结	591	†19.9 应用实例	653
复习题	592	19.10 本章小结	659
习题	593	复习题	660
综合理解题	599	习题	661
第 18 章 傅里叶变换	601	综合理解题	669
18.1 引言	601	附录 A 奇数编号习题答案	670
18.2 傅里叶变换的定义	602		

○ 第一部分

直 流 电 路



- 第1章 基本概念
- 第2章 基本定律
- 第3章 分析方法
- 第4章 电路定理
- 第5章 运算放大器
- 第6章 电容与电感
- 第7章 一阶电路
- 第8章 二阶电路

第1章

基本概念

有的书只需读其中一部分，有的书只需知其梗概，而对于少数好书，则应当通读，细读，反复读。

——Francis Bacon

增强技能与拓展事业

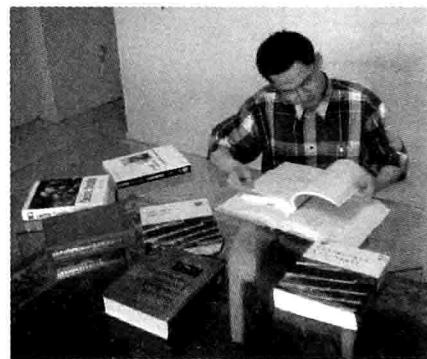
ABET EC 2000 标准(3.a), “应用数学、自然科学和工程知识的能力”

作为学生，你需要学习数学、自然科学与工程方面的知识，并且能够应用所学的知识来解决工程问题。利用相关领域的基础知识来解决实际问题是一种技能。那么，怎么才能培养和提高自己的这种技能呢？

最好的方法是尽可能多地解决所学课程中遇到的问题。然而，要想真正掌握这种技能，就必须花时间来分析何时、何地、为什么会有困难，这样就能容易地得到解决问题的方案。你会惊奇地发现，所求解的大部分问题都依赖于数学知识而不是对基本理论的理解。你还会发现自己解决问题的速度开始变快。花费时间来思考如何解决问题的方法可以帮助你节约时间，还可以避免失败。

对我而言最有效的解决问题的方法就是“六步解题法”。然后我会认真地分析解决问题的过程中都会在哪里遇到困难。很多时候，我发现出现问题的原因要么是因为自己对问题的理解不够，要么是自己正确运用数学知识解决问题的能力不足。这时我就会去寻找那些基础的数学教材，并且认真复习相关章节的内容，有时还会求解某些例题。所以我总结出了另一个重要的经验：将所有基本的数学、自然科学以及工程教材放在手边。

不断查阅以前所学知识的过程看起来或许非常乏味，但是随着自身技能的提高和知识的增加，这个过程会变得越来越轻松。正是通过这一过程，我才从一名普通学生成长为一名博士，并且成为一名成功的研究员。



Charles Alexander 摄影

1.1 引言

电路理论和电磁理论是电气工程的两大基础理论，电气工程的所有分支学科都是在此基础上发展起来的，如电源、电机、控制系统、电子学、通信以及电子仪器等许多分支。因此，电路理论是电气工程专业的学生最重要的课程，同时也是那些初学电气工程的学生的最佳起点。学习电路理论对于其他理工类专业的学生也是非常有用的，因为电路是一种很好的研究能量系统的模型，并且其中包含了应用数学、物理学和拓扑学等诸多内容。

在电气工程中，我们经常要研究一个点到另一个点的通信和能量传输，而实现这种功能需要将若干电气元件组合起来。这种由电气元件相互连接而成的整体称为电路(electric circuit)，电路中的每个组成部分称为元件(element)。

电路是由电气元件相互连接而成的整体。

一个简单的电路如图 1-1 所示，此电路由三个基本元件组成：电池、灯和导线。这个电路可以独立存在，也可构成几种应用，比如手电筒、探照灯等。

一个复杂实际的电路如图 1-2 所示，此电路是收音机的原理图。虽然看起来很复杂，但是利用本书所介绍的方法我们可以对该电路进行分析。本书的目标就是学习电路的分析方法和计算机软件的应用方法。

在电气系统中，不同的电路完成不同的任务，本书的目标不是研究这些电路的不同应用，而是专注于对电路的分析，并通过对电路的分析来研究电路的特性。例如：电路在给定激励的情况下是如何响应的？电路中相互连接的元件和器件是如何相互作用的？

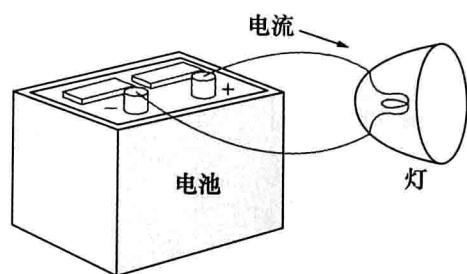


图 1-1 一个简单的电路

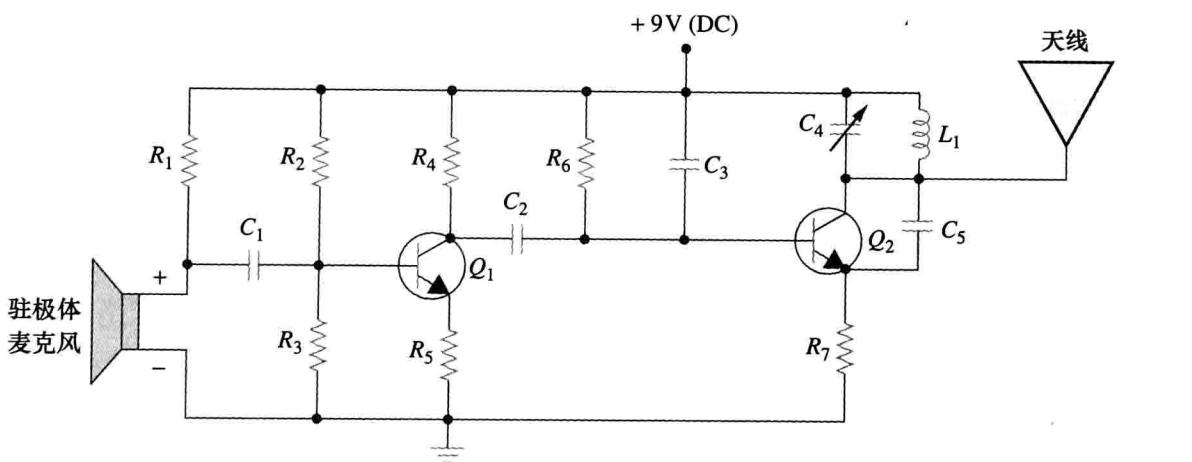


图 1-2 收音机原理图

本章首先学习几个基本概念：电荷、电流、电压、电路元件、功率和能量。在定义这些概念之前，先来介绍本书所采用的计量单位。

1.2 计量单位制

电子工程师需要处理很多测量工作，但是无论这些工作是在哪个国家完成的，都必须采用所有专业人士都能明白的标准语言来表示测量结果。这种国际计量语言就是国际单位制(International System of Unit, SI)，于 1960 年由国际度量会议确定采用。该计量单位制包括七个基本单位，由此可以推导出其他所有物理量的单位。表 1-1 给出了六个基本单位和一个与本书相关的导出单位。国际单位制的使用将贯穿全书。

表 1-1 六个基本单位与一个和本书相关的导出单位

量的名称	单位名称	单位符号	量的名称	单位名称	单位符号
长度	米	m	质量	千克	kg
时间	秒	s	电流	安[培]	A
热力学温度	开[尔文]	K	电荷量	库[仑]	C
发光强度	坎[德拉]	cd			

国际单位制的一大优势在于可以利用基于 10 的幂次方的前缀将更大或者更小的单位与基本单位联系起来，表 1-2 给出了国际单位制的前缀及其符号。例如，以下几种形式都

表示同一种距离：

600 000 000mm 600 000m 600km

表 1-2 国际单位制前缀

所表示的因数	前缀名称	前缀符号	所表示的因数	前缀名称	前缀符号
10^{18}	艾[可萨]	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍[它]	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太[拉]	T	10^{-3}	毫	m
10^9	吉[咖]	G	10^{-6}	微	μ
10^6	兆	M	10^{-9}	纳[诺]	n
10^3	千	k	10^{-12}	皮[可]	p
10^2	百	h	10^{-15}	飞[母托]	f
10^1	十	da	10^{-18}	阿[托]	a

1.3 电荷与电流

电荷的概念是解释各种电现象的基础，而且电路中最基本的物理量就是电荷(electric charge)。当人们脱掉羊毛衫或者在地毯上行走的时候，可能会受到静电冲击，这就是电荷的影响。

电荷是构成物质的原子的一种电气特性，单位是库仑(C)。

我们在基础物理学中学习过，所有的物质都是由原子构成的，每个原子又是由电子、质子和中子组成的。电子所带的电荷e是负的，其电荷量为 $1.602 \times 10^{-19} C$ ，而质子所带的则是电荷量与电子相同的正电荷。原子中数量相等的质子和电子使其呈现中性状态。

关于电荷要注意以下三点：

1. 对于电荷而言，库仑是一个相当大的单位，1C的电荷量中包含了 $1/(1.602 \times 10^{-19}) = 6.24 \times 10^{18}$ 个电子。因此，实际常用的电荷量通常是pC、nC或 μ C量级[⊖]；

2. 根据实验观测数据可知，实际产生的电荷量只能是电子电荷量 $e = -1.602 \times 10^{-19} C$ 的整数倍；

3. 电荷守恒定律(law of conservation of charge)说明，电荷既不能被创造，也不能被消灭，只能转移。因此一个系统中电荷量的代数和是不变的。

现在考虑电荷的流动。电荷的特征是其移动性，即电荷可以从一个位置运动到另一个位置，从而转换为另一种能量形式。

当一根导线(由若干原子组成)连接到电池(电动势源)两端时，就会迫使电荷运动。正电荷向一个方向移动而负电荷向相反方向移动，这种电荷的运动就产生了电流。习惯上将正电荷的运动方向作为电流流动的方向，即与负电荷的流动方向相反，如图1-3所示。这种电流方向是由美国的科学家和发明家Benjamin Franklin(1706—1790)提出的。虽然我们现在已经知道，金属导体中的电流是由带负电荷的电子运动而产生的，但仍然沿用大家普遍接受的惯例，即认为电流是正电荷流。

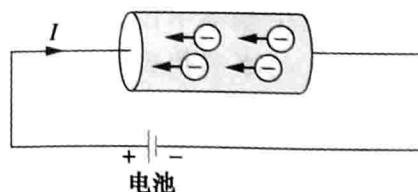


图 1-3 电荷在导体内流动所产生的电流

⊖ 然而，一个大的供电电容器所储存的电荷量可高达0.5C。

提示：“惯例”是描述某个事物的一种标准方法，这样，业内人士就能够明白我们所说的是什么意思。本书将采用 IEEE 的相关国际惯例。

历史珍闻

安培(Andre-Marie Ampere, 1775—1836)，法国数学家和物理学家，电动力学的奠基人。他于 19 世纪 20 年代给出了电流的定义和一种测量电流的方法。

安培出生于法国里昂。他痴迷于数学，而当时许多著名的数学著作却是用拉丁文写成的，所以 12 岁的他，只用几个星期就掌握了拉丁文。安培是一位卓越的科学家，也是一位富有创造力的作家。他提出了许多电磁定律，发明了电磁体和电流表。电流的单位“安培”就是用他的名字命名的。



美国加州圣马里诺
亨廷顿图书馆馆藏

电流是指电荷的时间变化率，单位为安培(A)。

在数学上，电流 i 、电荷 q 和时间 t 之间的关系为：

$$i \triangleq \frac{dq}{dt} \quad (1.1)$$

其中，电流的单位是 A，并且有：

$$1A = 1C/s$$

对式(1.1)两边取积分就得到从时刻 t_0 到 t 之间的电荷量，即：

$$Q \triangleq \int_{t_0}^t i dt \quad (1.2)$$

式(1.1)中电流 i 的定义方式说明电流并不是个常值函数，本章和后续章节中的大量例题和习题表明，电流的类型有若干种，即电荷以若干种不同的方式随时间变化。

如果电流不随时间变化，而是保持恒定，则称为直流电流(direct current, dc)。

直流电流是指不随时间变化的恒定电流。

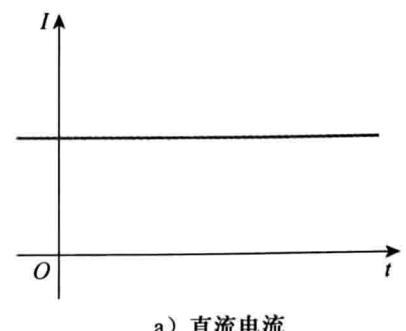
按照国际惯例，采用符号 I 来表示恒定电流。

随时间变化的电流则用符号 i 来表示，时变电流的常见形式是正弦电流或称交流电流(alternating current, ac)。

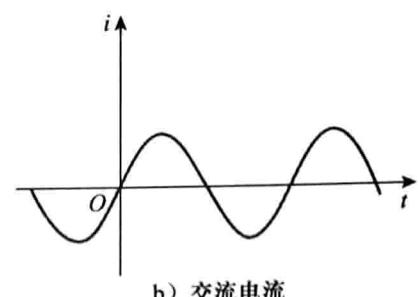
交流电流是指随时间按正弦规律变化的电流。

空调、冰箱、洗衣机以及其他家用电器的运行均采用交流电流。图 1-4 给出了两类最常见的电流：直流电流和交流电流。本书随后还将讨论其他形式的电流。

由于定义电荷的运动是电流，所以电流就要有相应的流动方向。如前所述，习惯上取正电荷的运动方向作为电流的流动方向。基于这一国际惯例，一个值为 5A 的电流既可以表示为正的，也可以表示为负的，如图 1-5 所示。换言之，图 1-5b 中沿某个方向流动的 -5A 的负电流与沿相反方向流动的 +5A 的正电流是一样的。



a) 直流电流



b) 交流电流

图 1-4 两类常见的电流

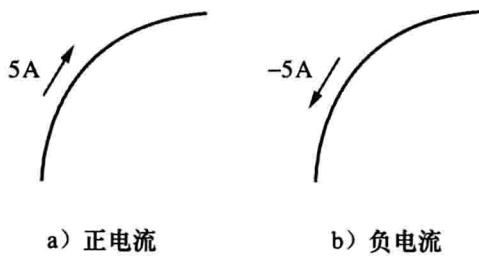


图 1-5 电流方向

例 1-1 4 600 个电子带多少电荷量?

解: 一个电子的电荷量为 $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$, 因此 4600 个电子的电荷量为 $-1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 4600 = -7.369 \times 10^{-16} \text{ C}$ 。

练习 1-1 计算 6 000 000 个质子所带的电荷量。

答案: $+9.612 \times 10^{-13} \text{ C}$

例 1-2 流入端点的总电荷量是 $q=5t \sin 4\pi t \text{ mC}$, 计算 $t=0.5 \text{ s}$ 时的电流。

$$\text{解: } i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(5t \sin 4\pi t) \text{ mC/s} = (5 \sin 4\pi t + 20\pi t \cos 4\pi t) \text{ mA}$$

当 $t=0.5$ 时,

$$i = 5 \sin 2\pi + 10\pi \cos 2\pi = 0 + 10\pi = 31.42 \text{ (mA)}$$

练习 1-2 例 1-2 中, 如果 $q=(10-10e^{-2t}) \text{ mC}$, 计算 $t=1.0 \text{ s}$ 时的电流。

答案: 2.707 mA

例 1-3 如果流过端点的电流是 $i=(3t^2-t) \text{ A}$, 计算 $t=1 \text{ s}$ 与 $t=2 \text{ s}$ 之间流入该端点的电荷量。

解:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t=1}^2 i dt = \int_1^2 (3t^2 - t) dt \\ &= \left(t^3 - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = (8 - 2) - \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 5.5 \text{ (C)} \end{aligned}$$

练习 1-3 如果流过某个元件的电流为:

$$i = \begin{cases} 4 \text{ A}, & 0 < t < 1 \\ 4t^2 \text{ A}, & t > 1 \end{cases}$$

计算 $t=0 \text{ s}$ 与 $t=2 \text{ s}$ 之间流入该元件的电荷量。

答案: 13.333 C

1.4 电压

如前一节所述, 要使导体内的电子向某个方向运动, 需要功或者能量的转换。而这种转换需要外电动势 (external electromotive force, emf) 的推动, 典型的电动势是如图 1-3 所示的电池。电动势又称为电压 (voltage) 或电位差 (potential difference)。电路中 a 、 b 两点之间的电压 v_{ab} 是指将单位电荷从点 a 移动至点 b 所需要的能量 (即所做的功)。在数学上可以表示为:

$$v_{ab} \triangleq \frac{dw}{dq} \quad (1.3)$$

式中, w 表示能量, 单位是焦耳 (J); q 为电荷, 单位是库仑 (C); 电压 v_{ab} 简写为 v , 单位是伏特 (V)。单位伏特是为纪念发明伏打电池的意大利物理学家伏特 (Alessandro Antonio Volta, 1745—1827) 而以他的名字命名的。由式 (1.3) 可以看出:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/C}$$

电压 (电位差) 是指移动单位电荷通过某个元件所需的能量, 单位是伏特。

历史珍闻

伏特(Alessandro Antonio Volta, 1745—1827), 意大利物理学家, 他发明了能够提供连续电流的电池和电容器。

伏特出生于意大利科莫的一个贵族家庭。18岁的时候就开始做电路试验, 他于1796年发明的电池是对电能应用的一次变革。他于1800年发表的著作标志着电路理论的开端。伏特一生中赢得了众多荣誉, 电压或电位差的单位“伏特”就是以他的名字命名的。



美国加州圣马里诺
亨廷顿图书馆馆藏

图1-6所示为连接于 a 、 b 两点之间的元件(用矩形方框表示)上的电压, 正号(+)和负号(−)用于定义参考方向或电压的极性, v_{ab} 可以用如下两种方式来解释: (1)点 a 的电位比点 b 的电位高 v_{ab} ; (2)相对于点 b , 点 a 的电位是 v_{ab} 。且有下述等式:

$$v_{ab} = -v_{ba} \quad (1.4)$$

例如, 图1-7给出了同一电压的两种不同表示方法。图1-7a中, 点 a 高于点 b (+9)V; 图1-7b中, 点 b 高于点 a (−9)V。也可以说, 图1-7a中, 从点 a 到点 b 有9V的电压降(voltage drop); 或者等效地说, 从点 b 到点 a 有9V的电压升(voltage rise)。换言之, 从点 a 到点 b 的电压降等效于从点 b 到点 a 的电压升。

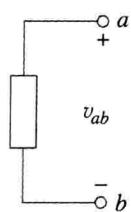


图1-6 电压 v_{ab} 的极性

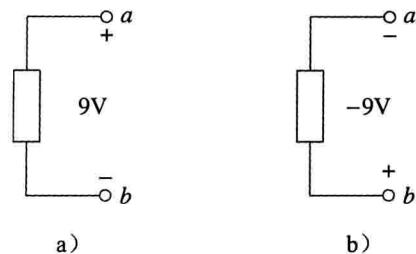


图1-7 同一电压 v_{ab} 的两种等效表示方法

电流和电压是电路中的两个基本变量。在传递信息的过程中, 常用术语信号来表示电流和电压(还有电磁波)等电量。由于这些电量在通信和其他学科中非常重要, 所以工程技术人员习惯将这些变量称为信号, 而不只是随时间变化的数学函数。与电流一样, 将恒定的电压称为直流电压, 用V表示, 而随时间按正弦规律变化的电压称为交流电压, 用 v 来表示。直流电压通常由电池产生, 而交流电压通常由发电机产生。

提示: 电流总是流经某个元件, 而电压总是跨接在某个元件两端或者两点之间。

1.5 功率与能量

虽然电流和电压是电路中的两个基本量, 但仅使用这两个变量还远远不够。在实际应用中, 我们需要知道电气设备能够处理多大的功率(power)。根据经验可知, 100W的灯泡要比60W的灯泡亮得多, 并且使用和消耗了电能, 就要向供电公司缴纳电费。因此, 功率和能量的计算在电路分析中是非常重要的。

为了得到功率和能量与电压和电流之间的关系, 下面回顾如下物理学知识。

功率是消耗或吸收能量的时间变化率, 单位是瓦特(W)。

这一关系的数学表达式为:

$$P \triangleq \frac{dW}{dt} \quad (1.5)$$

式中， p 为功率，单位是瓦特(W)； w 为能量，单位是焦耳(J)； t 为时间，单位是秒(s)。由式(1.1)、式(1.3)和式(1.5)可得：

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = vi \quad (1.6)$$

即

$$p = vi \quad (1.7)$$

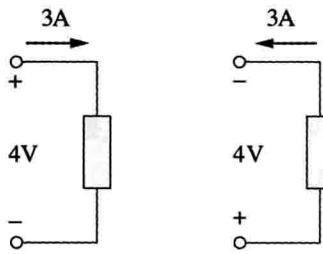
式(1.7)中的功率 p 是一个时变量，称为瞬时功率(instantaneous power)。因此，元件吸收或提供的功率是元件两端的电压与流过该元件的电流的乘积。如果功率为正值，则该元件传递或吸收功率。反之，如果功率为负值，则该元件发出功率。但是怎样才能知道功率何时为负、何时为正呢？

确定功率正负的关键是电流的方向和电压的极性。因此，图 1-8a 中电流 i 与电压 v 之间的关系非常重要。为使功率为正值，电压极性与电流方向之间的关系必须与图 1-8a 一致。这就是关联参考方向(passive sign convention)。按照关联参考方向，电流从电压的正极流入元件，在这种情况下， $p=+vi$ 或 $vi>0$ ，表示元件吸收功率。反之如图 1-8b 所示， $p=-vi$ ，或 $vi<0$ ，表示元件释放或者发出功率。

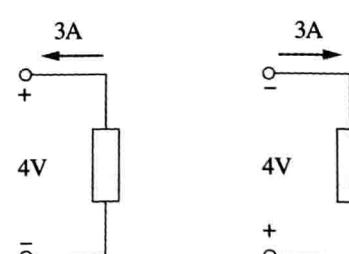
当电流流入元件的电压正极时满足关联参考方向，且 $p=+vi$ ；如果电流流入元件的电压负极，则有 $p=-vi$ 。

除特别说明外，本书遵循关联参考方向来确定功率的符号。例如，在图 1-9 所示的两个电路中，因为正电流均从正端流入，所以元件都吸收 $+12W$ 的功率；但在图 1-10 所示的两种情况下，因为正电流均从元件的负端流入，所以元件都发出 $+12W$ 的功率。因此吸收 $-12W$ 的功率等效于发出 $+12W$ 的功率。一般而言：

$$\text{吸收的正功率} = \text{发出的负功率}$$



a) $p=4 \times 3=12(W)$ b) $p=4 \times 3=12(W)$



a) $p=-4 \times 3=-12(W)$ b) $p=-4 \times 3=-12(W)$

图 1-9 元件吸收功率为 12W 的两种情况

图 1-10 元件发出功率为 12W 的两种情况

事实上，任何电路都必须遵守能量守恒定律(law of conservation of energy)，因此，任何时刻电路中功率的代数和必须为零：

$$\sum p = 0 \quad (1.8)$$

式(1.8)再一次证实，提供给电路的总功率必须与吸收的总功率平衡。

由式(1.6)可得，从 t_0 时刻到 t 时刻元件所吸收或发出的能量为：

$$w = \int_{t_0}^t p dt = \int_{t_0}^t vi dt \quad (1.9)$$

能量是指做功的能力，单位为焦耳。

电力公司以瓦特·小时(W·h)为单位度量能量，其中：

$$1\text{W}\cdot\text{h} = 3600\text{J}$$

例 1-4 某电源使得 2A 的恒定电流流过灯泡 10s，如果灯泡以光能和热能的形式消耗的能量为 2.3kJ，计算灯泡两端的电压降。

解：总电荷量为：

$$\Delta q = i\Delta t = 2 \times 10 = 20(\text{C})$$

电压降为：

$$v = \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{2.3 \times 10^3}{20} = 115(\text{V})$$

 练习 1-4 将电荷 q 从 a 点移动到 b 点所需的能量为 -30J ，计算下面两种情况下的电压降 v_{ab} 。(a) $q=6\text{C}$ ，(b) $q=-3\text{C}$ 。
答案：(a) -5V (b) 10V

例 1-5 如果流入某元件正极的电流 i 为：

$$i = 5\cos 60\pi t \text{ A}$$

且该元件两端的电压为：(a) $v=3i$ V，(b) $v=3di/dt$ V。计算在 $t=3\text{ms}$ 时该元件所吸收的功率。

解：(a) 电压为：

$$v = 3i = 15\cos 60\pi t (\text{V})$$

因此功率为：

$$p = vi = 75\cos^2 60\pi t (\text{W})$$

在 $t=3\text{ms}$ 时，所求功率为：

$$p = 75\cos^2(60\pi \times 3 \times 10^{-3}) = 75\cos^2 0.18\pi = 53.48(\text{W})$$

(b) 电压和功率的计算公式如下所示：

$$v = 3 \frac{di}{dt} = 3(-60\pi)5\sin 60\pi t = -900\pi \sin 60\pi t (\text{V})$$

$$p = vi = -4500\pi \sin 60\pi t \cos 60\pi t (\text{W})$$

在 $t=3\text{ms}$ 时，所求功率为：

$$\begin{aligned} p &= -4500\pi \sin 0.18\pi \cos 0.18\pi \\ &= -14137.167 \sin 32.4^\circ \cos 32.4^\circ = -6.396(\text{kW}) \end{aligned}$$

 练习 1-5 在例 1-5 中，如果电流保持不变，电压为：(a) $v=2i$ V，(b) $v=\left(10+5\int_0^t idt\right)$ V。

计算 $t=5\text{ms}$ 时该元件所吸收的功率。

答案：(a) 17.27W ，(b) 29.7W

例 1-6 一个 100W 的电灯泡 2h 消耗的电能是多少？

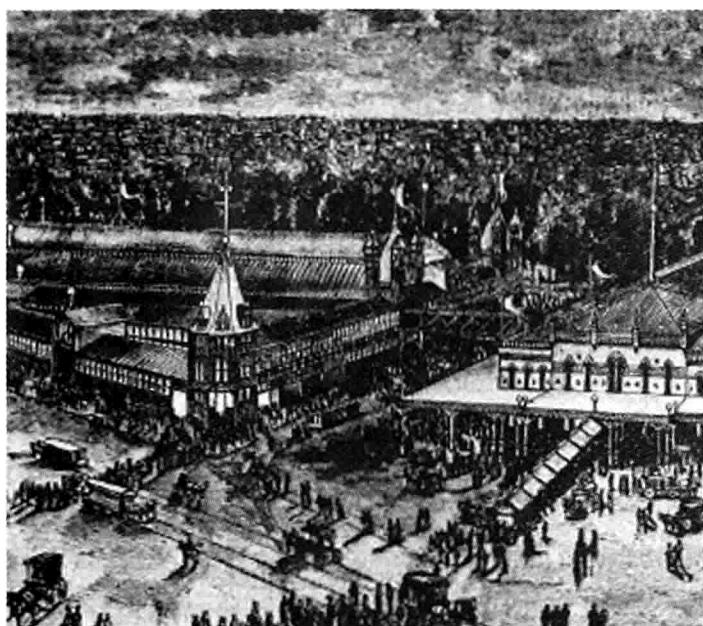
$$\text{解：} w = pt = 100\text{W} \times 2\text{h} \times 60(\text{min}/\text{h}) \times 60(\text{s}/\text{min}) = 720000\text{J} = 720\text{kJ}$$

即

$$w = pt = 100\text{W} \times 2\text{h} = 200\text{W} \cdot \text{h}$$

 练习 1-6 一个炉子连接至 240V 电压的时候电流为 15A，计算此元件消耗 180kJ 能量所需的时间。
答案：50s

历史珍闻



由史密斯森协会提供图片

1884 年展览会 1884 年在美国举办的国际电气展览 (International Electrical Exhibition) 对电气技术的推动作用无与伦比。试想一个没有电的世界，一个靠蜡烛和煤气灯点亮的世界，一个以步行、骑马和马车作为常见交通工具的世界。在这样一个世界里，1884 年展览会横空出世，托马斯·爱迪生 (Thomas Edison) 成为此次展会的主角，他表现出了推广其发明和产品的超强能力。

爱德华·韦斯顿 (Edward Weston) 的发电机和电灯是美国电气照明公司参展的亮点，韦斯顿精心收藏的科学仪器也在本次展会展出。

其他著名的参展者包括弗兰克·斯普雷格 (Frank Sprague)、艾利和·汤普森 (Elihu Thompson) 以及克利夫兰电器公司 (Brush Electric Company of Cleveland)。在本次展览会期间，美国电气工程师学会 (American Institute of Electrical Engineers, AIEE) 于 10 月 7 日至 8 日召开了首届技术专门会议。1964 年，AIEE 与无线电工程师学会 (Institute of Radio Engineers, IRE) 合并成立了电气与电子工程师学会 (Institute of Electrical and Electronics Engineers, IEEE)。

1.6 电路元件

正如 1.1 节中所讨论的，元件是电路的基本组成部分，电路就是由若干元件相互连接构成的总体。电路分析就是确定电路中元件两端的电压 (或流过元件的电流) 的过程。

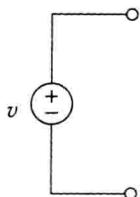
电路中有两种类型的元件：无源 (passive) 和有源 (active) 元件。有源元件能够产生能量而无源元件则不能，无源元件包括电阻、电容、电感等，典型的有源元件包括发电机、电池、运算放大器等。本节的目的是让读者熟悉几个重要的有源元件。

最重要的有源元件就是电压源和电流源，一般用于为与其相连的电路输送功率。电源又分为两种：独立源和非独立源 (也称为受控源)。

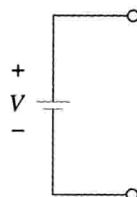
理想独立源是指能够提供与其他电路元件完全无关的特定电压或电流的有源元件。

换句话说，理想的独立电压源无论提供给电路多大的电流，其两端电压始终保持不变。电池和发电机等实际电源元件可以近似认为是理想电压源。图 1-11 给出了独立电压

源的表示符号。注意，图 1-11a 和图 1-11b 中的两种符号均可以表示独立电压源，但只有图 1-11a 中的符号才能表示交流电压源。类似地，理想的独立电流源是指能够提供与其两端电压完全无关的特定电流的有源元件，也就是说，无论两端电压多大，电流源传递给电路的电流总是保持指定的电流值。独立电流源的符号表示如图 1-12 所示，图中箭头表示电流 i 的方向。



a) 用于表示恒定电压或时变电压



b) 用于表示恒定电压 (dc)

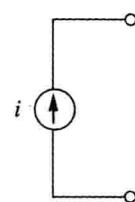


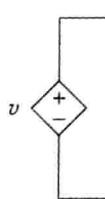
图 1-12 独立电流源的表示符号

理想的非独立源(受控源)是指其所提供的电压或电流受到其他电压或电流控制的有源元件。

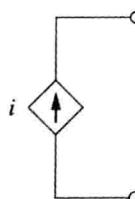
受控电源元件通常用菱形符号表示，如图 1-13 所示。由于对受控源的控制可以通过电路中某个元件的电压或电流来实现，而且受控源既可以是电压源又可以是电流源，所以有四种形式的受控源，分别为：

1. 电压控制电压源(VCVS)； 2. 电流控制电压源(CCVS)；
3. 电压控制电流源(VCCS)； 4. 电流控制电流源(CCCS)。

受控源在建立晶体管、运算放大器以及集成电路等元件的电路模型时是很有用的。一个电流控制电压源的电路如图 1-14 所示，其中电压源的电压 $10i$ 取决于流经元件 C 的电流。读者或许会感到意外，受控电压源的值是 $10i$ V(而不是 $10i$ A)，这是因为它是一个电压源。应该记住的是，不管控制受控源的是什么电量，电压源的符号都是用极性(+)、(-)表示的，而电流源是用箭头表示的。



a) 受控电压源



b) 受控电流源

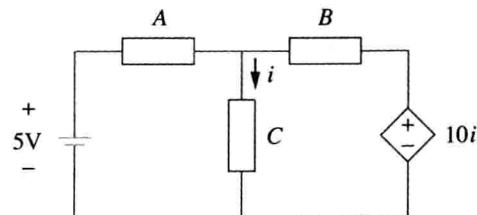


图 1-13 受控源的表示符号

图 1-14 电路右边为一个电流控制电压源

注意，理想电压源(受控的或独立的)会产生确保其端电压所需的任意电流，而理想电流源会产生所需的电压来维持其电流。因此，从理论上讲，理想源能够提供无穷大的能量。同时还应注意到，有源元件不仅可以为电路提供功率，而且还可以从电路中吸收功率。对于电压源而言，我们知道其电压，但不知道它提供或吸收的电流是多少，同理，对于电流源而言，我们只知道它提供的电流，而不知道它两端的电压是多少。

例 1-7 计算图 1-15 中各元件所发出或吸收的功率。

解：在计算时，要利用图 1-8 和图 1-9 所示的符号来确定功率的符号。对于 p_1 而言，5A 电流从元件的正端流出(或者说 5A 电流流入元件的负端)，因此：

$$p_1 = 20 \times (-5) = -100(\text{W}) \quad \text{发出的功率}$$

对于 p_2 和 p_3 而言，电流都是流入各个元件的正端，于是：

$$p_2 = 12 \times 5 = 60(\text{W}) \quad \text{吸收的功率}$$

$$p_3 = 8 \times 6 = 48(\text{W}) \quad \text{吸收的功率}$$

对于 p_4 而言, 由于该受控源的两端和无源元件 p_3 的两端相连, 所以其电压与 p_3 的电压相同, 为 8V(正极在上面)。(记住, 电压测量是相对于电路中元件的两端来说的。)因为电流是从正端流出来的, 所以:

$$p_4 = 8 \times (-0.2I) = 8 \times (-0.2 \times 5) = -8(\text{W}) \quad \text{提供的功率}$$

可以观察到, 电路中 20V 的独立电压源和 $0.2I$ 的受控电流源均是为电路网络中的其他元件提供功率的, 而两个无源元件则是吸收功率的, 并且:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = -100 + 60 + 48 - 8 = 0$$

上述结果与式(1.8)一致, 即发出的总功率等于吸收的总功率。

练习 1-7 计算图 1-16 的电路中每个元件吸收的功率或发出的功率。

答案: $p_1 = -45\text{W}$, $p_2 = 18\text{W}$, $p_3 = 12\text{W}$, $p_4 = 15\text{W}$

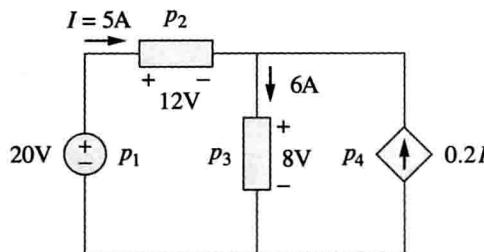


图 1-15 例 1-7 图

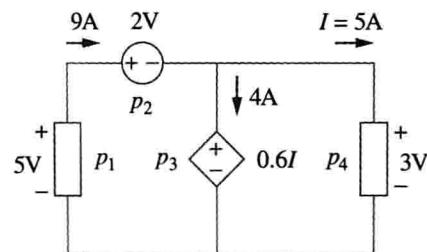


图 1-16 练习 1-7 图

† 1.7 应用实例[⊖]

这一节研究与本章介绍的概念有关的两个应用实例。一个是电视显像管, 另一个是如何确定电器设备的用电量账单。

1.7.1 电视显像管

电视信号的发射和接收体现了电子运动的一个重要应用。在电视发射端, 摄像管将场景的光图像转化为电信号, 光电摄像管中的电子束实现了对光图像的扫描。在电视接收端, 利用电视机内的阴极射线管(CRT)[⊖]重建场景的图像, CRT 的结构如图 1-17 所示。与产生恒定强度电子束的光电摄像管不同, CRT 电子束的强度随着输入信号的强弱而变

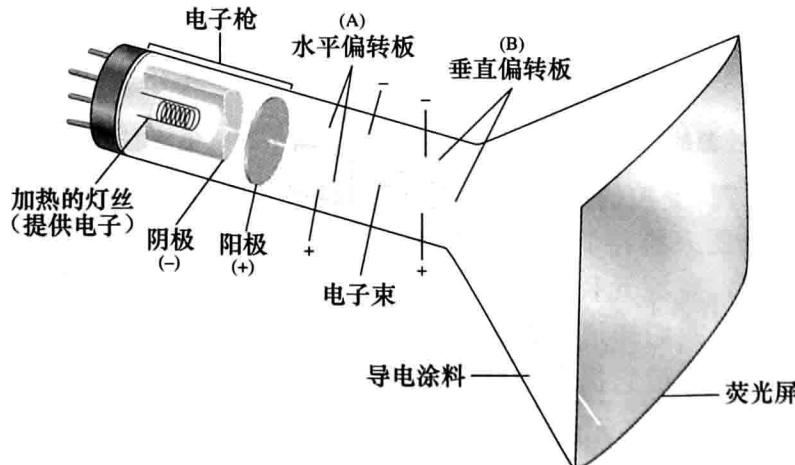


图 1-17 阴极射线管

[⊖] 各节标题前的剑号(†)表示该节可以跳过, 也可以作简要介绍, 或者留作课后作业。

[⊖] 现代电视显像管采用不同于 CRT 的技术。

化。图中始终保持高电压的电子枪发射电子束，经过垂直和水平两组偏转板，使射到荧光屏上的电子束能够上下左右移动。电子束击中荧光屏后，相应的点就会发亮。这样，就可以利用电子束在电视屏幕上“描绘”出图像。

历史珍闻

卡尔·费迪南德·布劳恩和弗拉基米尔·科斯马·兹沃尔金

斯特拉斯堡大学(University of Strasbourg)的卡尔·费迪南德·布劳恩(Karl Ferdinand Braun, 1850—1918)于1879年发明了布劳恩阴极射线管。阴极射线管在之后许多年里成为电视显像管的基本组成部分，虽然平板显示系统发展迅速，但显像管至今仍然是最经济的部件。在布劳恩阴极射线管发明之后，又借助了弗拉基米尔·科斯马·兹沃尔金(Vladimir K. Zworykin, 1889—1982)研究光电摄像管的创造性成果，这样才有了今天的电视机。光电摄像管不断发展为正析摄像管和超正析摄像管，从而实现了捕获图像，并将其转换为可发送给电视接收机的信号，电视摄像机就这样诞生了。

例 1-8 如果电视显像管中的电子束每秒携带 10^{15} 个电子，计算加速该电子束使之达到4W的功率所需的电压 V_0 。

解：一个电子的电荷量为：

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

则n个电子的电荷量为 $q = ne$ ，并且：

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = e \frac{dn}{dt} = (-1.6 \times 10^{-19}) \times 10^{15} \\ &= -1.6 \times 10^{-4} (\text{A}) \end{aligned}$$

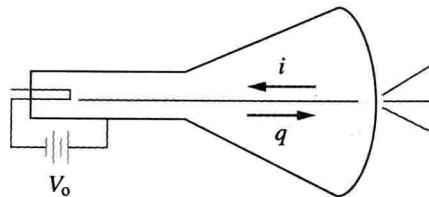


图 1-18 阴极射线管简图

其中，负号表示电流方向与电子流动方向相反，如图1-18所示，图中所示为垂直偏转板不带电荷情况时的CRT简图。于是，电子束的功率为：

$$P = V_0 \cdot i$$

或

$$V_0 = \frac{P}{i} = \frac{4}{1.6 \times 10^{-4}} = 25000 (\text{V})$$

因此，所需加的电压为25kV。

练习 1-8 如果电视显像管中的电子束每秒携带 10^{13} 个电子，通过一个电位差为30kV的平面场，计算其功率。

答案：48mW

1.7.2 电费账单

第二个应用讨论的是供电公司如何向用户收取电费。电费的多少取决于用户消耗的电能(影响电费的其他因素包括需求和功率因数，这里忽略不计)。但是在美国，即使用户不消耗任何电能，仍然需要支付维护电线正常工作的最低服务费。随着用电量的增加，每千瓦时所需支付的电费不断降低。表1-3给出了一个五口之家家用电器每月的平均耗电量。

表 1-3 家用电器每月的平均耗电量

家用电器	耗电量(kW·h)	家用电器	耗电量(kW·h)
热水器	500	洗衣机	120
冰箱	100	炉子	100
照明	100	烘干机	80
洗碗机	35	微波炉	25
电熨斗	15	个人计算机	12
电视机	10	收音机	8
烤面包机	4	电子钟	2

例 1-9 某家庭一月份耗电量为 $700\text{ kW} \cdot \text{h}$, 按照如下电费标准确定该家庭当月的电费账单。

每月的基本供电服务费 \$12.00。

每月第一个 $100\text{ kW} \cdot \text{h}$ 按 16 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 计费。

之后的 $200\text{ kW} \cdot \text{h}$ 按 10 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 计费。

超过 $300\text{ kW} \cdot \text{h}$ 按 6 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$ 计费。

解：电费账单计算如下：

每月的基本供电服务费 = \$12.00

第一个 $100\text{ kW} \cdot \text{h} \times \$0.16/\text{kW} \cdot \text{h} = \16.00

之后的 $200\text{ kW} \cdot \text{h} \times \$0.10/\text{kW} \cdot \text{h} = \20.00

剩余的 $400\text{ kW} \cdot \text{h} \times \$0.06/\text{kW} \cdot \text{h} = \24.00

一月份的总电费 = \$72.00

平均价格 = $\$72.00 / (100 + 200 + 400) = 10.2$ 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$

 **练习 1-9** 参考例 1-9 中电费的计算方法, 如果某家庭七月份大部分时间外出休假, 只用了 $350\text{ kW} \cdot \text{h}$ 的电量, 计算该月每千瓦时的平均电费。 答案: 14.571 美分/ $\text{kW} \cdot \text{h}$

† 1.8 解题方法

虽然问题的复杂程度和重要程度各不相同, 但解决问题所应遵循的基本原则是相同的。下面罗列了一些解决工程问题和学术问题的过程和方法, 这是本书作者和他的学生们多年来经验的总结。

首先简要地列出所有的步骤, 之后再做详细说明。

1. 明确所要解决的问题;
2. 列出问题的全部已知条件;
3. 确定问题的备选解决方案, 并且从中找出成功可能性最大的一种方案;
4. 尝试寻求问题的解;
5. 评价所得到的答案并检验其准确性;
6. 对结果是否满意? 如果满意, 则提交该结果; 否则返回步骤 3 重新执行这一过程。

以下是详细说明:

1. 明确所要解决的问题。这一步可能是整个过程中最重要的一步, 因为它是进行下面所有步骤的基础。一般而言, 工程问题的提出多少会有点儿不完整, 所以你必须尽量使你对问题的理解与问题提出者对问题的理解尽可能完全一致。在弄清问题这一步上花一些时间将为后续各步节省大量的时间并避免失败。学生可以求助于教授, 把教科书中所提出的问题理解得更清楚, 而工业应用中遇到的问题可能需要你与多位相关人员商讨。在这一步, 非常重要的是在解决问题之前先提出问题, 如果对此有疑问则可以咨询合适的相关人员, 也可以借助有关资源得到问题的答案。利用这些结果, 可以进一步精炼所要解决的问题, 并可将精炼后的问题表述用于后面的求解过程当中。

2. 列出问题的全部已知条件。现在可以将你对问题的全部理解及其可能的解决方案写下来, 这样, 能够节约时间并避免失败。

3. 确定问题的备选解决方案, 并且从中找出成功可能性最大的一种方案。几乎每一个问题都可能存在若干种途径去解决, 人们非常希望得到尽可能多的解决途径。在进行这项工作的时候, 还需要确定采用什么样的工具, 例如能够大幅度降低计算量、提高准确度的 PSpice、MATLAB 以及其他一些软件。需要再次强调的是, 第一步明确问题和这一步研究解决问题的可选方法所花费的时间将对后续问题的解决有极大的帮助, 虽然评估各种

方法的优劣并确定一种最可行的方法是比较困难的，但是仍然值得付出这样的努力。因为如果首次选用的方法失败，还要再重新执行这一步骤。

4. 尝试寻求问题的解。现在就可以开始解题了。必须将解题的过程很好地记录下来，如果解题成功，就可以给出详细解；如果失败，则可以检查整个过程。通过细致的检查可以找出问题并予以纠正，从而得到正确的解，也可以换一种方法求出正确的答案。一般来说，明智的做法是先得到结果的表达式之后再将数据代入方程，这样有助于检查你所得到的结果。

5. 评价所得到的答案并检验其准确性。这一步是评价你所完成的工作，确定是否得到可以让别人（你的团队、上司、教授等）接受的结果。

6. 对结果是否满意？如果满意，则提交该结果；否则，返回步骤3重新执行这一过程。此时要么提交结果，要么试探另一种方法。如果提交了结果，解题过程一般就结束了。然而，提交答案后通常会发现更进一步的问题，仍然需要继续这一解题过程，从而最终得到满意的结论。

下面以电子与计算机工程专业学生的课程作业为例，说明上述过程（这一基本过程同样适用于几乎所有工程类课程）。虽然上述步骤用于学术问题时略显简单，但仍有必要按照这几个基本过程求解。下面就通过一个简单的例予以说明。

例 1-10 计算图 1-19 中流过 8Ω 电阻的电流。

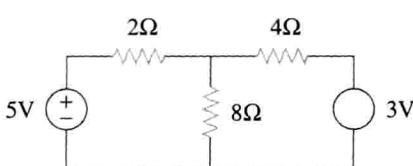


图 1-19 例 1-10 图

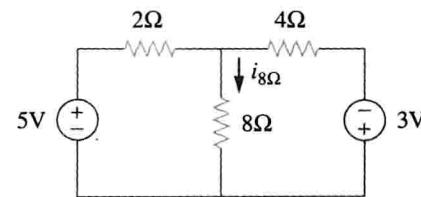


图 1-20 问题的定义

解：1. 明确问题。这只是一个简单的例子，但是由电路图可见，3V 电压源的极性并不确定。有几种解决途径可供选择。可向教授询问该电压源的极性，如果无法询问，则需要确定接下来的处理方法。如果时间充裕，则可以在 3V 电压源的正极在上和正极在下两种情况下求解电流。这里假定教授告知该电压源的极性如图 1-20 所示，正极在下。

2. 列出问题的全部已知条件。列出问题的所有已知条件，包括清楚地对电路进行标记，从而确定要求解的量。已知电路如图 1-20 所示，试求 $i_{8\Omega}$ 。如果情况允许，可以和教授共同检查对问题的理解是否正确。

3. 建立备选解决方案并确定哪一个方案最有可能成功。解决这个问题可以采用三种基本方法，即本书稍后会介绍的电路分析法（基尔霍夫定律、欧姆定律）、节点分析法和网孔分析法。

采用电路分析法求解 $i_{8\Omega}$ 可以得到该题的解，但可能比节点分析法和网孔分析法更为繁杂。用网孔分析法求解 $i_{8\Omega}$ 要列写两个联立方程，并求出如图 1-21 所示的两个回路电流。采用节点分析法只需求解一个未知量，是最为简单的方法。所以选用节点分析法来求解 $i_{8\Omega}$ 。

4. 尝试求解问题。首先写出求解 $i_{8\Omega}$ 所需的所有方程：

$$i_{8\Omega} = i_2, \quad i_2 = \frac{v_1}{8}, \quad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8}$$

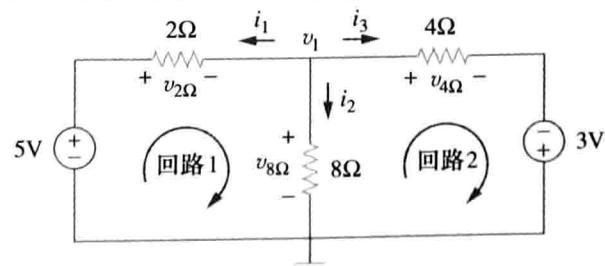


图 1-21 采用节点分析法求解的电路原理图

$$\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4} = 0$$

于是可以求出 v_1 :

$$8 \times \left[\frac{v_1 - 5}{2} + \frac{v_1 - 0}{8} + \frac{v_1 + 3}{4} \right] = 0$$

从而得到:

$$(4v_1 - 20) + v_1 + (2v_1 + 6) = 0$$

$$7v_1 = +14V, \quad v_1 = +2V, \quad i_{8\Omega} = \frac{v_1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25(A)$$

5. 评价所得到的答案并检验其准确性。可以采用基尔霍夫定律(KVL)验证所得到的结果:

$$i_1 = \frac{v_1 - 5}{2} = \frac{2 - 5}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5(A)$$

$$i_2 = i_{8\Omega} = 0.25A$$

$$i_3 = \frac{v_1 + 3}{4} = \frac{2 + 3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25(A)$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = -1.5 + 0.25 + 1.25 = 0(\text{验证})$$

将 KVL 用于回路 1:

$$\begin{aligned} -5 + v_{2\Omega} + v_{8\Omega} &= -5 + (-i_1 \times 2) + (i_2 \times 8) \\ &= -5 + [-(-1.5) \times 2] + (0.25 \times 8) \\ &= -5 + 3 + 2 = 0(\text{验证}) \end{aligned}$$

将 KVL 用于回路 2:

$$\begin{aligned} -v_{8\Omega} + v_{4\Omega} - 3 &= -(i_2 \times 8) + (i_3 \times 4) - 3 \\ &= -(0.25 \times 8) + (1.25 \times 4) - 3 \\ &= -2 + 5 - 3 = 0(\text{验证}) \end{aligned}$$

至此，我们完全确信所得答案的正确性。

6. 是否满意？如果满意，则提交答案，否则返回步骤(3)重新计算。该题解答正确，满意。

流经 8Ω 电阻的电流是 0.25A，自上而下流过该电阻。

 练习 1-10 利用上述解题过程求解本章最后的综合理解题。

1.9 本章小结

1. 电路由若干相互连接在一起的电路元件构成。
2. 国际单位制(SI)是工程技术人员互相交流的国际度量语言。由国际单位制的七个基本单位可以推导出其他的物理量单位。
3. 电流是在给定方向下某点电荷变化的速率：

$$i = \frac{dq}{dt}$$

4. 电压是指移动 1C 电荷所需要的能量：

$$v = \frac{dw}{dq}$$

5. 功率是指单位时间所发出或吸收的能量，也可以用电压与电流的乘积表示：

$$p = \frac{dw}{dt} = vi$$

6. 按照关联参考方向，如果电流从元件电压的正极流入，则功率的符号为正。

7. 一个理想的电压源，无论两端连接什么元件，总是给出特定的电位差；一个理想的电流源，无论其两端连接什么元件，总会产生特定的电流。
8. 电压源和电流源可以是受控源，也可以是独立源，受控源的大小受电路中其他变量的控制。
9. 电视显像管和电费账单的计算是本章所述概念的两个应用实例。

复习题

- 1 毫伏等于百万分之一伏特。
 (a) 对 (b) 错
 - 2 词头“微”表示：
 (a) 10^6 (b) 10^3
 (c) 10^{-3} (d) 10^{-6}
 - 3 2 000 000V 的电压用 10 的幂次表示，可以写为：
 (a) 2mV (b) 2kV
 (c) 2MV (d) 2GV
 - 4 如果每秒流过某一点的电荷为 2C，则电流是 2A。
 (a) 对 (b) 错
 - 5 电流的单位是：
 (a) 库仑 (b) 安培
 (c) 伏特 (d) 焦耳
 - 6 电压的度量单位是：
 (a) 瓦特 (b) 安培
 (c) 伏特 (d) 焦耳/秒
 - 7 4A 的电流对一介质充电 6s 后，所储存的电荷是 24C。
- (a) 对 (b) 错
- 8 如果 1.1kW 的烤面包机产生的电流为 10A，则其两端的电压为：
 (a) 11kV (b) 1100V
 (c) 110V (d) 11V
- 9 下述哪个量不是电量：
 (a) 电荷 (b) 时间
 (c) 电压 (d) 电流
 (e) 功率
- 10 图 1-22 中受控源是：
 (a) 电压控制电流源 (b) 电压控制电压源
 (c) 电流控制电压源 (d) 电流控制电流源

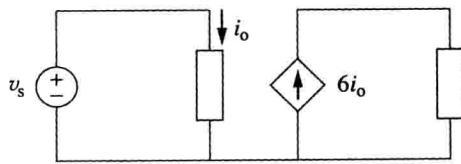


图 1-22 复习题 10 图

答案：1(b); 2(d); 3(c); 4(a); 5(b); 6(c);
 7(a); 8(c); 9(b); 10(d)

习题

1.3 节

- 1 下列各电子数量分别表示多少库仑的电荷？
 (a) 6.482×10^{17} (b) 1.24×10^{18}
 (c) 2.46×10^{19} (d) 1.628×10^{20}
- 2 如果电荷量由如下函数确定，试求流过元件的电流：
 (a) $q(t) = (3t + 8)mC$
 (b) $q(t) = (8t^2 + 4t - 2)C$
 (c) $q(t) = (3e^{-t} - 5e^{-2t})nC$
 (d) $q(t) = 10\sin 120\pi t pC$
 (e) $q(t) = 20e^{-4t} \cos 50t \mu C$
- 3 如果流过元件的电流由如下函数确定，试求流过元件的电荷量 $q(t)$ ：
 (a) $i(t) = 3A, q(0) = 1C$
 (b) $i(t) = (2t + 5)mA, q(0) = 0$
 (c) $i(t) = 20\cos(10t + \pi/6)\mu A, q(0) = 2\mu C$
 (d) $i(t) = 10e^{-30t} \sin 40t A, q(0) = 0$
- 4 如果流经某导体的电流为 7.4A，计算 20s 内通

过该导体任一截面的电荷量。

- 5 如果电流 $i(t) = \frac{1}{2}t A$ ，计算在 $0 \leq t \leq 10s$ 期间传递的总电荷量。
- 6 流入某元件的电荷量如图 1-23 所示，计算以下各个时刻的电流。
 (a) $t = 1ms$; (b) $t = 6ms$; (c) $t = 10ms$

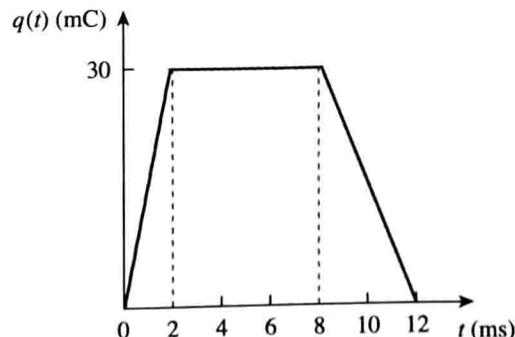


图 1-23 习题 6 图

- 7 流过一根导线的电荷量随时间变化的曲线如图 1-24 所示，画出相应的电流变化曲线。

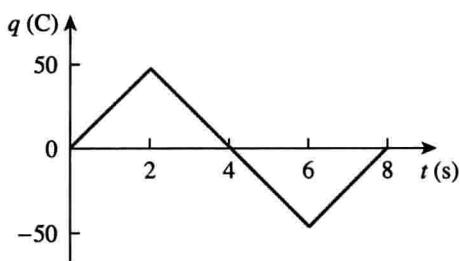


图 1-24 习题 7 图

- 8 流经器件中某一点的电流如图 1-25 所示，计算通过该点的总电荷量。

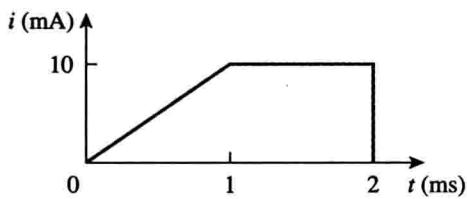


图 1-25 习题 8 图

- 9 流过某元件的电流如图 1-26 所示，计算下列各个时刻通过该元件的总电荷量。

(a) $t=1\text{s}$; (b) $t=3\text{s}$; (c) $t=5\text{s}$ 。

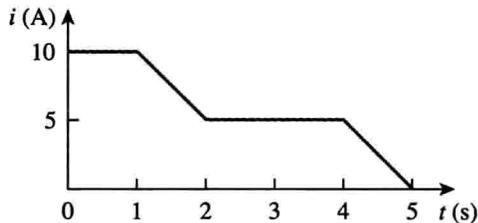


图 1-26 习题 9 图

1.4 节和 1.5 节

- 10 10kA 闪电击中物体的时间是 $15\mu\text{s}$ ，计算物体表面的总电荷量。

- 11 充电电池能够连续大约 12h 输出 90mA 的电流，计算以这样的速率所释放的电荷量为多少。如果其端电压为 1.5V，计算该电池输出的能量为多少。

- 12 如果流经某元件的电流为：

$$i(t) = \begin{cases} 3t\text{A}, & 0 \leq t < 6\text{s} \\ 18\text{A}, & 6 \leq t < 10\text{s} \\ -12\text{A}, & 10 \leq t < 15\text{s} \\ 0, & t \geq 15\text{s} \end{cases}$$

画出 $0 < t < 20\text{s}$ 期间该元件中储存电荷的变化曲线。

- 13 从某元件正极流入的电荷为 $q = 5\sin 4\pi t\text{ mC}$ 且该元件两端的电压为 $v = 3\cos 4\pi t\text{ V}$ 。

(a) 计算在 $t = 0.3\text{s}$ 时传递给该元件的功率；

- (b) 计算在 $0 \sim 0.6\text{s}$ 期间传递给该元件的能量。

- 14 如果某元件两端的电压 v 与流过该元件的电流 i 分别为： $v(t) = 10\cos 2t\text{ V}$, $i(t) = 20(1 - e^{-0.5t})\text{ mA}$ 。计算：(a) $t=1\text{s}$ 时，该元件中的总电荷量；(b) $t=1\text{s}$ 时，该元件消耗的功率。

- 15 流入某元件正极的电流为 $i(t) = 6e^{-2t}\text{ mA}$ ，该元件两端的电压为 $v(t) = 10di/dt\text{ V}$ 。计算：(a) 在 $t=0$ 到 $t=2\text{s}$ 之间传递给该元件的电荷量；(b) 该元件吸收的功率；(c) 该元件在 3s 内吸收的能量。

1.6 节

- 16 图 1-27 给出了某元件的电流和电压波形。

(a) 画出 $t > 0$ 时传递给该元件的功率曲线；
(b) 计算该元件在 $0 < t < 4\text{s}$ 期间吸收的能量。

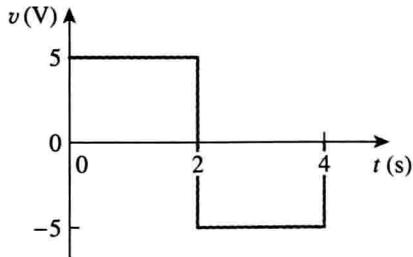
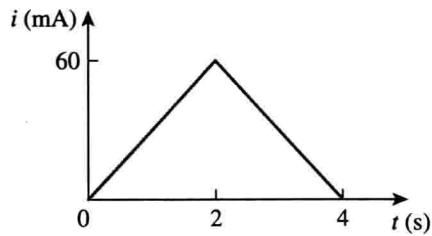


图 1-27 习题 16 图

- 17 图 1-28 给出一个由五个元件组成的电路，如果 $p_1 = -205\text{W}$, $p_2 = 60\text{W}$, $p_4 = 45\text{W}$, $p_5 = 30\text{W}$ 。计算元件 3 吸收或发出的功率。

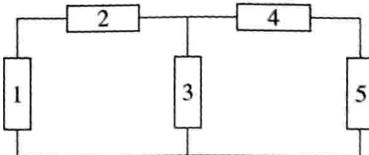


图 1-28 习题 17 图

- 18 计算图 1-29 中各个元件吸收的功率。

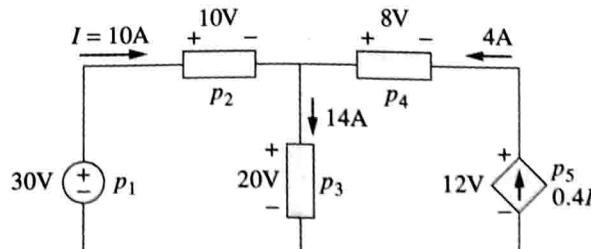


图 1-29 习题 18 图

- 19 计算图 1-30 所示电路网络中的 I 。

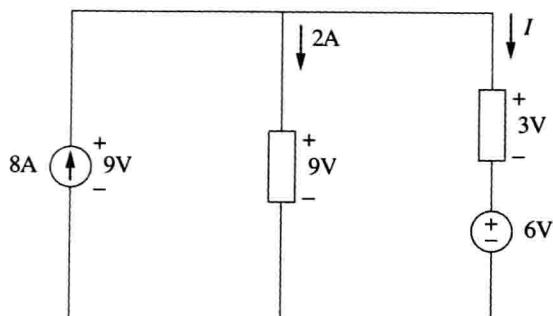


图 1-30 习题 19 图

- 20 计算图 1-31 中的 V_o 以及每个元件吸收的功率。

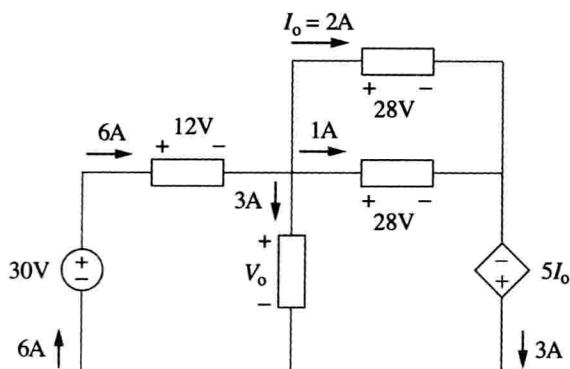


图 1-31 习题 20 图

1.7 节

- 21 一只 60W 的白炽灯工作在 120V 的电压下，计算一天内流过该白炽灯的电子量和电荷量分别是多少。
 22 40kA 的闪电击中飞行器的时间是 1.7ms，计算分布在该飞行器上的电荷为多少库仑。
 23 一台 1.8kW 的热水器需要 15min 烧开一定量的水，如果一天烧一次水，并且电费为 10 美分/kW·h，计算工作 30 天需要的电费。
 24 某公司的电费收费标准为 8.2 美分/kW·h，如果一个消费者连续一天使用一只 60W 的灯泡，计算需要交纳多少电费。
 25 一台 1.5kW 的烤面包机大约 3.5min 烤好 4

片面包，如果每天使用一次烤面包机，计算一个月(30 天)所用的电费。假定用电费用为 8.2 美分/kW·h。

- 26 一个闪光灯电池的额定容量是 0.8A·h(安培·小时)，其寿命为 10h，计算：
 (a) 该电池提供的电流为多大；(b) 如果其端电压为 6V，则其提供的功率是多少？(c) 该电池内存储了多少能量(单位为 kW·h)？
 27 用 3A 的恒定电流对汽车电池充电需要 4h 完成，如果端电压为 $(10 + t/2)$ V， t 的单位为小时，计算：(a) 充电结束后，充入电池的电荷量是多少？(b) 充电消耗的电能是多少？(c) 如果电费为 9 美分/kW·h，充电电费是多少？
 28 一只 60W 的白炽灯，接 120V 的电源，始终在黑暗的楼梯间开着，计算：
 (a) 流过该白炽灯的电流；(b) 如果电费为 9.5 美分/kW·h，该白炽灯工作一年(365 天)的电费是多少？
 29 一个电炉灶有四个炉眼和一个烤箱。准备一顿饭时，各炉眼和烤箱的使用情况如下：
 炉眼 1: 20 分钟 炉眼 2: 40 分钟
 炉眼 3: 15 分钟 炉眼 4: 45 分钟
 烤箱: 30 分钟
 如果各炉眼的额定功率 1.2kW，烤箱的额定功率为 1.8kW，且电费为 12 美分/kW·h。计算准备做这顿饭所需的电费。
 30 美国德州休斯敦电力公司对客户的收费标准如下：
 每月基本供电服务费 \$6
 第一个 250kW·h 按 \$0.02/kW·h 计费
 其余的 kW·h 按 \$0.07/kW·h 计费
 如果一个用户一个月用电 2 436kW·h，计算电力公司应收取多少费用。
 31 某家庭 120W 的计算机每天工作 4h，60W 的灯泡每天工作 8h，如果用电收费标准是 \$0.12/kW·h，计算该家庭一年需要为该计算机和灯泡支付多少电费。

综合理解题

- 32 流过电话线的电流为 $20\mu A$ ，计算通过电话线的电荷量到达 15 库仑需要的时间。
 33 一次闪电携带 2kA 的电流并持续了 3ms。计算该闪电包含了多少库仑的电荷。
 34 某家用电器一天所消耗的功率如图 1-32 所示，计算：
 (a) 所消耗的以千瓦时为单位的总电能；
 (b) 每小时消耗的平均功率。

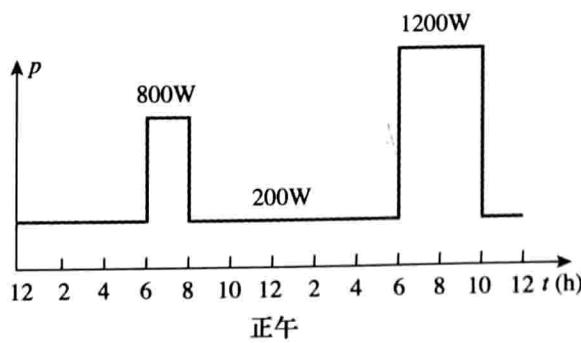


图 1-32 综合理解题 34 图

- 35 某工厂在上午 8: 00~8: 30 之间所消耗的功率如图 1-33 所示, 计算该厂这段时间所消耗的以兆瓦时为单位的总电能。

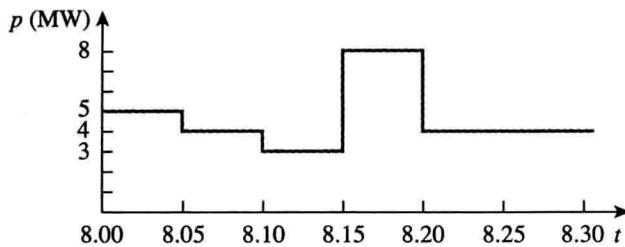


图 1-33 综合理解题 35 图

- 36 电池的额定功率可以用 $A \cdot h$ 表示。一个铅酸性电池的额定功率为 $160A \cdot h$ 。计算:
- 该电池工作 40h 所能提供的最大电流;
 - 如果该电池以 $1mA$ 的电流放电, 则能持续放电多少天?
- 37 某 $12V$ 电池充电时需要 $40A \cdot h$ 的总电荷, 计算供给该电池的能量是多少焦耳?
- 38 计算一台 $10hp$ (马力)的发动机在 30min 内输送了多少能量($1hp=746W$)。
- 39 一台 $600W$ 无人观看的电视机连续 $4h$ 开机, 如果电费为 $\$ 0.10/kW \cdot h$, 计算浪费了多少钱。

第 2 章

基本定律

太多的人祈祷能够克服像山一样的困难，然而他们需要的只是攀登的勇气。

——佚名

增强技能与拓展事业

ABET EC 2000 标准(3. b)，“设计和完成实验的能力，以及分析和解释数据的能力”

工程师既要能够设计实验、完成实验，又要能够分析数据、解释数据。绝大多数的高中生和大学生都要花费相当多的时间做实验，并且需要分析实验数据和解释实验数据。因此，学生对于此类工作已非常熟练。我的建议是，今后在做实验的过程中，要花费更多的时间分析、解释实验所得的数据。这是什么意思呢？

在观察电压-电阻、电流-电阻或者功率-电阻曲线时，你真正看到的是什么？这样的曲线意义何在？与所学的理论是否一致？与期望的结果是否存在差别？如果是，原因何在？显然，分析和解释实验数据必将提高这方面的技能。

如果要求学生做的绝大多数(不是全部)实验很少或根本不涉及实验的设计，这种情况下，如何才能提高学生的技能呢？

实际上，在这种情况下培养学生的技能并没有想象中的那么困难。你所需要做的就是做实验并分析实验。将实验分解为最简单的组成部分，通过重新组合来尽量理解实验的设计思路，最终明白实验的设计者要教会你什么知识。虽然情况并非总是如此，但是在每个实验中，设计者都在试图教会你一些知识。

2.1 引言

第 1 章介绍了电路中的电流、电压和功率等基本概念，要确定这些量在给定电路中的具体数值，还需要掌握一些电路的基本定律，即欧姆定律和基尔霍夫定律，电路分析的方法和技术正是在这些基本定律的基础上建立起来的。

本章除介绍上述基本定律外，还将讨论电路分析与设计中常用的一些方法，包括电阻的串联、并联、分压、分流以及 Δ -Y 和 Y- Δ 转换等。本章将上述定律和方法的应用局限于电阻电路中，最后以照明电路和直流电表的设计为例说明基本定律和分析方法的具体应用。

2.2 欧姆定律

材料通常都具有阻止电荷流动的特性。这种物理性质，即阻碍电流的能力，称为电阻(resistance)，用符号 R 表示。均匀截面积为 A 的任一材料的电阻取决于截面面积 A 及其长度 l ，如图 2-1a 所示。电阻值的数学表达式为(实验室测量)：

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.1)$$

式中， ρ 称为电阻率(resistivity)，单位为 $\Omega \cdot m$ 。良导体的电阻率小，如铜、铝；而绝缘体的电阻率高，如云母、纸张。表 2-1 给出了某些常见的电阻率 ρ ，并标明了哪些材料是导体，哪些材料是绝缘体或半导体。

表 2-1 常见材料的电阻率

材料名称	电阻率($\Omega \cdot m$)	用 途	材料名称	电阻率($\Omega \cdot m$)	用 途
银	1.64×10^{-8}	导体	铜	1.72×10^{-8}	导体
铝	2.8×10^{-8}	导体	金	2.45×10^{-8}	导体
碳	4×10^{-5}	半导体	锗	47×10^{-2}	半导体
硅	6.4×10^2	半导体	纸张	1×10^{10}	绝缘体
云母	5×10^{11}	绝缘体	玻璃	1×10^{12}	绝缘体
聚四氟乙烯	3×10^{12}	绝缘体			

电路中对电流有抑制特性的元件称为电阻(resistor)。为了构造电路，电阻通常由合金和碳化合物制成，电阻的电路符号如图 2-1b 所示，图中 R 表示该电阻的电阻值。电阻是电路中最简单的无源元件。

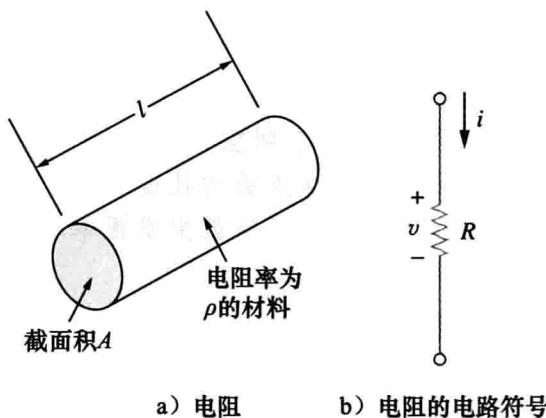


图 2-1 电阻及其电路符号

德国物理学家乔·西蒙·欧姆(Georg Simon Ohm, 1787—1854)因发现流过电阻的电流与电阻两端的电压之间的关系而闻名于世，该关系正是众所周知的欧姆定律(Ohm's law)。

欧姆定律：电阻两端的电压 v 与流过该电阻的电流 i 成正比。

即：

$$v \propto i \quad (2.2)$$

欧姆将这个比例常数定义为电阻 R (电阻是材料的一个属性，当元件的内部或外部条件改变时，例如温度发生变化，电阻值也会改变)。于是，式(2.2)可以写为：

$$v = iR \quad (2.3)$$

式(2.3)为欧姆定律的数学表达式，式中 R 的单位是欧姆，记作 Ω 。

元件的电阻 R 表示其阻碍电流流过的能力，单位是欧姆。

由式(2.3)可得：

$$R = \frac{v}{i} \quad (2.4)$$

所以：

$$1\Omega = 1V/A$$

应用式(2.3)的欧姆定律时，必须注意电流的方向和电压的极性。电流 i 的方向与电压 v 的极性必须符合关联参考方向，如图 2-1b 所示。当 $v=iR$ 时，电流从高电位流向低电位。反之，当 $v=-iR$ 时，电流从低电位流向高电位。

历史珍闻

乔·西蒙·欧姆 (Georg Simon Ohm, 1787—1854)，德国物理学家，于 1826 年通过实验确定了描述电阻的电压-电流关系的基本定律——欧姆定律。欧姆的这项工作最初曾被某些反对者所否定。

欧姆出生于巴伐利亚州埃尔兰根的一个贫苦家庭，他一生致力于电学研究，发现了著名的欧姆定律。1841 年，伦敦皇家学院授予他科普利勋章 (Copley Medal)。1849 年，慕尼黑大学授予他物理学首席教授职位。后人为了纪念他将电阻的单位命名为欧姆。



© SSPL via Getty Images

由于电阻值 R 可以从零变到无限大，所以考虑两种极端情况下的电阻值 R 就很重要。 $R=0$ 的电路称为短路电路 (short circuit)，如图 2-2a 所示。在短路的情况下：

$$v = iR = 0 \quad (2.5)$$

表明电压为零，电流可以取任意值。在实际电路中，由良导体构成的导线通常为短路电路。

短路电路是电阻为零时的电路。

类似地，电阻值 $R = \infty$ 的电路称为开路电路 (open circuit)，如图 2-2b 所示。对于开路电路而言：

$$i = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{v}{R} = 0 \quad (2.6)$$

表明虽然两端的电压可以是任意值，但其电流为零。

开路电路是电阻值趋于无穷大时的电路。

电阻既可以是固定的，也可以是可变的。大多数电阻为固定的，其阻值为常数。两种常见的定常电阻 (线绕电阻与复合电阻) 如图 2-3 所示。当需要较大阻值时，可以采用复合电阻。固定电阻的电路符号如图 2-1b 所示。可变电阻的电阻值是可以调整的，其电路符号如图 2-4a 所示。常用的可变电阻称为电位器 (potentiometer)，其电路符号如图 2-4b 所示。

电位器是一种三端元件，其中一端为滑动抽头或滑片。移动滑动抽头时，滑动端与两个固定端之间的电阻值随之改变。与固定电阻一样，可变电阻器既可以是线绕的，也可以是复合的，如图 2-5 所示。虽然在电路设计中可以采用如图 2-3 与如图 2-5 所示的电阻，但是，包括电阻器在内的大多数现代电路元件通常是贴片的或集成的，如图 2-6 所示。

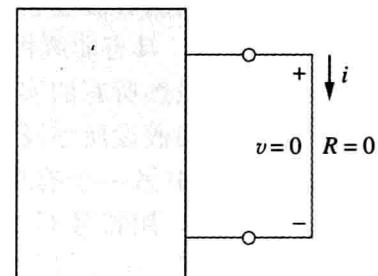
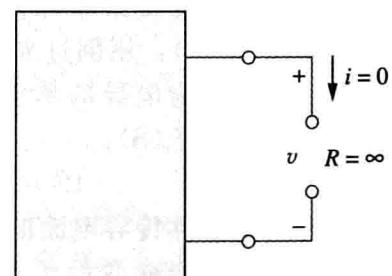
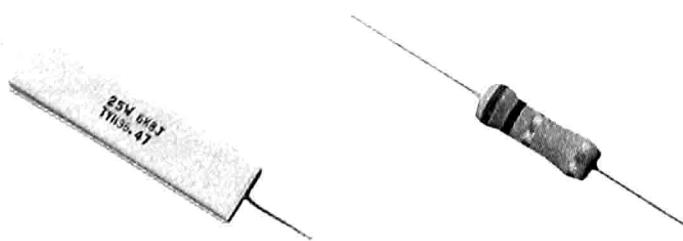
a) 短路电路 ($R=0$)b) 开路电路 ($R=\infty$)

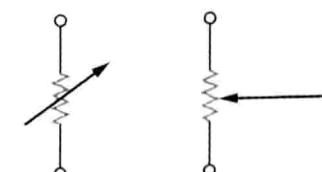
图 2-2 短路电路与开路电路



a) 绕线电阻

b) 碳膜电阻

图 2-3 固定电阻
图片由 Tech America 提供



a) 一般可变电阻 b) 电位器

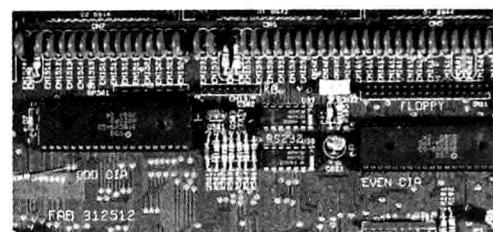
图 2-4 可变电阻的电路符号



a) 合成可变电阻



b) 滑动电位器

图 2-5 可变电阻器
图片由 Tech America 提供图 2-6 集成电路板上的电阻
©Eric Tomey/Alamy RF

应该指出的是，并非所有的电阻器都遵守欧姆定律。遵守欧姆定律的电阻元件称为线性 (linear) 电阻，线性电阻具有恒定的阻值，因此，其电流-电压特性曲线 ($i-v$ 曲线) 是一条通过原点的直线，如图 2-7a 所示。非线性 (nonlinear) 电阻不遵守欧姆定律，其阻值随着流过它的电流而变化，典型的 $i-v$ 特性曲线如图 2-7b 所示。具有非线性电阻特性的电路元件包括照明灯泡和二极管等。虽然所有的实际电阻在某些条件下都表现为非线性特征，但本书假设所涉及的电阻元件均为线性电阻。

电路分析中另一个有用的量是电阻 R 的倒数，称为电导 (conductance)，用符号 G 表示：

$$G = \frac{1}{R} = \frac{i}{v} \quad (2.7)$$

电导用来度量某个元件传导电流的强弱程度，电导的单位是姆欧 (mho)，用倒过来的欧姆符号 (\O) 表示。虽然工程师常使用姆欧作为电导的单位，但本书采用国际单位制中电导的单位是西门子 (S)：

$$1\text{S} = 1\text{\O} = 1\text{A/V} \quad (2.8)$$

电导是元件传导电流的能力，其单位是西门子或姆欧。

可以用欧姆或西门子来表示同一个电阻值，例如， 10Ω 就等于 0.1S 。由式(2.7)可得：

$$i = Gv \quad (2.9)$$

电阻所消耗的功率可以用电阻 R 来表示，由式(1.7)与式(2.3)可得：

$$p = vi = i^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (2.10)$$

同样，电阻消耗的功率也可以用电导 G 来表示：

$$p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G} \quad (2.11)$$

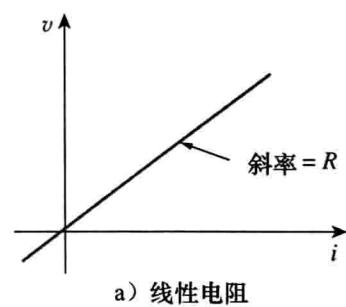
由式(2.10)与式(2.11)可得到如下两个结论：

1. 电阻上消耗的功率既是电流的非线性函数，又是电压的非线性函数。
2. 因为 R 和 G 都是正值，所以电阻消耗的功率总是正的。因此，电阻总是吸收来自电路的功率，这也证实了电阻是无源元件，不能产生能量。

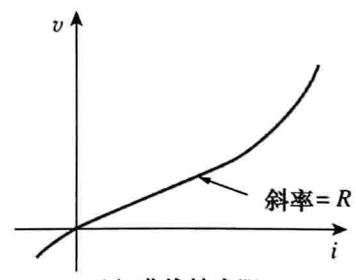
例 2-1 一个电熨斗接 120V 电源时产生的电流为 2A ，求该熨斗的阻值。

解：由欧姆定律可得：

$$R = \frac{v}{i} = \frac{120}{2} = 60(\Omega)$$



a) 线性电阻



b) 非线性电阻

图 2-7 电流-电压特性曲线

练习 2-1 烤面包机的基本部件是一种将电能转换为热能的电阻元件，试求阻值为 15Ω 的烤面包机接 $110V$ 电源时产生的电流。

答案： $7.333A$

例 2-2 电路如图 2-8 所示，试计算电流 i 、电导 G 和功率 p 。

解：因为电阻两端接在电压源上，所以电阻两端的电压等于电压源的电压($30V$)。因此，电流为：

$$i = \frac{v}{R} = \frac{30}{5 \times 10^3} = 6(\text{mA})$$

电导为：

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{5 \times 10^3} = 0.2(\text{mS})$$

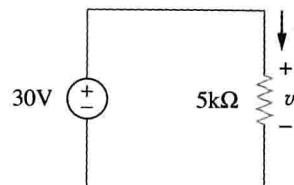


图 2-8 例 2-2 图

利用式(1.7)、式(2.10)或式(2.11)可以得到计算功率的几种不同方法：

$$p = vi = 30 \times 6 \times 10^{-3} = 180(\text{mW})$$

或

$$p = i^2 R = (6 \times 10^{-3})^2 \times 5 \times 10^3 = 180(\text{mW})$$

或

$$p = v^2 G = 30^2 \times 0.2 \times 10^{-3} = 180(\text{mW})$$

练习 2-2 电路如图 2-9 所示，试计算电压 v 、电导 G 和功率 p 。

答案： $30V$, $100\mu\text{S}$, 90mW

例 2-3 电压为 $20\sin\pi t$ V 的电压源连接到一个 $5\text{k}\Omega$ 电阻上，试求流经该电阻的电流及其消耗的功率。

解：

$$i = \frac{v}{R} = \frac{20\sin\pi t}{5 \times 10^3} = 4\sin\pi t(\text{mA})$$

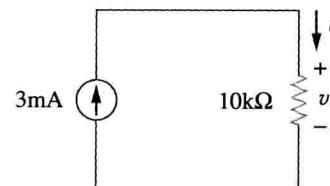


图 2-9 练习 2-2 图

所以：

$$p = vi = 80\sin^2\pi t(\text{mW})$$

练习 2-3 某电阻连接在电压源 $v=15\cos t$ V 两端，吸收的瞬时功率为 $30\cos^2 t$ mW。求 i 与 R 。

答案： $2\cos t$ mA, $7.5\text{k}\Omega$

2.3 节点、支路与回路

由于电路中各元件可以用不同的方式相互连接，所以有必要理解关于网络拓扑结构的一些基本概念。为了区分电路与网络，可以将网络看成是若干元件或器件的相互连接，而电路则是指具有一条或者多条闭合路径的网络。在讨论网络拓扑结构问题时，习惯采用的术语通常是网络，而不是电路。即使网络和电路指的是同一事物，本书也采用习惯方式来叙述。在网络拓扑结构中，将研究与网络中元件位置以及网络的几何结构有关的一些属性，包括支路、节点和回路等。

支路表示网络中的单个元件，如电压源、电阻等。

换言之，一条支路表示任意一个二端元件。图 2-10 所示的电路中包含 5 条支路，即 $10V$ 电压源、 $2A$ 电流源以及三个电阻。

节点是指两条或多条支路的连接点。

电路中的节点通常用圆点来表示。如果用一根导线来连接两个节点，则这两个节点合并为一个节点，如图 2-10 所示电路中包括 a 、 b 、 c 三个节点，图中构成节点 b 的三个点由理想导线连接在一

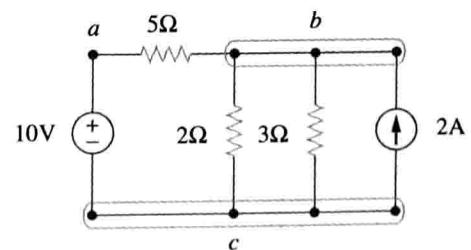


图 2-10 节点，支路，回路

起，从而成为一个点。同理，节点 c 是由四个点合并而成的。可以将仅包含三个节点的图 2-10 所示电路改画为图 2-11 所示电路，显然图 2-10 与 2-11 中的两个电路是等效的。然而，为了清楚起见，图 2-10 将节点 b 和节点 c 通过理想导体分散连接起来。

回路是指电路中的任一闭合路径。

在电路中从一个节点出发，无重复地经过一组节点，之后再回到起始节点，所构成的一条闭合路径就称为回路。如果一个回路至少包含一条不属于其他任何独立回路的支路，则称该回路为独立 (independent) 回路。由独立回路可以得到独立的方程组。

对于一组回路而言，如果其中一个回路不包含属于其他任何独立回路的支路，也可能构成一组独立回路。在图 2-11 中，第一个独立回路是包括 2Ω 电阻支路的封闭路径 $abca$ ，第二个独立回路是包含 3Ω 电阻和电流源的闭合路径，第三个独立回路是由 2Ω 电阻和 3Ω 电阻并联组成的闭合路径。这样就构成了一组独立回路。

包括 b 条支路、 n 个节点和 l 个独立回路的网络满足如下关于网络拓扑结构的基本定理：

$$b = l + n - 1 \quad (2.12)$$

如下两个定义表明，电路拓扑结构对于研究电路中的电压和电流至关重要。

如果两个或多个元件共享唯一一个节点，并传递同一电流，则称这种连接方式为串联。

如果两个或多个元件连接到相同的两个节点上，并且它们的两端是同一电压，则称这种连接方式为并联。

当不同元件相互级联或者首尾顺序连接时，这些元件就是串联。例如，如果两个元件共享同一个节点，且没有其他元件连接到该节点上，则称这两个元件是串联的。并联的元件连接到同一对端点上。元件在电路中的连接方式也可以既非串联，又非并联。在图 2-10 所示的电路中，电压源和 5Ω 的电阻是串联的，因为流过它们的电流是同一电流； 2Ω 电阻、 3Ω 电阻和电流源是并联的，因为它们都连接到相同的两个节点 b 和 c 上，从而具有相同的端电压；而 5Ω 电阻和 2Ω 电阻之间的连接关系既非串联也非并联。

例 2-4 确定图 2-12 所示电路中的支路数和节点数，并指出哪些元件是串联，哪些元件是并联。

解：由于电路中包括四个元件，所以该电路有四条支路： $10V$ 电压源支路、 5Ω 电阻支路、 6Ω 电阻支路和 $2A$ 电流源支路。电路中包含三个节点，如图 2-13 所示。 5Ω 电阻与 $10V$ 电压源串联，因为流过它们的电流相同，而 6Ω 电阻与 $2A$ 电流源并联，因为他们均与节点 2 和节点 3 相连。

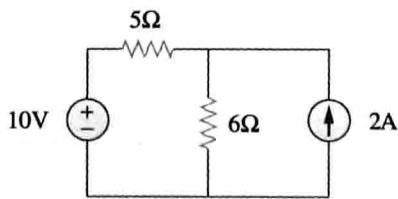


图 2-12 例 2-4 图

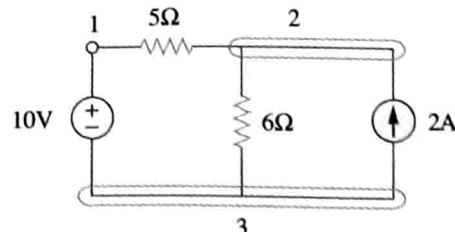


图 2-13 图 2-12 中的三个节点

练习 2-4 图 2-14 所示电路中有多少条支路，多少个节点？确定串联和并联的元件。

答案：如图 2-15 所示，包括 5 条支路和 3 个节点、 1Ω 电阻和 2Ω 电阻是并联的， 4Ω 电阻与 $10V$ 电压源也是并联的

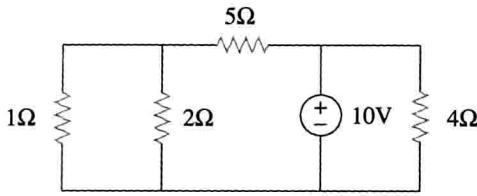


图 2-14 练习 2-4 图

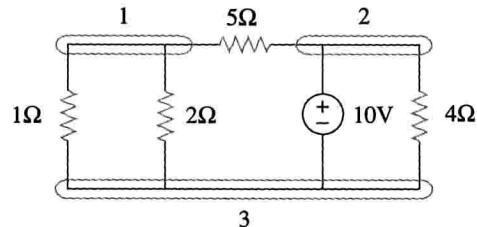


图 2-15 练习 2-4 的解答

2.4 基尔霍夫定律

分析电路时，只有欧姆定律还不够。将欧姆定律与基尔霍夫定律结合起来，就构成了分析各类电路的一组强有力的工具。基尔霍夫定律最初是由德国物理学家基尔霍夫 (Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887) 于 1847 年提出的，包括基尔霍夫电流定律 (Kirchhoff's current law, KCL) 和基尔霍夫电压定律 (Kirchhoff's voltage law, KVL)。

基尔霍夫电流定律是基于电荷守恒定律，即一个系统中电荷的代数和是不变的。

基尔霍夫电流定律 (KCL) 是指流入任一节点 (或任一闭合界面) 的电流代数和为零。

KCL 的数学表达式为：

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (2.13)$$

其中， N 为与该节点相连的支路数， i_n 为流入 (或流出) 该节点的第 n 条支路的电流。根据这一定律，可以认为流入节点的电流是正值，而流出节点的电流是负值，反之亦然。

历史珍闻

基尔霍夫 (Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887)，德国物理学家，于 1847 年提出了电路网络中电压与电流关系的两个基本定律。基尔霍夫定律和欧姆定律共同构成了电路分析理论的基础。

基尔霍夫出生在东普鲁士柯尼斯堡的一个律师家庭。18 岁时就进入柯尼斯堡大学读书，毕业后在柏林担任讲师。他与德国化学家罗伯特·本生 (Robert Bunsen) 合作从事光谱学方面的研究，于 1860 年发现了铯元素，于 1861 年发现了铷元素。基尔霍夫辐射定律也使他享誉世界。基尔霍夫在工程界、化学界和物理界都享有盛誉。



© Pixtal/age Fotostock RF

为了证明 KCL，假定有一组电流 $i_k(t)$ ， $k=1, 2, \dots$ ，流入某节点。这些电流在该节点处的代数和为：

$$i_T(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots \quad (2.14)$$

对式(2.14)两边取积分，得到：

$$q_T(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + \dots \quad (2.15)$$

其中， $q_k(t) = \int i_k(t) dt$ ， $q_T(t) = \int i_T(t) dt$ 。但是电荷守恒定律要求该节点处电荷的代数和不能发生任何变化，即该节点存储的净电荷为零。因此， $q_T(t) = 0 \rightarrow i_T(t) = 0$ ，从而证明了 KCL 的正确性。

考虑图 2-16 中的节点，应用 KCL 可得：

$$i_1 + (-i_2) + i_3 + i_4 + (-i_5) = 0 \quad (2.16)$$

这是因为 i_1 、 i_2 、 i_4 是流入该节点的电流，而 i_2 、 i_5 是流出该节点的电流，移项整理后得到：

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \quad (2.17)$$

式(2.17)可以看做是 KCL 的另一种形式。

流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

注意，KCL 也适用于任一闭合界面的情况，即 KCL 的一般情况，因为节点可以看做一个闭合面收缩后的一个点。在二维空间中，闭合截面就是一条闭合路径。正如图 2-17 所示的典型电路，流入图中闭合曲面的总电流等于流出该曲面的总电流。

KCL 的一个简单应用是并联电流源的合并，合并后的等效电流即各独立电流源所提供的电流的代数和。如图 2-18a 所示的电流源可以合并为图 2-18b 所示的电流源。在节点 a 处应用 KCL 可以得到合并后的等效电流：

$$I_T + I_2 = I_1 + I_3$$

或

$$I_T = I_1 - I_2 + I_3 \quad (2.18)$$

串联电路中不可能包含两个不同的电流 I_1 和 I_2 ，除非 $I_1 = I_2$ ，否则就会违背基尔霍夫电流定律。

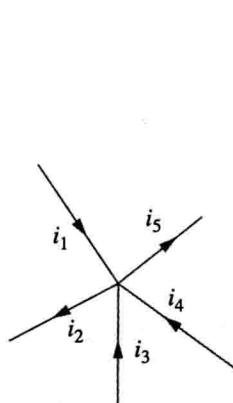


图 2-16 说明 KCL 的
节点电流

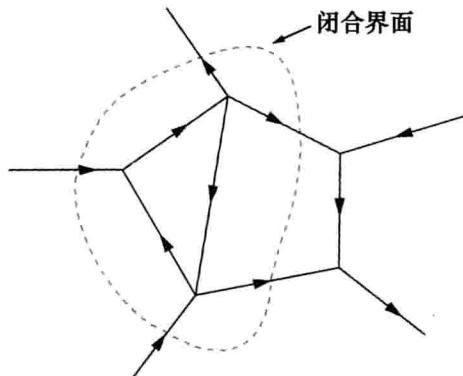
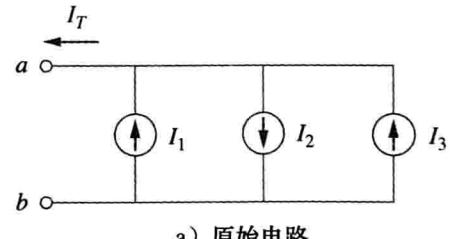
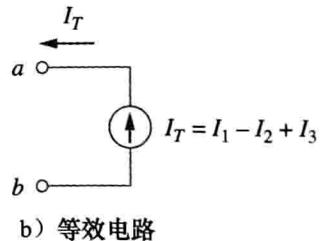


图 2-17 KCL 应用于闭合界面



a) 原始电路



b) 等效电路

图 2-18 并联电流源

提示：两个电源(或者两个电路)在端口处具有相同的伏安关系，则称它们是等效的。
基尔霍夫电压定律是基于能量守恒原理得到的。

基尔霍夫电压定律(KVL)是指任何闭合路径(或回路)上全部电压的代数和为零。

KVL 的数学表达式为：

$$\sum_{m=1}^M v_m = 0 \quad (2.19)$$

其中， M 为回路中的电压数量(或回路中的支路数)， v_m 为第 m 个电压。

下面利用图 2-19 所示的电路来说明 KVL。各电压的正负符号是环绕回路时首先遇到的该电压端点的极性。环绕回路可以从任何一条支路开始，环绕的方向可以是顺时针，也可以是逆时针。假定从电压源开始，以顺时针方向环绕回路，那么电压依次是 $-v_1$ 、 $+v_2$ 、 $+v_3$ 、 $-v_4$ 、 $+v_5$ 。例如，以顺时针方向环绕到支路 3 时，首先遇到的是 V_3 的正

极, 所以得到电压 V_3 为正, 而对于支路 4, 首先遇到的是 V_4 的负极, 所以得到电压 V_4 为负。因此, 根据 KVL 得到:

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0 \quad (2.20)$$

整理后得到:

$$v_2 + v_3 + v_5 = v_1 + v_4 \quad (2.21)$$

式(2.21)可以解释为:

$$\text{电压降之和} = \text{电压升之和} \quad (2.22)$$

KVL 还有另一种形式。如果按逆时针方向环绕回路, 则会得到 $+v_1$ 、 $-v_5$ 、 $+v_4$ 、 $-v_3$ 、 $-v_2$, 除电压符号相反外, 与顺时针方向环绕的情况相同。因此, 式(2.20)与式(2.21)是相同的。

当电压源串联时, 可以用 KVL 求出总电压, 总电压等于各个电压源的代数和。例如, 对于图 2-20a 所示的电压源, 利用 KVL 可以得到如图 2-20b 所示的等效电压源:

$$-V_{ab} + V_1 + V_2 - V_3 = 0$$

即

$$V_{ab} = V_1 + V_2 - V_3 \quad (2.23)$$

为了避免违背 KVL, 电路中不可能并联两个不同的电压 V_1 和 V_2 , 除非 $V_1 = V_2$ 。

提示: 在回路中, KVL 有两种应用方式: 顺时针方向或逆时针方向。无论沿哪种方向环绕, 回路中电压的代数和均为零。

例 2-5 如图 2-21a 所示的电路, 试求电压 v_1 和 v_2 。

解: 为了求出 v_1 和 v_2 , 需应用欧姆定律和基尔霍夫电压定律。假定回路中电流 i 的方向如图 2-21b 所示。

由欧姆定律可得:

$$v_1 = 2i, \quad v_2 = -3i \quad (2.5.1)$$

在回路中应用 KVL 可得:

$$-20 + v_1 - v_2 = 0 \quad (2.5.2)$$

将式(2.5.1)代入式(2.5.2)得到:

$$-20 + 2i + 3i = 0 \quad \text{或} \quad 5i = 20 \Rightarrow i = 4A$$

最后, 将电流 i 代入式(2.5.1)得到:

$$v_1 = 8V, \quad v_2 = -12V$$

练习 2-5 求图 2-22 所示电路中的 v_1 和 v_2 。

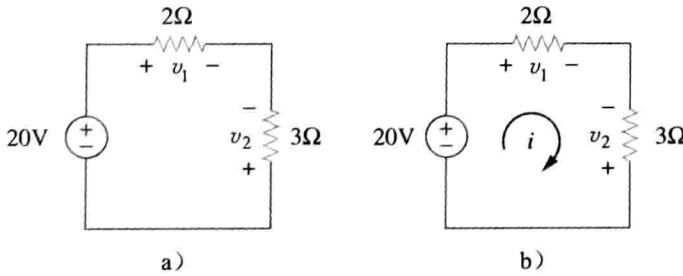


图 2-21 例 2-5 图

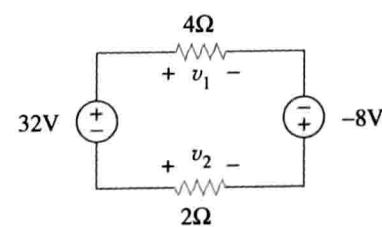


图 2-22 练习 2-5 图

答案: 16V, -8V

例 2-6 计算图 2-23a 所示电路中的 v_o 与 i 。

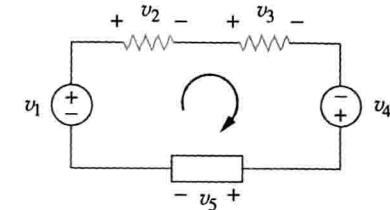


图 2-19 用于说明 KVL 的单回路电路

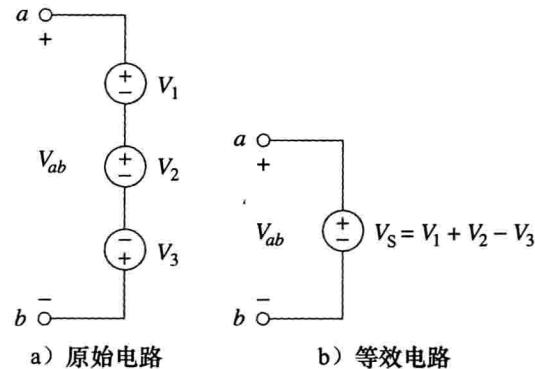


图 2-20 串联电压源

解：按照图 2-23b 中所示的方向应用 KVL，得到：

$$-12 + 4i + 2v_o - 4 + 6i = 0 \quad (2.6.1)$$

对 6Ω 电阻应用欧姆定律可得：

$$v_o = -6i \quad (2.6.2)$$

将式(2.6.2)代入式(2.6.1)得到：

$$-16 + 10i - 12i = 0 \Rightarrow i = -8A$$

因此， $v_o = 48V$ 。

练习 2-6 求图 2-24 所示电路中的 v_x 与 v_o 。

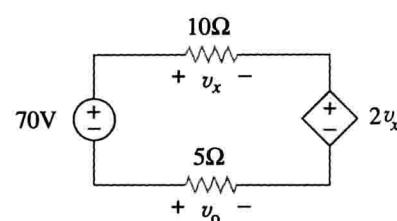
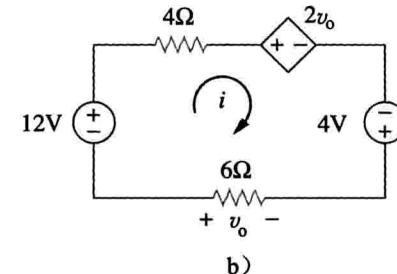
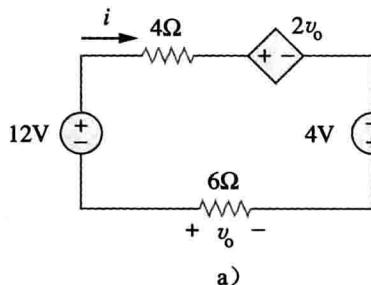


图 2-23 例 2-6 图

图 2-24 练习 2-6 图

答案：20V, -10V

例 2-7 求图 2-25 所示电路中的电流 i_o 与电压 v_o 。

解：在节点 a 处应用 KCL，得到：

$$3 + 0.5i_o = i_o \Rightarrow i_o = 6A$$

对于 4Ω 电阻，根据欧姆定律可得：

$$v_o = 4i_o = 24(V)$$

练习 2-7 求图 2-26 所示电路中的 i_o 与 v_o 。

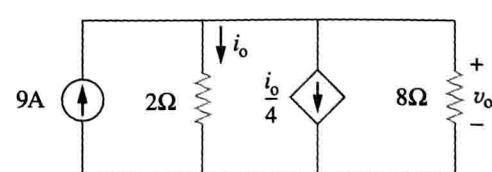
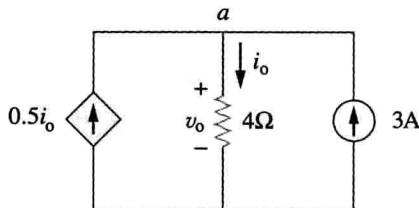


图 2-25 例 2-7 图

图 2-26 练习 2-7 图

答案：12V, 6A

例 2-8 求图 2-27a 所示电路中的各个电流与电压。

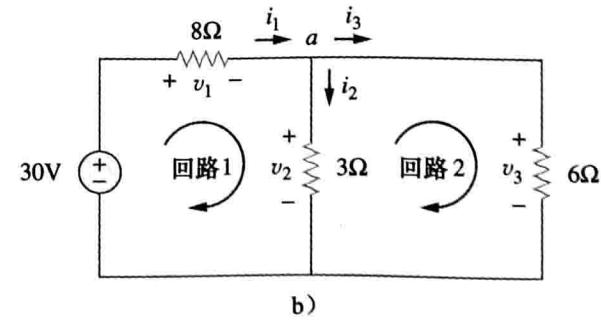
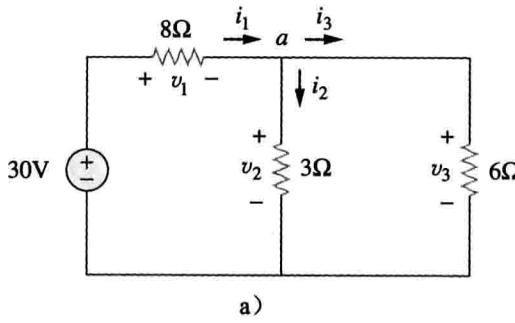


图 2-27 例 2-8 图

解：利用欧姆定律和基尔霍夫定律求解。由欧姆定律可得：

$$v_1 = 8i_1, \quad v_2 = 3i_2, \quad v_3 = 6i_3 \quad (2.8.1)$$

根据欧姆定律，各电阻的电压与电流具有上述确定的伏安关系，因此，需要求出的是(v_1 , v_2 , v_3)或(i_1 , i_2 , i_3)。在节点a处，利用KCL可以得到：

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (2.8.2)$$

对图2-27b所示的回路1应用KVL得到：

$$-30 + v_1 + v_2 = 0$$

利用式(2.8.1)中的 i_1 、 i_2 表示上式中的 v_1 和 v_2 ，得到：

$$-30 + 8i_1 + 3i_2 = 0$$

即

$$i_1 = \frac{(30 - 3i_2)}{8} \quad (2.8.3)$$

对回路2应用KVL得到：

$$-v_2 + v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = v_2 \quad (2.8.4)$$

这说明两个并联电阻两端的电压是相等的。利用式(2.8.1)中的 i_2 与 i_3 来分别表示 v_2 和 v_3 ，则式(2.8.4)变为：

$$6i_3 = 3i_2 \Rightarrow i_3 = \frac{i_2}{2} \quad (2.8.5)$$

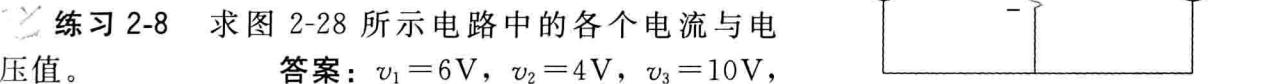
将式(2.8.3)与式(2.8.5)代入式(2.8.2)，得到：

$$\frac{30 - 3i_2}{8} - i_2 - \frac{i_2}{2} = 0$$

即 $i_2 = 2A$ 。由 i_2 的值，根据式(2.8.1)~式(2.8.5)可得：

$$i_1 = 3A, \quad i_3 = 1A,$$

$$v_1 = 24V, \quad v_2 = 6V, \quad v_3 = 6V$$

 练习2-8 求图2-28所示电路中的各个电流与电压值。

$$\text{答案: } v_1 = 6V, v_2 = 4V, v_3 = 10V,$$

$$i_1 = 3A, i_2 = 500mA, i_3 = 2.5A$$

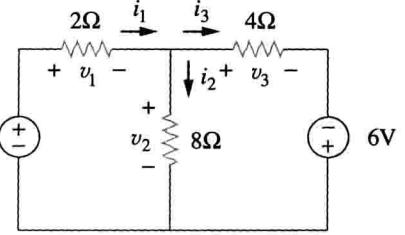


图2-28 练习2-8图

2.5 串联电阻及其分压

在电路分析中经常遇到串联电阻或并联电阻的合并问题，需引起足够的重视。一次合并其中的两个电阻就可以方便地实现多个串、并联电阻的合并。据此，考虑图2-29所示的单回路电路。图中两个电阻是串联的，因为流过这两个电阻的电流是同一电流。对每个电阻应用欧姆定律，则有：

$$v_1 = iR_1, \quad v_2 = iR_2 \quad (2.24)$$

如果对该回路(沿顺时针方向)应用KVL，则得到：

$$-v + v_1 + v_2 = 0 \quad (2.25)$$

合并式(2.24)与式(2.25)可得：

$$v = v_1 + v_2 = i(R_1 + R_2) \quad (2.26)$$

或

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad (2.27)$$

注意，式(2.26)又可以写成：

$$v = iR_{eq} \quad (2.28)$$

表明这两个电阻可以用等效电阻 R_{eq} 来取代，并且：

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (2.29)$$

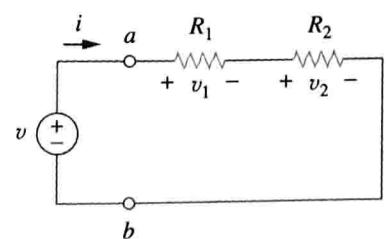


图2-29 包含两个串联电阻的单回路电路

于是，图 2-29 所示的电路可以用图 2-30 中的等效电路来取代。图 2-29 与图 2-30 中的两个电路之所以等效，是因为这两个电路在 a 、 b 两端所呈现的电压-电流关系是完全相同的。诸如图 2-30 这样的等效电路对于简化电路的分析是非常有用的。

任意多个电阻串联后的等效电阻值等于各个电阻值之和。

对于 N 个串联的电阻，其等效电阻为：

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^N R_n \quad (2.30)$$

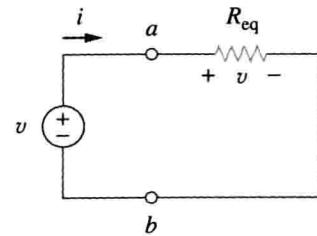


图 2-30 图 2-29 所示电路的等效电路

提示：串联电阻的特性与阻值等于各电阻阻值之和的单个电阻的特性相同。

为了确定图 2-29 所示电路中各个电阻上的电压，可以将式(2.26)代入式(2.24)，得到：

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v \quad (2.31)$$

可以看出，电源电压在各电阻之间的电压分配与各电阻的阻值成正比，电阻值越大，电阻上的电压就越大，这称为分压原理(principle of voltage division)，而图 2-29 所示的电路称为分压电路(voltage divider)。一般情况下，如果电源电压为 v 的分压电路中包含 N 个电阻(R_1, R_2, \dots, R_N)串联，则第 n 个电阻(R_n)上的电压为：

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \cdots + R_N} v \quad (2.32)$$

2.6 并联电阻及其分流

在如图 2-31 所示的电路中，两个电阻并联连接，因此它们两端具有相同的电压。由欧姆定律可得：

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2$$

即

$$i_1 = \frac{v}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v}{R_2} \quad (2.33)$$

在节点 a 处应用 KCL，得到总电流 i 为：

$$i = i_1 + i_2 \quad (2.34)$$

将式(2.33)代入式(2.34)可得：

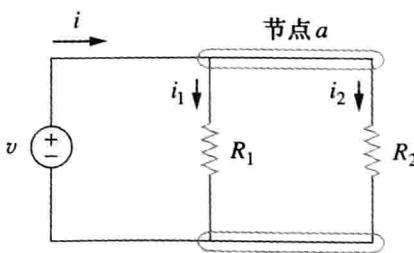


图 2-31 两个电阻的并联

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v}{R_{\text{eq}}} \quad (2.35)$$

其中， R_{eq} 为两个并联电阻的等效电阻值：

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.36)$$

或

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

即

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.37)$$

两个并联电阻的等效电阻值等于各电阻值的乘积除以各电阻值之和。

必须强调的是，以上结论仅适用于两个电阻的并联。如果 $R_1 = R_2$ ，则由式(2.37)可

得 $R_{eq} = R_1 / 2$ 。

可以将式(2.36)扩展到 N 个电阻并联的一般情况，此时的等效电阻值为：

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad (2.38)$$

由此可见，等效电阻 R_{eq} 总是小于其中最小的电阻值。当 $R_1 = R_2 = \cdots = R_N = R$ 时，有：

$$R_{eq} = \frac{R}{N} \quad (2.39)$$

例如，四个 100Ω 的电阻并联连接时的等效电阻值为 25Ω 。

在处理电阻并联的问题时，采用电导通常要比采用电阻更为方便。由式(2.38)可知， N 个电阻并联后的等效电导为：

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N \quad (2.40)$$

其中， $G_{eq} = 1/R_{eq}$ ， $G_1 = 1/R_1$ ， $G_2 = 1/R_2$ ， $G_3 = 1/R_3$ ， \dots ， $G_N = 1/R_N$ ，式(2.40)表明：

并联电阻的等效电导等于各个电导之和。

提示：并联电导的特性与电导值等于各电导之和的单个电导的特性相同。

图 2-31 所示的电路可以用图 2-32 所示的电路替代。容易看出式(2.30)与式(2.40)的相似性，即并联电阻等效电导的计算方法与串联电阻等效电阻的计算方法相同。同样，串联电阻等效电导的计算方法与并联电阻等效电阻的计算方法相同。因此， N 个电阻串联(如图 2-29 所示)的等效电导 G_{eq} 为：

$$\frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \cdots + \frac{1}{G_N} \quad (2.41)$$

假定流入图 2-31 中节点 a 的总电流为 i ，如何求得电流 i_1 与 i_2 ？我们知道并联等效电阻具有相同的电压 v ，即：

$$v = iR_{eq} = \frac{iR_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.42)$$

合并式(2.33)与式(2.42)，得到：

$$i_1 = \frac{R_2 i}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = \frac{R_1 i}{R_1 + R_2} \quad (2.43)$$

上式说明总电流被两个电阻支路分享，且支路电流与电阻值成反比，这个规律称为分流原理(principle of current division)，图 2-31 所示的电路称为分流电路(current divider)。可以看出，较小电阻的支路流过较大的电流。

一种极端的情况是假定图 2-31 所示电路中的一个电阻为零，例如 $R_2 = 0$ ，即 R_2 短路，如图 2-33a 所示。由式(2.43)可知， $R_2 = 0$ 意味着 $i_1 = 0$ 、 $i_2 = i$ ，即总电流 i 不流经 R_1 ，而只流过 $R_2 = 0$ 的短路支路，即阻值最小的支路。

因此，当一个电路被短路时，应该记住如下两点：

1. 等效电阻 $R_{eq} = 0$ (参见 $R_2 = 0$ 时的式(2.37))。
2. 全部电流都从短路支路中流过。

另外一个极端情况是 $R_2 = \infty$ ，即 R_2 开路，如图 2-33b 所示，此时电流仍然从电阻最小的路径 R_1 流过。对式(2.37)取极限 $R_2 \rightarrow \infty$ ，得到 $R_{eq} = R_1$ 。

若以 $R_1 R_2$ 分别去除式(2.43)的分子和分母，则有：

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i \quad (2.44a)$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \quad (2.44b)$$

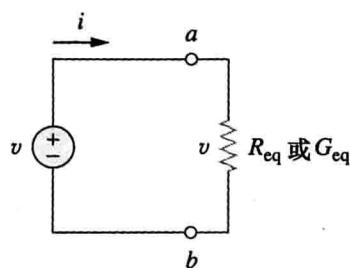


图 2-32 图 2-31 的等效电路

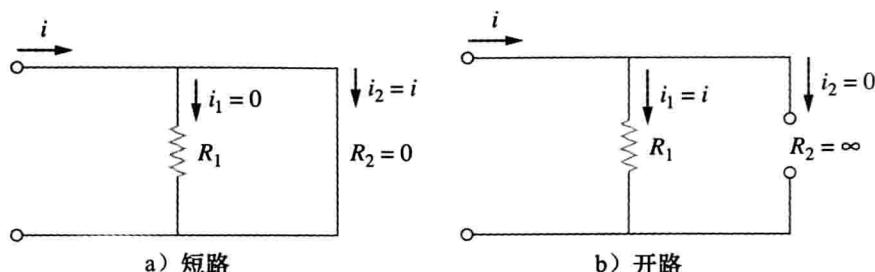


图 2-33 短路与开路

因此,一般而言,如果电源电流为 i 的分流电路中包含 N 个电导(G_1, G_2, \dots, G_N)并联,则流经第 n 个电导(G_n)的电流为:

$$i_n = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} i \quad (2.45)$$

在电路分析过程中,通常需要合并串联和并联的电阻,从而将电阻网络简化为单个等效电阻(equivalent resistance) R_{eq} 。该等效电阻即是网络端口之间的电阻,必须与原网络表现出相同的端口伏安特性。

例 2-9 求图 2-34 所示电路的 R_{eq} 。

解: 为求出 R_{eq} ,需要合并串联和并联的电阻。图中 6Ω 电阻与 3Ω 电阻并联,其等效电阻为(符号“ \parallel ”表示并联):

$$6\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2(\Omega)$$

1Ω 电阻与 5Ω 电阻是串联的,所以其等效电阻为:

$$1\Omega + 5\Omega = 6\Omega$$

于是,图 2-34 所示电路被简化为图 2-35a 所示的电路。由图 2-35a 可以看出两个 2Ω 的电阻是串联的,所以其等效电阻为:

$$2\Omega + 2\Omega = 4\Omega$$

此时,该 4Ω 电阻又与 6Ω 电阻并联,其等效电阻为:

$$4\Omega \parallel 6\Omega = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2.4\Omega$$

这样,图 2-35a 所示的电路又可以简化为图 2-35b 所示电路。在图 2-35b 中三个电阻是串联的,因此,电路的等效电阻为:

$$R_{eq} = 4\Omega + 2.4\Omega + 8\Omega = 14.4(\Omega)$$

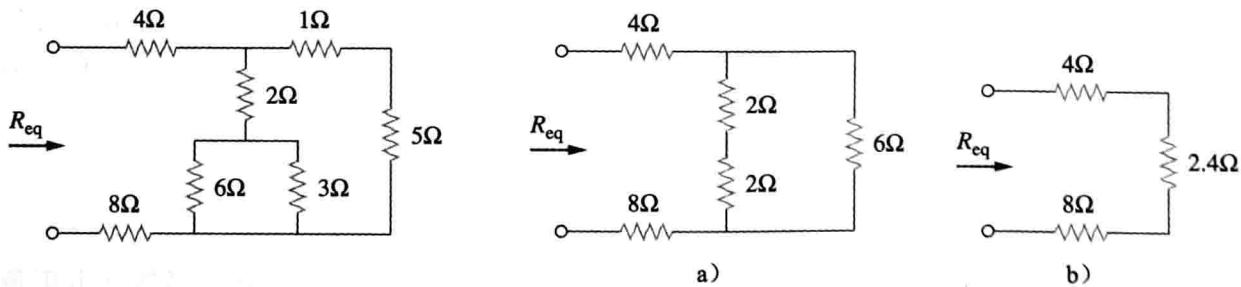


图 2-34 例 2-9 图

图 2-35 例 2-9 的等效电路

练习 2-9 合并图 2-36 所示电路中的电阻,求出该电路的 R_{eq} 。

答案: 10Ω

例 2-10 计算图 2-37 所示的电路的等效电阻 R_{ab} 。

解: 3Ω 电阻与 6Ω 电阻的两端均分别接到节点 c 和节点 b ,所以这两个电阻是并联的,合并后的阻值为:

$$3\Omega \parallel 6\Omega = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2(\Omega) \quad (2.10.1)$$

同理， 12Ω 电阻与 4Ω 电阻的两端均接到节点 d 和节点 b ，所以这两个电阻也是并联的，合并为：

$$12\Omega \parallel 4\Omega = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3(\Omega) \quad (2.10.2)$$

而 1Ω 电阻与 5Ω 电阻是串联的，其等效电阻为：

$$1\Omega + 5\Omega = 6\Omega \quad (2.10.3)$$

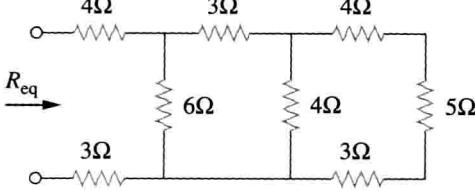


图 2-36 练习 2-9 图

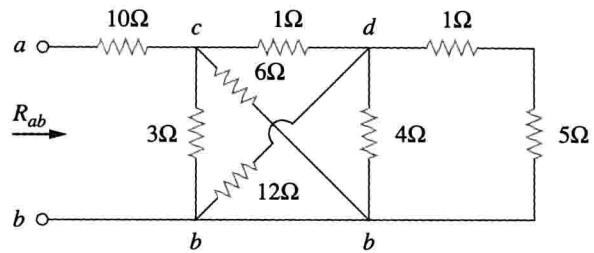


图 2-37 例 2-10 图

经上述三次合并后，图 2-37 所示的电路就简化为图 2-38a 所示的电路。而在图 2-38a 中，并联连接的 3Ω 电阻与 6Ω 电阻可合并为 2Ω 电阻，其计算方法与式(2.10.1)相同。该 2Ω 电阻又与 1Ω 电阻串联，从而可以合并为 $1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$ 的电阻。于是，图 2-38a 所示的电路简化为图 2-38b 所示的电路，此电路中相互并联的 2Ω 电阻与 3Ω 电阻可以合并为：

$$2\Omega \parallel 3\Omega = \frac{2 \times 3}{2 + 3} = 1.2(\Omega)$$

该 1.2Ω 电阻又与 10Ω 电阻串联，从而得到等效电阻为：

$$R_{ab} = 10 + 1.2 = 11.2(\Omega)$$

练习 2-10 试求如图 2-39 所示电路的 R_{ab} 。

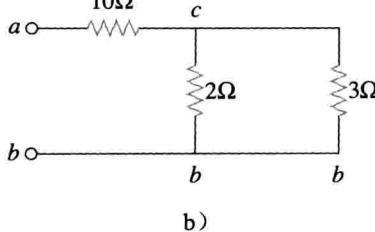
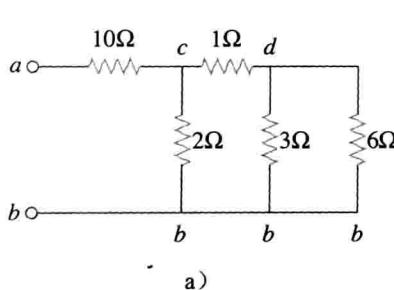


图 2-38 例 2-10 的等效电路

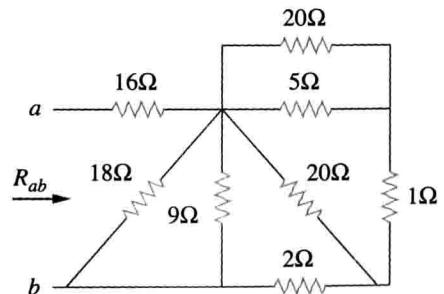


图 2-39 练习 2-10 图

答案： 19Ω

例 2-11 试求图 2-40a 所示电路的等效电导 G_{eq} 。

解： $8S$ 电阻与 $12S$ 电阻在电路中是并联的，所以二者的等效电导为：

$$8S + 12S = 20S$$

该 $20S$ 电阻又与 $5S$ 电阻串联，如图 2-40b 所示，于是合并后的电导为：

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4(S)$$

该 $4S$ 电阻又与 $6S$ 电阻并联，因此：

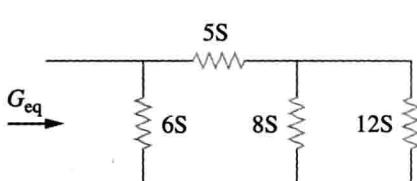
$$G_{eq} = 6 + 4 = 10(S)$$

注意，图 2-40a 所示的电路与图 2-40c 所示的电路是相同的，只是图 2-40a 中的电阻单位采用西门子，而图 2-40c 中的电阻单位为欧姆。要证明这两个电路是相同的，需求出

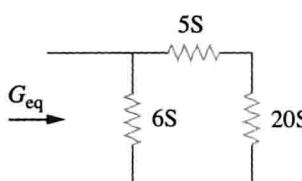
图 2-40c 所示电路的等效电阻。

$$R_{eq} = \frac{1}{6} \left\| \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} \left\| \frac{1}{12} \right. \right) \right\| = \frac{1}{6} \left\| \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20} \right) \right\| = \frac{1}{6} \left\| \frac{1}{4} \right\| = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{10} (\Omega)$$

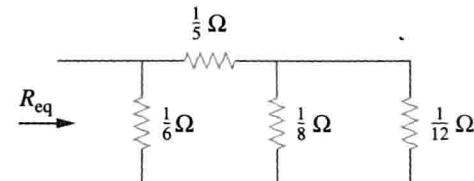
$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = 10 (\text{S})$$



a) 原始电路



b) 等效电路



c) 同 a, 欧姆表示

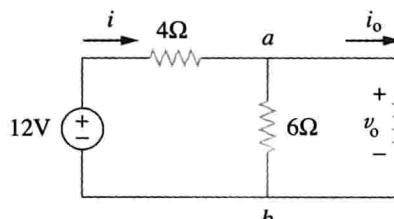
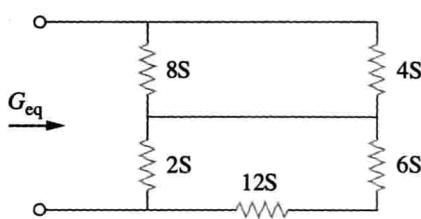
图 2-40 例 2-11 图

与上述方法求得的 G_{eq} 一样。

练习 2-11 计算如图 2-41 所示电路的 G_{eq} 。

答案: 4S

例 2-12 求如图 2-42a 所示电路的 i_o 和 v_o ，并计算 3Ω 电阻所消耗的功率。



a) 原始电路

b) 等效电路

图 2-41 练习 2-11 图

图 2-42 例 2-12 图

解: 6Ω 电阻与 3Ω 电阻并联, 合并后的电阻为:

$$6\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2(\Omega)$$

简化电路如图 2-42b 所示。注意, v_o 不会受到电阻合并的影响, 因为这两个电阻是并联的, 因此具有相同的端电压。根据图 2-42b, 可以采用两种方法求得 v_o 。

一种方法是采用欧姆定律, 得到:

$$i = \frac{12}{4 + 2} = 2(\text{A})$$

所以, $v_o = 2i = 2 \times 2 = 4\text{V}$ 。另一种方式是采用电压分压原理, 由于图 2-42b 中的 12V 电压被 4Ω 电阻和 2Ω 电阻分压, 所以:

$$v_o = \frac{2}{2 + 4} \times 12 = 4(\text{V})$$

类似地, 也可以采用两种方法得到 i_o 。一种方法是在已经求得 v_o 后, 对图 2-42a 中的 3Ω 电阻支路应用欧姆定律, 可得:

$$v_o = 3i_o = 4(\text{V}) \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{4}{3} \text{ A}$$

另一种方法是在已经求得 i 后, 对图 2-42a 所示电路应用分流原理, 得到:

$$i_o = \frac{6}{6 + 3}i = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}(\text{A})$$

3Ω 电阻所消耗的功率为:

$$p_o = v_o i_o = 4 \times \frac{4}{3} = 5.333(\text{W})$$

练习 2-12 求图 2-43 所示电路中的 v_1 与 v_2 ，并计算 12Ω 电阻和 40Ω 电阻所消耗的功率。

答案: $v_1 = 10\text{V}$, $i_1 = 833.3\text{mA}$, $p_1 = 8.333\text{W}$,
 $v_2 = 20\text{V}$, $i_2 = 500\text{mA}$, $p_2 = 10\text{W}$

例 2-13 在如图 2-44a 所示的电路中，求：(a) 电压 v_o ；(b) 电流源提供的功率；(c) 每个电阻消耗的功率。

解：(a) $6\text{k}\Omega$ 电阻与 $12\text{k}\Omega$ 电阻串联，合并后的电阻为 $6+12=18\text{k}\Omega$ ，于是图 2-44a 所示电路可以简化为图 2-44b 所示电路。采用分流原理可以求出 i_1 与 i_2 。

$$i_1 = \frac{18000}{9000 + 18000} \times 30\text{mA} = 20\text{mA}$$

$$i_2 = \frac{9000}{9000 + 18000} \times 30\text{mA} = 10\text{mA}$$

注意， $9\text{k}\Omega$ 电阻与 $18\text{k}\Omega$ 电阻两端的电压是相同的，所以， $v_o = 9000i_1 = 18000i_2 = 180\text{V}$ 。

(b) 电流源提供的功率为：

$$p_o = v_o i_o = 180 \times 30\text{mW} = 5.4\text{W}$$

(c) $12\text{k}\Omega$ 电阻所消耗的功率为：

$$p = iv = i_2(i_2R) = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2 \times 12000 = 1.2(\text{W})$$

$6\text{k}\Omega$ 电阻所消耗的功率为：

$$p = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2 \times 6000 = 0.6(\text{W})$$

$9\text{k}\Omega$ 电阻所消耗的功率为：

$$p = \frac{v_o^2}{R} = \frac{180^2}{9000} = 3.6(\text{W})$$

或

$$p = v_o i_1 = 180 \times 20\text{mW} = 3.6\text{W}$$

注意，电源提供的功率(5.4W)等于电路元件吸收(消耗)的功率($1.2+0.6+3.6=5.4\text{W}$)，这是检查计算结果正确与否的一种方法。

练习 2-13 在图 2-45 所示的电路中，试求：

(a) v_1 与 v_2 ；(b) $3\text{k}\Omega$ 与 $20\text{k}\Omega$ 电阻消耗的功率；(c) 电流源提供的功率。

答案：(1) 45V , 60V ；(b) 675mW , 180mW ；(c) 1.8W

† 2.7 Y-△变换

在电路分析中经常会遇到电阻既非并联又非串联的情况。如图 2-46 所示的桥式电路，电阻 $R_1 \sim R_6$ 既非串联又非并联，应该如何合并？可以利用三端等效网络来化简此类电路。三端等效网络包括如图 2-47 所示的 Y 形网络和 T 形网络，或者如图 2-48 所示的△形网络和 II 形网络。这些电路可独立存在，也可作为大型电路的一部分，用于三相电路、滤波器以及匹配电路等电路网络中。本节主要介绍在电路中如何辨认这类三端网络，以及如何在电路分析中应用 Y-△变换等问题。

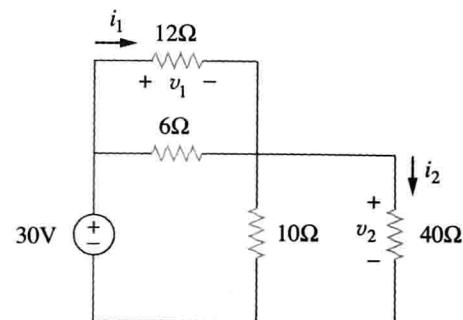
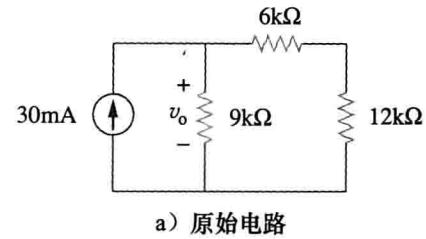
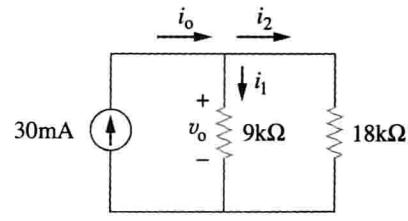


图 2-43 练习 2-12 图



a) 原始电路



b) 等效电路

图 2-44 例 2-13 图

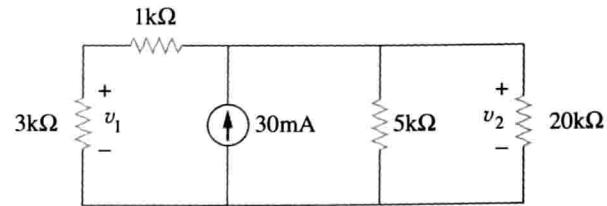


图 2-45 练习 2-13 图

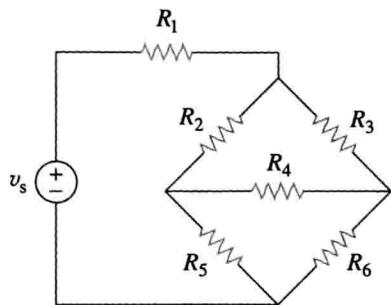
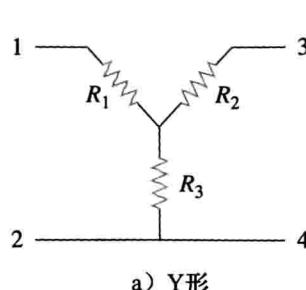
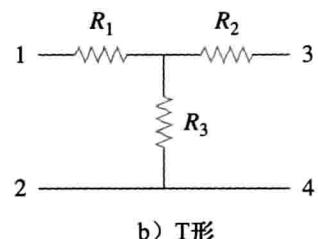


图 2-46 电桥网络



a) Y形



b) T形

图 2-47 同一网络的两种形式

2.7.1 Δ -Y 变换

假设将包含 Δ 结构的电路转换为Y结构进行处理更为方便。将一个Y电路叠加在一个 Δ 电路上，并求出Y电路中的等效电阻。为了求出Y电路中的等效电阻，要对两个电路进行比较，并确保 Δ (II)电路中的每一对节点之间的电阻值等于Y(T)电路中对应的每对节点之间的电阻值。以图2-47和图2-48中的节点1和节点2为例，有：

$$R_{12}(Y) = R_1 + R_3 \quad (2.46)$$

$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c)$$

令 $R_{12}(Y) = R_{12}(\Delta)$ 有：

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47a)$$

同理：

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47b)$$

$$R_{34} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.47c)$$

式(2.47a)减去式(2.47c)可得：

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b - R_a)}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.48)$$

式(2.47b)与式(2.48)相加可得：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.49)

式(2.47b)减去式(2.48)可得：

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.50)

式(2.47a)减去式(2.49)可得：

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

(2.51)

式(2.49)~式(2.51)无需死记，将 Δ 电路转换为Y电路时，可增加一个节点n，如图2-49所示，并按照如下变换规则进行转换。

Y 电路各电阻值等于 Δ 电路中相邻两条支路电阻的乘积除以 Δ 电路中三个电阻之和。

根据上述变换规则即可由图2-49得到式(2.49)~式(2.51)。

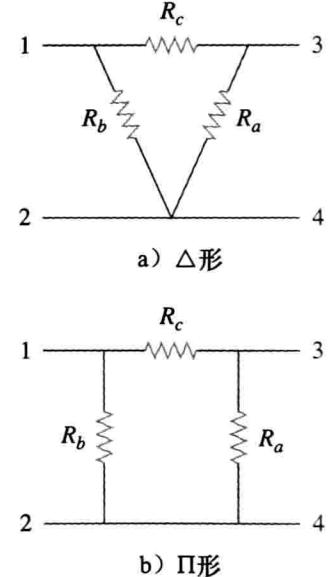


图 2-48 同一网络的两种形式

2.7.2 Y-△变换

为了求出将Y电路转换为等效△电路的转换公式，首先由式(2.49)~式(2.51)可以得到：

$$R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 = \frac{R_a R_b R_c (R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2} = \frac{R_a R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (2.52)$$

用式(2.49)~式(2.51)分别除以式(2.52)得到：

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \quad (2.53)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \quad (2.54)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (2.55)$$

由式(2.53)~式(2.55)以及图2-49可以得出如下Y-△变换规则。

△电路中各电阻值等于Y电路中所有电阻两两相乘之和除以相对应的Y电路支路电阻。

如果满足以下条件，则称Y电路与△电路是平衡的：

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R_Y, \\ R_a &= R_b = R_c = R_\Delta \end{aligned} \quad (2.56)$$

在上述条件下，变换公式变为：

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{或} \quad R_\Delta = 3R_Y \quad (2.57)$$

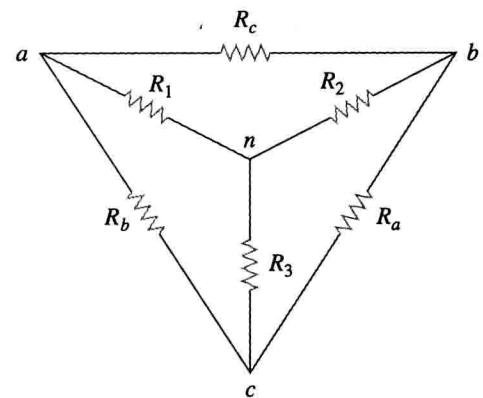


图2-49 Y电路与△电路变换电路

R_Y 为什么小于 R_Δ 呢？这是因为Y形联结有点像电阻的“串联”连接，而△形联结则像“并联”连接。

注意，在进行变换时，并没有对电路元件做任何增减，只是利用等效的三端网络替代原有的三端网络，从而得到一个由电阻串联或并联构成的电路，以便于计算 R_{eq} 。

例2-14 将图2-50a所示的△电路转换为等效的Y电路。

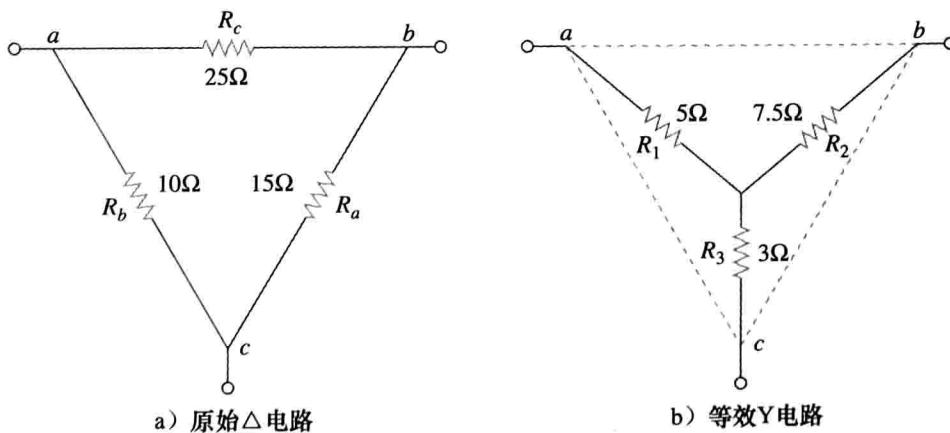


图2-50 例2-14图

解：由式(2.49)~式(2.51)，可得：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{10 \times 25}{15 + 10 + 25} = \frac{250}{50} = 5(\Omega)$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{25 \times 15}{50} = 7.5(\Omega)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 10}{50} = 3(\Omega)$$

等效的 Y 电路如图 2-50b 所示。

练习 2-14 将图 2-51 所示的 Y 电路变换为△

电路。 答案: $R_a = 140\Omega$, $R_b = 70\Omega$, $R_c = 35\Omega$

例 2-15 求图 2-52 所示电路的等效电阻 R_{ab} , 并计算电流 i 。

解: 1. 明确问题。本例所要解决的问题已经很明确, 但要注意, 完成这一步通常会花费相当的时间。

2. 列出问题的全部已知条件。如果去掉该电路中的电压源, 显然会得到一个纯电阻电路。由于该电路既包括△电路又包括 Y 电路, 因此电路元件的合并会变得更为复杂。一种方法是采用 Y-△变换来求解这个问题, 首先要明确 Y 电路(该电路中包括两个 Y 电路, 分别位于节点 n 和节点 c)和△电路(该电路中包括三个△电路: can、abn 和 cnb)的位置。

3. 确定备选方案。可以采用不同的方法求解本题, 由于 2.7 节讨论的主要问题是 Y-△变换, 所以采用该方法求解。求解等效电阻的另一个方法是在电路中插入一个放大器, 并求出 ab 之间的电压, 我们会在第 4 章学习这种方法。

这里首先采用 Y-△变换的方法来求解这个问题, 之后再采用△-Y 变换来检验结果的正确性。

4. 尝试求解。该电路中有两个 Y 电路和一个△电路, 只要将其中一个电路进行变换就可以简化电路。如果将由 5Ω 、 10Ω 和 20Ω 电阻构成的 Y 电路进行变换, 并且选择:

$$R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 20\Omega, \quad R_3 = 5\Omega$$

于是, 由式(2.53)~式(2.55)可得:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} = \frac{10 \times 20 + 20 \times 5 + 5 \times 10}{10} = \frac{350}{10} = 35(\Omega)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} = \frac{350}{20} = 17.5(\Omega)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} = \frac{350}{5} = 70(\Omega)$$

将 Y 电路转换为△电路后的等效电路(暂时去掉电压源)如图 2-53a 所示。合并图中的三对并联电阻, 得到:

$$70 \parallel 30 = \frac{70 \times 30}{70 + 30} = 21(\Omega)$$

$$12.5 \parallel 17.5 = \frac{12.5 \times 17.5}{12.5 + 17.5} = 7.292(\Omega)$$

$$15 \parallel 35 = \frac{15 \times 35}{15 + 35} = 10.5(\Omega)$$

于是得到如图 2-53b 所示的等效电路。因此:

$$R_{ab} = (7.292 + 10.5) \parallel 21 = \frac{17.792 \times 21}{17.792 + 21} = 9.632(\Omega)$$

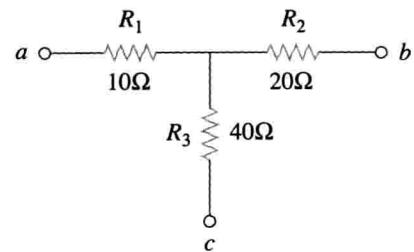


图 2-51 练习 2-14 图

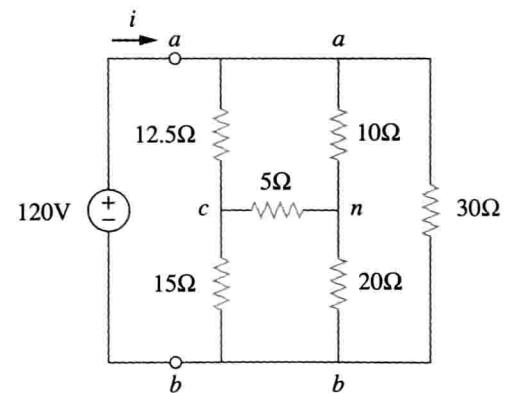


图 2-52 例 2-15 图

则：

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9.632} = 12.458(\text{A})$$

这样就成功地解答了该问题，下面必须对答案做出评价。

5. 评价结果。这一步必须确定所得到的答案是否正确，并对最终的结果做出评价。

检验本题的答案相当容易，下面通过 Δ -Y变换求解本例来完成检验。下面将 Δ 电路转换为Y电路。

设 $R_c = 10\Omega$, $R_a = 5\Omega$, 由此得到(用d表示Y电路的中心)：

$$R_{ad} = \frac{R_c R_n}{R_a + R_c + R_n} = \frac{10 \times 12.5}{5 + 10 + 12.5} = 4.545(\Omega)$$

$$R_{cd} = \frac{R_a R_n}{27.5} = \frac{5 \times 12.5}{27.5} = 2.273(\Omega)$$

$$R_{nd} = \frac{R_a R_c}{27.5} = \frac{5 \times 10}{27.5} = 1.8182(\Omega)$$

于是得到如图2-53c所示的电路，该电路图中节点d与b之间的电阻为两串联电阻支路的并联等效，即：

$$R_{db} = \frac{(2.273 + 15)(1.8182 + 20)}{2.273 + 15 + 1.8182 + 20} = \frac{376.9}{39.09} = 9.642(\Omega)$$

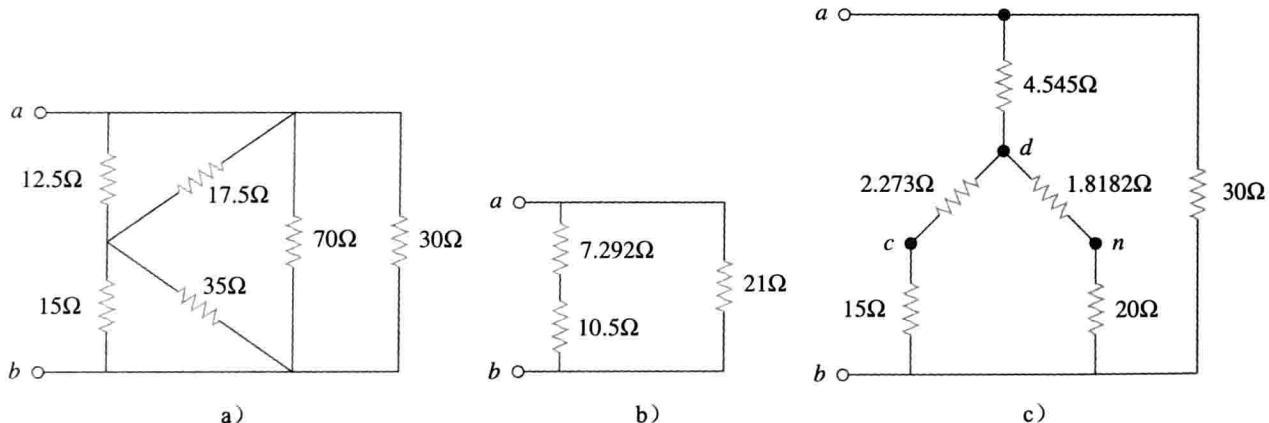


图2-53 图2-52所示电路去掉电压源后的等效电路

该电阻又与 4.545Ω 的电阻串联，二者串联后与 30Ω 的电阻并联，这样得到该电路的等效电阻为：

$$R_{ab} = \frac{(9.642 + 4.545) \times 30}{9.642 + 4.545 + 30} = \frac{425.6}{44.19} = 9.631(\Omega)$$

于是：

$$i = \frac{v_s}{R_{ab}} = \frac{120}{9.631} = 12.46(\text{A})$$

由此可见，采用Y- Δ 变换的两种方法会得到相同的结果，这是一个非常好的检验过程。

6. 是否满意？通过确定电路的等效电阻已经求出了问题的解，并对答案进行了检验，因此所得到的答案显然是满意的，此时就可以提交结果了。

练习2-15 试求图2-54所示桥式电路中的 R_{ab} 。

答案：40Ω, 6A

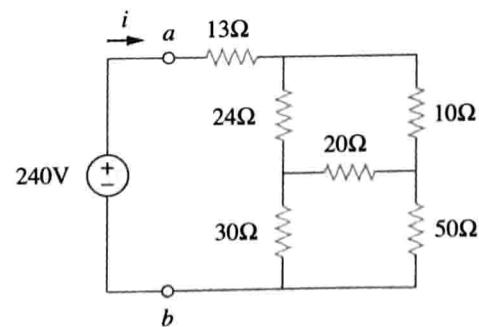


图2-54 练习2-15图

†2.8 应用实例

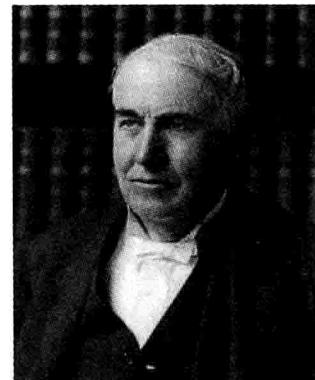
通常采用电阻作为将电能转换为热能或其他形式能量的电气设备的模型，这些设备包括导线、灯泡、电热器、电炉、电烤箱以及扩音器等。本节介绍与本章概念密切相关的两个实际应用问题——照明系统和直流电表的设计。

提示：到目前为止，均假设导线为理想导体（电阻为零），但是，在实际物理系统中，导线的电阻值可能相当大，因此，系统的建模必须包括电阻。

历史珍闻

托马斯·阿尔瓦·爱迪生（Thomas Alva Edison, 1847—1931）是美国最伟大的发明家之一，他拥有 1093 项发明专利，包括白炽灯泡、留声机以及第一部商业电影等具有历史意义的发明。

爱迪生出身于俄亥俄州，在家里七个孩子中排行最末，他不喜欢学校，只接受了三个月的正规教育，就回到家里接受母亲对他的教育，并且很快就可以独立阅读。1868 年，爱迪生读到了法拉第的一本书，从而找到了他今后的职业方向。1876 年，他迁居新泽西州的门洛帕克，经营着一所由高水平研究人员组成的实验室。他的许多发明都出自该实验室，他的实验室已成为现代研究组织的典范。由于爱迪生兴趣广泛并拥有大量的发明和专利，他开始建立制造公司来制造他发明的产品，他设计了第一个提供照明电的发电站，以爱迪生作为典范和领导者的正规电气工程教育于 19 世纪 20 年代中叶开始兴起。



由美国国会图书馆提供照片
由美国国会图书馆提供照片

2.8.1 照明系统

室内灯光或圣诞树灯泡等照明系统通常由 N 个并联或串联的灯泡组成，如图 2-55 所示，图中各灯泡可建模为电阻。假定所有的灯泡都是一样的，并且 V_0 为电源电压，那么并联灯泡两端的电压为 V_0 ，串联灯泡两端的电压为 V_0/N 。串联连接容易实现，但实际上很少使用，其原因有二：第一，它的可靠性差，只要一只灯泡坏了，其他灯泡全都不亮；第二，维修困难，当一只灯泡出现问题时，必须逐个检查所有灯泡才能找到出问题的灯泡。

例 2-16 三支灯泡如图 2-56a 所示与一个 9V 电池相连，试计算：(a)电池提供的总电流；(b)流过每支灯泡的电流；(c)每支灯泡的电阻。

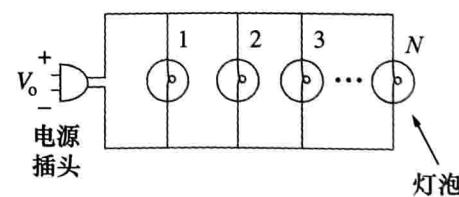
解：(a)电池提供的总功率等于各灯泡吸收的总功率，即：

$$P = 15 + 10 + 20 = 45(\text{W})$$

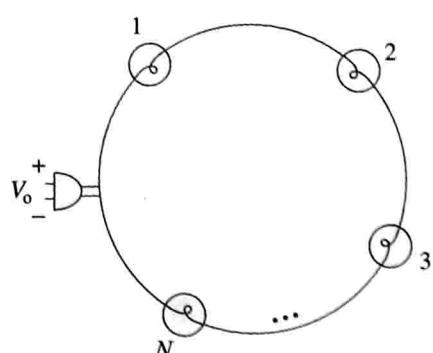
因为 $P=VI$ ，所以电池提供的总电流为：

$$I = \frac{P}{V} = \frac{45}{9} = 5(\text{A})$$

(b)可以将灯泡建模为电阻，其等效电路如图 2-56b 所示。由于 R_1 (20W 的灯泡) 支路与 R_2 和 R_3 的串联支路均与电池并联，所以：



a) 灯泡并联



b) 灯泡串联

图 2-55 灯泡的并联与串联

$$V_1 = V_2 + V_3 = 9(V)$$

流过 R_1 的电流为：

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{20}{9} = 2.222(A)$$

由 KCL 可知，流过 R_2 和 R_3 串联支路的电流为：

$$I_2 = I - I_1 = 5 - 2.222 = 2.778(A)$$

(c) 由于 $P=I^2R$ ，所以：

$$R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{20}{2.222^2} = 4.05(\Omega)$$

$$R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{15}{2.778^2} = 1.945(\Omega)$$

$$R_3 = \frac{P_3}{I_3^2} = \frac{10}{2.778^2} = 1.297(\Omega)$$

 练习 2-16 如图 2-55 所示，假定有 10 只灯泡并联，10 只灯泡串联，每只灯泡的额定功率为 40W，如果电源插座上的电压对并联连接和串联连接两种情况都是 110V，试计算在两种情况下流过每只灯泡的电流。

答案：364mA(并联)，3.64A(串联)

2.8.2 直流电表的设计

电阻实际上也是用于控制电流的，很多应用都利用了电阻的这一属性，例如图 2-57 所示的电位器，电位器(potentiometer, pot)一词来源于电位(potential)和计量仪器(meter)两个词的组合，表明电位是可以测量出来的。电位器是一种遵循分压原理的三端装置，实际上就是一种可调分压器，在收音机、电视机和其他电路中常用来控制音量或作为电平的电压调节器。在图 2-57 中：

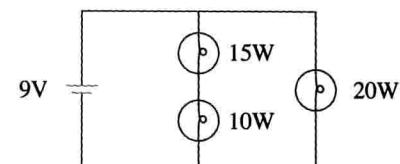
$$V_{out} = V_{bc} = \frac{R_{bc}}{R_{ac}} V_{in} \quad (2.58)$$

其中 $R_{ac} = R_{ab} + R_{bc}$ 。因此，随着电位器的滑动端向 c 点或 a 点移动，输出电压 V_{out} 相应地降低或升高。

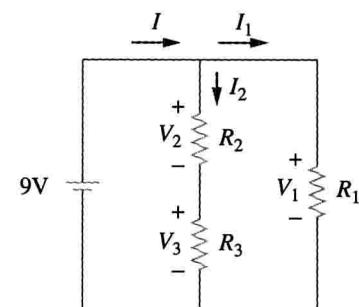
利用电阻控制电流的另一个应用是模拟直流电表，即分别用于测量电流、电压和电阻的电流表、电压表和电阻表。这些电表中都装有如图 2-58 所示的达松伐尔(d'Arsonval)测量转动装置。该转动装置主要由一个安装在永磁铁两极间枢轴上的可转动铁心线圈组成，当电流流经线圈时，产生转矩，使指针偏转。流过线圈电流的大小决定了指针偏转的幅度，并通过测量转动装置上附加的刻度指示出来。例如，当电表转动装置的额定值为 1mA、50Ω 时，线圈流过 1mA 的电流就会使电表转动装置发生满刻度偏转。在达松伐尔测量转动装置的基础上附加必要的电路，就可以构成电流表、电压表或电阻表。

提示：能够测量电压、电流和电阻的仪表称为万用表，或伏特欧姆表(volt-ohm meter, VOM)。

图 2-59 给出了电路元件两端连接模拟电压表和



a) 三只灯泡的照明系统



b) 电阻等效电路模型

图 2-56 例 2-16 图

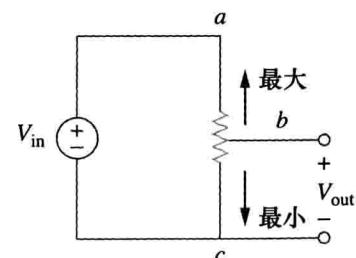


图 2-57 用于控制电平的电位器

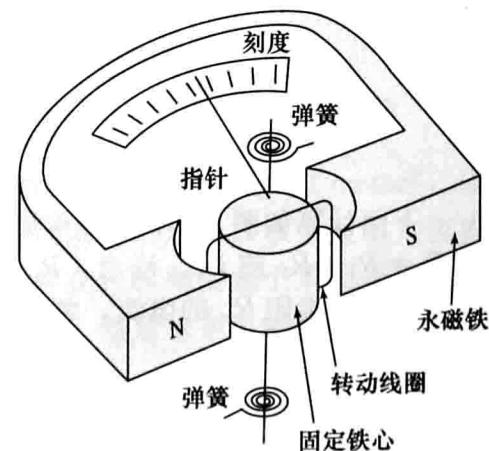


图 2-58 达松伐尔测量转动装置

电流表的方法。电压表用于测量负载两端的电压，因此与负载元件并联连接。如图 2-60a 所示，电压表由达松伐尔转动装置与一阻值为 R_m 的电阻串联构成，慎重起见，阻值 R_m 通常设计得很大（理论上为无穷大），以使从电路中分流的电流最小。为了扩展电压表可测电压的量程，通常将电压表与扩展量程电阻相串联，如图 2-60b 所示。当量程开关接到 R_1 、 R_2 或 R_3 时，图 2-60b 所示的多量程电压表可以测量的电压分别为 $0 \sim 1V$ 、 $0 \sim 10V$ 或 $0 \sim 100V$ 。

提示：负载是接受能量的元件（能量吸收器），它与提供能量的发电机（能量源）相反，有关负载的更多讨论参见 4.9.1 节。

下面计算图 2-60a 所示单量程电压表中的量程扩展电阻 R_n ，或图 2-60b 所示多量程电压表中的 $R_n = R_1$ 、 R_2 或 R_3 ，计算时需要明确 R_n 与电压表的内阻 R_m 是串联的。在任何设计中都需要考虑最坏情况，即满量程电流 $I_{fs} = I_m$ 流过电表的情况，此时应该对应于电表的最大电压读数，即满量程电压 V_{fs} ，由于量程扩展电阻 R_n 与内阻 R_m 串联，所以：

$$V_{fs} = I_{fs}(R_n + R_m) \quad (2.59)$$

由此得到：

$$R_n = \frac{V_{fs}}{I_{fs}} - R_m \quad (2.60)$$

类似地，电流表用于测量流过负载的电流，因此要与被测负载串联。如图 2-61a 所示，电流表由达松伐尔转动装置与一阻值为 R_m 的电阻并联构成，阻值 R_m 通常设计得很小（理论上为零），以使从电路中分压得到的电压最小。为了扩展电流表的量程，通常要将分流电阻与 R_m 并联，如图 2-61b 所示。当分流开关接到 R_1 、 R_2 或 R_3 时，电流表的量程分别为 $0 \sim 10mA$ 、 $0 \sim 100mA$ 或 $0 \sim 1A$ 。

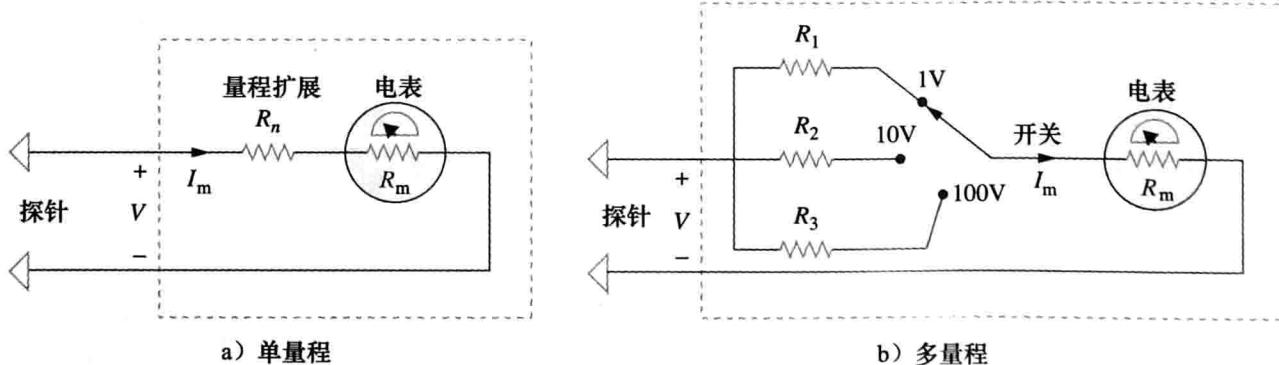


图 2-60 电压表

下面计算如图 2-61a 所示单量程电流表的分流电阻 R_n ，或图 2-61b 所示多量程电流表的 $R_n = R_1$ 、 R_2 或 R_3 。注意， R_m 与 R_n 并联，并且在满刻度时， $I = I_{fs} = I_m + I_n$ ，其中 I_n 为流过分流电阻 R_n 的电流，利用分流原理有：

$$I_m = \frac{R_n}{R_n + R_m} I_{fs}$$

即

$$R_n = \frac{I_m}{I_{fs} - I_m} R_m \quad (2.61)$$

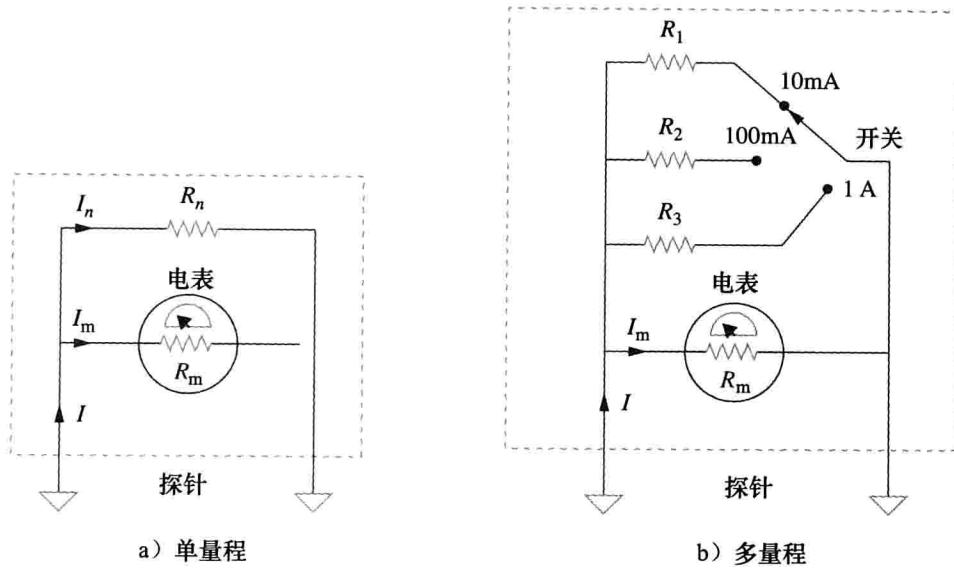


图 2-61 电流表

线性电阻阻值 R_x 的测量方法有两种：一种是间接测量方法，如图 2-62a 所示，用电流表与该电阻串联，测量流过它的电流 I ，再用电压表并联在该电阻两端，测出它的电压 V ，从而得到：

$$R_x = \frac{V}{I} \quad (2.62)$$

测量电阻的直接方法是采用电阻表。电阻表由达松伐尔转动装置、可变电阻或电位器以及电池组成，如图 2-62b 所示。对图 2-62b 所示的电路应用 KVL 有：

$$E = (R + R_m + R_x) I_m$$

即

$$R_x = \frac{E}{I_m} - (R + R_m) \quad (2.63)$$

选取的电阻 R 应使得电表满刻度偏转，即当 $R_x = 0$ 时， $I_m = I_{fs}$ 。这意味着：

$$E = (R + R_m) I_{fs} \quad (2.64)$$

将式(2.64)代入式(2.63)得到：

$$R_x = \left(\frac{I_{fs}}{I_m} - 1 \right) (R + R_m) \quad (2.65)$$

前面已经指出，本节讨论的各种电表称为模拟电表，均以达松伐尔转动装置为基础构成。另一类电表称为数字电表(digital meter)，以有源电路元件如运算放大器等为基础构成。例如，数字万用表可以用离散数字显示直流或交流电压、电流以及电阻等的测量值，而不像模拟电表那样在连续刻度盘上采用指针偏转的形式指示。在现代电路实验中，数字电表可能是最常用的，但是数字电表的设计已经超过本书讨论的范畴。

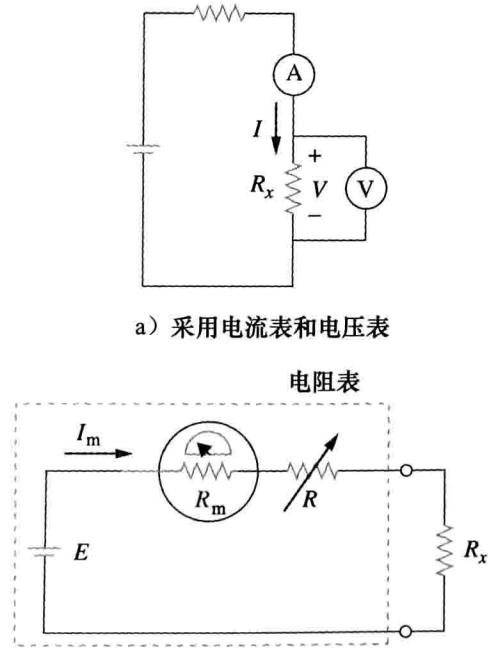


图 2-62 测量电阻的两种方法

历史珍闻

莫尔斯(Samuel F. B. Morse, 1791—1872), 美国油画家, 发明了电报, 首次实现了电的商业应用。

莫尔斯出生于马萨诸塞州的查尔斯顿, 就读于耶鲁大学和伦敦皇家艺术学院, 之后成为一名艺术家。20世纪30年代, 他对发明电报产生了兴趣, 于1836年研制出电报样机, 并于1838年申请了专利, 美国参议院为莫尔斯提供资金, 用于构建巴尔的摩与华盛顿之间的电报线路。1844年5月24日, 莫尔斯成功发出了第一条著名的电报信息: “上帝创造了什么”。莫尔斯还研究开发了用于发送电报信息的字母和数字点划编码。电报的发展导致了日后电话的发明。



由国会图书馆提供照片

例 2-17 根据图2-60所示电压表的结构, 试设计如下多量程电压表:

- (a) 0~1V (b) 0~5V (c) 0~50V (d) 0~100V

假设内阻 $R_m = 2k\Omega$, 满量程电流 $I_{fs} = 100\mu A$ 。

解: 利用式(2.60)并假定 R_1 、 R_2 、 R_3 和 R_4 分别对应于 0~1V、0~5V、0~50V 和 0~100V 的电压表量程, 可得:

(a) 当量程为 0~1V 时,

$$R_1 = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 10000 - 2000 = 8(k\Omega)$$

(b) 当量程为 0~5V 时,

$$R_2 = \frac{5}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 50000 - 2000 = 48(k\Omega)$$

(c) 当量程为 0~50V 时,

$$R_3 = \frac{50}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 500000 - 2000 = 498(k\Omega)$$

(d) 当量程为 0~100V 时,

$$R_4 = \frac{100}{100 \times 10^{-6}} - 2000 = 1000000 - 2000 = 998(k\Omega)$$

注意, 对于这四个量程, 其总电阻($R_m + R_n$)与满刻度电压 V_{fs} 之比均为常数, 且等于 $1/I_{fs}$, 该比值(单位为欧姆/伏特, Ω/V)称为电压表的灵敏度(sensitivity)。灵敏度越高, 电压表越好。

练习 2-17 根据图2-61所示电流表的结构, 试设计如下多量程电流表:

- (a) 0~1A; (b) 0~100mA; (c) 0~10mA

假设满量程电流 $I_m = 1mA$ 且电流表的内阻 $R_m = 50\Omega$ 。

答案: 分流电阻分别为: $50m\Omega$; $505m\Omega$; $5.556m\Omega$

2.9 本章小结

1. 电阻是电路中的无源元件, 其两端的电压 v 与流过它的电流 i 成正比, 即电阻为遵循欧姆定律的器件:

$$v = iR$$

其中 R 为电阻的阻值。

2. 短路电路是阻值为零($R=0$)的电阻(即理想的导线)。开路电路是阻值为无穷大($R=\infty$)

的电阻。

3. 电阻的电导 G 为该电阻阻值的倒数：

$$G = \frac{1}{R}$$

4. 支路为电路中的单个二端元件，节点为两条或两条以上支路的连接点，回路为电路中的闭合路径。电路中的支路数 b 、节点数 n 与独立回路 l 满足如下关系：

$$b = l + n - 1$$

5. 基尔霍夫电流定律(KCL)表明，任一节点电流的代数和为零。换言之，流入节点的电流之和等于流出该节点的电流之和。

6. 基尔霍夫电压定律(KVL)表明，闭合路径上电压的代数和为零。换言之，回路中的电压升之和等于电压降之和。

7. 首尾顺序相连的两个元件称为串联。流过串联元件的电流相同($i_1 = i_2$)。两端连到相同的两个节点上的两个元件称为并联，并联元件两端的电压相同($v_1 = v_2$)。

8. 当两个电阻 $R_1 (=1/G_1)$ 与 $R_2 (=1/G_2)$ 串联时，其等效电阻 R_{eq} 与等效电导 G_{eq} 为：

$$R_{eq} = R_1 + R_2, \quad G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

9. 当两个电阻 $R_1 (=1/G_1)$ 与 $R_2 (=1/G_2)$ 并联时，其等效电阻 R_{eq} 与等效电导 G_{eq} 为：

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad G_{eq} = G_1 + G_2$$

10. 两个串联电阻的分压原理可以表示为：

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

11. 两个并联电阻的分流原理可以表示为：

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

12. \triangle -Y 变换公式为：

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}, \quad R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

13. Y- \triangle 变换公式为：

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \quad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

14. 本章介绍的基本定律可应用于照明系统以及直流电表设计等问题中。

复习题

1. 电阻的倒数为：

- (a) 电压 (b) 电流
(c) 电导 (d) 库仑

(c) 120V (d) 10.42V

2. 电热器从 120V 电压获取的电流为 10A，则电热器的电阻为：

- (a) 1200Ω (b) 120Ω
(c) 12Ω (d) 1.2Ω

4. 一支 2W、80kΩ 的电阻安全工作时的最大电流为：

- (a) 160mA (b) 40mA
(c) 5mA (d) 25μA

3. 一台 1.5kW 烤面包机的电流为 12A，则其压降为：

- (a) 18kV (b) 125V

5. 一个网络包括 12 条支路，8 条独立回路。试问该网络中有几个节点？

- (a) 19 (b) 17
(c) 5 (d) 4

6. 图 2-63 所示电路中的电流 I 为：

(a) -0.8A

(c) 0.2A

(b) -0.2A

(d) 0.8A

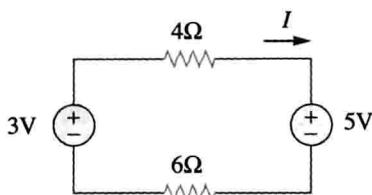


图 2-63 复习题 6 图

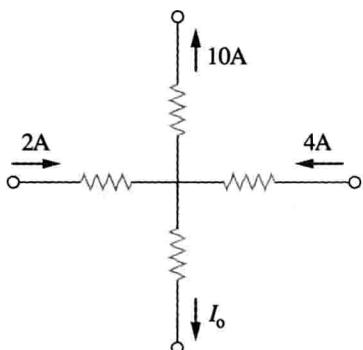
7 图 2-64 中的电流 I_o 为:

图 2-64 复习题 7 图

(a) -4A

(c) 4A

(b) -2A

(d) 16A

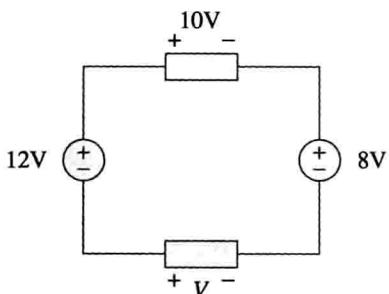
8 在图 2-65 所示电路中, V 等于:

图 2-65 复习题 8 图

(a) 30V

(c) 10V

(b) 14V

(d) 6V

习题

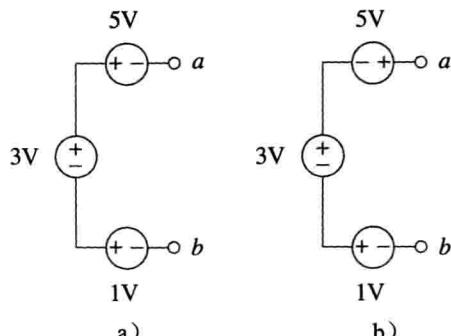
2.2 节

1 为了帮助学生更好地理解欧姆定律, 设计一个电路问题, 并完成解决方案。使用至少两个电阻和一个电压源。建议同时使用两个电阻, 或者每次使用一个电阻。**ED**

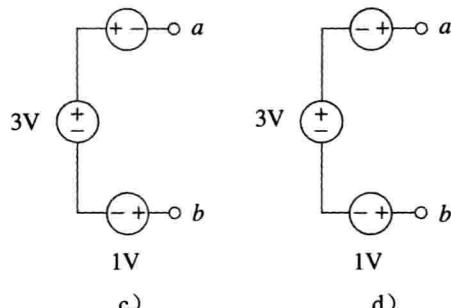
2 求额定值为 60W、120V 的灯泡的热电阻。

3 某圆形横截面的硅棒长 4cm, 如果该硅棒在室温下的电阻值为 240Ω , 试求该硅棒的截面半径。

4 (a) 计算图 2-68 中开关掷于位置 1 时的电流 i 。
(b) 当开关掷于位置 2 时, 试求电流 i 。

9 图 2-66 中哪一个电路的 $V_{ab} = 7V$?

a) b)



c) d)

10 在图 2-67 所示电路中, R_3 减小会导致以下哪个量减小:

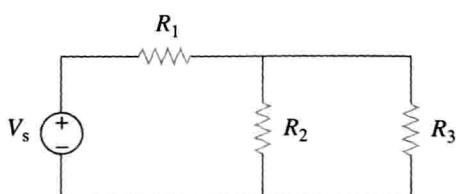


图 2-67

- (a) 流过 R_3 的电流 (b) R_3 两端的电压
 (c) R_1 两端的电压 (d) R_2 消耗的功率
 (e) 以上选项均不正确

答案: 1(c); 2(c); 3(b); 4(c); 5(c); 6(b);
 7(a); 8(d); 9(d); 10(b, d)

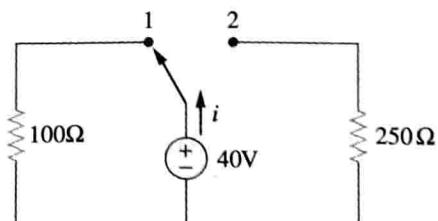


图 2-68 习题 4 图

2.3 节

5 在图 2-69 所示的网络图中, 试求其节点数、支路数和回路数。

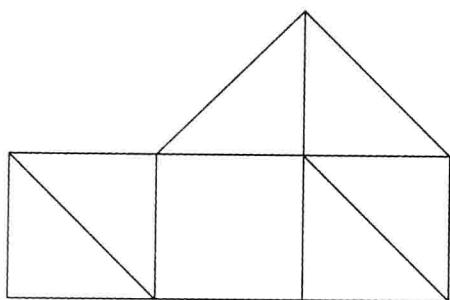


图 2-69 习题 5 图

- 6 在图 2-70 所示的网络图中, 确定支路数和节点数。

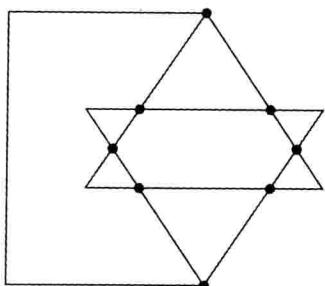


图 2-70 习题 6 图

- 7 求图 2-71 所示电路的支路数和节点数。

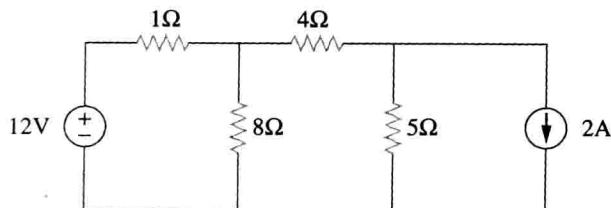


图 2-71 习题 7 图

2.4 节

- 8 为了帮助学生更好地理解 KCL, 设计一个电路问题, 并完成解决方案。如图 2-72 所示, 通过确定 i_a 、 i_b 、 i_c 的电流值设计电路问题, 并求解电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。
ED

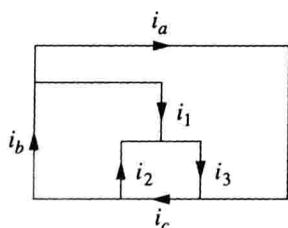


图 2-72 习题 8 图

- * 9 求图 2-73 所示电路中的 i_1 、 i_2 、 i_3 。

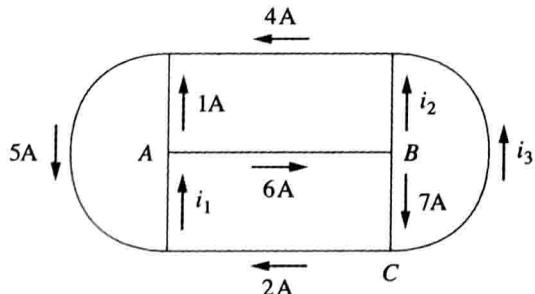


图 2-73 习题 9 图

- 10 求图 2-74 所示电路中的 i_1 和 i_2 。

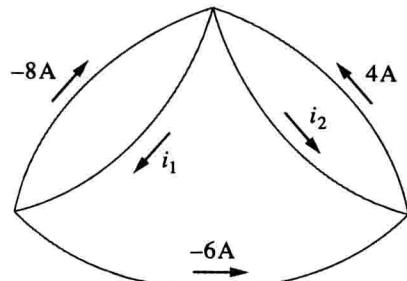


图 2-74 习题 10 图

- 11 在图 2-75 所示电路中, 计算 V_1 和 V_2 。

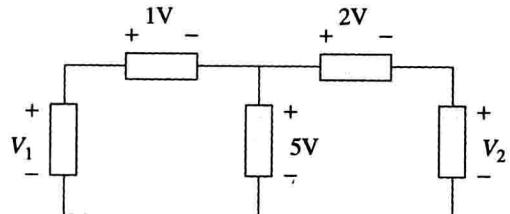


图 2-75 习题 11 图

- 12 在图 2-76 所示电路中, 求 v_1 、 v_2 、 v_3 。

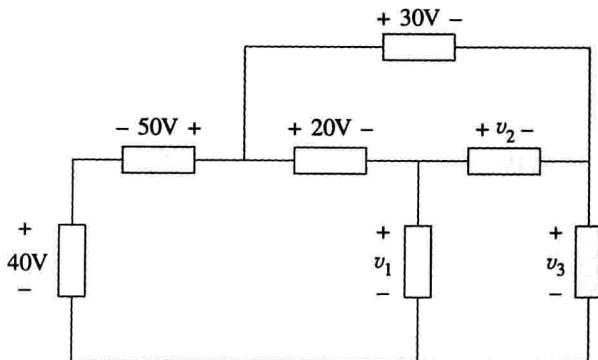


图 2-76 习题 12 图

- 13 如图 2-77 所示电路, 利用 KCL 求支路电流 $I_1 \sim I_4$ 。

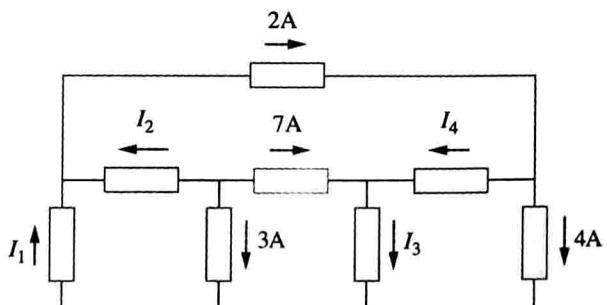


图 2-77 习题 13 图

- 14 在图 2-78 所示电路中, 利用 KVL 计算支路电压 $V_1 \sim V_4$ 。

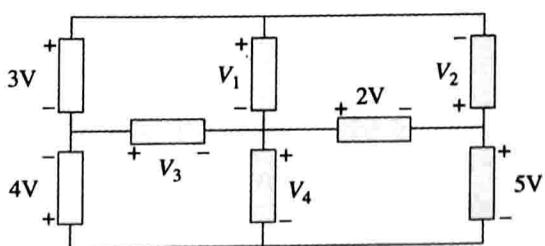


图 2-78 习题 14 图

15 计算图 2-79 所示电路中的 v 和 i_x 。

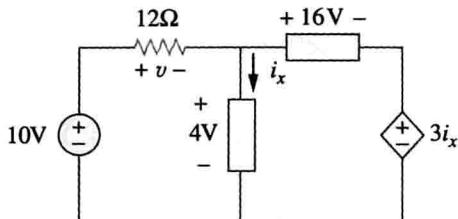


图 2-79 习题 15 图

16 求图 2-80 所示电路中的 V_o 。

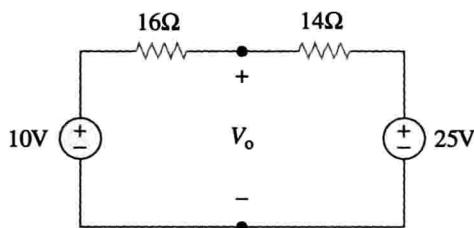


图 2-80 习题 16 图

17 求图 2-81 所示电路中的 $v_1 \sim v_3$ 。

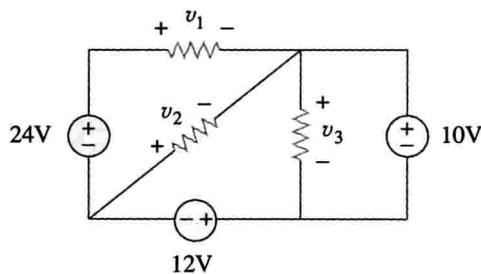


图 2-81 习题 17 图

18 求图 2-82 所示电路中的 I 和 V_{ab} 。

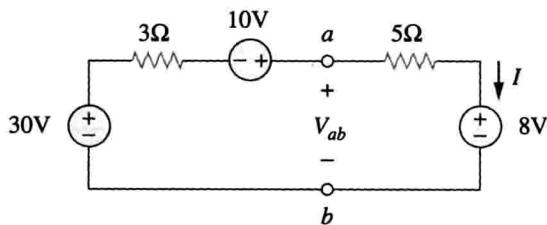


图 2-82 习题 18 图

19 在图 2-83 所示电路中, 求 I 、电阻消耗的功率以及各电源提供的功率。

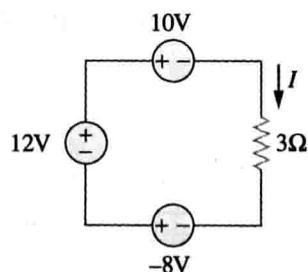


图 2-83 习题 19 图

20 确定图 2-84 所示电路中的 i_o 。

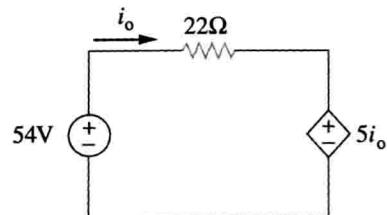


图 2-84 习题 20 图

21 求图 2-85 所示电路中的 V_x 。

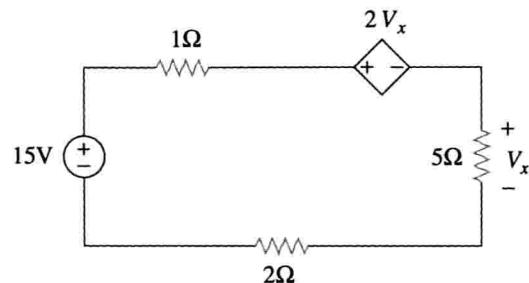


图 2-85 习题 21 图

22 求图 2-86 所示电路中的 V_o 以及受控源所消耗的功率。

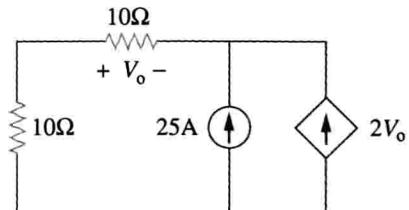


图 2-86 习题 22 图

23 在图 2-87 所示电路中, 确定 v_x 以及 12Ω 电阻吸收的功率。

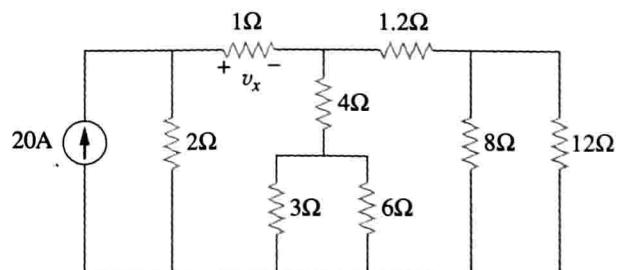


图 2-87 习题 23 图

24 对于图 2-88 所示的电路, 试求用 α 、 R_1 、 R_2 、 R_3 和 R_4 表示的 V_o/V_x 。如果 $R_1=R_2=R_3=R_4$, 求 α 取何值时, $|V_o/V_x| = 10$ 。

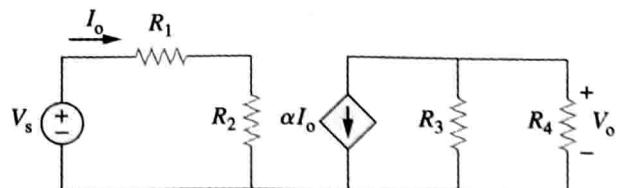


图 2-88 习题 24 图

- 25 在图 2-89 所示电路中, 求 $20\text{k}\Omega$ 电阻上的电流、电压, 以及所消耗的功率。

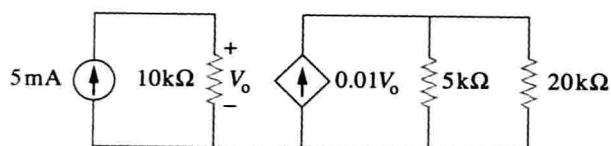


图 2-89 习题 25 图

2.5 节和 2.6 节

- 26 在图 2-90 所示的电路中, $i_o = 3\text{A}$, 计算 i_x 以及该电路消耗的总功率。

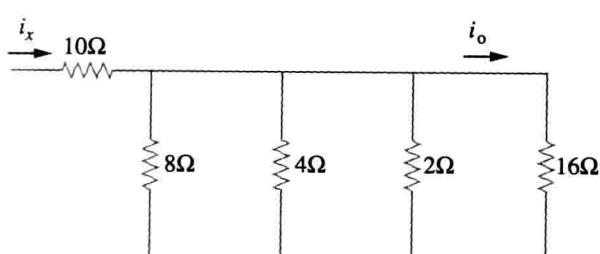


图 2-90 习题 26 图

- 27 计算图 2-91 所示电路中的 i_o 。

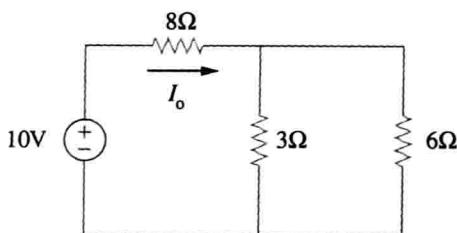


图 2-91 习题 27 图

- 28 为了帮助学生更好地理解串联和并联电路, 利用图 2-92 设计一个电路问题。 **ED**

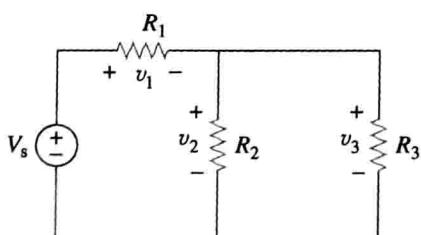


图 2-92 习题 28 图

- 29 图 2-93 中所有电阻均为 5Ω , 求 R_{eq} 。

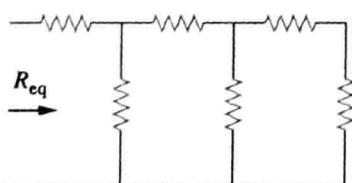


图 2-93 习题 29 图

- 30 求图 2-94 所示电路中的 R_{eq} 。

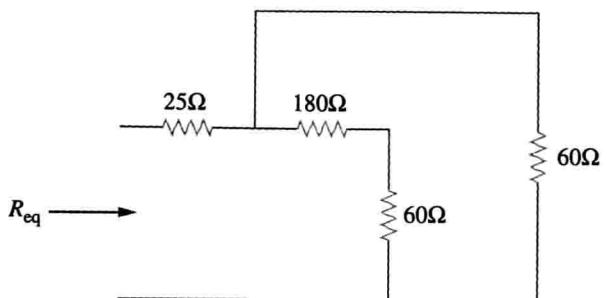


图 2-94 习题 30 图

- 31 对于图 2-95 所示电路, 确定 $i_1 \sim i_5$ 。

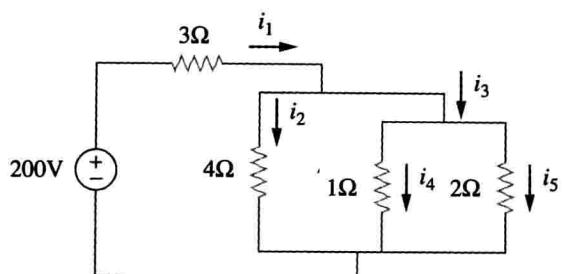


图 2-95 习题 31 图

- 32 求图 2-96 所示电路中的 $i_1 \sim i_4$ 。

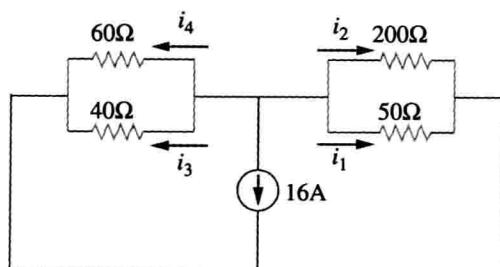


图 2-96 习题 32 图

- 33 求图 2-97 所示电路中的 v 和 i 。

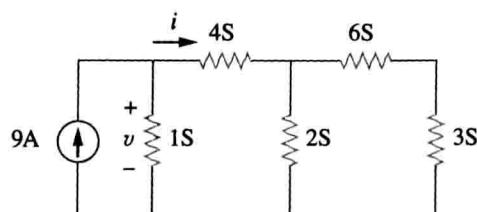


图 2-97 习题 33 图

- 34 利用电阻的串/并联合并, 求出图 2-98 所示电路从电源端看到的等效电阻, 并求该电路的总功耗。

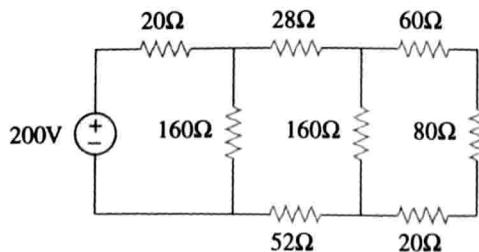


图 2-98 习题 34 图

35 计算图 2-99 所示电路中的 V_o 和 I_o 。

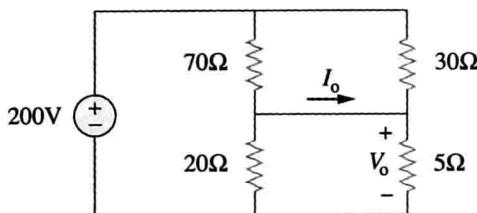


图 2-99 习题 35 图

36 求图 2-100 所示电路中的 i 和 V_o 。

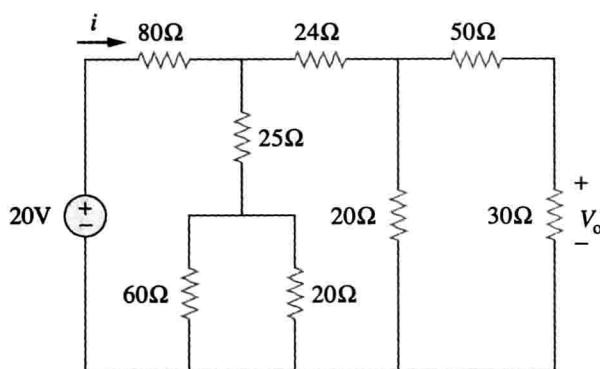


图 2-100 习题 36 图

37 求图 2-101 所示电路中的 R 。

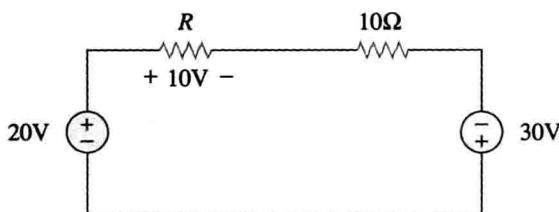


图 2-101 习题 37 图

38 求图 2-102 所示电路中的 i_o 与 R_{eq} 。

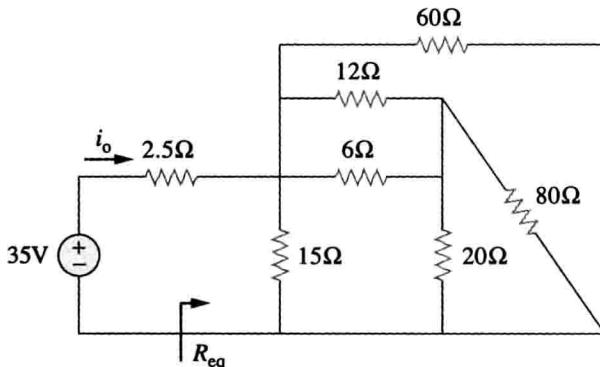


图 2-102 习题 38 图

39 计算图 2-103 所示各电路中的 R_{eq} 。

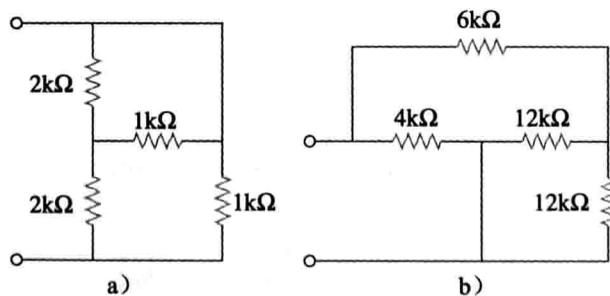


图 2-103 习题 39 图

40 在图 2-104 所示的梯形网络中, 求 I 和 R_{eq} 。

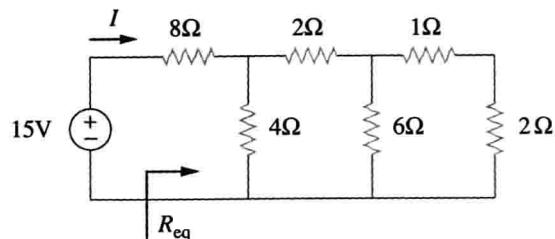


图 2-104 习题 40 图

41 如果图 2-105 所示电路中 $R_{eq} = 50$, 求 R 。

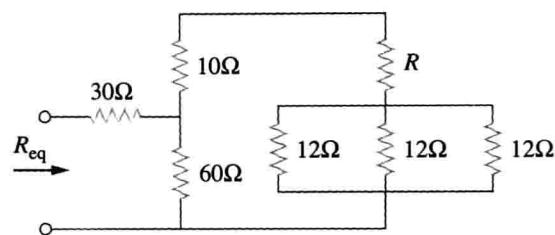


图 2-105 习题 41 图

42 将图 2-106 中各电路简化为 a 、 b 两端的单电阻电路。

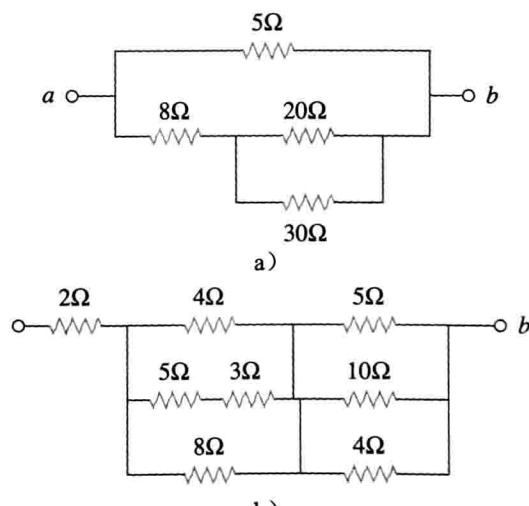


图 2-106 习题 42 图

43 计算图 2-107 所示各电路 a 、 b 两端的等效电阻 R_{ab} 。

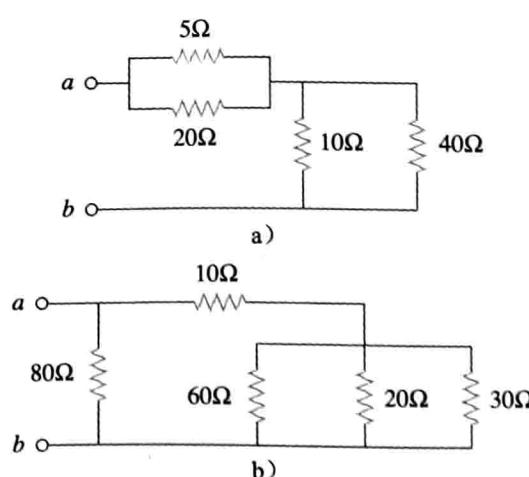


图 2-107 习题 43 图

44 求图 2-108 所示电路 a、b 两端的等效电阻。

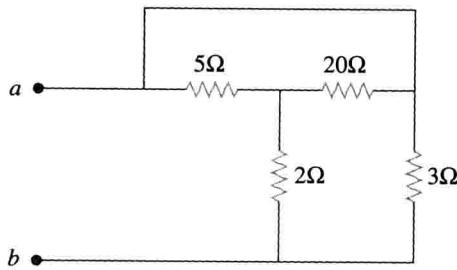
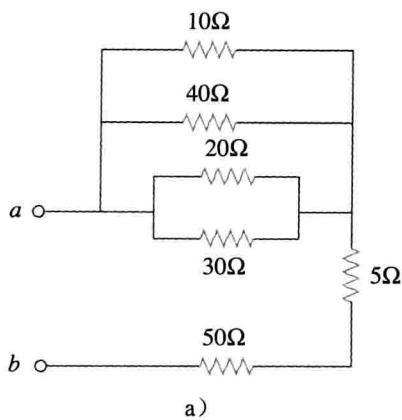
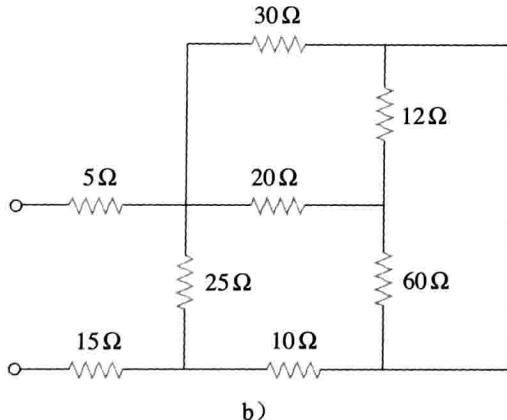


图 2-108 习题 44 图

45 求图 2-109 所示各电路中的 a、b 两端的等效电阻。



a)



b)

图 2-109 习题 45 图

46 求图 2-110 所示电路中的 I 。

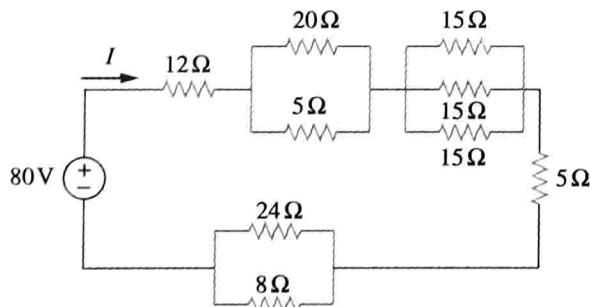


图 2-110 习题 46 图

47 求图 2-111 所示电路中的等效电阻 R_{ab} 。

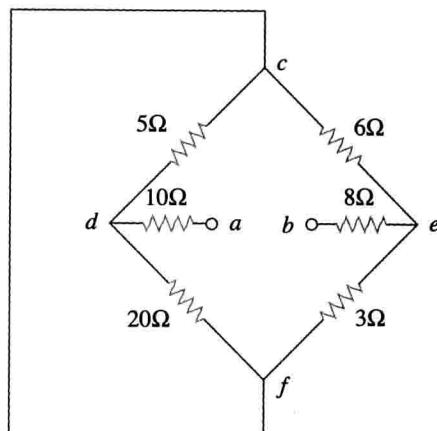


图 2-111 习题 47 图

2.7 节

48 将图 2-112 所示的两个 Y 网络变换为△网络。

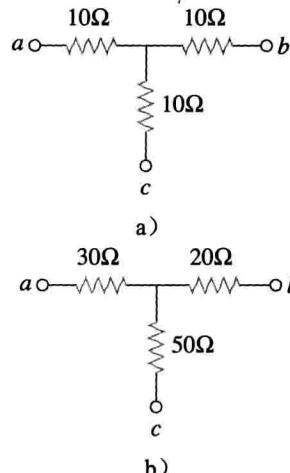


图 2-112 习题 48 图

49 将图 2-113 所示的两个△网络变换为 Y 网络。

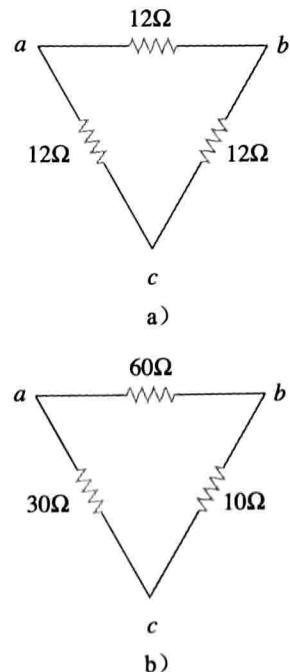


图 2-113 习题 49 图

- 50 为了帮助学生更好地理解 Y-△变换，利用图 2-114 所示电路设计一个电路问题。 ED

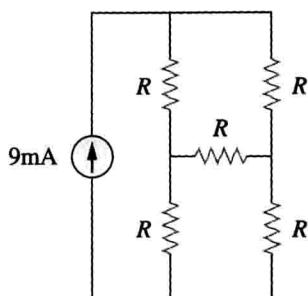
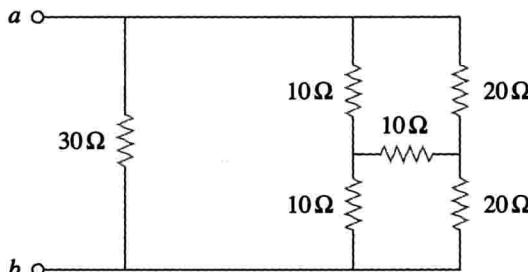
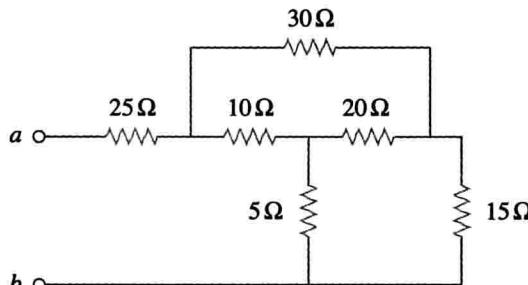


图 2-114 习题 50 图

- 51 对图 2-115 所示电路，求 a、b 两端的等效电阻。



a)



b)

图 2-115 习题 51 图

- * 52 求图 2-116 所示电路中的等效电阻，该电路中所有电阻均为 3Ω 。

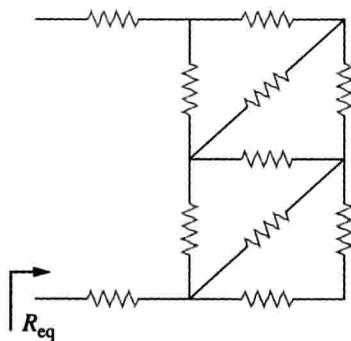
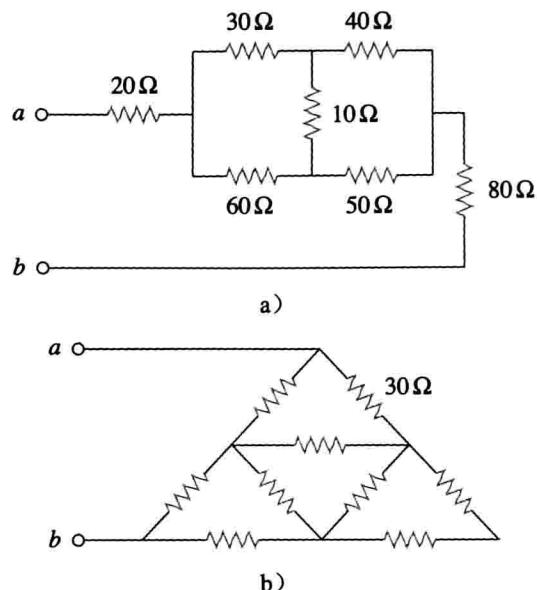
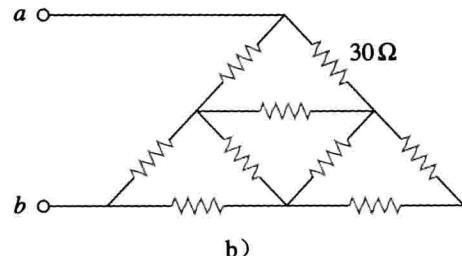


图 2-116 习题 52 图

- * 53 求图 2-117 所示各电路中的等效电阻 R_{ab} ，在图 b 中所有电阻的阻值均为 30Ω 。



a)



b)

图 2-117 习题 53 图

- 54 在图 2-118 所示电路中，求：(a) a、b 两端的等效电阻；(b) c、d 两端的等效电阻。

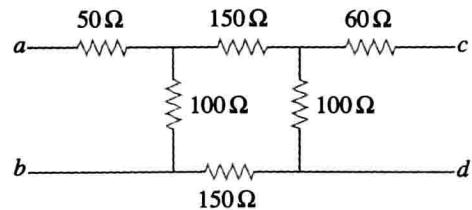


图 2-118 习题 54 图

- 55 计算图 2-119 所示电路中的 I_o 。

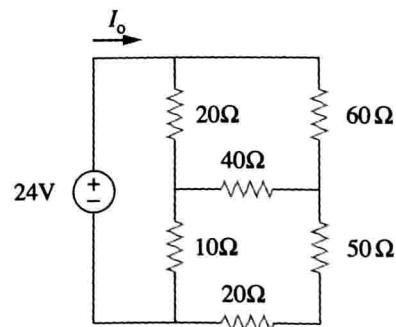


图 2-119 习题 55 图

- 56 计算图 2-120 所示电路中的 V 。

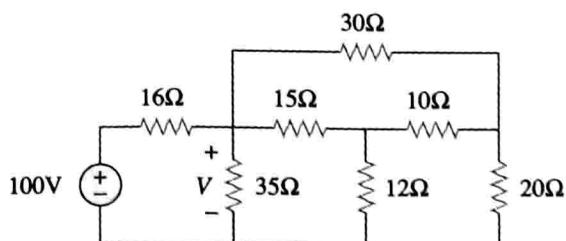


图 2-120 习题 56 图

- * 57 求图 2-121 所示各电路中的 R_{eq} 与 I 。

- * 57 求图 2-121 所示各电路中的 R_{eq} 与 I 。

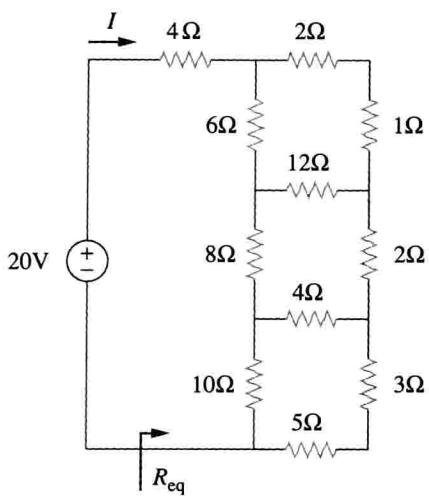


图 2-121 习题 57 图

- 58 图 2-122 电路中 60W 灯泡的额定电压为 120V，计算要使灯泡工作在额定条件下的 V_s 。

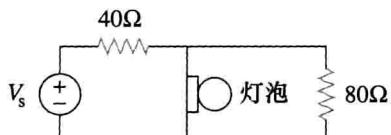


图 2-122 习题 58 图

- 59 三只灯泡串联连接到 120V 的电源两端，如图 2-123 所示，每个灯泡的额定电压为 120V，求流过灯泡的电流 I 。每个灯泡吸收的功率为多少？

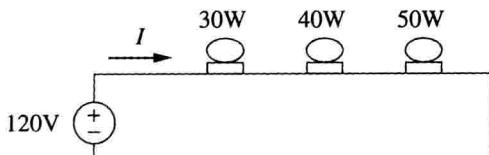


图 2-123 习题 59 图

- 60 如果习题 59 中的三只灯泡串联连接到 120V 的电源两端，计算流过各灯泡的电流。

- 61 设计一个如图 2-124 所示的照明系统，包括一个功率为 70W 的供电电源和两只灯泡。要求必须从如下三只可用灯泡中选取两只，使得所设计的系统价格最低，并且 $I = 1.2(1 \pm 5\%) A$ 。
ED

$R_1 = 80\Omega$, 价格 = \$ 0.60(标准尺寸)
 $R_2 = 90\Omega$, 价格 = \$ 0.90(标准尺寸)
 $R_3 = 100\Omega$, 价格 = \$ 0.75(非标准尺寸)

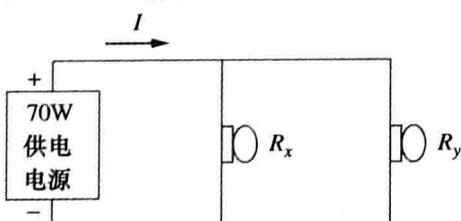


图 2-124 习题 61 图

- 62 某三线系统为两个负载 A 和 B 供电，如图 2-125 所示，负载 A 由电流为 8A 的发动机组成，负载 B 为电流等于 2A 的 PC。假定该系统每天工作 10h，电费为 6 美分/kW·h，计算一年 365 天所消耗电能的费用。

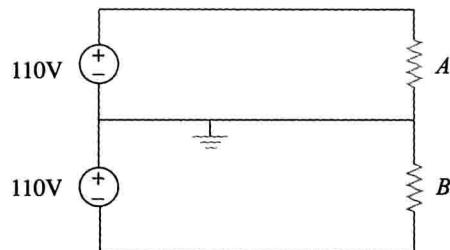


图 2-125 习题 62 图

- 63 如果采用内阻为 100Ω 、最大电流容量为 $2mA$ 的电流表测量 $5A$ 的电流，确定所需的电阻值，并计算分流电阻所消耗的功率。
- 64 图 2-126 所示电位器(可调电阻) R_x 用于调节电流 i_x ，使其变化范围为 $1\sim 10A$ ，计算相应的 R 与 R_x 的值。

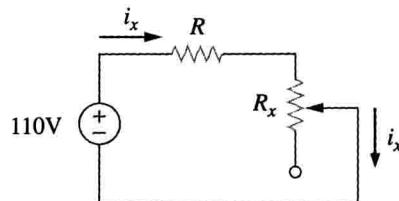


图 2-126 习题 64 图

- 65 一个内阻为 $1k\Omega$ 的达松伐尔电表需要 $10mA$ 的电流才能使指针满刻度偏转。计算以 $50V$ 为满刻度时所需连接的串联电阻值。
- 66 某灵敏度为 $20k\Omega/V$ 的电压表满刻度为 $10V$ ，求：(a)使该表满刻度读数为 $50V$ 时所需连接的串联电阻值；(b)满刻度时，该串联电阻上消耗的功率。
- 67 (a)求图 2-127a 所示电路中的电压 V_o ；(b)当一个内阻为 $6k\Omega$ 电压表如图 2-127b 连接时，求电压 V' ；(c)电表的有限阻值会引入测量误差，计算如下百分比误差： $\left| \frac{V_o - V'_o}{V_o} \right| \times 100\%$ ；(d)如果内阻为 $36k\Omega$ ，求其百分比误差。
- 68 (a)求图 2-128a 所示电路中的电流 I ；(b)如果在电路中插入一个内阻为 1Ω 的电流表用于测量 I' ，如图 2-128b 所示，求测得的 I' ；(c)计算该电流表引入的百分比误差： $\left| \frac{I - I'}{I} \right| \times 100\%$ 。

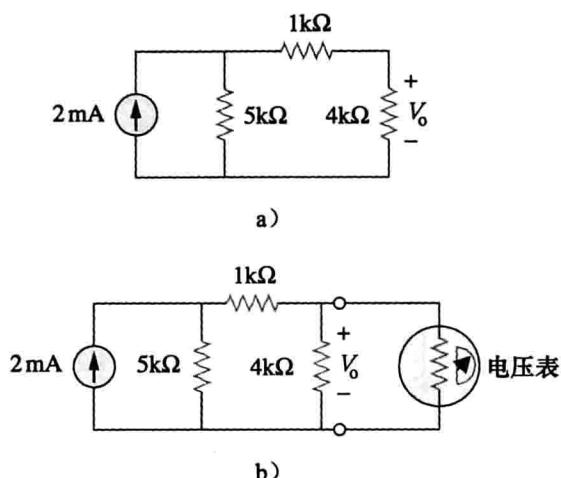


图 2-127 习题 67 图

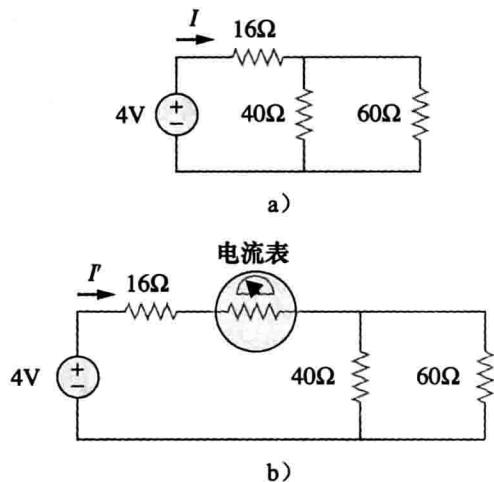


图 2-128 习题 68 图

- 69 采用电压表测量图 2-129 所示电路的 V_o ，电压表的模型由理想电压表和与之并联的 $100\text{k}\Omega$ 内阻构成。设 $V_s = 40\text{V}$, $R_s = 10\text{k}\Omega$, $R = 20\text{k}\Omega$, 试在：(a) $R_2 = 1\text{k}\Omega$; (b) $R_2 = 10\text{k}\Omega$; (c) $R_2 = 100\text{k}\Omega$ 三种情况下，计算有电压表和无电压表时的 V_o 。

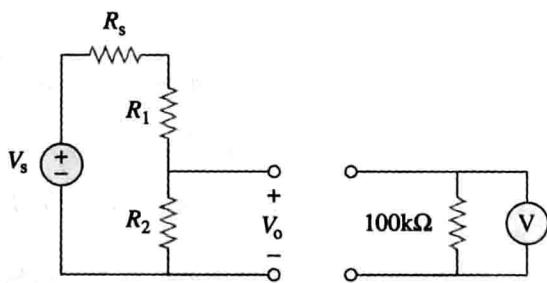


图 2-129 习题 69 图

- 70 (a) 计算如图 2-130 所示惠斯顿电桥中的 v_a 、 v_b 与 v_{ab} ; (b) 如果接地位由 o 变为 a ，重做 (a) 中的计算。

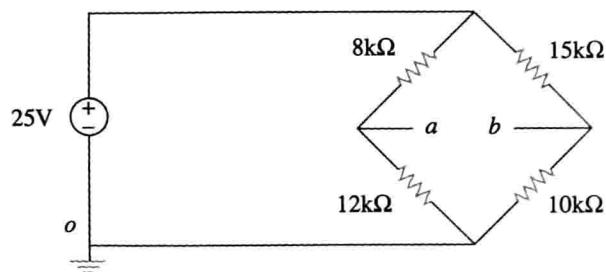


图 2-130 习题 70 图

- 71 图 2-131 给出了一个太阳能光电板的电路模型，如果设 $V_s = 40\text{V}$, $R_1 = 20\text{k}\Omega$, $i_L = 1\text{A}$, 求 R_L 。

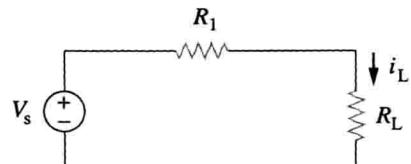


图 2-131 习题 71 图

- 72 求图 2-132 所示两路功率分配电路中的 V_o 。

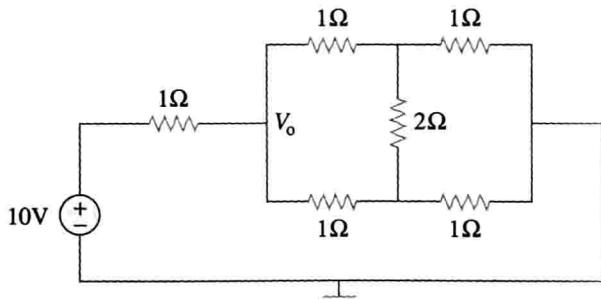


图 2-132 习题 72 图

- 73 电流表的模型由一个理想电流表和与之串联的 20Ω 电阻构成，该表与一电流源和一个未知电阻相连接，如图 2-133 所示。记录当前电流表的读数，增加电位器 R 并进行调节，直至电流表读数下降为原先记录值的一半，此时 $R = 65\Omega$ ，求 R_x 的值。

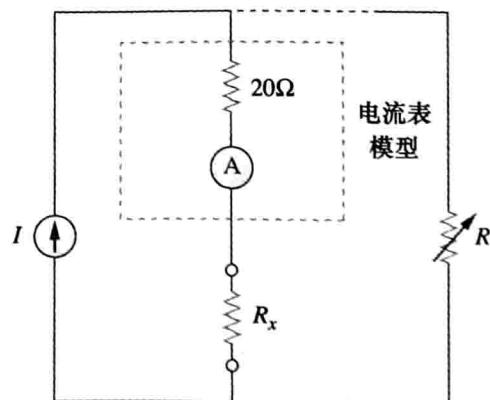


图 2-133 习题 73 图

- 74 图 2-134 所示电路用于控制发动机的转速，当开关掷于高、中、低三个不同位置时，发动机电流分别为 5A 、 3A 和 1A ，可以用一个

20mΩ的负载电阻作为该发动机的电路模型，求串联降压电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 。

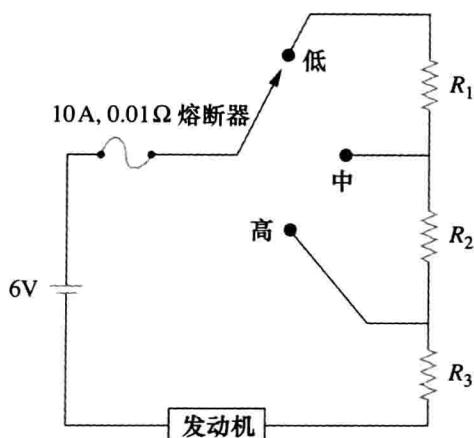


图 2-134 习题 74 图

75 求图 2-135 所示四路功率分配电路中的 R_a ，假定图中各元件均为 1Ω。

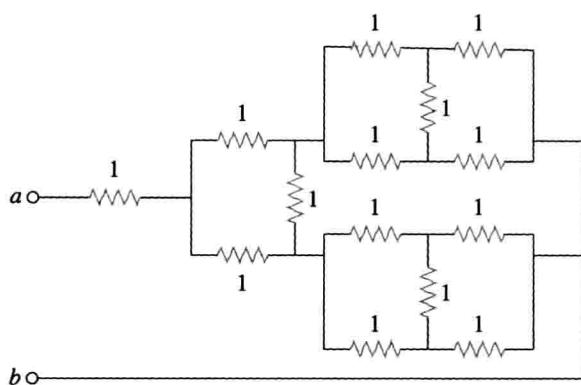


图 2-135 习题 75 图

综合理解题

76 对图 2-136 所示的八路功率分配电路，重做习题 75。

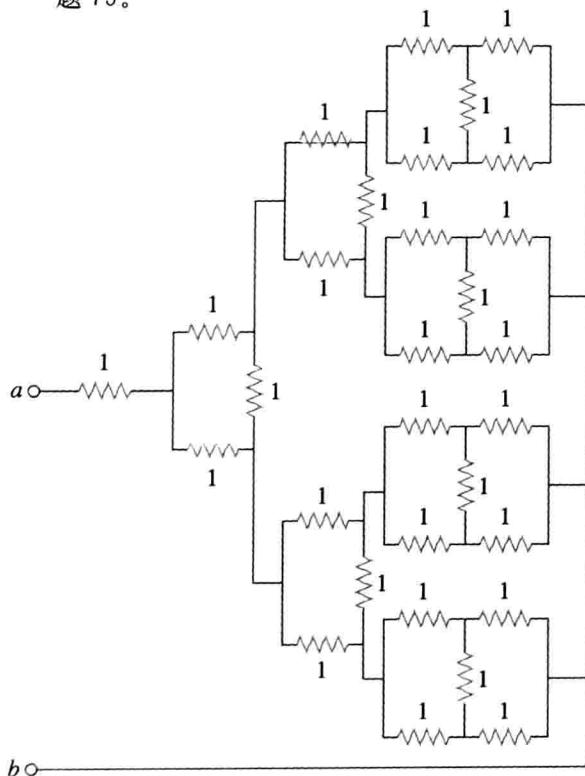


图 2-136 习题 76 图

77 假设电路实验室中有大量如下商用标称电阻：
ED

1.8Ω 20Ω 300Ω 24kΩ 56kΩ

利用电阻的串联和并联，用数量最少的电阻得到电路设计中所需的如下阻值：

(a) 5Ω；(b) 311.8Ω；(c) 40kΩ；(d) 52.32kΩ。

78 在图 2-137 所示电路中，滑动端将电位器阻值调节在 $\alpha R \sim (1 - \alpha)R$ 之间， $0 \leq \alpha \leq 1$ ，求 V_o/V_s 。

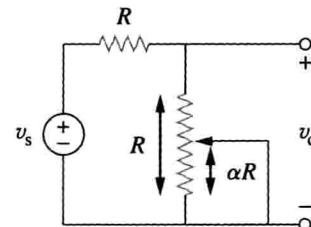


图 2-137 习题 78 图

79 将一个额定值为 240mW、6V 的电动削笔刀与一 9V 电池相连，如图 2-138 所示。计算使该电动削笔刀正常工作时所需串联的分压电阻值 R_x 。

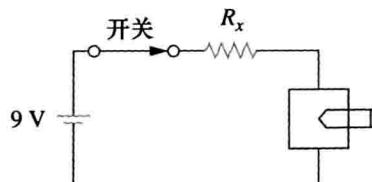


图 2-138 习题 79 图

80 扬声器与放大器连接电路如图 2-139 所示，如果 10Ω 扬声器从放大器获取的最大功率为 12W，试确定一个 4Ω 扬声器从放大器获取的最大功率。

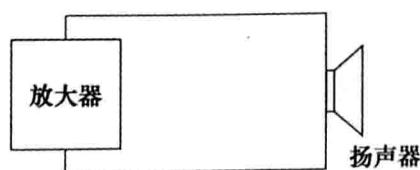


图 2-139 习题 80 图

81 在某应用中，如图 2-140 所示电路的设计必须满足如下两项标准：(a) $V_o/V_s = 0.05$ ；(b) $R_{eq} = 40k\Omega$ 。如果负载电阻固定为 5kΩ，求满足上述标准的电阻 R_1 和 R_2 。

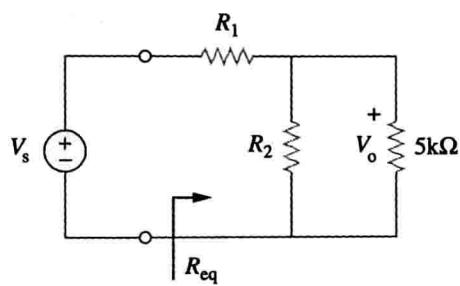


图 2-140 习题 81 图

- 82 某电阻阵列的引脚图如图 2-141 所示，求下述引脚之间的等效电阻：(a)1 与 2；(b)1 与 3；(c)1 与 4。

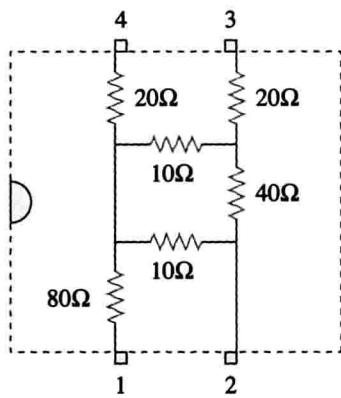


图 2-141 习题 82 图

- 83 两精密仪器工作的额定值如图 2-142 所示，求利用 24V 电池为这两个仪器供电时所要求的 R_1 和 R_2 。

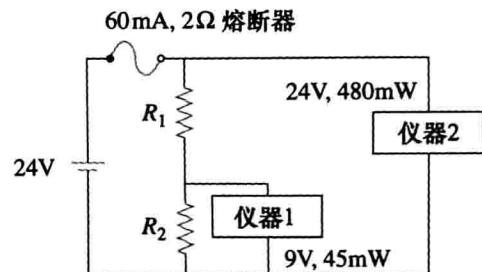


图 2-142 习题 83 图

第3章

分析方法

任何伟大的事业都不是一蹴而就的。探索一项伟大的科学发现，描绘一幅精美的画卷，创作一首不朽的诗篇，成为一名高官或者一位名垂千古的将军……这些伟大的目标都需要时间、耐心和毅力。伟大的事业只能点点滴滴地积累，逐步地达成。

——W. J. Wilmont Buxton

拓展事业

电子学领域的职业生涯

电子学是电子电路分析的应用领域之一。电子学(electronics)这一术语最初用于表示电流极小的电路，但现在的情况并非如此，功率半导体器件就可在大电流下运行。目前认为电子学是电荷在气体、真空或者半导体中运动的科学。现代电子学包括晶体管和晶体管电路。早期的电子电路由分立元件组装而成，许多现代电子电路是在半导体基片或者芯片上制成的集成电路。

电子电路在自动化、广播、计算机和仪器等许多领域有着广泛的应用。采用电子电路的设备数不胜数，收音机、电视机、计算机以及立体声系统等只是电子电路的几种常见应用。

电子工程师经常会使用、设计或构建由不同电子电路组成的电子系统，从而实现各种不同的功能。因此，理解并掌握电子电路的运行与分析方法对于电子工程师至关重要。电子学已经成为电气工程中不同于其他学科的一门专业学科。由于电子学领域的发展总是最先进的，所以电子工程师必须做到知识的及时更新。做到这一点的最好办法就是成为专业机构中的一员，如成为电气与电子工程师协会(IEEE)的会员。IEEE是全球最大的专业技术协会，会员数量超过300 000，其会员可以从IEEE每年出版的大量杂志、期刊、学报和会议/论坛文集中受益匪浅，读者应该考虑成为IEEE的会员。



电子工程师正在检修电路板
© Brand X Pictures/Punchstock

3.1 引言

理解了电路理论的基本定律(欧姆定律和基尔霍夫定律)之后，本章将应用这些定律来推导电路分析的两种方法：基于基尔霍夫电流定律(KCL)系统应用的节点分析法和基于基尔霍夫电压定律(KVL)系统应用的网孔分析法。这两种电路分析方法非常重要，所以本章是本书中最为重要的一章，学生应该给予足够的重视。

采用本章介绍的两种分析方法可以分析任意线性电路，通过获得一组联立方程组，然后求解得到所需的电流或电压值。求解联立线性方程组的一种方法是克莱姆法则，即利用方程组中系数行列式的商来计算电路变量；另一种求解联立方程组的方法是应用MATLAB。

本章还介绍了本书将要使用的电路模拟软件——PSpice(Windows版本)的使用方法。

最后，本章将应用所学到的电路分析方法分析晶体管电路。

3.2 节点分析法

节点分析法是利用节点电压作为电路变量进行电路分析的一般方法，选择节点电压来代替元件电压作为电路变量使分析过程更为方便，同时也会减少联立方程组中方程的数量。

提示：节点分析法也称为节点电压法。

为简单起见，假设本节所分析的电路不包含电压源，而包含电压源的电路分析将在下一节予以讨论。

节点分析法(nodal analysis)就是要求出节点电压，假设电路中包含 n 个节点，且不包含电压源，则电路的节点分析可按照以下三个步骤完成：

求解节点电压的步骤：

1. 选择一个节点作为参考节点，其余 $(n-1)$ 个节点电压分别是 v_1, v_2, \dots, v_{n-1} 。这些电压都是相对于参考节点的电位。

2. 对 $(n-1)$ 个非参考节点应用KCL列写方程组，此时需根据欧姆定律用节点电压来表示各支路电流。

3. 求解联立方程组从而求得未知节点的电压。

下面对上述三个步骤进行解释和应用。

节点分析法的第一步是选取一个节点作为参考节点(reference node)或已知节点(datum node)，参考节点电位为零，通常称为地(ground)。参考节点可以用图3-1所示的三个符号表示。图3-1c所示的接地类型称为机壳地(chassis ground)，通常用于箱体、机壳或底盘作为所有电路参考节点的设备中。当以地作为参考电位时，则采用图3-1a或图3-1b的地(earth ground)符号表示。本书将采用图3-1b所示的接地符号。

一旦选定了参考节点，就可以为非参考节点指定电压，例如在图3-2a所示电路中，节点0为参考节点($v=0$)，而节点1和节点2的电压分别指定为 v_1 和 v_2 。记住，节点电压总是相对于参考节点定义的，如图3-2a所示，各节点电压为从参考节点到相应的非参考节点的电压升高，即各节点相对于参考节点的电压。

提示：非参考节点的个数等于独立方程的个数。

节点分析法的第二步是对每个非参考节点应用KCL列方程组，为了避免在同一电路中符号过多，现将图3-2a所示电路重画成图3-2b，并在图中增加了电流 i_1, i_2 和 i_3 分别表示流过电阻 R_1, R_2 和 R_3 的电流。对节点1应用KCL，有：

$$I_1 = I_2 + i_1 + i_2 \quad (3.1)$$

对于节点2有：

$$I_2 + i_2 = i_3 \quad (3.2)$$

接着根据欧姆定律用节点电压来表示未知电流 i_1, i_2 和 i_3 。必须牢记的一点是，由于电阻是无源元件，所以按照关联参考方向，电流总是从高电位流向低电位。

通过电阻的电流总是由高电位向低电位流动。

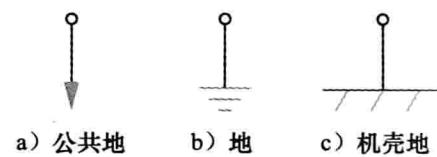
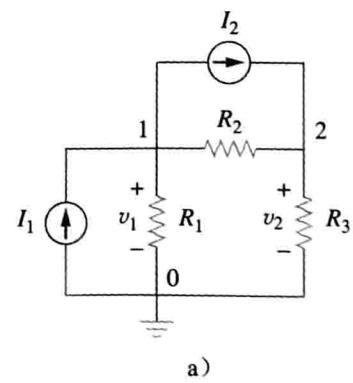
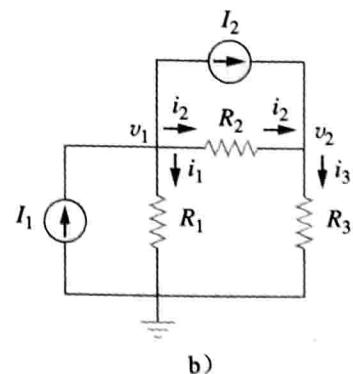


图3-1 表示参考节点的常用符号



a)



b)

图3-2 应用节点分析法的典型电路

可将上述原理表示为：

$$i = \frac{v_{\text{higher}} - v_{\text{lower}}}{R} \quad (3.3)$$

注意，该原理与第2章中对电阻的定义是一致的(见图2-1)。于是，由图3-2b可得：

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - 0}{R_1} \quad \text{或} \quad i_1 = G_1 v_1 \\ i_2 &= \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad \text{或} \quad i_2 = G_2(v_1 - v_2) \\ i_3 &= \frac{v_2 - 0}{R_3} \quad \text{或} \quad i_3 = G_3 v_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入式(3.1)与式(3.2)，分别得到：

$$I_1 = I_2 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (3.5)$$

$$I_2 + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{v_2}{R_3} \quad (3.6)$$

采用电导表示时，式(3.5)与式(3.6)变为：

$$I_1 = I_2 + G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) \quad (3.7)$$

$$I_2 + G_2(v_1 - v_2) = G_3 v_2 \quad (3.8)$$

节点分析法的第三步是求解节点电压。如果对($n-1$)个非参考节点应用KCL，就可以得到($n-1$)个联立方程组，在上例中，有两个非参考节点，得到式(3.5)和式(3.6)或者式(3.7)和式(3.8)两个联立方程组。对于图3-2所示电路，利用代入法、消元法、克莱姆法则或矩阵求逆法等标准方法求解式(3.5)与式(3.6)或者式(3.7)与式(3.8)就可以得到节点电压 v_1 与 v_2 。采用后两种方法时，必须将联立方程表示成矩阵形式，例如，式(3.7)与式(3.8)以矩阵形式表示为：

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

解之即得到 v_1 与 v_2 ，式(3.9)的一般形式将在3.6节中讨论，求解联立方程还可以借助于计算器或计算机软件，如MATLAB、Mathcad、Maple和Quattro Pro等工具软件。

例3-1 计算图3-3a所示电路中各节点的电压。

解：在图3-3a中标出相应的电压、电流，得到用于分析的图3-3b。应该注意应用KCL时电流的选取方法，图中除了电流源支路外，其余电流的方向标记可以是任意的，但必须保持一致(例如，若 i_2 由左边流入 4Ω 的电阻，则 i_2 必须从电阻的右边流出该电阻)，选定参考节点后，图中的 v_1 、 v_2 即为所求的相对于参考节点的电压。

对于节点1，应用KCL和欧姆定律可得：

$$i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow 5 = \frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_1 - 0}{2}$$

将后一个方程的两边同时乘以4，得：

$$20 = v_1 - v_2 + 2v_1$$

即

$$3v_1 - v_2 = 20 \quad (3.1.1)$$

对于节点2，同理可得：

$$i_2 + i_4 = i_1 + i_5 \Rightarrow \frac{v_1 - v_2}{4} + 10 = 5 + \frac{v_2 - 0}{6}$$

两边同时乘以12，得：

$$3v_1 - 3v_2 + 120 = 60 + 2v_2$$

即

$$-3v_1 + 5v_2 = 60 \quad (3.1.2)$$

于是，得到两个联立的方程式(3.1.1)与式(3.1.2)，采用以下任何一种解法均可求出电压 v_1 与 v_2 。

方法 1 采用消元法，将式(3.1.1)和式(3.1.2)相加，得到：

$$4v_2 = 80 \Rightarrow v_2 = 20V$$

将 $v_2 = 20$ 代入式(3.1.1)，得到：

$$3v_1 - 20 = 20 \Rightarrow v_1 = \frac{40}{3} = 13.333(V)$$

方法 2 利用克莱姆法则，将式(3.1.1)与式(3.1.2)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

系数矩阵行列式的值为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12$$

于是， v_1 与 v_2 分别为：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -1 \\ 60 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{100 + 60}{12} = 13.333(V)$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -3 & 60 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{180 + 60}{12} = 20(V)$$

与采用消元法得到的结果相同。

如果要求电流值，则由节点电压值可以很容易地得到：

$$i_1 = 5A, \quad i_2 = \frac{v_1 - v_2}{4} = -1.6668(A), \quad i_3 = \frac{v_1}{2} = 6.666A,$$

$$i_4 = 10A, \quad i_5 = \frac{v_2}{6} = 3.333(A)$$

得到 i_2 为负值，表明其方向与假定的参考方向相反。

练习 3-1 求图 3-4 所示电路的节点电压。

答案： $v_1 = -6V, v_2 = -42V$

例 3-2 求图 3-5a 所示电路的节点电压。

解：与例 3-1 电路包括两个非参考节点不同，本例电路中有三个参考节点。三个节点电压 v_1 、 v_2 、 v_3 以及各支路电流的标记如图 3-5b 所示。

对于节点 1，有：

$$3 = i_1 + i_x \Rightarrow 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2}$$

两边同时乘以 4，并移项整理得：

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12 \quad (3.2.1)$$

对于节点 2，有：

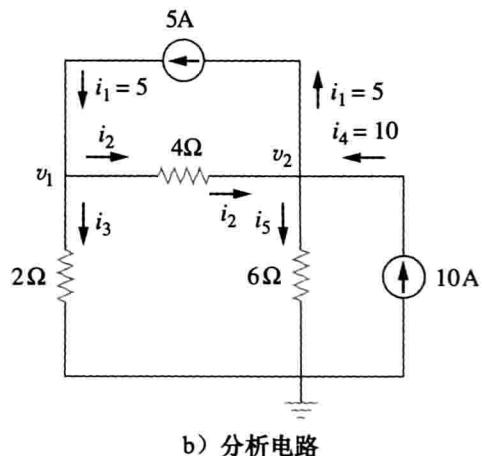
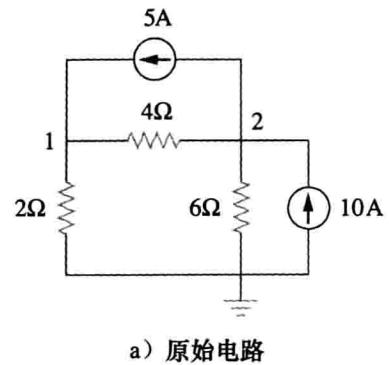


图 3-3 例 3-1 图

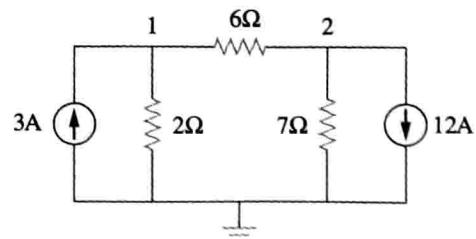


图 3-4 练习 3-1 图

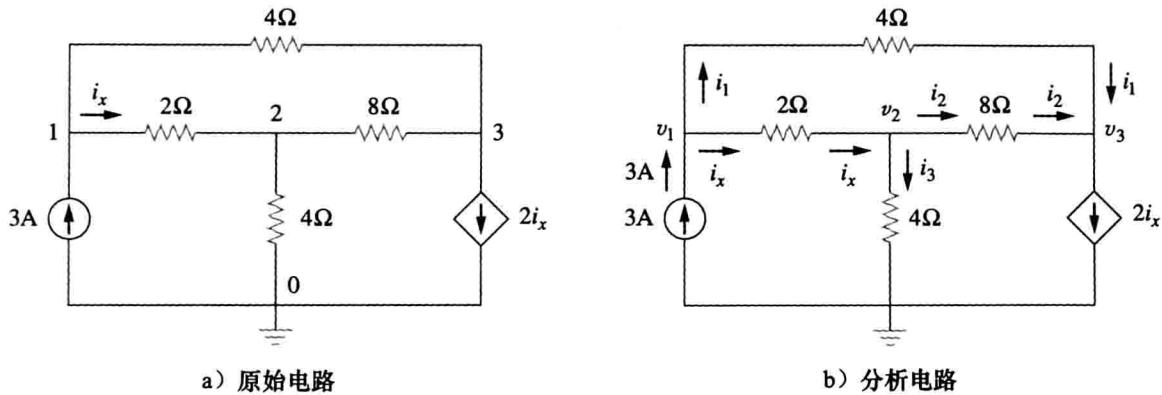


图 3-5 例 3-2 图

$$i_x = i_2 + i_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4}$$

两边同时乘以 8 并移项整理得：

$$-4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0 \quad (3.2.2)$$

对于节点 3，有：

$$i_1 + i_2 = 2i_x \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

两边同时乘以 8，移项整理后再除以 3，得到：

$$2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \quad (3.2.3)$$

于是，得到三个用于求解节点电压 v_1 、 v_2 和 v_3 的联立方程。下面将采用三种方法求解方程组。

方法 1 采用消元法，将式(3.2.1)与式(3.2.3)相加，得到：

$$5v_1 - 5v_2 = 12$$

即

$$v_1 - v_2 = \frac{12}{5} = 2.4 \quad (3.2.4)$$

将式(3.2.2)与式(3.2.3)相加，得到：

$$-2v_1 + 4v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \quad (3.2.5)$$

将式(3.2.5)代入式(3.2.4)，有：

$$2v_2 - v_2 = 2.4 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2.4V, \quad v_1 = 2v_2 = 4.8(V)$$

由式(3.2.3)可得：

$$v_3 = 3v_2 - 2v_1 = 3v_2 - 4v_2 = -v_2 = -2.4(V)$$

综上：

$$v_1 = 4.8V, \quad v_2 = 2.4V, \quad v_3 = -2.4V$$

方法 2 利用克莱姆法则，将式(3.2.1)与(3.2.3)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

由此可得：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

其中， Δ 、 Δ_1 、 Δ_2 和 Δ_3 为待计算的行列式。计算 3×3 矩阵的行列式时，应重复添加该矩

阵的前两行，并交叉相乘，具体过程如下所示：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} \hline & 3 & -2 & -1 \\ & -4 & 7 & -1 \\ & 2 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} = 21 - 12 + 4 + 14 - 9 - 8 = 10$$

同理，可以得到：

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ \hline \end{vmatrix} = 84 + 0 + 0 - 0 - 36 - 0 = 48$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{vmatrix} = 0 + 0 - 24 - 0 - 0 + 48 = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 12 \\ -4 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ \hline \end{vmatrix} = 0 + 144 + 0 - 168 - 0 - 0 = -24$$

于是得到：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48}{10} = 4.8(V), \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{10} = 2.4(V), \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{10} = -2.4(V)$$

与采用方法1所得的结果相同。

方法3 利用 MATLAB 求解矩阵，式(3.2.6)可以写为：

$$AV = B \Rightarrow V = A^{-1}B$$

其中， A 为 3×3 方阵， B 为列矢量， V 为由所要求的 v_1 、 v_2 和 v_3 组成的列矢量。利用 MATLAB 计算 V 的程序如下：

```
>>A=[3 -2 -1; -4 7 -1; 2 -3 1];
>>B=[12 0 0]';
>>V=inv(A)*B
4.8000
V= 2.4000
-2.4000
```

于是， $v_1 = 4.8V$ ， $v_2 = 2.4V$ ， $v_3 = -2.4V$ 。与采用前两种方法得到的结果相同。

练习 3-2 求图 3-6 所示电路中三个非参考节点的电压。
答案： $v_1 = 32V$ ， $v_2 = -25.6V$ ， $v_3 = 62.4V$

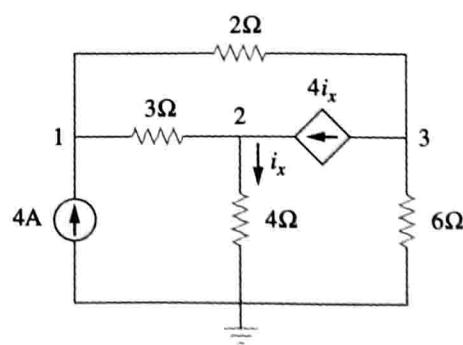


图 3-6 练习 3-2 图

3.3 含有电压源电路的节点分析法

下面讨论电压源对节点分析法的影响。以图 3-7 所示的电路为例，分以下两种情况进行讨论。

第一种情况 如果电压源接在参考节点与非参考节点之间，那么非参考节点的电压就等于电压源的电压。例如，在图 3-7 中：

$$v_1 = 10V \quad (3.10)$$

因此，在这种情况下可以简化电路的分析。

第二种情况 如果电压源(独立源或受控源)接在两个非参考节点之间，则这两个非参考节点构成一个广义节点(generalized node)或超节点(supernode)。此时可以采用 KCL 和 KVL 确定节点电压。

超节点由两个非参考节点和其间的电压源(独立源或受控源)以及与之并联的元件所组成。

提示：超节点可以看成是包含电压源及其两个节点的一个封闭曲面。

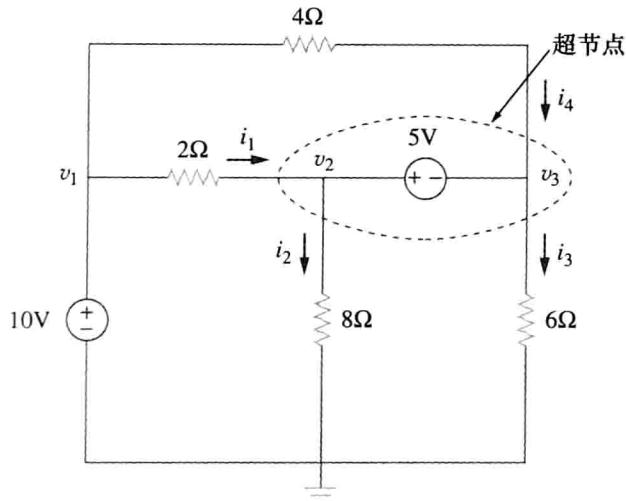


图 3-7 有广义节点的电路

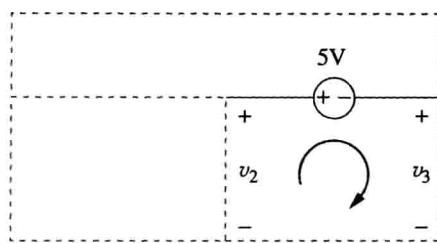


图 3-8 对超节点应用 KVL

在图 3-7 中，节点 2 和节点 3 组成了一个超节点(超节点可以由两个以上节点组成，如图 3-14 所示电路)。仍然可以采用上一节介绍的三个步骤分析含有超节点的电路，只是对超节点的处理方法有所不同，这是因为节点分析法的基本要素是应用 KCL，要求流过各元件的电流已知。而在超节点中，并不知道流过电压源的电流，但是，与普通节点一样，在超节点处必须满足 KCL，因此，在图 3-7 中的超节点处，有：

$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3 \quad (3.11a)$$

即

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1 - v_3}{4} = \frac{v_2 - 0}{8} + \frac{v_3 - 0}{6} \quad (3.11b)$$

为了对图 3-7 中的超节点应用基尔霍夫电压定律，现将该节点重新画于图 3-8 中，顺时针方向环绕回路一周，得到：

$$-v_2 + 5 + v_3 = 0 \Rightarrow v_2 - v_3 = 5 \quad (3.12)$$

由式(3.10)、式(3.11b)和式(3.12)就可以得到节点电压。

超节点具有如下三个属性：

1. 超节点内的电压源提供了一个求解节点电压所需的约束方程。
2. 超节点本身没有电压。

3. 超节点电路的求解要同时利用 KCL 和 KVL。

例 3-3 求图 3-9 所示电路中的节点电压。

解：该电路中的超节点包含 2V 电压源、节点 1、节点 2 以及 10Ω 电阻。对图 3-10a 所示电路中的超节点应用 KCL，可得：

$$2 = i_1 + i_2 + 7$$

用节点电压表示 i_1 和 i_2 ，有：

$$2 = \frac{v_1 - 0}{2} + \frac{v_2 - 0}{4} + 7 \Rightarrow 8 = 2v_1 + v_2 + 28$$

即

$$v_2 = -20 - 2v_1 \quad (3.3.1)$$

为了得到 v_1 与 v_2 之间的关系，对图 3-10b 所示的电路应用 KVL，绕回路一周可得：

$$-v_1 - 2 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1 + 2 \quad (3.3.2)$$

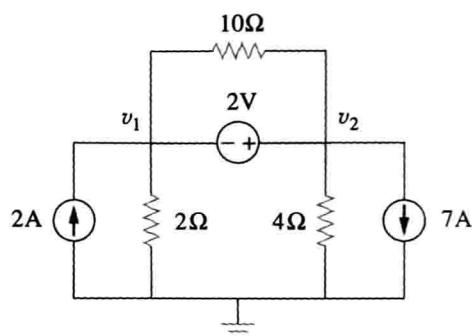


图 3-9 例 3-3 图

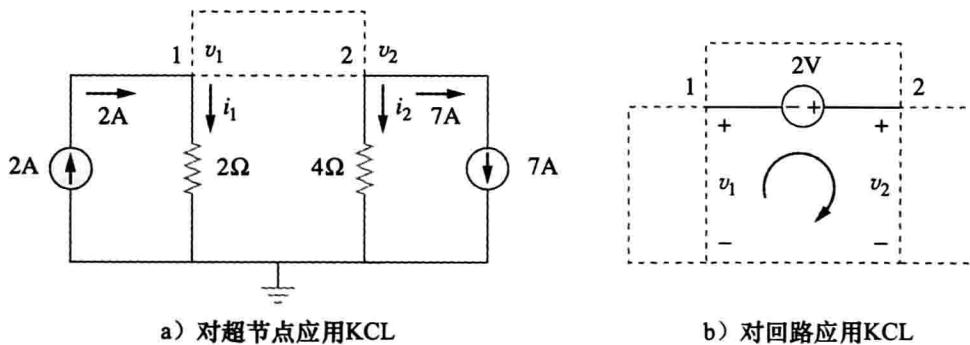


图 3-10 例 3-3 分析过程

由式(3.3.1)与式(3.3.2)可得：

$$v_2 = v_1 + 2 = -20 - 2v_1$$

即

$$3v_1 = -22 \Rightarrow v_1 = -7.333V$$

并且 $v_2 = v_1 + 2 = -5.333(V)$ 。注意， 10Ω 电阻对电路的节点电压没有任何影响，因为它连接在超节点两端。

练习 3-3 求图 3-11 所示电路中的 v 与 i 。

答案： $-400mV$, $2.8A$

例 3-4 求图 3-12 所示电路中的节点电压。

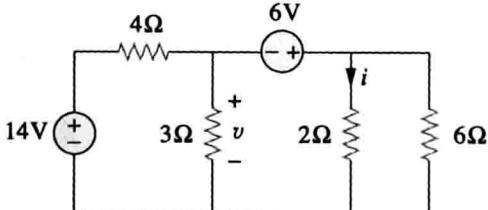


图 3-11 练习 3-3 图

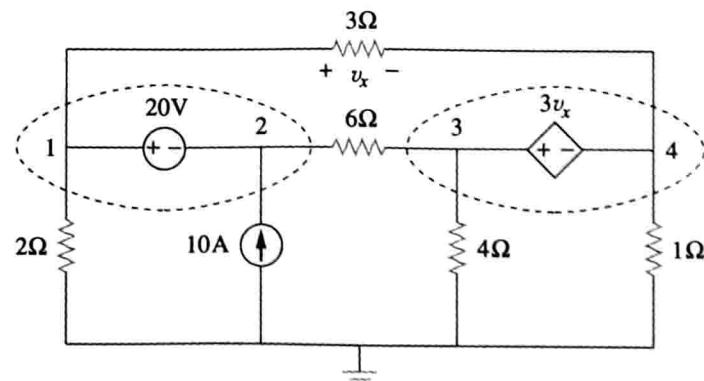


图 3-12 例 3-4 图

解：节点 1 和节点 2 组成一个超节点，节点 3 和节点 4 也组成一个超节点，对这两个

超节点分别应用 KCL，如图 3-13a 所示，对超节点 2 处，有：

$$i_3 + 10 = i_1 + i_2$$

用节点电压表示上式可得：

$$\frac{v_3 - v_2}{6} + 10 = \frac{v_1 - v_4}{3} + \frac{v_1}{2}$$

即

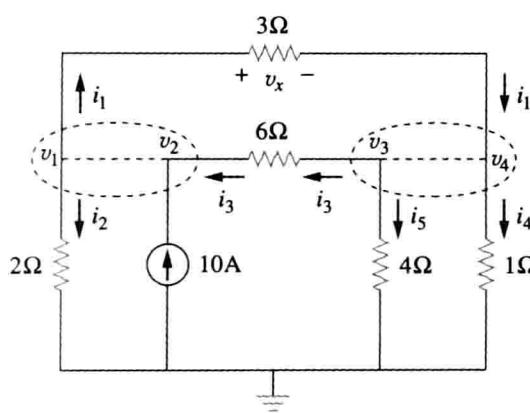
$$5v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4 = 60 \quad (3.4.1)$$

在超节点 3、4 处有：

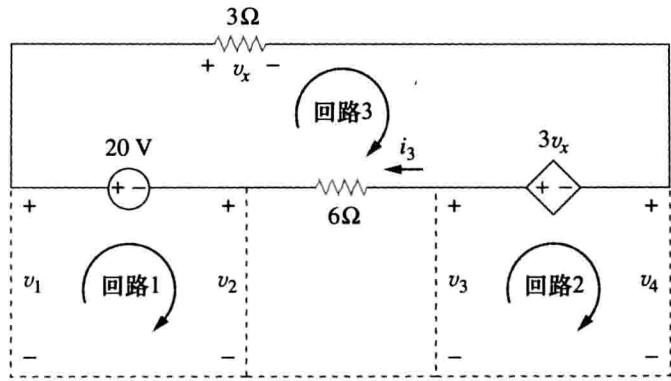
$$i_1 = i_3 + i_4 + i_5 \Rightarrow \frac{v_1 - v_4}{3} = \frac{v_3 - v_2}{6} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_3}{4}$$

即

$$4v_1 + 2v_2 - 5v_3 - 16v_4 = 0 \quad (3.4.2)$$



a) 对两个超节点应用KCL



b) 对回路应用KVL

图 3-13 例 3-4 分析过程

下面对包含电压源的支路应用 KVL，如图 3-13b 所示。对于回路 1，有：

$$-v_1 + 20 + v_2 = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 20 \quad (3.4.3)$$

对于回路 2，有：

$$-v_3 + 3v_x + v_4 = 0$$

但是，由于 $v_x = v_1 - v_4$ ，所以：

$$3v_1 - v_3 - 2v_4 = 0 \quad (3.4.4)$$

对于回路 3，有：

$$v_x - 3v_x + 6i_3 - 20 = 0$$

因为 $6i_3 = v_3 - v_2$ 且 $v_x = v_1 - v_4$ ，所以：

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 2v_4 = 20 \quad (3.4.5)$$

需要求解的四个节点电压为 v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 ，只需从式(3.4.1)~式(3.4.5)的五个方程中选取四个即可联立求解。虽然第五个方程是多余的，但可以用它来检验结果的正确性。可以直接利用 MATLAB 求解式(3.4.1)~式(3.4.4)，也可以消去其中的一个节点电压，求解三个联立方程。由式(3.4.3)可得 $v_2 = v_1 - 20$ ，将该式分别代入式(3.4.1)与式(3.4.2)，得到：

$$6v_1 - v_3 - 2v_4 = 80 \quad (3.4.6)$$

和

$$6v_1 - 5v_3 - 16v_4 = 40 \quad (3.4.7)$$

式(3.4.4)、式(3.4.6)与式(3.4.7)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

利用克莱姆法则，可得：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & -2 \\ 6 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 80 & -1 & -2 \\ 40 & -5 & -16 \end{vmatrix} = -480,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 80 & -2 \\ 6 & 40 & -16 \end{vmatrix} = -3120, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 80 \\ 6 & -5 & 40 \end{vmatrix} = 840$$

因此，各个节点电压为：

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-480}{-18} = 26.67(V),$$

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3120}{-18} = 173.33(V),$$

$$v_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{840}{-18} = -46.67(V)$$

并且 $v_2 = v_1 - 20 = 6.667(V)$ ，至此还未使用式(3.4.5)，可用其来检验结果的正确性。◀

练习 3-4 利用节点分析法求图 3-14 所示电路中的 v_1 、 v_2 与 v_3 。

答案： $v_1 = 7.608V$, $v_2 = -17.39V$, $v_3 = 1.6305V$

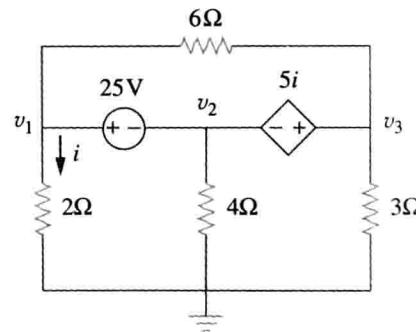


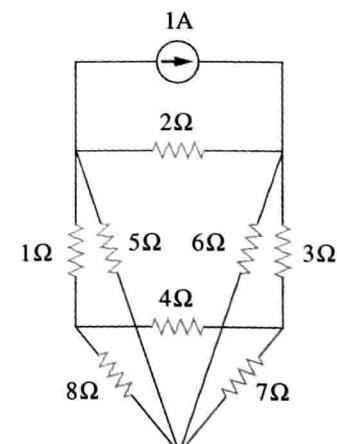
图 3-14 练习 3-4 图

3.4 网孔分析法

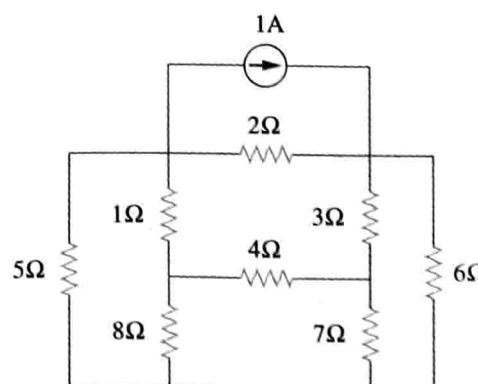
网孔分析法是将网孔电流作为电流变量进行电路分析的另一种重要方法，以网孔电流而不是元件电流作为电流变量，分析起来很方便，而且可以减少联立方程的个数。前面已经介绍过，回路是一条封闭路径，回路上的节点在该回路中只出现一次，而网孔也是回路，并且是不包含任何其他回路的回路。

节点分析法是采用 KCL 求解给定电路的未知电压的方法，而网孔分析法则是采用 KVL 来求解未知电流的方法。网孔分析法不像节点分析法那样通用，因此它仅适用于分析平面(planar)电路。所谓平面电路是指没有交叉支路相互连接的电路，其电路图是平面的，否则称为非平面(nonplanar)电路。有些电路看起来有交叉支路，但是如果整理重画后没有交叉支路，那么仍然是平面电路。例如，图 3-15a 所示电路有两条交叉支路，但它等效于图 3-15b 所示的电路，因此，图 3-15a 所示电路为平面电路。然而，图 3-16 所示电路为非平面电路，因为没有任何方法可以把它重画为没有交叉支路的电路，对这类非平面电路可以采用节点分析法进行分析，但不属于本书的讨论范畴。

提示：网孔分析法也称为回路分析法或网孔电流法。



a) 有交叉支路的平面电路



b) 重画后的电路，没有交叉支路

图 3-15 交叉支路等效

为了更好地理解网孔分析法，首先应该进一步解释网孔的概念。

网孔是指不包含任何其他回路的一条回路。

例如，在图 3-17 中，路径 $abefa$ 和 $bcdeb$ 均为网孔，但路径 $abcdefa$ 就不是网孔。流经网孔的电流称为网孔电流(mesh current)，网孔分析法就是采用 KVL 求出给定电路的网孔电流的方法。

提示：虽然 $abcdefa$ 是回路而不是网孔，但 KVL 仍然适用。从这个意义上讲，回路分析法等同于网孔分析法。

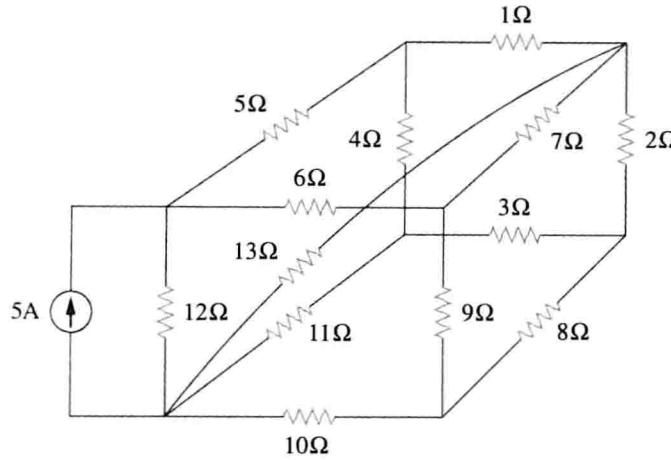


图 3-16 非平面电路

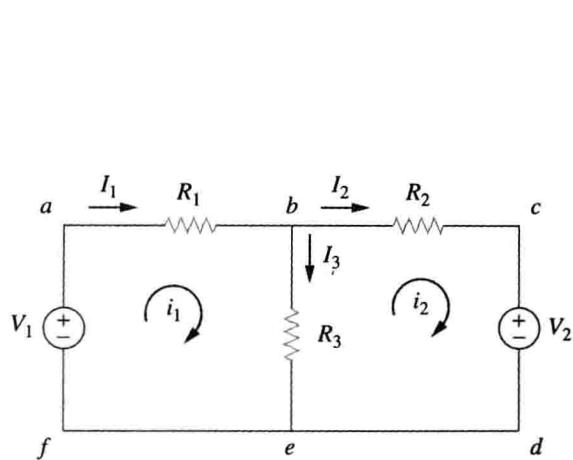


图 3-17 有两个网孔的电路

本节讨论不包含电流源的平面电路网孔分析法，下一节将考虑包括电流源的网孔分析法。对包含 n 个网孔的电路进行网孔分析时，应遵循如下三个步骤。

求解网孔电流的步骤：

1. 为 n 个网孔分别指定网孔电流 i_1, i_2, \dots, i_n 。
2. 对 n 个网孔分别应用 KVL，并根据欧姆定律用网孔电流来表示各个电压。
3. 求解 n 个联立方程，得到网孔电流。

下面以图 3-17 所示电路为例来说明上述步骤，第一步定义网孔 1 和网孔 2 的网孔电流分别为 i_1 和 i_2 。虽然各网孔电流的方向是任意的，但习惯上总是假设各网孔电流按顺时针方向流动。

提示：网孔电流的方向可以是任意的(顺时针方向或逆时针方向)，并不会影响解的有效性。

第二步，对各网孔应用 KVL。对网孔 1 应用 KVL 可得：

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3 (i_1 - i_2) = 0$$

或

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2 = V_1 \quad (3.13)$$

对网孔 2 应用 KVL，得到：

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3 (i_2 - i_1) = 0$$

即

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = -V_2 \quad (3.14)$$

注意，在式(3.13)中， i_1 的系数为第一个网孔中的电阻之和，而 i_2 的系数则是网孔 1 和网孔 2 共有电阻阻值的相反数，这一规律在式(3.14)中也是成立的。因此，上述规律可以作为写出网孔方程的快捷方法。3.6 节将对此作进一步的讨论。

提示：如果一个网孔电流假定为顺时针方向，而另一个网孔电流假定为逆时针方向，这种快捷方法就不适用了。

第三步，求解网孔电流。将式(3.13)与式(3.14)写成矩阵形式，得到：

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

解之即可得到网孔电流 i_1 和 i_2 。可以选用任何一种方法求解上述联立方程，根据式(2.12)，如果电路中包含 n 个节点、 b 条支路和 l 条独立回路(即网孔)，则 $l=b-n+1$ 。因此，采用网孔分析法求解电路参数需要 l 个独立方程的联立求解。

注意，支路电流与网孔电流是不同的，只有在孤立网孔的情况下，两者才是相同的。为区分这两类电流，下面用 i 表示网孔电流，用 I 表示支路电流，而用 I_1 , I_2 , I_3 表示网孔电流的代数和。由图 3-17 易知：

$$I_1 = i_1, \quad I_2 = i_2, \quad I_3 = i_1 - i_2 \quad (3.16)$$

例 3-5 利用网孔分析法求图 3-18 所示电路中的支路电流 I_1 、 I_2 和 I_3 。

解：首先利用 KVL 求出网孔电流。对于网孔 1，有：

$$-15 + 5i_1 + 10(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

即

$$3i_1 - 2i_2 = 1 \quad (3.5.1)$$

对于网孔 2，有：

$$6i_2 + 4i_2 + 10(i_2 - i_1) - 10 = 0$$

即

$$i_1 = 2i_2 - 1 \quad (3.5.2)$$

方法 1 采用代入法，将式(3.5.2)代入式(3.5.1)，得到：

$$6i_2 - 3 - 2i_2 = 1 \Rightarrow i_2 = 1A$$

由式(3.5.2)， $i_1 = 2i_2 - 1 = 2 - 1 = 1(A)$ ，因此：

$$I_1 = i_1 = 1A, \quad I_2 = i_2 = 1A, \quad I_3 = i_1 - i_2 = 0$$

方法 2 利用克莱姆法则，将式(3.5.1)与式(3.5.2)写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

各行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4$$

所以：

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1(A), \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1(A)$$

结果与方法 1 相同。

 **练习 3-5** 计算图 3-19 所示电路中的网孔电流 i_1 与 i_2 。

答案： $i_1 = 2.5A$, $i_2 = 0A$

例 3-6 利用网孔分析法求图 3-20 所示电路中的电流 I_0 。

解：对三个网孔依次应用 KVL。对于网孔 1，有：

$$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$$

即

$$11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \quad (3.6.1)$$

对于网孔 2，有：

$$24i_2 + 4(i_2 - i_3) + 10(i_2 - i_1) = 0$$

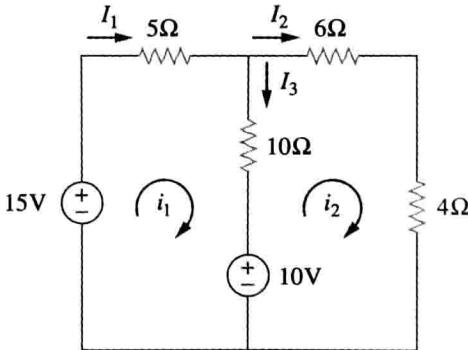


图 3-18 例 3-5 图

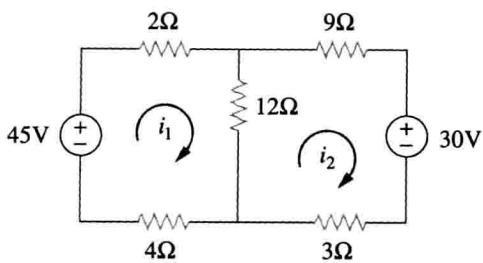


图 3-19

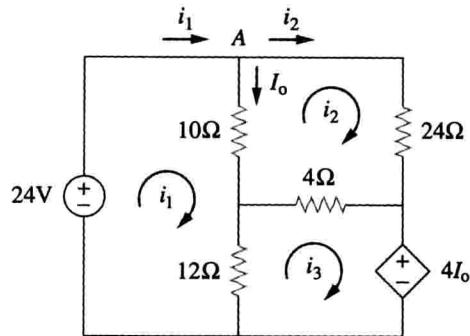


图 3-20

即

$$-5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \quad (3.6.2)$$

对于网孔 3, 有:

$$4I_o + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

但是在节点 A 处有 $I_o = i_1 - i_2$, 代入上式可得:

$$4(i_1 - i_2) + 12(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) = 0$$

即

$$-i_1 - i_2 + 2i_3 = 0 \quad (3.6.3)$$

式(3.6.1)~式(3.6.3)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得到各行列式的值为:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 418 - 30 - 10 - 114 - 22 - 50 = 192$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -5 & -6 \\ 0 & 19 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 456 - 24 = 432$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & -6 \\ -5 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 120 = 144$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 12 \\ -5 & 19 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 60 + 228 = 288$$

利用克莱姆法则计算的各网孔电流为：

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{432}{192} = 2.25(\text{A}), \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{144}{192} = 0.75(\text{A}), \quad i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{288}{192} = 1.5(\text{A})$$

所以， $I_o = i_1 - i_2 = 1.5(\text{A})$ 。

练习 3-6 利用网孔分析法计算图 3-21 所示电路中的 I_o 。

答案：-4A

3.5 含有电流源电路的网孔分析法

将网孔分析法用于包含电流源(独立源或受控源)的电路时，分析过程会比较复杂。但实际上，由于电流源的存在，减少了方程的个数，求解反而会更容易些。考虑如下两种情况：

第1种情况：电流源仅存在于一个网孔中，如图 3-22 所示。设网孔电流 $i_2 = -5\text{A}$ ，并对另一个网孔按照通常方法写出网孔方程为：

$$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0 \Rightarrow i_1 = -2\text{A} \quad (3.17)$$

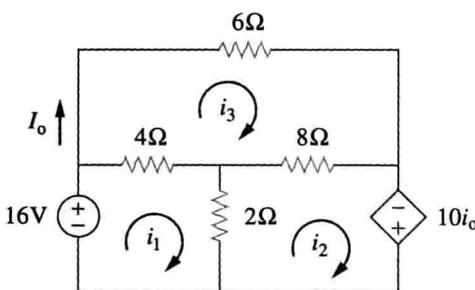


图 3-21 练习 3-6 图

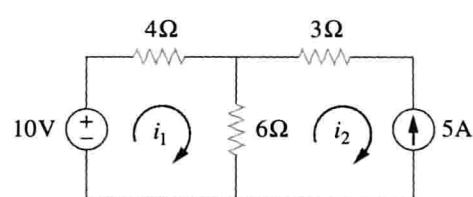
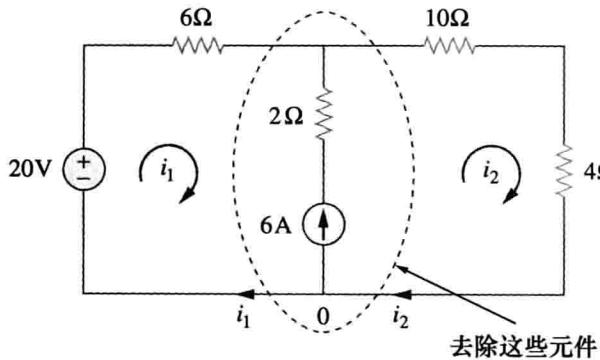


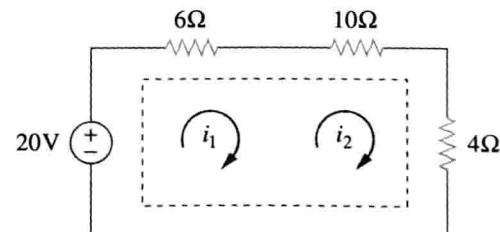
图 3-22 含有电流源的电路

第2种情况：电流源存在于两个网孔之间，如图 3-23a 所示，将电流源和与之相串联的元件去除后，得到一个超网孔(supermesh)，如图 3-23b 所示。

当两个网孔共有一个电流源(独立源或受控源)时，就产生一个超网孔。



a) 包含公共电流源的两个网孔



b) 去除电流源后得到的超网孔

图 3-23 超网孔电路

如图 3-23b 所示，所创建的超网孔由两个网孔的外围元件构成，并应对其进行不同的处理(如果一个电路包含两个或两个以上超网孔，应将其合并为一个更大的超网孔)。为什么要对超网孔进行不同的处理呢？因为网孔分析法应用 KVL 时必须知道各支路的电压，但电流源两端的电压是未知的。然而，超网孔必须与其他网孔一样，仍然要满足 KVL 的应用条件。因此，对图 3-23b 所示的超网孔应用 KVL 有：

$$-20 + 6i_1 + 10i_2 + 4i_2 = 0$$

即

$$6i_1 + 14i_2 = 20 \quad (3.18)$$

再对两个网孔共有支路上的节点应用 KCL，对图 3-23a 中的节点 0 应用 KCL 得到：

$$i_2 = i_1 + 6 \quad (3.19)$$

解方程式(3.18)与式(3.19), 得到:

$$i_1 = -3.2 \text{ A}, \quad i_2 = 2.8 \text{ A} \quad (3.20)$$

超网孔具有如下三个属性:

1. 超网孔中的电流源提供了求解网孔电流所需的约束方程。
2. 超网孔本身没有电流。
3. 对超网孔要同时应用 KVL 和 KCL。

例 3-7 利用网孔分析法求图 3-24 所示电路中的 $i_1 \sim i_4$ 。

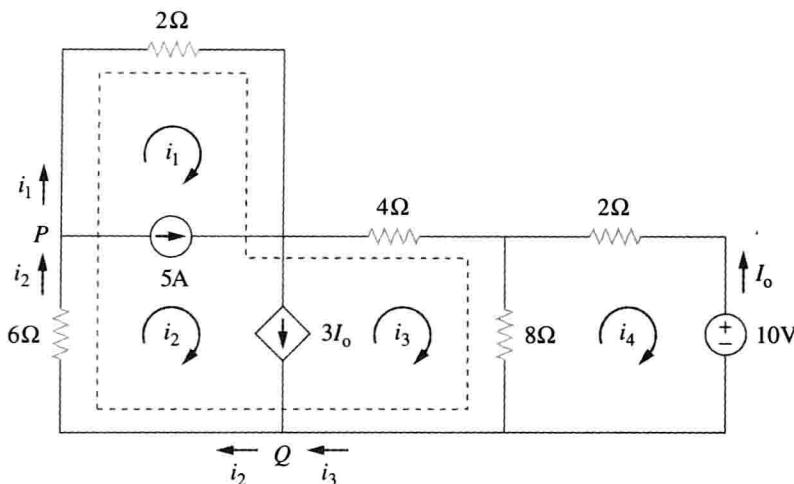


图 3-24 例 3-7 图

解: 网孔 1 与网孔 2 共有一个独立电流源, 所以它们构成一个超网孔。同样, 网孔 2 与网孔 3 共有一个受控电流源, 所以它们又构成另一个超网孔。这两个网孔相交组成一个更大的超网孔, 如图中虚线所示。对这一更大的超网孔应用 KVL, 有:

$$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$$

即

$$i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \quad (3.7.1)$$

对于独立电流源, 在节点 P 处应用 KCL, 有:

$$i_2 = i_1 + 5 \quad (3.7.2)$$

对于受控电流源, 在节点 Q 处应用 KCL, 有:

$$i_2 = i_3 + 3I_o$$

但 $I_o = -i_4$, 所以:

$$i_2 = i_3 - 3i_4$$

对网孔 4 应用 KVL, 有:

$$2i_4 + 8(i_4 - i_3) + 10 = 0$$

即

$$5i_4 - 4i_3 = -5$$

由式(3.7.1)~(3.7.4), 得到:

$$\begin{aligned} i_1 &= -7.5 \text{ A}, & i_2 &= -2.5 \text{ A}, \\ i_3 &= 3.93 \text{ A}, & i_4 &= 2.143 \text{ A} \end{aligned}$$

练习 3-7 利用网孔分析法求图 3-25 所示电路中的

i_1 、 i_2 和 i_3 。

答案: $i_1 = 4.632 \text{ A}$, $i_2 = 631.6 \text{ A}$, $i_3 = 1.4736 \text{ A}$

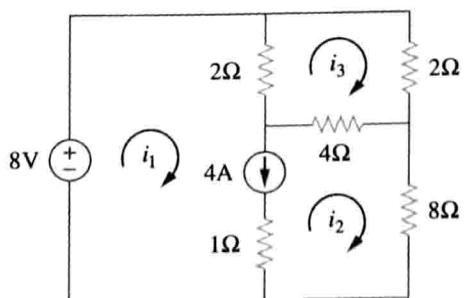


图 3-25 练习 3-7 图

† 3.6 基于观察法的节点分析与网孔分析

本节给出节点分析法与网孔分析法的一般表达式，这是一种基于观察的快捷电路分析方法。

如果电路中的所有电源均为独立电流源，则无需像 3.2 节那样对各节点应用 KCL 得到节点电压方程，可以通过对电路的观察写出方程组。下面以图 3-2 所示的电路为例，为方便起见，将其重新画为图 3-26a。该电路包括两个非参考节点，3.2 节推导出的节点方程为：

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

观察式(3.21)可知，对角线上的各项分别等于与节点 1 和节点 2 相连接的电导之和，而非对角线上各项等于连接于节点之间电导的相反数。式(3.21)等号右边各项为流入节点电流的代数和。

一般而言，如果包含独立电流源的一个电路中具有 N 个非参考节点，则节点电压方程可以用电导表示为如下形式：

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

或简化为：

$$\mathbf{Gv} = \mathbf{i} \quad (3.23)$$

其中， G_{kk} = 与节点 k 相连接的各电导之和；

$G_{kj} = G_{jk}$ = 直接与节点 k 、 j 相连接的电导之和的相反数，其中 $k \neq j$ ；

v_k = 节点 k 处的未知电压；

i_k = 直接与节点 k 相连接的所有独立电流源的代数和，且认为流入该节点的电流为正。

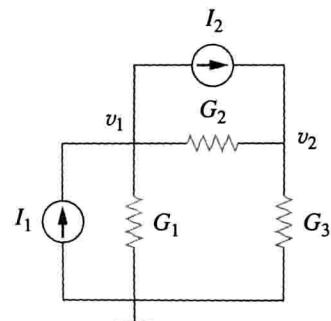
\mathbf{G} 称为电导矩阵 (conductance matrix)， \mathbf{v} 是输出矢量， \mathbf{i} 是输入矢量。求解式(3.22)就可以得到未知的节点电压。应该记住，式(3.22)仅对具有独立电流源和线性电阻的电路有效。

同理，当线性电阻电路中仅包含独立电源时，可以用观察法得到网孔电流方程。为方便起见，将图 3-17 所示的电路重新画于图 3-26b。该电路有两个网孔，3.4 节推导出的网孔方程为：

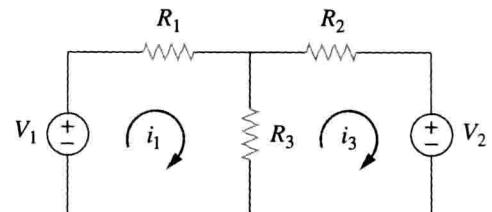
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

由式(3.24)可以看出，各对角线元素为相关网孔中的电阻之和，而非对角线元素等于网孔 1 与网孔 2 共有电阻的相反数，式(3.24)右边各项为相关网孔中顺时针方向上所有独立电压源的代数和。

一般地，如果电路包含 N 个网孔，则其网孔电流方程可以用电阻表示为：



a) 图3-2的电路



b) 图3-17的电路

图 3-26 电路举例

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

或简化为：

$$\mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{v} \quad (3.26)$$

其中， R_{kk} = 网孔 k 中各电阻之和；

$R_{kj} = R_{jk}$ = 网孔 k 与网孔 j 的共有电阻之和的相反数，其中 $k \neq j$ ；

i_k = 网孔 k 中顺时针方向的未知网孔电流；

v_k = 网孔 k 中沿顺时针方向的所有独立电压源的代数和，其中电压升为正值。

\mathbf{R} 称为电阻矩阵 (resistance matrix)， \mathbf{i} 为输出矢量， \mathbf{v} 为输入矢量。求解式(3.25)就可以得到未知的网孔电流。

例 3-8 采用观察法写出图 3-27 所示电路的节点电压矩阵方程。

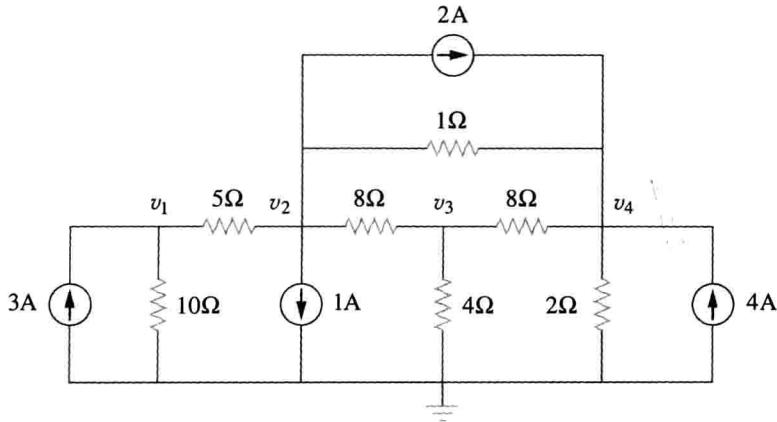


图 3-27 例 3-8 图

解：图 3-27 所示电路包含四个非参考节点，所以需要四个节点方程。即电导矩阵 \mathbf{G} 应为 4×4 矩阵，矩阵 \mathbf{G} 的对角线元素如下(单位为西门子)：

$$G_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0.3, \quad G_{22} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} = 1.325,$$

$$G_{33} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 0.5, \quad G_{44} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.625$$

非对角线元素为：

$$G_{12} = -\frac{1}{5} = -0.2, \quad G_{13} = G_{14} = 0$$

$$G_{21} = -0.2, \quad G_{23} = -\frac{1}{8} = -0.125, \quad G_{24} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$G_{31} = 0, \quad G_{32} = -0.125, \quad G_{34} = -\frac{1}{8} = -0.125$$

$$G_{41} = 0, \quad G_{42} = -1, \quad G_{43} = -0.125$$

输入电流矢量 \mathbf{i} 的各项如下(单位为安培)：

$$i_1 = 3, \quad i_2 = -1 - 2 = -3, \quad i_3 = 0, \quad i_4 = 2 + 4 = 6$$

因此，节点电压方程为：

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1.325 & -0.125 & -1 \\ 0 & -0.125 & 0.5 & -0.125 \\ 0 & -1 & -0.125 & 1.625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

可以利用 MATLAB 求解上式，得到节点电压 v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 。

练习 3-8 利用观察法写出图 3-28 所示电路的节点电压方程。

答案：

$$\begin{bmatrix} 1.25 & -0.2 & -1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

例 3-9 利用观察法写出图 3-29 所示电路的网孔电流方程。

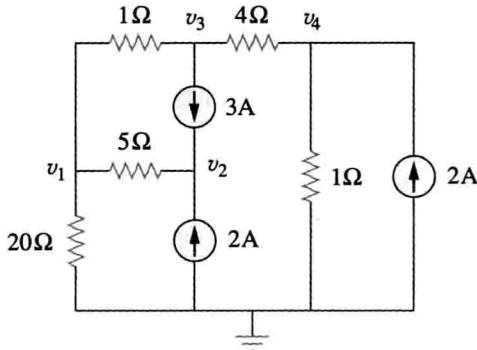


图 3-28 练习 3-8 图

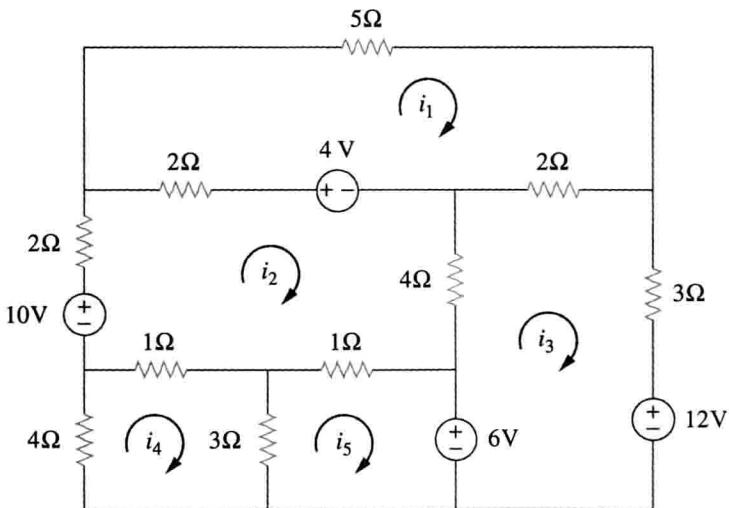


图 3-29 例 3-9 图

解：图中所示电路有 5 个网孔，所以电阻矩阵为 5×5 ，对角线上各元素如下(单位为欧姆)：

$$R_{11} = 5 + 2 + 2 = 9, \quad R_{22} = 2 + 4 + 1 + 1 + 2 = 10, \\ R_{33} = 2 + 3 + 4 = 9, \quad R_{44} = 1 + 3 + 4 = 8, \quad R_{55} = 1 + 3 = 4$$

非对角线元素为：

$$R_{12} = -2, \quad R_{13} = -2, \quad R_{14} = 0 = R_{15}, \\ R_{21} = -2, \quad R_{23} = -4, \quad R_{24} = -1, \quad R_{25} = -1, \\ R_{31} = -2, \quad R_{32} = -4, \quad R_{34} = 0 = R_{35}, \\ R_{41} = 0, \quad R_{42} = -1, \quad R_{43} = 0, \quad R_{45} = -3, \\ R_{51} = 0, \quad R_{52} = -1, \quad R_{53} = 0, \quad R_{54} = -3$$

输入电压矢量 v 的各项如下(单位为伏特)：

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 10 - 4 = 6, \\ v_3 = -12 + 6 = -6, \quad v_4 = 0, \quad v_5 = -6$$

所以，网孔电流方程为：

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

由此可以利用 MATLAB 求出网孔电流 i_1 、 i_2 、 i_3 、 i_4 和 i_5 。

练习 3-9 利用观察法写出图 3-30 所示电路的网孔电流方程。

答案:

$$\begin{bmatrix} 150 & -20 & 0 & -80 & 0 \\ -20 & 65 & -30 & -15 & 0 \\ 0 & -30 & 50 & 0 & -20 \\ -80 & -15 & 0 & 95 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ -12 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

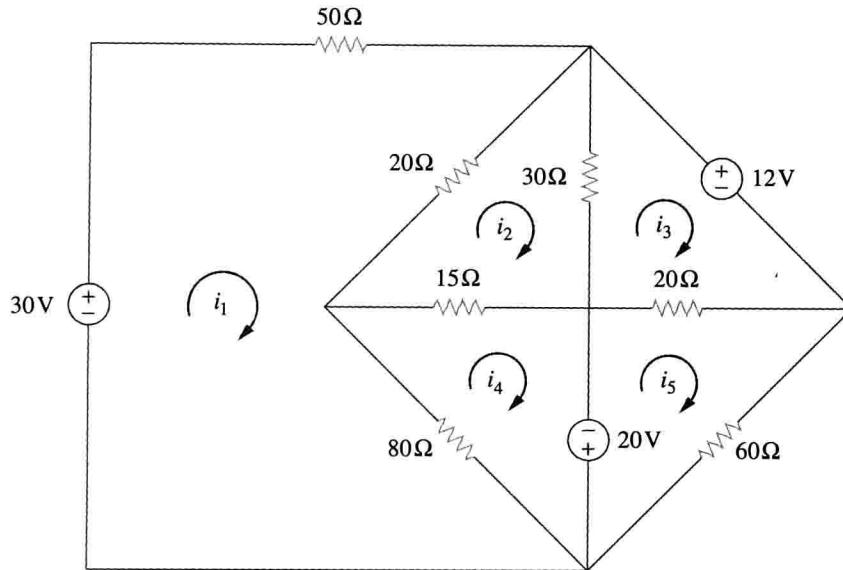


图 3-30 练习 3-9 图

3.7 节点分析法与网孔分析法的比较

节点分析法与网孔分析法为分析复杂电路网络提供了系统的解决方法。但是有人会问：在分析电路网络时，怎样才能知道采用哪一种方法更好、更有效呢？最佳方法的选取受到两个因素的制约。

第一个因素是特定网络本身的特征。包含大量串联元件、电压源或超网孔的电路网络更适合采用网孔分析法，而包含较多并联元件、电流源或超节点的电路网络，则适合应用节点分析法。此外，节点数少于网孔数的电路网络则宜采用节点分析法；而网孔数少于节点数的电路则宜采用网孔分析法。选取哪种分析方法的关键在于采用所选定方法得到的联立方程的个数更少。

第二个因素是所求电路参数信息。如果求节点电压，可能用节点分析法较为有利；如果求支路电流或网孔电流，采用网孔分析法则更好些。

同时掌握这两种分析方法是很有帮助的，其原因有二：首先，如果可能，可以用一种方法来验证另一种方法得到的结果的正确性；其次，由于这两种方法都有其各自的局限性，因此适用于特定问题的分析方法可能只是其中的一种方法。例如，对晶体管电路的分析只能采用网孔电流法（详见 3.9 节），但是由于没有求解放大器端电压的直接方法，所以网孔分析法不适合用于运算放大器电路的分析，这一点将在第 5 章中予以讨论。另外，由于网孔分析法仅适用于平面电路网络，所以，对非平面网络只能采用节点分析法。同时节点分析法更易于通过编程用计算机求解，从而适合解决难以通过手算来分析的复杂电路网络问题。下面就介绍一种基于节点分析法的计算机软件。

3.8 基于 PSpice 的电路分析

PSpice 是在阅读本书过程中要学习的电路分析软件。本节将举例说明如何利用 Windows 操作系统下的 PSpice 软件来分析已经学过的直流电路。

注意，只有在所有电路元件值都已知的条件下，PSpice 才有助于确定支路电压和电流。

例 3-10 利用 PSpice 求图 3-31 所示电路中的节点电压。

解：首先，利用 Schematics 画出给定电路，得到如图 3-32 所示的电路原理图。因为要对电路作直流分析，所以应采用电压源 VDC 和电流源 IDC。同时加入伪元件 VIEWPOINTS 显示所要求的节点电压。将电路画好后保存为文件 exam310.sch，选择 Analysis/Simulate 运行 PSpice，计算机对电路仿真后的结果就会显示在 VIEWPOINT 上，并存入输入文件 exam310.out 中，输出文件内容如下：

节点	电压	节点	电压	节点	电压
(1)	120.0000	(2)	81.2900	(3)	89.0320

即电压 $V_1 = 120V$, $V_2 = 81.29V$, $V_3 = 89.032V$ 。

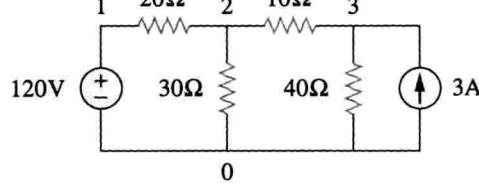


图 3-31 例 3-10 图

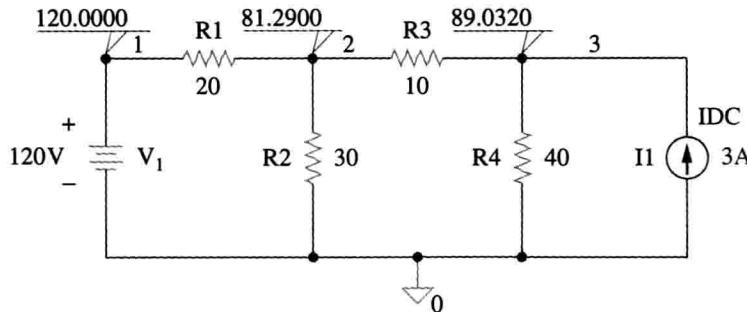


图 3-32 利用 PSpice 画出的图 3-31 所示电路的原理图

练习 3-10 利用 PSpice 求图 3-33 所示电路的节点电压。

答案： $V_1 = -10V$, $V_2 = 14.286V$, $V_3 = 50V$

例 3-11 试确定图 3-34 所示电路中的电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。

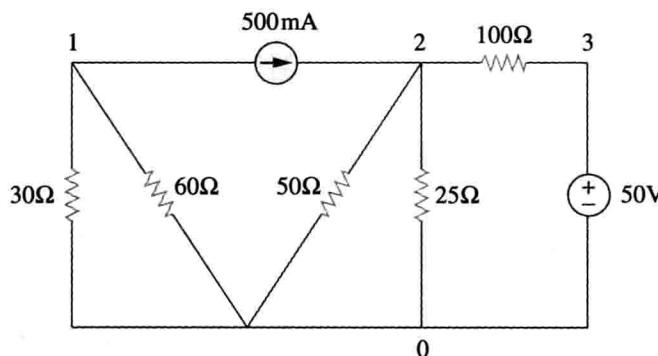


图 3-33 练习 3-10 图

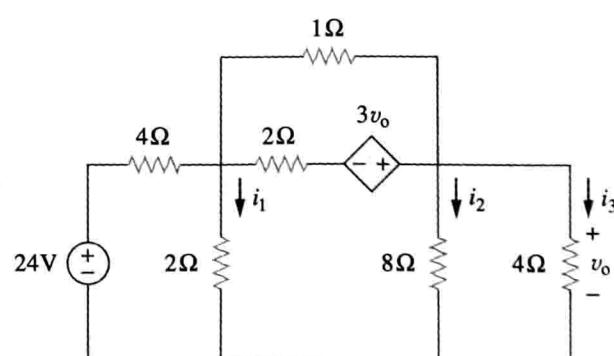


图 3-34 例 3-11 图

解：利用 Schematics 画出的电路原理图如图 3-35 所示（图 3-35 所示原理图中包含输出结果，表明该图是仿真结束后显示在屏幕上的原理图）。图 3-35 中的电压控制电压源 E1 的输入为 4Ω 电阻两端的电压，其增益设定为 3。为显示所求的电流，在相应的支路中插入伪元件 IPROBES。将该电路原理图保存在文件 exam311.sch 中并选择 Analysis/Simulate 运行程序，仿真结果显示于 IPROBES 上并保存在输出文件 exam311.out 中，由输出文件或 IPROBES，可以得到 $i_1 = i_2 = 1.333A$, $i_3 = 2.667A$ 。

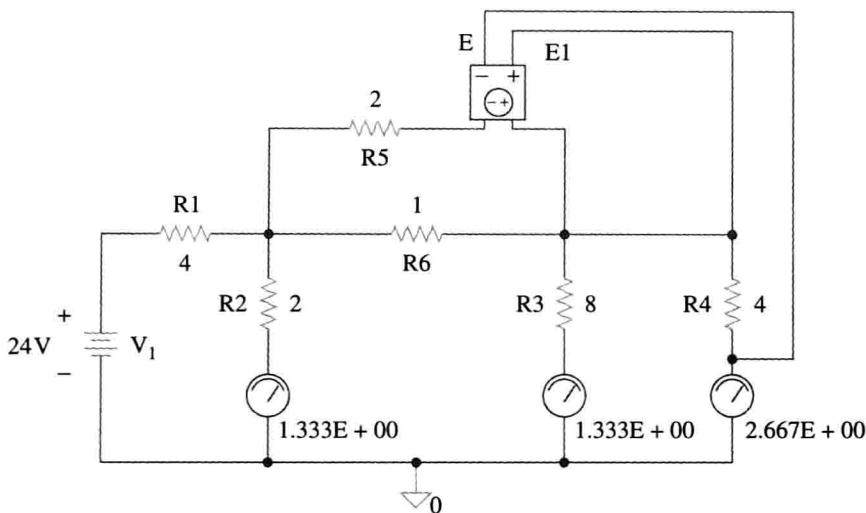


图 3-35 图 3-34 所示电路的仿真原理图

练习 3-11 用 PSpice 确定图 3-36 所示电路中的电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。

答案: $i_1 = -428.6\text{mA}$, $i_2 = 2.286\text{A}$, $i_3 = 2\text{A}$

†3.9 应用实例：直流晶体管电路

许多人都使用过电子产品，并且具有一定的计算机操作经验。这些电子产品以及计算机中集成电路的基本元件是大家熟知的有源三端器件——晶体管(transistor)，工程技术人员必须掌握晶体管的相关知识和使用方法才能开始进行电路设计。

图 3-37 给出了几种不同的商用晶体管。晶体管的基本类型有两种：双极型晶体管(bipolar junction transistor, BJT)和场效应晶体管(field-effect transistor, FET)。本节仅讨论第一种类型的晶体管，即至今仍经常使用的双极型晶体管。对 BJT 有足够的了解之后，便能够应用本章介绍的方法分析直流晶体管电路。

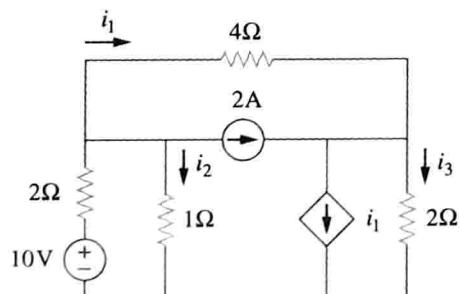


图 3-36 练习 3-11 图

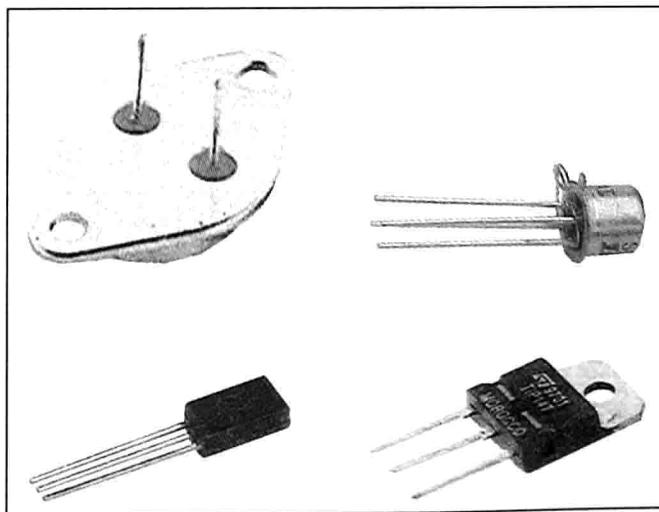


图 3-37 几种不同类型的晶体管(图片由 Tech America 提供)

历史珍闻

威廉·肖克莱(William Shockley, 1910—1989)、约翰·巴丁(John Bardeen, 1908—1991)和沃尔特·布拉顿(Walter Brattain, 1902—1987)共同发明了晶体管。

在从“工业时代”向“工程师时代”过渡的过程中，任何事物产生的影响都不及晶体管的

影响。肖克莱博士、巴丁博士和布拉顿博士也不会想到他们会对历史产生如此不可思议的影响。在贝尔实验室工作期间，他们成功地演示了巴丁博士与布拉顿博士于1947年发明的点接触晶体管，以及肖克莱博士于1948年设计的结型晶体管，并于1951年顺利投产。

有趣的是，至今应用最广泛的场效应晶体管的思想是由美国的德国移民J. E. Lilienfeld于1925~1928年提出的，他还为此申请了专利。然而不幸的是，实现这种器件的愿望直到1954年肖克莱场效应晶体管成为现实后才如愿以偿。试想如果提前30年就制造出晶体管，当今世界又是一番何等景象。

为了表彰发明晶体管这一杰出贡献，肖克莱博士、巴丁博士和布拉顿博士于1956年被授予诺贝尔物理学奖。其中，巴丁博士是唯一一位两次获得诺贝尔物理学奖的科学家，在伊利诺伊大学(University of Illinois)工作期间，他因为在超导研究方面取得的重大成就而第二次获奖。



美国朗讯科技公司/
贝尔实验室供图

双极型晶体管分为两种类型：npn型与pnp型，电路符号如图3-38所示，每一种器件都有三个极，分别命名为发射极(E)、基极(B)和集电极(C)。对于npn型晶体管，图3-39给出了其电流方向和电压极性。对图3-39a应用KCL，得到：

$$I_E = I_B + I_C \quad (3.27)$$

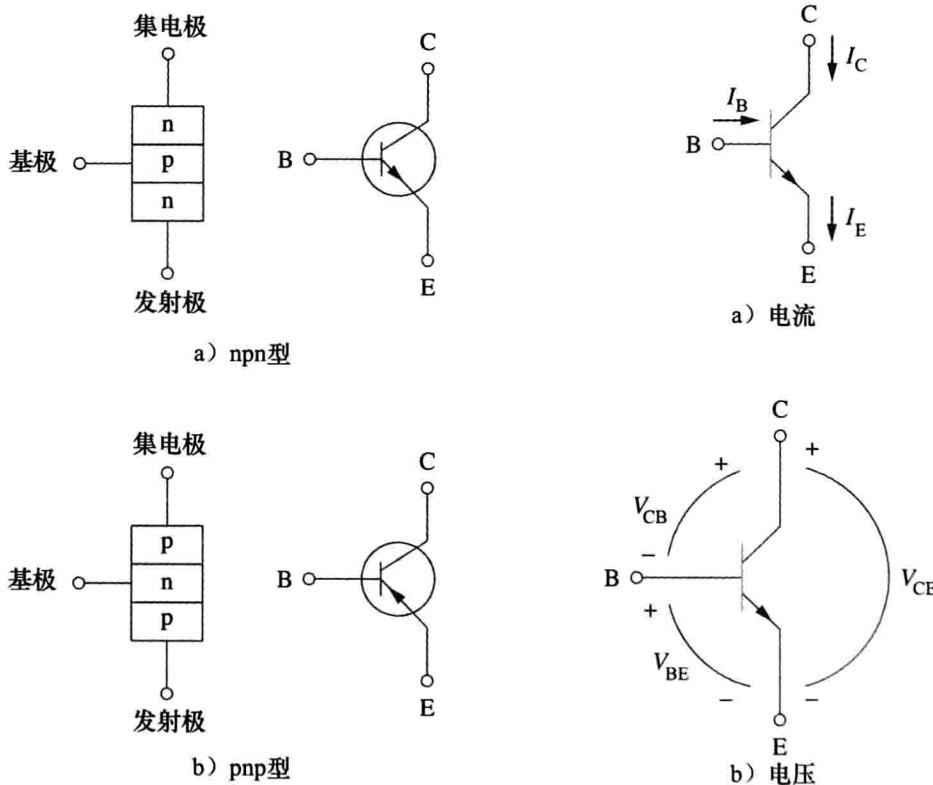


图3-38 两类双极型晶体管及其电路符号

图3-39 npn型晶体管的电量

其中， I_E 、 I_C 和 I_B 分别为晶体管的发射极电流、集电极电流和基极电流。类似地，对图3-39b应用KVL，可得：

$$V_{CE} + V_{EB} + V_{BC} = 0 \quad (3.28)$$

其中， V_{CE} 、 V_{EB} 和 V_{BC} 分别为晶体管的集电极-发射极电压，发射极-基极电压和基极-集电极电压。双极型晶体管有三种工作模式：放大、截止和饱和。当晶体管处于放大工作模式

时, V_{EB} 的典型值约为 0.7V, 并且:

$$I_C = \alpha I_E \quad (3.29)$$

其中, α 称为共基极电流增益(common-base current gain), 在式(3.29)中, α 表示由发射极注入的电子被集电极收集的比例。此外还有:

$$I_C = \beta I_B \quad (3.30)$$

其中, β 称为共发射极电流增益(common-emitter current gain)。 α 与 β 是给定晶体管的特性参数, 通常为常数, α 的典型取值范围在 0.98~0.999 之间, β 的典型取值范围在 50~1000 之间。由式(3.27)~(3.30)可以证明:

$$I_E = (1 + \beta) I_B \quad (3.31)$$

且

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (3.32)$$

上述等式表明, 当双极型晶体管工作在放大模式时, 可以建模为一个受控源-电流控制电流源。因此, 在进行电路分析时, 可以用图 3-40b 所示的直流等效模型来代替图 3-40a 所示的 npn 型晶体管。由于式(3.32)中的 β 通常较大, 所以用一个很小的基极电流就可以控制输出电路中很大的电流, 即双极型晶体管可以用作放大器, 既提供电流增益又提供电压增益, 这类放大器可为扬声器和控制电机等换能器提供足够大的功率。

提示: 实际上, 对晶体管电路的研究推动着对受控源的研究。

在下面的例题中需要注意, 由于晶体管各极之间存在电位差, 所以不能直接利用节点分析法来分析晶体管电路, 只有用晶体管的等效模型取代晶体管之后, 才能利用节点分析法求解电路参数。

例 3-12 求图 3-41 所示晶体管电路中的 I_B 、 I_C 和 v_o 。假设晶体管工作在放大模式, 并且 $\beta=50$ 。

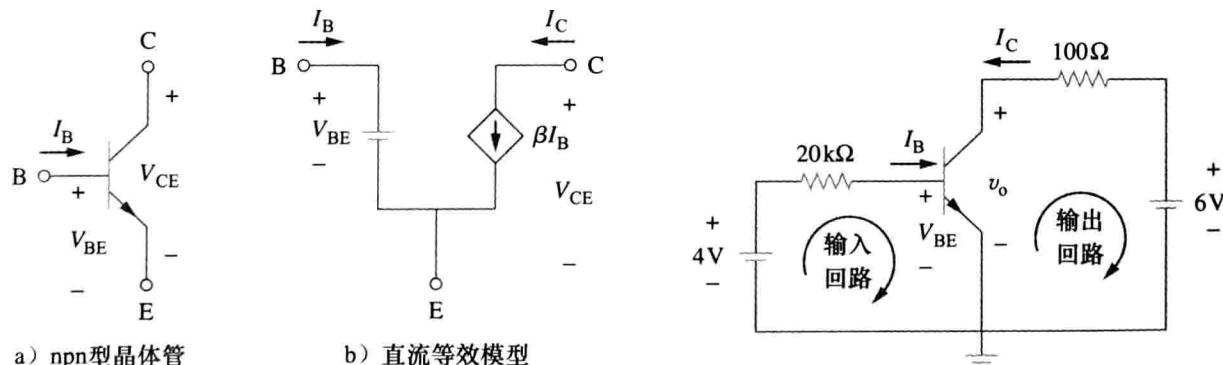


图 3-40 晶体管及等效模型

图 3-41 例 3-12 图

解: 对输入回路应用 KVL, 得到:

$$-4 + I_B(20 \times 10^3) + V_{BE} = 0$$

由于处于放大模式, $V_{BE}=0.7V$, 所以:

$$I_B = \frac{4 - 0.7}{20 \times 10^3} = 165(\mu\text{A})$$

而

$$I_C = \beta I_B = 50 \times 165\mu\text{A} = 8.25\text{mA}$$

对输出回路应用 KVL, 得到:

$$-v_o - 100I_C + 6 = 0$$

或

$$v_o = 6 - 100I_C = 6 - 0.825 = 5.175\text{V}$$

注意，本题中 $v_o = V_{CE}$ 。

练习 3-12 在图 3-42 所示的晶体管电路中，设 $\beta=100$, $V_{BE}=0.7\text{V}$ 、求 v_o 和 V_{CE} 。

答案：2.876V, 1.984V

例 3-13 在如图 3-43 所示的双极型晶体管电路中，设 $\beta=150$ 且 $V_{BE}=0.7\text{V}$ ，求 v_o 。

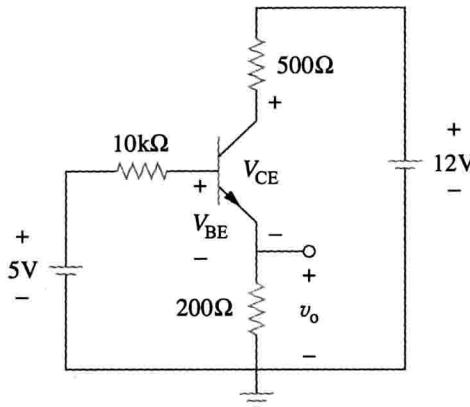


图 3-42 练习 3-12 图

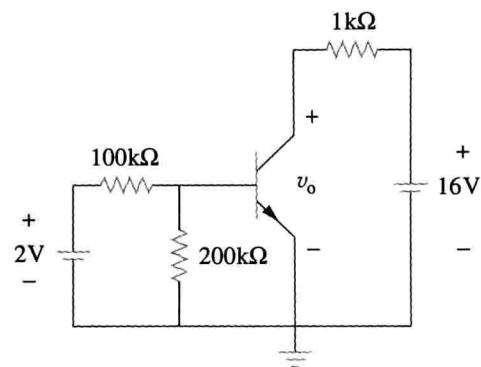


图 3-43 例 3-13 图

解：1. 明确问题。本例所要分析的电路已经很清楚，所要解决的问题也已经很明确，不存在其他问题。

2. 列出已知条件。本例要求解图 3-43 所示电路的输出电压，该电路包含一个理想晶体管，其 $\beta=150$ 且 $V_{BE}=0.7\text{V}$ 。

3. 确定备选方案。可以采用网孔分析法求解 v_o ，也可以将晶体管用其等效电路取代并采用节点分析法求解。下面就采用这两种方法进行分析，并相互验证结果的正确性，第三种验证方法是利用 PSpice 对等效电路进行模拟分析。

4. 尝试求解。

方法 1 对于图 3-44a 中的第一个回路有：

$$-2 + 100kI_1 + 200k(I_1 - I_2) = 0$$

即

$$3I_1 - 2I_2 = 2 \times 10^{-5} \quad (3.13.1)$$

对于回路 2 有：

$$200k(I_2 - I_1) + V_{BE} = 0$$

即

$$-2I_1 + 2I_2 = -0.7 \times 10^{-5} \quad (3.13.2)$$

这样就得到包含两个未知变量的方程，可用于求解 I_1 与 I_2 。将式(3.13.1)与式(3.13.2)相加得到：

$$I_1 = 1.3 \times 10^{-5} \text{A}$$

和

$$I_2 = (-0.7 + 2.6)10^{-5}/2 = 9.5(\mu\text{A})$$

由于 $I_3 = -150I_2 = -1.425(\text{mA})$ ，所以利用回路 3 可以求出 v_o ：

$$-v_o + 1kI_3 + 16 = 0$$

或

$$v_o = -1.425 + 16 = \mathbf{14.575(V)}$$

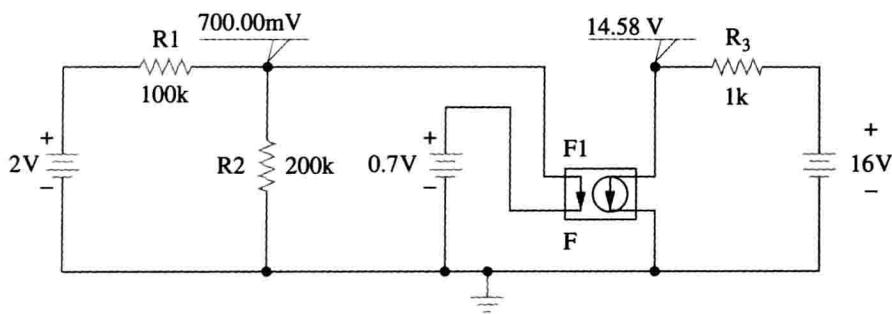
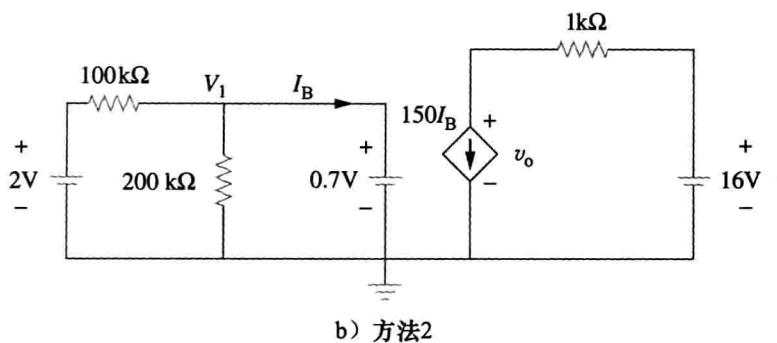
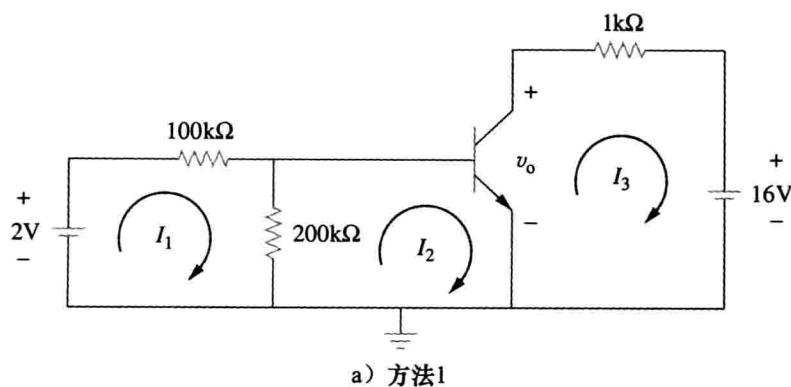


图 3-44 求解例 3-13 的方法

方法 2 将晶体管用其等效电路替代后得到如图 3-44b 所示的电路。可以利用节点分析法求解 v_o :

在节点处: $V_1 = 0.7V$

$$(0.7 - 2)/100k + 0.7/200k + I_B = 0$$

即

$$I_B = 9.5\mu A$$

在节点 2 处:

$$150I_B + (v_o - 16)/1k = 0$$

即

$$v_o = 16 - 150 \times 10^3 \times 9.5 \times 10^{-6} = 14.575(V)$$

5. 评价结果。对答案进行验证, 可以利用 PSpice 做进一步的检验(方法 3), 得到如图 3-44c 所示的结果。

6. 是否满意? 显然, 已经得到可信度很高的满意结果, 可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习 3-13 在图 3-45 所示的晶体管电路中, $\beta=80$, $V_{BE}=0.7V$, 求 v_o 和 I_o 。

答案: 9V, $900\mu A$

3.10 本章小结

- 节点分析法是基尔霍夫电流定律在非参考节点上的应用(该分析方法既适用于平面电路又适用于非平面电路), 分析结果用节点电压表示。通过求解联立方程组就可以得到各节点的电压。
- 超节点由与电压源(独立源或受控源)连接的两个非参考节点组成。
- 网孔分析法是基尔霍夫电压定律在平面电路中的应用, 分析结果用网孔电流表示。通过求解联立方程组就可以得到各网孔电流。
- 超网孔由具有公共电流源(独立源或受控源)的两个网孔所组成。
- 当电路中节点方程数少于网孔方程数时, 通常采用节点分析法, 当电路中网孔方程数少于节点方程数时, 通常采用网孔分析法。
- 可以利用 PSpice 软件对电路进行模拟分析。
- 可以利用本章所介绍的各种方法进行直流晶体管电路的分析。

复习题

1 对图 3-46 所示电路的节点 1 应用 KCL 可得到:

- $2 + \frac{12 - v_1}{3} = \frac{v_1}{6} + \frac{v_1 - v_2}{4}$
- $2 + \frac{v_1 - 12}{3} = \frac{v_1}{6} + \frac{v_2 - v_1}{4}$
- $2 + \frac{12 - v_1}{3} = \frac{0 - v_1}{6} + \frac{v_1 - v_2}{4}$
- $2 + \frac{v_1 - 12}{3} = \frac{0 - v_1}{6} + \frac{v_2 - v_1}{4}$

2 对图 3-46 所示电路的节点 2 应用 KCL 可得到:

- $\frac{v_2 - v_1}{4} + \frac{v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$
- $\frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$
- $\frac{v_1 - v_2}{4} + \frac{12 - v_2}{8} = \frac{v_2}{6}$
- $\frac{v_2 - v_1}{4} + \frac{v_2 - 12}{8} = \frac{v_2}{6}$

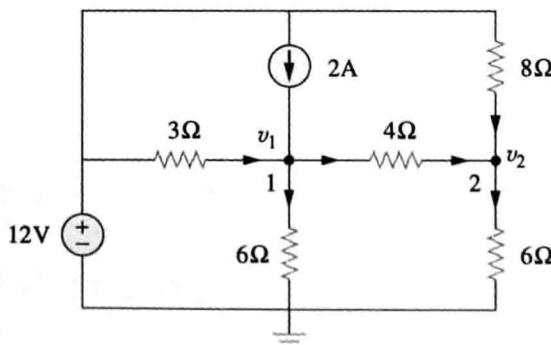


图 3-46 复习题 1、2 图

3 在图 3-47 所示电路中, v_1 与 v_2 之间的关系为:

- $v_1 = 6i + 8 + v_2$
- $v_1 = 6i - 8 + v_2$
- $v_1 = -6i + 8 + v_2$
- $v_1 = -6i - 8 + v_2$

4 在图 3-47 所示电路中, 电压 v_2 为:

- 8V
- 1.6V
- 1.6V
- 8V

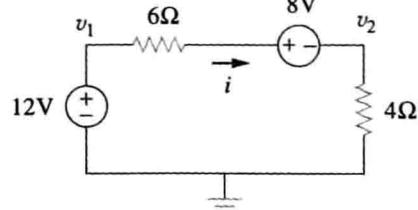


图 3-47 复习题 3、4 图

5 在图 3-48 所示电路中, 电流 i 为:

- 2.667A
- 0.667A
- 0.667A
- 2.667A

6 在图 3-48 所示电路的回路电流方程为:

- $-10 + 4i + 6 + 2i = 0$
- $10 + 4i + 6 + 2i = 0$

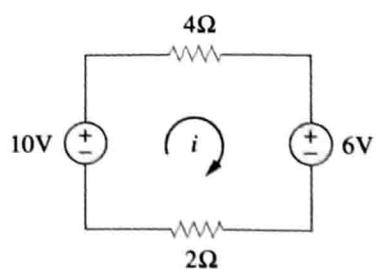


图 3-48 复习题 5、6 图

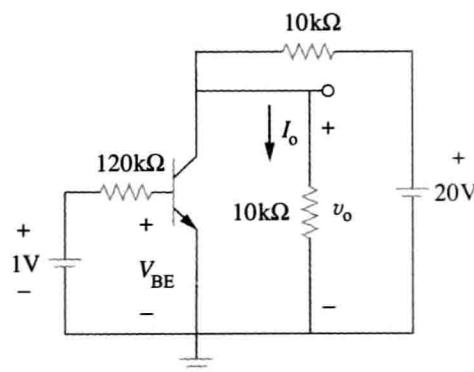


图 3-45 练习 3-13 图

- (c) $10 + 4i - 6 + 2i = 0$
 (d) $-10 + 4i - 6 + 2i = 0$

7 在图 3-49 所示电路中, 电流 i_1 为:

- (a) 4A (b) 3A (c) 2A (d) 1A

8 在图 3-49 所示电路中, 电流源两端的电压 v 为:

- (a) 20V (b) 15V (c) 10V (d) 5V

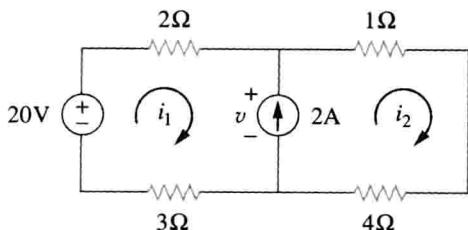


图 3-49 复习题 7、8 图

习题

3.2 节与 3.3 节

1 利用图 3-50 设计一个问题, 帮助其他同学更好地了解节点分析法。

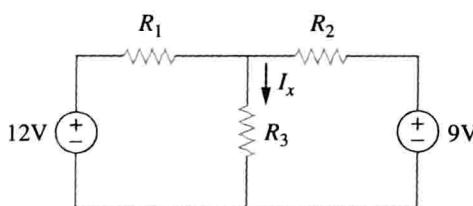


图 3-50 习题 1、39 图

2 计算图 3-51 所示电路中的 v_1 与 v_2 。

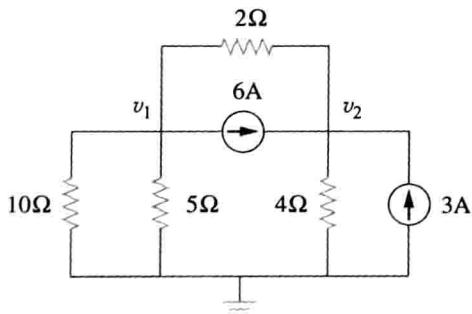


图 3-51 习题 2 图

3 计算图 3-52 所示电路中的电流 $I_1 \sim I_4$ 以及电压 v_o 。

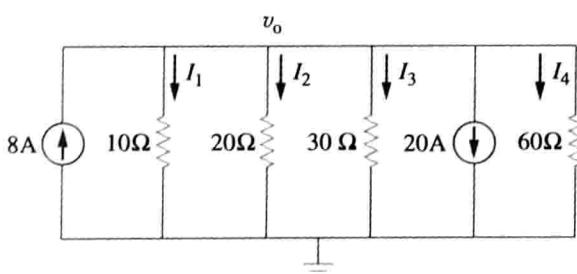


图 3-52 习题 3 图

9 PSpice 软件中, 电流控制电压源的名称为:

- (a) EX (b) FX
 (c) HX (d) GX

10 以下关于伪元件 IPROBE 的叙述中哪些是不正确的?

- (a) 它必须是串联连接
 (b) 它绘制出支路电流的波形
 (c) 它显示其所连接支路的电流
 (d) 并联连接后, 可显示电压
 (e) 它只用于直流分析
 (f) 它并不应用于某个具体电路元件

答案: 1(a); 2(c); 3(a); 4(c); 5(c); 6(a);
 7(d); 8(b); 9(c); 10(b, d)

4 计算图 3-53 所示电路中的电流 $i_1 \sim i_4$ 。

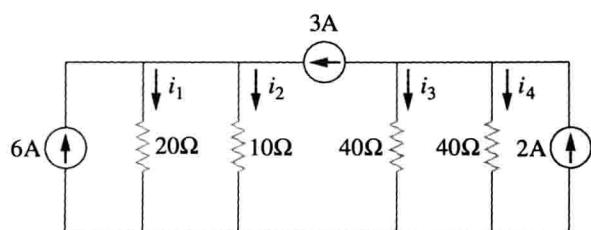


图 3-53 习题 4 图

5 计算图 3-54 所示电路中的 v_o 。

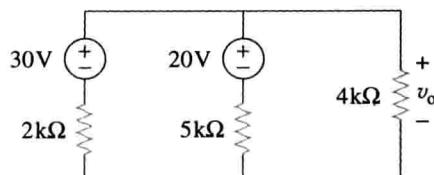


图 3-54 习题 5 图

6 利用节点分析法计算图 3-55 所示电路中的 V_1 。

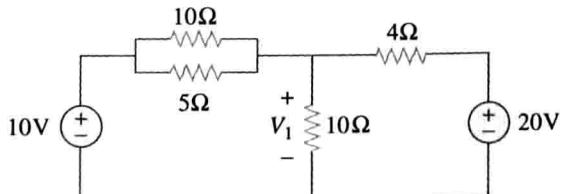


图 3-55 习题 6 图

7 利用节点分析法计算图 3-56 所示电路中的 V_x 。

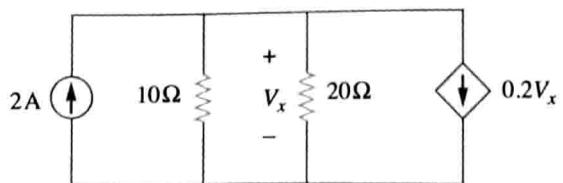


图 3-56 习题 7 图

8 利用节点分析法计算图 3-57 所示电路中的 v_o 。

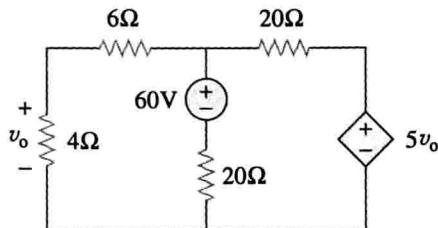


图 3-57 习题 8 图

9 利用节点分析法确定图 3-58 所示电路中的 I_b 。

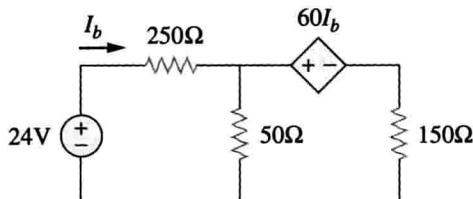


图 3-58 习题 9 图

10 计算图 3-59 所示电路中的 I_o 。

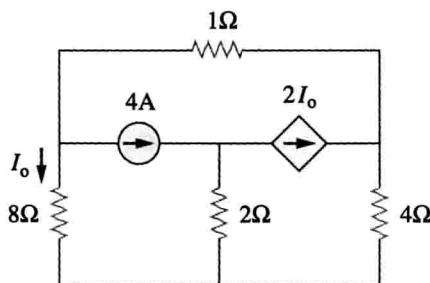


图 3-59 习题 10 图

11 计算图 3-60 所示电路中的 V_o 以及所有电阻消耗的功率。

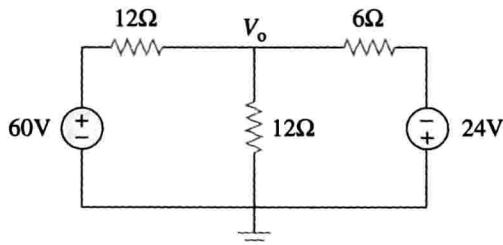


图 3-60 习题 11 图

12 利用节点分析法确定图 3-61 所示电路中的 V_o 。

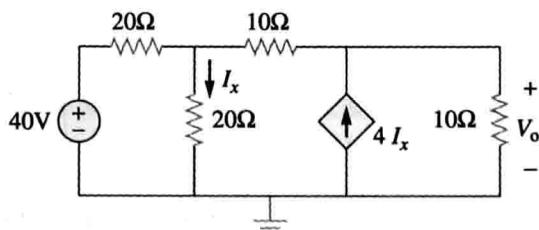


图 3-61 习题 12 图

13 利用节点分析法计算图 3-62 所示电路中的 v_1 与 v_2 。

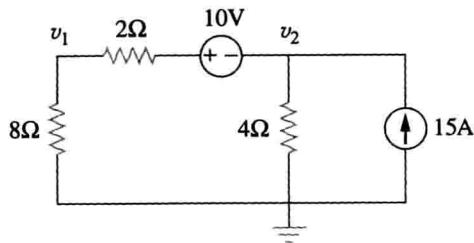


图 3-62 习题 13 图

14 利用节点分析法计算图 3-63 所示电路中的 v_o 。

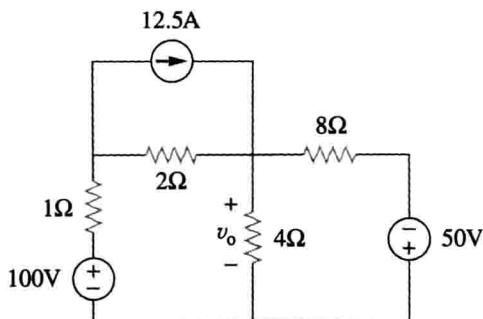


图 3-63 习题 14 图

15 利用节点分析法计算图 3-64 所示电路中的 i_o ，并计算各电阻消耗的功率。

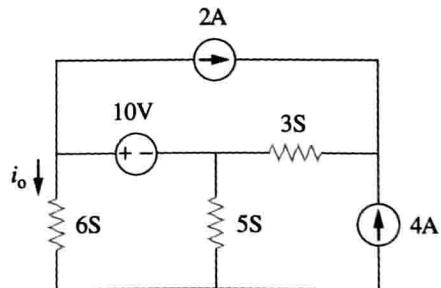


图 3-64 习题 15 图

16 利用节点分析法确定图 3-65 所示电路中的 $v_1 \sim v_3$ 。

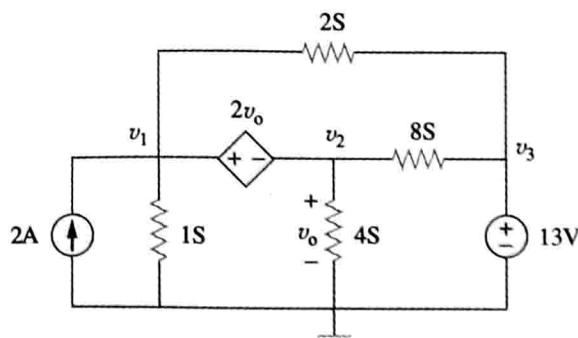


图 3-65 习题 16 图

17 利用节点分析法计算图 3-66 所示电路中的 i_o 。

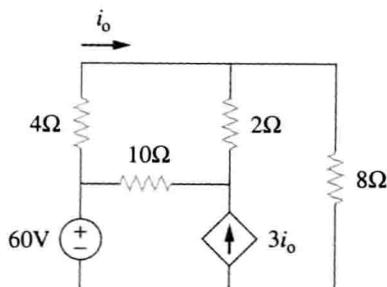


图 3-66 习题 17 图

18 利用节点分析法确定图 3-67 电路中的各节点电压。

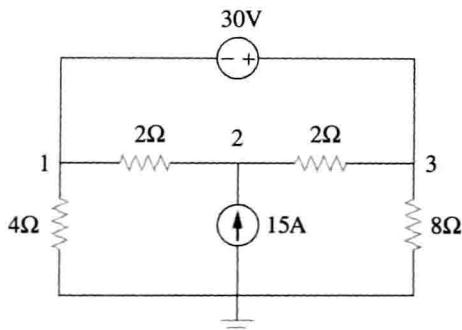


图 3-67 习题 18 图

19 利用节点分析法计算图 3-68 所示电路中的 v_1 、 v_2 和 v_3 。
ML

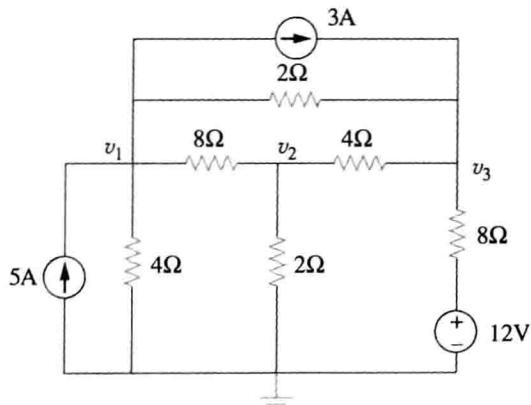


图 3-68 习题 19 图

20 利用节点分析法计算图 3-69 所示电路中的 v_1 、 v_2 和 v_3 。

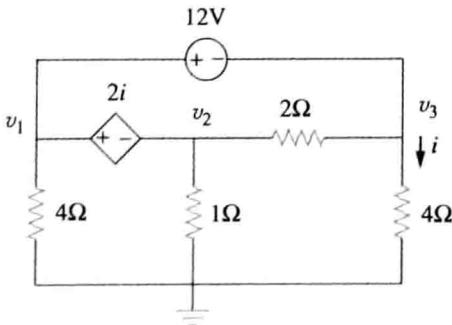


图 3-69 习题 20 图

21 利用节点分析法计算图 3-70 所示电路中的 v_1 和 v_2 。

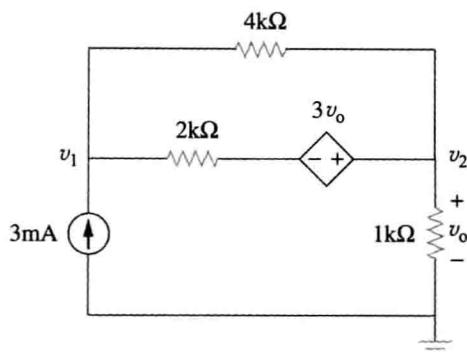


图 3-70 习题 21 图

22 确定图 3-71 所示电路中的 v_1 与 v_2 。

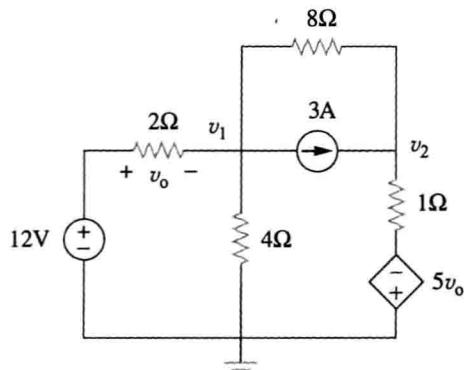


图 3-71 习题 22 图

23 利用节点分析法计算图 3-72 所示电路中的 V_o 。

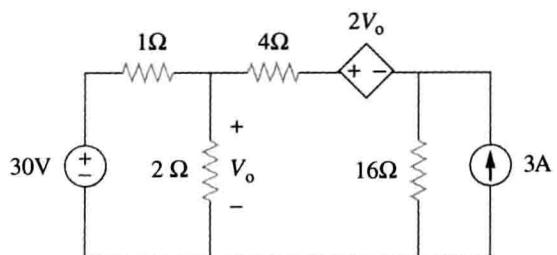


图 3-72 习题 23 图

24 利用节点分析法和 MATLAB 计算图 3-73 所示电路中的 V_o 。
ML

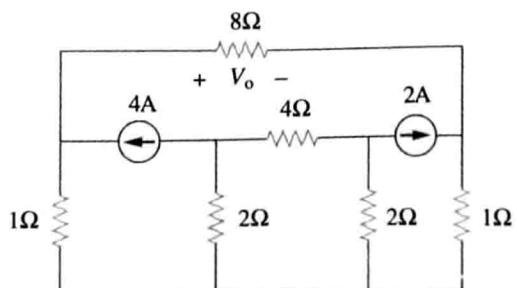


图 3-73 习题 24 图

- 25 利用节点分析法和 MATLAB 确定图 3-74 所示电路中的各个节点电压。 **ML**

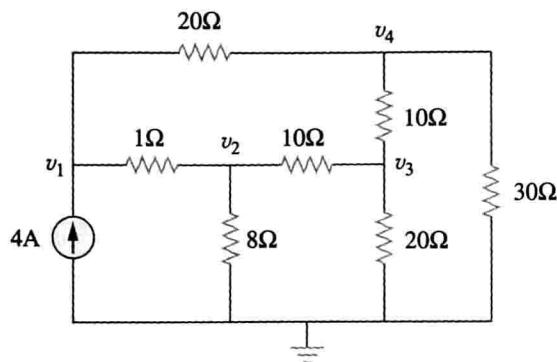


图 3-74 习题 25 图

- 26 计算图 3-75 所示电路中的节点电压 v_1 、 v_2 和 v_3 。 **ML**

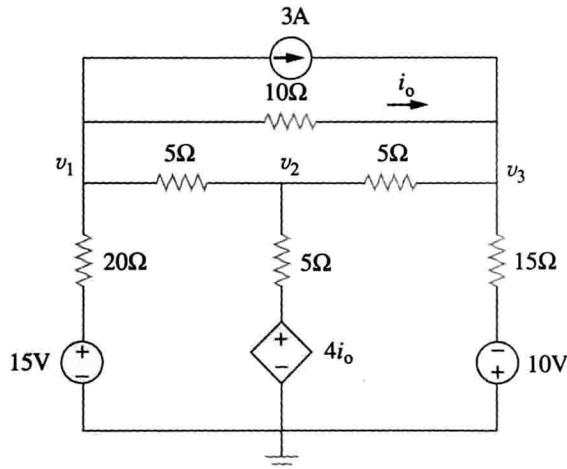


图 3-75 习题 26 图

- * 27 利用节点分析法确定图 3-76 所示电路中的电压 v_1 、 v_2 和 v_3 。 **ML**

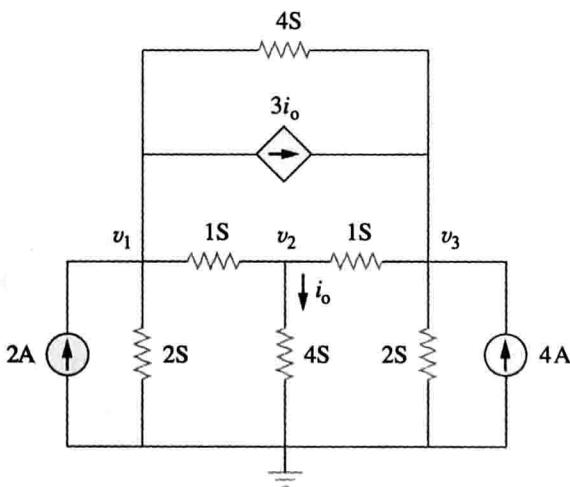


图 3-76 习题 27 图

- * 28 利用 MATLAB 计算图 3-77 所示电路中节点 a 、 b 、 c 和 d 的电压。 **ML**

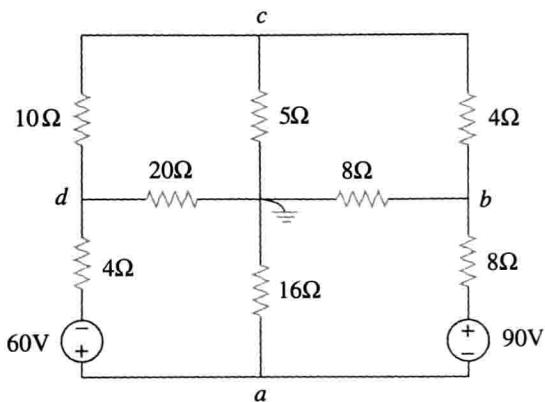


图 3-77 习题 28 图

- 29 利用 MATLAB 计算图 3-78 所示电路中的节点电压。 **ML**

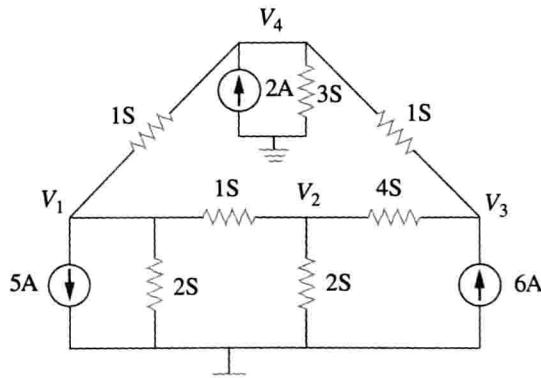


图 3-78 习题 29 图

- 30 利用节点分析法计算图 3-79 所示电路中的 v_o 和 i_o 。

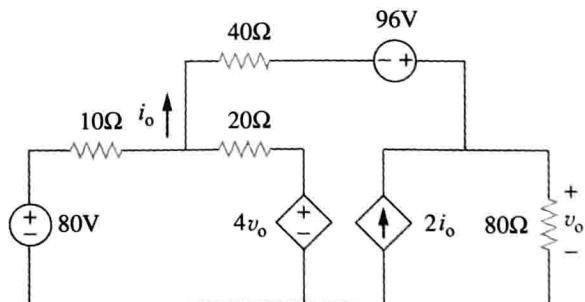


图 3-79 习题 30 图

- 31 求图 3-80 所示电路的节点电压。 **ML**

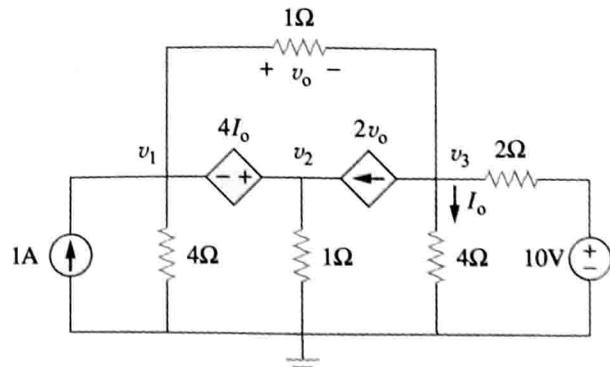


图 3-80 习题 31 图

32 确定图 3-81 所示电路中的节点电压 v_1 、 v_2 和 v_3 。

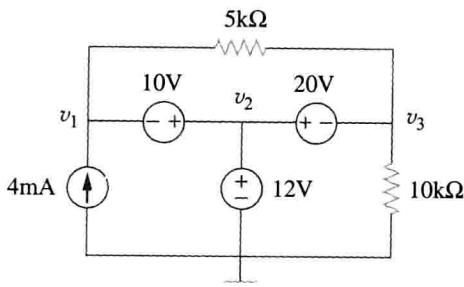
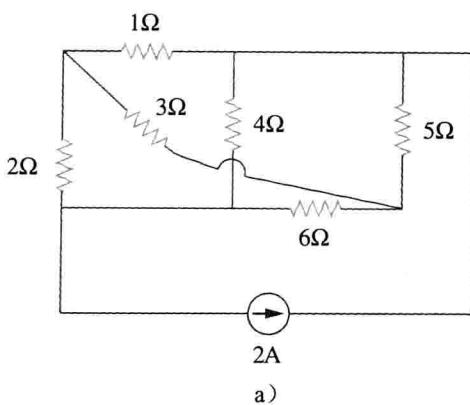


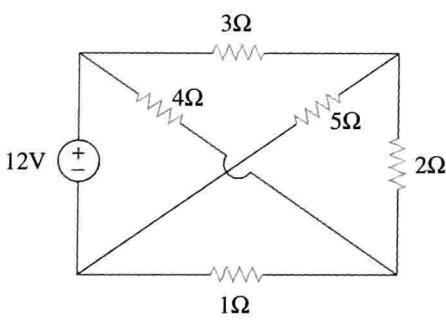
图 3-81 习题 32 图

3.4 节和 3.5 节

33 在图 3-82 所示电路中，哪一个电路是平面电路？对于平面电路，重画出没有交叉支路的电路。



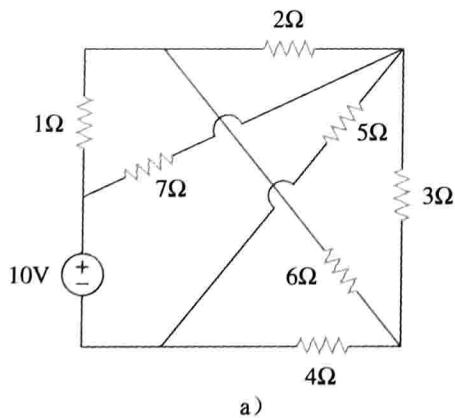
a)



b)

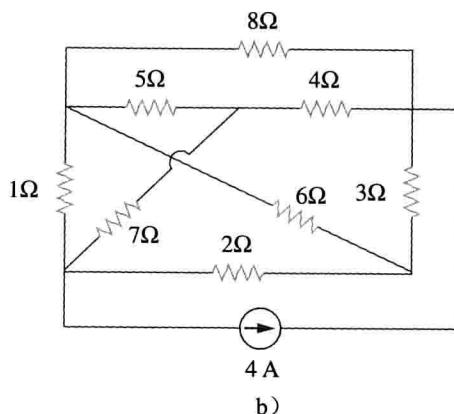
图 3-82 习题 33 图

34 确定图 3-83 所示电路中哪一个是平面电路，并重新画出没有交叉支路的电路。



a)

图 3-83 习题 34 图



b)

图 3-83 (续)

35 利用网孔分析法重做习题 5。

36 利用网孔分析法计算图 3-84 所示电路中的 i_1 、 i_2 和 i_3 。

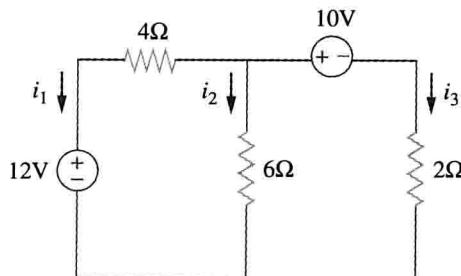


图 3-84 习题 36 图

37 利用网孔分析法计算习题 8。

38 利用网孔分析法确定图 3-85 所示电路中的 I_o 。

ML

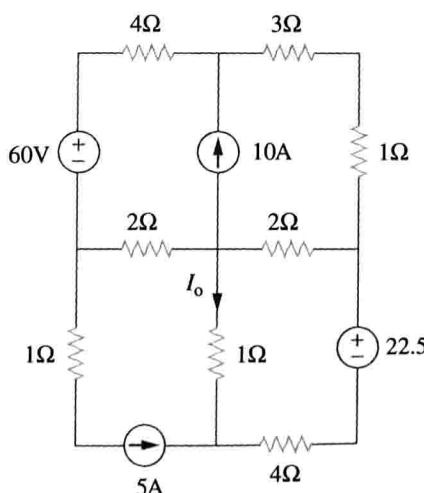


图 3-85 习题 38 图

39 利用习题 1 的图 3-50 设计一个问题，帮助其他同学更好地了解网孔分析法。

ED

40 利用网孔分析法计算图 3-86 所示桥式网络中的电流 i_o 。

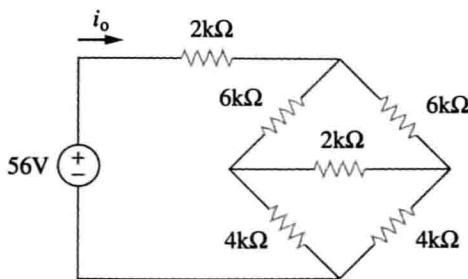


图 3-86 习题 40 图

- 41 利用网孔分析法计算图 3-87 所示电路中的电流 i 。
ML

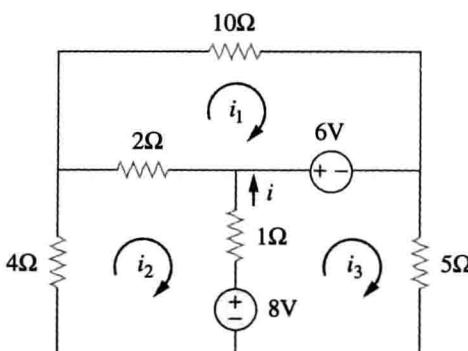


图 3-87 习题 41 图

- 42 利用图 3-88 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地了解使用矩阵计算的网孔分析法。
ED

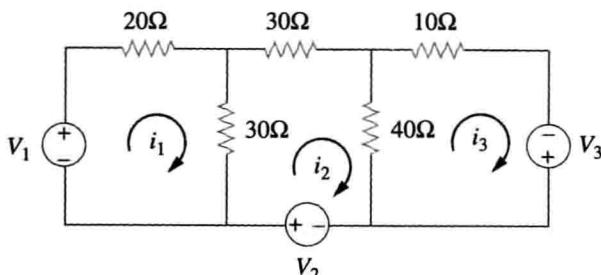


图 3-88 习题 42 图

- 43 利用网孔分析法计算图 3-89 所示电路中的 v_{ab} 与 i_o 。
ML

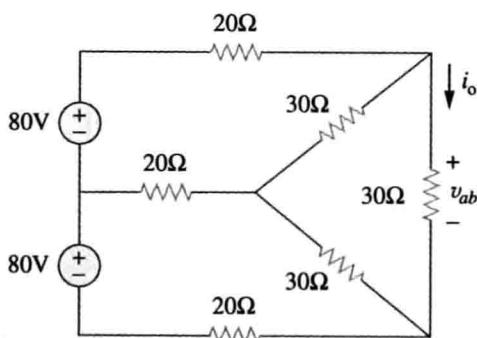


图 3-89 习题 43 图

- 44 利用网孔分析法计算图 3-90 所示电路中的电流 i_o 。

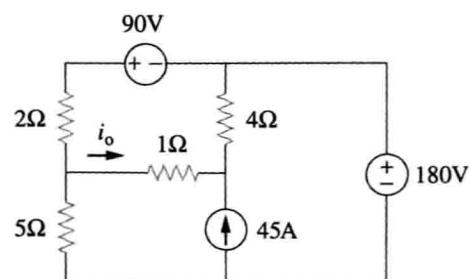


图 3-90 习题 44 图

- 45 求图 3-91 所示电路中的电流 i 。
ML

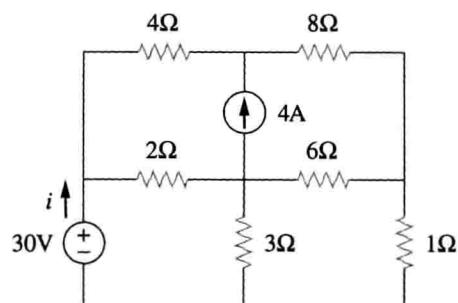


图 3-91 习题 45 图

- 46 计算图 3-92 所示电路中的网孔电流 i_1 和 i_2 。

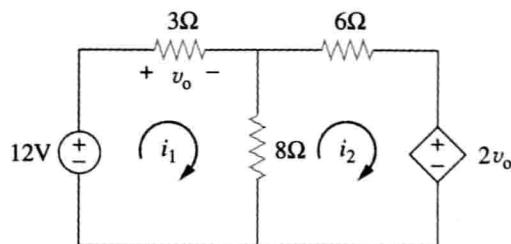


图 3-92 习题 46 图

- 47 利用网孔分析法重做习题 19。
ML
- 48 利用网孔分析法确定流过图 3-93 所示电路中 $10k\Omega$ 电阻的电流。
ML

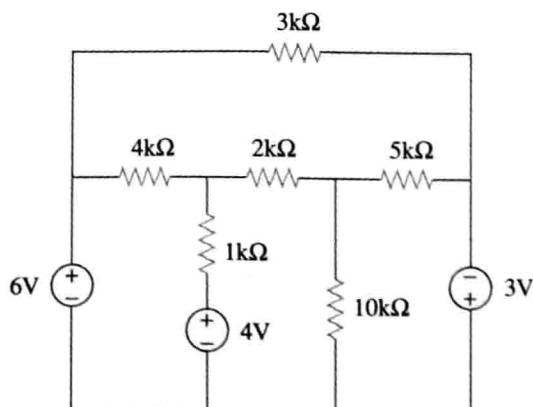


图 3-93 习题 48 图

- 49 求图 3-94 所示电路中的 v_o 与 i_o 。

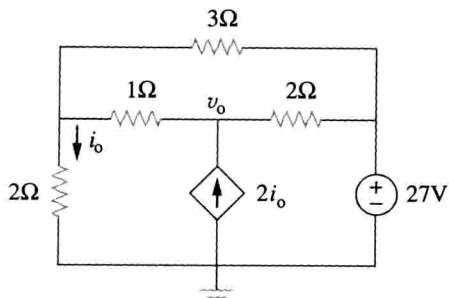


图 3-94 习题 49 图

- 50 利用网孔分析法确定图 3-95 所示电路中的电流 i_o 。 **ML**

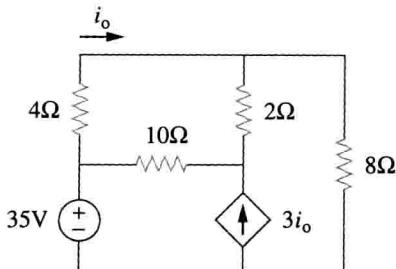


图 3-95 习题 50 图

- 51 利用网孔分析法确定图 3-96 所示电路中的电压 v_o 。

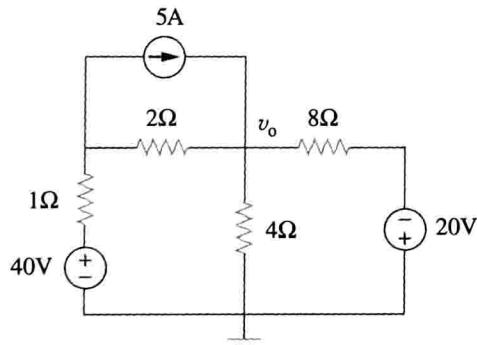


图 3-96 习题 51 图

- 52 利用网孔分析法确定图 3-97 所示电路中的电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。 **ML**

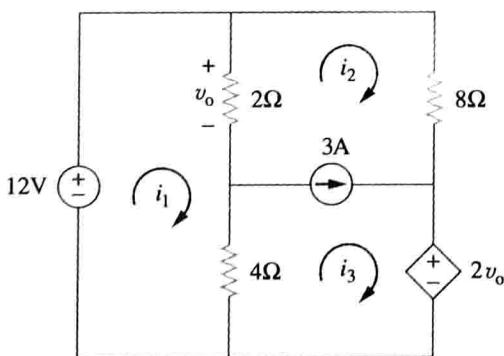


图 3-97 习题 52 图

- 53 利用 MATLAB 确定图 3-98 所示电路中的网

孔电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。

ML

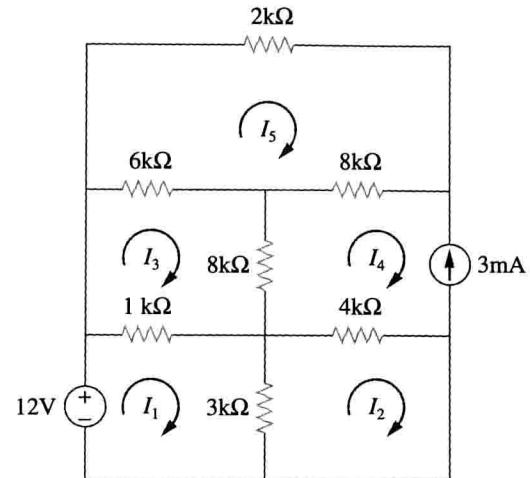


图 3-98 习题 53 图

- 54 求图 3-99 所示电路中的网孔电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。 **ML**

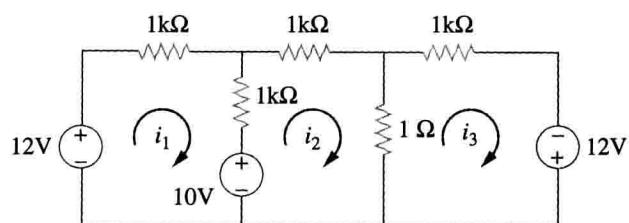


图 3-99 习题 54 图

- * 55 求图 3-100 所示电路中的 I_1 、 I_2 和 I_3 。 **ML**

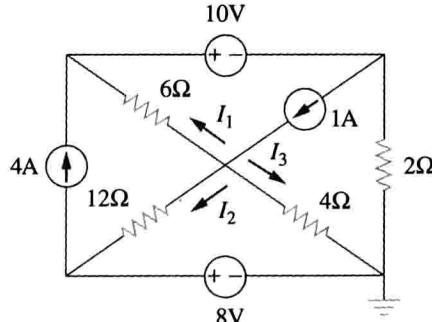


图 3-100 习题 55 图

- 56 求图 3-101 所示电路中的 v_1 和 v_2 。

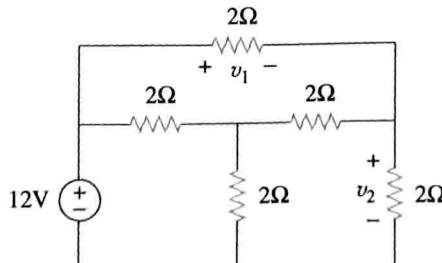


图 3-101 习题 56 图

- 57 在图 3-102 所示电路中，假定电流 $i_o = 15mA$ ，试求 R 、 V_1 和 V_2 的值。

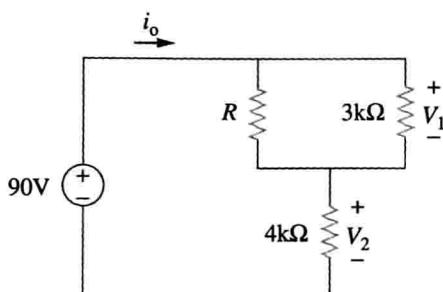


图 3-102 习题 57 图

- 58 求图 3-103 所示电路中的网孔电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。
ML

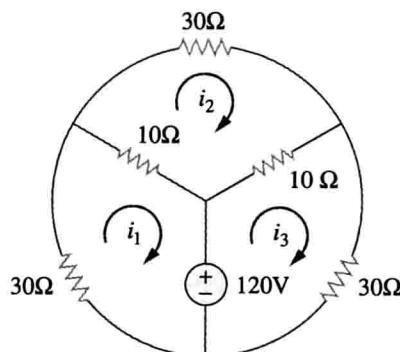


图 3-103 习题 58 图

- 59 利用网孔分析法重做习题 30。
ML
- 60 计算图 3-104 所示电路中每个电阻消耗的功率。

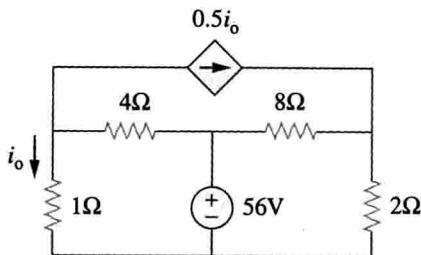


图 3-104 习题 60 图

- 61 计算图 3-105 所示电路中的电流增益 i_o/i_s 。

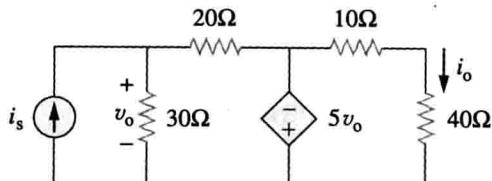


图 3-105 习题 61 图

- 62 求图 3-106 所示电路中的网孔电流 i_1 、 i_2 和 i_3 。
ML

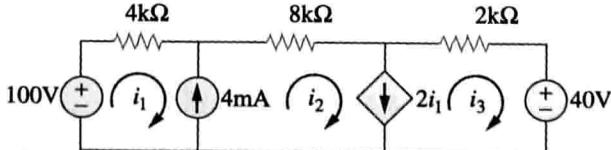


图 3-106 习题 62 图

- 63 求图 3-107 所示电路中的 v_x 和 i_x 。

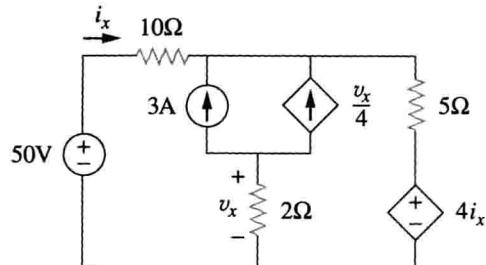


图 3-107 习题 63 图

- 64 求图 3-108 所示电路中的 v_o 和 i_o 。
ML

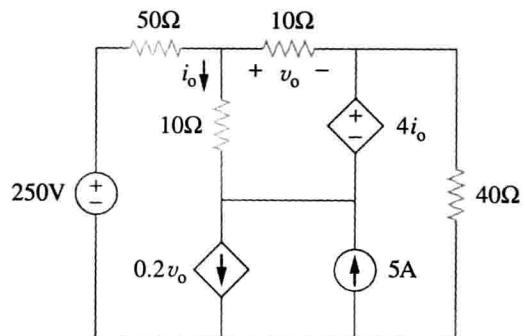


图 3-108 习题 64 图

- 65 利用 MATLAB 确定图 3-109 所示电路中的网孔电流。
ML

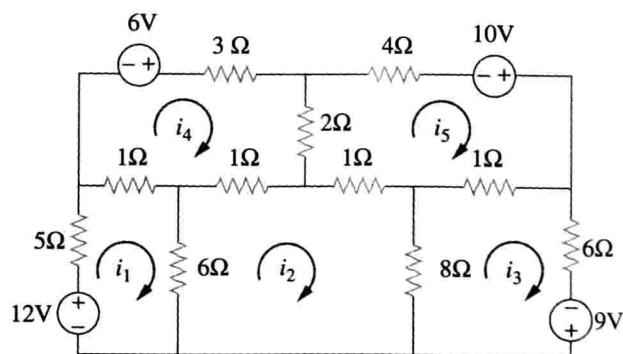


图 3-109 习题 65 图

- 66 写出图 3-110 所示电路的网孔方程，并利用 MATLAB 确定网孔电流。
ML

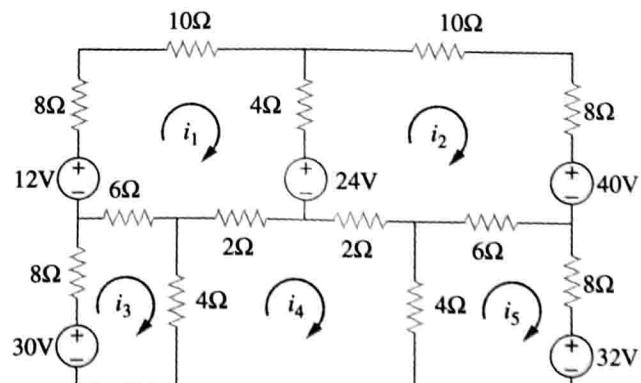


图 3-110 习题 66 图

3.6节

- 67 通过观察法写出图 3-111 所示电路的节点电压方程，并计算电压 V_o 。
ML

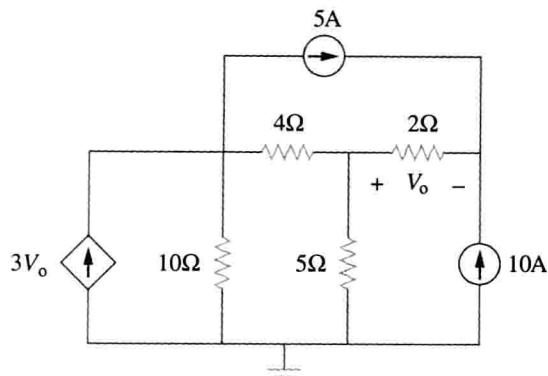


图 3-111 习题 67 图

- 68 利用图 3-112 设计一个问题，求出电压 V_o ，帮助其他同学更好地了解节点分析法，并尽力提出最容易计算的算法。
ED

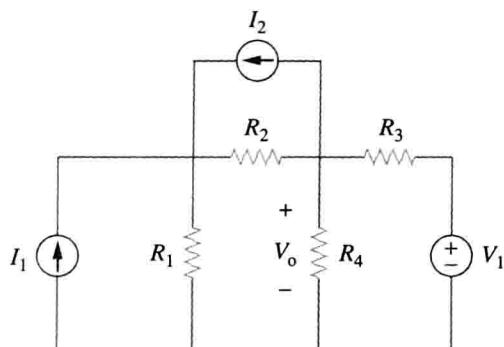


图 3-112 习题 68 图

- 69 通过观察法写出图 3-113 所示电路的节点电压方程。

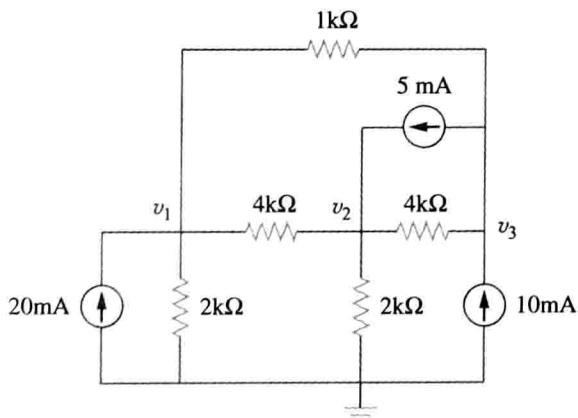


图 3-113 习题 69 图

- 70 通过观察法写出图 3-114 所示电路的节点电压方程，并确定 V_1 与 V_2 的值。

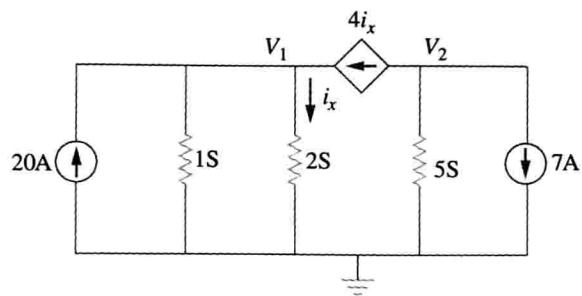


图 3-114 习题 70 图

- 71 写出图 3-115 所示电路的网孔电流方程，之后计算 i_1 、 i_2 和 i_3 的值。
ML

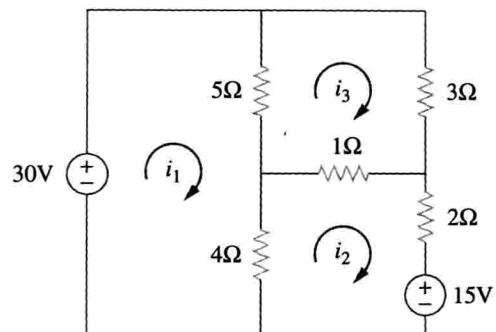


图 3-115 习题 71 图

- 72 通过观察法写出图 3-116 所示电路的网孔电流方程。

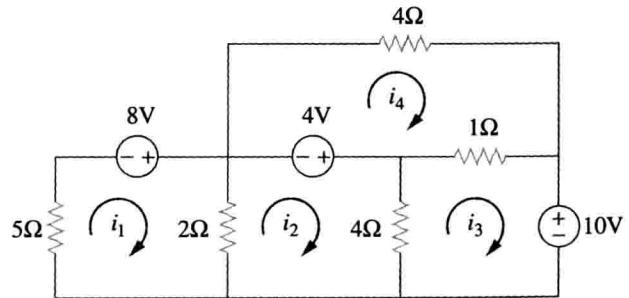


图 3-116 习题 72 图

- 73 写出图 3-117 所示电路的网孔电流方程。

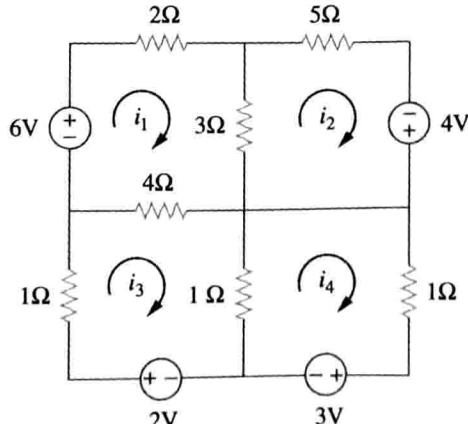


图 3-117 习题 73 图

- 74 通过观察法写出图 3-118 所示电路的网孔电流方程。

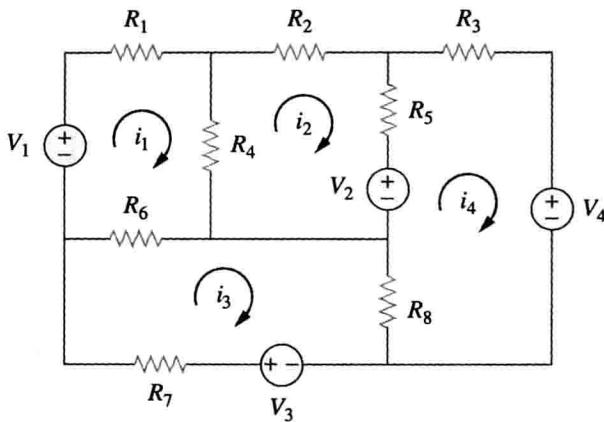


图 3-118 习题 74 图

3.8 节

- 75 利用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 58。
76 利用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 27。
77 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 3-119 所示电路中的 \$V_1\$ 与 \$V_2\$。

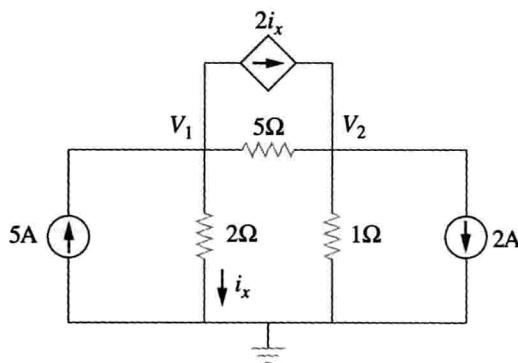


图 3-119 习题 75 图

- 78 利用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 20。
79 利用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 28。
80 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 3-120 所示电路中的节点电压 \$v_1 \sim v_4\$。 **ML**

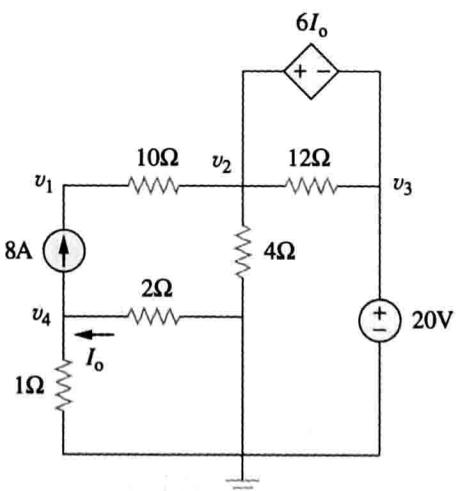


图 3-120 习题 80 图

- 81 利用 PSpice 或 MultiSim 求解例 3-4。

- 82 如果某网络在 PSpice 环境下的原理图网络表 (Schematics Netlist) 如下所示，试画出该网络的电路原理图。

R_R1	1	2	2K
R_R2	2	0	4K
R_R3	3	0	8K
R_R4	3	4	6K
R_R5	1	3	3K
V_VS	4	0	DC 100
I_IS	0	1	DC 4
F_F1	1	3	VF_F1 2
VF_F1	5	0	0V
E_E1	3	2	1 3 3 3

- 83 某特定电路的原理图网络表如下所示，试画出该网络的电路原理图并确定节点 2 的电压。

R_R1	1	2	20
R_R2	2	0	50
R_R3	2	3	70
R_R4	3	0	30
V_VS	1	0	20V
I_IS	2	0	DC 2A

3.9 节

- 84 计算图 3-121 所示电路中的 \$v_o\$ 与 \$I_o\$。

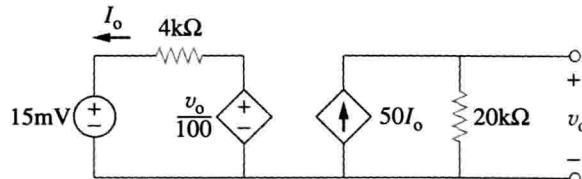


图 3-121 习题 84 图

- 85 阻值为 \$9\Omega\$ 的音频放大器为扬声器提供功率，要使所传递的功率最大，扬声器的阻值应为多少？ **ED**

- 86 计算图 3-122 所示简化的晶体管电路中的电压 \$v_o\$。

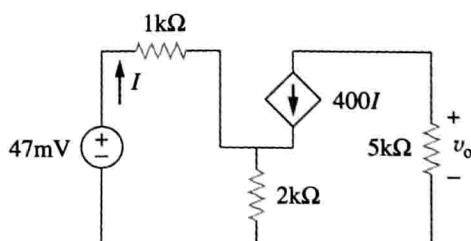


图 3-122 习题 86 图

- 87 求图 3-123 所示电路的增益 \$v_o/v_s\$。

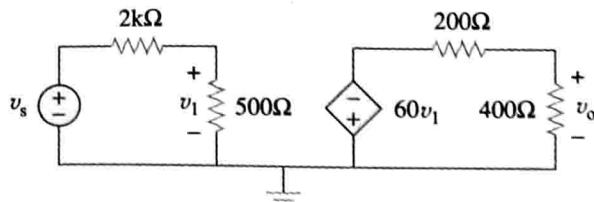


图 3-123 习题 87 图

- * 88 试确定图 3-124 所示晶体管放大电路的增益 v_o/v_s 。

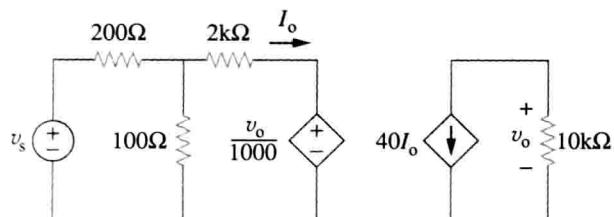


图 3-124 习题 88 图

- 89 在图 3-125 所示的晶体管电路中, 假定 $\beta=100$ 、 $V_{BE}=0.7V$, 试求 I_B 和 V_{CE} 。

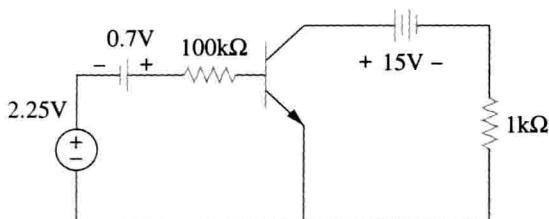


图 3-125 习题 89 图

- 90 在图 3-126 所示的晶体管电路中, 假定 $v_o=4V$ 、 $\beta=150$ 、 $V_{BE}=0.7V$, 计算 v_s 。

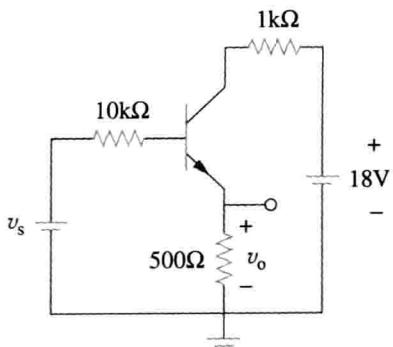


图 3-126 习题 90 图

- 91 在图 3-127 所示的晶体管电路中, 假定 $\beta=200$, $V_{BE}=0.7V$, 求 I_B 、 V_{CE} 和 v_o 。

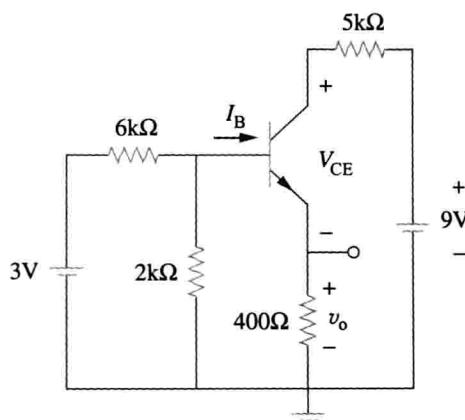


图 3-127 习题 91 图

- 92 利用图 3-128 所示电路设计一个问题, 帮助其他学生更好地了解晶体管。确定所使用的电路参数是合理的。**ED**

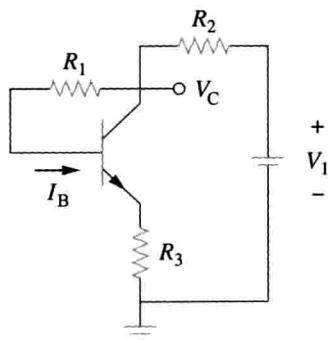


图 3-128 习题 92 图

综合理解题

- * 93 试通过手算的方法重做例 3-11。

第4章

电路定理

一名工程师的成功与他的沟通能力成正比！

——Charles K. Alexander

增强技能与拓展事业

加强沟通能力

学习电路分析课程是从事电子工程师事业的第一步，然而在学校期间加强自己的沟通能力也是准备工作的一部分，因为我们的大部分时间都用于相互交流。

业界人士经常抱怨刚毕业的工程师在书面与口头交流方面的欠缺。具备良好沟通能力的工程师成为更有价值的人才。

你可能会说、会写，但是如何进行卓有成效的沟通呢？有效的沟通艺术是一位工程师成功的关键。

对于工程师而言，良好的沟通能力是不断晋升的关键。在一项由美国公司进行的关于什么因素影响管理人员晋升的调查中，列举了 22 项个人因素的问题及其在晋升中的重要性。调查结果令人大吃一惊：“基于经验的技术能力”位列倒数第四。自信、有追求、灵活、成熟、能做出合理的决定、能与人合作以及刻苦工作等品格都排在前面，而“沟通能力”则名列第一位。个人事业越发展就越需要人际沟通的能力。因此，应该将卓有成效的沟通作为个人职业道路上的一项重要手段和必备能力。

掌握有效的沟通方法是一生都必须不断学习的事情。在校学习期间是开始培养沟通能力的最佳时机，要不断寻找机会培养和提高自己的读、写、听、说能力。可以通过课堂展示、集体课程设计、参与学生社团活动和选修交流课程等方式培养自己这方面的能力，这比工作后再注意这个问题要有益得多。



卓有成效的交际能力被许多人认为是行政晋升中重要的一环

© IT Stock/Punchstock

4.1 引言

第 3 章中利用基尔霍夫定律分析电路的一个突出优点是无需对原电路结构进行任何更改即可完成电路的分析，其缺点就是对于大型的复杂电路而言，这种方法的求解过程相当繁琐。

随着电路应用领域的不断扩充，简单电路已演化成为复杂电路。为了处理这些复杂电路，电路技术专家经过多年努力提出了一些可以简化电路分析的定理，其中包括戴维南(Thevenin)定理和诺顿(Norton)定理。由于这些定理适用于线性(linear)电路，因此本章首先讨论线性电路的概念，在此基础上进一步讨论叠加定理、电源变换以及最大功率传输等概念。最后一节将运用本章知识进行电源建模和电阻测量。

4.2 线性性质

线性性质是一种描述线性因果关系的元件属性。虽然该属性适用于许多电路元件，但

本章的讨论仅限于电阻元件。线性包括齐次性(比例性)和叠加性。

齐次性是指：如果输入(也称激励)乘以一个常数，那么输出(也称响应)也相应地乘以同一个常数。以电阻为例，根据欧姆定律，输入电流 i 与输出电压 v 之间的关系为：

$$v = iR \quad (4.1)$$

如果电流乘以常量 k ，那么电压也变为原来的 k 倍，即：

$$kiR = kv \quad (4.2)$$

叠加性是指：各个输入之和的响应等于每个输入单独作用于系统时的响应之和，仍以电阻的电压-电流关系为例，如果：

$$v_1 = i_1 R \quad (4.3a)$$

且

$$v_2 = i_2 R \quad (4.3b)$$

那么当输入为 $(i_1 + i_2)$ 时，有：

$$v = (i_1 + i_2)R = i_1R + i_2R = v_1 + v_2 \quad (4.4)$$

由于电阻的电压-电流关系既满足齐次性又满足叠加性，所以称电阻为线性元件。

一般而言，如果一个电路既满足齐次性又满足叠加性，则称为线性电路。线性电路中仅包含线性元件、线性受控源和线性独立源。

线性电路是指输出和输入呈线性关系(或者成比例关系)的电路。

本书只讨论线性电路。注意，由于功率 $p = i^2 R = v^2 / R$ (二次函数，而不是线性函数)，因此功率和电压(或电流)之间的关系是非线性的。所以，本章的定理不用于功率。

提示：例如，当电流 i_1 流过电阻 R 时，功率 $p_1 = R i_1^2$ ，当电流 i_2 流过电阻 R 时，功率 $p_2 = R i_2^2$ 。当电流 $(i_1 + i_2)$ 流过电阻 R 时，功率 $p_3 = R(i_1 + i_2)^2 = R i_1^2 + R i_2^2 + 2R i_1 i_2 \neq p_1 + p_2$ 。因此，功率关系是非线性的。

为了说明线性原理，以图 4-1 的线性电路为例。该线性电路内部没有独立源，电压源 v_s 是激励，即输入为 v_s ，在电路输出端接一负载电阻 R ，电阻 R 的电流 i 作为输出。假设 $v_s = 10V$ 时， $i = 2A$ 。那么根据线性原理，当 $v_s = 1V$ 时，则 $i = 0.2A$ 。同理，如果 $i = 1mA$ ，则其输入必为 $v_s = 5mV$ 。

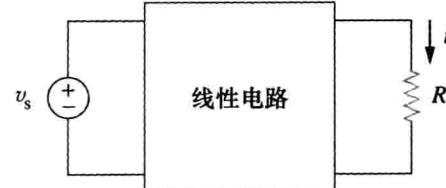


图 4-1 输入为 v_s ，输出为 i 的线性电路

例 4-1 当 $v_s = 12V$ 和 $v_s = 24V$ 时，分别求解图 4-2 所示电路中的 I_o 。

解：对两个回路应用 KVL，可得：

$$12i_1 - 4i_2 + v_s = 0 \quad (4.1.1)$$

$$-4i_1 + 16i_2 - 3v_x - v_s = 0 \quad (4.1.2)$$

而 $v_x = 2i_1$ ，于是式(4.1.2)变为：

$$-10i_1 + 16i_2 - v_s = 0 \quad (4.1.3)$$

将式(4.1.1)与式(4.1.3)相加，得到：

$$2i_1 + 12i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -6i_2$$

代入式(4.1.1)，可得：

$$-76i_2 + v_s = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{v_s}{76}$$

当 $v_s = 12V$ 时，

$$I_o = i_2 = \frac{12}{76} A$$

当 $v_s = 24V$ 时,

$$I_o = i_2 = \frac{24}{76} A$$

这说明, 当电压源变为原来的 2 倍时, I_o 也变为原来的 2 倍。

练习 4-1 当 $i_s = 30A$ 和 $i_s = 45A$ 时, 求图 4-3 所示电路中的 v_o 。 答案: 40V, 60V

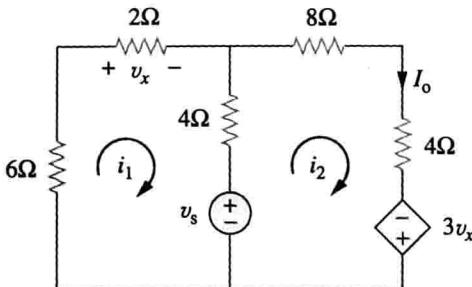


图 4-2 例 4-1 图

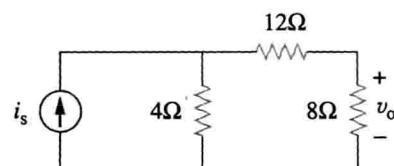


图 4-3 练习 4-1 图

例 4-2 在图 4-4 所示电路中, 假设 $I_o = 1A$, 利用线性原理确定 I_o 的实际值。

解: 如果 $I_o = 1A$, 则 $V_1 = (3+5)I_o = 8(V)$, 且 $I_1 = \frac{V_1}{4} = 2(A)$, 对节点 1 应用 KCL,

可得:

$$I_2 = I_1 + I_o = 3(A)$$

$$V_2 = V_1 + 2I_2 = 8 + 6 = 14(V), \quad I_3 = \frac{V_2}{7} = 2(A)$$

对节点 2 应用 KCL, 得:

$$I_4 = I_3 + I_2 = 5(A)$$

因此, $I_s = 5A$ 。这表明如果假定 $I_o = 1A$, 则得到电流源 $I_s = 5A$, 该电路中电流源实际为 15A, 则此时实际得到的 $I_o = 3A$ 。

练习 4-2 在图 4-5 所示电路中, 假定 $V_o = 1V$, 试利用线性原理计算 V_o 的实际值。

答案: 16V

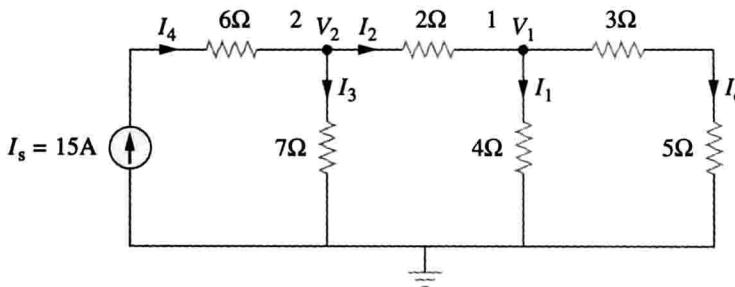


图 4-4 例 4-2 图

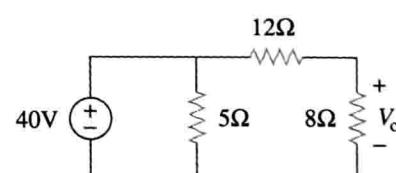


图 4-5 练习 4-2 图

4.3 叠加定理

当一个电路包含两个或多个独立电源时, 求解电路特定变量值(电压或电流)的一种方法是利用第 3 章所学的节点分析法或网孔分析法, 另一种方法是求出各独立源单独作用时的响应, 然后相加得到最终的响应, 后一种方法称为叠加原理(superposition)。

电路的线性性质是叠加定理的基础。

叠加定理是指线性电路中元件两端电压(或流经元件的电流)是每个独立源单独作用下在该元件两端产生的电压(或流经该元件的电流)的代数和。

提示: 叠加定理不仅仅局限于电路分析, 对因果关系满足线性性质的其他许多领域同

样适用。

采用叠加定理可以帮助我们分析包含多个独立源的线性电路，即分别计算各独立源对电路的贡献，之后相加得到总的响应。但是，应用叠加定理必须注意如下两点：

- 每次计算仅考虑一个独立源，其他独立源均应关闭（turn off），即其他各电压源要用0V（短路）来替代，而各电流源要用0A（开路）来替代。这样，就可以得到更为简单、更便于处理的电路。

提示：与关闭意思相同的常见术语包括：封闭（killed）、无效（made inactive）、失效（deadened）和置零（set equal zero）等。

- 因为受控源受到电路变量的控制，所以应保持不变。

应用叠加定理时，必须按照如下三个步骤进行。

应用叠加定理的三个步骤：

- 关闭除一个独立电源以外的其他所有独立电源，利用第2章和第3章介绍的分析方法，求出该独立源作用于电路的输出（电压或电流）。

- 对其他各独立源重复步骤1。

- 将各个独立源单独作用于电路时产生的响应进行代数相加，从而得到电路总的响应。

采用叠加定理分析电路的一个主要缺点是所涉及的计算比较多。如果待分析电路包含三个独立源，则必须分析计算三个由独立源单独作用的简化电路。然而，叠加定理的优点在于，利用短路替代电压源，或利用开路替代电流源，的确可以降低电路的复杂程度，将复杂电路简化为简单电路。

必须牢记，叠加定理的基础是线性性质，因此它并不适用于各电源产生的功率，因为电阻吸收的功率随电压或电流的平方关系变化。如果要求功率，必须先利用叠加原理计算流经元件的电流（或元件两端的电压），之后再计算功率。

例 4-3 利用叠加定理计算图4-6所示电路中的 v 。

解：电路中包含两个电源，根据叠加定理，有：

$$v = v_1 + v_2$$

其中， v_1 与 v_2 分别为6V电压源和3A电流源单独作用时 v 的大小。为求出 v_1 ，应设电流源为零，如图4-7a所示，对图4-7a中回路应用KVL，得到：

$$12i_1 - 6 = 0 \Rightarrow i_1 = 0.5\text{A}$$

因此：

$$v_1 = 4i_1 = 2(\text{V})$$

另外，还可以采用分压原理计算 v_1 ，即：

$$v_1 = \frac{4}{4+8} \times 6 = 2(\text{V})$$

为求出 v_2 ，应设电压源为零，如图4-7b所示，利用分流原理可得：

$$i_3 = \frac{8}{4+8} \times 3 = 2(\text{A})$$

因此：

$$v_2 = 4i_3 = 8(\text{V})$$

所以：

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10(\text{V})$$

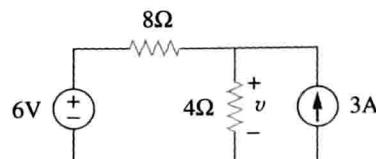


图 4-6 例 4-3 图

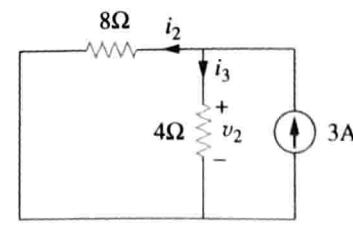
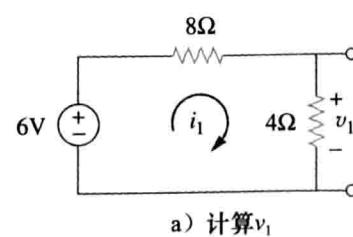


图 4-7 例 4-3 图

练习 4-3 利用叠加定理求出图 4-8 所示电路中的 v_o 。

答案：7.4V

例 4-4 利用叠加定理求出图 4-9 所示电路中的 i_o 。

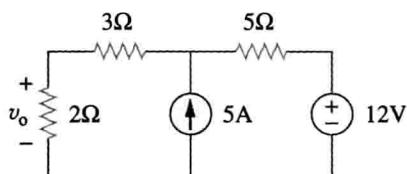


图 4-8 练习 4-3 图

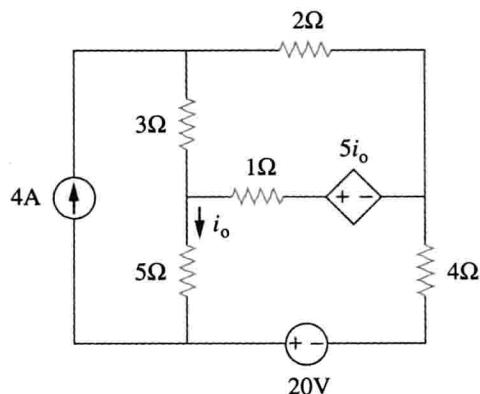


图 4-9 例 4-4 图

解：图 4-9 所示电路中包含一个受控源，计算过程中必须保持不变。令：

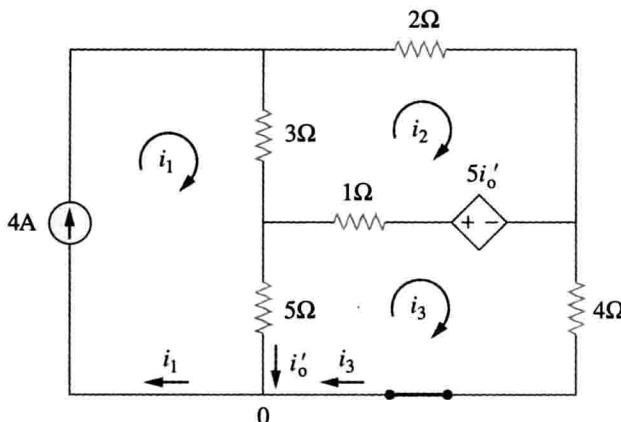
$$i_o = i'_o + i''_o \quad (4.4.1)$$

其中， i'_o 与 i''_o 分别为由 4A 电流源与 20V 电压源引起的响应。为求出 i'_o ，须关闭 20V 电压源，从而得到如图 4-10a 所示电路。下面采用网孔分析法求 i'_o ，对于回路 1：

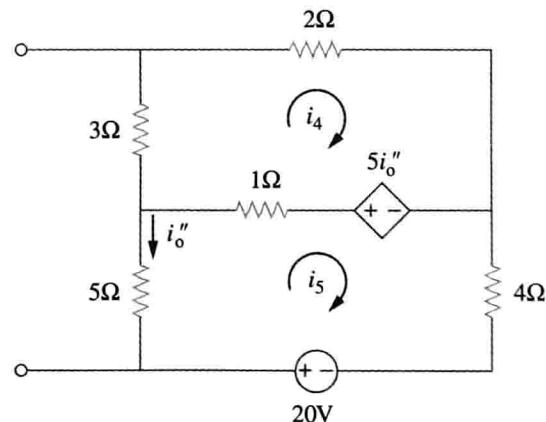
$$i_1 = 4A \quad (4.4.2)$$

对于回路 2：

$$-3i_1 + 6i_2 - 1i_3 - 5i'_o = 0 \quad (4.4.3)$$



a) 求 i'_o



b) 求 i''_o

图 4-10 例 4-4 图

对于回路 3：

$$-5i_1 - 1i_2 + 10i_3 + 5i'_o = 0 \quad (4.4.4)$$

但在节点 0 处，有：

$$i_3 = i_1 - i'_o = 4 - i'_o \quad (4.4.5)$$

将式(4.4.2)与式(4.4.5)代入式(4.4.3)与式(4.4.4)，得到两个联立方程：

$$3i_2 - 2i'_o = 8 \quad (4.4.6)$$

$$i_2 + 5i'_o = 20 \quad (4.4.7)$$

解得：

$$i'_o = \frac{52}{17} A \quad (4.4.8)$$

为求 i''_o ，须关闭 4A 电流源，从而得到如图 4-10b 所示电路。对回路 4 应用 KVL，可得：

$$6i_4 - i_5 - 5i''_o = 0 \quad (4.4.9)$$

对回路5:

$$-i_4 + 10i_5 - 20 + 5i''_o = 0 \quad (4.4.10)$$

而 $i_5 = -i''_o$ 。将其代入式(4.4.9)和式(4.4.10)可得:

$$6i_4 - 4i''_o = 0 \quad (4.4.11)$$

$$i_4 + 5i''_o = -20 \quad (4.4.12)$$

解得:

$$i''_o = -\frac{60}{17} \text{ A} \quad (4.4.13)$$

将式(4.4.8)与式(4.4.13)代入式(4.4.1), 得到:

$$i_o = -\frac{8}{17} = -0.4706 \text{ A}$$

答案: $v_x = 31.25 \text{ V}$

例 4-5 利用叠加定理计算图 4-12 所示电路中的 i 。

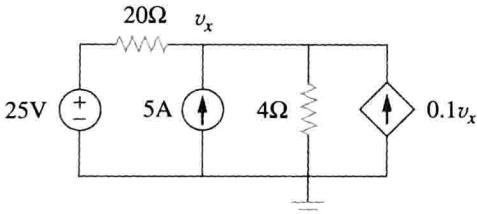


图 4-11 练习 4-4 图

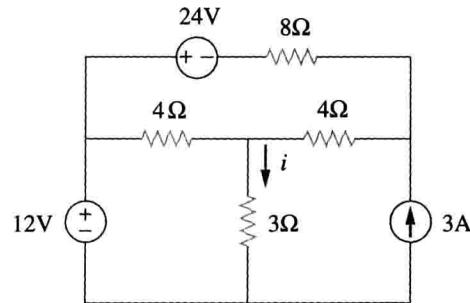


图 4-12 例 4-5 图

解: 该电路中包含三个电源, 所以:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

其中, i_1 、 i_2 、 i_3 分别为 12V 电压源、24V 电压源和 3A 电流源所产生的电流。

为求出 i_1 , 有如图 4-13a 所示电路, 将 4Ω 电阻(位于右侧的)和与之串联的 8Ω 电阻合并后得 12Ω 电阻, 该 12Ω 电阻又与 4Ω 电阻并联, 合并后得 $12 \times \frac{4}{16} = 3\Omega$ 。因此:

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

为求出 i_2 , 有如图 4-13b 所示电路, 采用网孔分析法可得:

$$16i_a - 4i_b + 24 = 0 \Rightarrow 4i_a - i_b = -6 \quad (4.5.1)$$

$$7i_b - 4i_a = 0 \Rightarrow i_a = \frac{7}{4}i_b \quad (4.5.2)$$

将式(4.5.2)代入式(4.5.1)可得:

$$i_2 = i_b = -1 \text{ A}$$

为求出 i_3 , 有如图 4-13c 所示电路, 采用节点分析法可得:

$$3 = \frac{v_2}{8} + \frac{v_2 - v_1}{4} \Rightarrow 24 = 3v_2 - 2v_1 \quad (4.5.3)$$

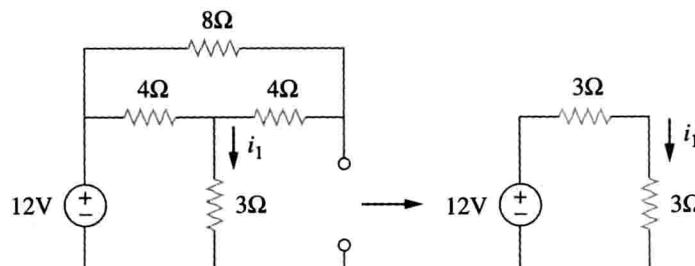
$$\frac{v_2 - v_1}{4} = \frac{v_1}{4} + \frac{v_1}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{10}{3}v_1 \quad (4.5.4)$$

将式(4.5.4)代入式(4.5.3)得 $v_1 = 3$, 且:

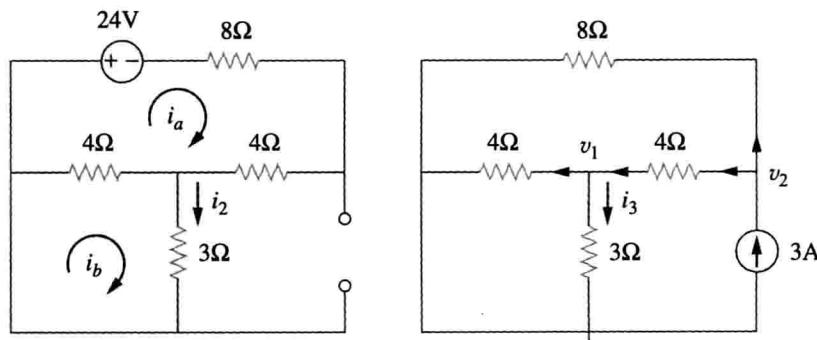
$$i_3 = \frac{v_1}{3} = 1 \text{ A}$$

于是：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2(\text{A})$$



a)



b)

c)

图 4-13 例 4-5 图

练习 4-5 利用叠加定理求出图 4-14 所示电路中的 I 。

答案：375mA

4.4 电源变换

由前面章节的学习可知，串-并联合并与 Δ -Y 变换等方法有助于简化电路，本节将介绍另一个简化电路的工具——电源变换。这些工具的基础是等效的概念，即等效电路是指与原电路具有相同的 $v-i$ 特性的电路。

由 3.6 节可知，当电路中的电源均为独立电流源（或独立电压源）时，仅通过观察法就可以写出电路的节点电压（或网孔电流）方程。因此，在电路分析时，如果能像图 4-15 那样，将与电阻串联的电压源变换为与电阻并联的电流源（反之亦然），就会使分析变得非常简便，这种变换称为电源变换。

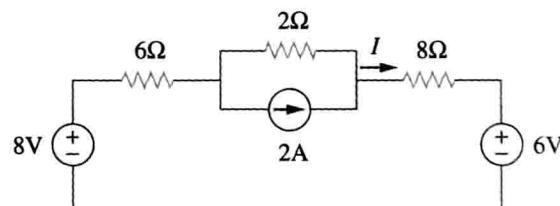


图 4-14 练习 4-5 图

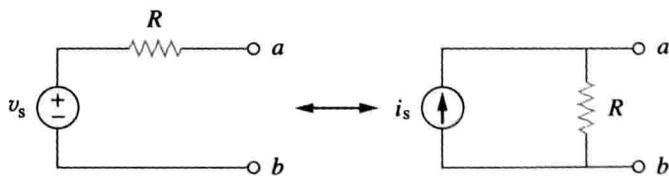


图 4-15 独立电源的变换

电源变换是指电流源 i_s 与电阻 R 的并联可以变换为电压源 v_s 与电阻 R 的串联（反之亦然）。

只要如图 4-15 所示的两个电路在端口 $a-b$ 呈现相同的电压-电流关系，则二者就是等效的。可以很容易地证明这两个电路的等效关系，如果将两个电源均关闭，则两个电路在

端口 $a-b$ 的等效电阻均为 R 。同时，当端口 $a-b$ 短路时，则在左边电路中从 a 到 b 的短路电流为 $i_{sc} = v_s/R$ ，在右边电路中从 a 到 b 的短路电流为 $i_{sc} = i_s$ 。于是，为使这两个电路等效，就必须满足 $v_s/R = i_s$ 。因此，电源变换必须满足：

$$v_s = i_s R \quad \text{或} \quad i_s = \frac{v_s}{R} \quad (4.5)$$

电源变换同样适用于受控源，但前提是必须对受控变量做细致的处理。如图 4-16 所示，受控电压源与电阻的串联可以变换为受控电流源与电阻的并联，反之亦然，但必须满足式(4.5)。

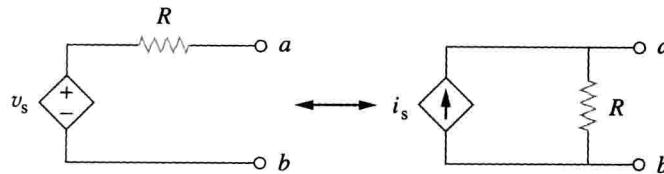


图 4-16 受控源的变换

与第 2 章所学的 $Y-\Delta$ 变换一样，电源变换并不会对电路的其他部分产生任何影响，因此，电源变换是一种通过电路形式的变换简化电路分析的有力工具。但是，在进行电源变换时，必须注意如下两点：

1. 如图 4-15(或图 4-16)所示，电流源的电流方向应该指向电压源的正极。
2. 由式(4.5)可知，在 $R=0$ ，即理想电压源的情况下，不能进行电源变换，然而实际电路中均为非理想电压源($R \neq 0$)。同样， $R=\infty$ 的理想电流源也不能用电压源来取代。4.10.1 节将会对理想电源和非理想电源作进一步的讨论。

例 4-6 利用电源变换的方法求图 4-17 所示电路中的 v_o 。

解：首先对图中的电流源和电压源分别进行变换，得到如图 4-18a 所示的电路。之后，将串联的 4Ω 电阻与 2Ω 电阻合并起来，同时对 $12V$ 电压源进行变换，得到如图 4-18b 所示的电路。接着将并联的 3Ω 电阻与 6Ω 电阻合并为一个 2Ω 电阻，将 $2A$ 电流源与 $4A$ 电流源合并为一个 $2A$ 电流源。这样，重复几次电源变换后，就会得到如图 4-18c 所示的电路。

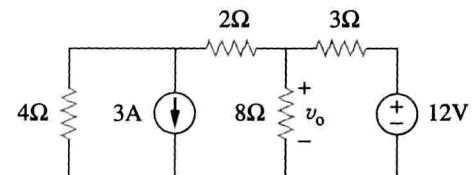


图 4-17 例 4-6 图

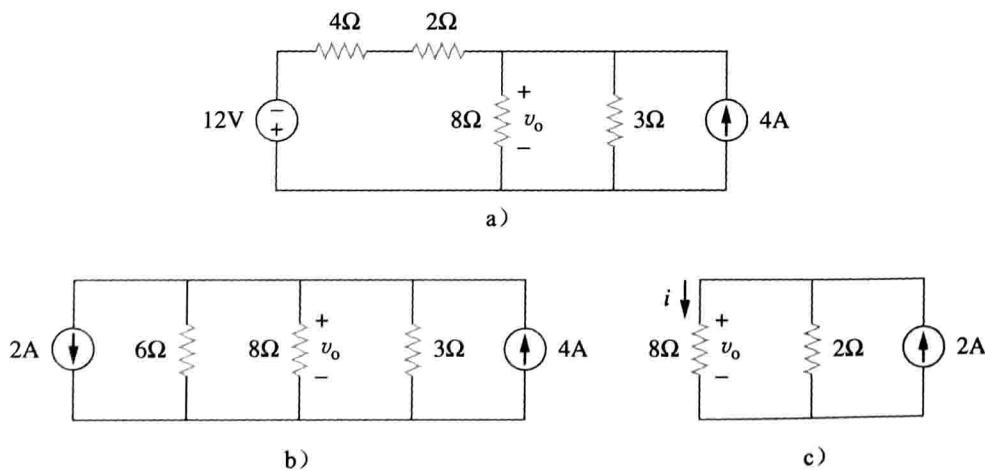


图 4-18 例 4-6 图

将图 4-18c 所示电路应用分流原理，得到：

$$i = \frac{2}{2+8} \times 2 = 0.4(\text{A})$$

和

$$v_o = 8i = 8 \times 0.4 = 3.2(\text{V})$$

另外, 由于图 4-18c 中的 8Ω 电阻与 2Ω 电阻是并联的, 其两端的电压应相同。因此:

$$v_o = (8 \parallel 2) \times 2 = \frac{8 \times 2}{10} \times 2 = 3.2(\text{V})$$

练习 4-6 利用电源变换的方法求图 4-19 所示电路中的 i_o 。

答案: 1.78A

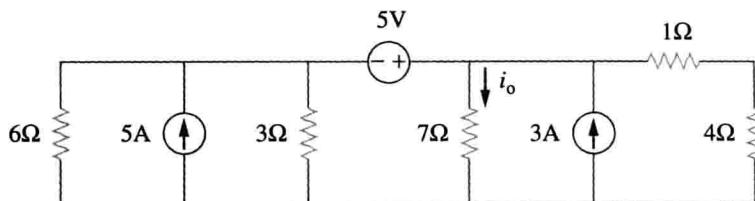


图 4-19 练习 4-6 图

例 4-7 利用电源变换的方法求图 4-20 所示电路中的 v_x 。

解: 图 4-20 所示电路中包含一个电压控制电流源, 将该受控电流源和 6V 电压源分别进行电源变换, 得到如图 4-21a 所示电路。由于 18V 电压源没有与任何电阻串联, 所以不能进行电源变换, 图 4-21a 中两个并联的 2Ω 电阻可以合并为 1Ω 电阻, 它又与 3A 的电流源相并联。再将该电流源变换为电压源, 得到如图 4-21b 所示电路, 注意 v_x 的两个端点仍保持不变。对图 4-21b 所示回路应用 KVL, 得到:

$$-3 + 5i + v_x + 18 = 0 \quad (4.7.1)$$

对仅包含 3V 电压源、 1Ω 电阻和 v_x 的回路应用 KVL, 得到:

$$-3 + 1i + v_x = 0 \Rightarrow v_x = 3 - i \quad (4.7.2)$$

代入式(4.7.1)得到:

$$15 + 5i + 3 - i = 0 \Rightarrow i = -4.5\text{A}$$

另外, 对图 4-21b 中包含 v_x 、 4Ω 电阻、电压控制电压源和 18V 电压源的回路应用 KVL, 同样可得:

$$-v_x + 4i + v_x + 18 = 0 \Rightarrow i = -4.5\text{A}$$

所以:

$$v_x = 3 - i = 7.5(\text{V})$$

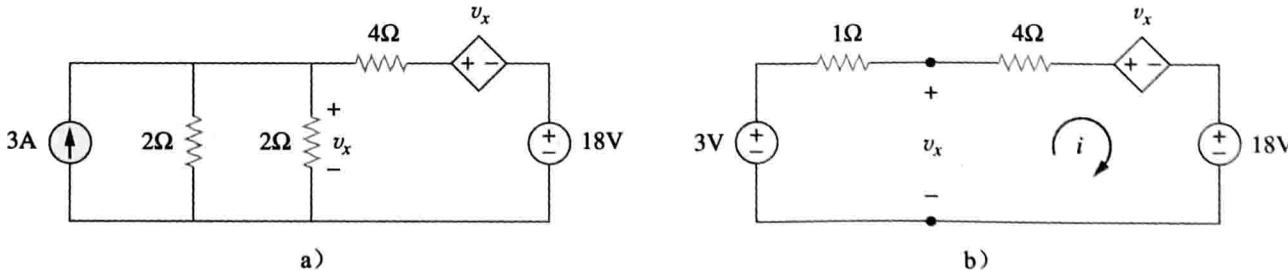


图 4-21 对图 4-20 所示电路进行电源变换后的电路图

练习 4-7 利用电源变换的方法求图 4-22 所示电路中的 i_x 。

答案: 7.059mA

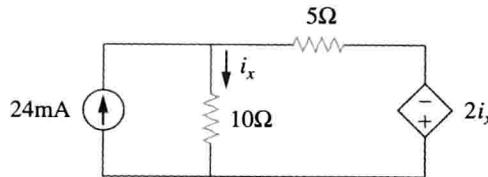


图 4-22 练习 4-7 图

4.5 戴维南定理

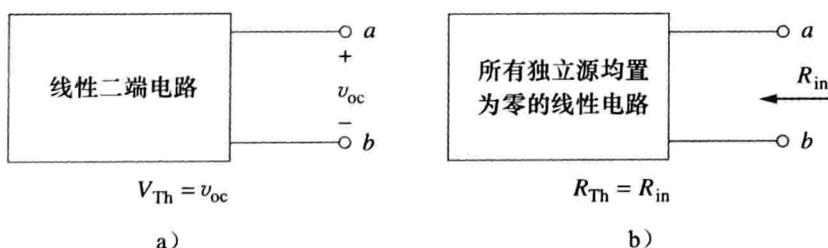
实际电路中经常会出现这样的情况：电路中某个特定的元件（通常称为负载）是可变的，而其他元件则是固定不变的。典型的例子是家中的电源插座，它可以连接不同的家用电器，从而形成可变负载。可变元件每改变一次，就要对整个电路重新分析一遍。为了避免这个问题，戴维南定理提供了一种用等效电路取代电路中不变部分的方法。

根据戴维南定理，图 4-23a 所示的线性电路可以用图 4-23b 所示的电路来替代。（图 4-23 中的负载可以是一个电阻，也可以是另一个电路。）图 4-23b 中端口 $a-b$ 左边的电路称为戴维南等效电路（Thevenin equivalent circuit），它是由法国电报工程师利昂·戴维南（M. Leon Thevenin, 1857—1926）于 1883 年提出的。

戴维南定理是指线性二端电路可以用一个由电压源 V_{Th} 和与之串联的电阻 R_{Th} 组成的等效电路所替代，其中 V_{Th} 为端口的开路电压， R_{Th} 为独立源关闭时端口的输入（或等效）电阻。

戴维南定理的证明将在 4.7 节中给出。现在的主要问题是如何求出戴维南等效电压 V_{Th} 与电阻 R_{Th} 。为此，假设图 4-23 所示的两个电路是等效的。如果两个电路具有相同的端口电压-电流关系，则称这两个电路是等效的。下面找出使得图 4-23 所示两个电路等效的条件。如果使端口 $a-b$ 开路（去掉负载），即无电流流过，那么由于两电路等效，从而图 4-23a 中 $a-b$ 两端的开路电压必定等于图 4-23b 中的电压 V_{Th} ，因此， V_{Th} 就是端口的开路电压 v_{oc} ，如图 4-24a 所示，即：

$$V_{Th} = v_{oc} \quad (4.6)$$

图 4-24 确定 V_{Th} 与 R_{Th}

移去负载使端口 $a-b$ 开路的同时，将电路中的所有独立源关闭，由于两个电路是等效的，那么图 4-23a 中的 $a-b$ 两端的输入电阻（即等效电阻）应该等于图 4-23b 中的 R_{Th} ，因此， R_{Th} 就是当独立源关闭时端口的输入电阻，如图 4-24b 所示，即：

$$R_{Th} = R_{in} \quad (4.7)$$

利用上述思想求戴维南电阻 R_{Th} 时，需要考虑下面两种情况。

情况 1：当网络中不含有受控源时，关闭所有独立源。 R_{Th} 就是从 $a-b$ 两端向网络看进去的输入电阻，如图 4-24b 所示。

情况 2：当网络中包含受控源时，关闭所有独立源。如叠加原理一样，由于受控源受电路电量的控制，因而不能关闭。此时可以在 $a-b$ 两端外加一个电压源 v_o ，并计算出相应的端口电流 i_o ，即可得到 $R_{Th} = v_o / i_o$ ，如图 4-25a 所示。或者在 $a-b$ 两端加入一个电流源 i_o ，如图 4-25b 所示，并计算出端口电压 v_o ，同样可得到 $R_{Th} = v_o / i_o$ 。利用这两种方法所得到的结果是相同的，任何一种方法都可以假设 v_o 与 i_o 取任意值，例如假设 $v_o = 1V$ 或 $i_o = 1A$ ，甚至可以对 v_o 或 i_o 的取值不做任何假设。

提示：稍后还会介绍求 R_{Th} 的另一种方法，即 $R_{Th} = v_{oc} / i_{sc}$ 。

经常会出现 R_{Th} 取负值的情况，此时的负电阻 ($v = -iR$) 表示电路是提供功率的，当电路中含有受控源时，就可能出现这种情况，例 4.10 将说明这种情况。

戴维南定理在电路分析中是非常重要的。利用该定理可以简化电路，将大规模电路用一个独立电压源和一个串联电阻来替代，因而，在电路设计中是一个强有力的工具。

如前所述，带有可变负载的线性电路可以用戴维南等效电路替代除负载以外的电路，该等效电路的外部特性与原电路完全相同。在如图 4-26a 所示的终端接有负载 R_L 的线性电路中，一旦得到该负载端的戴维南等效电路，如图 4-26b 所示，则可以很容易地确定流过该负载的电流 I_L 和该负载两端的电压 V_L 。由图 4-26b，可得：

$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \quad (4.8a)$$

$$V_L = R_L I_L = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} V_{Th} \quad (4.8b)$$

可以看出，戴维南等效电路就是一个简单的分压器，通过观察就可以很方便地得到负载电压 V_L 。

例 4-8 求图 4-27 所示电路中端口 $a-b$ 两端左侧的戴维南等效电路，并求出当 $R_L = 6\Omega$ 、 16Ω 和 36Ω 时，流过 R_L 的电流。

解：计算 R_{Th} 时，关闭 $32V$ 电压源（短路）和 $2A$ 电流源（开路），从而可得如图 4-28a 所示电路，于是：

$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4(\Omega)$$

下面利用图 4-28b 所示电路计算 V_{Th} ，对图中两个回路应用网孔分析法，得到：

$$-32 + 4i_1 + 12(i_1 - i_2) = 0, \quad i_2 = -2A$$

求解 i_1 ，得到 $i_1 = 0.5A$ ，于是：

$$V_{Th} = 12(i_1 - i_2) = 12(0.5 + 2.0) = 30(V)$$

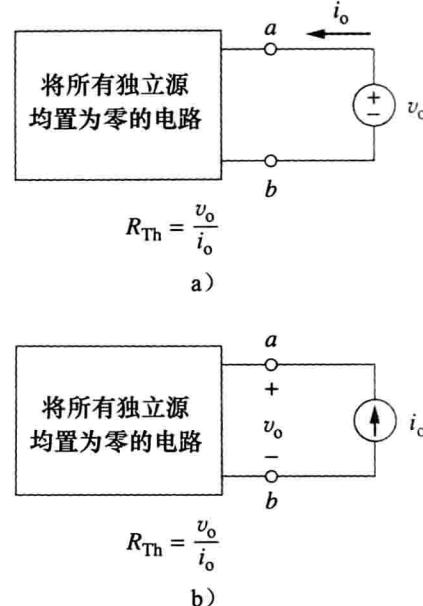


图 4-25 电路中包含受控源时，求 R_{Th} 的方法

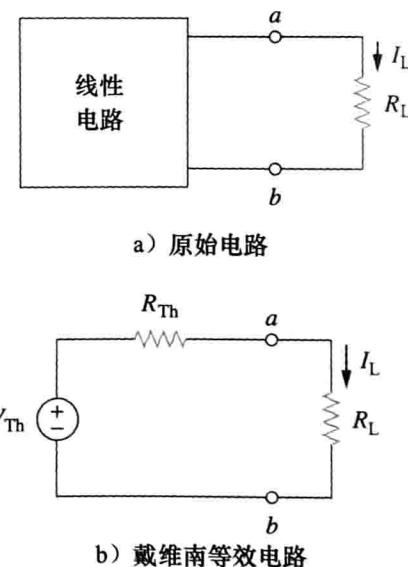


图 4-26 带有负载的电路

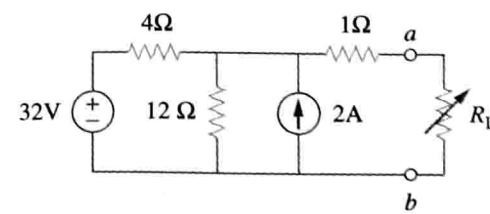


图 4-27 例 4-8 图

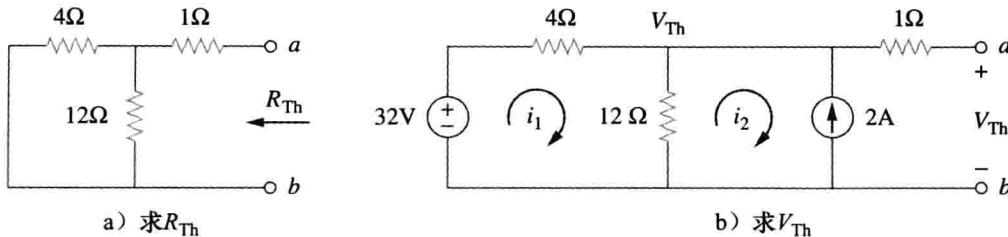


图 4-28 例 4-8 图

另外，采用节点分析法求解更容易，由于没有电流流过 1Ω 电阻，因而可以忽略该电阻。对上面的节点应用 KCL，可得：

$$\frac{32 - V_{\text{Th}}}{4} + 2 = \frac{V_{\text{Th}}}{12}$$

或

$$96 - 3V_{\text{Th}} + 24 = V_{\text{Th}} \Rightarrow V_{\text{Th}} = 30\text{V}$$

与上述结果相同。还可以采用电源变换的方法求解 V_{Th} 。

戴维南等效电路如图 4-29 所示，由此可得流过 R_L 的电流为：

$$I_L = \frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

当 $R_L = 6\Omega$ 时：

$$I_L = \frac{30}{10} = 3(\text{A})$$

当 $R_L = 16\Omega$ 时：

$$I_L = \frac{30}{20} = 1.5(\text{A})$$

当 $R_L = 36\Omega$ 时：

$$I_L = \frac{30}{40} = 0.75(\text{A})$$

练习 4-8 利用戴维南定理求图 4-30 所示电路中端口 a-b 左侧的等效电路，并计算电流 I。
答案： $V_{\text{Th}} = 6\text{V}$, $R_{\text{Th}} = 3\Omega$, $I = 1.5\text{A}$

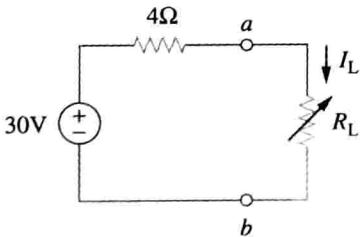


图 4-29 例 4-8 的戴维南等效电路

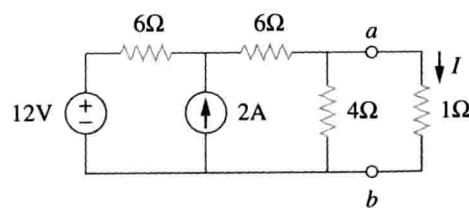


图 4-30 练习 4-8 图

例 4-9 求图 4-31 所示电路从端口 a-b 看进去的戴维南等效电路。

解：与上例中的电路不同，本电路中含有一个受控源。为求出 R_{Th} ，将独立源置为零，但受控源保留不变。然而，由于存在受控源，需在 a-b 两端外接一个电压源 v_o 来激励电路如图 4-32a 所示。为便于计算，可以假定 $v_o = 1\text{V}$ (该电路为线性电路)，目的是要求出流过该端口的电流 i_o ，从而得到 $R_{\text{Th}} = 1/i_o$ (另外，也可以外接一个 1A 的电流源，求出相应的电压 v_o ，从而得到 $R_{\text{Th}} = v_o/1$)。

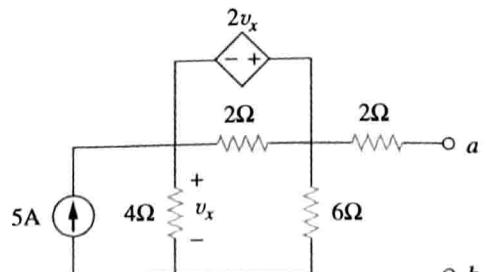


图 4-31 例 4-9 图

对图 4-32a 所示电路中的回路 1 应用网孔分析法, 得到:

$$-2v_x + 2(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{或} \quad v_x = i_1 - i_2$$

而 $-4i_2 = v_x = i_1 - i_2$, 因此:

$$i_1 = -3i_2 \quad (4.9.1)$$

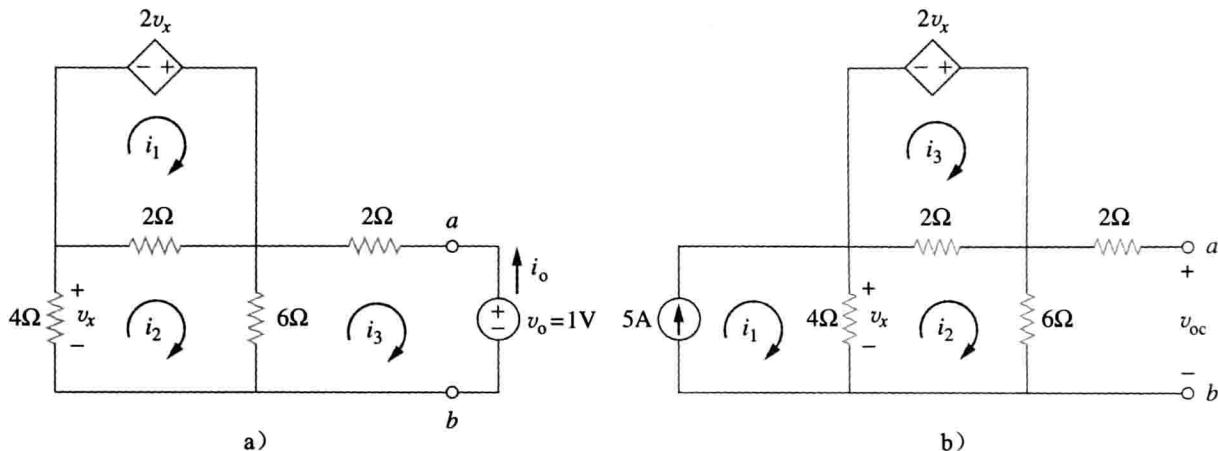


图 4-32 求例 4-9 中的 R_{Th} 与 V_{Th}

对回路 2 与回路 3 应用 KVL, 可得:

$$4i_2 + 2(i_2 - i_1) + 6(i_2 - i_3) = 0 \quad (4.9.2)$$

$$6(i_3 - i_2) + 2i_3 + 1 = 0 \quad (4.9.3)$$

解得:

$$i_3 = -\frac{1}{6} \text{ A}$$

而 $i_o = -i_3 = \frac{1}{6} \text{ A}$, 因此:

$$R_{Th} = \frac{1}{i_o} = 6(\Omega)$$

求 V_{Th} 就是求出图 4-32b 所示电路中的 v_{oc} , 利用网孔分析法, 可得:

$$i_1 = 5 \quad (4.9.4)$$

$$-2v_x + 2(i_3 - i_2) = 0 \Rightarrow v_x = i_3 - i_2 \quad (4.9.5)$$

$$4(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6i_2 = 0$$

即

$$12i_2 - 4i_1 - 2i_3 = 0 \quad (4.9.6)$$

而 $4(i_1 - i_2) = v_x$, 解上述方程, 可得 $i_2 = 10/3$, 因此:

$$V_{Th} = v_{oc} = 6i_2 = 20(\text{V})$$

最后得到的戴维南等效电路如图 4-33 所示。

练习 4-9 求图 4-34 所示电路端口左侧的戴维南等效电路。

答案: $V_{Th} = 5.333\text{V}$, $R_{Th} = 444.4\text{m}\Omega$

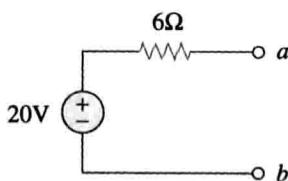


图 4-33 图 4-31 的戴维南等效电路

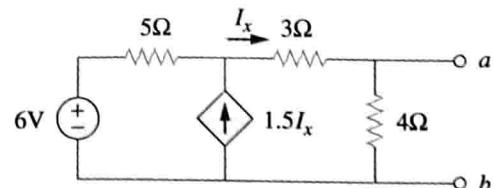


图 4-34 练习 4-9 图

例 4-10 试确定图 4-35a 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

解：1. 明确问题。本例所要解决的问题已经很清楚，即要求解图 4-35a 所示电路的戴维南等效电路。

2. 列出已知条件。本例电路中包含相互并联的 2Ω 电阻和 4Ω 电阻，这两个电阻又与受控电流源相并联，求解本题非常重要的一点是电路中不包含独立电源。

3. 确定备选方案。首先要考虑的问题是，由于本例电路中不包括独立电源，因此必须外接电源激励该电路。另外，如果没有独立电源，就无法求出 V_{Th} 的值，而仅能求解 R_{Th} 的值。

激励本例电路最简单的方法是利用 $1V$ 电压源或者 $1A$ 电流源。由于本例最终要求出等效电阻(正电阻或者负电阻)，所以最好采用电流源和节点分析法，这样可以在输出端得到电阻上的电压(因为流过电路的电流为 $1A$ ，所以 v_o 就等于 1 乘以等效电阻值)。

另一种方法是，利用 $1V$ 电压源激励该电路，并采用网孔分析法求出等效电阻。

4. 尝试求解。首先写出图 4-35b 中节点 a 处的节点方程，假设 $i_o = 1A$ 。

$$2i_x + (v_o - 0)/4 + (v_o - 0)/2 + (-1) = 0 \quad (4.10.1)$$

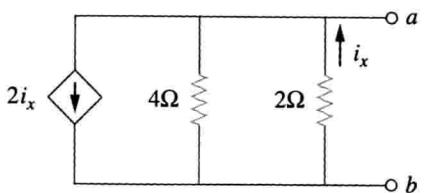
由于要求解的未知变量有两个，但仅有一个方程，因此，需要如下约束方程：

$$i_x = (0 - v_o)/2 = -v_o/2 \quad (4.10.2)$$

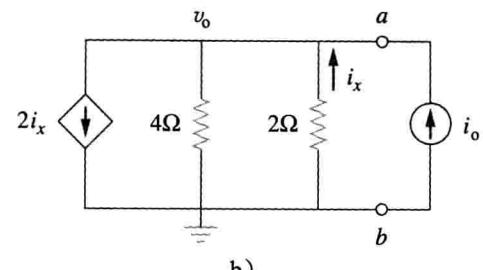
将式(4.10.2)代入式(4.10.1)，得到：

$$\begin{aligned} 2(-v_o/2) + (v_o - 0)/4 + (v_o - 0)/2 + (-1) &= 0 \\ = \left(-1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)v_o - 1 &\quad \text{或} \quad v_o = -4V \end{aligned}$$

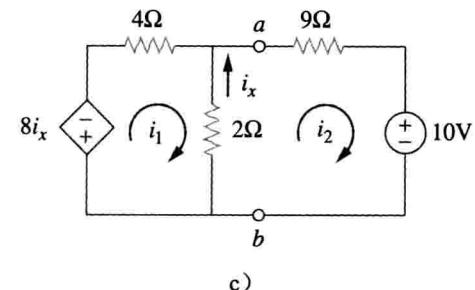
由于 $v_o = 1 \times R_{Th}$ ，于是 $R_{Th} = \frac{v_o}{1} = -4(\Omega)$ 。



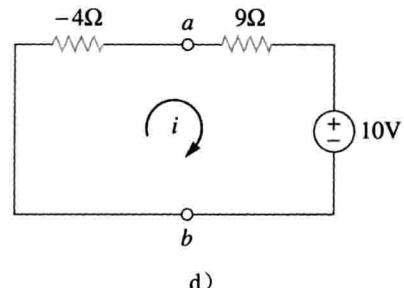
a)



b)



c)



d)

图 4-35 例 4-10 图

等效电阻值为负值表明，按照关联参考方向，图 4-35a 所示电路是提供功率的。当然，图 4-35a 中的电阻是不能提供功率的(它们吸收功率)，只有受控源是提供功率的，本例说明了如何利用受控源和电阻来模拟负电阻。

5. 评价结果。首先，得到的等效电阻为负值，在无源电路中是不可能出现这种情况的，但在本例的电路中，确实存在一个有源器件(即受控电流源)，因此，等效电路实际上应该是一个可以提供功率的有源电路。

下面对答案进行评价。评价的最佳方式是利用另一种不同的求解方法对结果进行验证，看是否能够得到相同的解。假设在原电路输出端串联连接一个 9Ω 电阻和一个 $10V$ 电压源，并且在戴维南等效电路的输出端也连接同样的器件。为了使电路易于求解，可以利用电源变换的方法将相互并联的受控电流源和 4Ω 电阻变换为相互串联的受控电压源和 4Ω 电阻，这样就得到如图 4-35c 所示的电路。

于是，可以写出两个网孔方程：

$$\begin{aligned} 8i_x + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) &= 0 \\ 2(i_2 - i_1) + 9i_2 + 10 &= 0 \end{aligned}$$

注意，现在仅得到两个方程，但存在三个未知量，因此，需要一个约束方程，即：

$$i_x = i_2 - i_1$$

这样就可以得到回路 1 的新方程，简化后可得：

$$(4 + 2 - 8)i_1 + (-2 + 8)i_2 = 0$$

或

$$-2i_1 + 6i_2 = 0 \quad \text{或} \quad i_1 = 3i_2$$

$$-2i_1 + 11i_2 = -10$$

将上述第一个方程代入第二个方程可得：

$$-6i_2 + 11i_2 = -10 \quad \text{或} \quad i_2 = -10/5 = -2 \text{ (A)}$$

由于图 4-35d 中仅有一个回路，所以利用戴维南等效电路很容易得到：

$$-4i + 9i + 10 = 0 \quad \text{或} \quad i = -10/5 = -2 \text{ (A)}$$

6. 是否满意？至此已经很清楚地求出了本例所要求的等效电路，并且验证了答案的有效性（将利用等效电路得到的结果与对原电路增加负载后得到的结果进行比较）。可以将上述求解过程作为本题的答案。

 练习 4-10 求图 4-36 所示电路的戴维南等效电路。

答案： $V_{Th} = 0V$, $R_{Th} = -7.5\Omega$

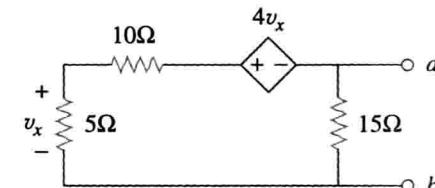


图 4-36 练习 4-10 图

4.6 诺顿定理

1926 年，也就是戴维南定理公布 43 年之后，贝尔电话实验室的美国工程师诺顿 (E. L. Norton) 也提出了类似的定理——诺顿定理。

诺顿定理：线性二端电路可以用由电流源 I_N 和与之并联的电阻 R_N 构成的等效电路替代，其中 I_N 为流过端口的短路电流， R_N 为独立电流源关闭时端口的输入电阻或等效电阻。

于是，图 4-37a 所示电路可以用图 4-37b 所示的等效电路替代。

诺顿定理的证明将在下一节中给出，本节主要讨论如何确定 R_N 与 I_N 。 R_N 的确定方法与上一节中 R_{Th} 的确定方法基本相同。实际上，由电源变换的关系可知，戴维南等效电阻与诺顿等效电阻是相等的，即：

$$R_N = R_{Th} \quad (4.9)$$

求诺顿等效电流 I_N 就是要求出图 4-37 所示两个电路中端点 a 流向端点 b 的短路电流，很明显，图 4-37b 所示电路的短路电流就是 I_N ，该电流必定与图 4-37a 所示电路中从端点 a 流向端点 b 的短路电流相同，因为这两个电路是等效的，于是如图 4-38 所示，有：

$$I_N = i_{sc} \quad (4.10)$$

在图 4-38 中，受控源与独立源的处理方法与采用戴维南定理时的处理方法相同。

诺顿定理与戴维南定理的两个基本关系为 $R_N = R_{Th}$ ，即式(4.9)和：

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \quad (4.11)$$

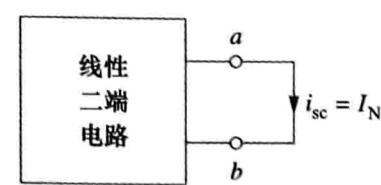


图 4-38 求诺顿等效电流 I_N

显然，这是电源变换的基本公式。正因为如此，通常也称电源变换为戴维南-诺顿变换。

提示：戴维南等效电路与诺顿等效电路是通过电源变换联系起来的。

由于式(4.11)将 V_{Th} 、 I_N 和 R_{Th} 三者联系在一起，所以要确定戴维南等效电路或诺顿等效电路，就要求出：

- $a-b$ 两端的开路电压 v_{oc} 。
- 流过 $a-b$ 的短路电流 i_{sc} 。
- 所有独立源关闭时， $a-b$ 两端的等效电阻或输入电阻 R_{in} 。

只要用最简便的方法计算出上述三个参数中的两个，就可以根据欧姆定理求得第三个参数。例 4-11 将对这个问题进行说明。另外，因为：

$$V_{Th} = v_{oc} \quad (4.12a)$$

$$I_N = i_{sc} \quad (4.12b)$$

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N \quad (4.12c)$$

所以，通过开路测试和短路测试就足以求出至少包含一个独立源电路的戴维南等效电路或诺顿等效电路。

例 4-11 试确定图 4-39 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

解：采用与求解戴维南等效电路中电阻 R_{Th} 一样的方法求 R_N ，设电路中的独立源为零，从而得到图 4-40a 所示电路，由该电路可以求得 R_N ，即：

$$R_N = 5 \parallel (8 + 4 + 8) = 5 \parallel 20 = \frac{20 \times 5}{25} = 4(\Omega)$$

求 I_N 时将 $a-b$ 两端短路，得到图 4-40b 所示电路。忽略已被短路的 5Ω 电阻，利用网孔分析法可得：

$$i_1 = 2A, \quad 20i_2 - 4i_1 - 12 = 0$$

由上述方程可得：

$$i_2 = 1A = i_{sc} = I_N$$

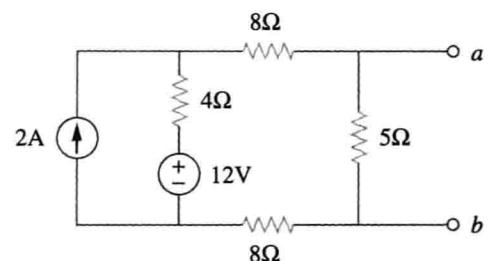


图 4-39 例 4-11 图

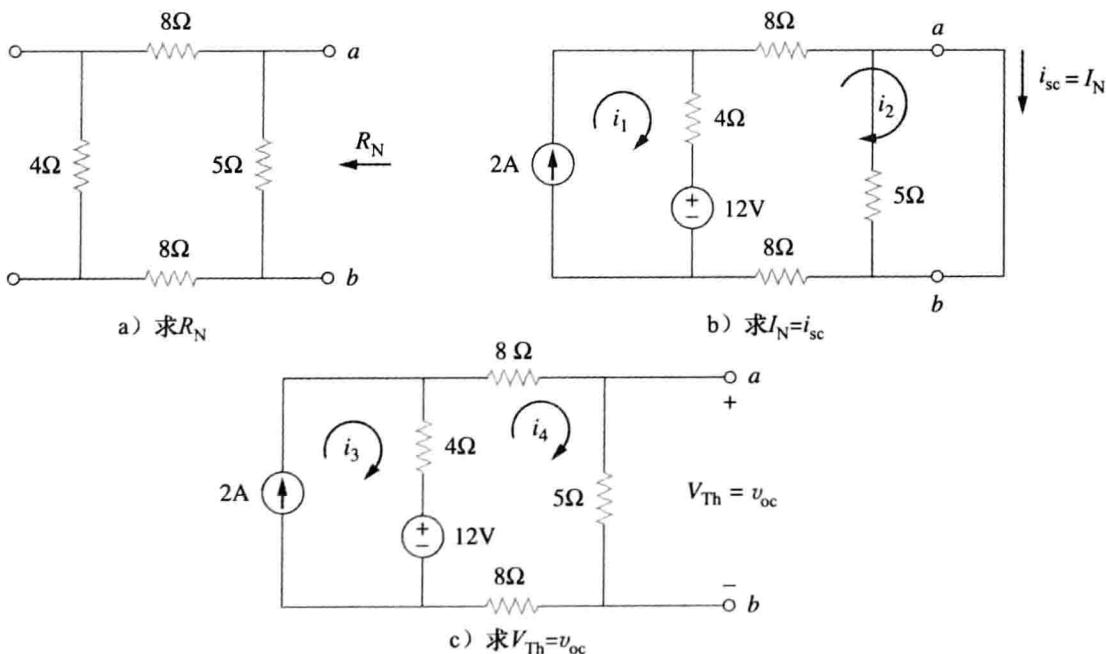


图 4-40 例 4-11 图

另外，还可以由 V_{Th}/R_{Th} 求出 I_N ，其中 V_{Th} 为图 4-40c 所示电路中 $a-b$ 两端的开路电压。利

用网孔分析法，可得：

$$i_3 = 2A$$

$$25i_4 - 4i_3 - 12 = 0 \Rightarrow i_4 = 0.8A$$

且

$$v_{oc} = V_{Th} = 5i_4 = 4(V)$$

因此：

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{4} = 1(A)$$

结果与前面一样，这同时也验证了式(4.12c)，即 $R_{Th} = v_{oc}/i_{sc} = 4/1 = 4(\Omega)$ 。于是诺顿等效电路如图 4-41 所示。

 练习 4-11 求图 4-42 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

答案： $R_N=3\Omega$, $I_N=4.5A$

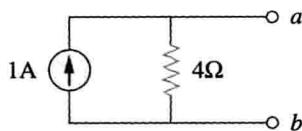


图 4-41 图 4-39 的诺顿等效电路

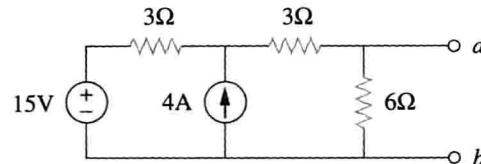


图 4-42 练习 4-11 图

例 4-12 利用诺顿定理，确定图 4-43 所示电路中端口 $a-b$ 处的 R_N 与 I_N 。

解：计算 R_N 时，将独立电压源置为零，端口 $a-b$ 处连接一个电压 $v_o=1V$ （或任意电压值）的电压源，得到如图 4-44a 所示的电路。图中由于 4Ω 电阻被短路，故将其忽略不计，同时 5Ω 电阻、电压源和受控电流源三者是并联的，因此， $i_x=0$ 。在节点 a 处，有 $i_o=1V/5\Omega=0.2A$ ，并且：

$$R_N = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{0.2} = 5(\Omega)$$

计算 I_N 时，将 $a-b$ 两端短路，并求出如图 4-44b 所示电路中的电流 i_{sc} 。可以看出， 4Ω 电阻、 $10V$ 电压源、 5Ω 电阻与受控电流源均为并联，因此：

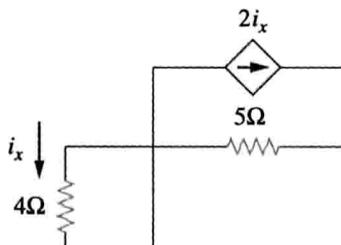
$$i_x = \frac{10}{4} = 2.5(A)$$

在节点 a 处应用 KCL 可得：

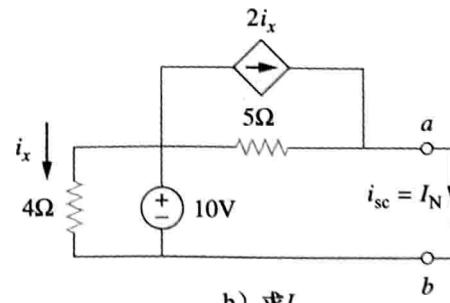
$$i_{sc} = \frac{10}{5} + 2i_x = 2 + 2 \times 2.5 = 7(A)$$

于是：

$$I_N = 7A$$



a) 求 R_N



b) 求 I_N

图 4-44 例 4-12 图

练习 4-12 求图 4-45 所示电路端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。答案: $R_N=1\Omega$, $I_N=10A$

4.7 戴维南定理与诺顿定理的推导

本节将利用叠加定理证明戴维南定理与诺顿定理。

考虑如图 4-46a 所示的线性电路，假定该电路中包含有电阻、受控源和独立源。外部电源提供的电流通过端口 $a-b$ 进入该电路。现在的目的是要证明图 4-46a 所示电路在端口 $a-b$ 的电压-电流关系与图 4-46b 所示的戴维南等效电路在端口 $a-b$ 的电压-电流关系相同。为简单起见，假定图 4-46a 所示的线性电路中包含两个独立电压源 v_{s1} 、 v_{s2} 和两个独立电流源 i_{s1} 、 i_{s2} 。利用叠加定理可以得到任意电路变量，如端电压 v ，即要考虑包括外部电源 i 在内的各独立源的贡献。根据叠加定理，端电压 v 为：

$$v = A_0 i + A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2} \quad (4.13)$$

其中， A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 均为常数。式(4.13)等号右边各项为相关独立源的贡献，即 $A_0 i$ 是外部电流源 i 对 v 的贡献， $A_1 v_{s1}$ 是电压源 v_{s1} 对 v 的贡献，依此类推。将表示内部独立源贡献的各项合并为 B_0 ，则式(4.13)成为：

$$v = A_0 i + B_0 \quad (4.14)$$

其中， $B_0 = A_1 v_{s1} + A_2 v_{s2} + A_3 i_{s1} + A_4 i_{s2}$ 。下面计算常数 A_0 与 B_0 的值，当 $a-b$ 两端开路时， $i=0$ ，并且 $v=B_0$ ，因此 B_0 为开路电压 v_{oc} ，与 V_{Th} 相同，于是：

$$B_0 = V_{Th} \quad (4.15)$$

当所有内部电源都关闭时， $B_0=0$ ，此时电路可以用等效电阻 R_{eq} 来取代， R_{eq} 与 R_{Th} 相同，于是，式(4.14)变为：

$$v = A_0 i = R_{Th} i \Rightarrow A_0 = R_{Th} \quad (4.16)$$

将 A_0 与 B_0 的值代入式(4.14)，得到：

$$v = R_{Th} i + V_{Th} \quad (4.17)$$

即图 4-46b 所示电路在端口 $a-b$ 的电压-电流关系。至此，证明了图 4-46a 与图 4-46b 两个电路是等效的。

如图 4-47a 所示，当用电压源 v 驱动同一线性电路时，流入该电路的电流可由叠加定理表示为：

$$i = C_0 v + D_0 \quad (4.18)$$

其中， $C_0 v$ 是外部电压源 v 对电流 i 的贡献， D_0 是所有内部独立源对 i 的贡献之和。当端口 $a-b$ 被短路时， $v=0$ ，于是 $i=D_0=-i_{sc}$ ，其中 i_{sc} 为从端口 a 流出的短路电流，与诺顿电流 I_N 相同，即：

$$D_0 = -I_N \quad (4.19)$$

当所有内部独立源均被关闭时， $D_0=0$ ，电路可以用等效电阻 R_{eq} (或等效电导 $G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$) 替代， R_{eq} 就是 R_{Th} 或 R_N 。于是，式(4.18)变为：

$$i = \frac{v}{R_{Th}} - I_N \quad (4.20)$$

即图 4-47b 所示电路在端口 $a-b$ 处的电压-电流关系，从而证明了图 4-47a 与图 4-47b 两个电路是等效的。

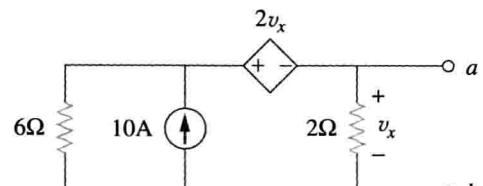
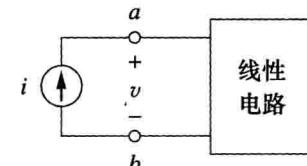
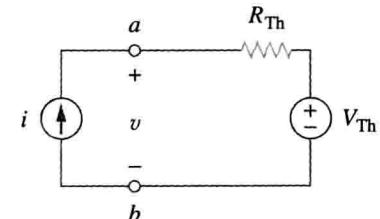


图 4-45 练习 4-12 图

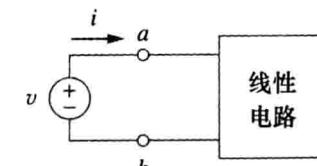


a) 电流驱动电路

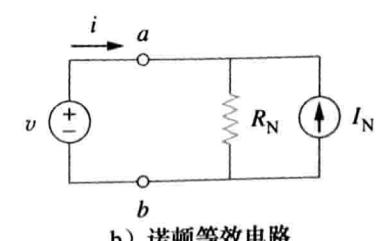


b) 戴维南等效电路

图 4-46 戴维南定理的推导



a) 电压驱动电路



b) 诺顿等效电路

图 4-47 诺顿定理的推导

4.8 最大功率传输定理

许多实际电路的作用是为负载提供功率。在通信等应用中，希望传递给负载的功率最大。本节在给定系统及其内部损耗的条件下，讨论负载的最大功率传输问题。需要注意，为负载传输最大功率会造成电路内部损耗大于或等于传输给负载的功率。

在计算线性电路传输给负载的最大功率时，戴维南等效电路是非常有用的。假设电路的负载 R_L 可调，如果除负载以外的整个电路用戴维南等效电路替代，如图 4-48 所示，则传输给负载的功率为：

$$P = i^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L \quad (4.21)$$

对于给定电路， V_{Th} 与 R_{Th} 是固定的。改变负载电阻 R_L 时，传输给负载的功率曲线如图 4-49 所示。由图 4-49 可以看出，当 R_L 很小或很大时，传输给负载的功率都很小，但当 R_L 取 $0 \sim \infty$ 之间的某个值时，传输给负载的功率存在最大值。下面证明当 $R_L = R_{Th}$ 时，功率会出现最大值。这就是最大功率定理 (maximum power theorem)。

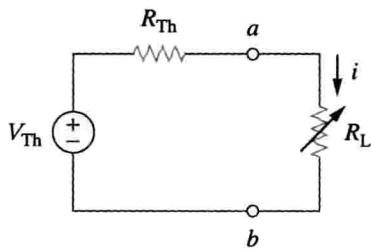
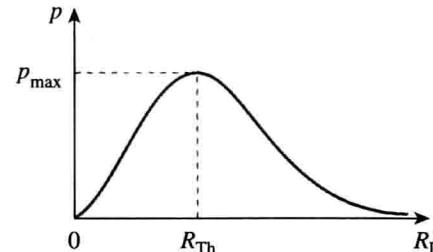


图 4-48 最大功率传递电路

图 4-49 传递给负载的功率与电阻 R_L 之间的函数关系曲线

当负载电阻等于从负载端看进去的戴维南等效电阻 ($R_L = R_{Th}$) 时，传输给负载的功率最大。

为了证明最大功率传输定理，对式(4.21)中的 P 关于 R_L 求微分，并令微分后的结果等于零，得到：

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dR_L} &= V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right] \\ &= V_{Th}^2 \left[\frac{(R_{Th} + R_L - 2R_L)}{(R_{Th} + R_L)^3} \right] = 0 \end{aligned}$$

即

$$0 = R_{Th} + R_L - 2R_L = R_{Th} - R_L \quad (4.22)$$

于是得到：

$$R_L = R_{Th} \quad (4.23)$$

式(4.23)说明当负载电阻 R_L 等于戴维南等效电阻 R_{Th} 时，可实现最大功率传输。只要证明 $d^2 P / dR_L^2 < 0$ ，就可以说明满足式(4.23)的条件时，会实现最大功率传输。

将式(4.23)代入式(4.21)，得到所传输的最大功率为：

$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} \quad (4.24)$$

只有 $R_L = R_{Th}$ 时，式(4.24)成立；当 $R_L \neq R_{Th}$ 时，需利用式(4.21)计算传输给负载的功率。

提示：当 $R_L = R_{Th}$ 时，称电源与负载相匹配。

例 4-13 求图 4-50 所示电路中，实现最大功率传输时的负载电阻值 R_L ，并计算相应的最

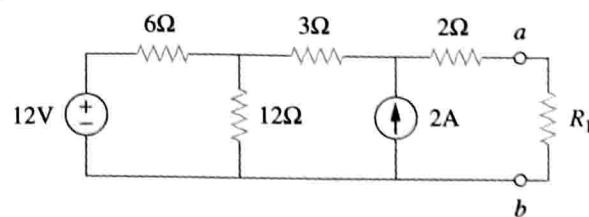


图 4-50 例 4-13 图

大功率。

解：需求出从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电阻 R_{Th} 以及端口 $a-b$ 的戴维南电压 V_{Th} 。为求出 R_{Th} ，利用图 4-51a 所示电路可得：

$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \parallel 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9(\Omega)$$

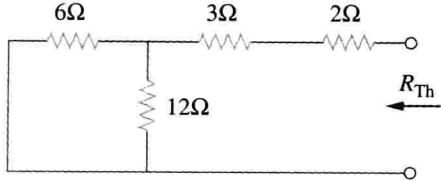
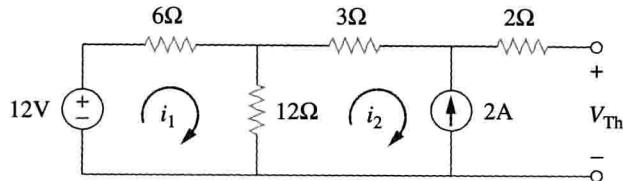
a) 求 R_{Th} b) 求 V_{Th}

图 4-51 例 4-13 图

为求出 V_{Th} ，利用图 4-51b 所示电路，由网孔分析法可得：

$$-12 + 18i_1 - 12i_2 = 0, \quad i_2 = -2A$$

解得 $i_1 = -2/3A$ 。对外回路应用 KVL 计算端口 $a-b$ 的电压 V_{Th} ，可得：

$$-12 + 6i_1 + 3i_2 + 2 \times 0 + V_{Th} = 0 \Rightarrow V_{Th} = 22V$$

实现最大功率传输时，负载电阻为：

$$R_L = R_{Th} = 9\Omega$$

此时，负载获得的最大功率为：

$$P_{max} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44(W)$$

练习 4-13 试求图 4-52 所示电路实现最大功率传输时的电阻值 R_L ，并计算相应的最大功率。

答案：4.222Ω, 2.901W

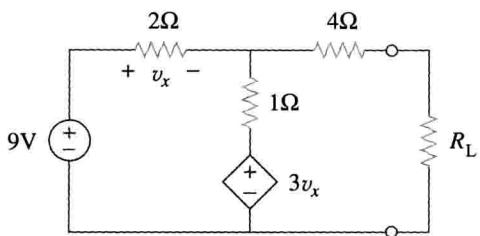


图 4-52 练习 4-13 图

4.9 基于 PSpice 的电路定理验证

本节学习如何利用 PSpice 软件验证本章介绍的电路定理，重点是利用该软件的直流扫描分析求解电路中任意一对节点处的戴维南等效电路和诺顿等效电路及传输给负载的最大功率。

为了确定电路在某开路端口处的戴维南等效电路，首先要用 PSpice 的电路原理图编辑器画出电路原理图，并在端口处插入一个探测用独立电流源 I_p 。该探测电流源的部件名称为 ISRC。之后对 I_p 进行直流扫描，通过 I_p 的电流的典型变化范围通常在 $0 \sim 1A$ 之间，增量步长为 $0.1A$ 。对电路执行保存和仿真操作后，可以利用探测程序显示 I_p 两端的电压与流经 I_p 的电流之间的关系曲线，该曲线中横坐标零点的截距就是戴维南等效电压，而其斜率即为戴维南等效电阻。

确定诺顿等效电路的步骤也是类似的，不同点只是在端口处应插入探测用独立电压源 V_p （元件名称为 VSRC），之后对 V_p 运行直流扫描程序，并设置 V_p 以增量步长 $0.1V$ 在 $0 \sim 1V$ 之间变化。仿真结束后，利用探测菜单得到流经 V_p 的电流与 V_p 两端的电压之间的关系曲线，该曲线中横坐标零点的截距即为诺顿等效电流，其斜率则为诺顿等效电导。

利用 PSpice 确定传递给负载的最大功率时，需对图 4-48 所示电路中 R_L 的元件值执行直流参数扫描程序，并画出传输给负载的功率与 R_L 之间的关系曲线。由图 4-49 可知，当 $R_L = R_{Th}$ 时，传输给负载的功率最大。例 4-15 将通过一个实例予以详细说明。

注意，独立电压源与独立电流源的部件名称分别为 VSRC 与 ISRC。

例 4-14 在如图 4-31 所示电路中(参见例 4-9)，试利用 PSpice 确定其戴维南等效电路和诺顿等效电路。

解：(a)为了确定图 4-31 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南电阻 R_{Th} 与戴维南电压 V_{Th} ，首先要利用原理图编辑器画出电路原理图，如图 4-53a 所示，注意，在该电路端口处已插入一个探测用电流源 I_2 。在 Analysis/Setup 菜单下，选择直流扫描(DC Sweep)。在 DC Sweep 对话框中，选择扫描类型(Sweep Type)为线性(Linear)，选择扫描参数类型(Sweep Var. Type)为电流源(Current Source)，在部件名称(Name)设置框中输入 I_2 ，并设置起始值(Start Value)为 0，终值(End Value)为 1，增量步长(Increment)为 0.1。运行仿真程序后，在 PSpiceA/D 窗口中增加轨迹曲线 $V(I_2: -)$ ，即可得到如图 4-53b 所示曲线，由该曲线可知：

$$V_{Th} = \text{零点截距} = 20V, \quad R_{Th} = \text{斜率} = \frac{26 - 20}{1} = 6(\Omega)$$

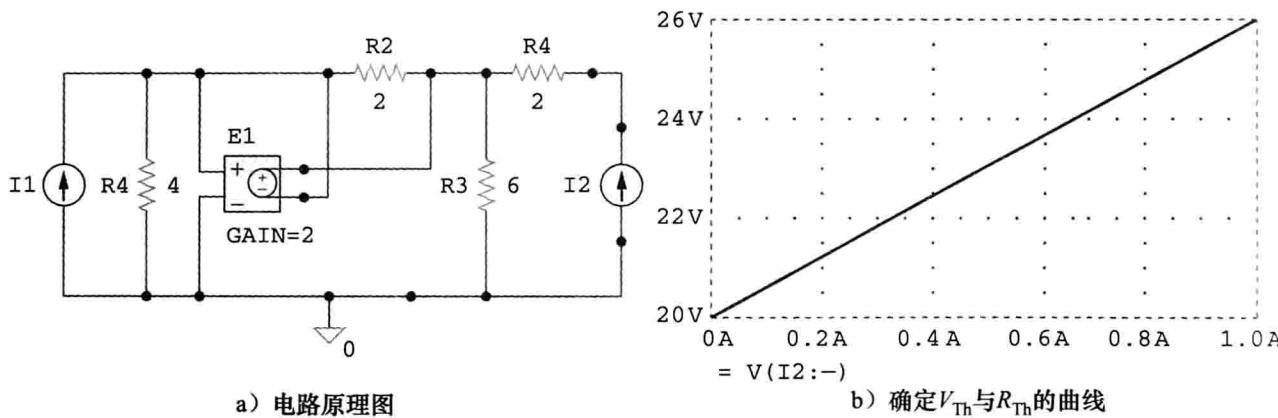


图 4-53 例 4-14 图

该结果与例 4-9 中的理论分析一致。

(b)为了确定诺顿等效电路，需利用探测电压源 V_1 替代图 4-53a 所示电路中的探测电流源，得到如图 4-54a 所示电路。同样，在 DC Sweep 对话框中，选择扫描类型(Sweep Type)为线性(Linear)，选择扫描参数类型(Sweep Var. Type)为电压源(Voltage Source)，在部件名称(Name)设置框中输入 V_1 ，并设置起始值(Start Value)为 0，终值(End Value)为 1，增量步长(Increment)为 0.1。在 PSpiceA/D 窗口中增加轨迹曲线 $I(V_1)$ ，即可得到如图 4-54b 所示的曲线，由该曲线可知：

$$I_N = \text{零点截距} = 3.335A$$

$$G_N = \text{斜率} = \frac{3.335 - 3.165}{1} = 0.17(S)$$

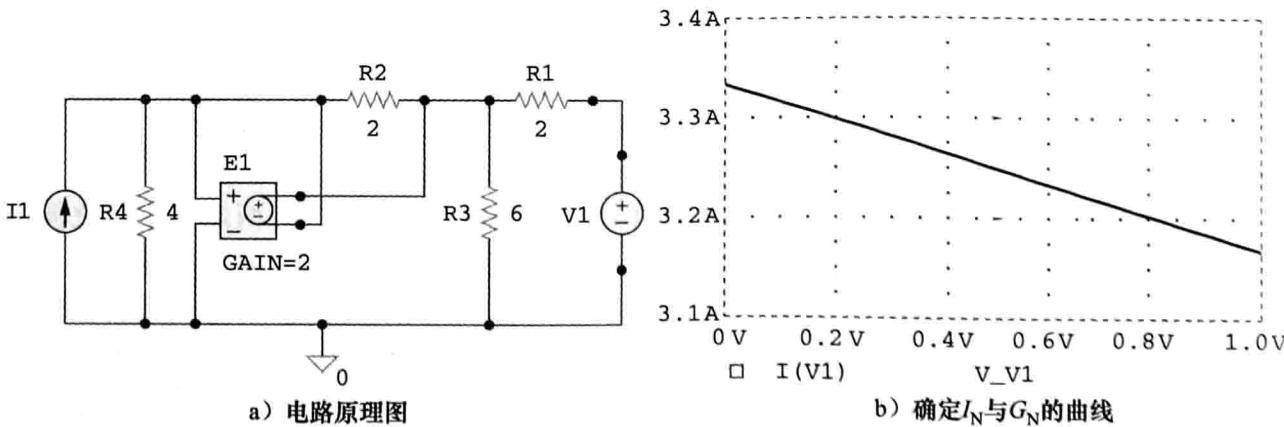


图 4-54 例 4-14 图

练习 4-14 利用 PSpice 重做练习 4-9。

答案: $V_{Th} = 5.333V$, $R_{Th} = 444.4m\Omega$

例 4-15 如图 4-55 所示电路, 利用 PSpice 确定传递给 R_L 的最大功率。

解: 需对 R_L 执行直流扫描程序来确定传递给它的功率何时为最大值。首先利用原理图编辑器画出如图 4-56 所示的电路, 之后执行如下三个步骤, 做好电路直流扫描的准备工作。

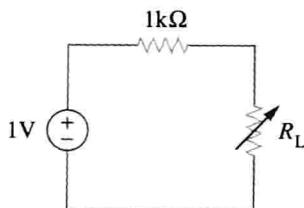


图 4-55 例 4-15 图

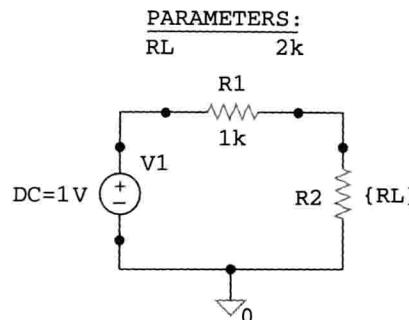


图 4-56 图 4-55 的仿真图

第一步是将 R_L 的阻值定义为参数, 因为在之后的电路仿真中要改变其阻值, 为此:

1. 双击(DCLICKL)阻值为 1k 的电阻 R_2 (该电阻即 R_L), 打开设置属性值(Set Attribute Value)对话框。

2. 用 $\{RL\}$ 取代 1k, 单击 OK 按钮完成更改。注意, 大括号是必需的。

第二步是定义参数, 为此:

1. 选择 Draw/GetNewPart/Libraries.../special. slb。

2. 在部件名称(PartName)对话框中输入 PARAM, 并单击 OK 按钮。

3. 将对话框拖至电路附近的适当位置。

4. 单击结束放置模式。

5. 双击打开部件名称(PartName)PARAM 对话框。

6. 单击 NAME1=, 并在取值(Value)对话框中输入 RL(无需大括号), 之后单击 Save Attr 接受这一更改。

7. 单击 VALUE1=, 并在取值(Value)对话框中输入 2k, 之后单击 Save Attr 接受这一更改。

8. 单击 OK 按钮。

第 7 步中的 2k 对于偏置点的计算是必需的, 不能为空。

第三步是设置直流扫描(DC Sweep)并扫描参数, 为此:

1. 选择 Analysis/Setup 菜单, 打开直流扫描(DC Sweep)对话框。

2. 选择扫描类型(Sweep Type)为线性(Linear)(或者当 R_L 取值范围很大时, 选择 Octave)。

3. 选择扫描参数类型(Sweep Var. Type)为全局参数(Global Parameter)。

4. 在部件名称(Name)设置框中输入 RL。

5. 在初始值(Start Value)设置框中输入 100。

6. 在终值(End Value)设置框中输入 5k。

7. 在增量步长(Increment)设置框中输入 100。

8. 单击 OK 按钮关闭对话框, 表示接受上述设定的参数。

完成上述步骤并保存电路之后, 就可以对电路进行仿真了。选择 Analysis/Simulate, 如果没有错误, 则在 PSpiceA/D 窗口中选择 Add Trace, 并在轨迹命令(Trace Command)

设置框中输入 $-V(R2:2) * I(R2)$ (因为 $I(R2)$ 是负的, 所以需要负号)。于是, 就可以得到 R_L 从 100Ω 变化到 $5k\Omega$ 时, 传递到负载 R_L 的功率曲线。在轨迹命令(Trace Command)设置框中输入 $V(R2:2) * V(R2:2)/RL$, 同样可以得到负载 R_L 吸收的功率曲线, 如图 4-57 所示。由图可见, 负载电阻吸收的最大功率为 $250\mu\text{W}$ 。注意, 与理论分析的结果相同, 只有当 $R_L=1\text{k}\Omega$ 时, 才会出现功率的最大值。

练习 4-15 如果将图 4-55 所示电路中的 $1\text{k}\Omega$ 电阻替换为 $2\text{k}\Omega$ 电阻, 试求传递给 R_L 的最大功率。

答案: $125\mu\text{W}$

† 4.10 应用实例

这一节讨论与本章概念密切相关的两个实际应用: 电源建模与电阻测量。

4.10.1 电源建模

电源建模是说明戴维南等效电路和诺顿等效电路经常用来描述电池等有源电路的特征。对于理想电压源, 无论负载从它获取多大的电流, 电压源总是提供恒定的电压, 而对于理想电流源, 无论负载电压有多大, 电流源总是提供恒定的电流。实际电压源和电流源均非理想电源, 因为它们包含内部电阻或源电阻 R_s 与 R_p , 如图 4-58 所示。当 $R_s \rightarrow 0$, $R_p \rightarrow \infty$ 时, 实际电源就会变成理想电源。为了证明这一结论, 下面考虑负载对电压源的影响, 如图 4-59a 所示, 根据分压原理, 负载电压为:

$$v_L = \frac{R_L}{R_s + R_L} v_s \quad (4.25)$$

随着 R_L 的增大, 负载电压趋于电源电压 v_s , 如图 4-59b 所示。对于式(4.25)应该注意:

- 如果电源的内部电阻 R_s 为零, 或 $R_s \ll R_L$, 则负载电压将为常量, 即与 R_L 相比较, R_s 越小, 电压源就越接近理想电源。
- 不接负载(即电源开路, 从而 $R_L \rightarrow \infty$)时, $v_{oc} = v_s$, 因此可以将 v_s 看成是空载源电压。接上负载就会造成终端电压幅度的下降, 这种效应成为负载效应。

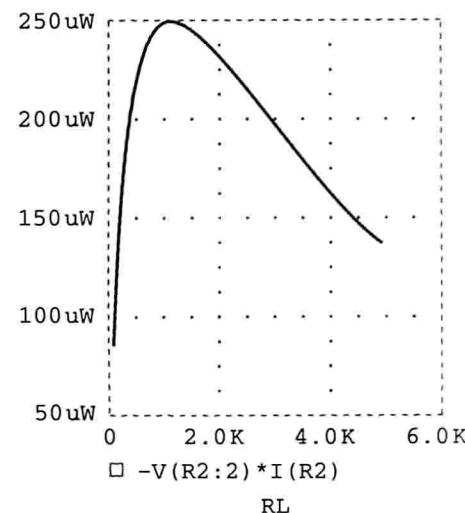
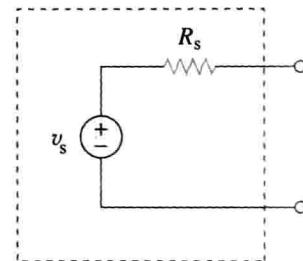
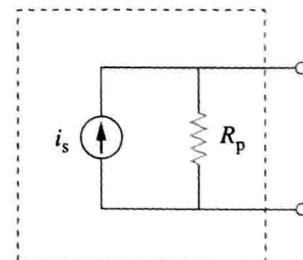


图 4-57 例 4-15 中功率与负载电阻 R_L 之间的关系曲线

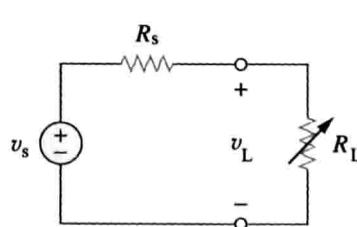


a) 实际电压源

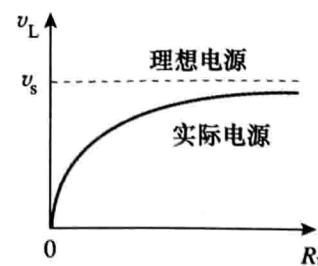


b) 实际电流源

图 4-58 电压源与电流源



a) 与负载 R_L 相连接的实际电压源



b) 负载电压随着 R_L 的减小而降低

图 4-59 电压源及负载电压随 R_L 的变化

对于实际电流源，当负载如图 4-60a 所示连接时，也会得到相同的结论。根据分流原理可得：

$$i_L = \frac{R_p}{R_p + R_L} i_s \quad (4.26)$$

图 4-60b 给出了负载电流随负载电阻增加的波动曲线，同样可以观察到由负载引起的电流下降（即负载效应）。只有在内部电阻相当大（即 $R_p \rightarrow \infty$ ，或者 $R_p \gg R_L$ ）的情况下，负载电流才是常量（即理想电流源）。

有时候需要知道电压源的空载源电压 v_s 及其内阻 R_s 。求解 v_s 与 R_s 时，应按照图 4-61 所示的步骤进行。首先，测量如图 4-61a 所示的开路电压 v_{oc} ，令：

$$v_s = v_{oc} \quad (4.27)$$

之后，在端口处连接一个可变电阻 R_L ，如图 4-61b 所示，改变电阻 R_L 的阻值直到测得的负载电压恰好等于开路电压的一半 ($v_L = v_{oc}/2$) 为止。此时满足 $R_L = R_{Th} = R_s$ ，断开电阻 R_L ，并测量 R_L 的阻值，则有：

$$R_s = R_L \quad (4.28)$$

例如，汽车电池的电压为 $v_s = 12V$ ，内阻为 $R_s = 0.05\Omega$ 。

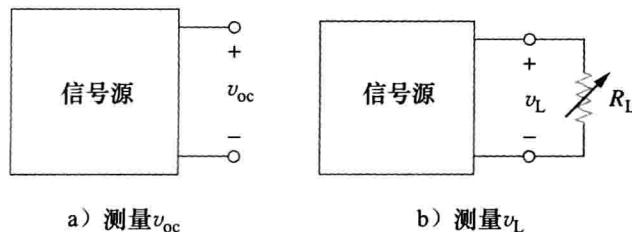


图 4-61 测量 v_{oc} 与 v_L

例 4-16 某电压源连接一个 $2W$ 负载时的端电压为 $12V$ ，断开负载时，端电压升高至 $12.4V$ 。（a）试计算该电压源的源电压 v_s 与内阻 R_s ；（b）当该电压源与 8Ω 负载相连时，试确定其端电压。

解：(a) 将电压源用其戴维南等效电路替代。断开负载时的端电压就是它的开路电压，即：

$$v_s = v_{oc} = 12.4V$$

接上负载后，如图 4-62a 所示， $v_L = 12V$ 且 $P_L = 2W$ 。因此：

$$P_L = \frac{v_L^2}{R_L} \Rightarrow R_L = \frac{v_L^2}{P_L} = \frac{12^2}{2} = 72(\Omega)$$

负载电流为：

$$i_L = \frac{v_L}{R_L} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}(A)$$

电压源内阻 R_s 两端的电压为源电压 v_s 与负载电压 v_L 之差，即：

$$12.4 - 12 = 0.4 = R_s i_L, \quad R_s = \frac{0.4}{I_L} = 2.4(\Omega)$$

(b) 现已确定电压源的戴维南等效电路，将 8Ω 负载连接至该戴维南等效电路两端，如图 4-62b 所示，根据分压原理可得：

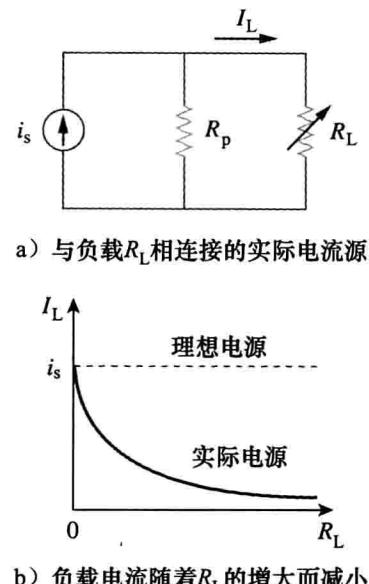


图 4-60 电压源与负载电流随 R_L 的变化

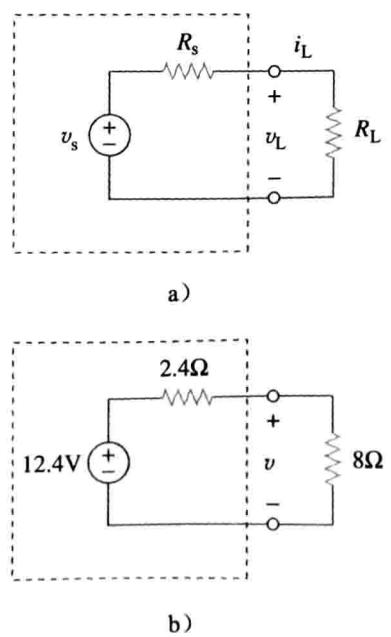


图 4-62 例 4-16 图

$$v = \frac{8}{8+2.4} \times 12.4 = 9.538(\text{V})$$

练习 4-16 某放大器开路时测得的开路电压为 9V，当一个 20Ω 的扬声器与该放大器相连时，其电压降至 8V。试计算与一个 10Ω 的扬声器相连时放大器的端电压。

答案：7.2V

4.10.2 电阻测量

虽然利用电阻表是测量电阻值的一种最简单的方法，但利用惠斯顿电桥(Wheatstone bridge)测量电阻则会得到更为精确的测量结果。电阻表量程可以分为小量程、中量程和大量程，而惠斯顿电桥则主要用于测量阻值位于中量程范围内的电阻，即 $1\Omega \sim 1M\Omega$ 。阻值极低的电阻可以利用毫欧表测量，而阻值极高的电阻值可以利用兆欧表测量。

在许多应用中都采用了惠斯顿电桥电路(或称电阻桥电路)，本节介绍如何利用它来测量未知电阻的阻值。未知电阻 R_x 与电桥的连接方式如图 4-63 所示，调节可变电阻直至无电流流过检流计为止。检流计实际上就是一套达松伐尔转动装置，与微安电流表类似，是一种灵敏的电流指示装置。在这种情况下， $v_1 = v_2$ ，称电桥处于平衡状态。由于没有电流流过检流计，所以 R_1 与 R_2 串联， R_3 与 R_x 串联。无电流流过检流计也说明 $v_1 = v_2$ ，利用分压原理有：

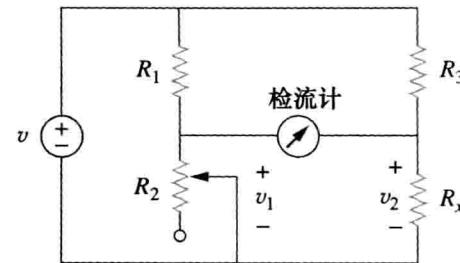


图 4-63 惠斯顿电桥， R_x 为待测电阻

$$v_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v = v_2 = \frac{R_x}{R_3 + R_x} v \quad (4.29)$$

因此，满足如下条件时没有电流流过检流计：

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_x}{R_3 + R_x} \Rightarrow R_2 R_3 = R_1 R_x$$

或

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 \quad (4.30)$$

如果 $R_1 = R_3$ ，并且调节 R_2 直至没有电流流过检流计，则有 $R_x = R_2$ 。

当惠斯顿电桥不平衡时，如何确定流过检流计的电流呢？此时需要求出检流计端口处电桥的戴维南等效电路(即求出 V_{Th} 与 R_{Th})，如果 R_m 为检流计的电阻，则在非平衡状态下流经检流计的电流为：

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} \quad (4.31)$$

例 4-18 将说明上述计算过程。

提示：惠斯顿电桥是由英国教授查尔斯·惠斯顿(Charles Wheatstone, 1802—1875)发明的。在美国工程师塞缪尔·摩尔斯(Samuel Morse)发明电报的同时，惠斯登也独立发明了电报。

例 4-17 在如图 4-63 所示电路中， $R_1 = 500\Omega$ ， $R_3 = 200\Omega$ ，当 R_2 调到 125Ω 时，电桥处于平衡状态，试求未知电阻 R_x 。

解：利用式(4.30)可得：

$$R_x = \frac{R_3}{R_1} R_2 = \frac{200}{500} \times 125 = 50(\Omega)$$

练习 4-17 在惠斯顿电桥电路中， $R_1 = R_3 = 1k\Omega$ ，调节 R_2 直至无电流流过检流计，此时

$R_2 = 3.2\text{k}\Omega$, 试问未知电阻的阻值是多少?

答案: $3.2\text{k}\Omega$

例 4-18 图 4-64 所示电路为一不平衡电桥, 如果检流计的电阻为 40Ω , 试求流过该检流计的电流。

解: 首先要利用 $a-b$ 两端的戴维南等效电路替代原电路, 戴维南电阻可以由图 4-65a 所示电路求得。注意, $3\text{k}\Omega$ 电阻与 $1\text{k}\Omega$ 电阻为并联关系, 同样 400Ω 电阻与 600Ω 电阻也是并联关系。在 $a-b$ 两端, 两组并联电阻合后又形成串联关系, 因此:

$$\begin{aligned} R_{Th} &= 3000 \parallel 1000 + 400 \parallel 600 \\ &= \frac{3000 \times 1000}{3000 + 1000} + \frac{400 \times 600}{400 + 600} = 750 + 240 = 990(\Omega) \end{aligned}$$

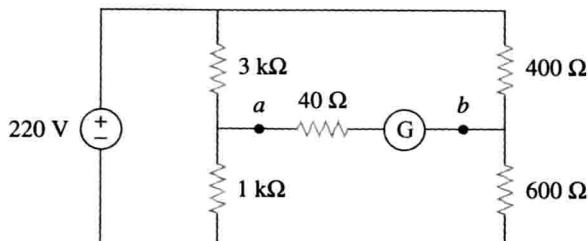
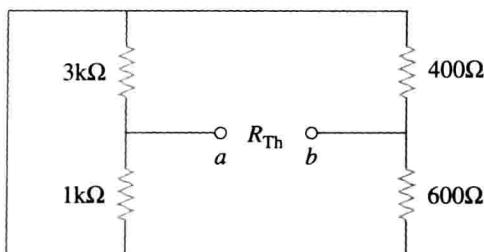
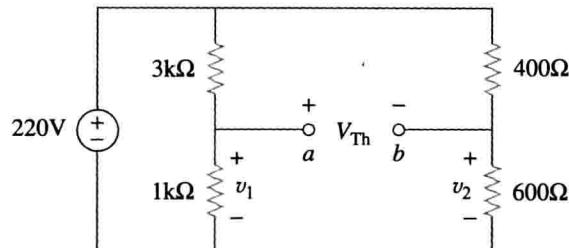


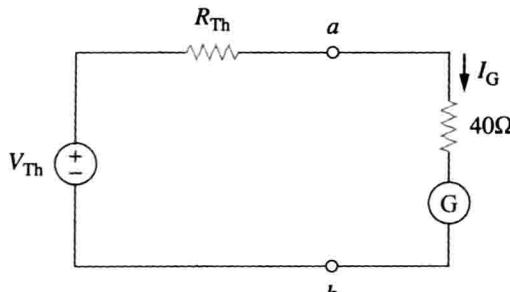
图 4-64 例 4-18 的不平衡电桥电路



a) 求 R_{Th}



b) 求 V_{Th}



c) 确定流过检流计的电流

图 4-65 例 4-18 图

为了求出戴维南电压, 需考虑如图 4-65b 所示电路, 利用分压原理可得:

$$v_1 = \frac{1000}{1000 + 3000} \times 220 = 55(\text{V}), \quad v_2 = \frac{600}{600 + 400} \times 220 = 132(\text{V})$$

在回路 ab 利用 KVL 得到:

$$-v_1 + V_{Th} + v_2 = 0 \quad \text{或}$$

$$V_{Th} = v_1 - v_2 = 55 - 132 = -77(\text{V})$$

确定戴维南等效电路之后, 就可以利用图 4-65c 求出流过检流计的电流为:

$$I_G = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_m} = \frac{-77}{990 + 40} = -74.76(\text{mA})$$

其中负号表示电流的方向与假定方向相反, 也就是说电流是由 b 流向 a 的。

练习 4-18 在如图 4-66 所示的惠斯登电桥中, 试求流经阻值为 14Ω 的检流计的电流。

答案: 64mA

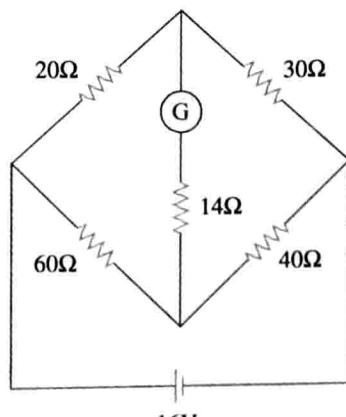


图 4-66 练习 4-18 图

4.11 本章小结

- 线性网络由线性元件、线性受控源和线性独立电源组成。
- 利用电路定理可以将复杂电路化简为简单电路，从而使电路分析更为简单。
- 叠加定理是指，在包含多个独立电源的电路中，元件两端的电压（或流经元件的电流）等于各独立电源单独作用时产生的各电压（或电流）的代数和。
- 电源变换是将电压源与电阻的串联电路变换为电流源与电阻的并联电路（反之亦然）的一种方法。
- 戴维南定理与诺顿定理是指，将电路网络中的一部分孤立，而将该网络中的其余部分用一个等效网络来替代。戴维南等效电路由一个电压源 V_{Th} 和一个与之串联的电阻 R_{Th} 组成，而诺顿等效电路则由一个电流源 I_N 和一个与之并联的电阻 R_N 组成。这两个定理之间的关系可以用电源变换方法联系在一起：

$$R_N = R_{Th}, \quad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

- 对于给定的戴维南等效电路，当负载电阻等于戴维南电阻，即 $R_L = R_{Th}$ 时，可以实现负载的最大功率传输。
- 最大功率传输定理是指，当负载电阻 R_L 等于该负载端口处的戴维南电阻 R_{Th} 时，由电源传递给该负载电阻 R_L 的功率最大。
- PSpice 软件可以用来验证本章所介绍的电路定理。
- 电源建模以及利用惠斯顿电桥实现电阻测量是戴维南定理的两个应用实例。

复习题

- 1 当某线性网络的输入电压源为 10V 时，流过网络中某支路的电流为 2A，如果电压降低至 1V 且极性反转，则流过该支路的电流为：

- (a) -2A (b) -0.2A
 (c) 0.2A (d) 2A
 (e) 20A

- 2 利用叠加定理计算电路参数时，并不要求每次仅考虑一个独立源的作用，可以同时考虑多个独立源的作用。

- (a) 正确 (b) 错误

- 3 叠加定理可用于计算功率。

- (a) 正确 (b) 错误

- 4 图 4-67 所示电路中， $a-b$ 两端的戴维南电阻为：

- (a) 25Ω (b) 20Ω
 (c) 5Ω (d) 4Ω

- 5 在图 4-67 所示电路中， $a-b$ 两端的戴维南电压为：

- (a) 50V (b) 40V
 (c) 20V (d) 10V

- 6 在图 4-67 所示电路中， $a-b$ 两端的诺顿电流为：

- (a) 10A (b) 2.5A
 (c) 2A (d) 0A

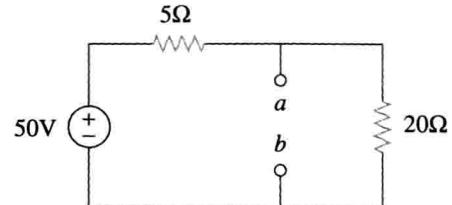


图 4-67 复习题 4~6 图

- 7 诺顿电阻 R_N 恰好等于戴维南电阻 R_{Th} 。

- (a) 正确 (b) 错误

- 8 图 4-68 所示电路中哪一组是等效的？

- (a) a 与 b (b) b 与 d
 (c) a 与 c (d) c 与 d

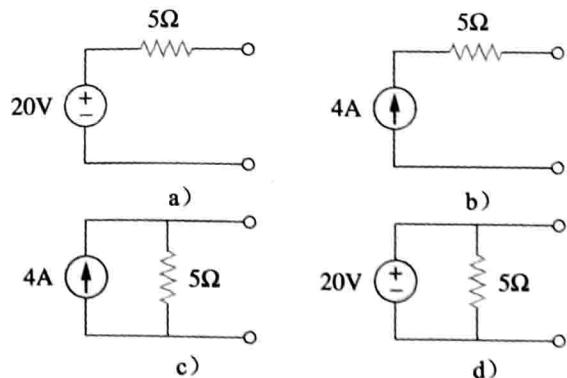


图 4-68 复习题 8 图

- 9 某负载与电路网络相连，如果在连接该负载的端口处， $R_{Th} = 10\Omega$, $V_{Th} = 40V$ ，则提供给该负载的最大功率为：
 (a) 160W (b) 80W
 (c) 40W (d) 1W

习题

4.2节

- 1 计算图 4-69 所示电路中的电流 i_o 。当 $i_o = 5A$ 时，输入电压为多少？

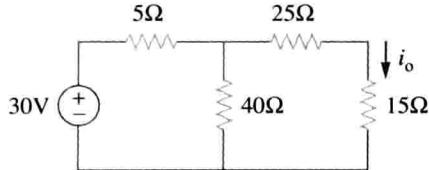


图 4-69 习题 1 图

- 2 利用图 4-70 所示电路，设计一个问题帮助其他同学更好地理解线性性质。

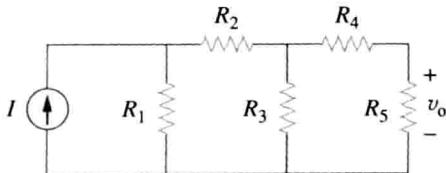


图 4-70 习题 2 图

- 3 (a) 在如图 4-71 所示电路中，如果 $v_s = 1V$ ，试计算 v_o 与 i_o ；(b) 当 $v_s = 10V$ 时，试计算 v_o 与 i_o ；(c) 如果用 10Ω 电阻替代图中各 1Ω 电阻，并且 $v_s = 10V$ ，则 v_o 与 i_o 为多少？

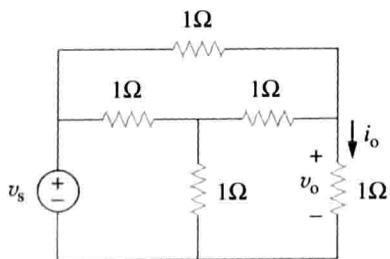


图 4-71 习题 3 图

- 4 利用线性性质确定图 4-72 所示电路中的 i_o 。

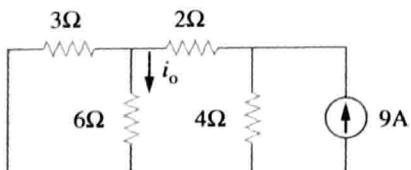


图 4-72 习题 4 图

- 5 在图 4-73 所示电路中，假定 $v_o = 1V$ ，利用线性性质计算 v_o 的实际值。

- 10 当负载电阻等于电源电阻时，电源向负载提供最大功率。
 (a) 正确 (b) 错误
 答案：1(b); 2(a); 3(b); 4(d); 5(b); 6(a);
 7(a); 8(c); 9(c); 10(a)

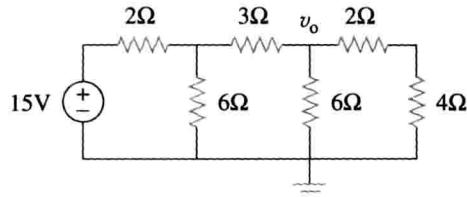


图 4-73 习题 5 图

- 6 在图 4-74 所示电路中，利用线性性质完成下表。

实验	V_s	V_o
1	12V	4V
2		16V
3	1V	
4		-2V

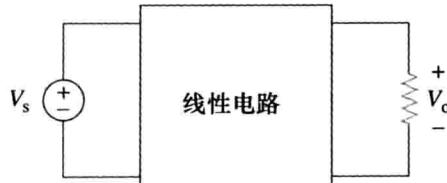


图 4-74 习题 6 图

- 7 在图 4-75 所示电路中，假定 $V_o = 1V$ ，利用线性性质计算 V_o 的实际值。

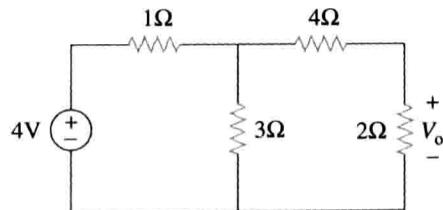


图 4-75 习题 7 图

4.3节

- 8 利用叠加定理计算图 4-76 所示电路中的 V_o ，并利用 PSpice 或 MultiSim 进行验证。 PS

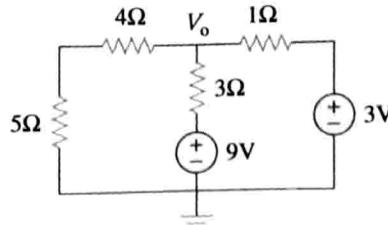


图 4-76 习题 8 图

- 9 当 $V_s = 40V$ 、 $I_s = 4A$ 时， $I = 4A$ ；当 $V_s = 20V$ 、 $I_s = 0$ 时， $I = 1A$ 。利用叠加定理和线性性质计算当 $V_s = 60V$ 、 $I_s = -2A$ 时， I 的值。

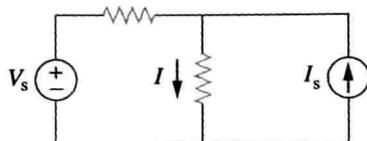


图 4-77 习题 9 图

- 10 利用图 4-78 所示电路，设计一个问题帮助其他同学理解叠加定理。注意，图中 k 可以给定一个不为零的特殊值使问题简单化。 **ED**

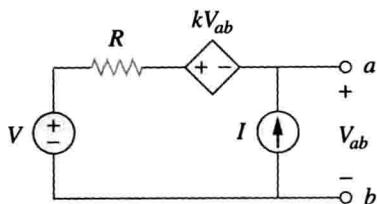


图 4-78 习题 10 图

- 11 利用叠加定理确定图 4-79 所示电路中的 i_o 与 v_o 。
PS

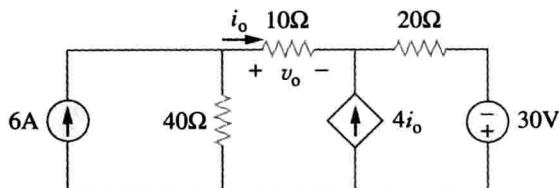


图 4-79 习题 11 图

- 12 利用叠加定理确定图 4-80 所示电路中的 v_o 。

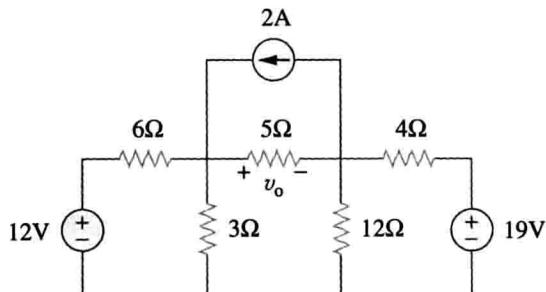


图 4-80 习题 12 图

- 13 利用叠加定理确定图 4-81 所示电路中的 v_o 。
PS

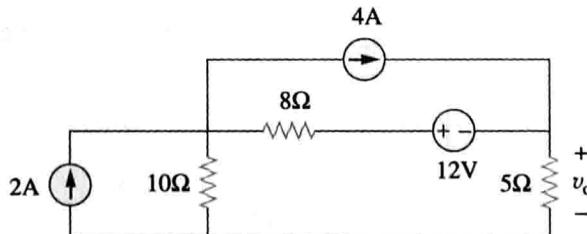


图 4-81 习题 13 图

- 14 利用叠加定理确定图 4-82 所示电路中的 v_o 。
PS

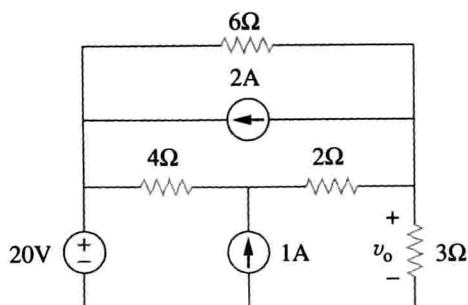


图 4-82 习题 14 图

- 15 利用叠加定理确定图 4-83 所示电路中的 i ，并计算传递给 3Ω 电阻的功率。
PS

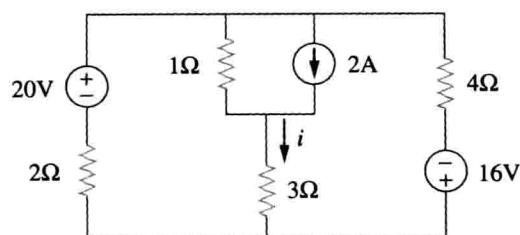


图 4-83 习题 15 与习题 56 图

- 16 利用叠加定理计算图 4-84 所示电路中的 i_o 。
PS

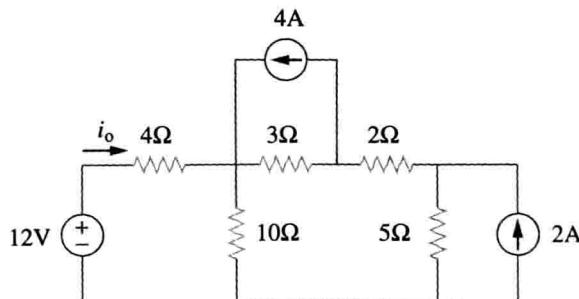


图 4-84 习题 16 图

- 17 利用叠加定理计算图 4-85 所示电路中的 v_x ，并利用 PSpice 或 MultiSim 进行验证。
PS ML

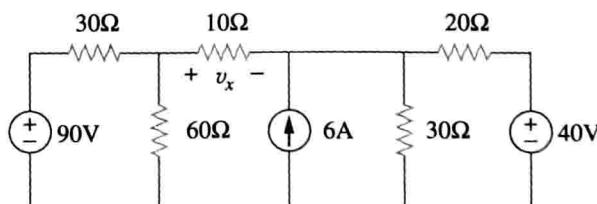


图 4-85 习题 17 图

- 18 利用叠加定理确定图 4-86 所示电路中的 V_o 。
PS

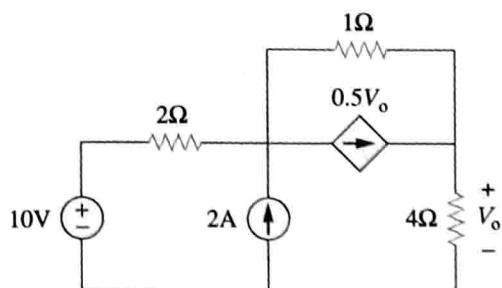


图 4-86 习题 18 图

- 19 利用叠加定理确定图 4-87 所示电路中的 v_x 。

PS

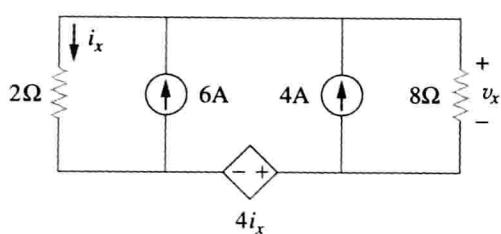


图 4-87 习题 19 图

4.4 节

- 20 利用电源变换法将图 4-88 所示电路简化为单个电压源与单个电阻串联的形式。

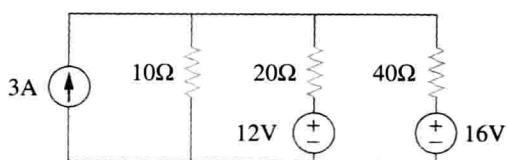


图 4-88 习题 20 图

- 21 利用图 4-89 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解电源变换。 ED

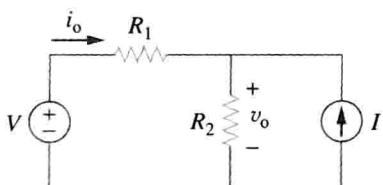


图 4-89 习题 21 图

- 22 利用电源变换的方法确定图 4-90 所示电路中的 i 。

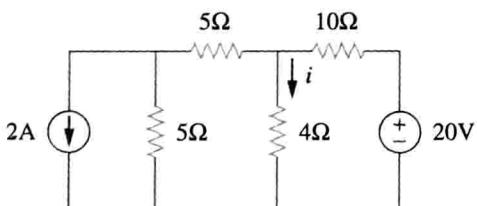


图 4-90 习题 22 图

- 23 对图 4-91 所示电路，利用电源变换的方法确定流过图中 8Ω 电阻的电流及其消耗的功率。

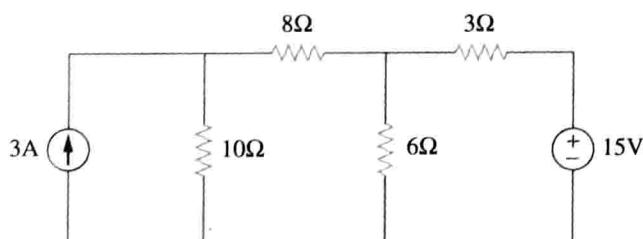


图 4-91 习题 23 图

- 24 利用电源变换的方法确定图 4-92 所示电路中的 V_x 。

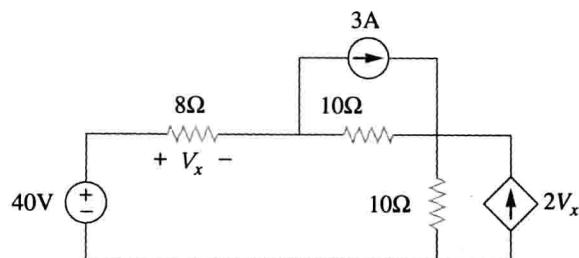


图 4-92 习题 24 图

- 25 利用电源变换的方法确定图 4-93 所示电路中的 v_o ，并利用 PSpice 或 MultiSim 进行验证。

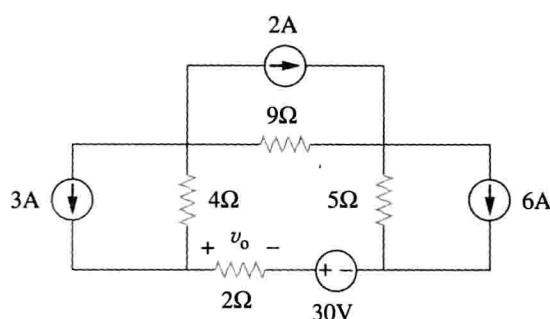


图 4-93 习题 25 图

- 26 利用电源变换的方法确定图 4-94 所示电路中的 i_o 。

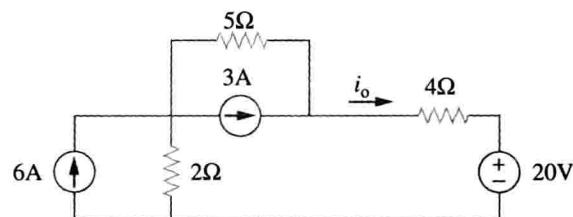


图 4-94 习题 26 图

- 27 利用电源变换的方法确定图 4-95 所示电路中的 v_x 。

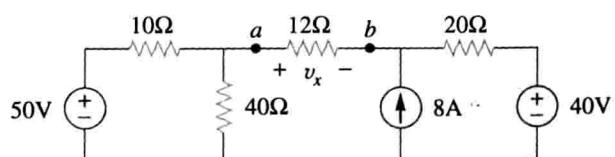


图 4-95 习题 27 与习题 40 图

- 28 利用电源变换的方法计算图 4-96 所示电路中的 I_o 。

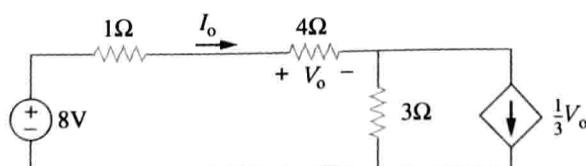


图 4-96 习题 28 图

- 29 利用电源变换的方法计算图 4-97 所示电路中的 v_o 。

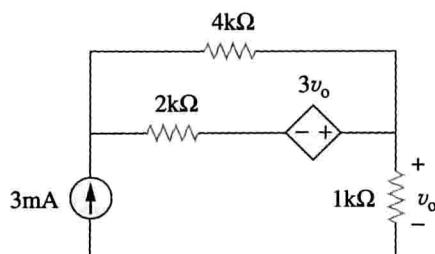


图 4-97 习题 29 图

- 30 利用电源变换的方法计算图 4-98 所示电路中的 i_x 。

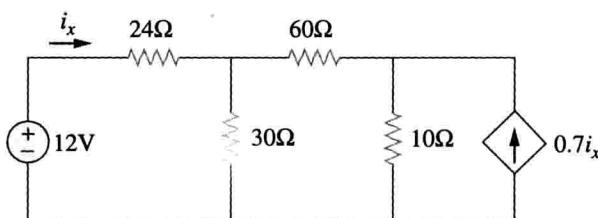


图 4-98 习题 30 图

- 31 利用电源变换的方法计算图 4-99 所示电路中的 v_x 。

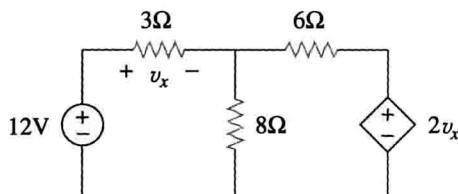


图 4-99 习题 31 图

- 32 利用电源变换的方法计算图 4-100 所示电路中的 i_x 。

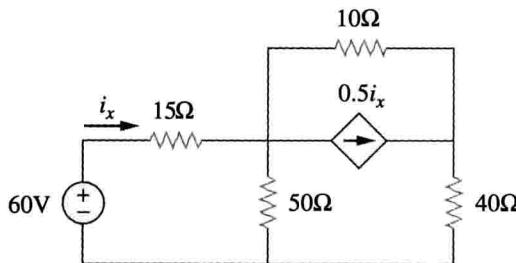


图 4-100 习题 32 图

4.5 节与 4.6 节

- 33 确定图 4-101 所示电路中 5Ω 电阻两端的戴维南等效电路，并计算流过 5Ω 电阻的电流。

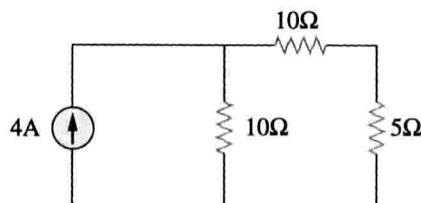


图 4-101 习题 33 图

- 34 利用图 4-102 所示电路，设计一个问题帮助其他同学更好地理解戴维南等效电路。 **ED**

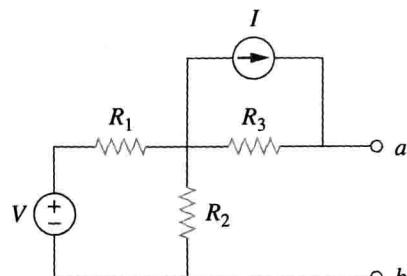


图 4-102 习题 34 与习题 49 图

- 35 利用戴维南等效电路确定习题 12 中的 v_{∞} 。
36 利用戴维南定理确定图 4-103 所示电路中的电流 i (提示：需求出 12Ω 电阻两端的戴维南等效电路)。

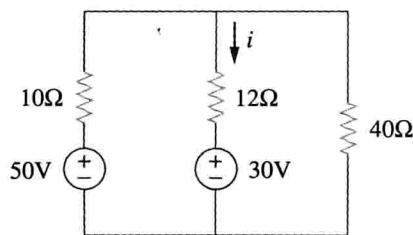


图 4-103 习题 36 图

- 37 求图 4-104 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

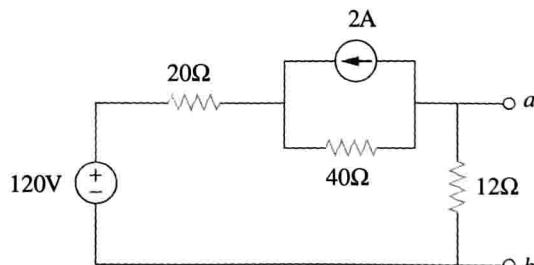


图 4-104 习题 37 图

- 38 利用戴维南定理确定图 4-105 所示电路中的 V_{∞} 。

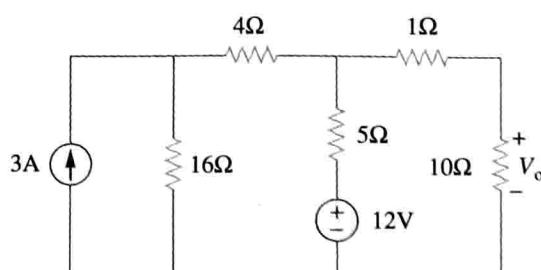


图 4-105 习题 38 图

- 39 求图 4-106 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

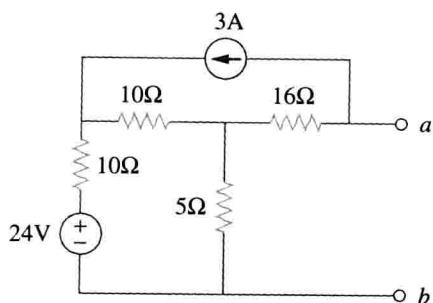


图 4-106 习题 39 图

- 40 求图 4-107 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

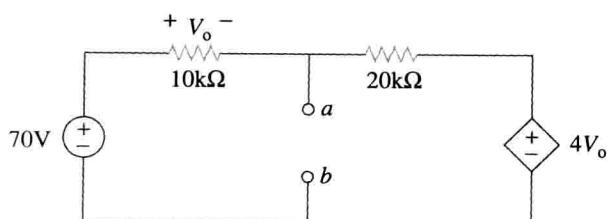


图 4-107 习题 40 图

- 41 求图 4-108 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

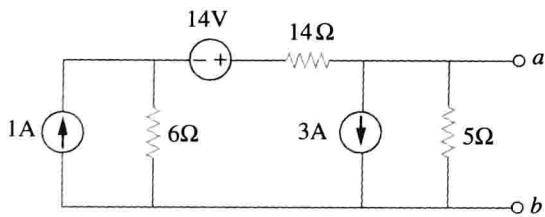


图 4-108 习题 41 图

- * 42 求图 4-109 所示电路在端口 $a-b$ 之间的戴维南等效电路。

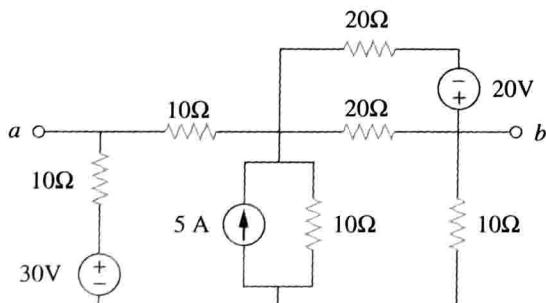


图 4-109 习题 42 图

- 43 求图 4-110 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路，并计算电流 i_x 。

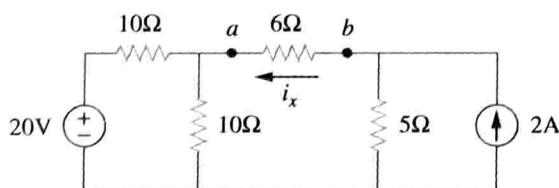


图 4-110 习题 43 图

- 44 在图 4-111 所示电路中，试确定从如下端口看进去的戴维南等效电路：(a) $a-b$ ；(b) $b-c$ 。

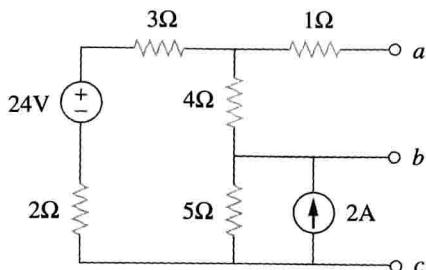


图 4-111 习题 44 图

- 45 求图 4-112 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

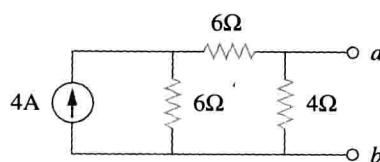


图 4-112 习题 45 图

- 46 利用图 4-113 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解诺顿等效电路。 ED

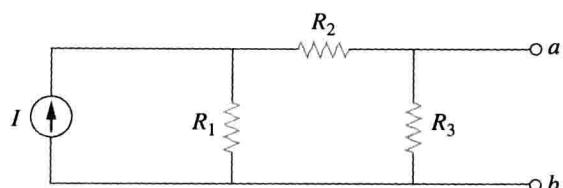


图 4-113 习题 46 图

- 47 求图 4-114 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

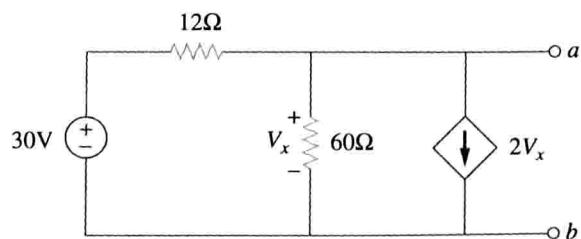


图 4-114 习题 47 图

- 48 确定图 4-115 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

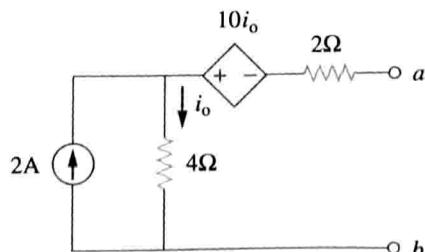


图 4-115 习题 48 图

- 49 求图 4-102 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的诺顿等效电路。图中 $V=40V$, $I=3A$, $R_1=10\Omega$, $R_2=40\Omega$, $R_3=20\Omega$ 。

- 50 求图 4-116 所示电路在端口 $a-b$ 左侧的诺顿等效电路，并利用所得结果计算电流 i 。

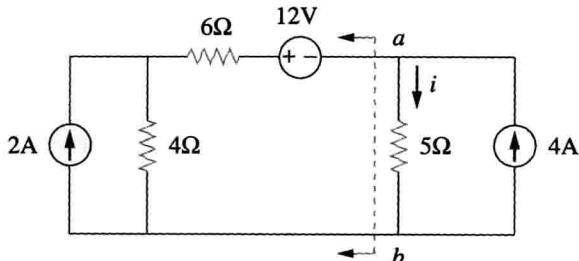


图 4-116 习题 50 图

- 51 在图 4-117 所示电路中，确定从如下端口看进去的诺顿等效电路：(a) $a-b$; (b) $c-d$ 。

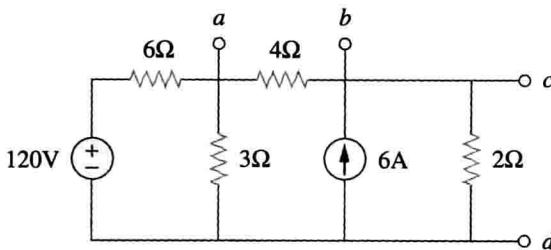


图 4-117 习题 51 图

- 52 在图 4-118 所示的晶体管模型中，确定从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

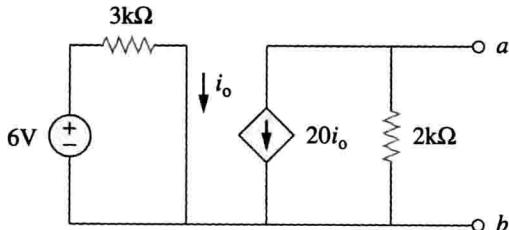


图 4-118 习题 52 图

- 53 求图 4-119 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

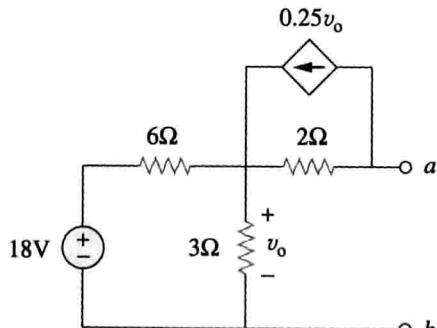


图 4-119 习题 53 图

- 54 求图 4-120 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

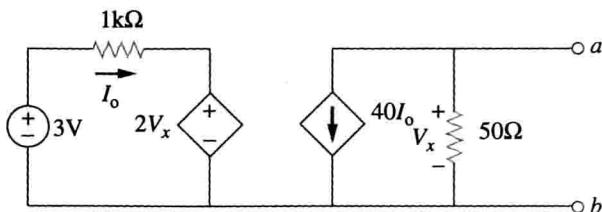


图 4-120 习题 54 图

- * 55 求图 4-121 所示电路的端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。

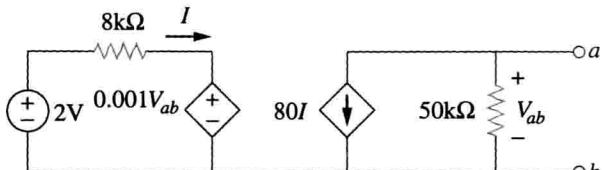


图 4-121 习题 55 图

- 56 利用诺顿定理计算图 4-122 所示电路中的 V_{∞} 。

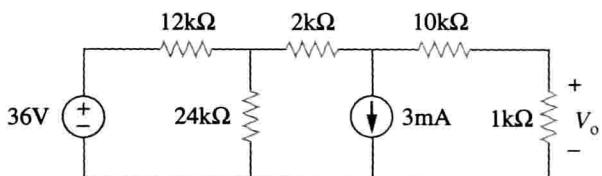


图 4-122 习题 56 图

- 57 求图 4-123 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

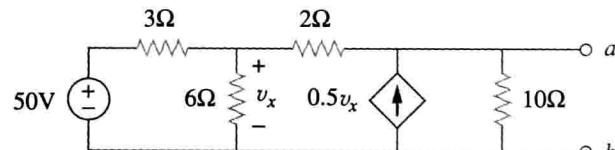


图 4-123 习题 57 与习题 79 图

- 58 如图 4-124 所示电路网络为与负载相连的双极型晶体管共射极放大器模型，求从负载端看进去的戴维南电阻。

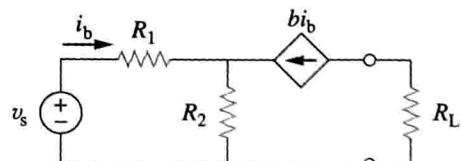


图 4-124 习题 58 图

- 59 求图 4-125 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

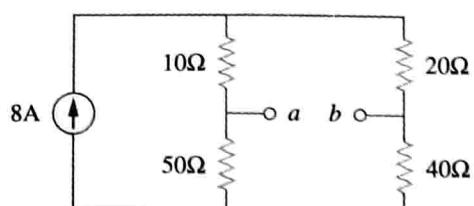


图 4-125 习题 59 与习题 80 图

- * 60 求图 4-126 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。

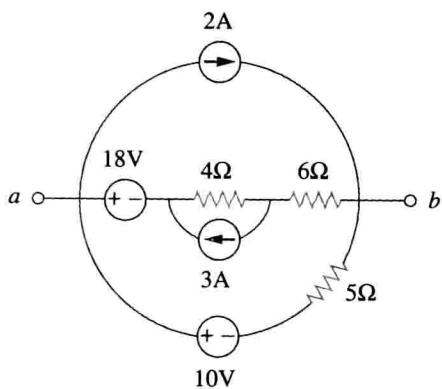


图 4-126 习题 60 与习题 81 图

- * 61 求图 4-127 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。 **ML**

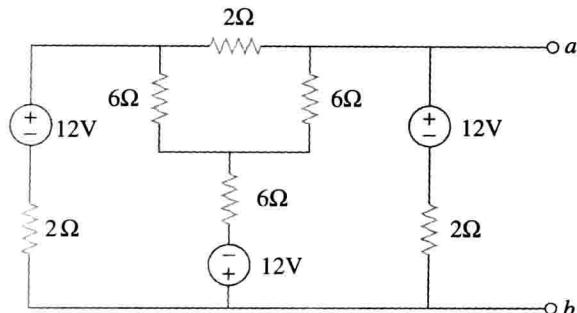


图 4-127 习题 61 图

- * 62 求图 4-128 所示电路的戴维南等效电路。 **ML**

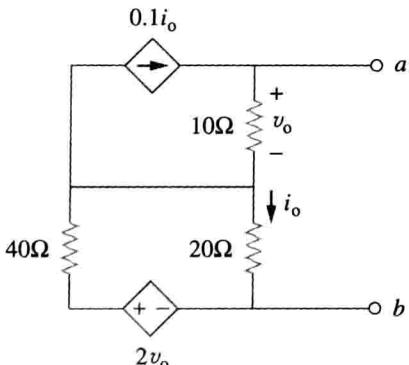


图 4-128 习题 62 图

- 63 求图 4-129 所示电路的诺顿等效电路。

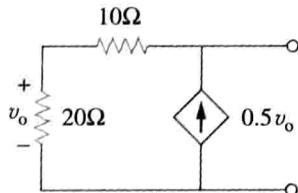


图 4-129 习题 63 图

- 64 求图 4-130 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

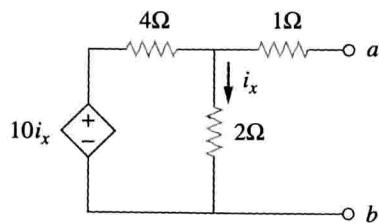


图 4-130 习题 64 图

- 65 在如图 4-131 所示电路中，试确定 V_o 与 I_o 之间的关系。

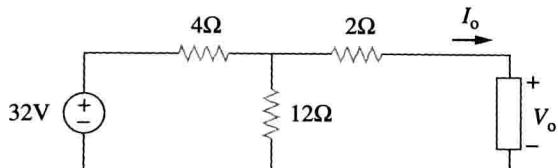


图 4-131 习题 65 图

4.8 节

- 66 在图 4-132 所示电路中，试求传输给电阻 R 的最大功率。

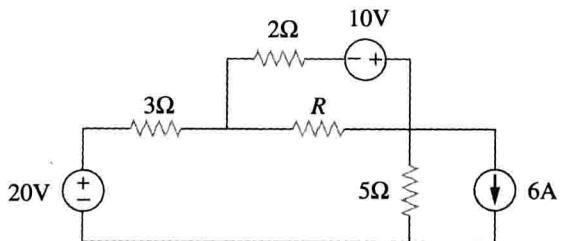


图 4-132 习题 66 图

- 67 在图 4-133 所示电路中，调节可变电阻 R ，直至其从电路中吸收的功率最大。(a) 试计算吸收最大功率时电阻 R 的阻值；(b) 确定 R 吸收的最大功率的值。

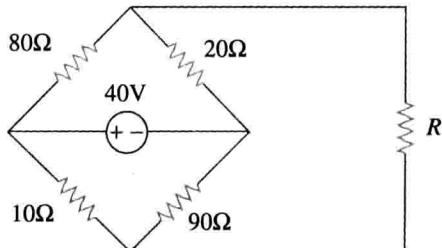


图 4-133 习题 67 图

- * 68 在如图 4-134 所示电路中，要使传输给 10Ω 电阻的功率最大，试计算电阻 R 的阻值，并求出相应的最大功率。

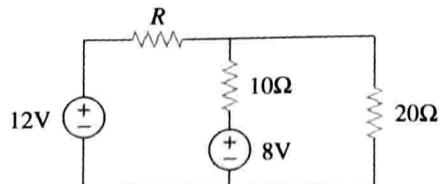


图 4-134 习题 68 图

- 69 在如图 4-135 所示电路中, 求传输给电阻 R 的最大功率。

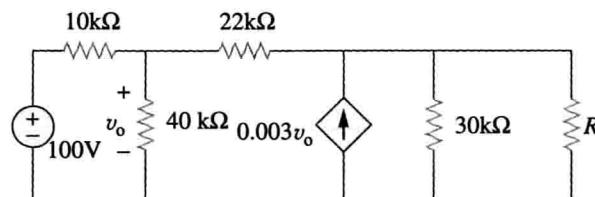


图 4-135 习题 69 图

- 70 在如图 4-136 所示电路中, 试求传输给可变电阻 R 的最大功率。

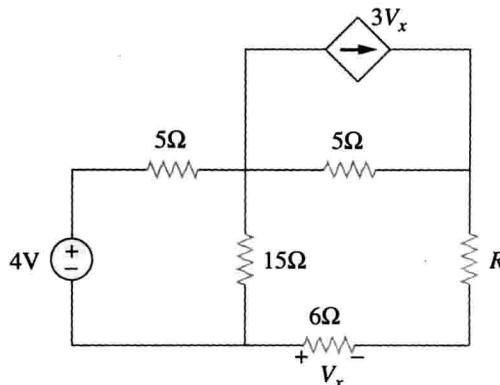


图 4-136 习题 70 图

- 71 在如图 4-137 所示电路中, 端口 $a-b$ 两端连接多大的电阻才能从电路中吸收最大功率? 该最大功率为多少?

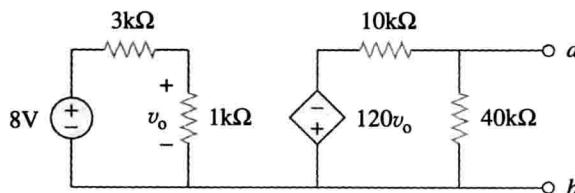


图 4-137 习题 71 图

- 72 (a)求图 4-138 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路; (b)计算流过电阻 $R_L=8\Omega$ 的电流; (c)求满足最大功率传输时的电阻 R_L 的阻值; (d)计算该最大功率。

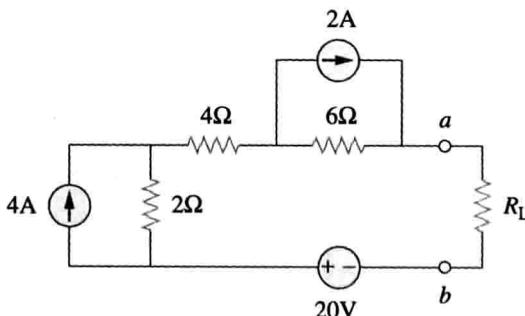


图 4-138 习题 72 图

- 73 在如图 4-139 所示电路中, 试确定传输给可变电阻 R 的最大功率。

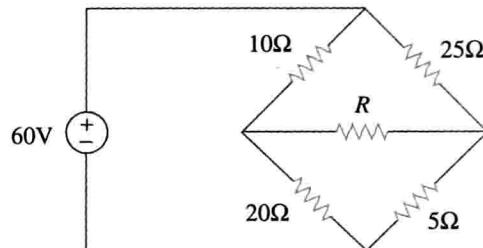


图 4-139 习题 73 图

- 74 在如图 4-140 所示的桥式电路中, 求满足最大功率传输时的负载电阻 R_L 及其吸收的最大功率。

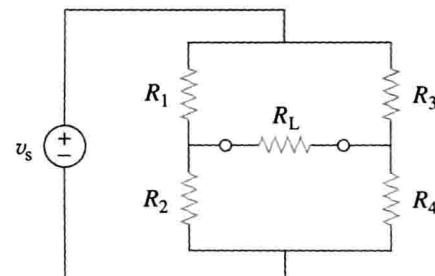


图 4-140 习题 75 图

- * 75 在图 4-141 所示电路中, 试确定传输给负载的最大功率为 3mW 时的电阻 R 的阻值。

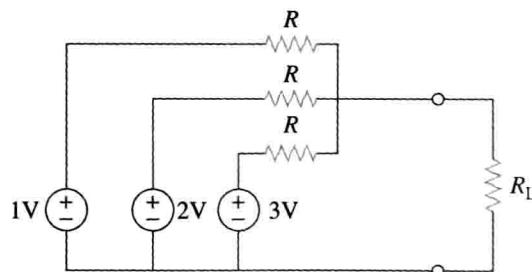


图 4-141 习题 75 图

4.9 节

- 76 试利用 PSpice 求解习题 34, 已知 $V=40V$, $I=3A$, $R_1=10\Omega$, $R_2=40\Omega$, $R_3=20\Omega$ 。
- 77 试利用 PSpice 求解习题 44。
- 78 试利用 PSpice 求解习题 52。
- 79 试利用 PSpice 确定图 4-123 所示电路的戴维南等效电路。
- 80 试利用 PSpice 确定图 4-125 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。
- 81 试利用 PSpice 确定图 4-126 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。
- #### 4.10 节
- 82 某电池的短路电流为 20A, 开路电压为 12V, 如果该电池与一个电阻为 2Ω 的灯泡相连接, 试计算灯泡所消耗的功率。
- 83 在某电阻网络的两个端点之间测得的数据如下:

终端电压	12V	0V
终端电流	0A	1.5A

试求该网络的戴维南等效电路。

- 84 某电池与一个 4Ω 电阻相连接时的端电压为 10.8V，但其开路电压为 12V，试求该电池的戴维南等效电路。
- 85 图 4-142 所示线性网络在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路需通过测量确定，当端口 $a-b$ 连接 $10k\Omega$ 电阻时，测量得到的电压 V_{ab} 为 6V，当该端口连接 $30k\Omega$ 电阻时，测量得到的电压 V_{ab} 为 12V。试确定：(a) 端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路；(b) 当端口 $a-b$ 连接 $20k\Omega$ 电阻时的电压 V_{ab} 。

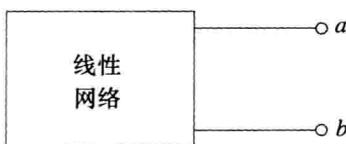


图 4-142 习题 85 图

- 86 某装有电路的黑匣子与一可变电阻相连接，利用理想电流表（内部电阻为零）和理想电压表（内部电阻为无穷大）测量该黑匣子的电流与电压，如图 4-143 所示。所得到的结果如下表所示：

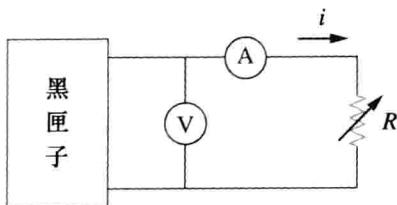


图 4-143 习题 86 电路原理图

$R(\Omega)$	$V(V)$	$i(A)$
2	3	1.5
8	8	1.0
14	10.5	0.75

- (a) 求 $R=4\Omega$ 时的 i ；(b) 确定从黑匣子获取的最大功率。

- 87 某变换器可以建模为一个电流源 I_o 与一个电阻 R_o 的并联，利用一个内阻为 20Ω 的电流表测量得到的电流源端口电流为 9.975mA。
 (a) 如果在电流源两端增加一个 $2k\Omega$ 电阻，使得电流表的读数降至 9.876mA，计算 I_o 与 R_o ；
 (b) 如果将电流源两端的电阻变为 $4k\Omega$ ，电流表的读数为多少？

- 88 在图 4-144 所示电路中，将内阻为 R_i 的电流表连接到 A 与 B 之间用于测量 I_o ，当(a) $R_i=500\Omega$ 、(b) $R_i=0\Omega$ 时，确定电流表的读数（提

示：需求出端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路）。

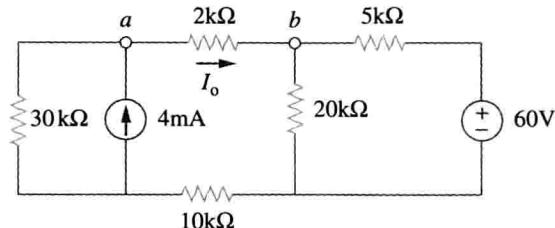


图 4-144 习题 88 图

- 89 在图 4-145 所示电路中，(a) 用内阻为 0 的电流表替代电阻 R_L ，并确定该电流表的读数；(b) 为证明互易定理，将该电流表与 12V 电压源的位置互换，再次确定该电流表的读数。

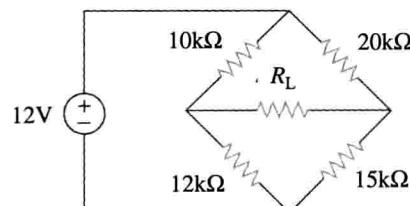


图 4-145 习题 89 图

- 90 利用如图 4-146 所示的惠斯顿电桥电路测量应变仪的电阻值，线性抽头可调电阻的最大阻值为 100Ω 。如果测量得到的应变仪的电阻为 42.6Ω ，则当电桥平衡时，滑动抽头在整个可调电阻上滑动了百分之几？

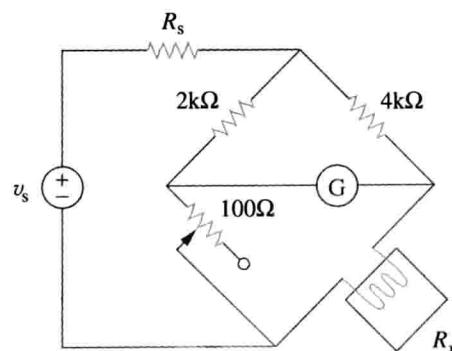


图 4-146 习题 90 图

- 91 (a) 在如图 4-147 所示的惠斯顿电桥电路中，选择 R_1 与 R_3 使得该电桥可以测量的 R_x 的取值范围为 $0 \sim 10\Omega$ 。(b) 如果该电桥可以测量的阻值范围为 $0 \sim 100\Omega$ ，试重新选择 R_1 与 R_3 。

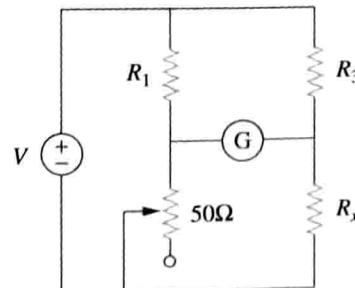


图 4-147 习题 91 图

- * 92 图 4-148 所示的电桥电路中是否平衡? 如果用 $18\text{k}\Omega$ 电阻替代 $10\text{k}\Omega$ 电阻, 则端口 $a-b$ 两端连接多大的电阻才能使该电阻吸收功率最大? 该最大功率为多少?

ED

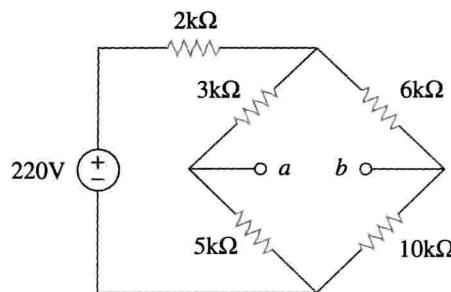


图 4-148 习题 92 图

综合理解题

- 93 图 4-149 所示电路为共射极晶体管放大器的一个模型, 利用电源变换的方法确定 i_x 。

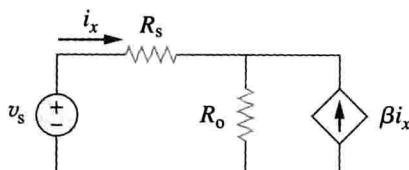


图 4-149 习题 93 图

- 94 衰减器是一种可以降低输出电平但不改变输出电阻的接口电路。(a)通过确定图 4-150 所示接口电路中的 R_s 与 R_p , 设计一个满足如下要求的衰减器:

$$\frac{V_o}{V_g} = 0.125 \quad R_{eq} = R_{Th} = R_g = 100\Omega$$

- (b)利用(a)中设计的接口电路, 计算当 $V_g = 12\text{V}$ 时, 流过负载 $R_L = 50\Omega$ 的电流。

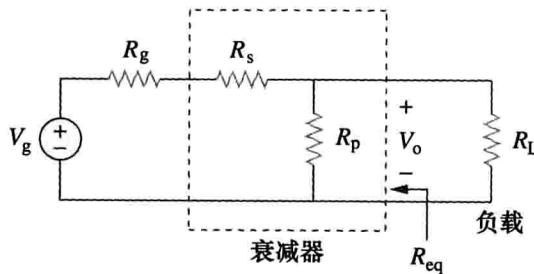


图 4-150 习题 94 图

- * 95 利用一个灵敏度为 $20\text{k}\Omega/\text{V}$ 的直流电压表确定某线性网络的戴维南等效电路, 两个量程下的读数如下: (a)在 $0 \sim 10\text{V}$ 量程下读数为 4V ; (b)在 $0 \sim 50\text{V}$ 量程下读数为 5V 。确定该网络的戴维南电压与戴维南电阻。

ED

- * 96 某电阻阵列与某负载电阻 R 和 9V 电池相连接, 如图 4-151 所示。(a)求使得 $V_o = 1.8\text{V}$ 时

- 的电阻 R ; (b)计算吸收最大电流时的电阻 R , 该最大电流为多少?

ED

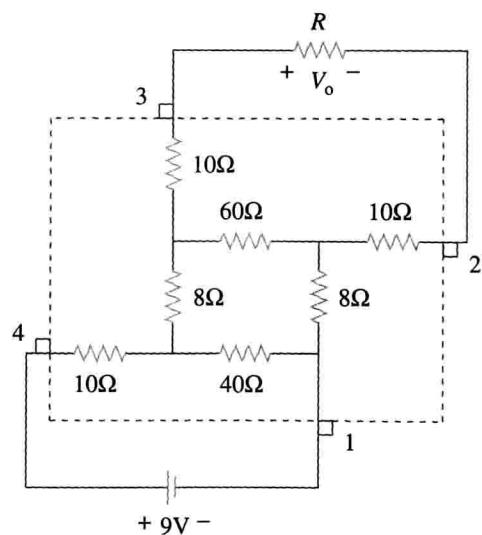


图 4-151 习题 96 图

- 97 共射极放大器电路如图 4-152 所示, 确定 B-E 左侧的戴维南等效电路。

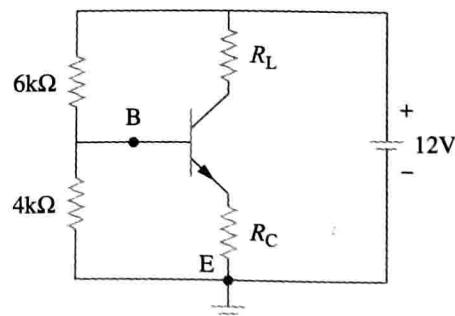


图 4-152 习题 97 图

- * 98 确定练习 18 中流过 40Ω 电阻的电流以及该电阻消耗的功率。

第5章

运算放大器

不愿说理的人是顽固分子；不会说理的人是愚人；不敢说理的人则是奴隶。

——William Drummond

拓展事业

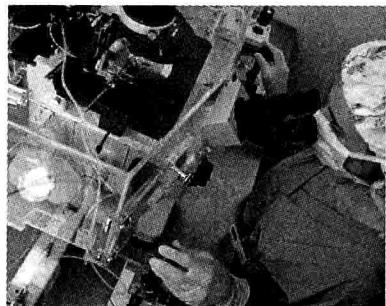
电子仪器领域的职业生涯

在当今的工程学领域中，工程师应用物理学原理来设计各种造福人类的设备。但是，不通过实验测量人们就不可能掌握物理原理，更不可能去应用这些原理。

物理学家常说，物理学实际上就是一门测量的科学。正如测量学是理解物理世界的工具，科学仪器则是测量的工具。本章介绍的运算放大器是现代电子仪器的重要组成模块，因此，掌握运算放大器的基本原理对于实际电子电路的应用是非常重要的。

在科学与工程技术领域中，电子仪器的应用可谓无处不在。电子仪器的迅猛普及甚至到了这种地步——若在理工科教育中不接触电子仪器就是一件荒谬的事情。例如，物理学家、生理学家、化学家和生物学家都必须学会电子仪器的使用。特别是对于电子工程类专业的学生，熟练的操作数字和模拟仪器是至关重要的。这类仪器包括电流表、电压表、电阻表、示波器、频谱分析仪和信号发生器等。

除了不断提高操作仪器的技能之外，有的电子工程师还需专门学习电子仪器的设计与制造，并乐在其中。他们之中的许多人都有发明和专利。电子仪器的专门人才可以在医学院、研究所、航空工业和许多日常应用电子仪器的工业部门找到了合适的工作。



电子仪器应用于医学研究

© Royalty Free/Corbis

5.1 引言

前面已经学习过了电路分析的基本定律和定理，本章学习一种非常重要的有源电路元件：运算法大器(operational amplifier)，简称运放(op amp)。运放是一个多功能的电路模块。

提示：运算放大器这一专业术语是John Ragazzini及其同事于1947年提出的，当时他们正在为美国国防研究委员会研制模拟计算机。第一支运算放大器采用的是真空管而不是晶体管。

运放是一个特性与电压控制电压源相类似的电子元件。

运算放大器也可以用于构成电压控制电流源或者电流控制电流源，它还可以对信号进行相加、放大、积分和微分等处理。因为它具有这些数字运算的能力，故称为运算放大器，并广泛应用于模拟电路的设计之中。运算放大器具有用途多样、价格便宜、使用方便的特点，所以在实际的电路设计中应用非常广泛。

提示：运算放大器也可以看做是增益非常高的电压放大器。

本章首先介绍理想运算放大器，之后介绍非理想运算放大器。利用节点分析法分析反相器、电压跟随器、加法器和差分放大器等若干理想运算放大器电路，还会利用PSpice 软件对运算放大器进行仿真。最后学习如何在数-模转换器和放大器之中使用运算放大器。

5.2 运算放大器

当运算放大器的引脚上接入不同的电阻、电容等元件，它就能执行某些数学运算。

运算放大器是一种用于执行加、减、乘、除、微分与积分的有源电路器件。

运算放大器是一种由电阻、晶体管、电容和二极管等构成的复杂有源电路器件，有关运算放大器内部构造的讨论已经超过了本书的研究范围，本书仅将运算放大器看做是一个电路模块，并简单学习其引脚接入不同元件时的功能。

商用运算放大器具有多种集成电路封装形式，图 5-1 所示为一种典型的运放封装。图 5-2a 所示的是典型的 8 脚双列直插封装(DIP)，其中引脚 8 是空引脚，而引脚 1 与引脚 5 一般不会用到。剩下 5 个重要的引脚分别为：

1. 反相输入端，引脚 2；
2. 同相输入端，引脚 3；
3. 输出端，引脚 6；
4. 正电源端 V^+ ，引脚 7；
5. 负电源端 V^- ，引脚 4。

提示：图 5-2a 所示的引脚图对应于仙童半导体(Fairchild Semiconductor)公司生产的 741 通用运算放大器。

如图 5-2b 所示运算放大器的电路符号为三角形，有两个输入和一个输出，两个输入以负(−)和正(+)标记，分别指反相输入和同相输入。若输入加到同相端则输出与输入同相，若输入加到反相端则输出与输入反相。

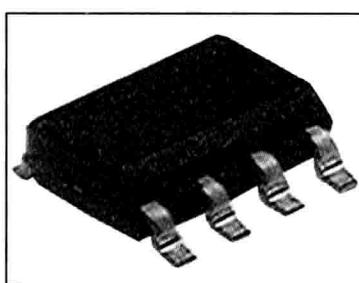


图 5-1 典型运算放大器
图片由 Tech America 提供

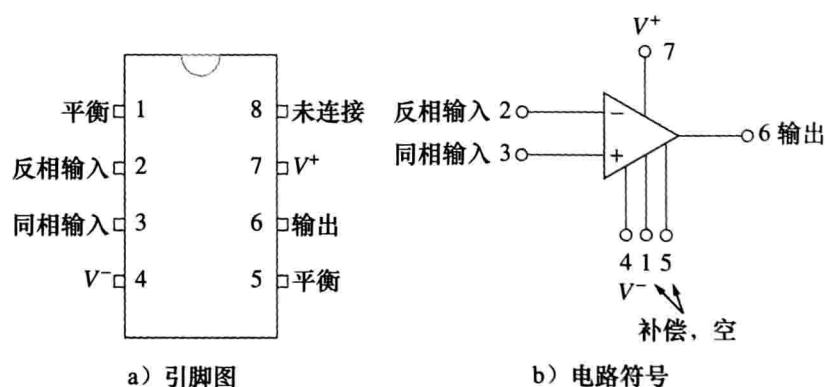


图 5-2 典型运算放大器

作为有源器件，运算放大器需要连接电压源为其供电，如图 5-3 所示。虽然在电路图中常常为了简单起见而不画出运放的电源，但是电源电流是不应该被忽视的。根据 KCL，有：

$$i_o = i_1 + i_2 + i_+ + i_- \quad (5.1)$$

运算放大器的等效电路模型如图 5-4 所示。其输出部分由一个受控电压源与一个电阻 R_o 的串联电路组成。由图 5-4 可知，输入电阻 R_i 是从输入端看进去的戴维南等效电阻，而输出电阻 R_o 是由输出端看进去的戴维南等效电阻。差分输入电压 v_d 为：

$$v_d = v_2 - v_1 \quad (5.2)$$

其中， v_1 是反相输入端与地之间的电压， v_2 是同相输入端与地之间的电压。运算放

大器获取两输入端口之间的差分电压，然后乘以增益 A，将所得到的电压输出至输出端。因此，输出电压 V_o 为：

$$V_o = Av_d = A(v_2 - v_1) \quad (5.3)$$

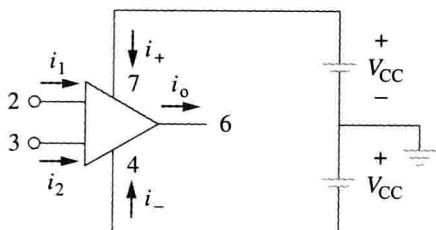


图 5-3 运算放大器供电电路

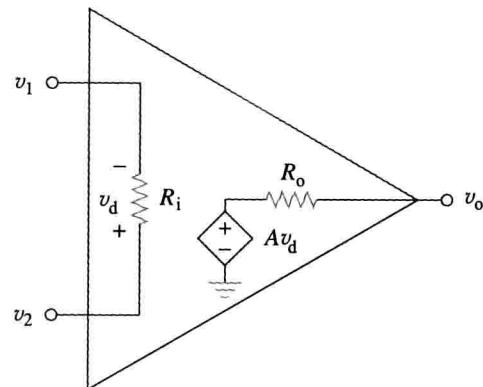


图 5-4 非理想运放等效电路

A 称为开环电压增益，因为此时输出电压完全没有反馈到输入电压之上。表 5-1 给出了电压增益 A、输入电阻 R_i 、输出电阻 R_o 以及电源电压 V_{CC} 的一些典型值。

表 5-1 运算放大器参数的典型取值范围

参数	典型范围	理想值	参数	典型范围	理想值
开环增益 A	$10^5 \sim 10^8$	∞	输入电阻 R_i	$10^5 \sim 10^{13} \Omega$	$\infty \Omega$
输出电阻 R_o	$10 \sim 100 \Omega$	0Ω	电源电压 V_{CC}	$5 \sim 24 \text{ V}$	

提示：电压增益有时以分贝(dB)为单位表示，参见第 14 章的讨论。 $A \text{ dB} = 20 \log_{10} A$

反馈这个概念对于学习运算放大器是十分重要的。当输出反馈至运算放大器的反相输入端时，此时就形成了一个负反馈。如例 5-1 所示，如果存在由输出到输入的反馈路径，那么此时的输出电压与输入电压之比称为闭环增益。实验证明，在负反馈条件下，运算放大器的闭环增益与开环增益基本无关，因此实际运放多应用于反馈电路之中。

运放的一个限制因素是输出电压值是不能超过 $|V_{CC}|$ 的，即输出电压受限于电源供电电压。图 5-5 表明，不同的差分输入电压 v_d 可使运放工作在三种不同的模式下：

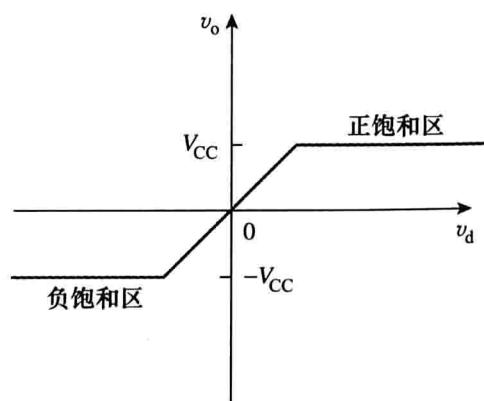
1. 正饱和区， $V_o = V_{CC}$ ；
2. 线性区， $-V_{CC} \leq v_o = Av_d \leq V_{CC}$ ；
3. 负饱和区， $v_o = -V_{CC}$ 。

如果增加 v_d 并使其超出线性范围，运放进入饱和状态，此时输出电压 $v_o = V_{CC}$ 或 $v_o = -V_{CC}$ 。而本书中，假设运算放大器均工作在线性状态下，即输出电压被限制在：

$$-V_{CC} \leq v_o \leq V_{CC} \quad (5.4)$$

虽然我们总是让运算放大器工作在线性状态下，但是在设计运算放大器时要时刻注意饱和问题，以避免所设计的运算放大器无法正常工作。

提示：在本书中，我们假设运算放大器工作于线性状态，因此必须注意运算放大器的电压限制条件。

图 5-5 运放输出电压 v_o 与差分输入电压 v_d 的函数关系

例 5-1 741 运放开环电压增益为 2×10^5 ，输入电阻为 $2M\Omega$ ，输出电阻为 50Ω 。如

图 5-6a 所示, 求其闭环增益 v_o/v_s , 试确定 $v_s=2V$ 时的电流 i 。

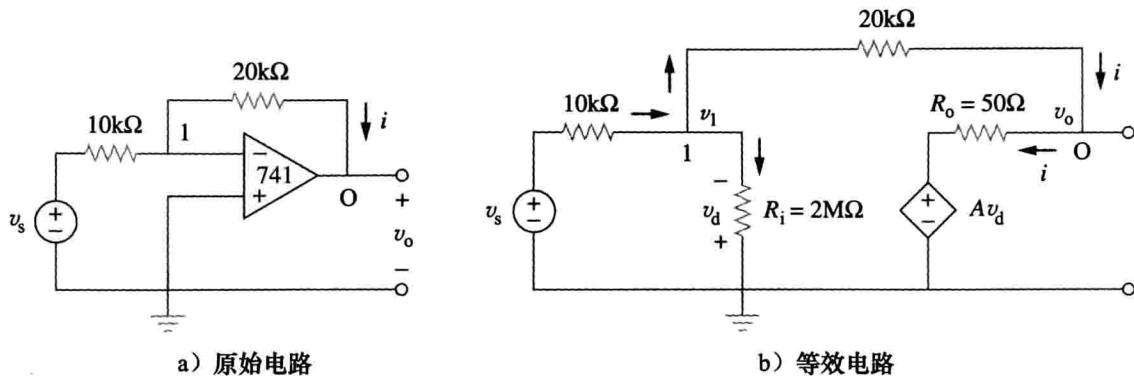


图 5-6 例 5-1 图

解：利用图 5-4 所示运算放大器模型，图 5-6a 电路的等效电路如图 5-6b 所示。下面通过节点法求解，在节点 1 处应用 KCL 得：

$$\frac{v_s - v_1}{10 \times 10^3} = \frac{v_1}{2000 \times 10^3} + \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3}$$

两边同乘 2000×10^3 , 可得：

$$200v_s = 301v_1 - 100v_o$$

即

$$2v_s \approx 3v_1 - v_o \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2v_s + v_o}{3} \quad (5.1.1)$$

在节点 O 处：

$$\frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = \frac{v_o - Av_d}{50}$$

由 $v_d = -v_1$ 且 $A = 200000$, 可得：

$$v_1 - v_o = 400(v_o + 200000v_1) \quad (5.1.2)$$

将式(5.1.1)中 v_1 代入式(5.1.2), 得：

$$0 \approx 26667067v_o + 53333333v_s \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_s} = -1.9999699$$

这就是闭环增益, 因为 $20k\Omega$ 的反馈电阻将输出端与输入端形成一闭合回路, 当 $v_s=2V$ 时, $v_o=-3.9999398V$, 由式(5.1.1)得 $v_1=20.066667\mu V$ 。因此:

$$i = \frac{v_1 - v_o}{20 \times 10^3} = 0.19999(mA)$$

通过此例可以看出, 分析非理想运算放大器时要处理的数据都非常大, 因此其计算是非常繁琐的。

练习 5-1 如果将与例 5-1 中相同的运算放大器 741 应用于图 5-7 中, 计算闭环增益 v_o/v_s , 并求出当 $v_s=1V$ 时的 i_o 。

答案: $9.00041, 657\mu A$

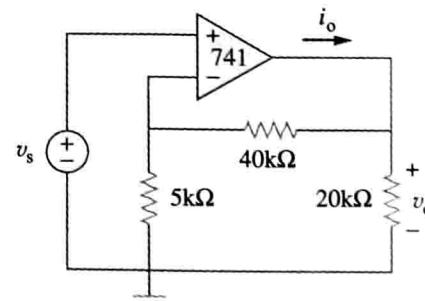


图 5-7 练习 5-1 图

5.3 理想运算放大器

为了便于理解运算放大器, 假设理想运算放大器具有如下特点:

1. 开环增益无穷大, $A \approx \infty$;
2. 输入电阻无穷大, $R_i \approx \infty$;
3. 输出电阻为零, $R_o \approx 0$ 。

理想运算放大器是一个开环增益无穷大、输入电阻无穷大、输出电阻为零的放大器。

虽然理想运算放大器只是实际运算放大器的一种近似，但是现在大多数的运算放大器都具有相当大的增益及输入电阻，因此这种近似也是十分有效的。除了特别说明以外，本书中所涉及的运算放大器均是理想运算放大器。

理想运算放大器电路模型如图 5-8 所示，它是由图 5-4 所示的非理想运算放大器推导出来的。理想运算放大器具有以下两个重要性质：

1. 两个输入端的输入电流均为零：

$$i_1 = 0, i_2 = 0 \quad (5.5)$$

这是因为输入电阻无穷大，相当于输入端开路，输入电流为零。而由式(5.1)可知，输出端的电流不一定为零。

2. 两输入端电压差为零：

$$v_d = v_2 - v_1 = 0 \quad (5.6)$$

即

$$v_1 = v_2 \quad (5.7)$$

因此，理想运算放大器的输入电流为零，两输入端电压差为零。式(5.6)和(5.7)非常重要，并且是以后分析运算放大器的关键所在。

提示：计算电压时可以把两输入端看做是短路的，而计算电流时则可以把输入端和运算放大器内部当作是开路的。

例 5-2 利用理想运算放大器模型重新计算练习 5-1。

解：与例 5-1一样，也可以将图 5-7 中的运算放大器用图 5-6 所示方法进行等效，但实际并不需要这样做，仅利用式(5.5)与式(5.7)分析图 5-7 便可得到图 5-9 所示电路。需要注意：

$$v_2 = v_s \quad (5.2.1)$$

因为 $i_1 = 0$ ，则 $40\text{k}\Omega$ 电阻与 $5\text{k}\Omega$ 电阻上流过的电流是相等的。 v_1 为 $5\text{k}\Omega$ 电阻两端的电压，由分压原理得：

$$v_1 = \frac{5}{5+40}v_o = \frac{v_o}{9} \quad (5.2.2)$$

由式(5.7)得：

$$v_2 = v_1 \quad (5.2.3)$$

将式(5.2.1)与式(5.2.2)代入式(5.2.3)，得到闭环增益为：

$$v_s = \frac{v_o}{9} \Rightarrow \frac{v_o}{v_s} = 9 \quad (5.2.4)$$

与练习 5-1 中采用非理想模型计算得到的闭环增益 9.000 41 非常接近。这表明理想运算放大器近似所带来的误差是非常小的。

在节点 O 处：

$$i_o = \frac{v_o}{40+5} + \frac{v_o}{20} \quad (5.2.5)$$

由式(5.2.4)可知，当 $v_s = 1$ 时， $v_o = 9\text{V}$ ，将 $v_o = 9\text{V}$ 代入式(5.2.5)得：

$$i_o = 0.2 + 0.45 = 0.65(\text{mA})$$

这与练习 5-1 中采用非理想模型计算的输出电流 0.657mA 也是非常接近的。 ◀

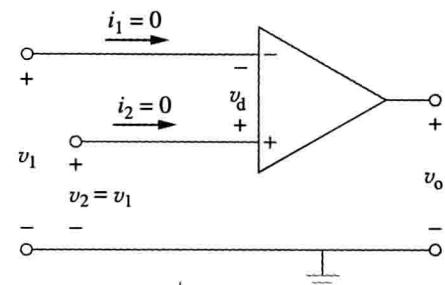


图 5-8 理想运算放大器模型

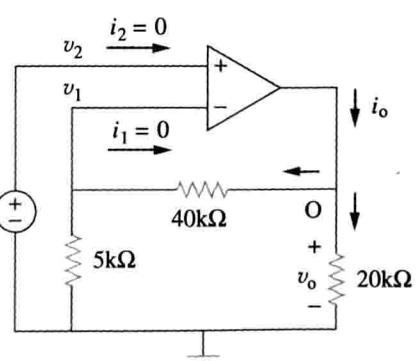


图 5-9 例 5-2 图

练习 5-2 试利用理想运算放大器模型重新计算例 5-1。

答案: $-2200\mu A$

5.4 反相放大器

本节开始将讨论一些实用的运算放大器电路, 这些电路模块常用来设计更复杂的电路。第一种运算放大器就如图 5-10 所示的反相放大器。在该电路中, 同相输入端接地, v_1 通过电阻 R_1 接入反相输入端, 反馈电阻 R_f 接在反相输入端与输出端之间。为了找出输入电压 v_i 与输出电压 v_o 之间的关系, 对节点 1 应用 KCL 得:

$$i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (5.8)$$

由于同相输入端接地, 所以对于理想运算放大器而言 $v_1 = v_2 = 0$, 因此:

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_f}$$

即

$$v_o = -\frac{R_f}{R_1}v_i \quad (5.9)$$

电压增益为 $A_v = v_o/v_i = -R_f/R_1$ 。图 5-10 所示电路之所以称为反相器就是因为增益为负值。

反相放大器在对输入信号进行放大的同时也将其极性进行了翻转。

提示: 反相放大器的关键电路结构是输入信号与反馈信号都作用在运算放大器的反相输入端上。

从上面的分析可知, 闭环增益的大小即反馈电阻除以输入电阻的值, 这表明该增益其实只与运算放大器连接的外部元件有关。由式(5.9)可知, 反相放大器的等效电路如图 5-11 所示。反相放大器的一个应用实例就是电流-电压转换器。

提示: 有两种类型的增益, 一种是这里所讲运算放大器的闭环电压增益 A_v , 另一种则是运算放大器本身的开环电压增益 A 。

例 5-3 图 5-12 所示的运算放大器电路中, 如果 $v_i = 0.5V$, 试计算: (a) 输出电压 v_o ; (b) 流过 $10k\Omega$ 电阻的电流。

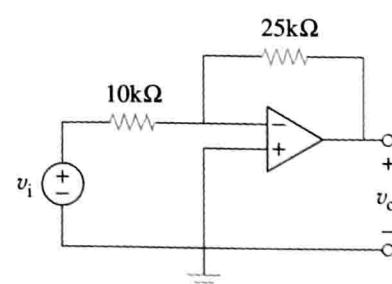
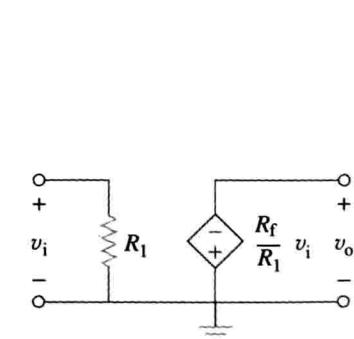
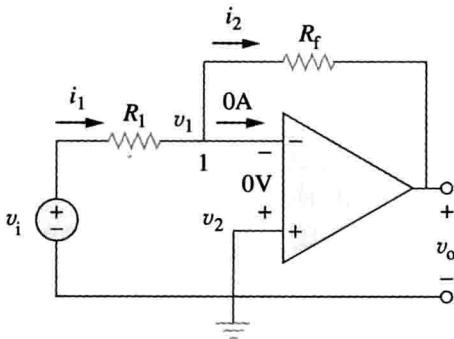


图 5-10 反相放大器

图 5-11 反相放大器等效电路

图 5-12 例 5-3 图

解: (a) 利用式(5.9)可得:

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{25}{10} = -2.5$$

$$v_o = -2.5v_i = -2.5 \times 0.5 = -1.25(V)$$

(b) 流过 $10k\Omega$ 电阻电流:

$$i = \frac{v_i - 0}{R_1} = \frac{0.5 - 0}{10 \times 10^3} = 50(\mu A)$$

练习 5-3 试求图 5-13 所示运算放大器的输出电压，并计算通过反馈电阻的电流。

答案： $-3.15V$, $26.25\mu A$

例 5-4 试求图 5-14 所示运算放大器的输出电压 v_o 。

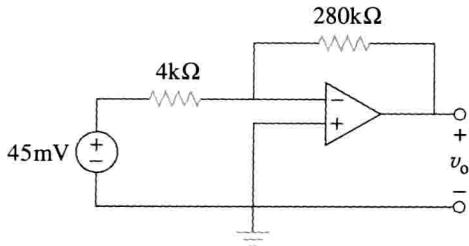


图 5-13 练习 5-3 图

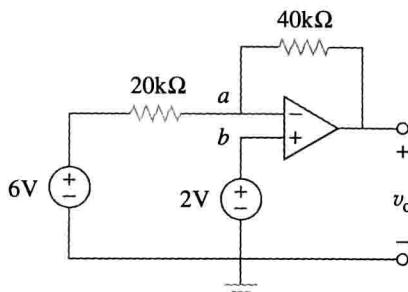


图 5-14 例 5-4 图

解：对于节点 a 应用 KCL 得：

$$\frac{v_a - v_o}{40k\Omega} = \frac{6 - v_a}{20k\Omega}$$

$$v_a - v_o = 12 - 2v_a \Rightarrow v_o = 3v_a - 12$$

理想运算放大器两输入端电压差为零，即 $v_a = v_b = 2V$ ，可得：

$$v_o = 6 - 12 = -6(V)$$

若 $v_b = 0 = v_a$ ，则 $v_o = -12V$ ，与式(5.9)得到的结果相同。

练习 5-4 图 5-15 所示为两类电流-电压转换器(也称跨阻放大器)。

(a) 对于图 5-15a 所示转换器，证明：

$$\frac{v_o}{i_s} = -R$$

(b) 对于图 5-15b 所示转换器，证明：

$$\frac{v_o}{i_s} = -R_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} \right)$$

证明略。

5.5 同相放大器

运算放大器的另一个重要应用是图 5-16 所示的同相放大器。在这种情况下，输入电压 v_i 直接与同相输入端相连，电阻 R_1 接在反相输入端与地之间，下面计算输出电压和电压增益。在反相输入端应用 KCL 得：

$$i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{0 - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_f} \quad (5.10)$$

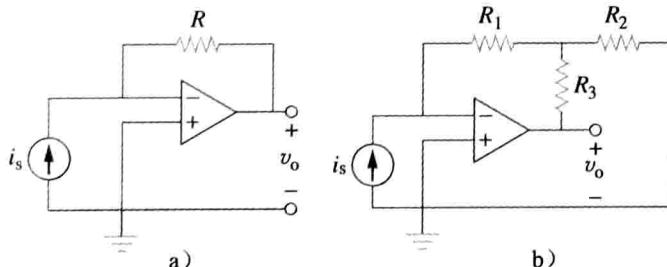


图 5-15 练习 5-4 图

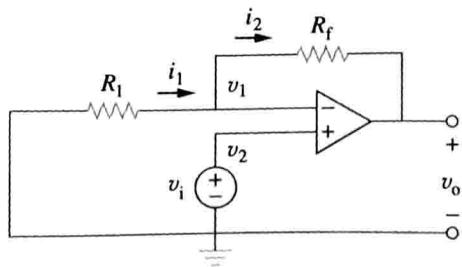


图 5-16 同相放大器

$v_1 = v_2 = v_i$ ，代入式(5.10)得：

$$\frac{-v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_f}$$

即

$$v_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_i \quad (5.11)$$

电压增益为 $A_v = v_o/v_i = 1 + R_f/R_1$, 结果没有负号, 因此输出与输入的极性是相同的, 且电压增益只与外部电阻有关。

同相放大器是提供正电压增益的运算放大器电路。

注意, 如果反馈电阻 $R_f=0$ (短路)或 $R_1=\infty$ (开路)或同时满足 $R_f=0$ 且 $R_1=\infty$, 则电压增益为 1。在这些条件($R_f=0$ 和 $R_1=\infty$)下, 图 5-16 所示电路就变换成了图 5-17 中的电路, 因为输入与输出相同, 故称该电路为电压跟随器(或单位增益放大器)。对于电压跟随器有:

$$v_o = v_i \quad (5.12)$$

电压跟随器有着非常高的输入阻抗, 因此可以用作中间级放大器(缓冲放大器), 对前后两级电路进行阻抗匹配。如图 5-18 所示, 电压跟随器使两极之间相互影响最小, 同时消除级间负载。

例 5-5 对于图 5-19 所示电路, 计算运算放大器输出电压 v_o 。

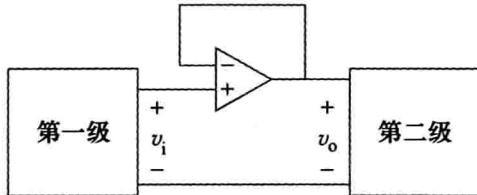


图 5-18 电压跟随器应用于两级电路间

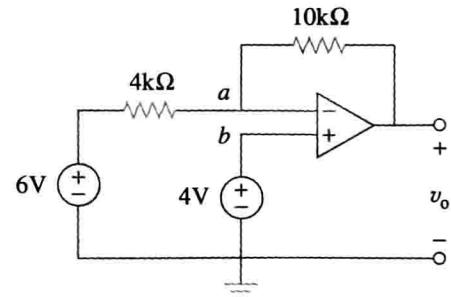


图 5-19 例 5-5 图

解: 可以采用两种方法: 叠加原理法和节点分析法。

方法 1 叠加原理法:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2}$$

这里, v_{o1} 是由 6V 电压源产生的输出, v_{o2} 是由 4V 电压源产生的输出。为了求出 v_{o1} , 需要将 4V 电压源置零, 此时的电路就相当于一个反相器, 由式(5.9)得:

$$v_{o1} = -\frac{10}{4} \times 6 = -15(V)$$

为了求出 v_{o2} , 需将 6V 电压源置零, 此时电路等效于同相放大器, 由式(5.11)得:

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{10}{4}\right)4 = 14(V)$$

所以:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = -15 + 14 = -1(V)$$

方法 2 对于节点 a 应用 KCL 得:

$$\frac{6 - v_a}{4} = \frac{v_a - v_o}{10}$$

由 $v_a = v_b = 4V$, 得:

$$\frac{6 - 4}{4} = \frac{4 - v_o}{10} \Rightarrow 5 = 4 - v_o$$

解得 $v_o = -1V$, 结果与方法一相同。

练习 5-5 计算图 5-20 所示电路的输出电压 v_o 。

答案: 7V

5.6 加法放大器

运算放大器除了具有放大功能之外, 还可以执行加减运算。本节所学习的加法放大器就可以实现加法运算, 而下节所介绍的差分放大器则可以实现减法运算的功能。

加法放大器是将多个输入合并, 并且在输出端产生这些输入加权和的运算放大器。

图 5-21 所示加法放大器是由反相放大器变化而来, 它充分利用了反相放大器能够同时处理多个输入信号的优点。对图中节点 a' 应用 KCL, 同时考虑到输入端流入运放电流为零, 可以得到:

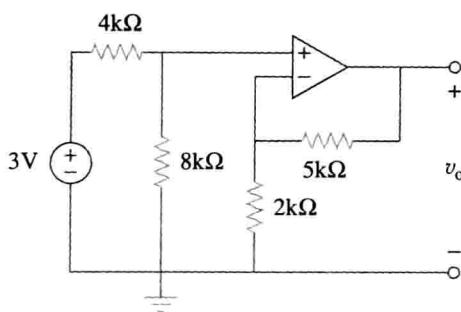


图 5-20 练习 5-5 图

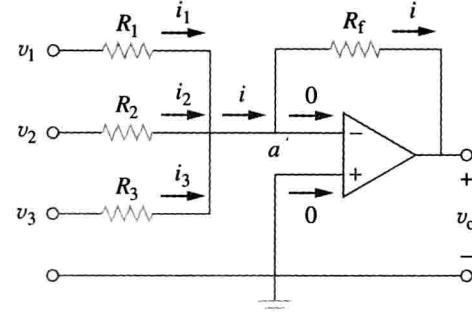


图 5-21 加法放大器

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad (5.13)$$

而

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1 - v_a}{R_1}, & i_2 &= \frac{v_2 - v_a}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3 - v_a}{R_3}, & i &= \frac{v_a - v_o}{R_f} \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中 $v_a = 0$, 并将式(5.14)代入式(5.13)得:

$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3 \right) \quad (5.15)$$

综上可知, 输出电压为输入电压的加权和, 因此将图 5-21 所示电路称为加法器。很明显, 加法器可以有三个以上的输入。

例 5-6 计算图 5-22 中运算放大器的输出电压 v_o 和输出电流 i_o 。

解: 这是一个双输入的加法器, 由式(5.15)得:

$$\begin{aligned} v_o &= - \left[\frac{10}{5} \times 2 + \frac{10}{2.5} \times 1 \right] \\ &= -(4 + 4) = -8(V) \end{aligned}$$

电流 i_o 是流过 $10k\Omega$ 和 $2k\Omega$ 电阻的电流之和, 由于 $v_a = v_b = 0$, 所以这两个电阻两端电压均为 $v_o = -8V$, 因此:

$$i_o = \frac{v_o - 0}{10} + \frac{v_o - 0}{2} = -0.8 - 4 = -4.8(mA)$$

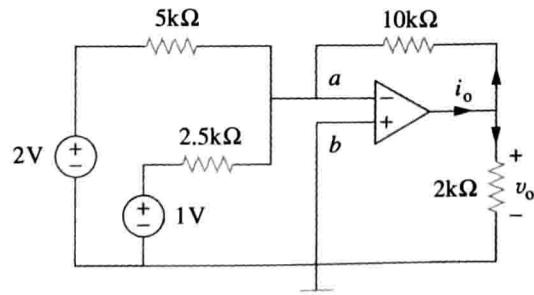


图 5-22 例 5-6 图

练习 5-6 计算图 5-23 中运放的输出电压 v_o 和输出电流 i_o 。

答案: $-3.8V, -1.425mA$

5.7 差分放大器

差分(差动)放大器被广泛应用于需要放大两个输入信号之差的电路。差分放大器与普遍应用的仪表放大器属于同一类放大器，后者将在 5.10 节中讨论。

差分放大器是只对两输入信号差值进行放大而抑制共模信号的器件。

提示：差分放大器也称为减法器，原因将稍后讨论。

分析图 5-24 所示电路，在节点 a 处应用 KCL，因为流入运放输入端电流为零，所以：

$$\frac{v_1 - v_a}{R_1} = \frac{v_a - v_o}{R_2}$$

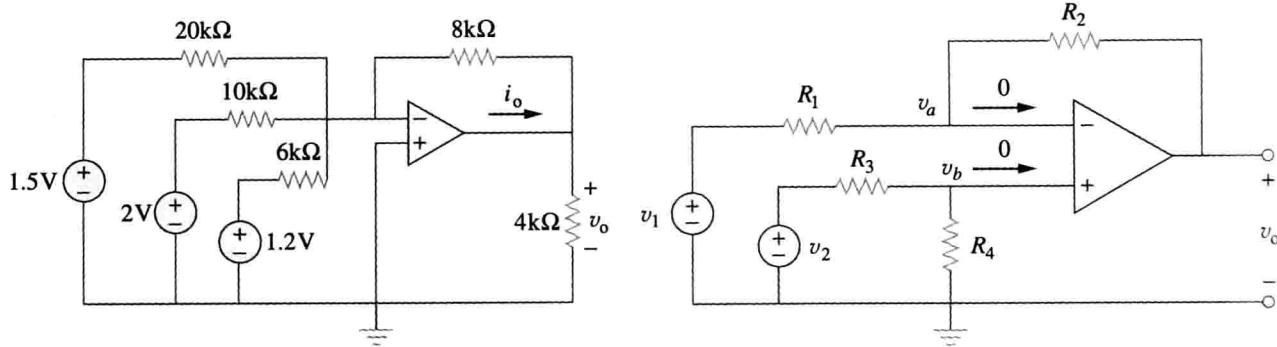


图 5-23 练习 5-6 图

图 5-24 差分放大器

即

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) v_a - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (5.16)$$

对于节点 b ，应用 KCL 得：

$$\frac{v_2 - v_b}{R_3} = \frac{v_b - 0}{R_4}$$

即

$$v_b = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 \quad (5.17)$$

而 $v_a = v_b$ ，将式(5.17)代入式(5.16)得：

$$v_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1$$

即

$$v_o = \frac{R_2 (1 + R_1 / R_2)}{R_1 (1 + R_3 / R_4)} v_2 - \frac{R_2}{R_1} v_1 \quad (5.18)$$

由于差分放大器必须抑制两个输入端的共模信号，所以当 $v_1 = v_2$ 时，放大器输出必为 $v_o = 0$ 。当满足如下条件时，该性质成立：

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (5.19)$$

因此，当图 5-24 所示运算放大器为差分放大器时，式(5.18)变为：

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1) \quad (5.20)$$

如果 $R_2 = R_1$ 且 $R_3 = R_4$ ，差分放大器则成为一个减法器，其输出为：

$$v_o = v_2 - v_1 \quad (5.21)$$

例 5-7 设计一个输入为 v_1 、 v_2 的运算放大器，使其输出 $v_o = -5v_1 + 3v_2$ 。

解：根据要求，所设计的电路应满足：

$$v_o = 3v_2 - 5v_1 \quad (5.7.1)$$

这个电路可以通过两种方法来实现。

方法1 如果仅采用一个运算放大器，则可以利用如图5-24所示的运算放大器。比较式(5.7.1)与式(5.18)可以得出：

$$\frac{R_2}{R_1} = 5 \Rightarrow R_2 = 5R_1 \quad (5.7.2)$$

且

$$5 \frac{(1 + R_1/R_2)}{(1 + R_3/R_4)} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{6}{5}}{1 + R_3/R_4} = \frac{3}{5}$$

即

$$2 = 1 + \frac{R_3}{R_4} \Rightarrow R_3 = R_4 \quad (5.7.3)$$

如果选择 $R_1 = 10\text{k}\Omega$ 且 $R_3 = 20\text{k}\Omega$ ，则 $R_2 = 50\text{k}\Omega$ 且 $R_4 = 20\text{k}\Omega$ 。

方法2 如果采用多个运算放大器，则可以将一个反相放大器与一个两输入反相加法器串联，如图5-25所示。对于加法器而言：

$$v_o = -v_a - 5v_1 \quad (5.7.4)$$

对于反相器而言：

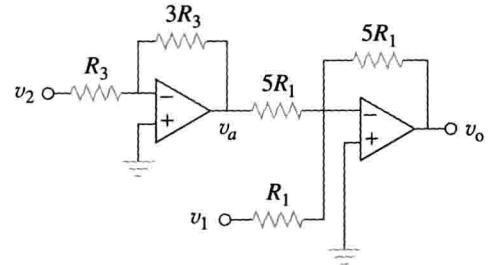
$$v_a = -3v_2 \quad (5.7.5)$$

联合式(5.7.4)与式(5.7.5)可得：

$$v_o = 3v_2 - 5v_1$$

即所要求的设计，在图5-25中，可以选择 $R_1 = 10\text{k}\Omega$ 、 $R_3 = 20\text{k}\Omega$ 或 $R_1 = R_3 = 10\text{k}\Omega$ 。

图5-25 例5-7图



练习5-7 设计一个增益为7.5的差分放大器。

答案：典型值 $R_1 = R_3 = 20\text{k}\Omega$, $R_2 = R_4 = 150\text{k}\Omega$

例5-8 图5-26所示的仪表放大器应用于过程控制或测量仪器中小信号的放大，商业上一般为单片封装形式。试证明：

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_4} \right) (v_2 - v_1)$$

解：由图5-26可知， A_3 是一个差分放大器，于是由式(5.20)得：

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_{o2} - v_{o1}) \quad (5.8.1)$$

因为运算放大器 A_1 和 A_2 输入端没有电流流入，所以电流 i 流经三个电阻，如同三者串联一样，因此：

$$v_{o1} - v_{o2} = i(R_3 + R_4 + R_3) = i(2R_3 + R_4) \quad (5.8.2)$$

而

$$i = \frac{v_a - v_b}{R_4}$$

且 $v_a = v_1$, $v_b = v_2$ 。因此：

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R_4} \quad (5.8.3)$$

将式(5.8.2)与式(5.8.3)代入式(5.8.1)，得：

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{2R_3}{R_4} \right) (v_2 - v_1)$$

得证。5.10节会对仪表放大器进行详细讨论。

练习 5-8 试求图 5-27 所示仪表放大器的电流 i_o 。

答案: $800\mu A$

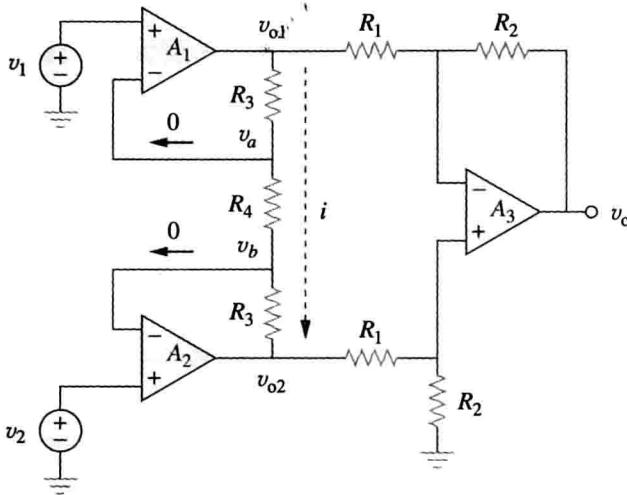


图 5-26 例 5-8 的仪表放大器

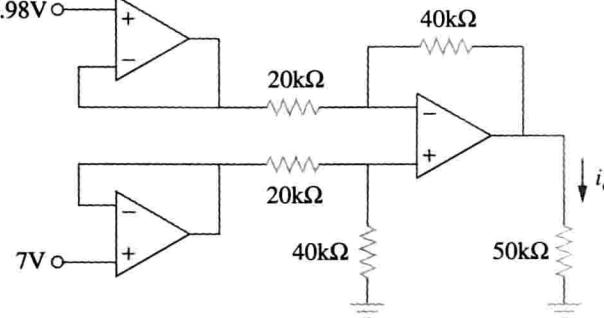


图 5-27 练习 5-8 的仪表放大器

5.8 运算放大器的级联电路

运算放大器是组成复杂电路的模块之一，而在实际应用中，为了获得更大的增益，常把几个运放级联起来(例如头尾相连)，这种首尾相连的电路称为级联。

级联是指两个或多个运算放大器首尾顺序相连，使得前一级的输出为下一级的输入。

若干个运算放大器相互级联时，其中每一个电路都成为一级(stage)，原输入信号经各级运算放大器放大。运算放大器的优势在于其级联并不改变各自的输入输出关系，这是因为(理想)运算放大器的输入电阻为无穷大，输出电阻为零。图 5-28 给出了三个运算放大器的级联框图，前一级的输出是下一级的输入，所以级联运算放大器的总增益为各个运算放大器的增益的乘积，即：

$$A = A_1 A_2 A_3 \quad (5.22)$$

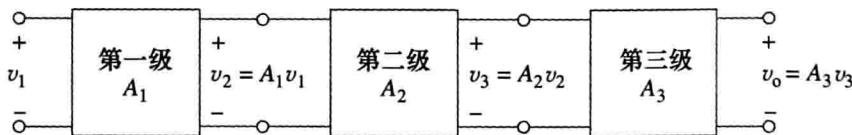


图 5-28 三级级联

虽然运算放大器的级联不影响输入输出关系，但是在实际设计运算放大器电路时，必须确保级联电路中下一级的负载不会使运算放大器的总输出处于饱和状态。

例 5-9 试求图 5-29 所示电路中的 v_o 与 i_o 。

解：该电路由两个同相放大器级联而成。在第一级运算放大器的输出端：

$$v_a = \left(1 + \frac{12}{3}\right) \times 20 = 100(\text{mV})$$

在第二级运算放大器的输出端：

$$v_o = \left(1 + \frac{10}{4}\right) v_a = (1 + 2.5) \times 100 = 350(\text{mV})$$

所要求的电流 i_o 是流经 $10\text{k}\Omega$ 电阻的电流：

$$i_o = \frac{v_o - v_b}{10}$$

$v_a = v_b = 100\text{mV}$, 所以:

$$i_o = \frac{(350 - 100) \times 10^{-3}}{10 \times 10^3} = 25(\mu\text{A})$$

练习 5-9 试求图 5-30 所示运算放大器电路中的 v_o 与 i_o 。

答案: 6V, $24\mu\text{A}$

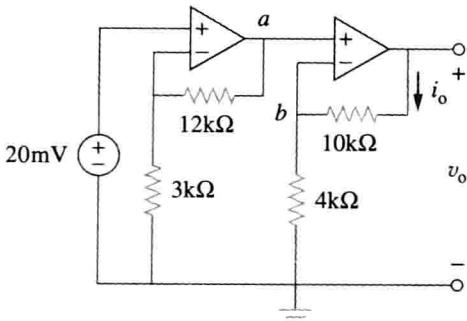


图 5-29 例 5-9 图

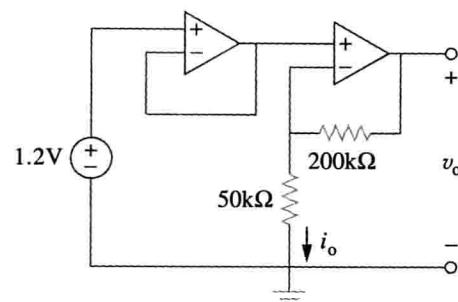


图 5-30 练习 5-9 图

例 5-10 图 5-31 所示的电路中, 已知 $v_1 = 1\text{V}$, $v_2 = 2\text{V}$, 试求输出电压 v_o 。

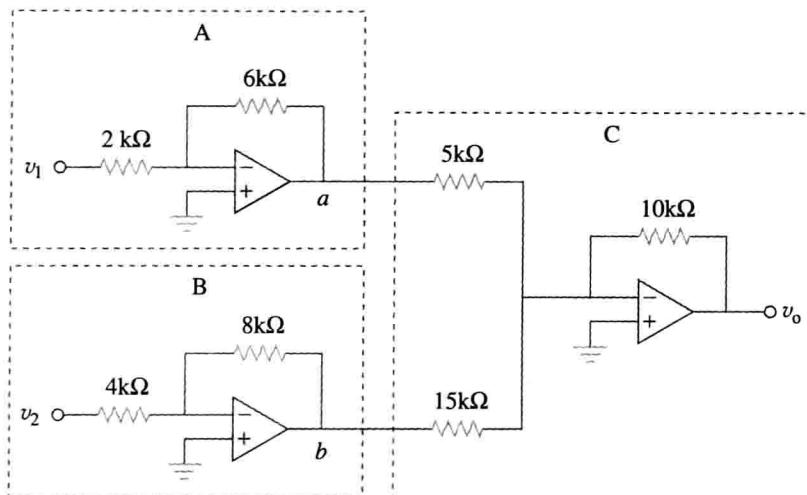


图 5-31 例 5-10 图

解: 1. 明确问题。本例要解决的问题十分清楚。

2. 列出已知条件。当输入 v_1 为 1V 、 v_2 为 2V 时, 确定图 5-31 所示电路的输出电压。该运算放大器实际上由三个电路组成, 第一个电路是输入为 v_1 、增益为 -3 ($-6\text{k}\Omega/2\text{k}\Omega$) 的放大器, 第二个电路是输入为 v_2 、增益为 -2 ($-8\text{k}\Omega/4\text{k}\Omega$) 的放大器, 第三个电路是对另两个电路的输出以不同增益放大后进行求和的加法器。

3. 确定备选方案。可以采用不同的方法求解该电路, 由于采用了理想运算放大器, 因此纯数学的解法十分容易。还可以利用 PSpice 来验证采用纯数学方法得到的结果。

4. 尝试求解。令第一个运算放大器的输出为 v_{11} , 第二个运算放大器的输出为 v_{22} , 得到:

$$v_{11} = -3v_1 = -3 \times 1 = -3(\text{V}),$$

$$v_{22} = -2v_2 = -2 \times 2 = -4(\text{V})$$

对于第三个运算放大器:

$$\begin{aligned} v_o &= -(10\text{k}\Omega/5\text{k}\Omega)v_{11} + [-(10\text{k}\Omega/15\text{k}\Omega)v_{22}] \\ &= -2 \times (-3) - (2/3) \times (-4) = 6 + 2.667 = 8.667(\text{V}) \end{aligned}$$

5. 评估结果。为了正确评价所得到的结果，需确定合理的校验方法，本题采用 PSpice 可以很容易地完成实验。下面就可以利用 PSpice 进行电路仿真，得到如图 5-32 所示的仿真结果。

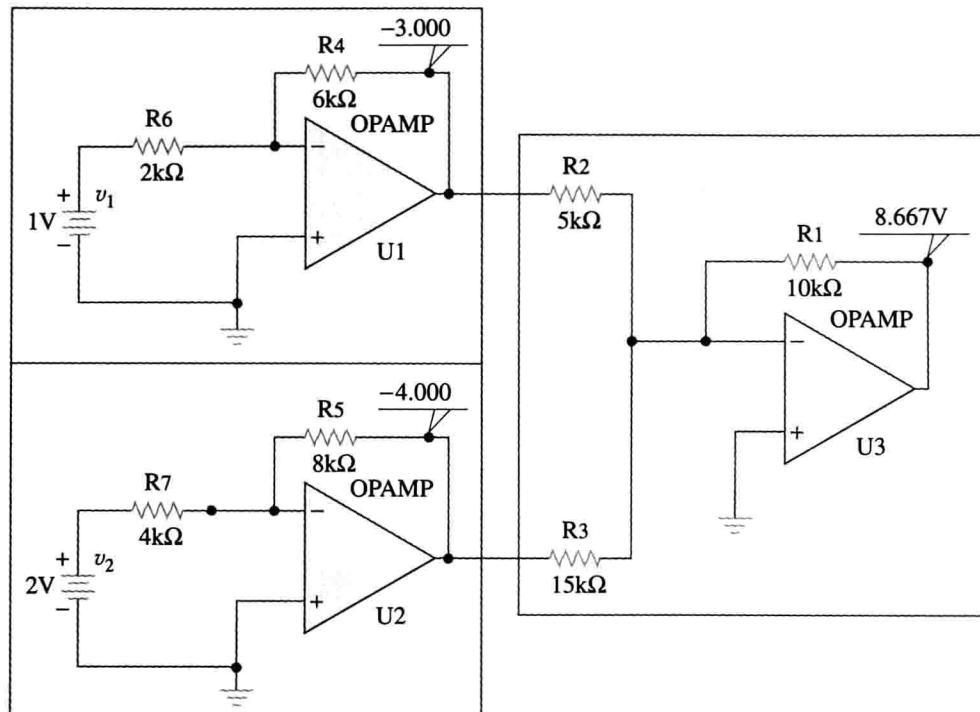


图 5-32 例 5-10 图

由此可见，采用两种完全不同的方法可以得到相同的结果，这是一种验证答案正确性的好方法。

6. 是否满意？对所得到的结果满意，可以将上述求解过程作为该问题的正确答案。

练习 5-10 图 5-33 所示电路中，已知 $v_1 = 7V$, $v_2 = 3.1V$, 试求 v_o 。

答案：10V

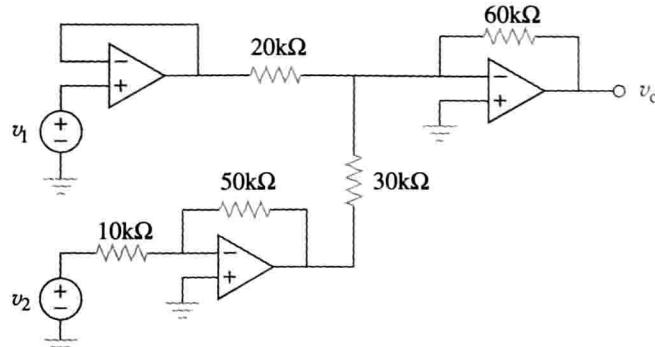


图 5-33 练习 5-10 图

5.9 基于 PSpice 的运算放大器电路分析

虽然 Windows 版本的 PSpice 软件可以利用工具(Tools)菜单中的创建子电路(Create Subcircuit)命令创建理想的运算放大器作为一个子电路，但该软件却没有理想运算放大器的模型。除通过上述方法创建理想运算放大器外，还可以利用 PSpice 库文件 eval.slb 中提供的四个非理想商用运算放大器之一进行电路仿真。这些运算放大器模型的元件名称分别为 LF411、LM111、LM324 和 uA741，如图 5-34 所示，其中运算放大器模型可以通过点击 PSpice 菜单 Draw/Get New Part/libraries.../eval.lib 得到，也可以简单地选择 Draw/Get New Part，并在部件名称(PartName)对话框中输入名称得到。注意，每个运算放大器模型都要求直流供电，否则运算放大器将无法正常工作，直流电源的连接方式如图 5-34 所示。

例 5-11 利用 PSpice 求解例 5-1 中的运算放大器电路。

解：利用 PSpice 的原理图编辑器对图 5-6a 所示的电路进行绘制，结果如图 5-35 所

示。注意，图中电压源 v_s 的正端通过一个 $10k\Omega$ 的电阻与运算放大器的反相端(引脚 20)相连，而运算放大器的同相输入端(引脚 3)接地，以符合图 5-6a 所示电路的要求。同时，还需注意运算放大器的供电方式，电源正极 $V+$ (引脚 7)与一个 $15V$ 直流电压源相连接，而电源负极 $V-$ (引脚 4)与一个 $-15V$ 的直流电压源相连接。由于运算放大器的引脚 1 与引脚 5 用于零偏置调整，本章暂不考虑，故将二者悬空。除在图 5-6a 所示的原电路中增加了直流电源外，电路图中还分别在引脚 6 处增加了用于测量输出电压 v_o 的伪元件 VIEWPOINT 以及用于测量经过 $20k\Omega$ 电阻的电流 i_o 的伪元件 IPROBE。

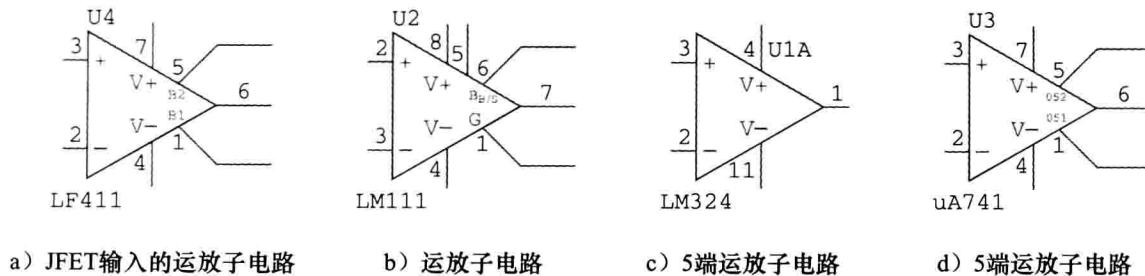


图 5-34 PSpice 中的非理想运算放大器模型

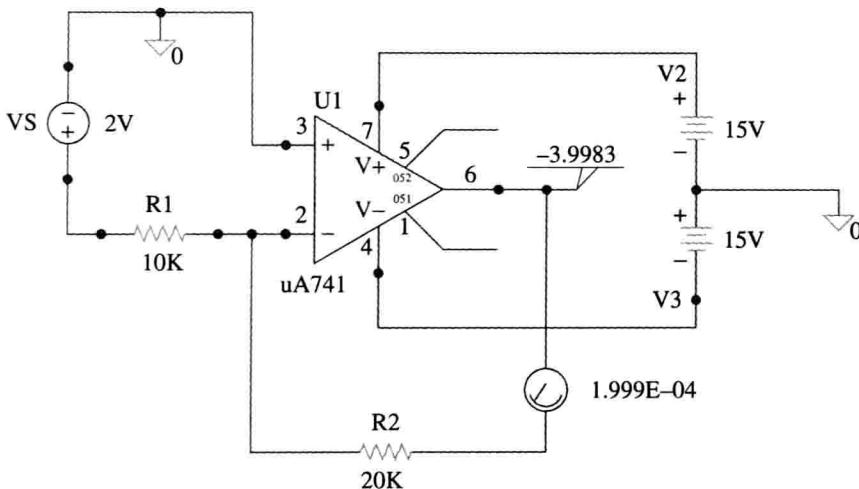


图 5-35 例 5-11 的 PSpice 电路原理图

保存电路图后，就可以运行 Analysis/simulate 命令对电路进行仿真，其结果显示在 VIEWPOINT 和 IPROBE 上，由所显示的结果可以得到闭环增益为：

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-3.9983}{2} = -1.99915$$

且 $i = 0.1999mA$ ，与例 5-1 分析得到的结果相同。

练习 5-11 试利用 PSpice 重做练习 5-1。

答案：9.0027, 650.2 μA

†5.10 应用实例

运算放大器是现代电子仪器最重要的功能模块，与电阻以及其他无源元件一样，被广泛应用于许多设备中，其典型的应用包括仪表放大器、数-模转换器、模拟计算机、电平移位器、滤波器、校验器、反相器、加法器、积分器、微分器、减法器、对数放大器、比较器、回转器、振荡器、检波器、调节器、电压-电流转换器、电流-电压转换器以及斩波器等。前面已经讨论过其中一些电路，本节再讨论两个应用电路：数-模转换器和仪表放大器。

5.10.1 数-模转换器

数-模转换器(DAC)能够将数字信号转换为模拟信号形式。图 5-36a 给出了一个典型的四比特数-模转换器电路。四比特数-模转换器电路可以由多种方法实现，其中一种简单的实现方法是二进制加权阶梯电路 (binary weighted ladder)，如图 5-36b 所示。各比特根据其所处位置的值确定权重，以 R_f/R_n 递减，从而使得较低比特的权重为其相邻较高比特权重的一半。显然，这是一个反相加法放大器，其输出与输入之间的关系如式(5.15)所示，因此：

$$-V_o = \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4 \quad (5.23)$$

输入 V_1 称为最高有效位(MSB)，而输入 V_4 称为最低有效位(LSB)。可以假定四个二进制输入 V_1, \dots, V_4 仅有两种电平：0V 或 1V，只要适当选取输入电阻和反馈电阻，该数-模转换器就能够给出一个与输入成正比的输出信号。

提示：在实际应用中，输入电平的典型值为 0V 或 ±5V。

例 5-12 在图 5-36b 所示的运算放大器电路中，令 $R_f = 10\text{k}\Omega$, $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\text{k}\Omega$, $R_3 = 40\text{k}\Omega$ 且 $R_4 = 80\text{k}\Omega$ ，试确定二进制输入为 [0000], [0001], [0010], …, [1111] 时的模拟输出。

解：将已知的输入电阻值与反馈电阻值代入式(5.23)得：

$$\begin{aligned} -V_o &= \frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3 + \frac{R_f}{R_4}V_4 \\ &= V_1 + 0.5V_2 + 0.25V_3 + 0.125V_4 \end{aligned}$$

利用该方程，当输入为 $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0000]$ 时，模拟输出为 $-V_o = 0\text{V}$ ；当 $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0001]$ 时，模拟输出 $-V_o = 0.125\text{V}$ 。同理：

$$[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0010] \Rightarrow -V_o = 0.25\text{V}$$

$$[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0011] \Rightarrow -V_o = 0.25 + 0.125 = 0.375(\text{V})$$

$$[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0100] \Rightarrow -V_o = 0.5\text{V}$$

⋮

$$[V_1 V_2 V_3 V_4] = [1111] \Rightarrow -V_o = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1.875(\text{V})$$

表 5-2 总结了数模转换的结果。注意，表中已经假设每个比特的值为 0.125V。因此，在该系统中，无法表示出 1.000V 与 1.125V 之间的电压值，这种分辨率不足正是数-模转换器的主要局限。为了获得更高精度，就要采用更多的比特位来表示数字量。即便如此，由数字量表示模拟电压总是无法非常精确。尽管这样，数字化设备已用于制作 CD、数字图像等大量产品。

表 5-2 4 比特数模转换器的输入输出值对照表

二进制输入 [$V_1 V_2 V_3 V_4$]	对应十进制数	输出 $-V_o$	二进制输入 [$V_1 V_2 V_3 V_4$]	对应十进制数	输出 $-V_o$
0000	0	0	1000	8	1.0
0001	1	0.125	1001	9	1.125
0010	2	0.25	1010	10	1.25

(续)

二进制输入 [V ₁ V ₂ V ₃ V ₄]	对应十进制数	输出 -V _o	二进制输入 [V ₁ V ₂ V ₃ V ₄]	对应十进制数	输出 -V _o
0011	3	0.375	1011	11	1.375
0100	4	0.5	1100	12	1.5
0101	5	0.625	1101	13	1.625
0110	6	0.75	1110	14	1.75
0111	7	0.875	1111	15	1.875

练习 5-12 一个 3bit 数-模转换器如图 5-37 所示。

- (a) 试确定 [v₁ v₂ v₃] = [010] 时的 |v_o|；(b) 试确定 [v₁ v₂ v₃] = [110] 时的 |v_o|；(c) 如果要求 |v_o| = 1.25V，[v₁ v₂ v₃] 应为多少？(d) 如果要求 |v_o| = 1.75V，[v₁ v₂ v₃] 应为多少？

答案：0.5V, 1.5V, [101], [111]

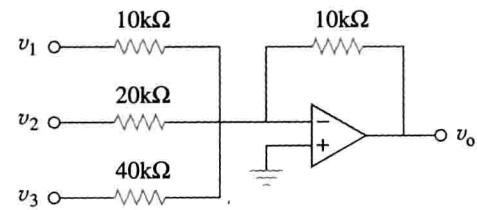


图 5-37 3bit 数-模转换器

5.10.2 仪表放大器

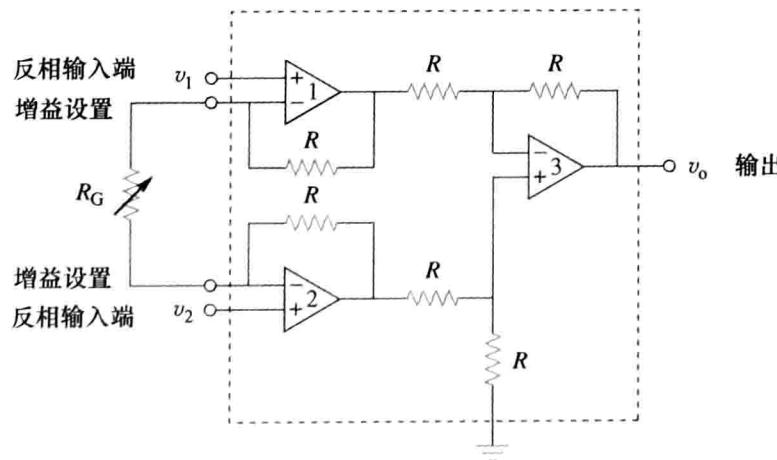
在精密测量与过程控制方面，最有用的一类运算放大器电路是仪表放大器 (instrumentation amplifier, IA)，之所以称为仪表放大器就是因为它被广泛应用于测量系统中。IA 的典型应用包括隔离放大器、热电偶放大器和数据采集系统。

仪表放大器也属于差分放大器范畴，因为它所放大的是两个输入信号之差。如图 5-26 (参见例 5-8) 所示，仪表放大器通常由 3 个运算放大器和 7 个电阻构成。为分析方便，现将该放大器重画于图 5-38a。图中除连接在增益设置端之间的外接电阻 R_G 外，其他电阻都相等。图 5-38b 给出了 IA 的电路原理图符号。

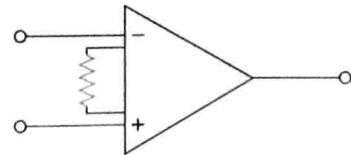
$$v_o = A_v(v_2 - v_1) \quad (5.24)$$

其中电压增益为：

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} \quad (5.25)$$



a) 带外接增益调节电阻的仪表放大器



b) 电路原理图符号

图 5-38 仪表放大器

如图 5-39 所示，仪表放大器可以放大叠加在较大共模电压上的差分小信号电压，因为共模电压是相等的，可以彼此抵消。

仪表放大器具有以下三个主要特征：

1. 电压增益通过一个外接电阻 R_G 来调整；
2. 两个输入端之间的输入阻抗非常大，不随增益的变化而变化；
3. 输出 v_o 取决于两个输入 v_1 与 v_2 之间的差值，而不取决于其公共电压(即共模电压)。

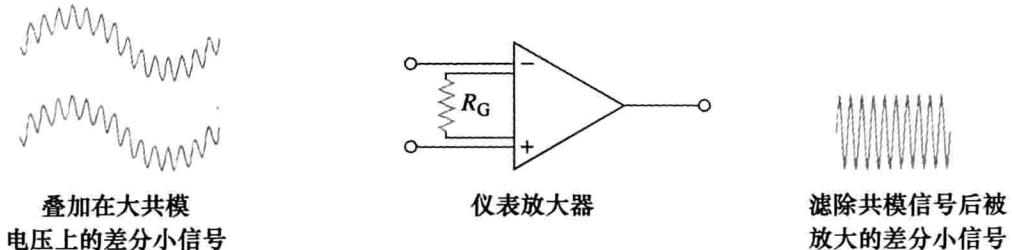


图 5-39 IA 抑制共模电压后放大的小信号电压

Floyd, Thomas, L, Electronic Devices, 4th edition, © 1995, p. 795. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

因为仪表放大器的应用非常广泛，制造商已经开发并生产了许多单片封装的放大器单元。典型的例子是美国国家半导体(National Semiconductor)公司研制生产的 LH0036，通过外接 $100\Omega \sim 10k\Omega$ 的电阻，其相应的增益变化范围在 1~1000 之间。

例 5-13 在图 5-38 中，设 $R = 10k\Omega$, $v_1 = 2.011V$, $v_2 = 2.017V$ 。如果将 R_G 调节到 500Ω ，试确定：(a) 电压增益；(b) 输出电压 v_o 。

解：(a) 电压增益为：

$$A_v = 1 + \frac{2R}{R_G} = 1 + \frac{2 \times 10\,000}{500} = 41$$

(b) 输出电压为：

$$v_o = A_v(v_2 - v_1) = 41(2.017 - 2.011) = 41 \times 6 = 246(\text{mV})$$

练习 5-13 图 5-38 所示 IA 电路中，如果 $R=25k\Omega$ ，试确定增益为 142 时该仪表放大器所需外接电阻 R_G 的阻值。答案：354.6\Omega

5.11 本章小结

1. 运算放大器是一种输入电阻很大，输出电阻很小的高增益放大器。
2. 表 5-3 总结了本章介绍的运算放大器电路。一般来说，无论其输入是直流、交流还是时变信号，表中所列各放大器的增益表达式都是成立的。

表 5-3 基本运算放大器电路总结

运算放大器	名称/输入输出关系
	反相放大器 $v_o = -\frac{R_2}{R_1}v_i$
	同相放大器 $v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_i$
	电压跟随器 $v_o = v_i$

(续)

运算放大器	名称/输入输出关系
	加法器 $v_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2 + \frac{R_f}{R_3}v_3\right)$
	差分放大器 $v_o = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1)$

3. 理想运算放大器输入电阻为无穷大，输出电阻为零，增益为无穷大。
4. 对于理想运算放大器，两个输入端的流入电流均为零，而且两个输入端之间的电压差非常小，可以忽略不计。
5. 在反相放大器中，输出电压与输入电压之间呈负倍数关系。
6. 在同相放大器中，输出电压与输入电压之间呈正倍数关系。
7. 电压跟随器的输出电压等于(跟随)输入电压。
8. 加法放大器的输出为输入的加权和。
9. 差分放大器的输出正比于两个输入信号之差。
10. 运算放大器可以级联，而且不改变各自的输入-输出关系。
11. 可以利用 PSpice 软件来分析运算放大器。
12. 本章介绍的运算放大器的典型应用包括数-模转换器和仪表放大器。

复习题

- 1 运算放大器两个输入端的标记为：
 (a)高与低 (b)正与负
 (c)同相端与反相端 (d)差分端与非差分端
- 2 对于理想运算放大器而言，以下说法不正确的是：
 (a)输入端之间的差分电压为零
 (b)流入输入端的电流为零
 (c)输出端的电流为零
 (d)输入电阻为零
 (e)输出电阻为零
- 3 图 5-40 电路中电压 v_o 是：
 (a) -6V (b) -5V (c) 1.2V (d) -0.2V

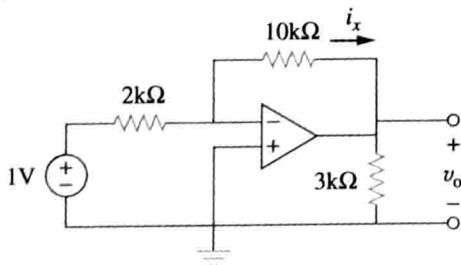


图 5-40 复习题 3、4 图

- 4 图 5-40 电路中电流 i_x 是：
 (a) 0.6mA (b) 0.5mA
 (c) 0.2mA (d) 1/12mA
- 5 如果图 5-41 中 $v_s = 0$ ，求 i_o 。
 (a) -10mA (b) -2.5mA
 (c) (10/12)mA (d) (10/14)mA
- 6 如果图 5-41 中 $v_s = 8mV$ ，则输出电压为：
 (a) -44mV (b) -8mV
 (c) 4mV (d) 7mV

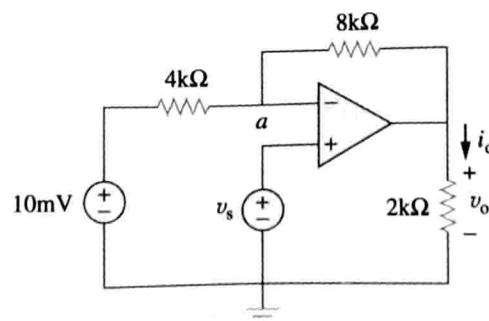


图 5-41 复习题 5、6 和 7 图

- 7 如果图 5-41 中 $v_s = 8\text{mV}$, 则电压 v_a 为:
 (a) -8mV (b) 0mV (c) $10/3\text{mV}$ (d) 8mV
- 8 图 5-42 中, $4\text{k}\Omega$ 电阻吸收的功率为:
 (a) 9mW (b) 4mW (c) 2mW (d) 1mW

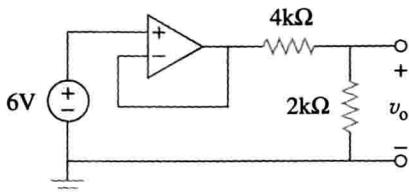


图 5-42 复习题 8 图

习题

5.2 节

- 1 某运算放大器的等效电路模型如图 5-43 所示, 试确定: (a) 输入电阻; (b) 输出电阻; (c) 单位为 dB 的电压增益。

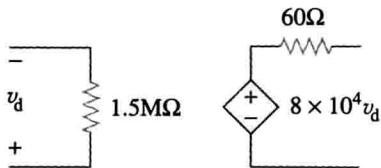


图 5-43 习题 1 图

- 2 某运算放大器的开环增益为 10 000, 试计算当反相输入端施加 $+10\mu\text{V}$ 电压且同相输入端施加 $+20\mu\text{V}$ 电压时的电压输出。
- 3 假定某运算放大器的开环增益为 200 000, 试计算当反相输入端施加 $-20\mu\text{V}$ 电压且同相输入端施加 $+30\mu\text{V}$ 电压时的电压输出。
- 4 当同相输入端为 1mV 时, 运算放大器的输出电压为 -4V , 如果该运算放大器的开环增益为 2×10^6 , 试问其反相端的输入为多少?
- 5 对于图 5-44 所示电路, 运放开环增益为 100 000, 输入电阻为 $10\text{k}\Omega$, 试利用非理想运放模型计算电压增益 v_o/v_i 。

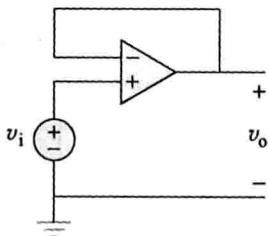


图 5-44 习题 5 图

- 6 利用例 5-1 中所给的 741 运算放大器的参数, 计算图 5-45 中的输出电压 v_o 。

- 9 以下那个放大器可以用于数-模转换器中?

- (a) 同相器 (b) 电压跟随器
 (c) 加法器 (d) 差分放大器

- 10 差分放大器可用于:

- (a) 仪表放大器 (b) 电压跟随器
 (c) 电压调节器 (d) 缓冲器
 (e) 加法放大器 (f) 减法放大器

答案: 1(c); 2(c、d); 3(b); 4(b); 5(a);
 6(c); 7(d); 8(b); 9(c); 10(a、f)

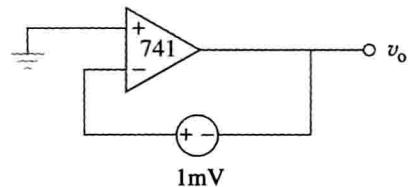


图 5-45 习题 6 图

- 7 图 5-46 中的运算放大器, $R_i = 100\text{k}\Omega$, $R_o = 100\Omega$, $A = 100 000$, 试求其差分电压 v_d 与输出电压 v_o 。

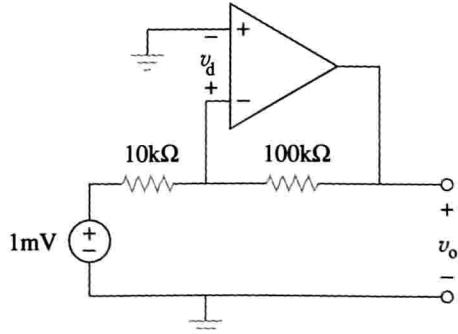
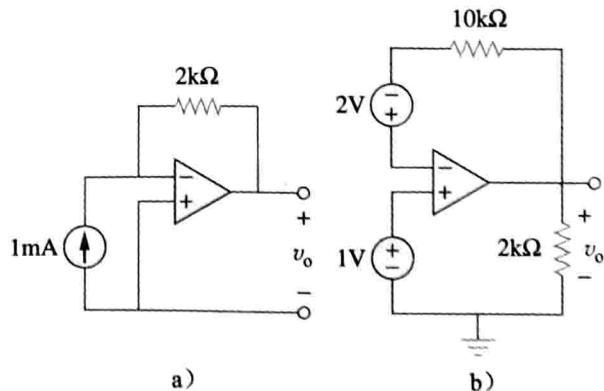


图 5-46 习题 7 图

5.3 节

- 8 求图 5-47 中运算放大器的输出电压 v_o 。



a)

b)

图 5-47 习题 8 图

9 求图 5-48 所示的各运算放大器电路中的 v_o 。

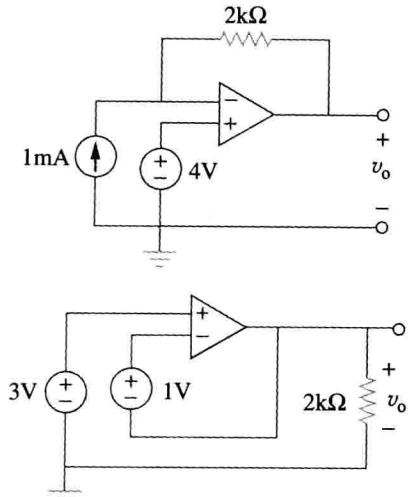


图 5-48 习题 9 图

10 求图 5-49 电路中的增益 v_o/v_s 。

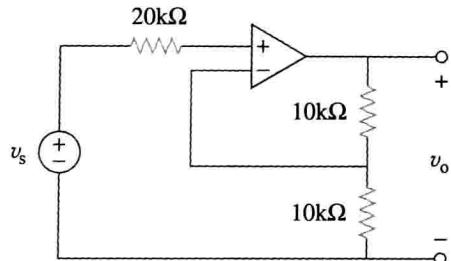


图 5-49 习题 10 图

11 利用图 5-50 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解理想运放是如何工作的。

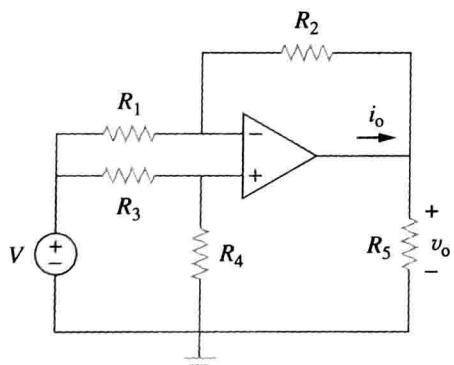


图 5-50 习题 11 图

12 计算图 5-51 中的电压比 v_o/v_s ，假设该运算放大器是理想的。

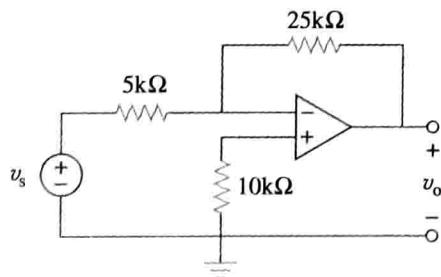


图 5-51 习题 12 图

13 求图 5-52 中的 v_o 与 i_o 。

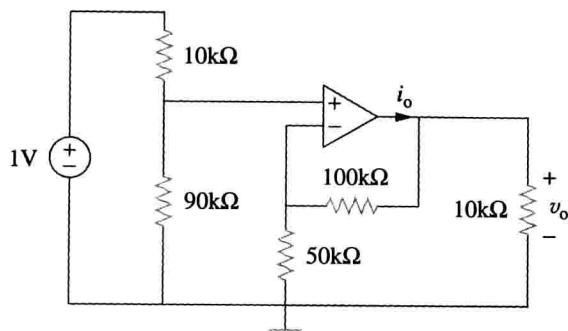


图 5-52 习题 13 图

14 求图 5-53 中的输出电压 v_o 。

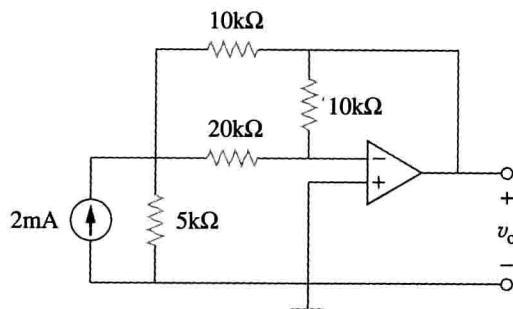


图 5-53 习题 14 图

5.4 节

15 (a) 确定图 5-54 中的 v_o/i_s 值；(b) 当 $R_1 = 20k\Omega$ 、 $R_2 = 25k\Omega$ 、 $R_3 = 40k\Omega$ 时，试计算该比值。

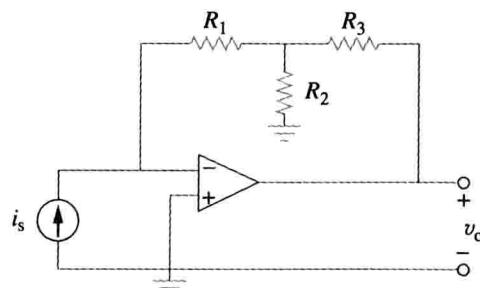


图 5-54 习题 15 图

16 利用图 5-55 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解反相放大器。

ED

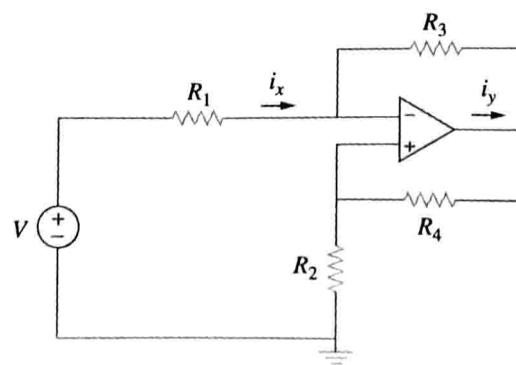


图 5-55 习题 16 图

- 17 图 5-56 中, 当开关分别位于以下位置时, 计算电压增益 v_o/v_i 。(a) 位置 1; (b) 位置 2; (c) 位置 3。

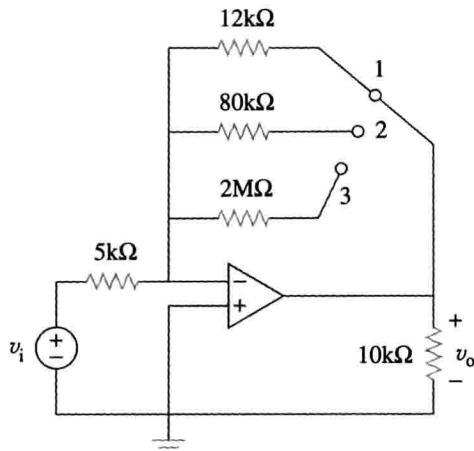


图 5-56 习题 17 图

- * 18 电路如图 5-57 所示, 求从端口 A-B 看进去的戴维南等效电路。

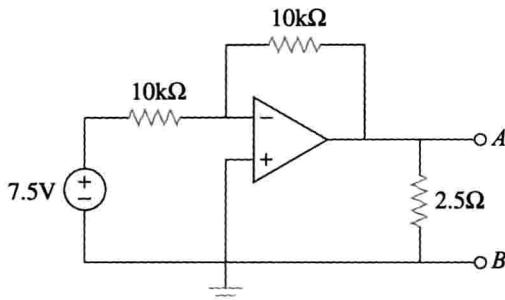


图 5-57 习题 18 图

- 19 求图 5-58 中的电流 i_o 。

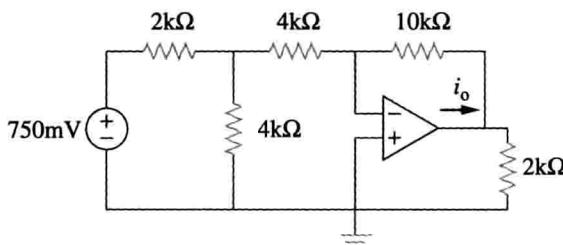


图 5-58 习题 19 图

- 20 当 $v_s=2V$ 时, 计算图 5-59 中的电压 v_o 。

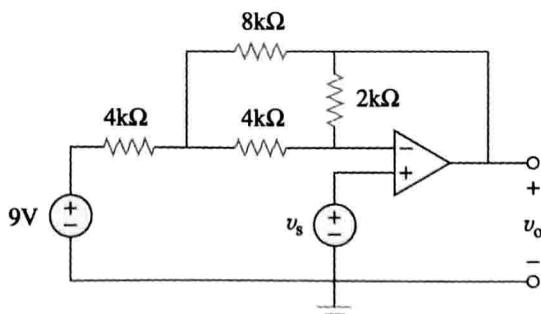


图 5-59 习题 20 图

- 21 计算图 5-60 中运算放大器的电压 v_o 。

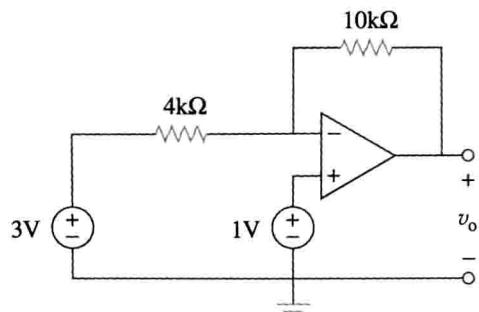


图 5-60 习题 21 图

- 22 设计一个增益为 -15 的反相放大器。 **ED**
23 在图 5-61 所示电路中, 试求电压增益 v_o/v_s 。

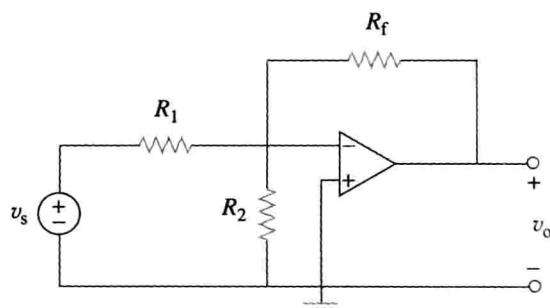


图 5-61 习题 23 图

- 24 在图 5-62 所示电路中, 试求传递函数 $v_o = K v_s$ 中的 K 。

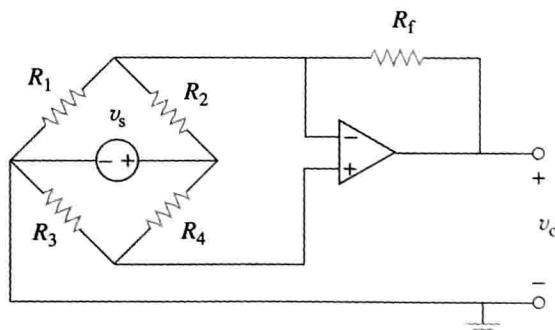


图 5-62 习题 24 图

5.5 节

- 25 计算图 5-63 中的 v_o 。

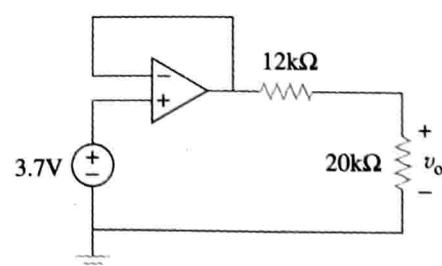


图 5-63 习题 25 图

- 26 利用图 5-64 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解反相放大器。 **ED**

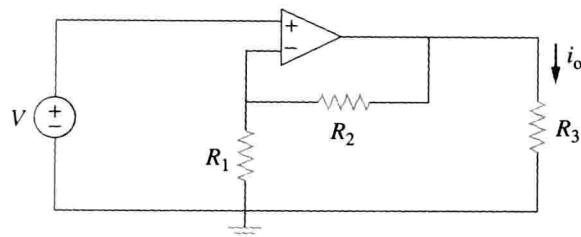


图 5-64 习题 26 图

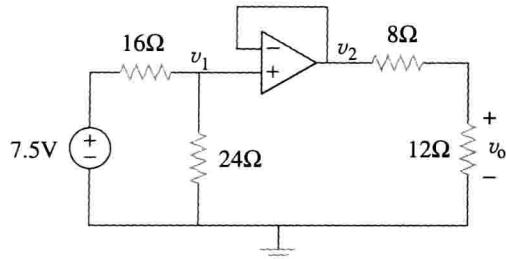
27 求图 5-65 电路中的电压 v_{oo} 。

图 5-65 习题 27 图

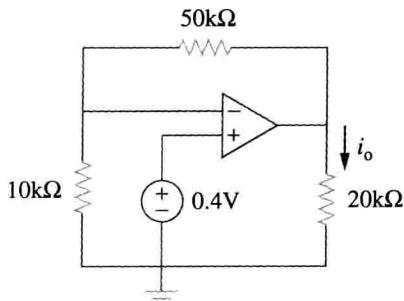
28 求图 5-66 电路中的电流 i_o 。

图 5-66 习题 28 图

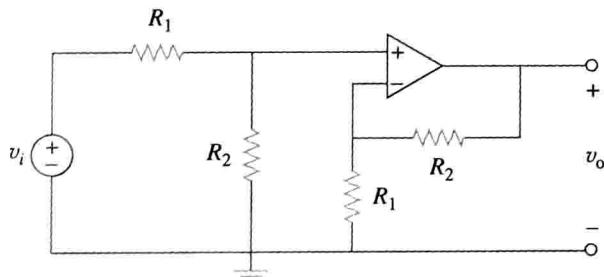
29 求图 5-67 中运放电压增益 v_o/v_i 。

图 5-67 习题 29 图

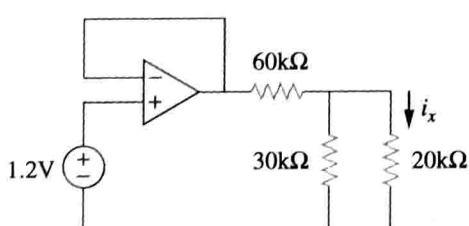
30 图 5-68 所示电路中，计算电流 i_x 并求出 $20\text{k}\Omega$ 电阻吸收的功率。

图 5-68 习题 30 图

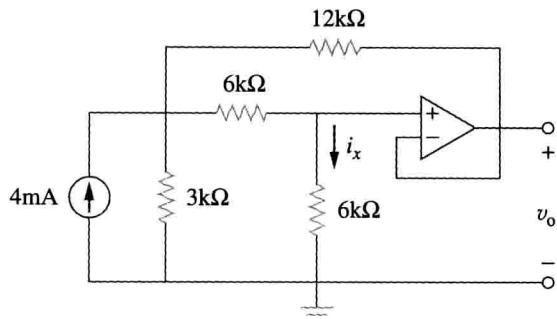
31 求图 5-69 中的电流 i_x 。

图 5-69 习题 31 图

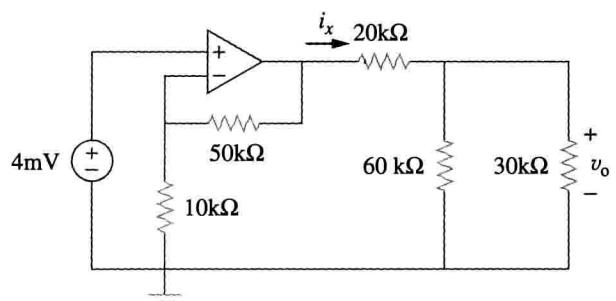
32 计算图 5-70 电路中的 i_x 和 v_o ，并求出 $60\text{k}\Omega$ 电阻吸收的功率。

图 5-70 习题 32 图

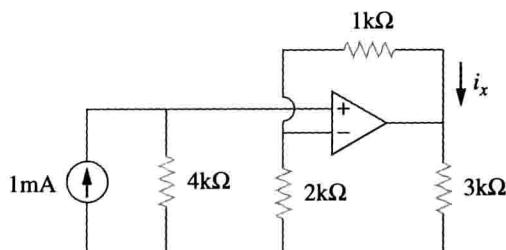
33 计算图 5-71 电路中的 i_x ，并求出 $3\text{k}\Omega$ 电阻吸收的功率。

图 5-71 习题 33 图

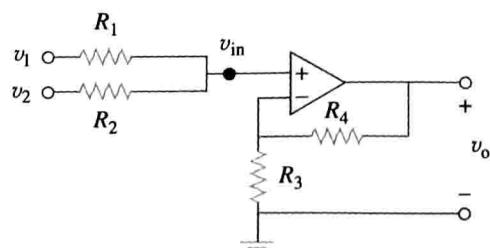
34 如图 5-72 所示运算放大器电路，试用 v_1 和 v_2 表示 v_o 。

图 5-72 习题 34 图

35 设计一个增益为 7.5 的同相放大器。 ED

36 对于图 5-73 所示电路，求从端口 a 和 b 看进去的戴维南等效电路(提示：为求出 R_{th} ，需添加一个电流 i_o 并求出 v_o)。

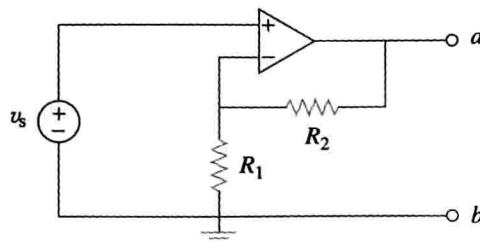


图 5-73 习题 36 图

5.6 节

37 求图 5-74 所示加法放大器的输出电压。

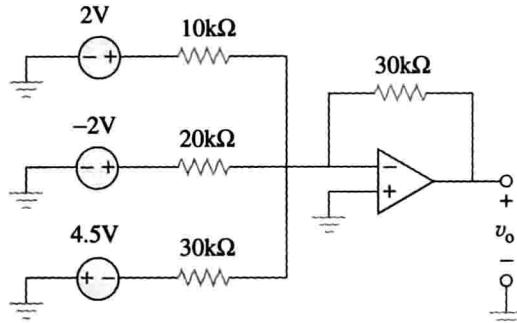


图 5-74 习题 37 图

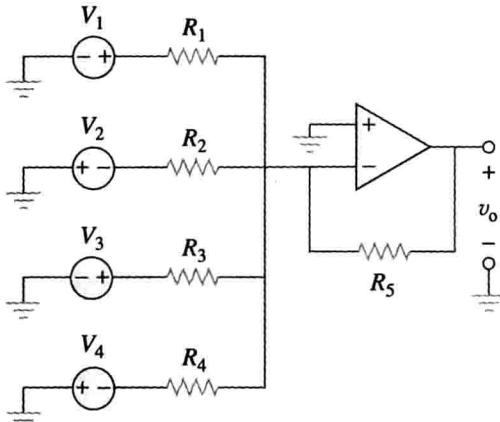
38 利用图 5-75 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解加法放大器。 **ED**

图 5-75 习题 38 图

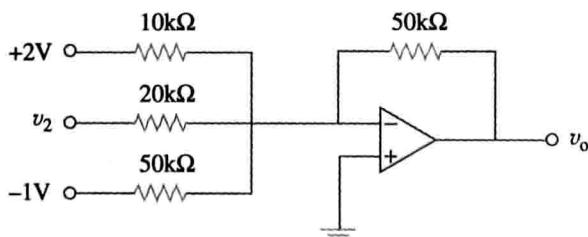
39 图 5-76 所示电路中，当 v_2 为何值时 $v_o = -16.5 \text{ V}$ ？

图 5-76 习题 39 图

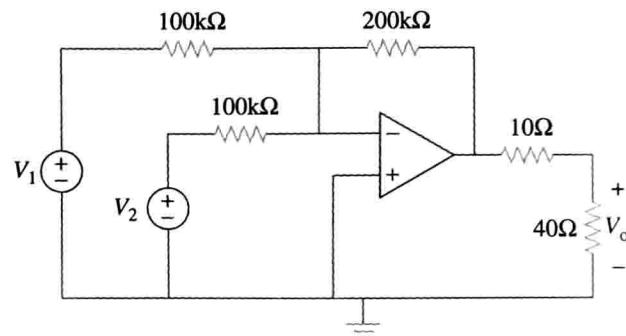
40 图 5-77 所示电路中，试利用 v_1 、 v_2 表示 v_o 。

图 5-77 习题 40 图

41 均值放大器 (averaging amplifier) 是输出等于输入平均值的一种加法器。采用适当的输入电阻和反馈电阻，可以得到：

$$-v_{\text{out}} = \frac{1}{4} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

试采用 $10\text{k}\Omega$ 反馈电阻设计一个四输入均值放大器。42 三输入加法器的输入电阻为 $R_1 = R_2 = R_3 = 75\text{k}\Omega$ ，为了使其实现均值放大功能，所需的反馈电阻应为多少？43 四输入加法器的输入电阻为 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 80\text{k}\Omega$ ，为了使其实现均值放大功能，所需的反馈电阻应为多大？

44 证明图 5-78 所示电路中的输出电压为：

$$v_o = \frac{(R_3 + R_4)}{R_3(R_1 + R_2)} (R_2 v_1 + R_1 v_2)$$

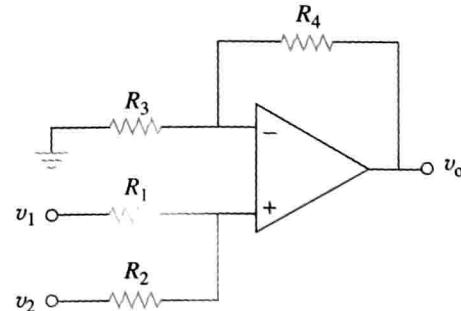


图 5-78 习题 44 图

45 设计一个功能如下的运算放大器电路： **ED**

$$v_o = 3v_1 - 2v_2$$

电路中所有电阻都必须 $\leqslant 100\text{k}\Omega$ 。46 利用两个运算放大器设计一个功能如下的电路： **ED**

$$-v_{\text{out}} = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_3}{2}$$

5.7 节

47 图 5-79 所示电路为一个差分放大器，已知 $v_1 = 1\text{V}$ ， $v_2 = 2\text{V}$ ，试求 v_o 。

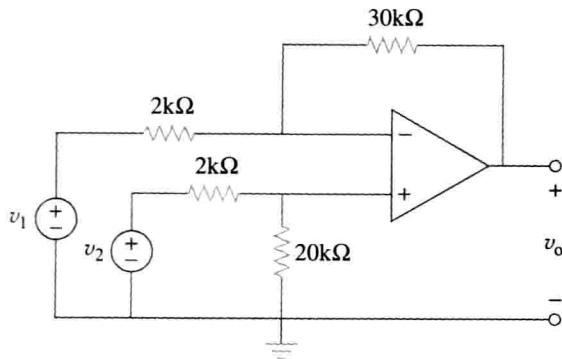


图 5-79 习题 47 图

- 48 图 5-80 所示电路是一个由电桥驱动的差分放大器，试求 v_o 。

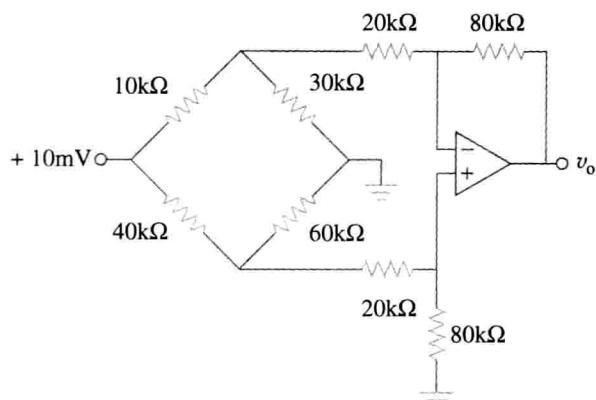


图 5-80 习题 48 图

- 49 设计一个增益为 4，各个输入端的共模输入电阻为 $10\text{k}\Omega$ 的差分放大器。 **ED**

- 50 设计一个将两输入信号之差放大 2.5 倍的电路：(a) 仅利用一个运算放大器；(b) 利用两个运算放大器。 **ED**

- 51 利用两个运算放大器设计一个减法器。 **ED**

- * 52 设计一个运算放大器电路，使得：

$$v_o = 4v_1 + 6v_2 - 3v_3 - 5v_4$$

要求所有电阻均位于 $20\sim200\text{k}\Omega$ 范围内。 **ED**

- * 53 增益固定的通用差分放大器如图 5-81a 所示，增益不变时，该放大器简单可靠。使得该放大器增益可调又不失简单性与精确性的一种方法是采用如图 5-81b 所示的电路，试证明：
- (a) 对于图 5-81a 所示电路，有：

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1}$$

(b) 对于图 5-81b 所示电路，有：

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{R_1}{2R_G}}$$

(c) 对于图 5-81c 所示电路，有：

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{2R_G} \right)$$

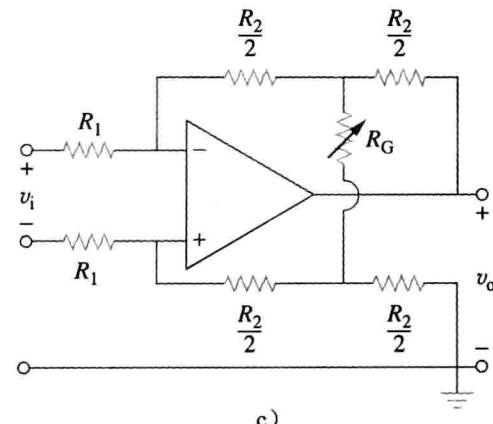
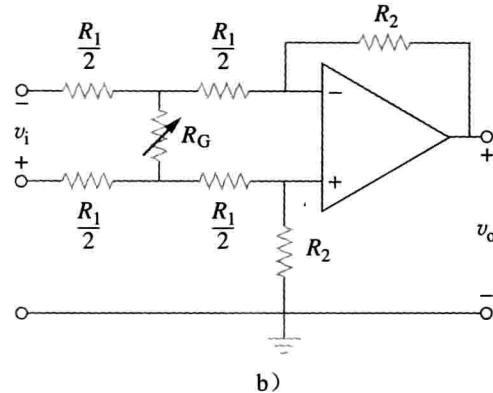
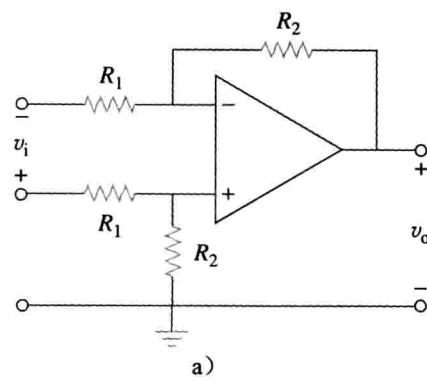


图 5-81 习题 53 图

5.8 节

- 54 图 5-82 所示电路中，当 $R=10\text{k}\Omega$ 时，求电压传输比 v_o/v_s 。

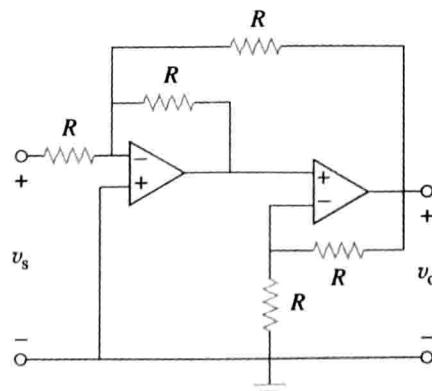


图 5-82 习题 54 图

- 55 在某电子设备中, 需要一个总增益为 42dB 的三级放大器。其中前两级的电压增益相等, 而第三级的增益是前一级增益的 $1/4$ 。试计算每一级的电压增益。
- 56 利用图 5-83 所示电路试设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解运算放大器级联。

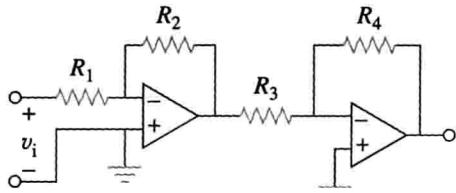


图 5-83 习题 56 图

- 57 求图 5-84 电路中的输出电压 v_o 。

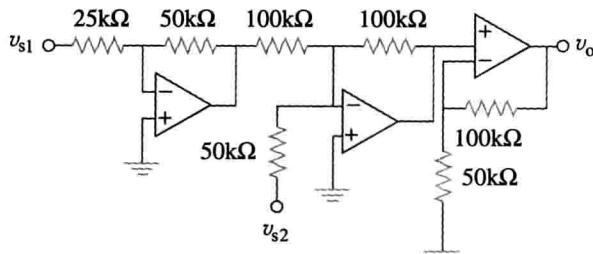


图 5-84 习题 57 图

- 58 求图 5-85 电路中的 i_o 。

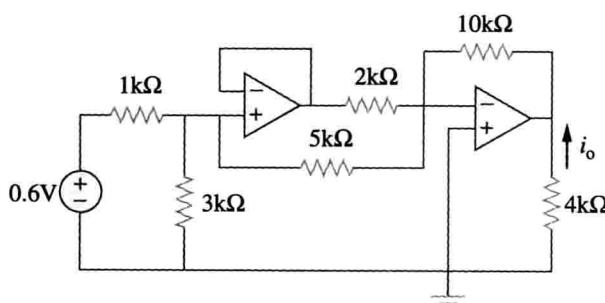


图 5-85 习题 58 图

- 59 在图 5-86 所示电路中, 试确定电压增益 v_o/v_s 。取 $R=10\text{k}\Omega$ 。

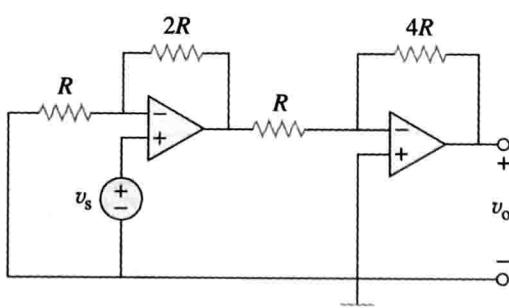


图 5-86 习题 59 图

- 60 在图 5-87 所示电路中, 试确定电压增益 v_o/v_i 。

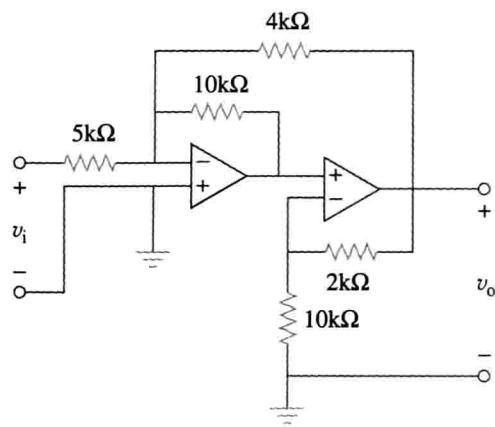


图 5-87 习题 60 图

- 61 求图 5-88 中的 v_o 。

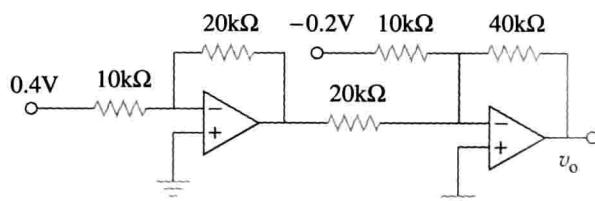


图 5-88 习题 61 图

- 62 求图 5-89 所示电路中的闭环电压增益 v_o/v_i 。

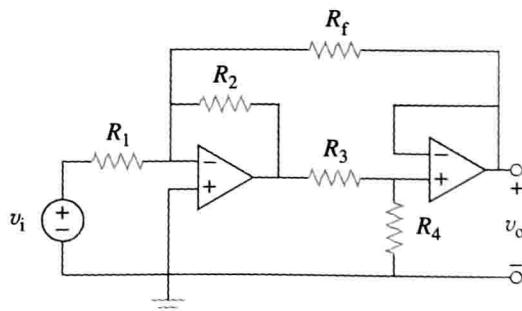


图 5-89 习题 62 图

- 63 求图 5-90 所示电路中的电压增益 v_o/v_i 。

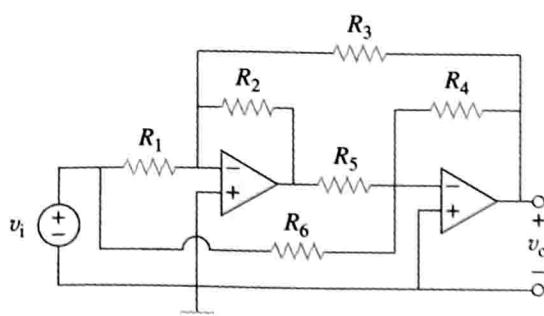


图 5-90 习题 63 图

- 64 求图 5-91 所示电路中的电压增益 v_o/v_s 。

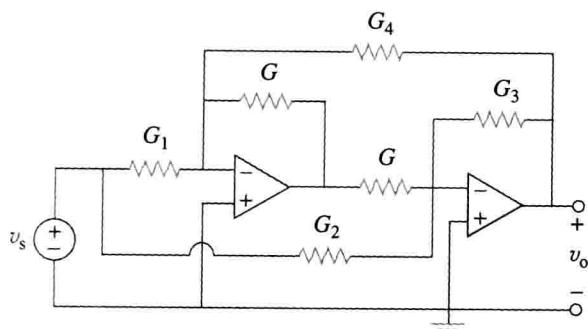


图 5-91 习题 64 图

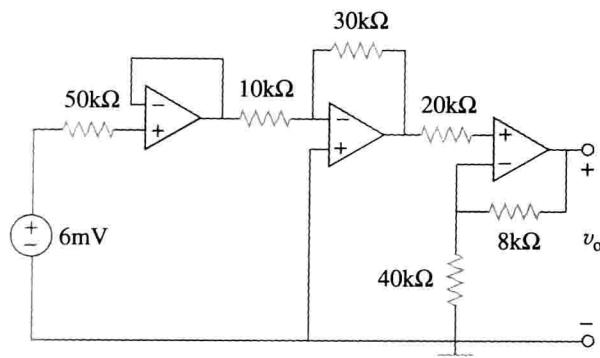
65 计算图 5-92 电路中的 v_o 。

图 5-92 习题 65 图

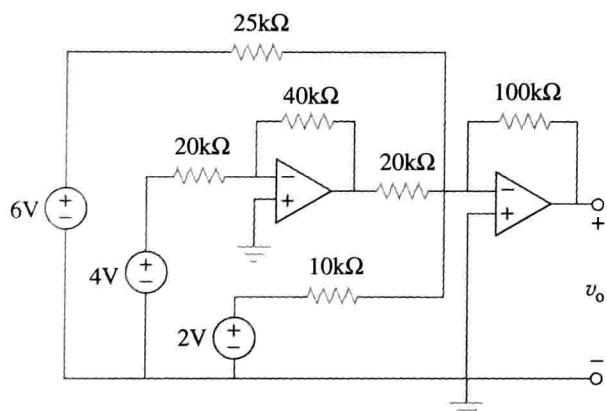
66 计算图 5-93 电路中的 v_o 。

图 5-93 习题 66 图

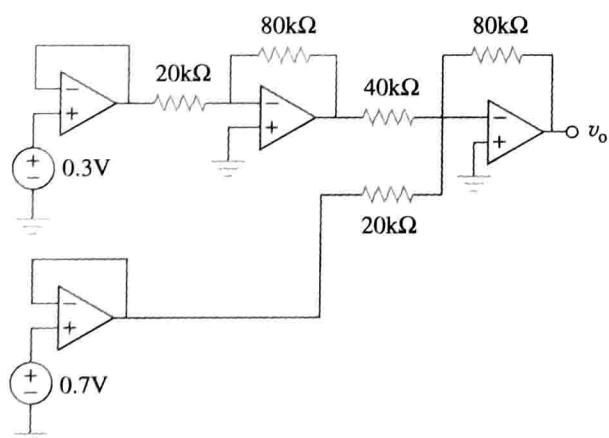
67 求图 5-94 中输出电压 v_o 。

图 5-94 习题 67 图

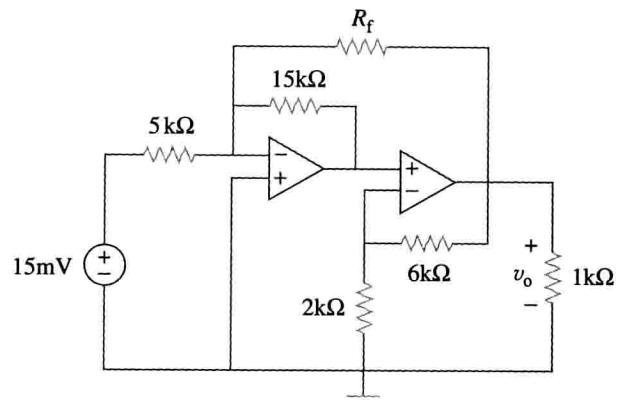
68 求图 5-95 所示电路中 v_o ，假设 $R_f = \infty$ (开路)。

图 5-95 习题 68 和习题 69 图

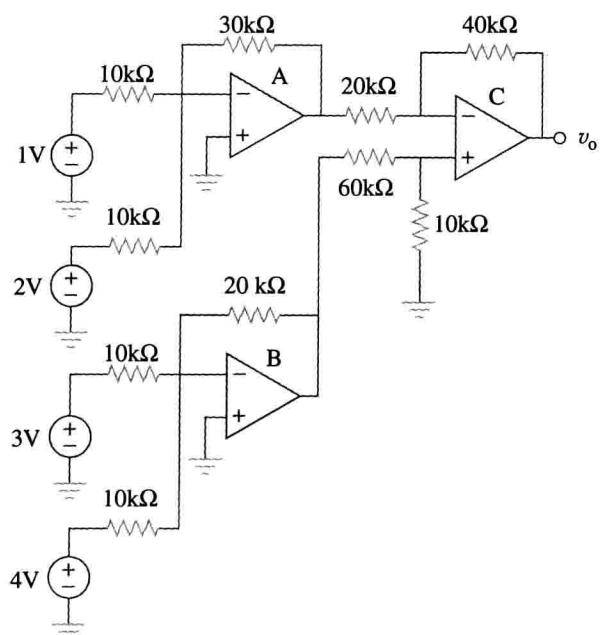
69 如果 $R_f = 10k\Omega$ ，重做上题。70 求图 5-96 所示电路中 v_o 。

图 5-96 习题 70 图

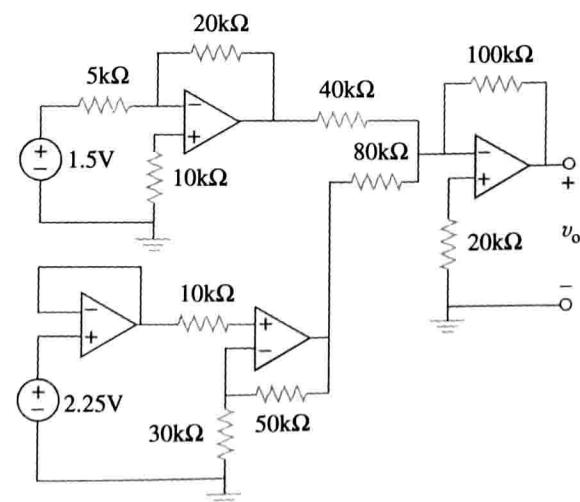
71 求图 5-97 所示电路中 v_o 。

图 5-97 习题 71 图

72 求图 5-98 中的负载电压 v_L 。

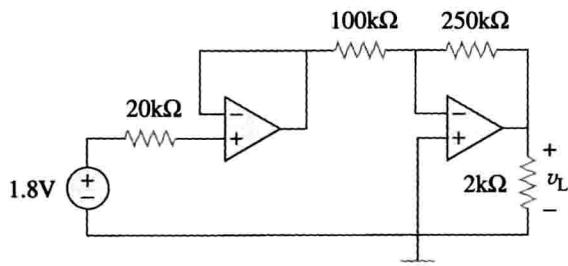


图 5-98 习题 72 图

73 求图 5-99 中的负载电压 v_L 。

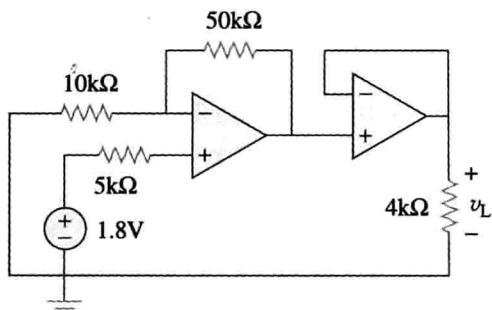


图 5-99 习题 73 图

74 求图 5-100 所示电路中 i_o 。

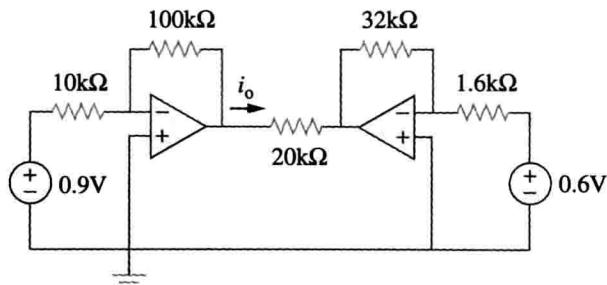


图 5-100 习题 74 图

5.9 节

- 75 采用非理想运算放大器 LM324 代替 uA741，重做例 5-11。
- 76 利用 PSipce 或 MultiSim 和 uA741 求解习题 19。
- 77 利用 PSipce 或 MultiSim 和 LM324 求解习题 48。
- 78 利用 PSipce 或 MultiSim 确定图 5-101 中电压 v_o 。

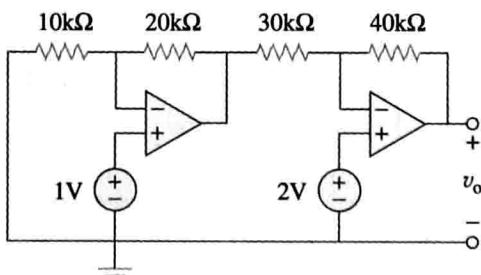


图 5-101 习题 78 图

- 79 利用 PSipce 或 MultiSim 确定图 5-102 中电压 v_o 。

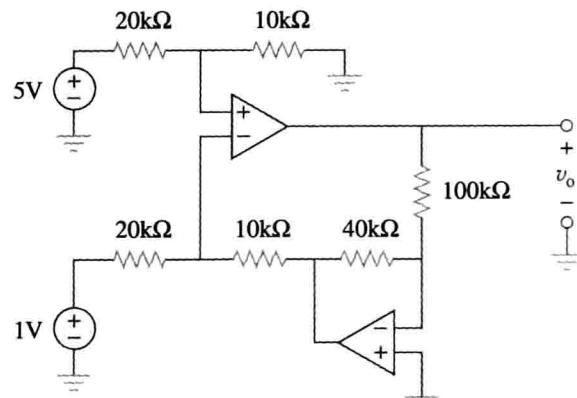


图 5-102 习题 79 图

- 80 利用 PSipce 或 MultiSim 重新求解习题 70。
- 81 利用 PSipce 或 MultiSim 验证例 5-9 的结果，假设非理想运放为 LM324。
- 5.10 节
- 82 某 5bit 数-模转换器的输出电压范围是 0 ~ 7.75V，试计算每位表示的电压值。 ED
- 83 设计一个 6bit 数-模转换器。(a) 如果要求 $|V_o| = 1.1875V$, $[V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6]$ 应该是多少? (b) 如果 $[V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6] = [011011]$, 试计算 $|V_o|$ 。(c) $|V_o|$ 的最大值为多少? ED
- * 84 某 4bit R-2R 数-模转换器如图 5-103 所示。
(a) 试证明其输出电压为:

$$-V_o = R_f \left(\frac{V_1}{2R} + \frac{V_2}{4R} + \frac{V_3}{8R} + \frac{V_4}{16R} \right)$$

- (b) 如果 $R_f = 12k\Omega$, $R = 10k\Omega$, 试求 $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [1011]$ 和 $[V_1 V_2 V_3 V_4] = [0101]$ 时的 $|V_o|$ 。

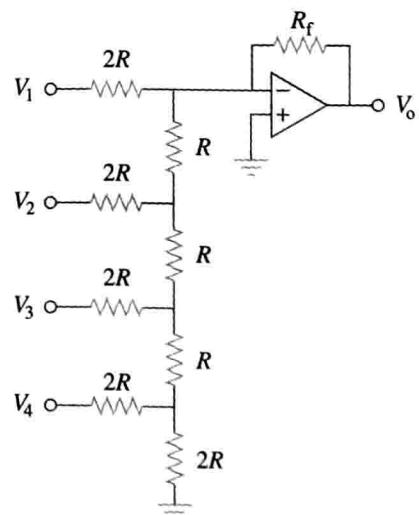


图 5-103 习题 84 图

- 85 图 5-104 所示电路中，试求使得 $10k\Omega$ 电阻所吸收功率为 $10mW$ 的电阻值 R 。取 $v_s = 2V$ 。
- 86 设计一个输出电流为 $200v_o(t)\mu A$ 的理想电压控制电流源(利用运算放大器)。

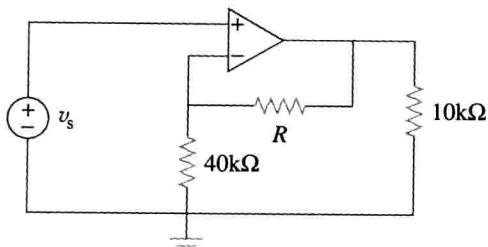


图 5-104 习题 85 图

- 87 图 5-105 给出了一个双仪表放大器，试用 v_1 、 v_2 表示 v_o 。如何将该运算放大器用作减法器？

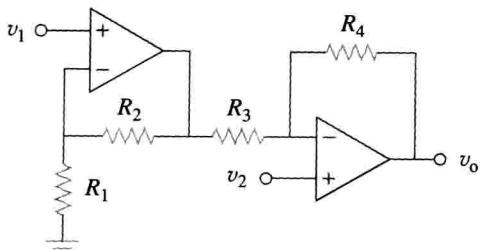


图 5-105 习题 87 图

- * 88 图 5-106 所示电路是一个由电桥驱动的仪表放大器，试求电压增益 v_o/v_i 。

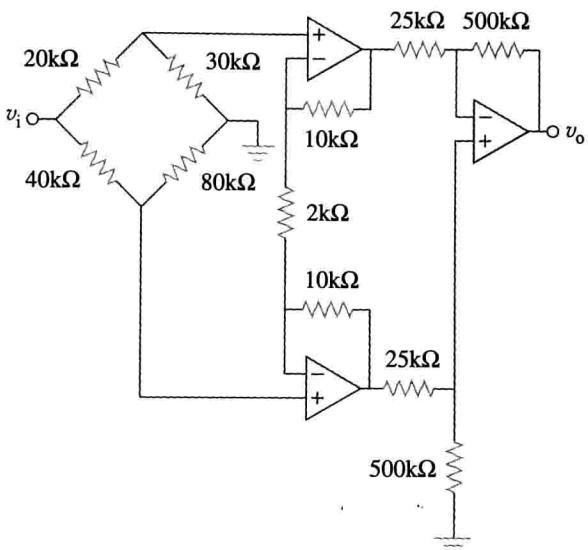


图 5-106 习题 88 图

综合理解题

- 89 试设计一个输出电压 v_o 与输入电压 v_s 关系为 $v_o = 12v_s - 10$ 的电路，可用元器件包括两个运算放大器、一个 6V 电池和若干电阻。
 90 图 5-107 所示电路是一个电流放大器，试求电流增益 i_o/i_s 。

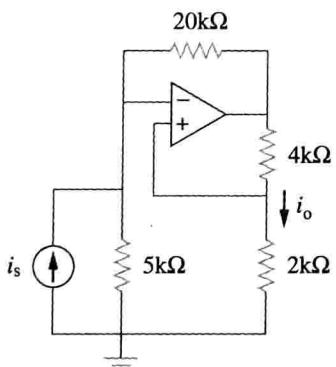


图 5-107 习题 90 图

- 91 图 5-108 所示电路是一个同相电流放大器，试求电流增益 i_o/i_s ，取 $R_1 = 8k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$ 。

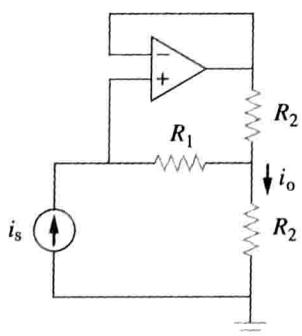


图 5-108 习题 91 图

- 92 图 5-109 所示电路是一个桥式放大器，试求电压增益 v_o/v_i 。

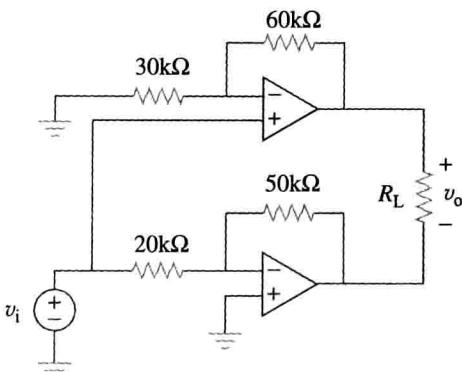


图 5-109 习题 92 图

- * 93 图 5-110 所示是一个电压-电流转换器，如果 $R_1R_2 = R_3R_4$ ，则有 $i_L = Av_i$ ，试求常数 A 。

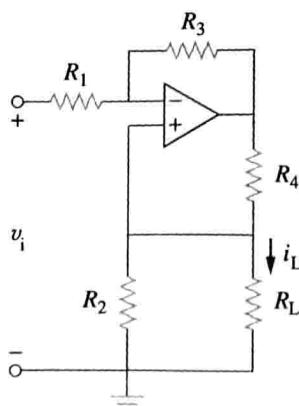


图 5-110 习题 93 图

第6章

电容与电感

在科学界，荣誉不总是归于那些提出理论观点的人，而常常归于将这些理论观点走向全世界的人。

——Francis Darwin

增强技能与拓展事业

ABET EC 2000(美国工程技术认证委员会)工程标准 2000(3. C)，“设计系统、组件或者流程以满足预期需求的能力”

“设计系统、组件或者流程以满足预期需求的能力”是作为一个称职的工程师最基本的要求，也是一个工程师最需要掌握的技能。有意思的是，成功的工程师与他的沟通技巧有着直接的关系，但是具有这种设计的能力则是进入工程师行业的敲门砖。

当你遇见了一个没有固定答案的问题时，寻找解决方法就是设计的过程。本书将探索关于设计的部分方法，而继续钻研解决问题的所有步骤、过程与方法，才能使你对设计过程的重要环节有更深入的了解和认识。

或许，在设计环节中最重要的部分就是对系统、组件、流程(或者统称为问题)有一个清晰明确的定义。很少有工程师可以将任务描述得完全清楚明了。因此，作为学生，你可以通过问你自己、同学或导师来提高描述问题的能力。

研究解决问题的其他可能的方法是设计过程中的另一个重要环节。同样，作为学生，你可以在你自己的设计过程中尽可能多的考虑问题的解决方法。

评价一个工程任务的解决质量也是非常重要的，这种能力可以在任何设计实践过程中得到锻炼。



由 Charles Alexander 拍摄

6.1 引言

之前的讨论都局限在纯电阻电路中，本章将介绍两个重要的无源线性元件：电容和电感。与电阻消耗能量不同，电容和电感非但不会消耗能量，反而会将能量储存起来。因此，电容和电感又称为储能元件。

纯电阻电路的应用非常有限，通过了解电容和电感，我们将会学习到更重要而且更实用的电路。而且在第3章和第4章中学习到的电路分析方法也可以应用到包含电容和电感的电路中。

本章首先将分别介绍电容和电感以及它们的串并联方式。然后将探讨电容与运算放大器结合组成的经典应用，如积分电路、微分电路，以及模拟计算机等。

提示：与耗能且不可逆的电阻相比，电感或电容能够储存或释放能量(具有记忆功能)。

6.2 电容

电容是一种可以储存电能的元件。和电阻一样，电容也是一种非常普遍的电子元件。电容可应用于电子、通信、计算机以及电力系统中，如用于无线接收器的调谐电路或作为计算机系统的动态存储元件。

电容的经典结构见图 6-1。

一个电容包括两个导电板，中间由电介质隔开。

在很多实际应用中，导电板通常由铝箔制成，而电介质则由空气、陶瓷、纸或者云母充当。当电容与电源相连时，如图 6-2 所示，一个导电板聚集正电荷 q ，另一个导电板则聚集负电荷 $-q$ 。所以电容是一个存储电荷的元件。如果将电容储存的电荷量用 q 表示，那么它的值与加在其上的电压值成正比：

$$q = Cv \quad (6.1)$$

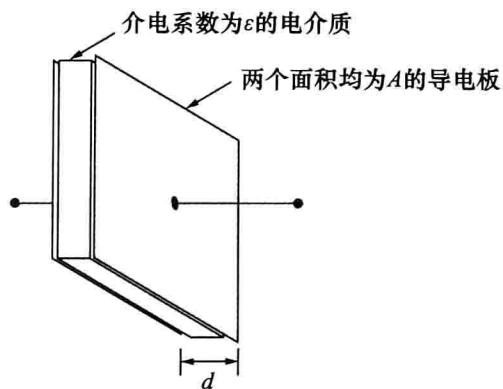


图 6-1 经典电容

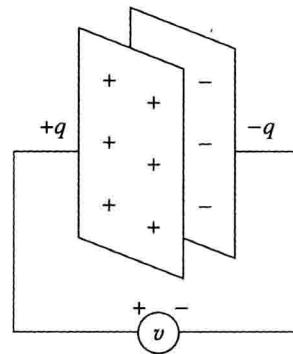


图 6-2 施加有电压 v 的电容

其中， C 是比例常数，也称作电容常数，电容的单位是法拉(F)，以纪念英国物理学家迈克尔·法拉第(1791—1867)。从式(6.1)中可以推导出如下定义：

电容的容量是电容的一个导电板所携带的电荷与两个导电板之间电压的比值，单位为法拉(F)。

因此， $1F=1C/V$ 。

提示：电容的容量也可以看做单位电压差下每个导电板上储存的电荷量。

历史珍闻

迈克尔·法拉第(1791—1867)，英国化学家和物理学家，最伟大的实验物理学家之一。

法拉第出生在伦敦，在他工作了 54 年的皇家科学研究院实现了少年时的梦想，那就是和当时最伟大的化学家汉弗莱·戴维一起工作。他在所有的物理学领域中都有建树，并且提出了电解、阳极和阴极这样的专有名词。他在 1831 年发现的电磁感应是工程学领域的重大突破，因为这项发现提供了一个发电的新方法，电动机和发电机都是基于这个原理。电容的单位就是以法拉第的名字来命名的，以纪念他在这个领域中做出的杰出贡献。



美国加州圣马里诺
亨廷顿图书馆馆藏

虽然电容常数 C 是导电板带电量 q 与作用于其上的电压 v 的比值，但是它却不依赖于 q 和 v ，而是取决于电容器的物理参数。比如，图 6-1 中所示的平行导电板电容的电容常数

定义如下：

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (6.2)$$

其中， A 是每个导电板的表面面积， d 是两个导电板之间的距离， ϵ 则是导电板间电介质的介电常数。虽然式(6.2)仅仅作用于平行板电容器，但是可以看出，电容常数取决于三个因素：

1. 导电板的表面面积——面积越大，电容常数越大。
2. 导电板的间距——距离越小，电容常数越大。
3. 电介质的介电常数——介电常数越高，电容常数越大。

提示：由式(6.1)和式(6.2)可以看出，电容的电压值与电容大小成反比，如果 d 较小且 V 较高，会出现电弧放电现象。

市场上的电容器有很多种类型和容值。通常来说，电容的容值在皮法到微法的范围内。根据填充电介质的不同，电容又可分为固定电容和可变电容。图 6-3 分别给出了这两种电容的电路符号表达。注意，根据无源符号约定，当 $v > 0$ 且 $i > 0$ 或者 $v < 0$ 且 $i < 0$ 时，电容充电；当 $v \cdot i < 0$ 时，电容放电。

图 6-4 给出了几种常见的固定电容。聚酯电容重量轻、稳定，而且在充电时其随温度的变化也是可预知的。除了聚酯电容之外，云母和聚苯乙烯等其他电介质构成的电容也很常用。胶片电容是以卷轴的形式存在金属或者塑料薄膜中。电解电容可以达到很高的电容量。图 6-5 所示是几种常见的可变电容。微调(整垫)电容通常与其他电容并联在一起，从而在获得可变的电容量。可变空气电容(网格板)则是

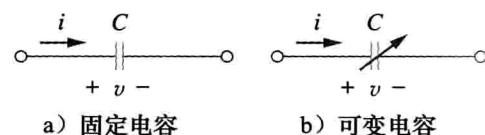


图 6-3 电容的电路符号



图 6-4 固定电容
Tech America 供图

通过转动板轴来实现可变的电容量。可变电容通常用于无线接收装置，使其能够接收到不同的电台。此外，电容器还可以用来阻断直流电、通过交流电、调整相位、存储能量、发动电机以及抑制噪声。

为了得到电容中的电流和电压之间的关系，对式(6.1)左右两边求导，由于：

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (6.3)$$

对式(6.1)左右两端求导后，得到：

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (6.4)$$

这就是在关联参考方向下电容中电流与电压间的关系。从图 6-6 所示的曲线关系来看，电容的电容量是独立于电压的。满足式(6.4)的电容称作线性电容。对于一个非线性电容来说，



a) 微调电容



b) 薄膜可调电容

图 6-5 可变电容
Johanson 供图

其电流与电压之间的关系曲线不是一条直线。虽然有些电容是非线性的，但大多数是线性电容。本书中讨论的都是线性电容。

提示：由式(6.4)可知，要使电容承载电流，其电压必须随时间变化。因此，对于恒定电压， $i=0$ 。

电容上的电压-电流关系可以通过对式(6.4)两端积分得到：

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (6.5)$$

或

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (6.6)$$

其中， $v(t_0) = q(t_0)/C$ 是 t_0 时刻作用在电容上的电压值。式(6.6)所示的电压值依赖于之前作用其上的电流值。这样，电容就有了记忆功能，这也是电容的常用功能。

传递给电容的瞬时功率为：

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} \quad (6.7)$$

因此，电容上储存的能量为：

$$w \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = C \int_{-\infty}^t v \frac{dv}{d\tau} d\tau = C \int_{v(-\infty)}^{v(t)} v dv = \frac{1}{2} Cv^2 \Big|_{v(-\infty)}^{v(t)} \quad (6.8)$$

由于在 $t=-\infty$ 时，电容处于不带电状态，因此 $v(-\infty)=0$ ，这样可得到如下公式：

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 \quad (6.9)$$

将式(6.1)代入式(6.9)，可以得到：

$$w = \frac{q^2}{2C} \quad (6.10)$$

式(6.9)和式(6.10)描述了在电容两个导电板间的电场中存储的能量。由于一个理想的电容不会消耗能量，所以存储的能量是可以取回的。事实上，电容这个词的意思就是描述有容量可以储存电场能量的元件。

电容有以下这些重要的特性：

1. 从式(6.4)中可以看出，作用在电容上的电压不随时间而改变(直流电)，通过电容的电流值为零。因此，电容对于直流电路来说是开路的。但是，如果一个电池(直流电压)与电容相连接，电容就会被充电。

2. 作用在电容上的电压必须是连续的。电容上的电压不会产生突变。电容会阻止阶跃电压对其充电。根据式(6.4)，电压的不连续变化需要无穷大的电流，这在物理学中是不可能实现的。作用在一个电容上的电压可以用图6-7a中的形式表达，然而实际上作用在电容上的阶跃电压却不能以图6-7b的形式表达。相反，通过电容的电流却可以有瞬间的改变。

提示：可以利用式(6.9)来理解电容电压不能突变的性质。该式表明电容能量与电压的平方成正比关系，而能量的注入和释放是需要通过一段时间来完成的，因此电容电压不能突变。

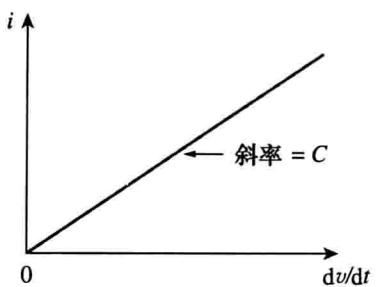


图 6-6 电容的电流-电压关系曲线

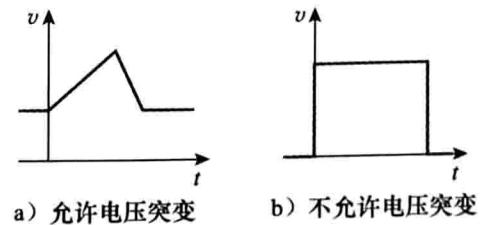


图 6-7 电容两端的电压

3. 理想的电容是不会消耗能量的。它从电路中获取能量并储存在电场中，然后将之前储存的能量释放到电路中。

4. 实际电容有一个平行模式漏电阻，如图 6-8 所示。然而，这个漏电阻可高达 $100\text{M}\Omega$ ，因此可在很多实际应用中忽略不计。所以，本书所涉及的电容都假设为理想电容。

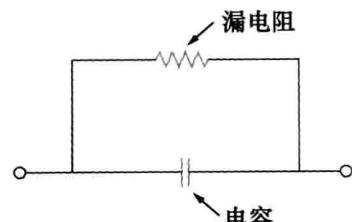
例 6-1 (a)一个 3pF 的电容两端加上 20V 的电压后，可以储存多少电荷？(b)电容可以储存的能量有多少？

解：(a)由于 $q= Cv$ ，所以

$$q = 3 \times 10^{-12} \times 20 = 60(\text{pC})$$

(b) 储存的能量值为：

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-12} \times 400 = 600(\text{pJ})$$



◀ 图 6-8 非理想电容的电路模型

练习 6-1 如果一个 $4.5\mu\text{F}$ 的电容一个导电板上的电荷为 0.12mC ，那么其上的电压是多少？储存了多少能量？

答案： 26.67A , 1.6mJ

例 6-2 作用在一个 $5\mu\text{F}$ 的电容上的电压为 $v(t)=10\cos 6000t\text{ V}$ ，计算其上的电流。

解：根据定义，电流可以按下式计算：

$$i = C \frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-6} \times \frac{d}{dt}(10\cos 6000t)$$

$$= -5 \times 10^{-6} \times 6000 \times 10\sin 6000t = -0.3\sin 6000t(\text{A})$$

练习 6-2 当一个 $10\mu\text{F}$ 的电容连接到 $v(t)=75\sin 2000t\text{ V}$ 的电压源时，计算通过电容的电流。

答案： $1.5\cos 2000t\text{ A}$

例 6-3 假设电容的初始电压为零，计算当电流为 $i(t)=6e^{-3000t}\text{mA}$ 时，作用在其上的电压。

解：由于 $v=\frac{1}{C} \int_0^t i dt + v(0)$ ，且 $v(0)=0$ ，所以：

$$v = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int_0^t 6e^{-3000t} dt \times 10^{-3} = \frac{3 \times 10^3}{-3000} e^{-3000t} \Big|_0^t = (1 - e^{-3000t})\text{V}$$

练习 6-3 当通过一个 $100\mu\text{F}$ 的电容的电流为 $i(t)=50\sin 120\pi t\text{mA}$ 时，计算在 $t=1\text{ms}$ 以及 $t=5\text{ms}$ 时的电压，令 $v(0)=0$ 。

答案： 93.14mV , 1.736V

例 6-4 作用在一个 $200\mu\text{F}$ 的电容上的电压如图 6-9 所示，计算通过它的电流。

解：该电压波形可以以如下数学形式表述：

$$v(t) = \begin{cases} 50t\text{ V}, & 0 < t < 1 \\ (100 - 50t)\text{ V}, & 1 < t < 3 \\ (-200 + 50t)\text{ V}, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $i=Cdv/dt$ 且 $C=200\mu\text{F}$ ，对电压求导可得：

$$i(t) = 200 \times 10^{-6} \times \begin{cases} 50, & 0 < t < 1 \\ -50, & 1 < t < 3 \\ 50, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 10(\text{mA}), & 0 < t < 1 \\ -10(\text{mA}), & 1 < t < 3 \\ 10(\text{mA}), & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

电流波形可由图 6-10 表示。

练习 6-4 一个没有充过电的电容上的电流如图 6-11 所示，计算当 $t=2\text{ms}$ 以及 $t=5\text{ms}$ 时的电压。

答案： 100mV , 400mV

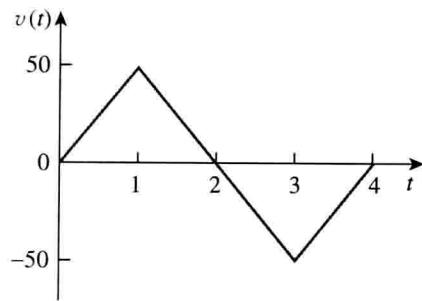


图 6-9 例 6-4 电压图

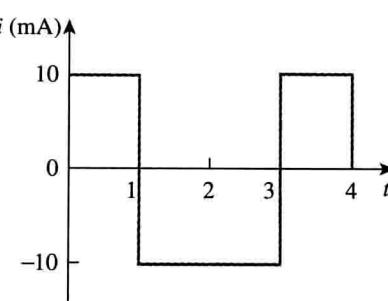


图 6-10 例 6-4 电流图

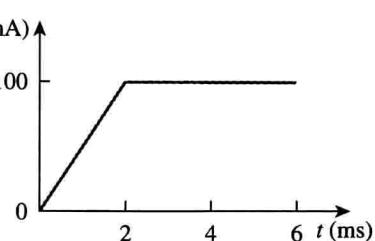


图 6-11 练习 6-4 图

例 6-5 计算图 6-12a 中每一个电容在直流电源下存储的能量。

解：在直流电源下，可以将每个电容都看做开路，如图 6-12b 所示。在 $2k\Omega$ 和 $4k\Omega$ 串联的电阻支路上的电流为：

$$i = \frac{3}{3+2+4} \times 6 = 2(\text{mA})$$

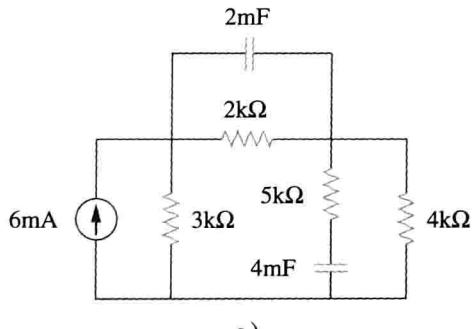
作用在电容上的电压 v_1 和 v_2 分别为：

$$v_1 = 2000i = 4(\text{V}), \quad v_2 = 4000i = 8(\text{V})$$

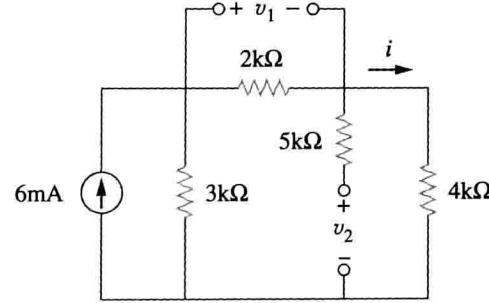
那么它们存储的能量为：

$$w_1 = \frac{1}{2}C_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-3} \times 4^2 = 16(\text{mJ})$$

$$w_2 = \frac{1}{2}C_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-3} \times 8^2 = 128(\text{mJ})$$



a)



b)

图 6-12 例 6-5 图

练习 6-5 在直流电源下，计算图 6-13 中电容储存的能量。答案：20.25mJ, 3.375mJ

6.3 电容的串并联

在电阻型电路中，串并联的结合是简化电路的一个重要工具，这个方法也可以应用到电容的串并联电路中，将这些电容用一个简单的等效电容 C_{eq} 来代替。

为了得到 N 个并联电容的等效电容 C_{eq} ，考虑图 6-14a 的情况，其等效电路如图 6-14b 所示。这些电容两端的电压都是相同的，在图 6-14a 上应用 KCL 可得：

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (6.11)$$

由于 $i_k = C_k \frac{dv}{dt}$ ，所以：

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt} \quad (6.12)$$

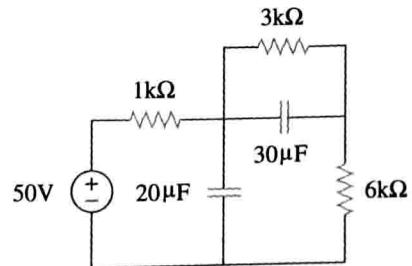


图 6-13 练习 6-5 图

其中：

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N \quad (6.13)$$

N个并联电容的等效电容是各个电容的和。

可见，并联的电容和串联的电阻有同样的合并方式。

下面来计算图 6-15a 中串联电容的等效电容，其等效电路如图 6-15b 所示。通过每个电容的电流量是相同的（因此具有相同的电荷量），对图 6-15a 中的回路应用 KCL 可得：

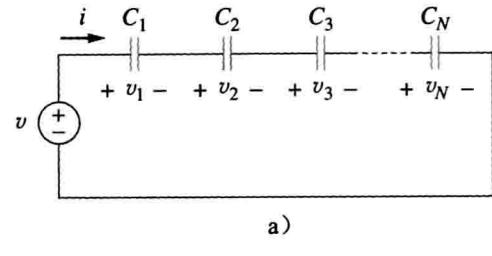
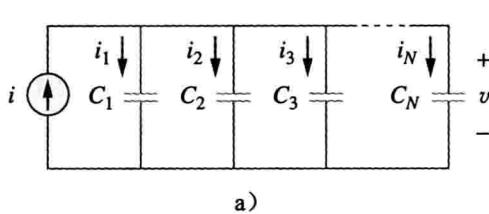


图 6-14 电容的串联

图 6-15 电容的并联

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \quad (6.14)$$

由于 $v_k = \frac{1}{C_k} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_k(t_0)$ ，故：

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_2(t_0) + \dots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0) \\ &= \frac{1}{C_{\text{eq}}} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \end{aligned} \quad (6.15)$$

其中：

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (6.16)$$

根据 KVL，等效电容 C_{eq} 上的初始电压是每个电容在 t_0 时的电压总和。根据式 (6.15) 可得：

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0)$$

串联电容的等效电容就是每个电容倒数之和的倒数。

可见，串联电容与并联电阻有同样的合并方式。当 $N = 2$ 时（即两个电容串联），式 (6.16) 可以写成：

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

即

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.17)$$

例 6-6 计算图 6-16 所示电路中 a 和 b 之间的等效电容。

解： $20\mu F$ 和 $5\mu F$ 电容是串联的，它们的等效电容是：

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4(\mu F)$$

$4\mu F$ 电容是与 $6\mu F$ 以及 $20\mu F$ 电容并联的，合并后的电容为：

$$4 + 6 + 20 = 30(\mu F)$$

这个 $30\mu F$ 的电容又与 $60\mu F$ 的电容串联，这样，整个回路的等效电容为：

$$C_{eq} = \frac{30 \times 60}{30 + 60} = 20(\mu F)$$

练习 6-6 计算图 6-17 所示电路终端的等效电容。

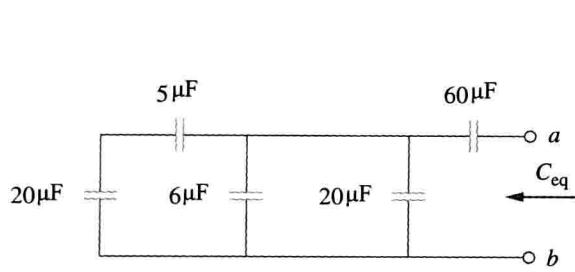


图 6-16 例 6-6 图

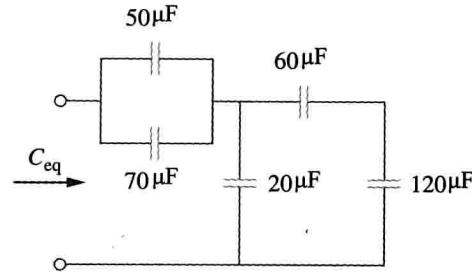


图 6-17 练习 6-6 图

答案： $40\mu F$

例 6-7 计算图 6-18 中每个电容上的电压。

解：首先计算这个回路的等效电容，如图 6-19 所示。图 6-18 中所示的两个并联电容可以合并为 $40 + 20 = 60(mF)$ 的电容。这个 $60mF$ 的电容又与 $20mF$ 和 $30mF$ 的电容串联，所以：

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20}} = 10(mF)$$

总电荷量为：

$$q = C_{eq}v = 10 \times 10^{-3} \times 30 = 0.3(C)$$

这是 $20mF$ 与 $30mF$ 电容上的电荷量，因为它们与 $30V$ 的电压源串联（由于 $i = dq/dt$ ，因此可以简单地把这个电荷看做是电流）。所以：

$$v_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{0.3}{20 \times 10^{-3}} = 15(V) \quad v_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{0.3}{30 \times 10^{-3}} = 10(V)$$

确定了 v_1 和 v_2 ，就可以应用 KVL 得到 v_3 ：

$$v_3 = 30 - v_1 - v_2 = 5(V)$$

或者说，由于 $40mF$ 和 $20mF$ 的电容并联，加在它们上面的电压是一样的，合并后的电容为 $60mF$ 。这个合并后的电容又与 $20mF$ 以及 $30mF$ 的电容串联，这样它们产生的电荷量也应该是相同的。

$$v_3 = \frac{q}{60mF} = \frac{0.3}{60 \times 10^{-3}} = -5(V)$$

练习 6-7 计算图 6-20 中每个电容上的电压。

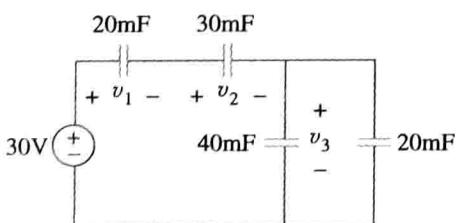


图 6-18 例 6-6 图

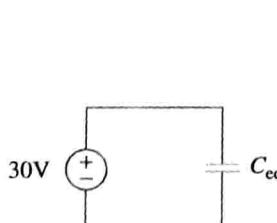


图 6-19 图 6-18 的等效图

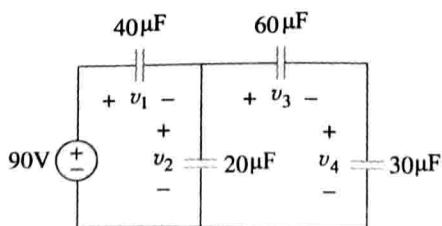


图 6-20 练习 6-7 图

答案: $v_1 = 45V$, $v_2 = 45V$, $v_3 = 15V$, $v_4 = 30V$

6.4 电感

电感是一个可以利用其磁场储存能量的无源器件。在电子和电力系统中，电感有着广泛的应用，比如电力供应、变压器、无线电、电视机、雷达以及电动机。

任何有电流通过的导线都有感应特性，因此可以看做是一个电感。但是为了增强感应效果，一个实用的电感通常是一个由很多导线绕成的圆柱线圈，如图 6-21 所示。

电感由导线绕成的线圈组成。

当电流通过电感时，这个电感上的电压与其电流变化的频率成正比。根据无源符号约定：

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (6.18)$$

其中， L 是比例常数，称作电感的感应系数。电感系数的单位是亨利(H)，以纪念其发明者美国科学家约瑟夫·亨利(1797—1878)。从式(6.18)可以看出， $1H = 1V \cdot s/A$ 。

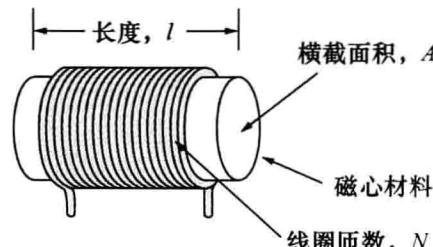


图 6-21 电感器的典型形式

电感系数是电感在电流改变的情况下产生的特性，用亨利(H)来衡量。

提示：由式(6.18)可知，要使电感两端有电压，其电流必须随时间变化。因此，对于恒定电感电流， $v=0$ 。

电感的感应系数取决于它的实际尺寸及其导电性能。计算不同尺寸电感的感应系数公式是由电磁感应理论推导出来的，具体过程可参见标准电工手册。例如，图 6-21 所示的一个螺线管电感，其感应系数为：

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l} \quad (6.19)$$

式中， N 是线圈匝数， l 是长度， A 是横截面积， μ 则是磁导率。从式(6.19)中可以看出，提高电感系数的方法有：增加线圈匝数，采用具有更高磁导率的磁心，增加横截面积以及缩短螺线管长度。

与电容一样，商用电感也有不同的容量和类型。常用电感的感应系数可从通信系统中的几个微亨到电力系统中的几十亨。电感也有固定电感和可变电感之分。磁心可由铁、钢、塑料或是空气制成。关于电感也有线圈和扼流圈这样的术语。常用电感如图 6-22 所示。在无源符号国际惯例中，电感的电路符号如图 6-23 所示。

式(6.18)给出了电感的电压-电流关系。图 6-24 是电感独立于电流的变化曲线，这样的电感称作线性电感。对于一个非线性电感，由于电感系数随电流而变化，所以根据式(6.18)所生成的曲线不是一条直线。除非特别声明，本书涉及的电感均是线性电感。



图 6-22 不同类别的电感

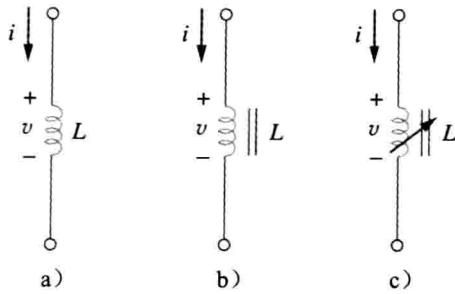


图 6-23 电感的电路符号

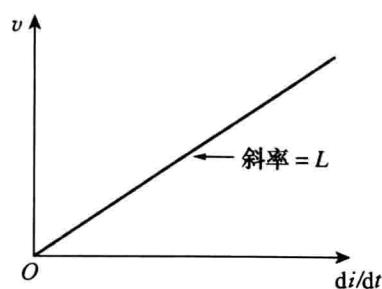


图 6-24 电感的电流-电压关系曲线

历史珍闻

约瑟夫·亨利(1797—1878)，美国物理学家，发现了电感效应并因此发明了电动机。

亨利出生在纽约州的奥尔巴尼市，毕业于奥尔巴尼专科学院，1832~1846年间在普林斯顿大学任教。他是史密斯森协会(美国国立博物馆)的第一任会长。他进行了电磁感应的一系列实验并制造出可悬浮起数千磅物体的强力磁场。有意思的是，亨利是在法拉第之前发现了电磁感应现象，但却没有成功发表他的这项研究。电感的单位“亨利”就是为了纪念他而命名的。



摘自 NOAA 的人物介绍

式(6.18)得到的电流-电压关系如下所示：

$$di = \frac{1}{L}v dt$$

积分后可得：

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (6.20)$$

即

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (6.21)$$

式中， $i(t_0)$ 是 $-\infty < t < t_0$ 时的总电流，且 $i(-\infty) = 0$ 。令 $i(-\infty) = 0$ 是因为在之前的所有时刻中，总有一个没有电流通过电感的时刻。

电感是在其磁场中储存能量的器件，储存的能量可由式(6.18)计算。传送到电感上的功率为：

$$p = vi = (L \frac{di}{dt})i \quad (6.22)$$

所以储存的能量为：

$$\begin{aligned} w &= \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = L \int_{-\infty}^t \frac{di}{d\tau} i d\tau \\ &= L \int_{-\infty}^t i di = \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty) \end{aligned} \quad (6.23)$$

因为 $i(-\infty) = 0$ ，所以：

$$w = \frac{1}{2} L i^2 \quad (6.24)$$

电感具有如下的重要特性。

1. 从式(6.18)，可以看出，当电流恒定时，电感上的电压为零。在直流电路中，电感相当于短路。

2. 电感还有一个重要特性就是阻碍通过它的交变电流。通过电感的电流不能发生瞬时的改变。根据式(6.18)，如果电感上的电流产生不连续的变化需要无限的电压，物理上不可能实现。因此，电感会妨碍其上电流的阶跃变化。比如，通过一个电感的电流如图 6-25a 所示，而实际上，由于不连续性，通过电感的电流却不能像图 6-25b 所示那样。但是，电感上的电压却可以有阶跃性的变化。

3. 像理想的电容一样，理想的电感也不会消耗能量，因此储存的能量可以供以后使用。电感从电路中获取能量并储存起来，之后会将储存的能量释放到电路中。

4. 实际上电感都不是理想的，因此它们在一定程度上可被看做是电阻元件，如图 6-26 所示。这是由于实际电感都由导体材料制成，比如铜，这些导体材料多少都会产生电阻。这种电阻又称作绕组电阻 R_w ，相当于在电路中与电感串联的电阻。 R_w 的存在使得电感成为一个既储存能量又消耗能量的器件。由于 R_w 通常很小，因此在很多情况下可忽略不计。另外，由于线圈间的电容耦合，非理想电感还会产生相应的绕组电容 C_w 。 C_w 也非常小，因此除非在高频的情况下， C_w 通常也忽略不计。本书中所涉及的电感都假设为理想电感。

提示：由于电感通常由良导体制成，因此其电阻非常小。

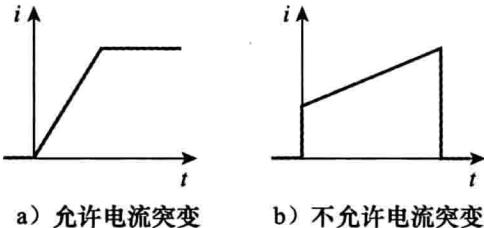


图 6-25 流经电感器的电流

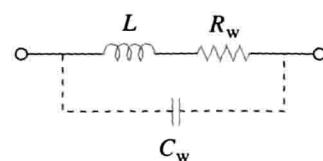


图 6-26 实际电感器的电路模型

例 6-8 通过一个 0.1H 电感的电流为 $i(t) = 10te^{-5t}\text{A}$ 。计算该电感两端的电压及其储存的能量。

解：由于 $v=L(di/dt)$ 且 $L=0.1\text{H}$ ，所以：

$$v = 0.1 \frac{d}{dt}(10te^{-5t}) = e^{-5t} + t(-5)e^{-5t} = e^{-5t}(1 - 5t)(\text{V})$$

储存的能量为：

$$w = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 100t^2 e^{-10t} = 5t^2 e^{-10t}(\text{J})$$

练习 6-8 通过一个 1mH 电感的电流为 $i(t) = 60\cos 100t\text{ mA}$ 时，计算其两端电压以及储存的能量。

答案： $-6\sin 100t\text{ mV}$, $1.8\cos^2 100t\text{ }\mu\text{J}$

例 6-9 加在 5H 电感两端的电压为：

$$v = \begin{cases} 30t^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

计算通过该电感的电流。假设 $i(v) > 0$ ，计算当 $t=5\text{s}$ 时，该电感所存储的能量。

解：由于 $i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0)$, 且 $L=5\text{H}$, 所以：

$$i = \frac{1}{5} \int_0^t 30t^2 dt + 0 = 6 \times \frac{t^3}{3} = 2t^3 (\text{A})$$

功率 $p=vi=60t^5$, 所以储存的能量为：

$$w = \int p dt = \int_0^5 60t^2 dt = 60 \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^5 = 156.25 (\text{kJ})$$

或通过式(6.24)计算出能量值为：

$$w|_0^5 = \frac{1}{2} L i^2(5) - \frac{1}{2} L i(0) = \frac{1}{2} \times 5 (2 \times 5^3)^2 - 0 = 156.25 (\text{kJ})$$

结果与之前的计算相同。

练习 6-9 一个 2H 电感的终端电压为 $v=10(1-t)\text{V}$ 。计算在 $t=4\text{s}$ 时，通过其上的电流以及该时刻储存的能量，假设 $i(0)=2\text{A}$ 。
答案： $-18\text{A}, 320\text{J}$

例 6-10 图 6-27a 所示电路中，在直流电源下，计算：

(a) i, v_C 以及 i_L ; (b) 储存在电容和电感中的能量。

解：(a) 在直流电源下，将电容做开路处理，电感做短路处理，如图 6-27b 所示，因此：

$$i = i_L = \frac{12}{1+5} = 2(\text{A})$$

电压 v_C 与加在 5Ω 电阻上的电压相等，因此：

$$v_C = 5i = 10(\text{V})$$

(b) 电容储存的能量为：

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 10^2 = 50(\text{J})$$

所以电感所储存的能量为：

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2 = 4(\text{J})$$

练习 6-10 在直流电源下，计算图 6-28 所示电路中电容和电感所对应的电压、电流以及它们所储存的能量。
答案： $15\text{V}, 7.5\text{A}, 450\text{J}, 168.75\text{J}$

6.5 电感的串并联

电感是一种无源元件，因此它们的串并联合并是十分重要的，需要了解怎样在实际电路中找到串并联电感的等效电感。

考虑一个由 N 个电感串联组成的电路，如图 6-29a 所示，它的等效电路如图 6-29b 所示。流经这些电感的电流是一样的，对该回路应用 KVL，可得：

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \quad (6.25)$$

将 $v_k = L_k di/dt$ 代入得：

$$\begin{aligned} v &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (6.26)$$

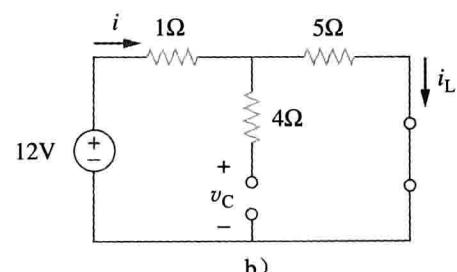
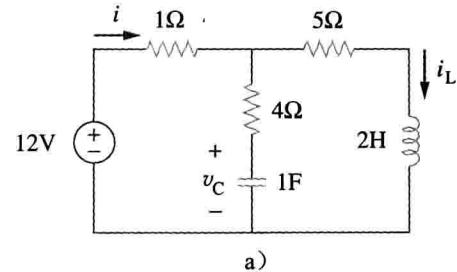


图 6-27 例 6-10 图

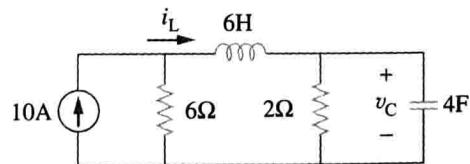


图 6-28 练习 6-10 图

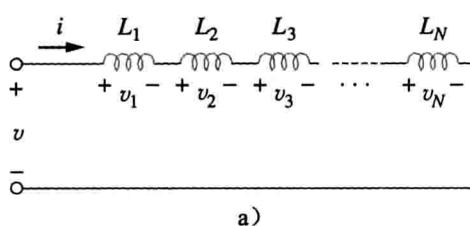
其中：

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N \quad (6.27)$$

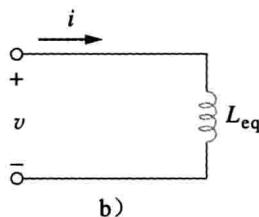
串联电感的等效电感系数是各电感的感应系数之和。

电感的串联组合与电阻的串联组合性质相同。

再来考虑一下由 N 个电感并联所组成的回路，如图 6-30a 所示，其等效电路如图 6-30b 所示。这些电感两端的电压是一样的，使用 KCL 可得：

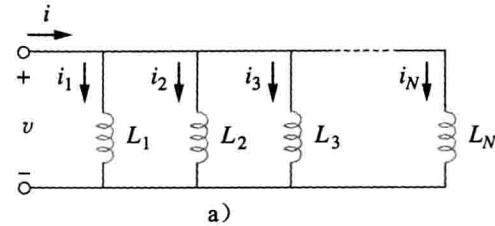


a)

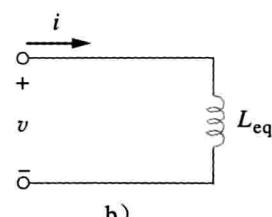


b)

图 6-29 电感的串联



a)



b)

图 6-30 电感的并联

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \quad (6.28)$$

由于 $i_k = \frac{1}{L_k} \int_{t_0}^t v dt + i_k(t_0)$ ，因此：

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v dt + i_2(t_0) + \dots + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v dt + i_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k} \right) \int_{t_0}^t v dt + \sum_{k=1}^N i_k(t_0) = \frac{1}{L_{\text{eq}}} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0) \end{aligned} \quad (6.29)$$

其中：

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (6.30)$$

根据 KCL，在 $t=t_0$ 时刻通过 L_{eq} 的初始电流 $i(t_0)$ 是在 t_0 时刻通过所有电感的电流之和。因此，参照式(6.29)可得：

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0)$$

并联电感的等效电感系数是每个电感的感应系数倒数和的倒数。

电感的并联与电阻的并联也具有相同的合并方式。

对于两个并联的电感($N=2$)，式(6.30)又可写做：

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{或} \quad L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (6.31)$$

只要所有元件的类型都相同，那么在 2.7 节中所讨论的关于电阻的 Δ -Y 变换都可以扩展到电容和电感的应用中来。

现在总结一下学过的三个基本电路元件的重要特性，见表 6-1。

表 6-1 三个基本电路元件的重要特性

基本元件的重要特性^①

关系	电阻(R)	电容(C)	电感(L)
电压-电流	$v = iR$	$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$	$v = L \frac{di}{dt}$
电流-电压	$i = \frac{v}{R}$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$
功率或能量	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2} Cv^2$	$w = \frac{1}{2} Li^2$
串联	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
并联	$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
直流激励	相同	开路	短路
不能突变电路变量	无	v	i

^①采用关联参考方向约定。**例 6-11** 计算图 6-31 所示电路的等效电感。

解：10H、12H 以及 20H 的电感串联，合并后相当于一个 42H 的电感，这个 42H 的电感又与 7H 的电感并联，因此合并后为：

$$\frac{7 \times 42}{7 + 42} = 6(\text{H})$$

这个 6H 的电感与 4H 以及 8H 的电感串联，得到：

$$L_{eq} = 4 + 6 + 8 = 18(\text{H})$$

练习 6-11 计算图 6-32 中梯形电感网络的等效电感。

答案：25mH

例 6-12 图 6-33 所示电路中， $i(t) = 4(2 - e^{-10t}) \text{ mA}$ ，当 $i_2(0) = -1 \text{ mA}$ 时，计算：

(a) $i_1(0)$ ；(b) $v(t)$ 、 $v_1(t)$ 以及 $v_2(t)$ ；(c) $i_1(t)$ 以及 $i_2(t)$ 。

解：(a) 因为 $i(t) = 4(2 - e^{-10t}) \text{ mA}$ ，所以 $i(0) = 4(2 - 1) = 4 \text{ mA}$ 。由于 $i = i_1 + i_2$ ，所以 $i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4 - (-1) = 5 \text{ (mA)}$

(b) 等效电感为：

$$L_{eq} = 2 + 4 \parallel 12 = 2 + 3 = 5(\text{H})$$

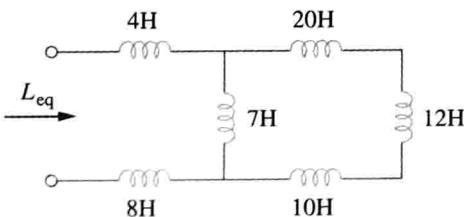


图 6-31 例 6-11 图

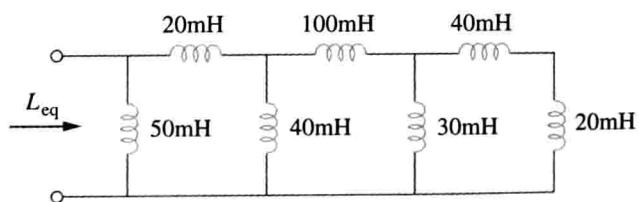


图 6-32 练习 6-11 图

所以：

$$v(t) = L_{eq} \frac{di}{dt} = 5 \times 4 \times (-1) \times (-10) e^{-10t} = 200 e^{-10t} (\text{mV})$$

并且：

$$v_1(t) = 2 \frac{di}{dt} = 2 \times (-4) \times (-10) e^{-10t} = 80 e^{-10t} (\text{mV})$$

由于 $v = v_1 + v_2$ ，所以：

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = 120 e^{-10t} (\text{mV})$$

(c) 电流 i_1 可由下式得到:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{4} \int_0^t v_2 dt + i_1(0) = \frac{120}{4} \int_0^t e^{-10t} dt + 5 \\ &= -3e^{-10t} \Big|_0^t + 5 = -3e^{-10t} + 3 + 5 = (8 - 3e^{-10t}) \text{ mA} \end{aligned}$$

同理:

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{1}{12} \int_0^t v_2 dt + i_2(0) = \frac{120}{12} \int_0^t e^{-10t} dt - 1 \\ &= -e^{-10t} \Big|_0^t - 1 = -e^{-10t} + 1 - 1 = -e^{-10t} \text{ (mA)} \end{aligned}$$

可见, $i_1(t) + i_2(t) = i(t)$ 。

练习 6-12 在图 6-34 所示电路中, $i_1(t) = 0.6e^{-2t}$ A, 当 $i(0) = 1.4$ A 时, 计算:

- (a) $i_2(0)$; (b) $i_2(t)$ 以及 $i(t)$; (c) $v_1(t)$ 、 $v_2(t)$ 以及 $v(t)$ 。

答案: (a) 0.8A, (b) $(-0.4 + 1.2e^{-2t})$ A, $(-0.4 + 1.8e^{-2t})$ A,
(c) $-36e^{-2t}$ V, $-7.2e^{-2t}$ V, $-28.8e^{-2t}$ V

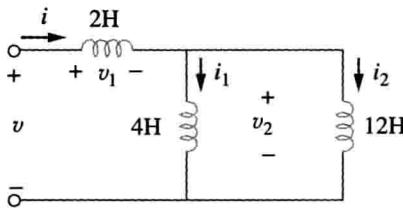


图 6-33 例 6-12 图

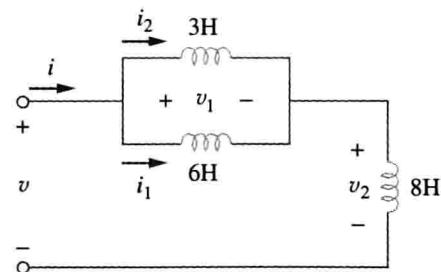


图 6-34 练习 6-12 图

† 6.6 应用实例

电阻和电容被广泛地应用在分离或集成电路(IC)中, 而电感则不同, 由于它呈现明显的感应现象, 因此很难将其应用到集成电路中。电感(线圈)通常采用分离的形式, 从而更昂贵而且尺寸也较大, 这个原因限制了电感的应用环境。然而, 在某些特定的领域, 电感的作用却无可替代。电感通常被应用在继电、延迟、传感装置、读取探针、电话线路、收音机、电视机、电力供应、电动机、麦克风、音响等电路或电子产品中。

电容和电感的如下特性使得它们成为电路中非常实用的器件:

1. 储存能量的特性使它们可以被用作暂时的电压源或电流源。所以, 可用其在很短的时间内产生较大电流或电压。

2. 电容会阻碍阶跃电压的产生, 而电感则限制阶跃电流的产生。这个特性使得电感通常用来消除电火花或者电弧, 以及将脉冲直流电压转化成相对平稳的直流电。

3. 电容和电感均对频率敏感, 因此可用其进行频率鉴别。

前两个特性主要用在直流源电路中, 而第三个特性则在交流电路中发挥作用。之后的章节中会讨论这些特性的用法, 本章先来了解关于电容和运算放大器的三个应用: 积分器、差分器以及模拟计算机。

6.6.1 积分器

主要的运放电路都使用能量储存器件, 包括积分器和差分器。由于电感(线圈)往往更贵而且体积也较大, 所以运放电路通常只包括电阻和电容。

运放积分电路有很多用途, 尤其是在 6.6.3 节所介绍的模拟计算机中。

积分器是一个运放电路, 它的输出与输入信号的积分成正比。

若反馈电阻 R_f 在类似的反向放大器中被一个电容所取代, 如图 6-35a 所示, 就可以得

到一个理想的积分器，如图 6-35b 所示。下面推导这个积分电路的数学表达式，对图 6-35b 中的节点 a，有：

$$i_R = i_C \quad (6.32)$$

而

$$i_R = \frac{v_i}{R}, \quad i_C = -C \frac{dv_o}{dt}$$

将式(6.32)代入，得：

$$\frac{v_i}{R} = -C \frac{dv_o}{dt} \quad (6.33a)$$

$$dv_o = -\frac{1}{RC} v_i dt \quad (6.33b)$$

对等式两边积分得：

$$v_o(t) - v_o(0) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(\tau) d\tau \quad (6.34)$$

为了确保 $v_o(0)=0$ ，需保证积分电路中的电容在信号输入以前已放电。所以，假设 $v_o(0)=0$ ，则：

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(\tau) d\tau \quad (6.35)$$

可见，图 6-35b 所示电路的输出电压与输入信号的积分成正比。实际上，运放积分器需要一个反馈电阻来减少直流增益并防止过饱和。所以在做运放处理的时候必须要注意它的线性区间以防止饱和。

例 6-13 $v_i = 10\cos 2t \text{ mV}$ 且 $v_2 = 0.5t \text{ mV}$ ，计算图 6-36 所示运放电路的 v_o ，假设电容上的初始电压为零。

解：这是一个加法积分器，所以：

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{1}{R_1 C} \int v_1 dt - \frac{1}{R_2 C} \int v_2 dt \\ &= -\frac{1}{3 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6}} \int_0^t 10 \cos(2\tau) d\tau - \frac{1}{100 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6}} \int_0^t 0.5\tau d\tau \\ &= -\frac{1}{6} \times \frac{10}{2} \sin 2t - \frac{1}{0.2} \times \frac{0.5t^2}{2} = (-0.833 \sin 2t - 1.25t^2) \text{ mV} \end{aligned}$$

练习 6-13 若图 6-35b 所示积分器中 $R=100\text{k}\Omega$, $C=20\mu\text{F}$ 。计算在 2.5mV 直流电源下， $t=0$ 时刻的输出电压。假设该运算放大器没有初始信号。 答案： $-1.25t \text{ mV}$

6.6.2 差分器

差分器是一个运算放大电路，它的输出与输入信号的变化率成正比。

在图 6-35a 中，如果输入阻抗被一个电容取代，那么这个电路就成为一个差分器，如图 6-37 所示。在节点 a 应用 KCL 可得：

$$i_R = i_C \quad (6.36)$$

而

$$i_R = -\frac{v_o}{R}, \quad i_C = C \frac{dv_i}{dt}$$

将式(6.36)代入得：

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt} \quad (6.37)$$

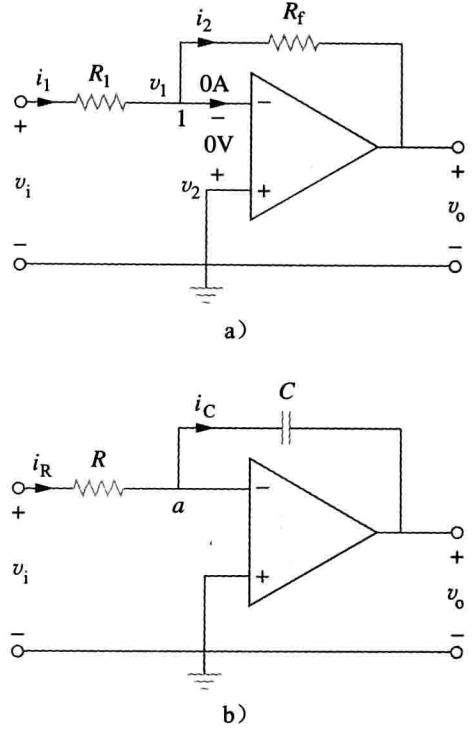


图 6-35 将 a 中反相放大器的反馈电阻用电容取代后得到 b 中的积分器

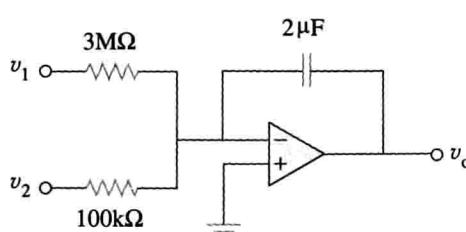


图 6-36 例 6-13 图

这表明该电路的输出是输入信号的微分。差分电路并不稳定，因为电路中的任何电子噪声都可以被差分器放大。因此图 6-37 所示的差分电路没有积分电路普遍，在实际中应用中也很少出现。

例 6-14 已知输入电压如图 6-38b 所示，画出图 6-38a 所示电路的输出电压。在 $t=0$ 时，令 $v_0=0$ 。

解：这是一个微分器，所以：

$$RC = 5 \times 10^3 \times 0.2 \times 10^{-6} = 10^{-3} (\text{s})$$

当 $0 < t < 4\text{ms}$ 时，可以将图 6-38b 所示输入电压表达如下：

$$v_i = \begin{cases} 2000t \text{ V}, & 0 < t < 2\text{ms} \\ (8 - 2000t) \text{ V}, & 2 < t < 4\text{ms} \end{cases}$$

当 $4 < t < 8\text{ms}$ 时重复上述电压，利用式(6.37)可得输出为：

$$v_o = -RC \frac{dv_i}{dt} = \begin{cases} -2 \text{ V}, & 0 < t < 2\text{ms} \\ 2 \text{ V}, & 2 < t < 4\text{ms} \end{cases}$$

所以，输出电压波形如图 6-39 所示。

练习 6-14 在图 6-37 所示差分电路中， $R=100\text{k}\Omega$ ， $C=0.1\mu\text{F}$ 。已知 $v_i=1.25t\text{V}$ ，计算输出电压 v_o 。

答案： -12.5mV

6.6.3 模拟计算机

运放电路最初是为电子模拟计算机所设计的，模拟计算机可以通过编程解决机械或电子系统中的数学模型。这些模型通常是用差分方程来表示的。

使用模拟计算机解决简单的差分方程需要将三个运算放大器电路串联，分别是：积分电路，加法放大器以及用来标定正负的正/反相放大器。

下面通过一个具体的例子来深入地了解模拟计算机怎样处理差分方程。

假设如下方程的解为 $x(t)$ ：

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t), \quad t > 0 \quad (6.38)$$

其中， a 、 b 和 c 是常量， $f(t)$ 是任意初始函数。首先从最高阶的导数开始求解，因为 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 满足：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f(t)}{a} - \frac{b}{a} \frac{dx}{dt} - \frac{c}{a}x \quad (6.39)$$

为了得到 dx/dt ，可以对 d^2x/dt^2 积分后反相。最后将 dx/dt 积分后反相即可得 x 的值。

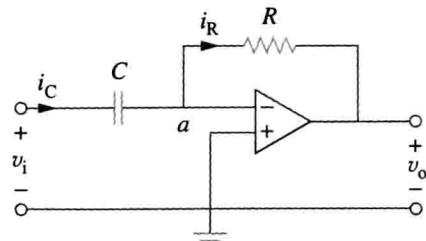


图 6-37 运放微分电路

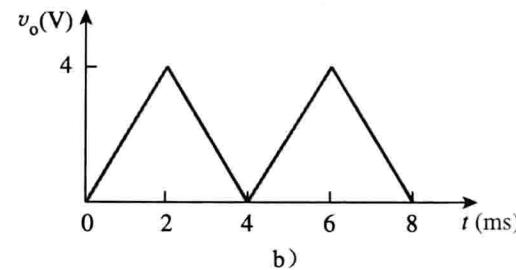
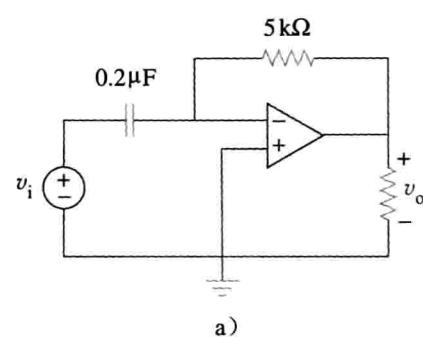


图 6-38 例 6-14 图

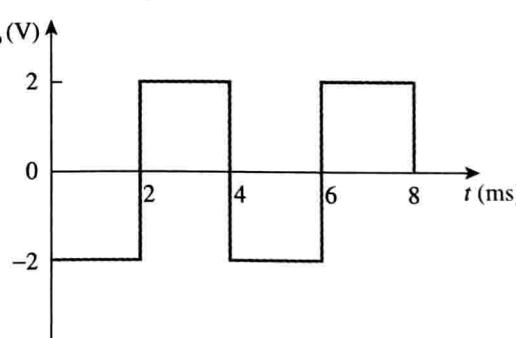


图 6-39 图 6-38a 的输出电压波形

所以，实现求解(6.38)所示方程的模拟计算机可由一些必要的加法器、反转器以及积分器组成。绘图仪或者示波器可以连接系统中的不同位置以显示输出的信号波形，如 x 、 dx/dt 或者 d^2x/dt^2 。

虽然上述例子只给出对二阶差分方程的求解，实际上由积分器、反相器和反相加法器的不同组合构成的模拟计算机可以求解任何差分方程。但是在选择其中的电阻和电容时，需要十分谨慎，以保证运算放大电路在计算间歇时不会饱和。

电子管模拟计算机产生于 20 世纪 50~60 年代，但随着现代数字计算机的出现，它们已很少应用了。但是仍然需要学习模拟计算机的原因有二：首先，集成运放电路使得模拟计算机的制作更加简单和经济；其次，对模拟计算机的认识也可以帮助我们理解数字计算机。

例 6-15 设计一个模拟计算机电路以求解以下差分方程：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + v_o = 10\sin 4t, \quad t > 0$$

假设 $t=0$ 时， $v_o(0) = -4V$ ， $v'_o(0) = 1V$ 。

解：1. 明确问题。首先要明确问题以及将要采用的解决方案。其实在很多时候，我们对问题没有进行很好的分析就开始作研究，事实上分析问题的过程非常重要，也需要花很多精力来完成。如果你也是这样的话，请注意，在对问题分析上所花的时间和精力，其实可以帮你节省时间并且在处理问题的过程中少走弯路。

2. 列出已知条件。显然，运用 6.6.3 节所介绍的器件可以建立一个模拟计算机电路，所以需要一个积分电路（也可增加加法功能），以及一个或多个反相电路。

3. 确定备选方案。解决这个问题的方法很直接，需要选择合适的电阻和电容来实现求解的过程。电路的最后输出即是问题的答案。

4. 尝试求解。不同的电阻和电容有无限多种组合方式，其中很多都可以获得正确的结果。然而如果选择太极端的话，也会导致错误的输出。比如，采用过小的电阻会使电路过载，而选用过大的电阻则会使这个运算放大器失去理想的功效。选择的区间由实际运算放大器的具体特性决定。

首先求解二阶导数：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = 10\sin 4t - 2 \frac{dv_o}{dt} - v_o \quad (6.15.1)$$

求解这个题目需要一些数学运算，包括相加、缩放以及积分。对式(6.15.1)两端积分可以得到：

$$\frac{dv_o}{dt} = - \int_0^t \left[-10\sin(4\tau) + 2 \frac{dv_o(\tau)}{d\tau} + v_o(\tau) \right] d\tau + v'_o(0) \quad (6.15.2)$$

式中， $v'_o(0) = 1$ 。利用如图 6-40a 所示的加法积分器来计算式(6.15.2)。电阻和电容的选取满足使下式中的 $RC = 1$ ：

$$-\frac{1}{RC} \int_0^t v_o(\tau) d\tau$$

式(6.15.2)所描述的加法积分器也可采用其他形式实现。 $dv_o(0)/dt = 1$ 的初始状态可由图 6-40a 所示的电路实现，即在电容两端加载 1V 的电池，并用一个开关进行控制。

下面可以通过对 dv_o/dt 积分并反向来计算 $v_o(0)$ ：

$$v_o = - \int_0^t \left[-\frac{dv_o(\tau)}{d\tau} \right] d\tau + v_o(0) \quad (6.15.3)$$

式(6.15.3)可以由图 6-40b 所示电路实现，并且利用电池满足了 $-4V$ 的初始条件。下面将图 6-40a 以及 6-40b 所示电路合并得到完整的电路，如图 6-40c 所示。当加载输入

信号源 $10\sin(4t)$ 后，在 $t=0$ 时刻打开开关，就可以在示波器上观察到 v_o 的输出波形。

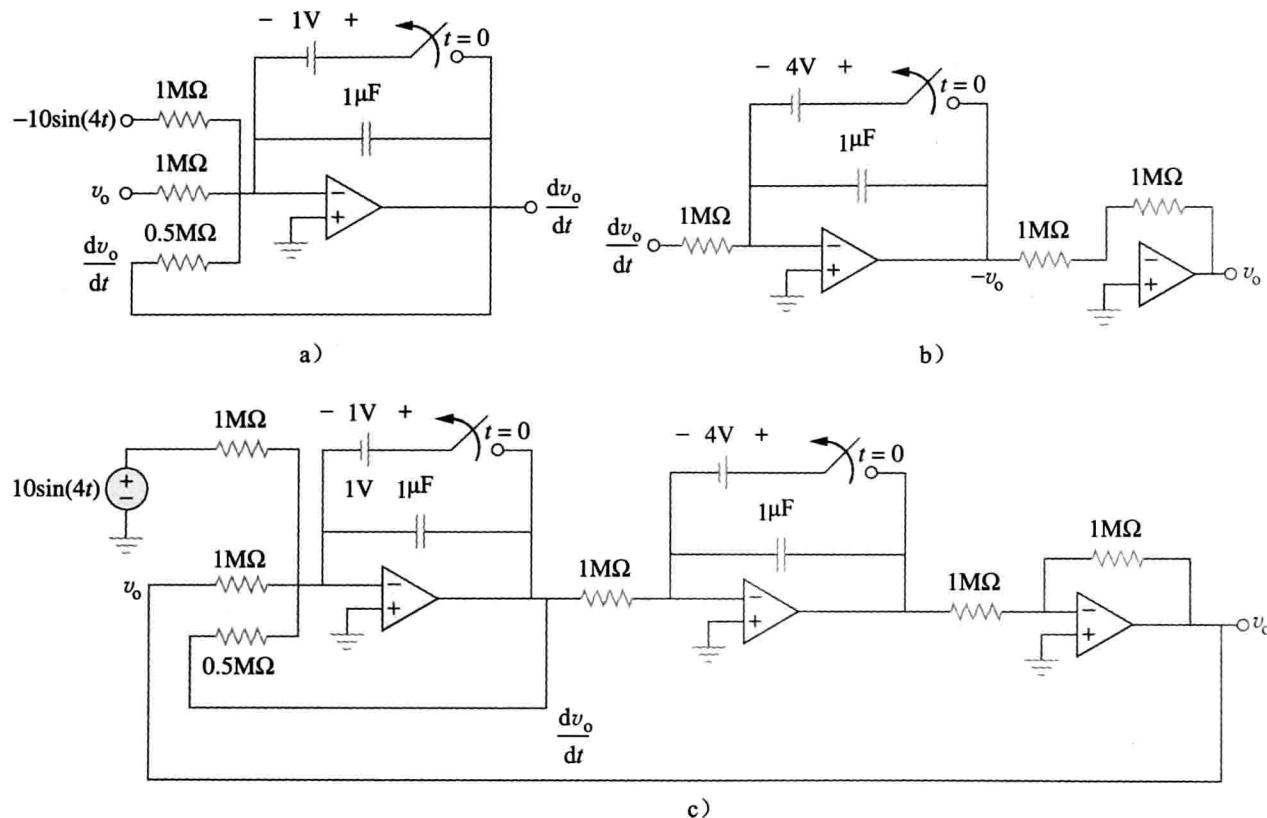


图 6-40 例 6-15 图

5. 评价结果。答案看起来是正确的，但实际上呢？如果 v_o 的结果满足预期，那么验证它的一个方法就是使用 PSpice 验证这个电路，并且可以将答案与用 MATLAB 实现的其他方法计算出的答案相比较。

由于需要检查电路并确定它可以描述给出的方程，那么还有一个更简单的办法，即将整个电路再运行一遍，看看是否可以得到想要的方程。

然而，检查电路的方法仍有很多。比如说从左到右，但即使使用同样初始方程，这个方法仍会得到多种可能的结果。所以更简单的办法就是从右到左检查答案是否正确。

从输出 v_o 开始，运算放大器的右边电路仅仅是一个增益为 1 的反相器，这意味着整个电路的中间节点的输出是 $-v_o$ ，下面的表达式说明了中间电路的作用：

$$\begin{aligned} -v_o &= - \left[\int_0^t \frac{dv_o}{dt} dt + v_o(0) \right] = - \left[v_o \Big|_0^t + v_o(0) \right] \\ &= - [v_o(t) - v_o(0) + v_o(0)] \end{aligned}$$

其中， $v_o(0) = -4V$ 是作用在电容上的初始电压。

用同样的方法检查左边的电路：

$$\frac{dv_o}{dt} = - \left[\int_0^t -\frac{d^2 v_o}{dt^2} dt - v'_o(0) \right] = - \left[-\frac{dv_o}{dt} + v'_o(0) - v'_o(0) \right]$$

现在需要验证第一个运放的输入为 $-\frac{d^2 v_o}{dt^2}$ ，并使其满足：

$$-10\sin(4t) + v_o + \frac{1/10^{-6}}{0.5} \frac{dv_o}{dt} = -10\sin(4t) + v_o + 2 \frac{dv_o}{dt}$$

至此便由初始方程得到 $-\frac{d^2 v_o}{dt^2}$ 。

6. 是否满意？对得到的结果很满意，可以正式提交这个问题的解决方案了。

练习 6-15 设计一个模拟计算机电路求解差分方程：

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 3 \frac{dv_o}{dt} + 2v_o = 4\cos 10t, \quad t > 0$$

令 $v_o(0) = 2$, $v'_o(0) = 0$ 。

答案：见图 6-41，其中 $RC = 1s$

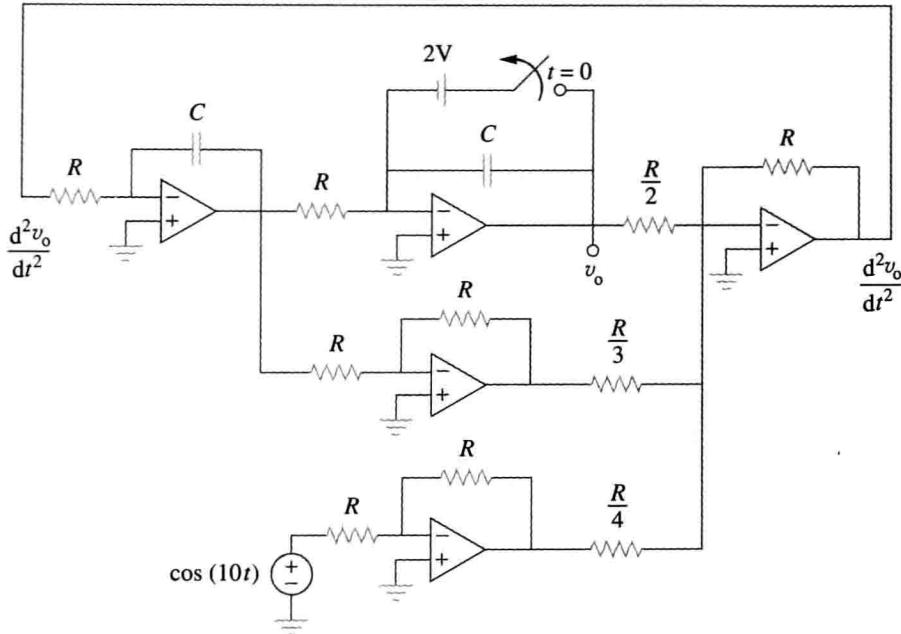


图 6-41 练习 6-15 图

6.7 本章小结

- 通过电容的电流与加在其上的电压变化率成正比。

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

除非电容两端的电压有改变，否则通过电容的电流为零。因此，电容在直流电路中可被看做是开路。

- 电容两端的电压与通过电容的电流对时间的积分成正比。

$$v = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0)$$

电容上的电压不会有瞬时的改变。

- 电容可以像导体那样进行串并联。

- 电感两端的电压与通过其上的电流的变化率成正比。

$$v = L \frac{di}{dt}$$

除非电感上的电流改变，否则电感两端电压为零。因此，电感在直流回路中可被看做是短路线。

- 通过电感的电流与其两端电压对时间的积分成正比。

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

通过电感的电流不会有瞬时的改变。

- 电感的串并联方式与电阻的串并联方式相同。

- 在任意时间 t , 电容中所储存的能量是 $\frac{1}{2} Cv^2$, 而电感中所储存的能量是 $\frac{1}{2} Li^2$ 。

- 积分器、差分器以及模拟计算机这三种实用电路都可以用电阻、电容以及运算放大器来实现。

复习题

- 1 当一个 5F 的电容连接在 120V 电压源上时，它能储存的电荷是多少？

(a) 600C (b) 300C
(c) 24C (d) 12C

- 2 电容的单位是？

(a) 库仑 (b) 焦耳
(c) 亨利 (d) 法拉

- 3 当电容上储存的总电荷量翻倍时，其储存的能量是原来的：

(a) 保持不变 (b) 1/2
(c) 2 倍 (d) 4 倍

- 4 在一个实际电容上是否可产生图 6-42 所示的电压波形。

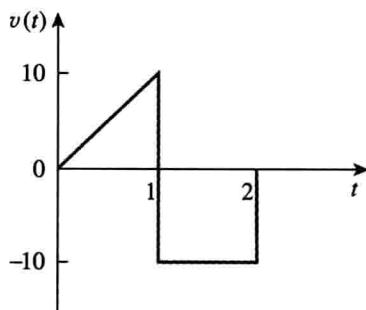


图 6-42 复习题 4 图

- 5 两个 40mF 电容串联后，与一个 4mF 的电容并联，总电容是：

(a) 3.8mF (b) 5mF
(c) 24mF (d) 44mF
(e) 84mF

- 6 如图 6-43 所示，当电流 $i = \cos 4t$ A，电压 $v = \sin 4t$ V 时，电路元件是：

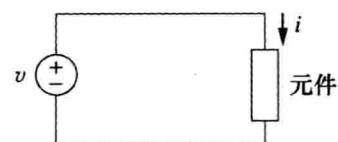


图 6-43 复习题 6 图

(a) 电阻 (b) 电容 (c) 电感

- 7 一个 5H 的电感在 3A 的电流下充电 0.2s，它两端所产生的电压是：

(a) 75V (b) 8.888V
(c) 3V (d) 1.2V

- 8 通过一个 10mH 电感的电流从 0 增加到 2A，它可以储存的能量是多少？

(a) 40mJ (b) 20mJ
(c) 10mJ (d) 5mJ

- 9 电感的并联与电阻的并联效果一样。

(a) 正确 (b) 错误

- 10 图 6-44 所示电路中，符合电压分配的方程是：

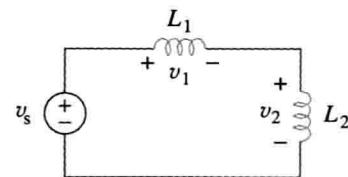


图 6-44 复习题 10 图

$$(a) v_1 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} v_s \quad (b) v_1 = \frac{L_1 + L_2}{L_2} v_s$$

$$(c) v_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_s \quad (d) v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_s$$

答案：1(a); 2(d); 3(d); 4(b); 5(c);
6(b); 7(a); 8(b); 9(a); 10(d)

习题

6.2 节

- 如果 7.5F 电容上的电压为 $2te^{-3t}$ V，计算通过它的电流及功率。
- 一个 $50\mu F$ 的电容所存能量为 $w(t) = 10\cos^2 377t$ J，计算通过该电容的电流。
- 设计一个问题以帮助其他同学更好地理解电容的工作原理。
- $4\sin 4t$ A 的电流通过一个 5F 的电容，计算当 $v(0)=1$ V 时，电容上的电压 $v(t)$ 。
- 若加载在 $4\mu F$ 电容上的电压如图 6-45 所示，画出其上的电流波形。
- 图 6-46 所示电压加在一个 $55\mu F$ 的电容上，画出通过其上的电流波形。

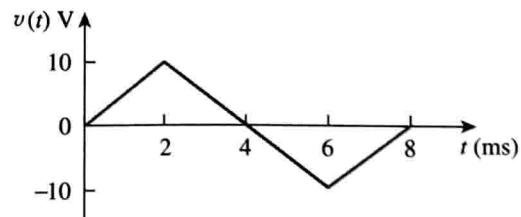


图 6-45 习题 5 图

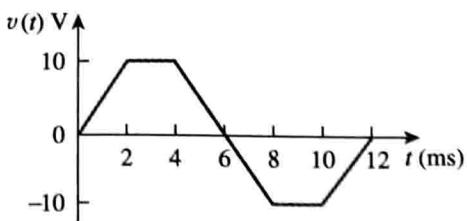


图 6-46 习题 6 图

- 7 当 $t=0$ 时，一个 $25\mu\text{F}$ 电容两端电压为 10V 。计算在 $t>0$ 、电流为 $5t\text{ mA}$ 时，该电容两端的电压。
 8 一个 4mF 的电容两端电压如下所示：

$$v = \begin{cases} 50\text{V}, & t \leq 0 \\ (Ae^{-100t} + Be^{-600t})\text{V}, & t \geq 0 \end{cases}$$

如果它的初始电流为 2A ，计算：(a) 常数 A 和 B ；(b) 在 $t=0$ 时电容所储存的能量；(c) 当 $t>0$ 时，通过电容的电流。

- 9 通过 0.5F 电容的电流是 $6(1 - e^{-t})\text{A}$ ，计算 $t=2\text{s}$ 、 $v(0)=0$ 时的电压。
 10 加在 5mF 电感上的电压如图 6-47 所示，计算通过该电容的电流。

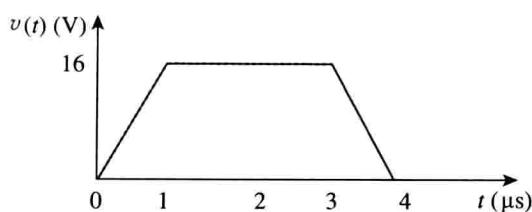


图 6-47 习题 10 图

- 11 如果通过一个 4mF 电容的电流波形如图 6-48 所示，假设 $v(0)=10\text{V}$ ，画出电压 $v(t)$ 的波形。

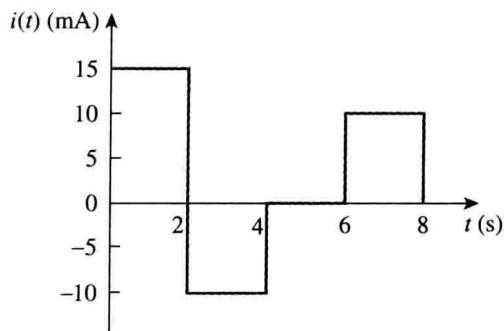


图 6-48 习题 11 图

- 12 一个 100mF 的电容与一个 12Ω 的电阻并联后连接在电压为 $30e^{-2000t}\text{V}$ 的电压源上，计算这个并联电路吸收的功率。
 13 在图 6-49 所示直流电路中，计算电容两端的电压。

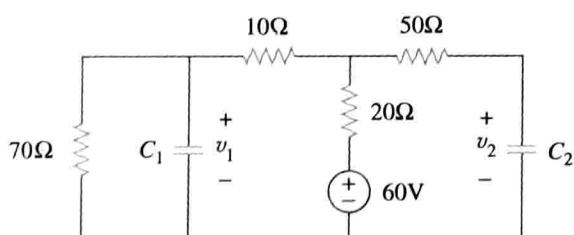


图 6-49 习题 13 图

6.3 节

- 14 一个 20pF 电容与一个 60pF 电容串联后，与 30pF 电容和 70pF 电容串联后的支路并联，计算它们的等效电容。

- 15 $25\mu\text{F}$ 与 $75\mu\text{F}$ 的电容连接在 100V 的电压源上，分别计算串联和并联时每个电容所储存的能量。
 16 图 6-50 所示终端 $a-b$ 间的等效电容为 $30\mu\text{F}$ ，计算电容 C 的值。

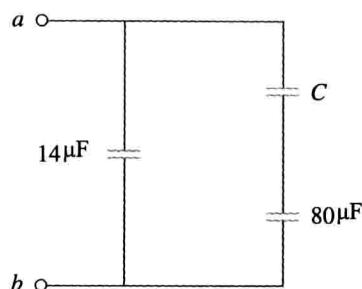


图 6-50 习题 16 图

- 17 计算图 6-51 中每个回路的等效电容。

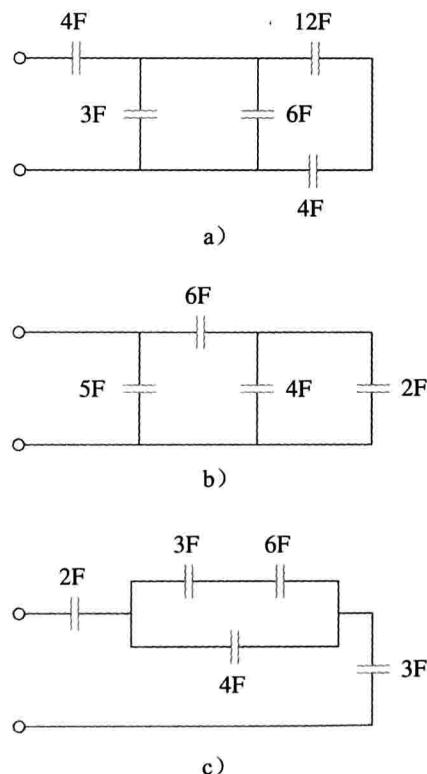


图 6-51 习题 17 图

- 18 如果图 6-52 中所有电容都为 $4\mu\text{F}$ ，计算等效电容 C_{eq} 。

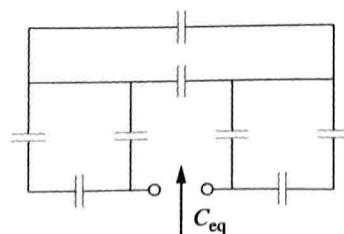


图 6-52 习题 18 图

- 19 计算图 6-53 所示电路终端 a 和 b 间的等效电容，所有电容单位均为 μF 。

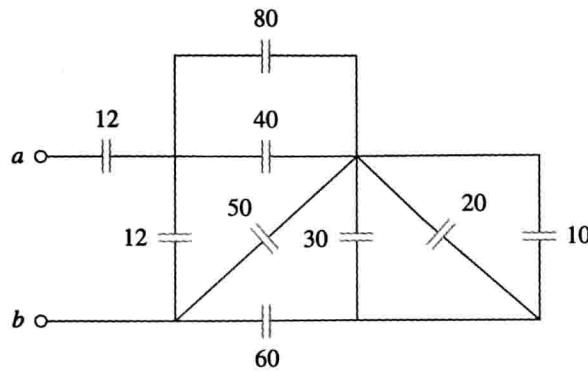


图 6-53 习题 19 图

20 计算图 6-54 所示电路终端 a 和 b 间的等效电容。

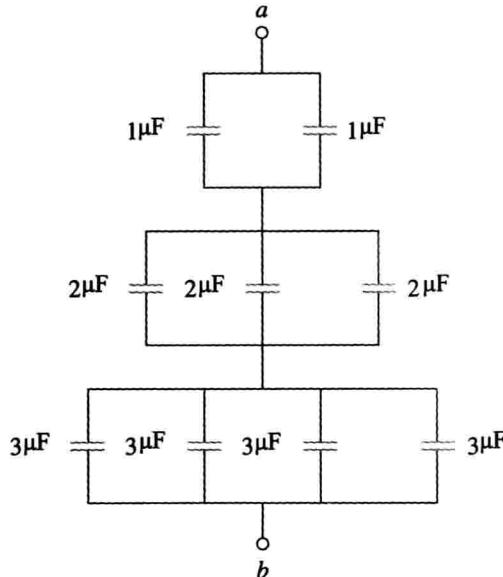


图 6-54 习题 20 图

21 计算图 6-55 所示电路终端 a 和 b 间的等效电容。

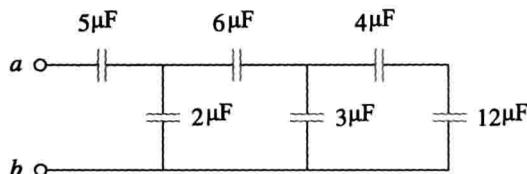


图 6-55 习题 21 图

22 计算图 6-56 所示电路终端 a 和 b 间的等效电容。

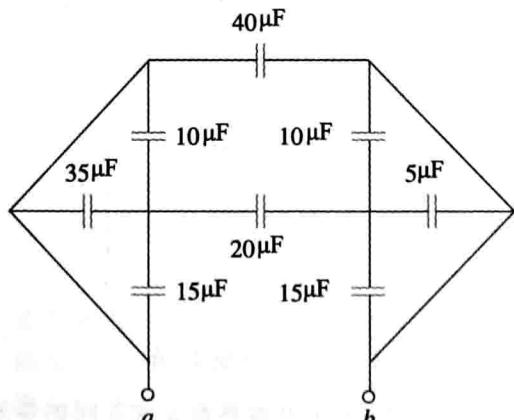


图 6-56 习题 22 图

23 利用图 6-57 设计一个问题帮助其他同学更好地理解电容在串并联时的工作方式。 ED

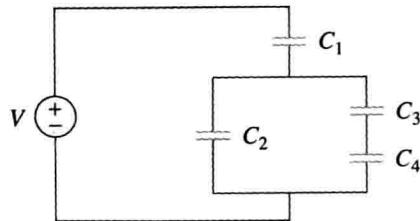


图 6-57 习题 23 图

24 对于图 6-58 所示电路, 计算: (a)每个电容上的电压; (b)每个电容所储存的能量。

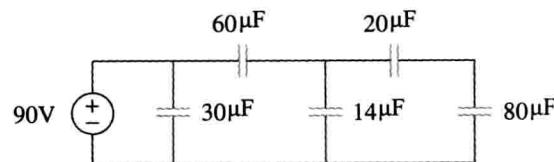


图 6-58 习题 24 图

25 (a)两个电容如图 6-59a 所示串联, 假设初始状态为零, 证明电压分布为:

$$v_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_s, \quad v_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s$$

(b)两个电容如图 6-59b 所示并联, 假设初始状态为零, 证明电流分布为:

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_s, \quad i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i_s$$

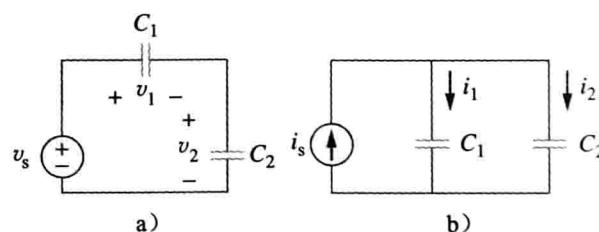


图 6-59 习题 25 图

26 $5\mu F$ 、 $10\mu F$ 以及 $20\mu F$ 的电容并联在 $150V$ 的电压源上, 计算: (a)总电容; (b)每个电容上的电荷量; (c)并联后所储存的总能量。

27 四个 $4\mu F$ 的电容有多种串并联的组合方式, 计算可得到的最小及最大的等效电容。 ED

* 28 计算图 6-60 所示网络的等效电容。

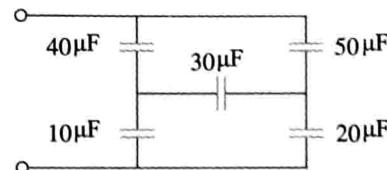


图 6-60 习题 28 图

29 计算图 6-61 所示每个电路的等效电容。

30 假设电容初始状态未充电, 计算图 6-62 所示电路中电压 $v_o(t)$ 。

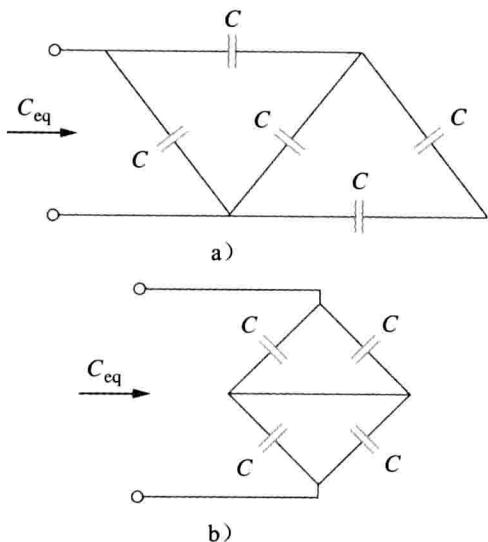


图 6-61 习题 29 图

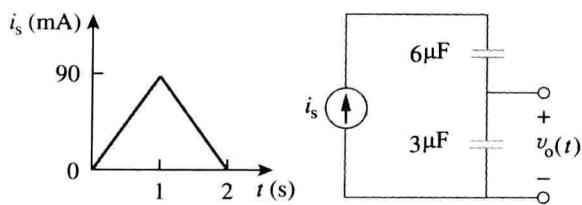


图 6-62 习题 30 图

- 31 当 $v(0)=0$ 时, 计算图 6-63 所示电路中的 $v(t)$ 、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 。

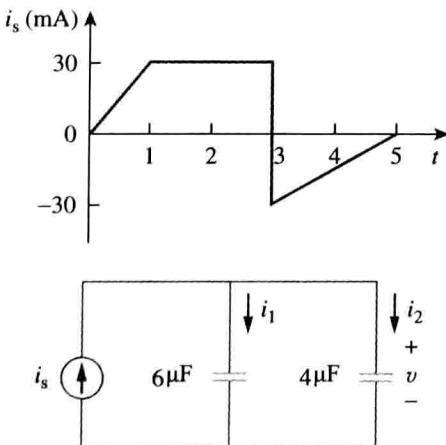


图 6-63 习题 31 图

- 32 在图 6-64 所示电路中, $i_s = 50e^{-2t}$ mA 且 $v_1(0)=50V$, $v_2(0)=20V$ 。计算: (a) $v_1(t)$, $v_2(t)$; (b) 在 $t=0.5s$ 时每个电容所储存能量。
12μF

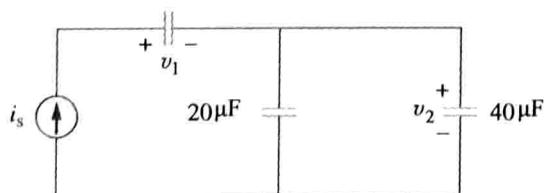


图 6-64 习题 32 图

- 33 计算图 6-65 所示电路的戴维南等效电路参数。注意, 包含电感和电阻的电路, 其戴维南等效电路通常不存在, 但本题是个特例。

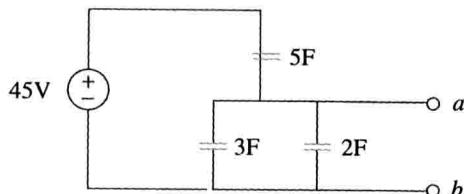


图 6-65 习题 33 图

6.4 节

- 34 通过一个 $10mH$ 电感的电流是 $10e^{-t/2}$ A, 计算在 $t=3s$ 时电感上的电压和功率。
35 一个电感上的电流在 $2ms$ 内由 $50mA$ 到 $100mA$ 线性变化, 并产生 $160mV$ 的电压, 计算该电感的值。
36 设计一个问题帮助其他同学更好地了解电感的工作原理。
37 通过一个 $12mH$ 电感的电流为 $4\sin 100t$ A, 计算在 $0 < t < \pi/200s$ 时电感两端的电压, 以及 $t=\pi/200s$ 时其上所储存的能量。
38 通过一个 $40mH$ 电感的电流为:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ te^{-2t} A, & t > 0 \end{cases}$$

计算电压 $v(t)$ 。

- 39 通过一个 $200mH$ 电感的电压为:
 $v(t) = (3t^2 + 2t + 4)V$, $t > 0$
计算通过其上电流 $i(t)$, 假设 $i(0)=1A$ 。
40 通过一个 $5mH$ 电感的电流波形如图 6-66 所示, 计算在 $t=1$ 、 3 、 $5ms$ 时电感两端的电压。

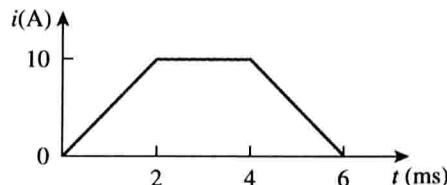


图 6-66 习题 40 图

- 41 通过一个 $2H$ 电感的电压为 $20(1 - e^{-2t})V$, 若初始电流为 $0.3A$, 计算在 $t=1s$ 时电感上的电流及其所储存能量。
42 如果在一个 $5H$ 电感两端所加电压波形如图 6-67 所示, 计算流经电感的电流, 假设 $i(0)=-1A$ 。

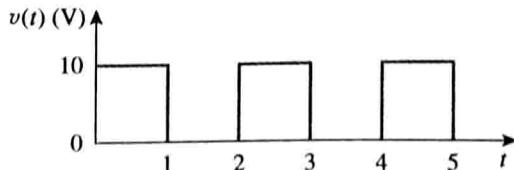


图 6-67 习题 42 图

- 43 当一个 80mH 电感上的电流从 0 增加到 100mA 时, 它所储存的能量是多少?
- * 44 一个 100mH 的电感与一个 $2\text{k}\Omega$ 的电阻并联, 流经电感的电流为 $i(t) = 50e^{-400t} \text{ mA}$ 。(a) 计算电感两端电压 v_L ; (b) 计算电阻两端电压 v_R ; (c) $v_R(t) + v_L(t) = 0$ 吗? (d) 计算在 $t=0$ 时, 电感所储存能量。
- 45 作用在一个 10mH 电感上的电压波形如图 6-68 所示, 计算电感上的电流 $i(t)$, 假设 $i(0)=0$ 。

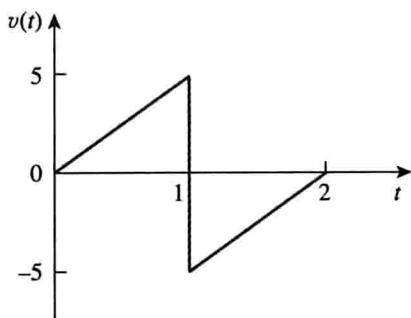


图 6-68 习题 45 图

- 46 在图 6-69 所示直流电路中, 计算电容上的电压 v_C , 电感上的电流 i_L , 以及它们分别所储存的能量。

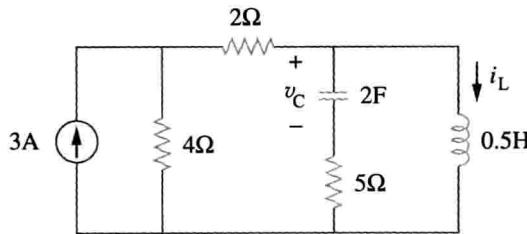


图 6-69 习题 46 图

- 47 在图 6-70 所示直流电路中, 计算电阻 R 的值, 使得电感与电容储存相同的能量值。 ED

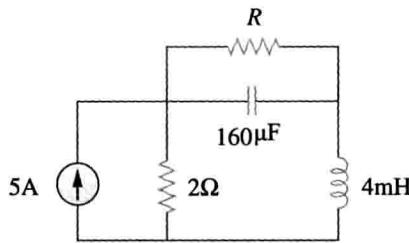


图 6-70 习题 47 图

- 48 假设图 6-71 所示直流电路已达到稳态, 计算电流 i 以及电压 v 。

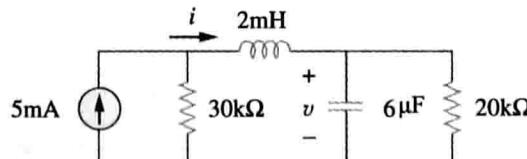


图 6-71 习题 48 图

6.5 节

- 49 计算图 6-72 所示电路的等效电感, 假设所有电感均为 10mH 。

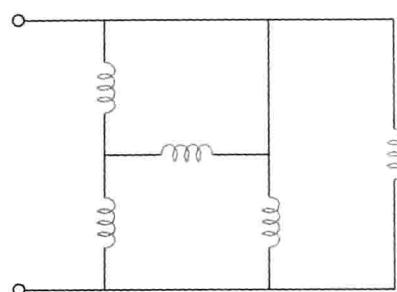


图 6-72 习题 49 图

- 50 一个能量储存网络中, 16mH 和 14mH 电感串联后, 与 24mH 和 36mH 串联后的电感并联, 计算它们的等效电感。
- 51 计算如图 6-73 所示电路 $a-b$ 终端间的等效电感 L_{eq} 。

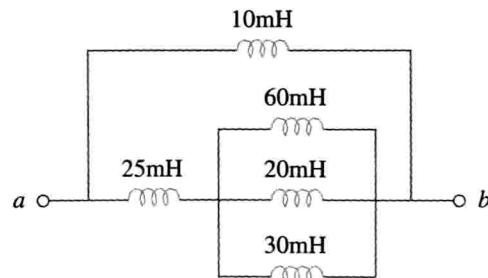


图 6-73 习题 51 图

- 52 利用图 6-74 设计一个问题帮助其他同学更好地了解电感的串并联关系。 ED

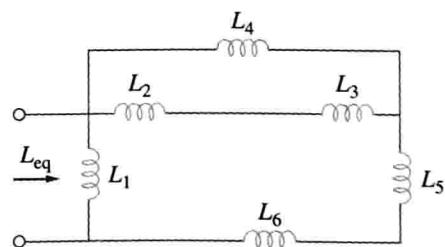


图 6-74 习题 52 图

- 53 计算图 6-75 所示电路的等效电感 L_{eq} 。

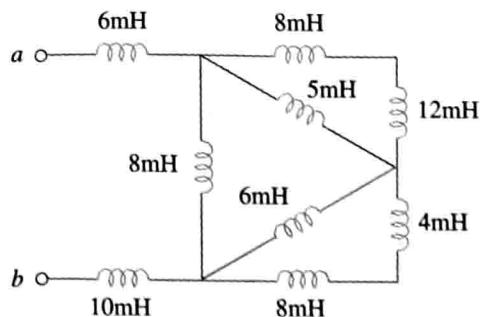


图 6-75 习题 53 图

54 计算图 6-76 所示电路终端间的等效电感。

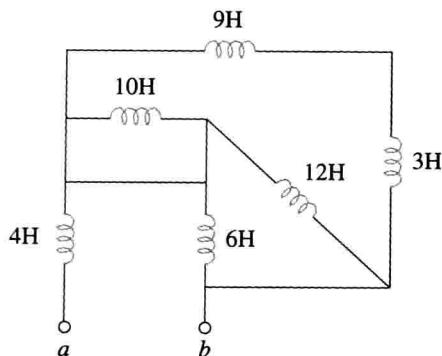


图 6-76 习题 54 图

55 计算图 6-77 所示电路的等效电感 L_{eq} 。

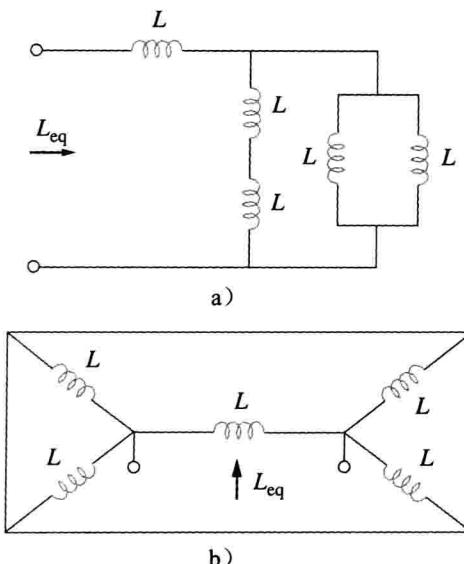


图 6-77 习题 55 图

56 计算图 6-78 所示电路的等效电感 L_{eq} 。

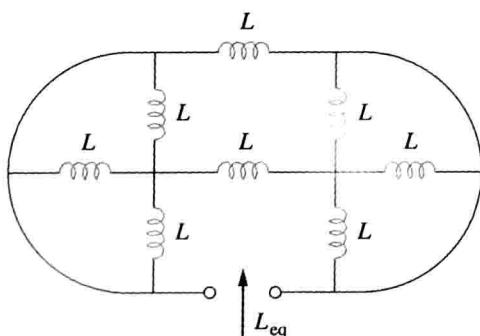


图 6-78 习题 56 图

* 57 计算图 6-79 所示电路的等效电感 L_{eq} 。

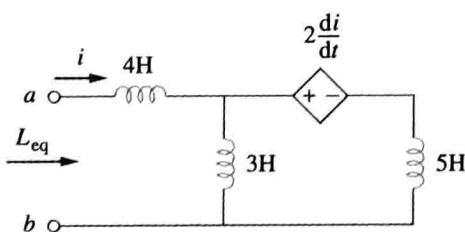


图 6-79 习题 57 图

58 流经一个 3H 电感的电流波形如图 6-80 所示，画出 $0 < t < 6$ s 时电感两端的电压波形。

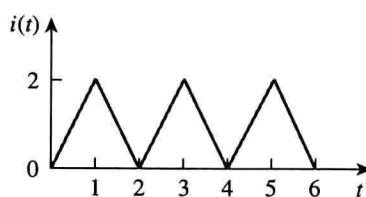


图 6-80 习题 58 图

59 (a) 两电感串联如图 6-81a 所示，试推导出如下公式：

$$v_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} v_s, \quad v_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} v_s$$

假设初始状态为零。

(b) 两电感并联如图 6-81b 所示，试推导出如下公式：

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_s, \quad i_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_s$$

假设初始状态为零。

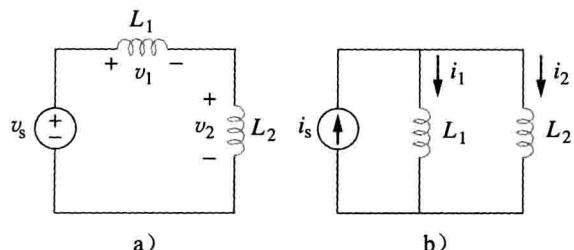


图 6-81 习题 59 图

60 分析图 6-82 所示电路， $i_o(0)=2A$ ，计算 $t>0$ 时的 $i_o(t)$ 和 $v_o(t)$ 。

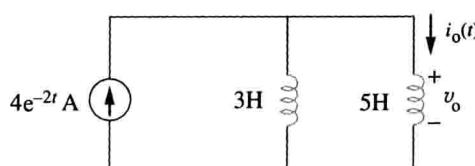


图 6-82 习题 60 图

61 分析图 6-83 所示电路，计算：(a) 在 $i_s=3e^{-t}$ mA 时的 L_{eq} 、 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ ；(b) 在 $t=1s$ 时，20mH 的电感上所存储的能量。

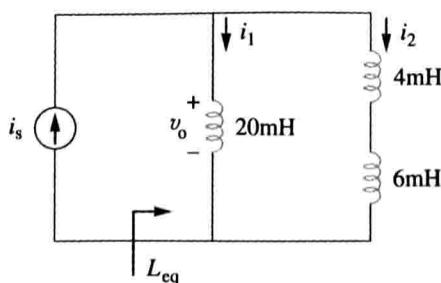


图 6-83 习题 61 图

- 62 分析图 6-84 所示电路，在 $t > 0$ 、 $v(t) = 12e^{-3t}$ mV、 $i_1(0) = -10\text{mA}$ 时，计算：(a) $i_2(0)$ ；(b) $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

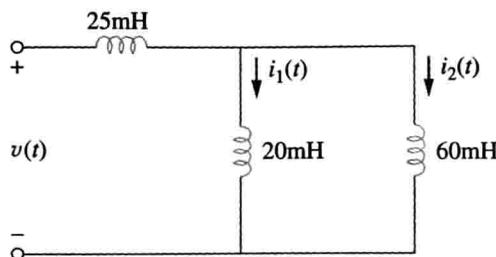


图 6-84 习题 62 图

- 63 分析图 6-85 所示电路，画出电压 v_o 的波形图。

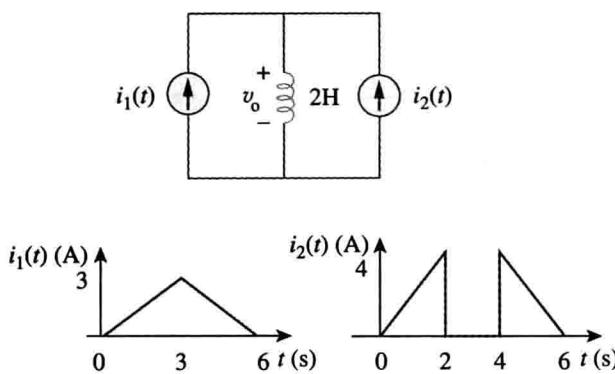


图 6-85 习题 63 图

- 64 图 6-86 所示电路中的开关一直处于 A 位置，在 $t=0$ 时，开关从 A 拨到 B。该开关是一个断通开关，因此电感上的电流不会受外界影响。计算：(a) 当 $t > 0$ 时的 $i(t)$ ；(b) 开关刚打到 B 位置时 v 的值；(c) 开关打到 B 位置很长时间后的 $v(t)$ 。

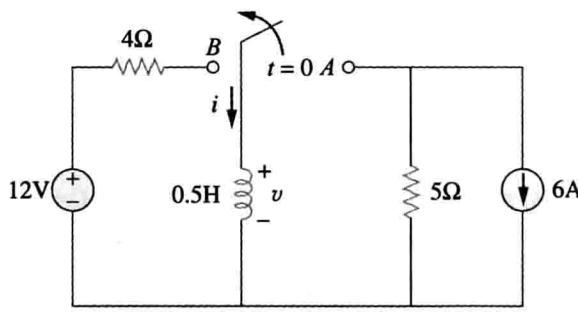


图 6-86 习题 64 图

- 65 图 6-87 所示电路中的电感初始状态被充电，在 $t = 0$ 时与一个黑盒子相连。在 $t \geq 0$ 、 $i_1(0) = 4\text{A}$ 、 $i_2(0) = -2\text{A}$ 且 $v(t) = 50e^{-200t}$ mV 时，计算：(a) 每个电感的初始能量；(b) 在 $0 \leq t < \infty$ 时，向黑盒子输入的能量；(c) 在 $t \geq 0$ 时， $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ ；(d) 在 $t \geq 0$ 时， $i(t)$ 。

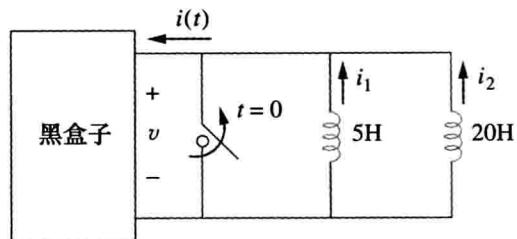


图 6-87 习题 65 图

- 66 假设通过 20mH 电感的电流 $i(t)$ 在任何时候都与电感上的电压在数量上保持相等，当 $i(0) = 2\text{A}$ 时，计算 $i(t)$ 。

6.6 节

- 67 一个运放积分器包括一个 $50\text{k}\Omega$ 的电阻和一个 $0.04\mu\text{F}$ 的电容。如果输入电压 $v_i = 10\sin 50t$ mV，计算输出电压。
- 68 一个 10V 的直流电源在 $t=0$ 时作用在一个积分电路上，这个积分电路包括一个 $50\text{k}\Omega$ 的电阻和一个 $100\mu\text{F}$ 的电容，如果该电路的饱和电压为 $\pm 12\text{V}$ ，那么电路需要多长时间达到饱和？假设初始电压为零。
- 69 一个包含 $4\text{M}\Omega$ 电阻和 $1\mu\text{F}$ 电容的运放积分器的输入电流波形如图 6-88 所示，描绘其输出电压波形。

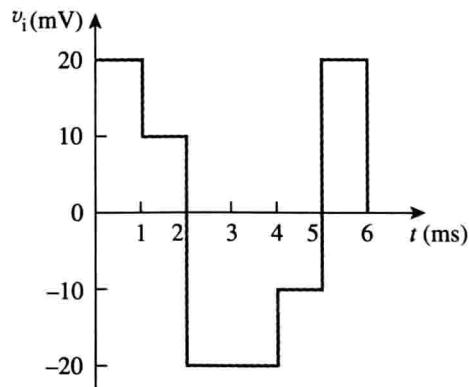


图 6-88 习题 69 图

- 70 利用一个简单的运放电路、一个电容和一个 $100\text{k}\Omega$ 的电阻，设计一个电路以实现如下方程：

$$v_o = -50 \int_0^t v_i(t) dt$$

假设在 $t=0$ 时， $v_o=0$ 。

- 71 怎样利用一个运放电路实现下方程：ED

$$v_o = - \int_0^t (v_1 + 4v_2 + 10v_3) dt$$

假设其中的电容是 $2\mu\text{F}$ ，计算其他元件的值。

- 72 在 $t=1.5\text{ms}$ 时，计算图 6-89 所示的级联积分器的电压 v_o 。假设在 $t=0$ 时，积分器被置为 0V 。

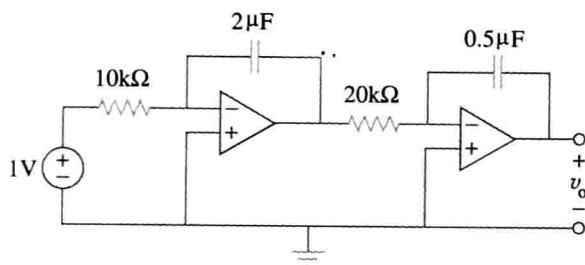


图 6-89 习题 72 图

73 证明图 6-90 所示电路是一个同向积分器。

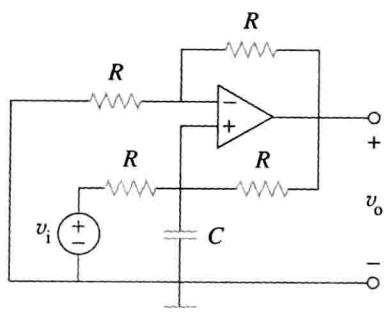
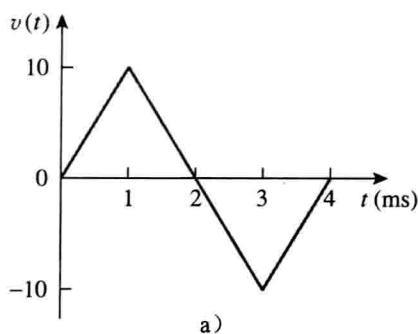


图 6-90 习题 73 图

74 图 6-91a 所示的三角波形作用在图 6-91b 所示的运算差分器上，绘出输出波形。



a)

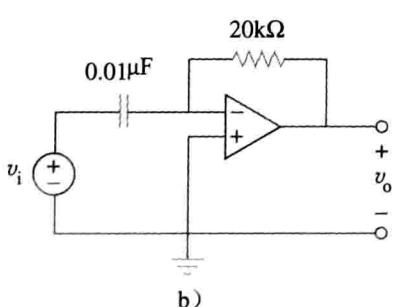
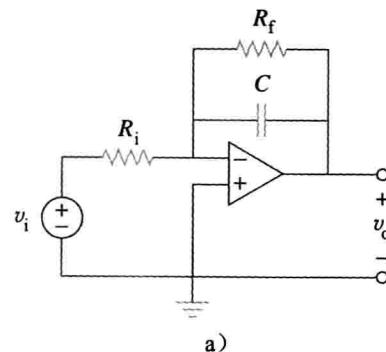
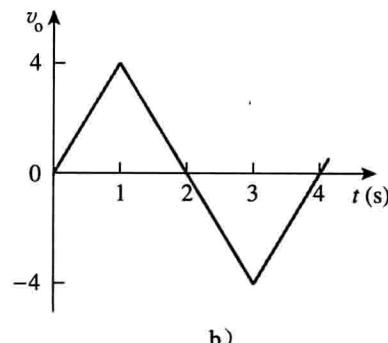


图 6-91 习题 74 图

75 一个运算差分器包含一个 $250\text{k}\Omega$ 的电阻和一个 $10\mu\text{F}$ 的电容。输入为 $r(t) = 12tm\text{V}$ 的扫描电压，计算输出电压。76 一个电压波形满足如下特性： $20\text{V}/\text{s}$ 持续 5ms ，随后 $-10\text{V}/\text{s}$ 持续 10ms ，如果这个电压作用在包含 $50\text{k}\Omega$ 电阻和 $10\mu\text{F}$ 电容的差分器上，它的输出电压波形是什么？* 77 图 6-92a 所示运算放大电路的输出电压 v_o 。如图 6-92b 所示，令 $R_i = R_f = 1\text{M}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$ 。绘制输入电压波形。

a)



b)

图 6-92 习题 77 图

78 设计一个模拟计算机使其可以计算如下方程：

ED

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + v_o = 10\sin 2t$$

其中， $v_o(0) = 2$, $v'_o(0) = 0$ 。

79 设计一个模拟计算机电路，可以求解如下差分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = f(t)$$

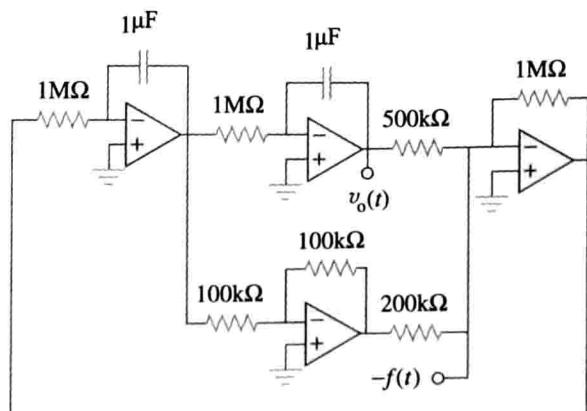
其中 $y(0) = 1\text{V}$ 。80 分析图 6-93 所示模拟计算机电路，计算其可求解的差分方程 $f(t)$ 。

图 6-93 习题 80 图

81 设计一个模拟计算机电路求解如下方程： ED

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5v = -2f(t)$$

82 设计一个运放电路求解如下方程： **ED**

$$v_o = 10v_s + 2 \int v_s dt$$

其中 v_s 和 v_o 分别是输入和输出电压。

综合理解题

- 83 假设实验室有足够的 300V 的 $10\mu\text{F}$ 电容，若要实现 600V 、 $40\mu\text{F}$ 的电容，需要用到多少 $10\mu\text{F}$ 电容？怎样连接这些电容？ **ED**
- 84 一个 8mH 的电感用于聚变能量实验中，如果流经该电感的电流是 $i(t) = 5\sin^2\pi t \text{ mA}$, $t > 0$ 。计算在 $t = 0.5\text{s}$ 时，输送到电感上的功率及其储存的能量。
- 85 一个方波发生器产生图 6-94a 所示波形，用什么电路可以将该方波波形转换成图 6-94b 所示的三角波？在初始状态未充电的前提下，给出各元器件的值。
- 86 一个电动机模型可以用一个 12Ω 的电阻和一个 20mH 的电感构成。如果流经串联回路的电流是 $i(t) = 2te^{-10t} \text{ A}$ ，试求该串联电路两端的电压。

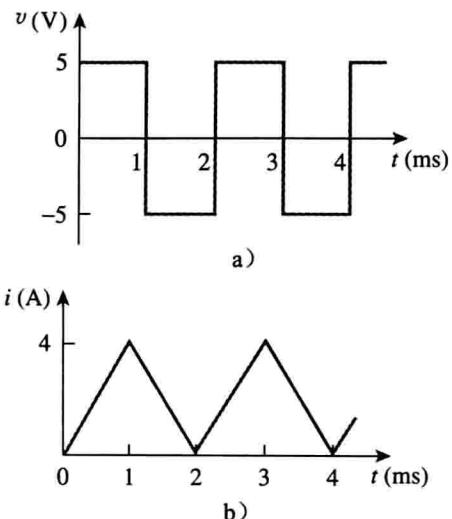


图 6-94 习题 85 图

第 7 章

一阶电路

我们活着为了有所作为，而不是虚度岁月；为了思考，而不只是呼吸；为了感受生命，而不是表盘上的数字。我们应该用心度过每一分每一秒。爱思考、有想法、敢行动的人活得才最有价值。

——P. J. Bailey

拓展事业

计算机工程领域的职业生涯

最近几十年，电子工程教育经历了巨大的变化。由于计算机的快速发展，许多系已经逐渐更名为电子与计算机工程系。在现代科学和教育中，计算机占有重要地位。它们已经全面普及并且改变了研究、开发、生产、商业和娱乐的现状。科学家、工程师、医生、律师、老师、航空公司的飞行员、商人等几乎任何人都得益于计算机存储的大量信息和短时间内处理那些信息的能力。互联网，一种计算机通信网络，在商业、教育和图书馆学中至关重要。计算机的应用在不停地飞速发展。

计算机工程教育应该提供软件、硬件设计，以及基本的建模技术，包括数据结构课程、数字系统、计算机体系结构、微处理器、接口、软件工程、操作系统等。

那些专攻计算机工程的电子工程师可以在计算机产业和在众多正在使用计算机的领域找到工作。软件公司的数量和规模快速增长，为那些熟练编程的人提供了就业机会。一种能很好地增长计算机知识的方法就是加入由各种各样的杂志、期刊和会议支持的电气与电子工程师协会下属的计算机协会。

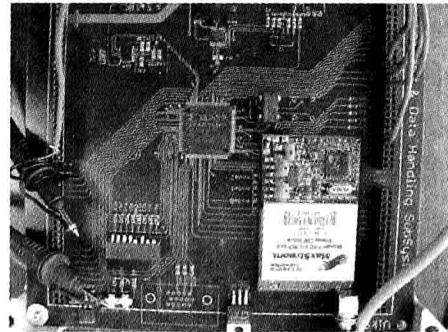
7.1 引言

我们已经学习了三个无源元件(电阻、电容和电感)和一个有源元件(运算放大器)，本章将讨论包含两个或三个无源元件的各种组合电路，主要研究两种简单的电路类型：一种电路包括一个电阻和一个电容，另一种电路包括一个电阻和一个电感。这两种电路分别称为RC 电路和RL 电路，它们在电子、通信和控制系统中有着广泛的应用。

像分析电阻电路一样，本章将分析 RC 和 RL 电路中基尔霍夫定律的应用。唯一的区别是纯电阻电路中基尔霍夫定律的应用是代数方程，而对 RC 和 RL 电路使用基尔霍夫定律产生微分方程，这比代数方程更为复杂。RC 和 RL 的微分方程电路是一阶的，因此，这类电路统称为一阶电路。

一阶电路的特点是一阶微分方程。

对于两种类型的一阶电路(RC 和 RL)，有两种激发电路的方式。第一种方式是通过电路中储能元件的初始条件。在无源电路中，假设能量初始存储在的电容或电感元件中，该



计算机中的超大规模集成电路
克利夫兰州立大学提供

能量使得电流流入电路，并在电阻上逐渐消耗。虽然无源是指不包含独立电源，但可能包含非独立电源。第二种激发一阶电路的方式是独立电源。在这一章中，独立采用直流电源（在后面的章节中将考虑正弦和指数电源）。本章将学习两种类型的一阶电路及其两种激发方式，共计四种可能的情况下。

最后，介绍 RC 和 RL 电路的四种典型应用：延迟电路、继电器电路、闪光灯单元和汽车点火电路。

7.2 无源 RC 电路

当 RC 电路的直流电源突然中断时，无源 RC 电路形成，存储在电容器中的能量被释放到电阻上。考虑到一个电阻和一个已经充电电容器的串联组合，如图 7-1 所示（电阻和电容可能是重新组合的等效电阻和等效电容）。

为了确定电路响应，假设电容器上的电压为 $V(t)$ 。因为电容器已充电，可以假定在 $t=0$ 时，初始电压是：

$$v(0) = V_0 \quad (7.1)$$

与之对应，所存储的能量为：

$$w(0) = \frac{1}{2} CV_0^2 \quad (7.2)$$

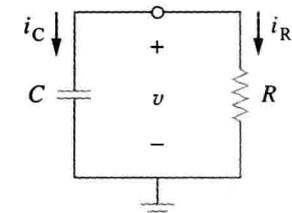


图 7-1 无源 RC 电路

提示： 电路的响应就是电路对于激励的反映。

在该电路的顶部节点应用 KCL，得：

$$i_C + i_R = 0 \quad (7.3)$$

根据定义， $i_C = CdV/dt$, $i_R = v/R$ ，因此：

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (7.4a)$$

即

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (7.4b)$$

这是一个一阶微分方程(first-order differential equation)，因为其中只含有 v 的一阶导数。为了解决这个问题，重新变换公式得到：

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt \quad (7.5)$$

两边积分，得到：

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \ln A$$

$\ln A$ 是积分常数。因此：

$$\ln \frac{v}{A} = -\frac{t}{RC} \quad (7.6)$$

解得：

$$v(t) = Ae^{-t/RC}$$

由初始条件 $V(0)=A=V_0$ 可得：

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \quad (7.7)$$

这表明， RC 电路的电压响应是初始电压的指数衰减。由于响应源于初始存储能量和电路的物理特性，而非外部电压或电流源，因此称为自然响应电路。

电路的自由响应指 电路本身在没有外部电源激发的条件下的行为（在电压和电流方面）。

提示： 自由响应只与电路自身的性质有关，不涉及外部电源。实际上，电路发生响应仅仅是因为电容器中的初始储能。

图 7-2 中说明了自由响应过程，注意，在 $t=0$ 时，初始条件为式(7.1)。随着 t 的增加，电压减小至零。电压减小的速度由时间常数(time constant)表示，记为希腊字母 τ 。

电路的时间常数表示响应衰减到它的初始值的 $1/e$ 或 36.8% 所需要的时间^②。

这意味着，在 $t=\tau$ 时，式(7.7)变为：

$$V_0 e^{-t/\tau} = V_0 e^{-1} = 0.368V_0$$

即

$$\tau = RC$$

代入时间常数，式(7.7)可写为：

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

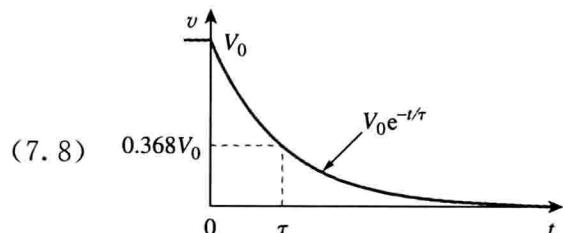


图 7-2 RC 电路的电压响应

借助计算器很容易求出 $v(t)/V_0$ 的值，从表 7-1 中可以看出，电压 $v(t)$ 在 5 个时间常数 τ 后的值不到原电压值的 1% 。因此，习惯假设电容器在 5 个时间常数后完全放电(或充电)。换句话说，如果电路不再充电，随着时间的推移，它需要 5τ 的时间达到其最终状态或稳定状态。请注意，每经过一个时间间隔 τ ，电压降低至前一个值的 36.8% ， $v(t+\tau)=v(t)/e=0.368v(t)$ ，与 t 的值无关。

表 7-1 $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$ 值表

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$v(t)/V_0$	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.00674

由式(7.8)可知，时间常数越小，电压降低时越迅速，响应速度越快。如图 7-4 所示，一个小时常数的电路能快速响应，迅速达到稳定状态(或最终状态)，电路中储存的能量快速损耗；而大时间常数的电路反应较慢，需要更长的时间才能达到稳定状态。无论时间常数是大还是小，该电路在 5 个时间常数内都能达到稳定状态。

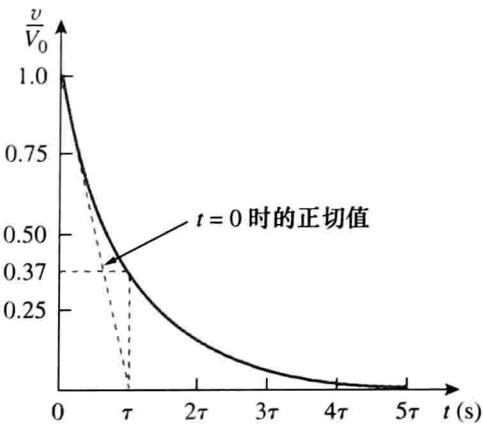


图 7-3 从响应曲线测定时间常数 τ

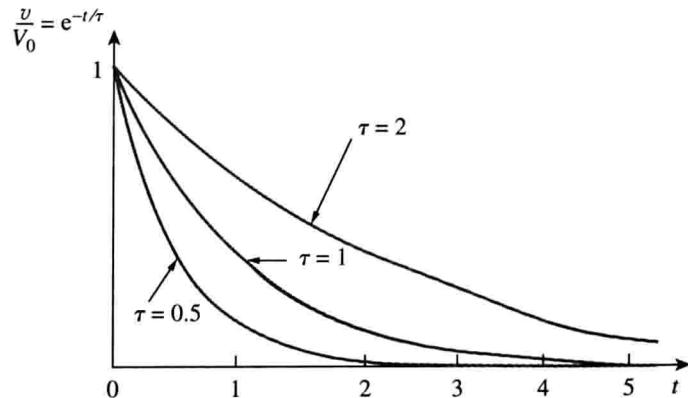


图 7-4 τ 取不同值的 $v/V_0 = e^{-t/\tau}$ 曲线

由式(7.9)中的 $v(t)$ ，可以得到电流 $i_R(t)$ ：

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (7.10)$$

在电阻上消耗的功率是：

② 可以从另外一个角度来看待时间常数，在式(7.7)中求 $v(t)$ ，当 $t=0$ 时，得到：

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{V_0} \right) \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$

因此，时间常数是初始值的衰减率，或者从某一特定值以恒定的速率衰减到零所需要的时间。时间常数的初始斜率经常用于确定示波器上显示的响应曲线的 τ ，画出图 7-3 中 $t=0$ 时响应曲线的切线，切线与时间轴相交于 $t=\tau$ 点。

$$p(t) = vi_R = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} \quad (7.11)$$

到 t 时刻电阻吸收的能量是：

$$\begin{aligned} w_R(t) &= \int_0^t p(\lambda) d\lambda = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2\lambda/\tau} d\lambda \\ &= -\frac{\tau V_0^2}{2R} e^{-2\lambda/\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \quad \tau = RC \end{aligned} \quad (7.12)$$

注意， $t \rightarrow \infty$ 时， $w_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} C V_0^2$ ，与最初储存在电容器中的能量 $w_C(0)$ 是相同的，即最初存储在电容器中的能量最终被耗散在电阻上。

通过以上讨论可以看出，处理无源 RC 电路的关键是找到：

1. 电容器的初始电压。
2. 时间常数 τ 。

提示：无论输出如何定义，时间常数都是相同的。

根据这两点，首先求得电容器电压的响应 $v_C(t) = v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$ 。一旦得到电容器电压，其他变量（电容器电流 i_C ，电阻上的电压 v_R 和电阻器的电流 i_R ）均可确定。利用公式 $\tau = RC$ 得到的时间常数， R 通常是电容器两端的戴维南等效电阻，即取出电容器 C 并计算出在其端口的等效电阻 $R = R_{Th}$ 。

提示：当电路是由一个电容、几个电阻和受控源组成时，电容端口处可以采用一个戴维南等效电阻来组成一个简单的 RC 电路。同样，几个电容也可以用戴维南定理等效为一个电容。

例 7-1 令 $v_C(0) = 15V$ ，当 $t > 0$ 时，计算 v_C 、 v_x 和 i_x 。

解：首先需要使图 7-5 中的电路符合图 7-1 中的标准 RC 电路。求出电容器两端的等效电阻或等效的戴维南电阻，得到电容器电压 v_C ，在此基础上就可以得出 v_x 和 v_i 。 8Ω 和 12Ω 电阻串联的得到 20Ω 电阻， 20Ω 电阻与 5Ω 电阻并联，所以等效电阻为：

$$R_{eq} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4(\Omega)$$

因此，其等效电路如图 7-6 所示，类似于图 7-1。时间常数为：

$$\tau = R_{eq}C = 4 \times 0.1 = 0.4(s)$$

因此：

$$v = v(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.4}(V), \quad v_C = v = 15e^{-2.5t}(V)$$

由图 7-5 可以使用分压定理得到 v_x ：

$$v_x = \frac{12}{12 + 8}v = 0.6 \times 15e^{-2.5t} = 9e^{-2.5t}(V)$$

最后：

$$i_x = \frac{v_x}{12} = 0.75e^{-2.5t}(A)$$

练习 7-1 在图 7-7 中，令 $v_C(0) = 60V$ ，当 $t \geq 0$ 时，确定 v_C 、 v_x 和 i_o 。

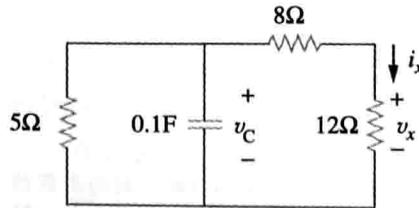


图 7-5 例 7-1 图

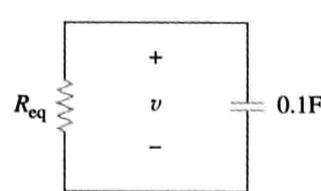


图 7-6 图 7-5 的等效电路

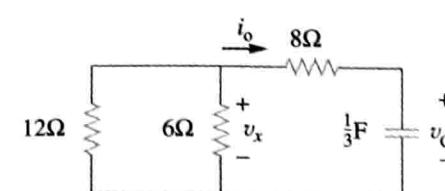


图 7-7 练习 7-1 图

答案: $60e^{-0.25t}V$, $20e^{-0.25t}V$, $-5e^{-0.25t}A$

例 7-2 图 7-8 电路中的开关已闭合很长一段时间, 在 $t=0$ 时打开, 求得 $t \geq 0$ 时的 $v(t)$, 并计算储存在电容器中的初始能量。

解: $t < 0$ 时, 开关闭合, 对直流电源来说电容器相当于断路, 如图 7-9a 所示。使用分压定理可得:

$$v_C(t) = \frac{9}{9+3} \times 20 = 15(V), \quad t < 0$$

由于电容两端的电压不能瞬时变化, 因此电容两端电压在 $t=0^-$ 与 $t=0$ 是相同的, 所以:

$$v_C(0) = V_0 = 15V$$

当 $t > 0$ 时, 开关打开, 得到如图 7-9b 所示的 RC 电路。(注意, 图 7-9b 所示 RC 电路是无源的; 图 7-8 中的独立源需要提供 V_0 或电容器中的初始能量。) 1Ω 和 9Ω 电阻串联得到:

$$R_{eq} = 1 + 9 = 10(\Omega)$$

时间常数为:

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2(s)$$

因此, $t \geq 0$ 时, 电容两端的电压是:

$$v(t) = v_C(0)e^{-t/\tau} = 15e^{-t/0.2}(V)$$

即

$$v(t) = 15e^{-5t}V$$

在电容器中存储的初始能量是:

$$w_C(0) = \frac{1}{2}Cv_C^2(0) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 15^2 = 2.25(J)$$

练习 7-2 图 7-10 所示电路中, 当 $t=0$ 时, 开关打开, 当 $t \geq 0$ 时, 计算 $v(t)$ 和 $w_C(0)$ 。

答案: $8e^{-2t}V$, 5.333J

7.3 无源 RL 电路

如图 7-11 所示, 电路中电阻器和电感器串联。为了确定电路响应, 假设通过电感的电流为 $i(t)$ 。选择电感器电流作为响应, 以充分利用电感电流不能瞬时改变的性质。在 $t=0$ 时, 假设该电感器具有的初始电流为 I_0 , 即:

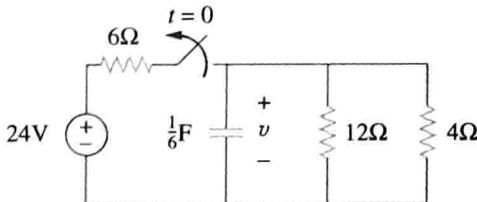


图 7-10 练习 7-2 图

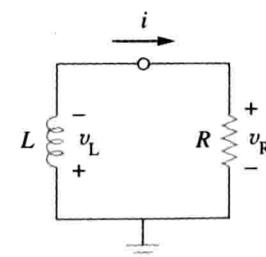


图 7-11 无源 RL 电路

$$i(0) = I_0 \quad (7.13)$$

与之相应的储存在电感中的能量为:

$$w(0) = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad (7.14)$$

对图 7-11 中的回路应用 KVL 可得：

$$v_L + v_R = 0 \quad (7.15)$$

因为 $v_L = Ldi/dt$, $v_R = iR$, 所以：

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad (7.16)$$

整理可得：

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} &= -\int_0^t \frac{R}{L} dt \\ \ln i \Big|_{I_0}^{i(t)} &= -\frac{Rt}{L} \Big|_0^t \Rightarrow \ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L} + 0 \end{aligned}$$

即

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{Rt}{L} \quad (7.17)$$

变换为 e 的指数形式，可得：

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad (7.18)$$

这表明，自由响应的 RL 电路是初始电流的指数衰减。

电流响应显示在图 7-12 中，从式(7.18)可得 RL 电路的时间常数的是：

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

(7.19)

代入式(7.18)，可得：

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-t/\tau}} \quad (7.20)$$

(7.20)

由式(7.20)可得电阻上的电压为：

$$v_R(t) = iR = I_0 R e^{-t/\tau} \quad (7.21)$$

电阻的功率为：

$$p = v_R i = I_0^2 R e^{-2t/\tau} \quad (7.22)$$

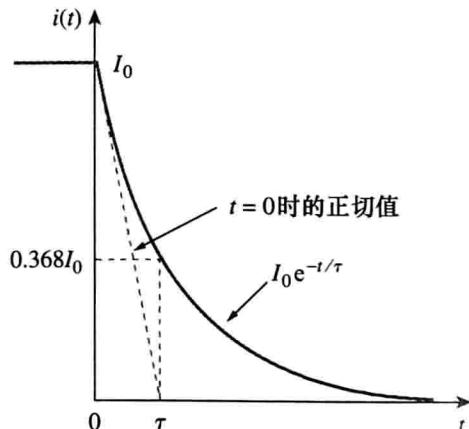


图 7-12 电流响应的 RL 电路

电阻吸收的能量是：

$$w_R(t) = \int_0^t p(\lambda) d\lambda = \int_0^t I_0^2 R e^{-2\lambda/\tau} d\lambda = -\frac{\tau}{2} I_0^2 R e^{-2\lambda/\tau} \Big|_0^t, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

即

$$w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \quad (7.23)$$

注意， $i \rightarrow \infty$ 时， $w_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} L I_0^2$ ，与最初存储在电感的能量 $w_L(0)$ 一样，见式(7.14)。可

见，最初储存在电感中的能源最终耗散在电阻上。

提示： 电路的时间常数越小，响应衰减速度越快；电路的时间常数越大，响应衰减速度越慢。无论时间常数的大小，响应衰减在 5τ 后的值都不到初始值的 1% (即达到稳定状态)。

图 7-12 给出了关于的初始斜率的解释的图解。

通过以上讨论可以看出，处理无源 RL 电路的关键是找到：

1. 电感器的初始电流 $i(0) = I_0$ 。

2. 电路的时间常数 τ 。

根据这两点，首先求得电感器的电流响应 $i_L(t) = i(t) = i(0)e^{-t/\tau}$ 。一旦确定了电感电流 i_L ，其他变量（电感电压 v_L ，电阻上的电压 v_R 和电阻电流 i_R ）可以由公式求得。需要注意的是，一般情况下，式(7.19)中是电感器两端的戴维南等效电阻。

提示：当电路是由一个电感、几个电阻和受控源组成时，电感端口处可以采用一个戴维南等效电阻来组成一个简单的RL电路。同样，几个电感也可以用戴维南定理等效为一个电感。

例 7-3 在图 7-13 中，假设 $i(0)=10A$ ，计算 $i(t)$ 和 $i_x(t)$ 。

解：有两种方法可以解决这个问题。其中一个方法是，先求得在电感器两端的等效电阻，然后使用式(7.20)计算电流。另一种方法是通过基尔霍夫电压法计算电流。无论采取哪种方法，都要先求出通过电感的电流。

方法 1 等效电阻与电感器两端的戴维南电阻是一样的。由于存在非独立源，在电感 $a-b$ 端插入一个电压源 $v_0=1V$ ，如图 7-14a 所示（也可以插入一个 1A 电流源）。对两个环路应用 KVL 可得：

$$2(i_1 - i_2) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 - i_2 = -\frac{1}{2} \quad (7.3.1)$$

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{5}{6}i_1 \quad (7.3.2)$$

将式(7.3.2)代入式(7.3.1)可得：

$$i_1 = -3A, \quad i_o = -i_1 = 3A$$

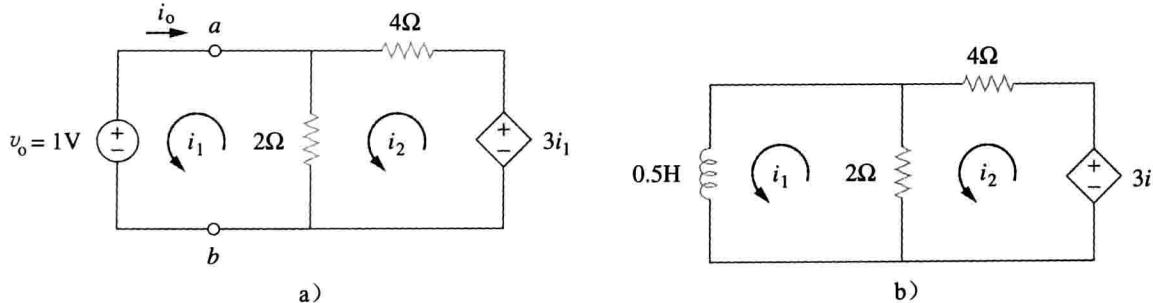


图 7-14 求解例 7-3 的电路

因此：

$$R_{eq} = R_{Th} = \frac{v_o}{i_o} = \frac{1}{3}(\Omega)$$

时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(s)$$

因此，流过电感的电流是：

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 10e^{-(2/3)t}(A), \quad t > 0$$

方法 2 在图 7-14b 电路中，可以直接应用 KVL。对于回路 1：

$$\frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_2) = 0$$

即

$$\frac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 0 \quad (7.3.3)$$

对于回路 2:

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{6}i_1 \quad (7.3.4)$$

将式(7.3.4)代入式(7.3.3)可得:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{2}{3}i_1 = 0$$

变换得:

$$\frac{di_1}{i_1} = -\frac{2}{3}dt$$

因为 $i_1 = i$, 用 i 来代替 i_1 可得:

$$\ln i \Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{2}{3}t \Big|_0^t$$

即

$$\ln \frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{2}{3}t$$

变换为 e 的指数形式, 可得:

$$i(t) = i(0)e^{-(2/3)t} = 10e^{-(2/3)t} \text{ (A)}, \quad t > 0$$

与方法 1 结果相同。

电感两端的电压是:

$$v = L \frac{di}{dt} = 0.5 \times 10 \left(-\frac{2}{3} \right) e^{-(2/3)t} = -\frac{10}{3} e^{-(2/3)t} \text{ (V)}$$

由于电感器和 2Ω 电阻并联, 所以:

$$i_x(t) = \frac{v}{2} = -1.6667 e^{-(2/3)t} \text{ (A)}, \quad t > 0$$

练习 7-3 在图 7-15 的电路中, 令 $i(0)=12\text{A}$, 计算 i 和 v_x 。

答案: $12e^{-2t}\text{A}$, $-12e^{-2t}\text{V}$, $t > 0$

例 7-4 图 7-16 所示的电路中, 开关一直处于关闭状态, 当 $t=0$ 时, 开关打开, 求 $t > 0$ 时的响应 $i(t)$ 。

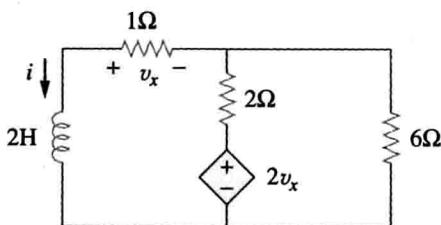


图 7-15 练习 7-3 图

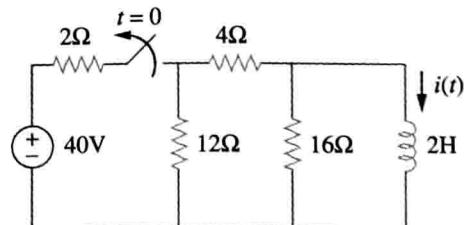


图 7-16 例 7-4 图

解: 当开关关闭时, 对于直流电, 电感相当于短路电路。 16Ω 电阻被短路, 得到的电路如图 7-17a 所示。将 4Ω 电阻和 12Ω 电阻并联, 得到:

$$\frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3(\Omega)$$

因此:

$$i_1 = \frac{40}{2 + 3} = 8(\text{A})$$

图 7-17a 中, 用分流法可得 $i(t)$, 用 i_1 表示为:

$$i(t) = \frac{12}{12+4} i_1 = 6 \text{ (A)}, \quad t < 0$$

因为通过电感的电流不能瞬时改变，所以：

$$i(0) = i(0^-) = 6 \text{ A}$$

当开关打开时，电压源断开，得到无源 RL 电路如图 7-17b 所示，则总电阻：

$$R_{\text{eq}} = (12 + 4) \parallel 16 = 8 \text{ (\Omega)}$$

时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ (s)}$$

因此：

$$i(t) = i(0) e^{-t/\tau} = 6 e^{-4t} \text{ (A)}$$

练习 7-4 图 7-18 所示电路，当 $t > 0$ 时求 $i(t)$ 。

答案： $5e^{-2t} \text{ A}, t > 0$

例 7-5 图 7-19 所示电路中，假设开关打开，电路已达稳定，求 i_o 、 v_o 和 i 。

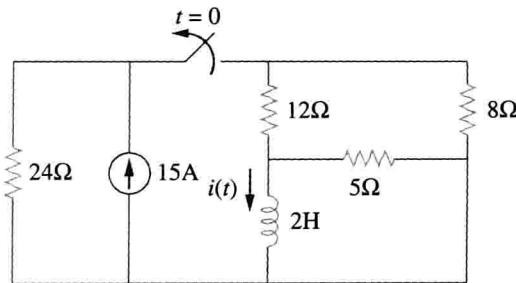


图 7-18 练习 7-4 图

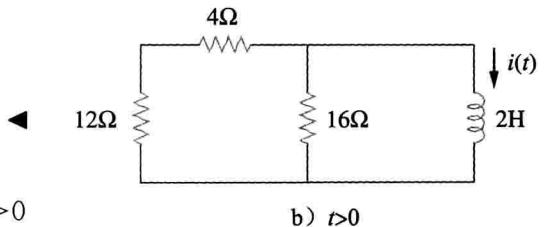


图 7-17 例 7-4 图

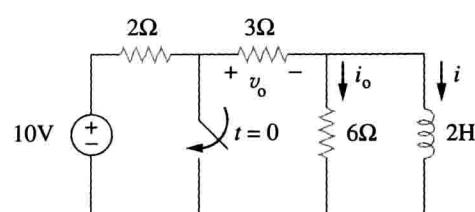


图 7-19 例 7-5 图

解：首先求出通过电感的电流 i ，然后通过它得到其他的值。当 $t < 0$ 时，开关处于打开状态，电感就相当于短路， 6Ω 电阻被短路，得到图 7-20a 所示电路。其中， $i_o = 0$ ，且：

$$i(t) = \frac{10}{2+3} = 2 \text{ (A)}, \quad t < 0$$

$$v_o(t) = 3i(t) = 6 \text{ (V)}, \quad t < 0$$

因此， $i(0) = 2$ 。

当 $t > 0$ 时，开关闭合，使得电压源被短路。得到无源 RL 电路如图 7-20b 所示，在电感的两端，等效电阻为：

$$R_{\text{Th}} = 3 \parallel 6 = 2 \text{ (\Omega)}$$

时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = 1 \text{ (s)}$$

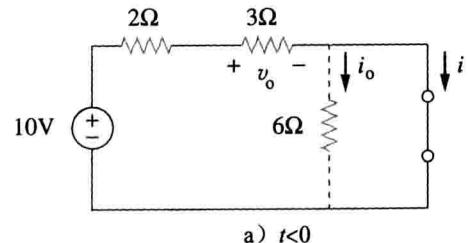
因此：

$$i(t) = i(0) e^{-t/\tau} = 2e^{-t} \text{ (A)}, \quad t > 0$$

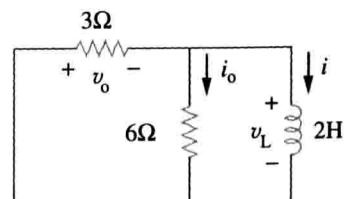
由于电感器和 6Ω 及 3Ω 电阻并联，所以：

$$v_o(t) = -v_L = -L \frac{di}{dt} = -2(-2e^{-t}) = 4e^{-t} \text{ (V)}, \quad t > 0$$

且 $i_o(t) = \frac{v_L}{6} = -\frac{2}{3}e^{-t} \text{ (A)}, \quad t > 0$



a) $t < 0$



b) $t > 0$

图 7-20 例 7-5 图

因此, 对于所有的时间段:

$$i_o(t) = \begin{cases} 0A, & t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-t}A, & t \geq 0 \end{cases}, \quad v_o(t) = \begin{cases} 6V, & t < 0 \\ 4e^{-t}V, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 2A, & t < 0 \\ 2e^{-t}A, & t \geq 0 \end{cases}$$

注意, 当 $t=0$ 时, 电感的电流是连续的, 而通过 6Ω 电阻的电流从 0 下降到 $-2/3A$, 3Ω 电阻两端的电压从 $6V$ 下降到 $4V$ 。还应注意, 无论图 7-21 中的 i 和 i_o 哪个作为输出, 时间常数都是相同的。

练习 7-5 对图 7-22 所示电路, 求对应于所有的 t 的 i 、 i_o 和 v_o 。假设开关已闭合很久, 注意, 打开与理想电流源串联的开关将在电流源两端形成无穷大的电压。显然, 这是不可能的。为了解决这个问题, 可以在电源上并联一个分流电阻(等效为一个电压源与一个电阻串联)。在大多数情况下, 像这样的电流源电路更符合实际。这些电路允许电源像一个理想的电流源一样工作, 且可以超出了它的工作范围, 但当负载电阻变得太大时电压会受到限制(如在开路电路中)。

答案:

$$i = \begin{cases} 16A, & t < 0 \\ 16e^{-2t}A, & t \geq 0 \end{cases}, \quad i_o = \begin{cases} 8A, & t < 0 \\ -5.333e^{-2t}A, & t \geq 0 \end{cases},$$

$$v_o = \begin{cases} 32V, & t < 0 \\ 10.667e^{-2t}V, & t \geq 0 \end{cases}$$

7.4 奇异函数

在学习本章下半部分之前, 需要复习一些数学概念, 这将有助于理解电路的暂态分析。奇异函数的基本概念将帮助我们理解一阶电路对于独立直流电压或者电流源的暂态响应。

奇异函数(也称开关函数)在电路分析中是非常有用的, 它们近似于开关电路中的开关操作产生的信号, 对于描述电路中的细节现象非常有效, 特别对接下来的章节中将要讨论的 RC 或 RL 电路的阶跃响应也是有帮助的。

奇异函数及其导数都是不连续的。

电路分析中使用最广泛的三种奇异函数是单位阶跃(unit step)、单位冲激(unit impulse)和单位斜坡(unit ramp)函数。

单位阶跃函数是 $u(t)$ 在 t 的值是负数时为 0, 在 t 的值是正数时为 1。

数学表示为:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

单位阶跃函数在 $t=0$ 时是不确定的, 此刻函数值突然从 0 变为 1。像正弦和余弦一样, 阶跃函数也是无量纲的。图 7-23 所示为单位阶跃函数。如果在 $t=t_0$ ($t_0 > 0$) 时突然发生变化, 则单位阶跃函数变为:

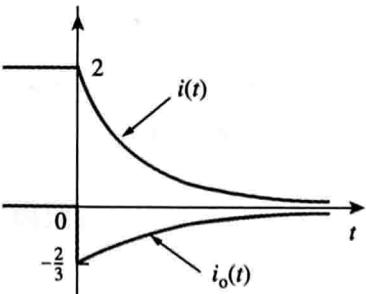


图 7-21 i 和 i_o 的曲线图

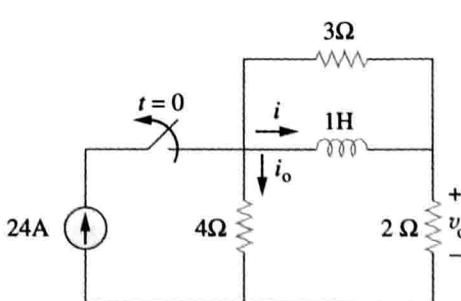


图 7-22 练习 7-5 图

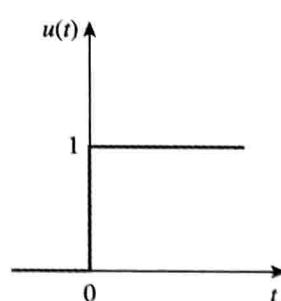


图 7-23 单位阶跃函数

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (7.25)$$

即 $u(t)$ 被延迟 t_0 秒, 如图 7-24b 所示。为了得到函数方程, 只需将 t 替换成 $(t - t_0)$, 式(7.24)即可变成式(7.25), 如果 $t = -t_0$, 则单位阶跃函数变成:

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases} \quad (7.26)$$

表示 $u(t)$ 是被提前 t_0 秒, 如图 7-24b 所示。

使用阶跃函数可以表示电压或电流的急剧变化, 类似于控制系统和数字计算机的电路中发生的变化。例如, 若电压为:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ V_0, & t > t_0 \end{cases} \quad (7.27)$$

则, 可以表示为单位阶跃函数:

$$v(t) = V_0 u(t - t_0) \quad (7.28)$$

如果令 $t_0 = 0$, 那么 $v(t)$ 便成为阶跃电压 $V_0 u(t)$, 如图 7-25a 所示, 其等效电路如图 7-25b 所示。在图 7-25b 中可知, 当 $t < 0$ 时, $a-b$ 端是短路的, 当 $t = 0$ 时, 端电压 $v = V_0$ 。

提示: 也可以写成 $u[f(t)] = 1$, $f(t) > 0$, 这里 $f(t)$ 可能是 $(t - t_0)$ 或 $(t + t_0)$, 由式(7.24)可得出式(7.25)和(7.26)。

同样地, 图 7-26 中的电流源 $I_0 u(t)$, 其等效电路如图 7-26b 所示。注意, 当 $t < 0$ 时, 电路开路($i=0$), 当 $t > 0$ 时, $i = I_0$ 。

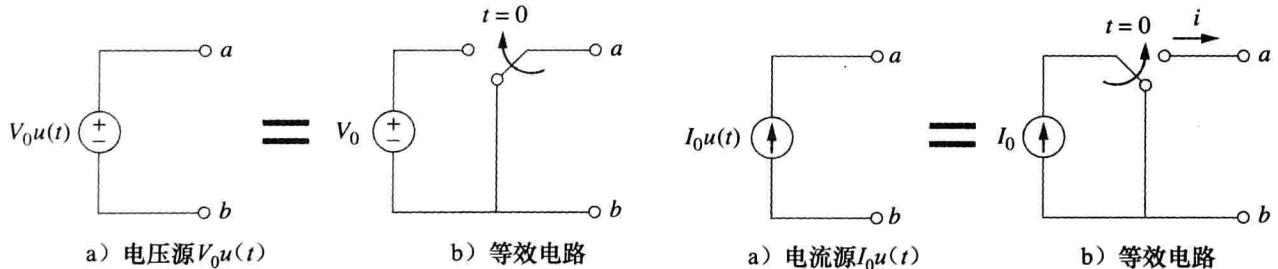


图 7-25 电压源及其等效电路

图 7-26 电流源及其等效电路

单位阶跃函数 $u(t)$ 的导数是单位冲激函数 $\delta(t)$, 记作:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{未定义}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

单位冲激函数, 也称为狄拉克函数, 如图 7-27 所示。

单位冲激函数除了在 $t=0$ 时值是不确定的, 其余处处为零。

电流和电压的脉冲会在电路有开关操作或有脉冲源的时候产生。虽然单位冲激是物理不可实现的(就像理想电源、理想电阻等), 但它是一个非常有用的数学工具。

单位冲激可被视为电路中施加或得到的尖峰, 是一个持续时间非常短的脉冲单位面积, 数学表示为:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (7.30)$$

其中, 用 $t=0^-$ 表示 $t=0$ 时刻之前, $t=0^+$ 表示 $t=0$ 时刻之后。一般习惯在箭头的旁边写

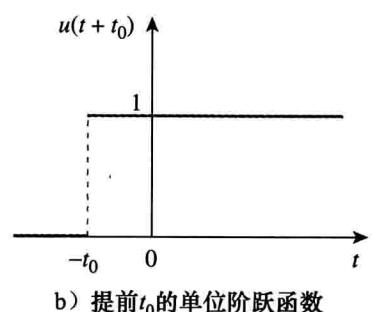
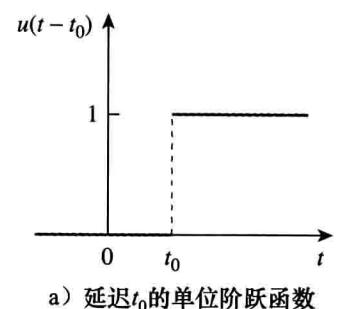
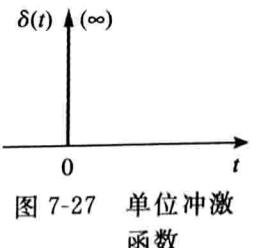


图 7-24 延迟和提前 t_0 的单位阶跃函数



1(表示单位面积), 用来象征单位冲激函数, 如图 7-27 所示。冲激函数的单位面积被称为冲激函数的强度。当一个冲激函数的强度大于单位冲激函数时, 那么它的面积等同于它的强度。例如, 冲激函数 $10\delta(t)$ 的面积为 10。图 7-28 显示了 $5\delta(t+2)$ 、 $10\delta(t)$ 和 $-4\delta(t-3)$ 冲激函数。

为了说明冲激函数对其他函数的影响, 对其积分得:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt \quad (7.31)$$

$a < t_0 < b$ 时, 因为除 $t=t_0$ 点之外 $\delta(t-t_0)=0$, 所以除 t_0 点之外的乘积为零, 得到:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_a^b f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_a^b \delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

即

$$\boxed{\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)} \quad (7.32)$$

这表明, 当一个函数与冲激函数相乘时, 所得到的值出现在冲激函数发生的点上。这就是冲激函数的抽样或筛选性质。式(7.31)的特殊值出现在 $t_0=0$ 时, 此时式(7.32)可写成:

$$\int_0^{t_0} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (7.33)$$

单位斜坡函数 $r(t)$ 是单位阶跃函数 $u(t)$ 的变形, 记作:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda)d\lambda = tu(t) \quad (7.34)$$

即

$$\boxed{r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}} \quad (7.35)$$

单位斜坡函数在 t 的值为负时值为零, 在 t 的值为正时存在单位斜率。

图 7-29 所示为单位斜坡函数。在一般情况下, 斜坡函数以恒定的速率变化。

如图 7-30 所示, 单位斜坡函数可以被延迟或提前, 对于延迟的单位斜坡函数:

$$r(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ t-t_0, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (7.36)$$

提前的单位斜坡函数:

$$r(t+t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq -t_0 \\ t+t_0, & t \geq -t_0 \end{cases} \quad (7.37)$$

应该记住这三个奇异函数(冲激、阶跃、斜坡)之间的关系:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad (7.38)$$

或变为积分形式:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda)d\lambda, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda)d\lambda \quad (7.39)$$

虽然还有许多其他的奇异函数, 但本章只讨论这三个奇异函数。

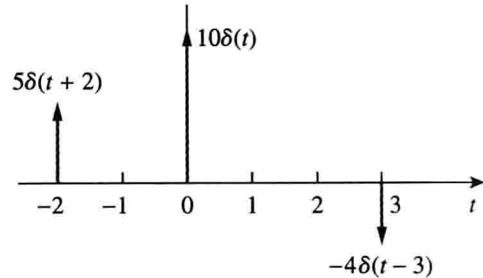


图 7-28 三种冲激函数

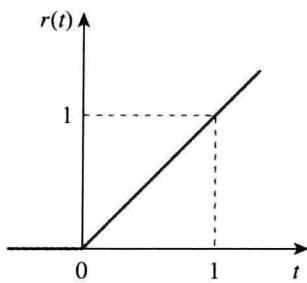


图 7-29 单位斜坡函数

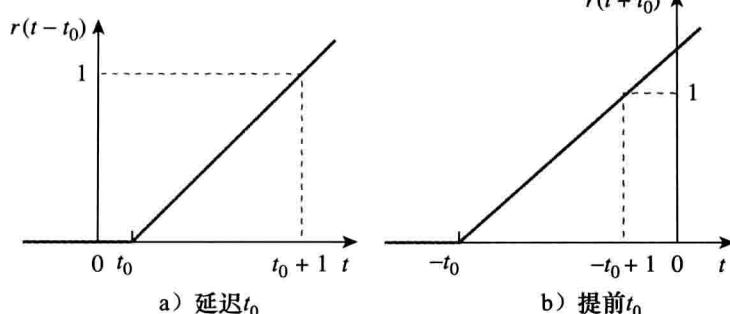


图 7-30 单位斜坡函数

例 7-6 表示图 7-31 中的单位阶跃电压，计算并画出它的导数。

提示：门函数常被用于控制其他信号的通过或阻止。

解：图 7-31 这种类型的脉冲称为门函数。门函数可以视为一个阶跃函数，在 t 等于某个值时打开，在 t 等于另一个值时关闭。图 7-31 所示的门函数在 $t=2s$ 时打开，在 $t=5s$ 时关闭。如图 7-32a 所示，该门函数由两个阶跃函数组成，可以看出：

$$v(t) = 10u(t-2) - 10u(t-5) = 10[u(t-2) - u(t-5)]$$

求导可得：

$$\frac{dv}{dt} = 10[\delta(t-2) - \delta(t-5)]$$

导数如图 7-32b 所示，图 7-32b 可通过观察直接由图 7-31 得出：当 $t=2s$ 时，电压瞬间增加 10V 导致 $10\delta(t-2)$ ，当 $t=5s$ 时，电压瞬间降低 10V 导致 $-10\delta(t-5)$ 。

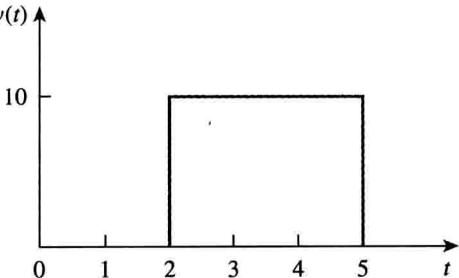


图 7-31 例 7-6 图

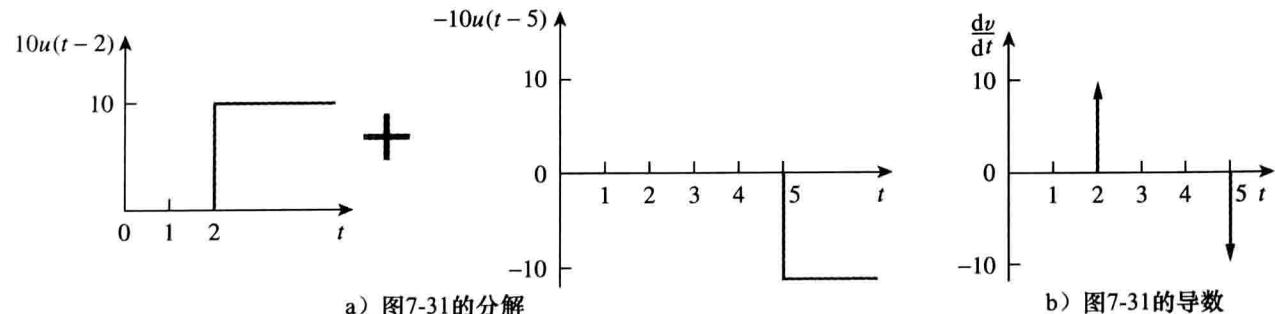


图 7-32 例 7-6 的求解结果

练习 7-6 表示图 7-33 所示的阶跃电流，求其积分并画图。

答案： $10[u(t)-2u(t-2)+u(t-4)]$ ， $10[r(t)-2r(t-2)+r(t-4)]$ ，见图 7-34

例 7-7 用奇异函数表示图 7-35 中的锯齿波(sawtooth)函数。

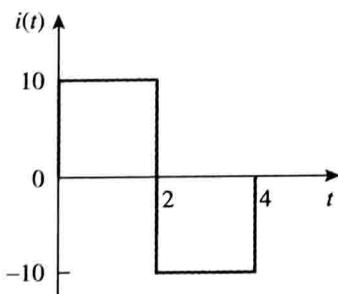


图 7-33 练习 7-6 图

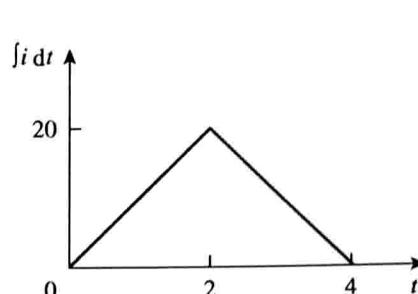
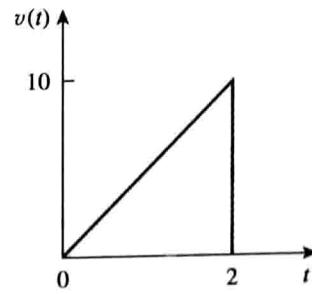
图 7-34 图 7-33 中 $i(t)$ 的积分

图 7-35 例 7-7 图

解：解决此问题有三种方法。第一种方法只需观察给定的函数，而其他方法涉及一些图形操作的函数。

方法 1 观察图 7-35 中的 $v(t)$ ，不难注意函数 $v(t)$ 是由几个奇异函数组成的。所以令：

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + \dots \quad (7.7.1)$$

函数 $v_1(t)$ 的斜率为 5，如图 7-36a 所示，得到：

$$v_1(t) = 5r(t) \quad (7.7.2)$$

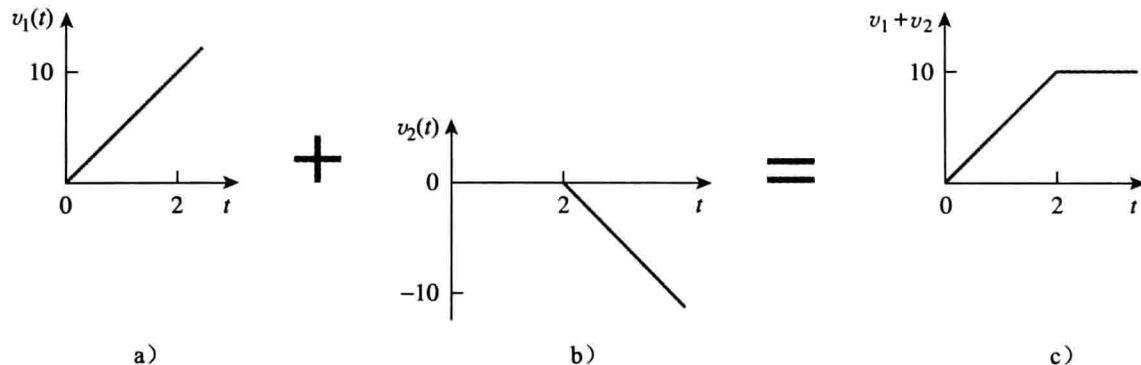


图 7-36 图 7-35 的分解

由于 $v_1(t)$ 将趋于无穷大，为了得到 $v(t)$ ，在 $t=2$ s 时需要加入另一个函数。令这个函数为 v_2 ，它的斜率为 -5，如图 7-36b 所示，得到：

$$v_2(t) = -5r(t-2) \quad (7.7.3)$$

将 v_1 和 v_2 相加得到如图 7-36c 所示的信号。显然，这个信号与图 7-35 中所表示的 $v(t)$ 不同。不同之处是，当 $t>2$ s 时，有一个常数 10，所以还需增加了第三个信号 v_3 ，令 v_3 为：

$$v_3 = -10u(t-2) \quad (7.7.4)$$

至此，得到图 7-37 所示的 $v(t)$ ，将式(7.7.2)~(7.7.4)代入式(7.7.1)可得：

$$v(t) = 5r(t) - 5r(t-2) - 10u(t-2)$$

方法 2 仔细观察图 7-35 可知， $v(t)$ 是由一个斜坡函数和一个门函数组成的，因此：

$$\begin{aligned} v(t) &= 5t[u(t) - u(t-2)] \\ &= 5tu(t) - 5tu(t-2) \\ &= 5r(t) - 5(t-2+2)u(t-2) \\ &= 5r(t) - 5(t-2)u(t-2) - 10u(t-2) \\ &= 5r(t) - 5r(t-2) - 10u(t-2) \end{aligned}$$

与方法 1 的结果一致。

方法 3 此方法类似于方法 2。观察图 7-35 可知： $v(t)$ 由一个斜坡函数和一个单位阶跃函数组成，如图 7-38 所示，因此：

$$v(t) = 5r(t)u(-t+2)$$

如果可以用 $[1-u(t)]$ 来代替 $u(-t)$ ，那么也可以用 $[1-u(t-2)]$ 来代替 $u(-t+2)$ ，因此：

$$v(t) = 5r(t)[1-u(t-2)]$$

与方法 2 一样可以快捷地得到正确答案。

练习 7-7 用奇异函数表示图 7-39 中的 $i(t)$ 。

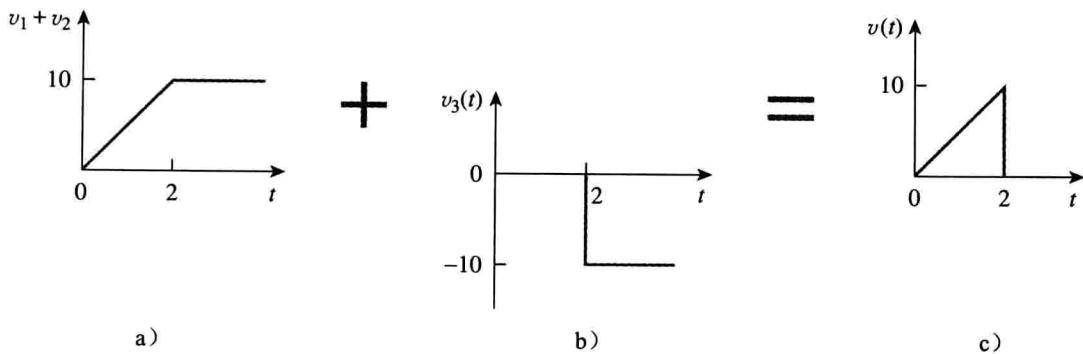
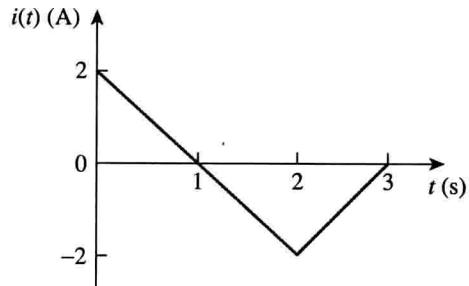
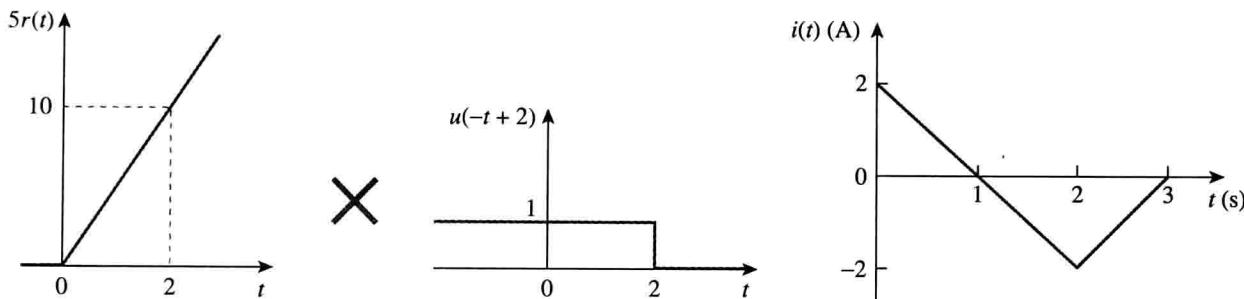


图 7-37 图 7-35 的分解

答案: $2u(t) - 2r(t) + 4r(t-2) - 2r(t-3)$ A**例 7-8** 信号 $g(t)$ 为:

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t < 0 \\ -2, & 0 < t < 1 \\ 2t - 4, & t > 1 \end{cases}$$

试用阶跃函数和斜坡函数表示 $g(t)$ 。解: 信号 $g(t)$ 可以看做是在 $t < 0$ 、 $0 < t < 1$ 和 $t > 1$ 这三个区间内三个特定函数的组成。当 $t < 0$ 时, $g(t)$ 可被看做是 $3u(-t)$, 其中 $u(-t) = 1$; 当 $t > 0$ 时, $u(-t) = 0$ 。当 $0 < t < 1$ 时, 函数可以被看做 -2 乘以一个门函数 $[u(t) - u(t-1)]$ 。当 $t > 1$ 时, 函数可以看做 $(2t - 4)$ 乘以单位阶跃函数 $u(t-1)$, 因此:

$$\begin{aligned} g(t) &= 3u(-t) - 2[u(t) - u(t-1)] + (2t - 4)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + (2t - 4 + 2)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2(t-1)u(t-1) \\ &= 3u(-t) - 2u(t) + 2r(t-1) \end{aligned}$$

用 $[1 - u(t)]$ 来代替 $u(-t)$ 可以避免一些麻烦, 得到:

$$g(t) = 3[1 - u(t)] - 2u(t) + 2r(t-1) = 3 - 5u(t) + 2r(t-1)$$

另外, 也可以用例 7-7 中的方法 1 来求 $g(t)$ 。**练习 7-8** 如果:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -4, & 0 < t < 2 \\ 3t - 8, & 2 < t < 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases}$$

用奇异函数表示 $h(t)$ 。 答案: $-4u(t) + 2u(t-2) + 3r(t-2) - 10u(t-6) - 3r(t-6)$ **例 7-9** 计算下列冲激函数的积分:

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t-2)dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-1)e^{-t}\cos t + \delta(t+1)e^{-t}\sin t]dt$$

解：对于第一个积分，利用式(7.32)的筛选性质可得：

$$\int_0^{10} (t^2 + 4t - 2)\delta(t-2)dt = (t^2 + 4t - 2) |_{t=2} = 4 + 8 - 2 = 10$$

类似地，对于第二个积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-1)e^{-t}\cos t + \delta(t+1)e^{-t}\sin t]dt \\ = e^{-t}\cos t |_{t=1} + e^{-t}\sin t |_{t=-1} \\ = e^{-1}\cos 1 + e^1 \sin(-1) = 0.1988 - 2.2873 = -2.0885$$

练习 7-9 求下列积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + 5t^2 + 10)\delta(t+3)dt, \quad \int_0^{10} \delta(t-\pi)\cos 3t dt$$

答案：28, -1

7.5 RC 电路的阶跃响应

当直流电源突然作用于 RC 电路时，这个电压或电流源可以建模为一个阶跃函数，其响应称为阶跃响应。

电路的阶跃响应是电路受到阶跃函数激励时的行为，激发它的可以是电压或电流源。

图 7-40a 所示的 RC 电路可以用图 7-40b 所示电路代替， V_s 是一个连续直流电压源，选择电容上的电压作为电路响应，假设电容器上的初始电压为 V_0 ，虽然这对阶跃响应来说不是必要的。

因为电容的电压不能瞬时改变，所以：

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0 \quad (7.40)$$

其中， $v(0^-)$ 是在开关闭合之前电容器两端的电压， $v(0^+)$ 是开关闭合后的电压。应用 KCL，可得：

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s u(t)}{R} = 0$$

即

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s u(t)}{RC} \quad (7.41)$$

其中 v 是电容器两端的电压。当 $t > 0$ 时，式(7.41)可以写成：

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC} \quad (7.42)$$

重新整理可得：

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v - V_s}{RC}$$

即

$$\frac{dv}{v - V_s} = -\frac{dt}{RC} \quad (7.43)$$

两边积分，并加入初始条件，可得：

$$\ln(v - V_s) \Big|_{V_0}^{v(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

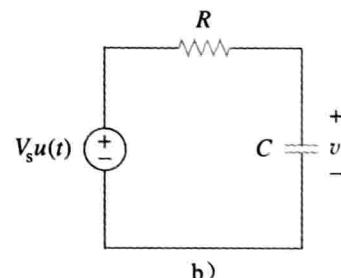
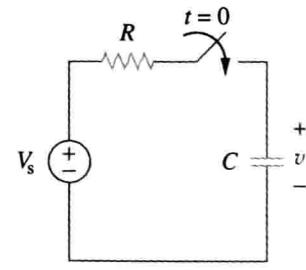


图 7-40 输入为电压阶跃的 RC 电路

$$\ln[v(t) - V_s] - \ln(V_0 - V_s) = -\frac{t}{RC} + 0$$

即

$$\ln \frac{v - V_s}{V_0 - V_s} = -\frac{t}{RC} \quad (7.44)$$

以指数形式表示为：

$$\begin{aligned}\frac{v - V_s}{V_0 - V_s} &= e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC \\ v - V_s &= (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}\end{aligned}$$

即

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, \quad t > 0 \quad (7.45)$$

因此：

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau}, & t > 0 \end{cases} \quad (7.46)$$

当 RC 电路突然加上一个直流电压源时，假设电容早已完成初始充电，此时称为完全响应 (complete response, 或全响应)。采用术语“完全”的原因将稍后讨论。假设 $V_s > V_0$ ， $v(t)$ 如图 7-41 所示。

如果假设电容器最初不带电，式 (7.46) 中，使 $V_0 = 0$ ，可得：

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_s(1 - e^{-t/\tau}), & t > 0 \end{cases} \quad (7.47)$$

也可转换为：

$$v(t) = V_s(1 - e^{-t/\tau})u(t) \quad (7.48)$$

这是一个完整的电容器最初不带电条件下的 RC 电路的阶跃响应。通过电容器的电流可由式 (7.47) 得到，即 $i(t) = Cdv/dt$ 因此：

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = \frac{C}{\tau} V_s e^{-t/\tau}, \quad \tau = RC, \quad t > 0$$

即

$$i(t) = \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau} u(t) \quad (7.49)$$

图 7-42 所示为电容上的电压 $v(t)$ 和通过电容的电流 $i(t)$ 。

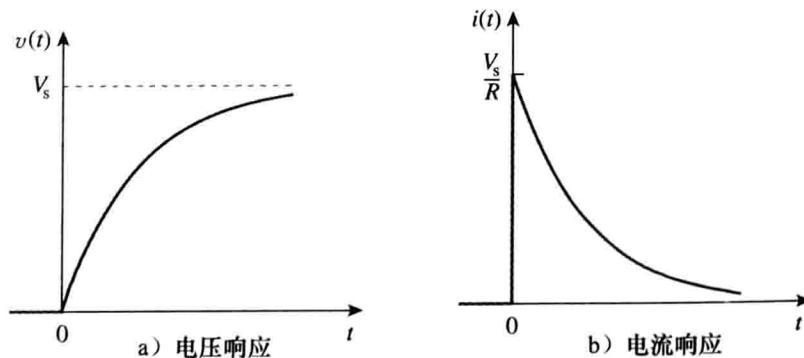


图 7-42 初始电容未充电的 RC 电路阶跃响应

除了上面的公式推导，还有一个系统化的方法，或者说更简便的方法，来求出 RC 或 RL 电路的阶跃响应。仔细观察式 (7.45)，它比式 (7.48) 更加一般化。显而易见的是， $v(t)$

由两部分组成，有两种经典方法可以分解这两部分。

第一种是把它拆分成“一个自由响应和一个强迫响应”，第二种是要把它拆分成“一个暂态响应和一个稳态响应”。用自由响应和强迫响应写出完全响应或全响应的公式：

$$\text{全响应} = \underset{\substack{\text{储存的能量} \\ \text{独立源}}}{\text{自由响应}} + \underset{\text{独立源}}{\text{强迫响应}}$$

即

$$v = v_n + v_f \quad (7.50)$$

其中：

$$v_n = V_0 e^{-t/\tau} \quad v_f = V_s (1 - e^{-t/\tau})$$

电路的自由响应 v_n 已经在第 7.2 节讨论过。 v_f 称为强迫(forced)响应，因为它是电路在受到外部“能量”(这里是电压源)的影响下而产生的。它代表了电路被输入激励迫使产生的响应，随着自由响应和强迫响应的暂态分量的消失，只留下强迫响应的稳定状态。

另一种方法是将全响应拆分成暂态响应和稳态响应两个部分即：

$$\text{全响应} = \underset{\substack{\text{暂时部分} \\ \text{瞬时部分}}}{\text{暂态响应}} + \underset{\text{永久部分}}{\text{稳态响应}}$$

即

$$v = v_t + v_{ss} \quad (7.51)$$

其中：

$$v_t = (V_0 - V_s) e^{-t/\tau} \quad (7.52a)$$

$$v_{ss} = V_s \quad (7.52b)$$

暂态响应(transient response) v_t 是暂时的，它是全响应中随着时间趋近无穷大而衰减至零的那部分。

暂态响应是电路的暂时响应，随着时间的推移会完全消失。

稳态响应(steady-state response) v_{ss} 是全响应中除去暂态响应后剩下的部分。

电路的稳态响应是施加外部激励很长一段时间后电路的响应。

全响应的第一部分是对电源的响应，而第二部分是响应的永久部分。在一定的条件下，自由响应和暂态响应是相同的。同理，强迫响应和稳态响应也是相同的。

无论采用哪种方法，式(7.45)中的全响应都可写成：

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] e^{-t/\tau} \quad (7.53)$$

提示：式(7.53)表明完整的响应是暂态响应和稳态响应的和。

其中， $v(0)$ 是 $t=0^+$ 时的初始电压， $v(\infty)$ 是最终稳态值。因此，求得一个 RC 电路的阶跃响应需要求出下列三个值：

1. 电容初始电压 $v(0)$ 。
2. 电容终值电压 $v(\infty)$ 。
3. 时间常数 τ 。

提示：一旦知道 $v(0)$ 、 $v(\infty)$ 和 τ ，就可以用公式 $x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)] e^{-t/\tau}$ 来计算该章节内几乎所有的电路问题。

根据给定的条件，可以求得当 $t < 0$ 时的第一项和当 $t > 0$ 时的第二和第三项。这些值一旦确定，就可以用式(7.53)来确定响应。在下一节将看到，这样的方法也适用于 RL 电路。

需要注意的是，如果开关闭换的时间不是在 $t=0$ 时刻，而是有一个时间延迟 $t=t_0$ ，那么响应就会有一个时间延迟，此时式(7.53)可写成：

$$v(t) = v(\infty) + [v(t_0) - v(\infty)] e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (7.54)$$

记住， $v(t_0)$ 是 $t=t_0^+$ 时的方程初始值，式(7.53)或式(7.54)仅适用于阶跃响应，即输入激励是恒定的。

例 7-10 如图 7-43 所示，开关在 A 位置时电路已达稳态，当 $t=0$ 时，开关拨到 B 位置，求当 $t>0$ 时的 $v(t)$ ，并计算当 $t=1\text{s}$ 和 4s 时的 $v(t)$ 。

解：当 $t<0$ 时，开关处于 A 位置，电容对于直流电源来说开路，但是电压 v 与 $5\text{k}\Omega$ 的电阻上电压一致。因此，在 $t=0$ 之前电容器两端的电压通过分压法可得：

$$v(0^-) = \frac{5}{5+3} \times 24 = 15(\text{V})$$

因为电容的电压不能瞬时变化，所以：

$$v(0) = v(0^-) = v(0^+) = 15(\text{V})$$

当 $t>0$ 时，开关处于 B 位置。与电容相连的戴维南等效电阻 $R_{\text{Th}}=4\text{k}\Omega$ ，时间常数是：

$$\tau = R_{\text{Th}}C = 4 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} = 2(\text{s})$$

由于电容在稳态状态时对于直流电源开路， $v(\infty)=30\text{V}$ ，因此：

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} = 30 + (15 - 30)e^{-t/2} = (30 - 15e^{-0.5t})\text{V}$$

当 $t=1$ 时，

$$v(1) = 30 - 15e^{-0.5} = 20.9(\text{V})$$

当 $t=4$ 时，

$$v(4) = 30 - 15e^{-2} = 27.97(\text{V})$$

练习 7-10 图 7-44 所示电路中，假设开关处于打开状态且电路已达稳态，当 $t=0$ 时开关闭合，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ ，并求当 $t=0.5$ 时的电压值。

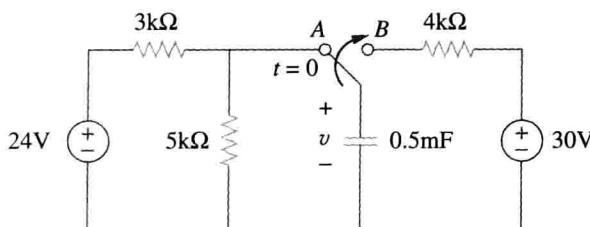


图 7-43 例 7-10 图

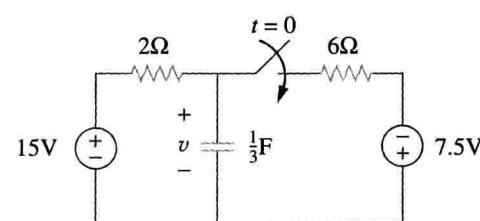


图 7-44 练习 7-10 图

答案： $(9.375 + 5.625e^{-2t})\text{V}$, $t>0.763\text{V}$

例 7-11 如图 7-45 所示，开关处于闭合状态且电路已达稳态， $t=0$ 时开关打开，求所有时刻的 i 和 v 。

解：在 $t=0$ 时通过电阻的电流 i 可以是不可连续的，而电容电压 v 必须连续。因此，先求得 v ，再通过 v 求得 i 。

按单位阶跃函数的定义，有

$$30u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 30, & t > 0 \end{cases}$$

当 $t<0$ 时，开关关闭，且 $30u(t)=0$ ，所以， $30u(t)$ 的电压源被短路，相当于对 v 没有任何贡献。开关长时间关闭，电路已达稳态，电容电压也已经达到稳态且电容可视为开路。因此，当 $t<0$ 时，电路如图 7-46a 所示，可得：

$$v = 10\text{V}, \quad i = -\frac{v}{10} = -1(\text{A})$$

由于电容的电压不能瞬时改变，所以：

$$v(0) = v(0^-) = 10\text{V}$$

当 $t>0$ 时，开关打开， 10V 的电压源从电路中断开。 $30u(t)$ 电压源开始起效，因此，电路

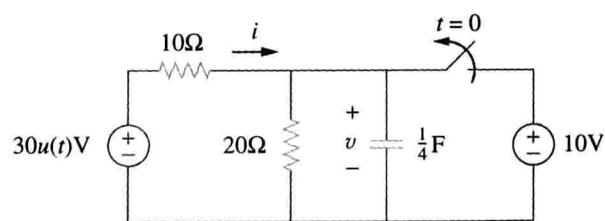


图 7-45 例 7-11 图

变成图 7-46b 所示。很长一段时间后，电路达到稳定状态且电容再次开路，通过分压法可得 $v(\infty)$ 为：

$$v(\infty) = \frac{20}{20+10} \times 30 = 20(V)$$

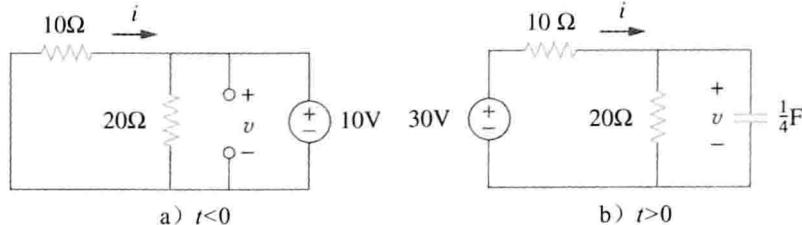


图 7-46 求解例 7-11

电容器两端的戴维南等效电阻是：

$$R_{Th} = 10 \parallel 20 = \frac{10 \times 20}{30} = \frac{20}{3}(\Omega)$$

时间常数为：

$$\tau = R_{Th}C = \frac{20}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{3}(s)$$

因此：

$$\begin{aligned} v(t) &= v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 20 + (10 - 20)e^{-(3/5)t} = (20 - 10e^{-0.6t})V \end{aligned}$$

为了得到 i ，从图 7-46b 中可以看出， i 是通过 20Ω 电阻和电容的电流的总和，即：

$$i = \frac{v}{20} + C \frac{dv}{dt} = 1 - 0.5e^{-0.6t} + 0.25(-0.6)(-10)e^{-0.6t} = (1 + e^{-0.6t})A$$

从图 7-46b 可知，满足 $v + 10i = 30$ ，因此：

$$\begin{aligned} v &= \begin{cases} 10V, & t < 0 \\ (20 - 10e^{-0.6t})V, & t \geq 0 \end{cases} \\ i &= \begin{cases} -1A, & t < 0 \\ (1 + e^{-0.6t})A, & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

注意，电容器的电压是连续的，而电阻器电流不是。

练习 7-11 如图 7-47 所示，当 $t=0$ 时开关打开，求所有时刻的 $i(t)$ 和 $v(t)$ 。注意，当 $t < 0$ 时， $u(-t) = 1$ ；当 $t > 0$ 时， $u(-t) = 0$ 。且 $u(-t) = 1 - u(t)$ 。

答案：

$$\begin{aligned} i(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -2(1 + e^{-1.5t})V, & t > 0 \end{cases} \\ v(t) &= \begin{cases} 20V, & t < 0 \\ 10(1 + e^{-1.5t})A, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

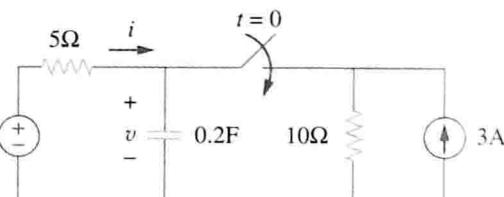


图 7-47 练习 7-11 图

7.6 RL 电路的阶跃响应

图 7-48a 所示的 RL 电路也可替换为图 7-48b 所示电路。为了求出通过电感的电流 i ，即电路的响应，采用式(7.53)在式(7.50)中的方法，而不应用基尔霍夫定律。令响应为暂态响应和稳态响应的和，可得：

$$i = i_t + i_{ss} \quad (7.55)$$

暂态响应始终是呈指数衰减的，即：

$$i_t = A e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (7.56)$$

其中 A 是一个常数。

图 7-48b 所示电路中，稳态响应的值是开关关闭且电路已达稳态时的电流值。暂态响应在 5 个时间常数后基本消失，之后电感变成短路，它两端的电压是零。整个电源电压加到电阻 R 上。因此，稳态响应 i_{ss} 为：

$$i_{ss} = \frac{V_s}{R} \quad (7.57)$$

将式(7.56)和式(7.57)代入式(7.55)中可得：

$$i = A e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R} \quad (7.58)$$

现在从初值 i 确定常数 A 的值。令 I_0 为通过电感器的初始电流，初值电流可从电源 V_s 以外可得。由于通过电感的电流不能瞬间改变，所以：

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0 \quad (7.59)$$

当 $t=0$ 时，式(7.58)变成：

$$I_0 = A + \frac{V_s}{R}$$

由此，可得 A 为：

$$A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

把 A 值代入式(7.58)可得：

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau} \quad (7.60)$$

这是 RL 电路的全响应，如图 7-49 中所示。图 7-49 初始电流为 I_0 的 RL 电路的全响应式(7.60)也可写为

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] e^{-t/\tau} \quad (7.61)$$

式中， $i(0)$ 和 $i(\infty)$ 分别是 i 的初始值和最终值。因此，要求得 RL 电路的阶跃响应需要求出下列三个值：

1. $t=0$ 时通过电感的初始电流 $i(0)$ 。
2. t 接近无穷大时通过电感的电流 $i(\infty)$ 。
3. 时间常数 τ 。

根据给定的条件，可以求得 $t < 0$ 时的第一项和 $t > 0$ 时的第二项和第三项。这些值一旦确定，就可以用式(7.61)来确定响应。注意，这种方法仅适用于阶跃响应。

同样，如果开关切换的时刻不是在 $t=0$ 时刻，而是有一个时间延迟 $t=t_0$ ，那么响应就会有一个时间延迟，此时式(7.61)可写成：

$$i(t) = i(\infty) + [i(t_0) - i(\infty)] e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (7.62)$$

如果 $I_0=0$ ，则：

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{V_s}{R}(1 - e^{-t/\tau}), & t > 0 \end{cases} \quad (7.63a)$$

即

$$i(t) = \frac{V_s}{R}(1 - e^{-t/\tau}) u(t) \quad (7.63b)$$

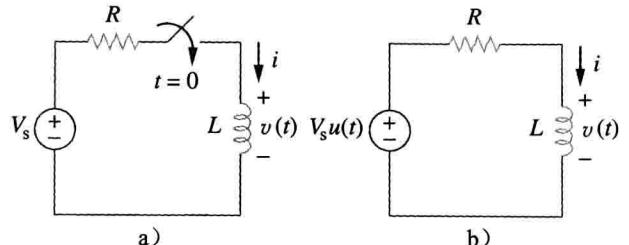


图 7-48 输入为阶跃电压的 RL 电路

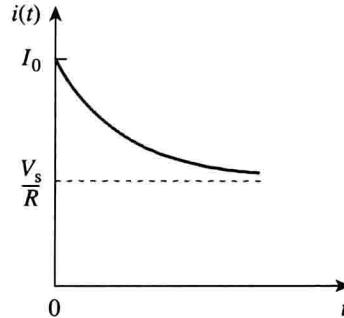


图 7-49 初始电流为 I_0 的 RL 电路的全响应

这是在没有初始电感电流的条件下的 RL 电路的阶跃响应。电感两端的电压由式(7.63)可得, 即 $v=Ldi/dt$, 因此:

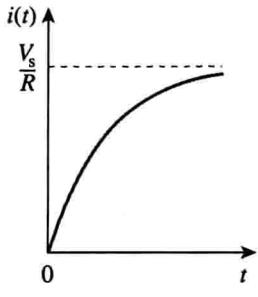
$$v(t)=L \frac{di}{dt}=v_s \frac{L}{\tau R} e^{-t/\tau}, \quad \tau=\frac{L}{R}, \quad t>0$$

即

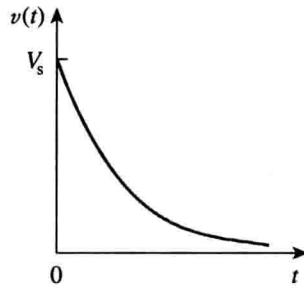
$$v(t)=V_s e^{-t/\tau} u(t) \quad (7.64)$$

图 7-50 表示式(7.63)和式(7.64)中的阶跃响应。

例 7-12 图 7-51 所示电路中, 假设开关关闭且电路已达稳态, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。



a) 电流响应



b) 电压响应

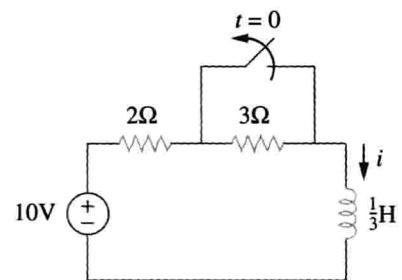


图 7-50 没有初始电感电流时 RL 电路的阶跃响应

图 7-51 例 7-12 图

解: 当 $t<0$ 时, 3Ω 的电阻被短路, 且电感短路。当 $t=0^-$ 时(仅在 $t=0$ 前一瞬间), 通过电感的电流是:

$$i(0^-)=\frac{10}{2}=5(\text{A})$$

由于电感的电流不能瞬时改变, 所以:

$$i(0)=i(0^+)=i(0^-)=5\text{A}$$

当 $t>0$ 时, 开关打开。 2Ω 和 3Ω 电阻是串联的, 所以:

$$i(\infty)=\frac{10}{2+3}=2(\text{A})$$

电感两端的戴维南等效电阻是:

$$R_{\text{Th}}=2+3=5(\Omega)$$

时间常数为:

$$\tau=\frac{L}{R_{\text{Th}}}=\frac{\frac{1}{3}}{5}=\frac{1}{15}(\text{s})$$

因此:

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] e^{-t/\tau} \\ &= 2 + (5 - 2) e^{-15t} = (2 + 3e^{-15t}) \text{A}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

在图 7-51 中, 当 $t>0$ 时, KVL 一定满足, 即:

$$10=5i+L \frac{di}{dt}$$

$$5i+L \frac{di}{dt}=[10+15e^{-15t}]+\left[\frac{1}{3} \times 3 \times (-15)e^{-15t}\right]=10$$

结果得到验证。

练习 7-12 图 7-52 中的开关关闭且电路已达稳态, $t=0$ 时开关打开, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

答案: $(4+2e^{-10t})\text{A}$, $t>0$

例 7-13 如图 7-53 所示, 当 $t=0$ 时开关 1 关闭, 开关 2 在 4s 后关闭, 求 $t>0$ 时的

$i(t)$, 并确定当 $t=2\text{s}$ 和 $t=5\text{s}$ 时 $i(t)$ 的值。

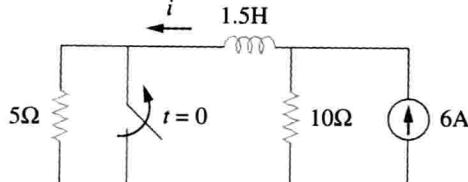


图 7-52 练习 7-12 图

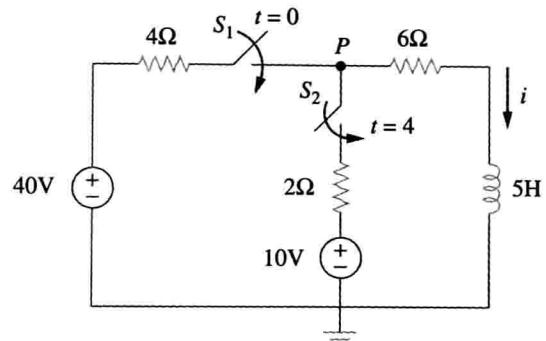


图 7-53 例 7-13 图

解：需要考虑三个时间区间： $t \leq 0$ 、 $0 \leq t \leq 4$ 和 $t \geq 4$ ，当 $t \leq 0$ 时，开关 S_1 和 S_2 处于打开状态，所以 $i=0$ 。由于电感电流不能瞬间改变，所以：

$$i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0$$

当 $0 \leq t \leq 4$ ， S_1 关闭，所以 4Ω 和 6Ω 是串联的（记住，此时 S_2 仍然是打开的）。因此，假设 S_1 永远关闭，则：

$$i(\infty) = \frac{40}{4+6} = 4(\text{A}), \quad R_{\text{Th}} = 4 + 6 = 10(\Omega)$$

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}(\text{s})$$

因此：

$$\begin{aligned} i(t) &= i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 4 + (0 - 4)e^{-2t} = 4(1 - e^{-2t})\text{A}, \quad 0 \leq t \leq 4 \end{aligned}$$

当 $t \geq 4$ 时， S_2 关闭， 10V 电压源连接到电路中。这个突然的变化不会影响电感电流，因为电感电流不能瞬时改变。因此，最初的电流是：

$$i(4) = i(4^-) = 4(1 - e^{-8}) \approx 4\text{A}$$

为求出 $i(\infty)$ ，将图 7-53 中点 P 处的电压设为 v ，由 KCL 方程可得：

$$\frac{40-v}{4} + \frac{10-v}{2} = \frac{v}{6} \Rightarrow v = \frac{180}{11}\text{V}$$

$$i(\infty) = \frac{v}{6} = \frac{30}{11} = 2.727(\text{A})$$

电感两端的戴维南等效电阻为：

$$R_{\text{Th}} = 4 \parallel 2 + 6 = \frac{4 \times 2}{6} + 6 = \frac{22}{3}(\Omega)$$

时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{Th}}} = \frac{5}{\frac{22}{3}} = \frac{15}{22}(\text{s})$$

因此：

$$i(t) = i(\infty) + [i(4) - i(\infty)]e^{-(t-4)/\tau}, \quad t \geq 4$$

由于有时间延迟，因此 e 的指数需为 $(t-4)$ ，得到：

$$\begin{aligned} i(t) &= 2.727 + (4 - 2.727)e^{-(t-4)/\tau}, \quad \tau = \frac{15}{22} \\ &= 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, \quad t \geq 4 \end{aligned}$$

综上可得：

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 4(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t \leq 4 \\ 2.727 + 1.273e^{-1.4667(t-4)}, & t \geq 4 \end{cases}$$

当 $t=2$ 时,

$$i(2) = 4(1 - e^{-4}) = 3.93(\text{A})$$

当 $t=5$ 时,

$$i(5) = 2.727 + 1.273e^{-1.4667} = 3.02(\text{A})$$

 练习 7-13 如图 7-54 所示, $t=0$ 时开关 S_1 关闭, $t=2\text{s}$ 时开关 S_2 关闭, 求所有时刻下的 $i(t)$, 并计算 $i(1)$ 和 $i(3)$ 。

答案:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2(1 - e^{-9t}), & 0 < t < 2 \\ 3.6 - 1.6e^{-5(t-2)}, & t > 2 \end{cases}$$

$$i(1) = 1.9997\text{A}, \quad i(3) = 3.589\text{A}$$

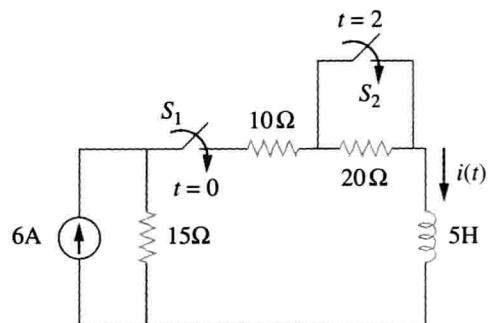


图 7-54 练习 7-13 图

† 7.7 一阶运算放大器电路

运算放大器电路包含一个具有一阶作用的存储单元, 6.6 节中的差分器和积分器是一阶运算放大电路的实例。同样, 由于现实的原因, 电感很难运用到运放电路中。因此, 本节考虑的运算放大器是 RC 类型的电路。

通常采用节点分析法来分析运算放大器电路, 有时, 戴维南等效电路可以降低运算放大器电路的复杂程度。下面的三个例子将会阐释这些概念, 第一个例子处理无源运算放大器电路, 而其他两个涉及阶跃响应。这三个精心挑选的例子涵盖了所有可能的 RC 类型的运算放大器电路。电路的类型取决于电容器的位置, 电容器可以放在输入、输出或反馈回路中。

例 7-14 图 7-55a 所示的运放电路中, $v(0)=3\text{V}$, $R_f=80\text{k}\Omega$, $R_1=20\text{k}\Omega$, $C=5\mu\text{F}$, 求 $t>0$ 时的 v_o 。

解: 该题有两种方法可解。

方法 1 如图 7-55a 所示电路, 利用节点分析法推导出相应的差分方程。假设点 1 处的电压为 v_1 , 则在此点应用 KCL 得:

$$\frac{0 - v_1}{R_1} = C \frac{dv}{dt} \quad (7.14.1)$$

由于节点 2 和节点 3 电位一定相同, 节点 2 处的电位是零。因此 $v_1 - 0 = v$ 或 $v_1 = v$, 式(7.14.1)可写成:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{CR_1} = 0 \quad (7.14.2)$$

此方程与式(7.4b)类似, 所以可以用 7.2 节中的方法来解决此问题。求解过程如下:

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_1 C \quad (7.14.3)$$

式中, V_0 是电容两端的初始电压。 $v(0)=3=V_0$ 且 $\tau=20 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6}=0.1$ 。所以:

$$v(t) = 3e^{-10t} \quad (7.14.4)$$

在节点 2 应用 KCL 可得:

$$C \frac{dv}{dt} = \frac{0 - v_o}{R_f}$$

即

$$v_o = -R_f C \frac{dv}{dt} \quad (7.14.5)$$

现在可求得 v_o 为：

$$v_o = -80 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} \times (-30e^{-10t}) = 12e^{-10t} \text{ (V)}, \quad t > 0$$

方法2 采用式(7.53)中的方法，需要求出 $v_o(0^+)$ 、 $v_o(\infty)$ 和 τ ，由于 $v_o(0^+) = v_o(0^-) = 3 \text{ V}$ ，在图 7-55b 中的节点 2 处应用 KCL，可得：

$$\frac{3}{20000} + \frac{0 - v_o(0^+)}{80000} = 0$$

或 $v_o(0^+) = 12 \text{ V}$ 。由于电路是无源的， $v(\infty) = 0 \text{ V}$ 。为了求 τ ，需要算出电容两端的等效电阻。假设将电容器移走，取而代之的是一个 1A 的电流源，如图 7-55c 所示，对输入回路应用 KVL 方程可得：

$$20000 \times 1 - v = 0 \Rightarrow v = 20 \text{ kV}$$

且

$$R_{eq} = \frac{v}{1} = 20 (\text{k}\Omega)$$

因为 $\tau = R_{eq}C = 0.1$ ，所以：

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_o(\infty) + [v_o(0) - v_o(\infty)]e^{-t/\tau} \\ &= 0 + (12 - 0)e^{-10t} = 12e^{-10t} \text{ (V)}, \quad t > 0 \end{aligned}$$

结果与方法1相同。

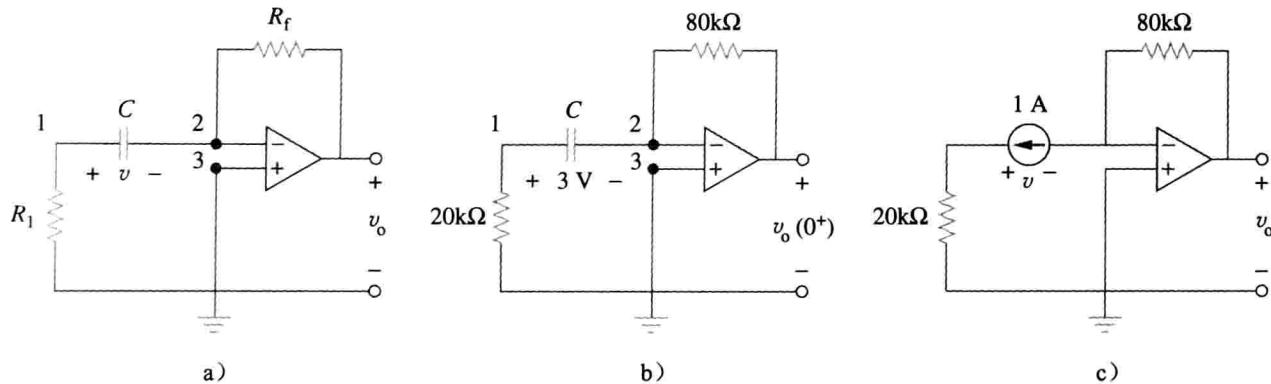


图 7-55 例 7-14 图

练习 7-14 图 7-56 所示的运放电路中，假设 $v(0) = 4 \text{ V}$ ， $R_f = 50 \text{ k}\Omega$ ， $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ， $C = 10 \mu\text{F}$ ，求 $t > 0$ 时的 v_o 。

答案： $-4e^{-2t} \text{ V}$, $t > 0$

例 7-15 图 7-57 所示电路中，求 $v(t)$ 和 $v_o(t)$

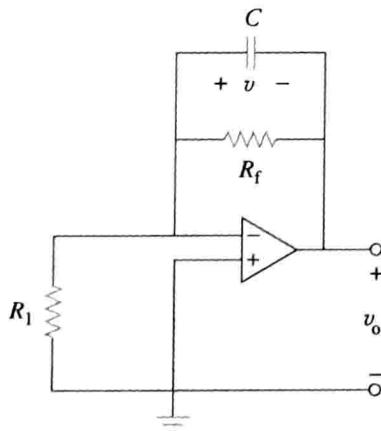


图 7-56 练习 7-14 图

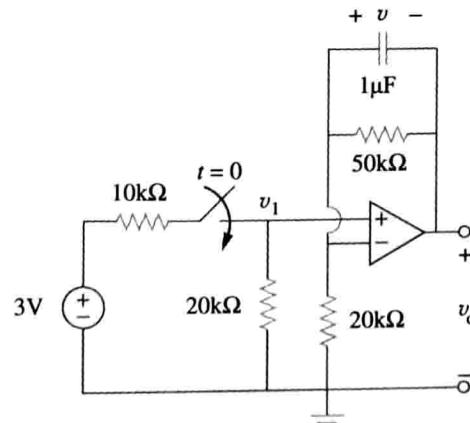


图 7-57 例 7-15 图

解：这个问题有两种方法可以解决，就像例 7-14 一样。然而这里只用第二种方法。由于需要解决的是阶跃响应，可以将式(7.53)写成：

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau} \quad t > 0 \quad (7.15.1)$$

其中，只需要求出时间常数 τ 、初始值 $v(0)$ 和的最终值 $v(\infty)$ 。因为输入为阶跃信号，所以电压直接作用到电容上。因为没有电流进入到运算放大器的输入端，所以运算放大器的反馈回路构成一个 RC 电路，其时间常数为：

$$\tau = RC = 50 \times 10^3 \times 10^{-6} = 0.05(s) \quad (7.15.2)$$

当 $t < 0$ 时，开关打开，电容两端没有电压。因此 $v(0) = 0$ 。当 $t > 0$ 时，节点 1 处的电压由分压法可得：

$$v_1 = \frac{20}{20+10} \times 3 = 2(V) \quad (7.15.3)$$

因为在输入回路中没有存储元件，所以 v_1 对于所有的 t 保持不变。在稳定状态下，电容开路，所以这个运算放大器电路是同相放大器。从而：

$$v_o(\infty) = \left(1 + \frac{50}{20}\right)v_1 = 3.5 \times 2 = 7(V) \quad (7.15.4)$$

但是：

$$v_1 - v_o = v \quad (7.15.5)$$

所以：

$$v(\infty) = 2 - 7 = -5(V)$$

将 τ 、 $v(0)$ 和 $v(\infty)$ 带入式(7.15.1)可得：

$$v(t) = -5 + [0 - (-5)]e^{-20t} = 5(e^{-20t} - 1)V, \quad t > 0 \quad (7.15.6)$$

从式(7.15.3)、式(7.15.5)和式(7.15.6)中可得：

$$v_o(t) = v_1(t) - v(t) = (7 - 5e^{-20t})V, \quad t > 0 \quad (7.15.7) \blacktriangleleft$$

练习 7-15 图 7-58 所示运算放大器电路中，求 $v(t)$ 和 $v_o(t)$ 。

答案：(注意，当 $t < 0$ 时，因为输入端一直为 0V，所以电容上的电压和输出电压全都等于 0V) $40(1 - e^{-10t})u(t)mV, 40(e^{-10t} - 1)u(t)mV$

例 7-16 图 7-59 所示运放电路中， $v_i = 2u(t)V$ ， $R_1 = 20k\Omega$ ， $R_f = 50k\Omega$ ， $R_2 = R_3 = 10k\Omega$ ， $C = 2\mu F$ 。求 $t > 0$ 时的响应 $v_o(t)$ 。

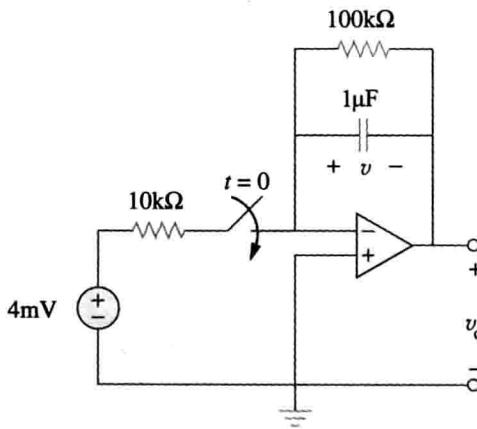


图 7-58 练习 7-15 图

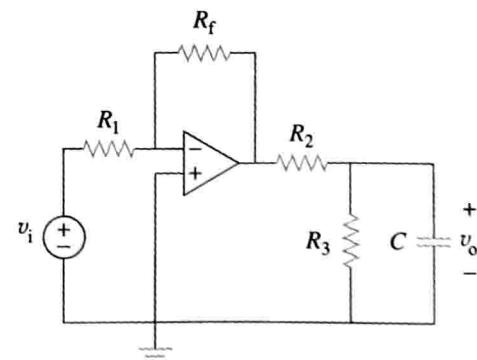


图 7-59 例 7-16 图

解：注意，例 7-14 中的电容器位于输入回路中，例 7-15 中的电容器位于反馈回路中。而在这个例子中，电容器位于运算放大器的输出端。同样，可以直接使用节点分析法解决这个问题。使用戴维南等效电路还可以简化该问题。

暂时移除电容并求出其两端的戴维南等效电阻。为了获得 V_{Th} ，由图 7-60a 中的电路

可知，该电路是一个反相放大器，有：

$$V_{ab} = -\frac{R_f}{R_1}v_i$$

由分压法可得：

$$V_{Th} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{ab} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_f}{R_1} v_i$$

为了求出 R_{Th} ，考虑图 7-60b 所示电路，这里的 R_o 是运算放大器的输出电阻。假设运算放大器是理想的， $R_o = 0$ ，且：

$$R_{Th} = R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

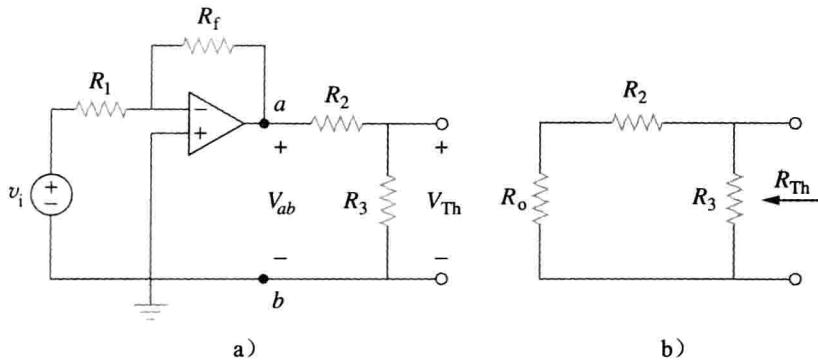


图 7-60 求解图 7-59 中电容两端的 V_{Th} 和 R_{Th}

将给定的数值代入，得到：

$$V_{Th} = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{R_f}{R_1} v_i = -\frac{10}{20} \times \frac{50}{20} \times 2u(t) = -2.5u(t)$$

$$R_{Th} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5(\text{k}\Omega)$$

图 7-61 所示的戴维南等效电路与图 7-40 类似。因此，解决方案与式(7.48)类似：

$$v_o(t) = -2.5(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

其中， $\tau = R_{Th}C = 5 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} = 0.01$ ，因此 $t > 0$ 时的阶跃响应为：

$$v_o(t) = 2.5(e^{-100t} - 1)u(t)\text{V}$$

练习 7-16 图 7-62 中， $v_i = 4.5u(t)\text{V}$ ， $R_1 = 20\text{k}\Omega$ ， $R_f = 40\text{k}\Omega$ ， $R_2 = R_3 = 10\text{k}\Omega$ ， $C = 2\mu\text{F}$ ，求阶跃响应 $v_o(t)$ 。
答案： $13.5(1 - e^{-50t})u(t)\text{V}$

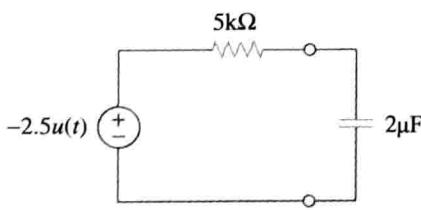


图 7-61 图 7-59 的戴维南等效电路

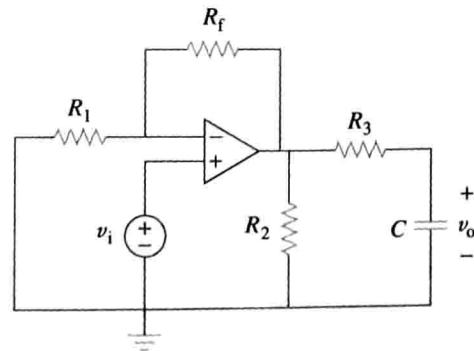


图 7-62 练习 7-16 图

7.8 基于 PSpice 的暂态分析

正如 7.5 节中讨论的那样，电路临时的暂态响应会很快消失。PSpice 可用于获得有存

储元件的电路的暂态响应。

必要时可首先进行直流电路仿真程序的分析，以确定初始条件。然后在暂态电路仿真程序中使用初始条件来得到暂态响应。在直流分析中，推荐(非必须)做法是，所有的电容应该开路，而所有的电感器应该短路。

提示： PSpice 中“暂态”的意思是“时间的函数”，因此，在 PSpice 中的暂态响应可能不会如预期一样消失。

例 7-17 在图 7-63 中，使用 PSpice 求出 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

答案：令 $i(0)=0$, $i(\infty)=2A$, $R_{Th}=6$, $\tau=3/6=0.5s$, 所以:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau} = 2(1 - e^{-2t}), \quad t > 0$$

要使用 PSpice 仿真，首先应当绘制如图 7-64 所示的原理图。闭合的开关部分名称为闭合开关。并不需要指定电感的初始条件，因为电路仿真程序将从电路中确定初始条件。通过选择 Analysis/Setup/Transient，设置 Print Step(打印步长)25ms, Final Step(终止时间)为 $5\tau=2.5s$ 。保存电路后，选择 Analysis/Simulate 来仿真电路。在 A/D 窗口中，选择跟踪/添加(Trace/Add)并显示通过电感器的电流 $-I(L1)$ 。图 7-65 所示为 $i(t)$ ，与人工计算的结果是一致的。

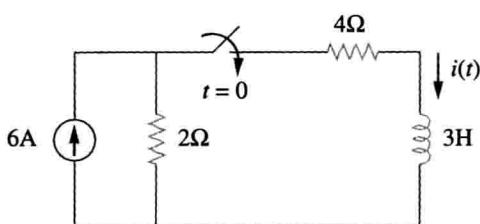


图 7-63 例 7-17 图

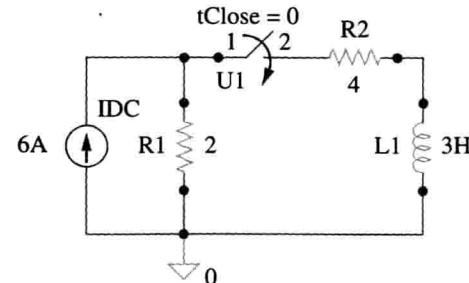


图 7-64 图 7-63 的仿真原理图

注意， $I(L1)$ 上的负符号是必需的，因为电流进入并通过电感的上端，而这恰好是一个逆时针旋转后的负端。避免负号产生的方法是，确保该电流进入电感器的 1 脚。为了获得所需的正电流方向，最初水平的电感器符号应该逆时针旋转 270° 并放置在所需的位置。

练习 7-17 对于图 7-66 的电路，利用 PSpice 求出 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

答案： $v(t)=8(1-e^{-t})V$, $t > 0$ 。响应与图 7-65 近似

例 7-18 在图 7-67 的电路中，求响应 $v(t)$ 。

解： 1. 明确问题。问题非常清楚，电路中各物理量也已明确标注。

2. 列出已知条件。考虑图 7-67a 所示的电路，确定响应 $v(t)$ 。

3. 确定备选方案。可以采用电路分析技术，如节点分析、网孔分析或 PSpice 分析来求解这个电路。在此，首先使用电路分析技术(这时解决的问题是等效电路)解决问题，然后使用 PSpice 检查答案。

4. 尝试求解。 $t < 0$ 时，左边的开关打开，右边的开关关闭。假设右边的开关已经被关闭了足够长的时

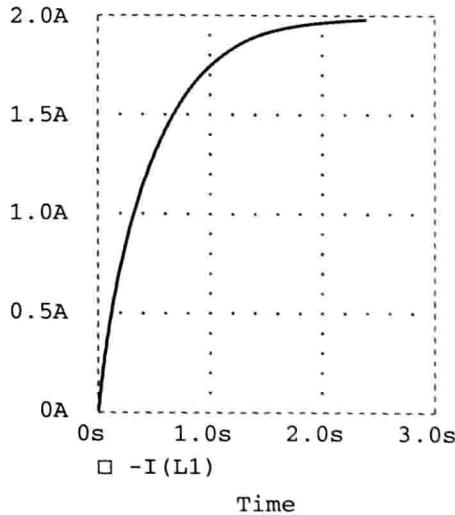


图 7-65 图 7-63 的电路响应

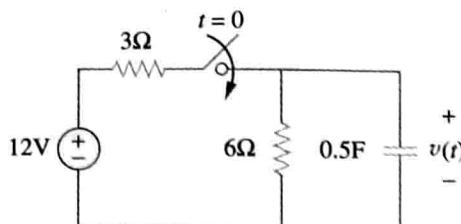


图 7-66 练习 7-17 图

间来使电路达到稳定状态。电容相当于开路，电流从4A电流源流经 6Ω 和 3Ω 电阻的并联电路组合($6 \parallel 3 = 18/9 = 2$)，产生的电压等于 $2 \times 4 = 8V = -v(0)$ 。

在 $t=0$ 时，左边开关闭合，右边开关打开，产生的电路如7-67b所示。

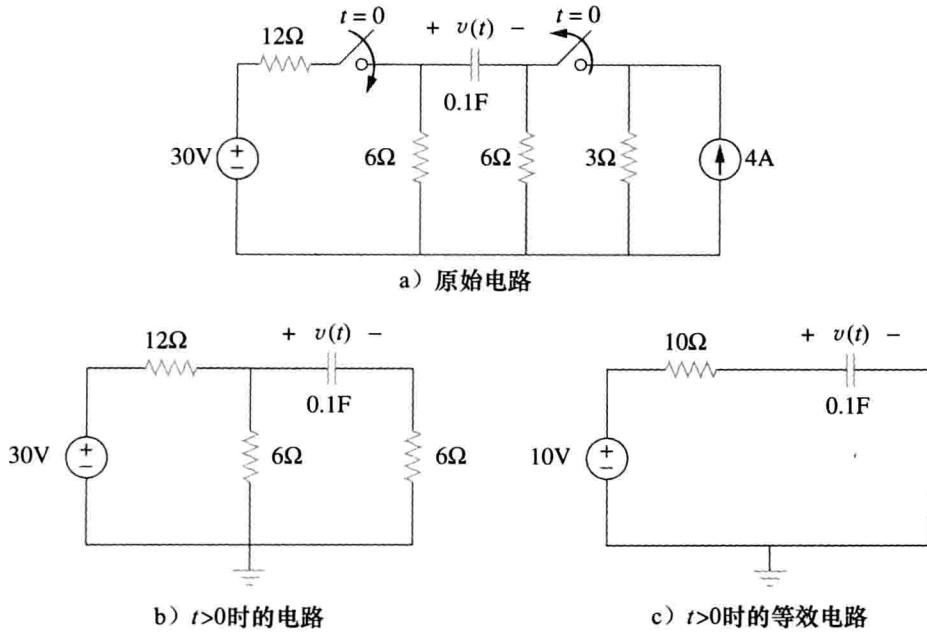


图 7-67 例 7-18 图

完成的解决方案最简单的方式是求出电容两端的等效电路。开路电压(电容器移除)等于左边 6Ω 电阻器的电压降，即 $10V$ (电压在 12Ω 电阻上的电压降为 $20V$ ，在 6Ω 电阻上的电压降为 $10V$)。这个电压就是 V_{Th} 。在电容两端看到的电阻等于 $12 \parallel 6 + 6 = 72/18 + 6 = 10\Omega$ ，即 R_{eq} 。由此得到图7-67c的等效电路。匹配边界值($v(0) = -8V$ 和 $v(\infty) = 10V$)和 $\tau = RC = 1$ ，得到：

$$v(t) = (10 - 18e^{-t})V$$

5. 评价结果。利用 PSpice 验证结果，方法有以下两种。

方法 1 首先进行 PSpice 直流分析，确定电容器的初始电压，电路原理图如图 7-68 所示。加入两个伪元件 VIEWPOINT 测量节点 1 和 2 的电压。仿真电路得到 $V1=0V$ 和 $V2=8V$ ，如图 7-68a 所示。因此，电容器的初始电压是 $v(0) = V1 - V2 = -8V$ ，在图 7-68b 所示的暂态分析中将使用该值。图 7-68b 绘制完成后，设置电容的初始电压为 $IC = -8$ 。选择 Analysis/Setup/Transient，设置 Print Step 为 $0.1s$ ，Final Step 为 $4\tau = 4s$ 。保存电路后，选择 Analysis/Simulate 仿真电路。在 A/D 窗口中，选择 Trace/Add 并显示 $V(R2:2) - V(R3:2)$ 或 $V(C1:1) - V(C1:2)$ 作为电容电压 $v(t)$ 。 $v(t)$ 的波形如图 7-69 所示，这与手动计算得到的结果是一致的。

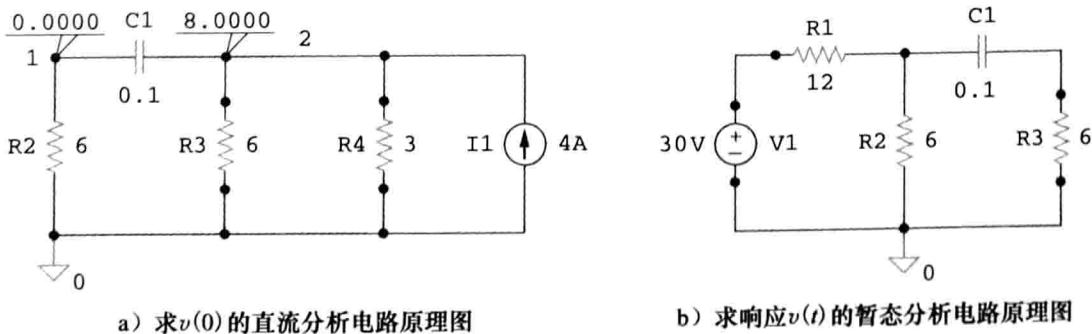


图 7-68 求解原理图

方法 2 直接利用图 7-67 进行仿真，因为 PSpice 可以处理打开和关闭的开关，并自动确定初始条件。方法 2 的电路原理图为图 7-70。电路绘制完成后，选择 Analysis/Setup/Transient，设置 Print Step 为 0.1s，Final Step 为 $4\tau=4s$ 。保存电路，然后选择 Analysis/Simulate 仿真电路。在 A/D 窗口中，选择 Trace/Add 并显示 $V(R2:2)-V(R3:2)$ 作为电容电压 $v(t)$ 。

$v(t)$ 的波形如图 7-69 所示。

6. 是否满意？我们已经求出了输出响应 $v(t)$ ，并验证了结果的准确性，可以将其作为完整的解决方案提交了。

练习 7-18 图 7-71 的开关开了很长一段时间，但是在 $t=0$ 时关闭。如果 $i(0)=10A$ ，通过手工计算和 PSpice 求出 $t=0$ 时的 $i(t)$ 。

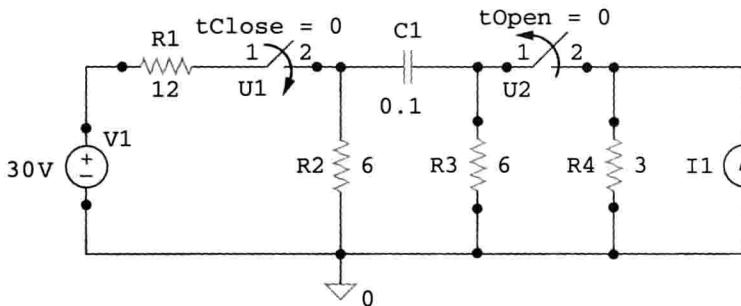


图 7-70 例 7-18 图

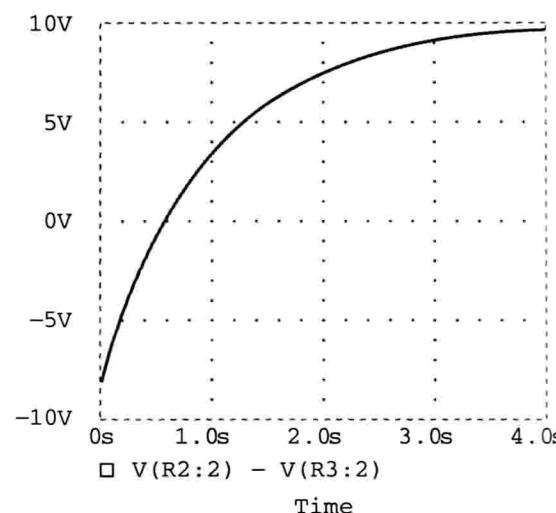


图 7-69 图 7-67 的响应 $v(t)$

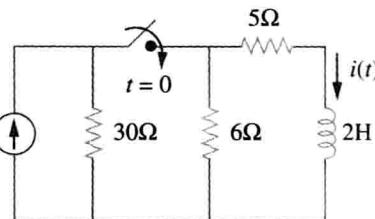


图 7-71 练习 7-18 图

答案： $i(t)=6+4e^{-5t}$ (A)。 $i(t)$ 的波形可以通过 PSpice 分析得出，如图 7-72 所示

†7.9 应用实例

RC 和 RL 电路的应用十分广泛，包括直流电源中的滤波、数字电信中的平滑电路、微分器、积分器、延迟电路和继电器电路。其中的一些应用利用 RC 或 RL 电路的时间常数。本节将讨论四个简单的应用程序系统，前两个是 RC 电路，后两个是 RL 电路。

7.9.1 延迟电路

RC 电路可以提供不同的时间延迟，图 7-73 所示电路中包含一个 RC 电路以及一个与电容并联的氖光灯。电压源可以提供足够的电压来点亮灯泡。当开关关闭时，电容器电压逐渐增加至 $110V$ ，增加速率由电路时间常数 $(R_1+R_2)C$ 确定。灯泡将处于开路且不发光，直到它两端的电压超过一个特定值，例如 $70V$ 的电压。当电压达到特定值时，灯泡亮起，并且电容通过灯泡放电。由于灯亮时灯泡的电阻低，电容电压下降较快，灯泡将再次开路且电容重新充电。通过调整 R_2 ，可以得到不同的延迟时间，并且使灯以时间常数 $\tau=(R_1+R_2)C$ 反复地点亮、充电、点亮。其中，需要一个时间段 τ 来使电容器的电压足够高以点亮或者足够低以关闭灯泡。

建立在道路施工现场的警告灯就是 RC 延迟电路的一个实例。

例 7-19 思考图 7-73 中的电路图，假设 $R_1=1.5M\Omega$ ， $0 < R_2 < 2.5M\Omega$ 。(a) 计算电路

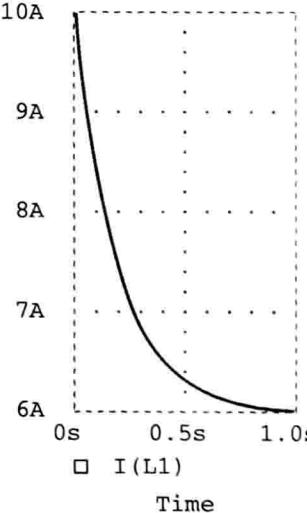


图 7-72 练习 7-18 图

中时间常数的最小值和最大值；(b)在开关关闭后，灯第一次发光需要多长时间？假设 R_2 取最大值。

解：(a) R_2 的最小值是 0Ω ，电路相应的时间常数是：

$$\tau = (R_1 + R_2)C = (1.5 \times 10^6 + 0) \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.15(\text{s})$$

R_2 的最大值是 $2.5\text{M}\Omega$ ，电路相应的时间常数是：

$$\tau = (R_1 + R_2)C = (1.5 + 2.5) \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-6} = 0.4(\text{s})$$

因此，通过适当的电路设计，可以合理地调整电路的延迟时间。

(b) 假设电容器最初是不带电荷的， $v_C(0)=0$ ， $v_C(\infty)=110$ ，得到：

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 110(1 - e^{-t/\tau})$$

在(a)部分中已计算出 $T=0.4\text{s}$ 。当 $v_C=70\text{V}$ 时灯亮。如果在 $t=t_0$ 时， $v_C(t)=70\text{V}$ ，那么：

$$70 = 110(1 - e^{-t_0/\tau}) \Rightarrow \frac{7}{11} = 1 - e^{-t_0/\tau}$$

即

$$e^{-t_0/\tau} = \frac{4}{11} \Rightarrow e^{t_0/\tau} = \frac{11}{4}$$

两边都取自然对数，得：

$$t_0 = \tau \ln \frac{11}{4} = 0.4 \ln 2.75 = 0.4046(\text{s})$$

一个更普遍的 t_0 表达式是：

$$t_0 = \tau \ln \frac{-v(\infty)}{v(t_0) - v(\infty)}$$

当且仅当 $v(t_0) < v(\infty)$ ，每隔 t_0 秒灯会点亮。

练习 7-19 图 7-74 的 RC 电路用来操作一个警铃，当通过它的电流超过 $120\mu\text{A}$ 时警铃启动。如果 $0 \leq R \leq 6\text{k}\Omega$ ，求可变电阻器产生的时间延迟范围。

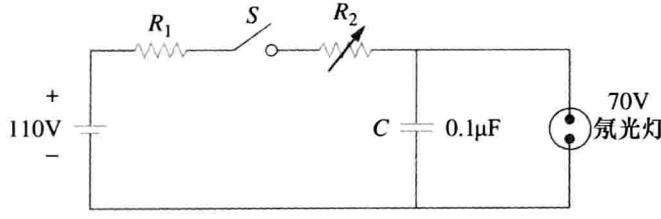


图 7-73 RC 延迟电路

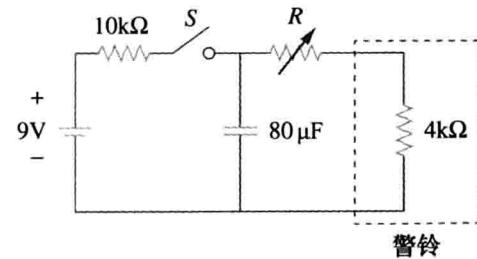


图 7-74 练习 7-19 图

答案： $47.23\text{ms} \leq \tau \leq 124\text{ms}$

7.9.2 闪光灯单元

电子闪光单元是 RC 电路的一个常见例子。此应用利用了电容器的性质，即不允许发生任何突然的电压变化。图 7-75 所示为一个简化的电路，它由一个高电压的直流电源、一个限制电流的低电阻和一个电容 C 组成，电容 C 与低电阻 R_2 并联。当开关处于位置 1 时，随着大的时间常数 ($\tau_1 = R_1 C$) 电容器慢慢充电。如图 7-76a 所示，电容器中的电压从零逐渐上升到 V_s ，而它的电流从 $I_1 = V_s/R_1$ 逐渐减小到零。充电时间大约为时间常数的 5 倍，即：

$$t_{\text{charge}} = 5R_1 C$$

$$(7.65)$$

开关移至位置 2 后，电容器放电。闪光灯的低电阻

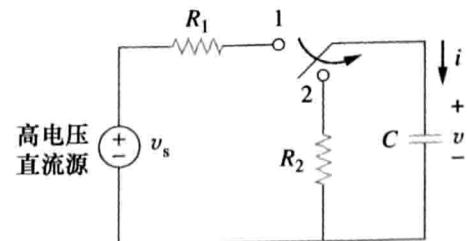


图 7-75 闪光单元电路，在位置 1 时缓慢充电，在位置 2 时迅速放电

R_2 在一段短时间内允许存在高放电电流，这个电流的峰值为 $I_2 = V_s/R_2$ ，如图 7-76b 所示。

放电时间大约为时间常数的 5 倍，即：

$$t_{\text{discharge}} = 5R_2C \quad (7.66)$$

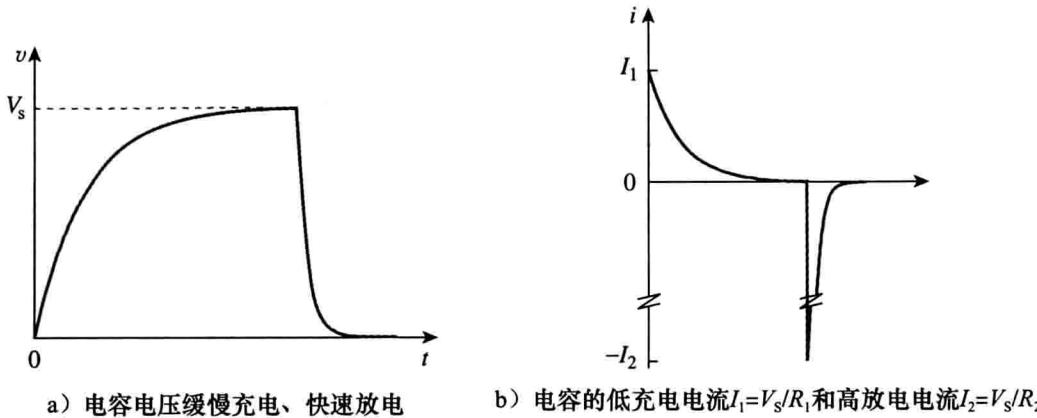


图 7-76 电容的电压、电流变化

因此，图 7-75 中的简单 RC 电路提供了一个持续时间短的大电流脉冲。这样的电路也可以应用于电动式点焊接装置和雷达发射管。

例 7-20 一种电子闪光灯具有一个 $6\text{k}\Omega$ 的限流电阻和 $2000\mu\text{F}$ 的电解电容，电容充电至 240V 。如果灯的电阻是 12Ω ，求：(a)充电电流的峰值；(b)电容完全充满电所需要的时间；(c)放电电流的峰值；(d)储存在电容器中的总能量；(e)灯所耗散的平均功率。

解：(a) 充电电流的峰值是：

$$I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{240}{6 \times 10^3} = 40(\text{mA})$$

(b) 由式(7.65)可得

$$t_{\text{charge}} = 5R_1C = 5 \times 6 \times 10^3 \times 2000 \times 10^{-6} = 60(\text{s}) = 1(\text{min})$$

(c) 放电电流的峰值是：

$$I_2 = \frac{V_s}{R_2} = \frac{240}{12} = 20(\text{A})$$

(d) 储存的能量为：

$$W = \frac{1}{2}CV_s^2 = \frac{1}{2} \times 2000 \times 10^{-6} \times 240^2 = 57.6(\text{J})$$

(e) 在放电期间，通过灯泡消耗储存在电容器中的能量，由公式(7.66)可得：

$$t_{\text{discharge}} = 5R_2C = 5 \times 12 \times 2000 \times 10^{-6} = 0.12(\text{s})$$

因此，平均功耗为：

$$P = \frac{W}{t_{\text{discharge}}} = \frac{57.6}{0.12} = 480(\text{W})$$

练习 7-20 相机的闪光灯有一个 2mF 电容器且充电至 80V 。求：(a) 电容上存放的电量；(b) 在电容器中储存的能量是多少？(c) 如果闪光灯闪光 0.8ms ，通过闪光灯的平均电流是多少？(d) 有多少能量传递到闪光灯？(e) 拍摄照片后，电容需要由一个最大值为 5mA 的能量单元重新充电，对电容器充电需要多少时间？

答案：(a) 0.16C ；(b) 6.4J ；(c) 200A ；(d) 8kW ；(e) 32s

7.9.3 继电器电路

磁力控制开关称为继电器(relay)。继电器是基本的电磁装置，用来打开或关闭开关，

该开关常用于控制另一电路。图 7-77a 是一个典型的继电器电路。线圈电路是一个 RL 电路，如图 7-77b 所示，其中 R 和 L 是线圈的电阻和电感。当图 7-77a 中的开关关闭时，线圈电路通电。线圈中的电流逐渐增大，并产生一个磁场。最终，电磁场达到足够强度来拉动另一个电路中的可动触点，并关闭开关 S_2 。就这点来说，继电器的作用为吸合(pulled in)。在开关 S_1 和 S_2 关闭之间的时间间隔 t_d 称为继电器的延迟时间(relay time)。

继电器被用在早期的数字电路中，并且仍然用于转换高功率电路。

例 7-21 某继电器的线圈由一个 12V 的电池供电。如果该线圈具有 150Ω 的电阻、 30mH 的电感，并且所需电流为 50mA ，计算继电器的延时时间。

解：通过线圈的电流为：

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

其中：

$$i(0) = 0, \quad i(\infty) = \frac{12}{150} = 80(\text{mA})$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30 \times 10^{-3}}{150} = 0.2(\text{ms})$$

因此：

$$i(t) = 80(1 - e^{-t/\tau})\text{mA}$$

如果 $i(t_d) = 50\text{mA}$ ，那么：

$$50 = 80(1 - e^{-t_d/\tau}) \Rightarrow \frac{5}{8} = 1 - e^{-t_d/\tau}$$

即

$$e^{-t_d/\tau} = \frac{3}{8} \Rightarrow e^{t_d/\tau} = \frac{8}{3}$$

通过求出公式两边的自然对数，可以得到：

$$t_d = \tau \ln \frac{8}{3} = 0.2 \ln \frac{8}{3} \text{ms} = 0.1962 \text{ms}$$

此外，也可以用以下公式求 t_d ：

$$t_d = \tau \ln \frac{i(0) - i(\infty)}{i(t_d) - i(\infty)}$$

练习 7-21 一个继电器包含 200Ω 的电阻和 500mH 的电感，通过线圈的电流达到 350mA 时，继电器触点闭合。在 110V 电压下，求触点闭合的时间间隔。

答案： 2.529ms

7.9.4 汽车点火电路

电感器抵抗电流快速变化的能力使其有助于电弧或电火花的产生。汽车点火系统利用的就是这个特点。

汽油发动机的启动需要每个气缸的混合燃料在适当的时间里被点燃，这是由火花塞装置来实现的（见图 7-78），它的基本构成是由一个由空气间隙隔开的电极对。通过在电极之间施加一个大的电压（几千伏），形成横跨空气的间隙电火花，

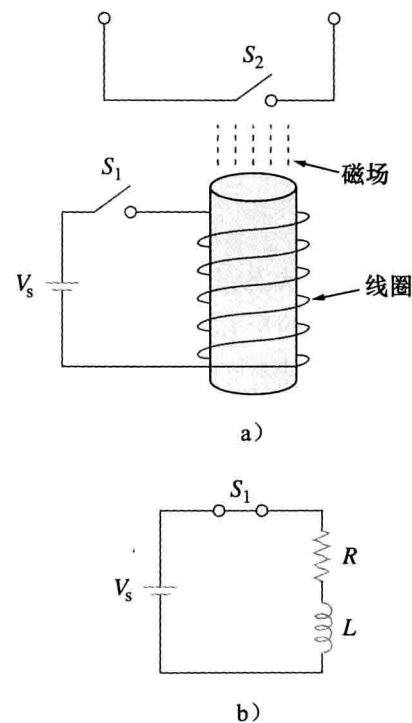


图 7-77 继电器电路

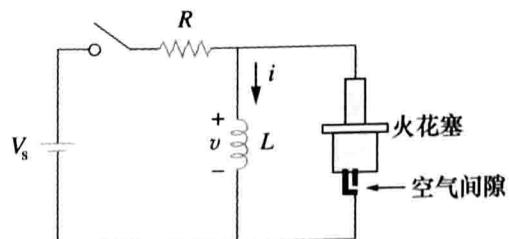


图 7-78 汽车点火系统电路

从而点燃燃料。但是，如何才能在仅能提供 12V 电压的汽车电池里获得如此大的电压呢？这由电感器(点火线圈)L 来实现。由于电感两端的电压是 $v=Ldi/dt$ ，因此可以在非常短的时间内产生巨大变化的工作电流。当点火开关切换到关闭状态时，通过电感器的电流增加并逐渐达到 $i=V_s/R$ 的最终值，此处 $V_s=12V$ 。另外，电感器充电所花费的时间是电路的时间常数($\tau=L/R$)的 5 倍。

$$t_{\text{charge}} = 5 \frac{L}{R} \quad (7.67)$$

在稳定状态下， i 是常数， $di/dt=0$ ，感应电压 $v=0$ 。当开关突然打开时，电感两端产生一个大的电压(由于磁场迅速崩溃)，在空气间隙引起火花或电弧中。火花一直继续，直到电感器储存的能量在火花放电中耗散。在实验室中操作感性电路时，同样的效果会致人休克，必须谨慎操作。

例 7-22 4Ω 电阻和 6mH 的电感用于同图 7-78 相似的汽车点火电路中。如果电池为 12V，确定：当开关关闭时，通过线圈的最终电流；储存在线圈中的能量和空气间隙两端的电压。假设开关打开需要 1ms 的时间。

解：通过线圈的最终电流为：

$$I = \frac{V_s}{R} = \frac{12}{4} = 3(\text{A})$$

存储在线圈中的能量为：

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-3} \times 3^2 = 27(\text{mJ})$$

空气间隙两端的电压为：

$$V = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 6 \times 10^{-3} \times \frac{3}{1 \times 10^{-6}} = 18(\text{kV})$$

 **练习 7-22** 汽车自动点火系统的点火线圈具有一个 20mH 电感和一个 5Ω 电阻。当电源电压为 12V 时，计算：线圈充满电所需的时间，储存在线圈中的能量，以及开关打开需 $2\mu\text{s}$ 的情况下火花间隙的电压。

答案：20ms, 57.6mJ, 24kV

7.10 本章小结

1. 本章的分析适用于任何可以等效为一个电阻和一个单一的储能元件(电感或电容)的电路。这样的电路是一阶电路，因为它的行为可以用一阶差分方程表述。分析 RC 和 RL 电路时，必须记住这一点：在稳态直流条件下，电容开路而电感短路。
2. 没有独立电源时，电路表现出的是自由响应。它的一般表达式为：

$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$

其中， x 代表电阻器、电容器或电感器上的电流(或电压)， $x(0)$ 是 x 的初始值。因为实际的电阻器、电容器和电感器总是有损耗的，所以自由响应是一个瞬变的响应，即它会随着时间的推移而消失。

3. 时间常数 τ 是电路响应衰减到初始值的 $1/e$ 所需要的时间。对于 RC 电路， $\tau=RC$ ；对于 RL 电路， $\tau=L/R$ 。
4. 奇异函数包括单位阶跃、单位冲激和单位斜坡函数。单位阶跃函数 $u(t)$ 的表达式为：

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

单位冲激函数的表达式为：

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{未定义}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

单位斜坡函数的表达式为：

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

5. 稳态响应是在独立源已作用很长时间之后的电路的行为。暂态响应是完全响应的一部分，它会随着时间的推移而消失。
6. 完全响应由稳态响应和暂态响应组成。
7. 阶跃响应是电路对突然施加的直流电流或电压的响应。求解一阶电路的阶跃响应需要初值 $x(0^+)$ 、终值 $x(\infty)$ 和时间常数 τ 。有了这三个量，便可以得到的阶跃响应的表达式：

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

这个方程更普遍的形式是：

$$x(t) = x(\infty) + [x(t_0^+) - x(\infty)]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

或者也可以写成：

$$\text{瞬时值} = \text{终值} + [\text{初值} - \text{终值}]e^{-(t-t_0)/\tau}$$

8. PSpice 对于获得电路的暂态响应是非常有用的。
9. RC 和 RL 电路的四个实际的应用是：延迟电路、闪光灯单元、继电器电路和汽车点火电路。

复习题

1 在 RC 电路中， $R=2\Omega$, $C=4F$, 求时间常数。

- (a) 0.5s (b) 2s (c) 4s
(d) 8s (e) 15s

2 在 RL 电路中， $R=2\Omega$, $L=4H$, 求时间常数。

- (a) 0.5s (b) 2s (c) 4s
(d) 8s (e) 15s

3 在 RC 电路中， $R=2\Omega$, $C=4F$, 求电容电压降到稳态值的 63.2% 时所需时间。

- (a) 2s (b) 4s (c) 8s
(d) 16s (e) 上述都不是

4 在 RL 电路中， $R=2\Omega$, $L=4H$, 求电感电流降到稳态值的 40% 时所需时间。

- (a) 0.5s (b) 1s (c) 2s
(d) 4s (e) 上述都不是

5 图 7-79 所示电路中，在 $t=0$ 之前的电容电压为：

- (a) 10V (b) 7V (c) 6V
(d) 4V (e) 0V

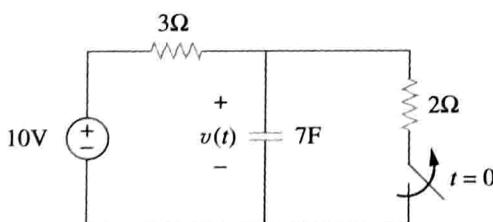


图 7-79 复习题 5 图

6 图 7-79 所示电路中， $v(\infty)$ 等于：

- (a) 10V (b) 7V (c) 6V
(d) 4V (e) 0V

7 图 7-80 所示电路中，在 $t=0$ 之前的电感电流等于：

- (a) 8A (b) 6A (c) 4A
(d) 2A (e) 0A

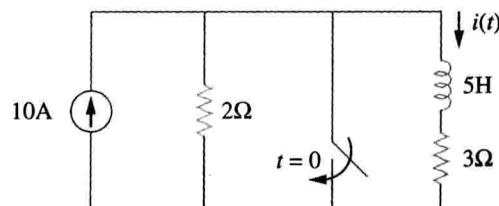


图 7-80 复习题 7、8 图

8 图 7-80 所示电路中， $i(\infty)$ 等于：

- (a) 10A (b) 6A (c) 4A
(d) 2A (e) 0A

9 如果 v_s 在 $t=0$ 时由 2V 变成 4V，则可以将 v_s 表示成：

- (a) $\delta(t)V$ (b) $2u(t)V$ (c) $2u(-t)+4u(t)V$
(d) $2+2u(t)V$ (e) $4u(t)-2V$

10 图 7-116a 所示的脉冲可由奇偶函数表示为：

- (a) $2u(t)+2u(t-1)V$
(b) $2u(t)-2u(t-1)V$
(c) $2u(t)-4u(t-1)V$

$$(d) 2u(t) + 4u(t-1)V$$

答案: 1(d); 2(b); 3(c); 4(b); 5(d);

习题

7.2 节

- 1 图 7-81 所示电路中: $v(t) = 56e^{-200t}V, t > 0$; $i(t) = 8e^{-200t}mA, t > 0$ 。(a)求 R 和 C ; (b)求时间常数 τ ; (c)求从 $t=0$ 开始电压减小到其初始值的一半时所需要的时间。

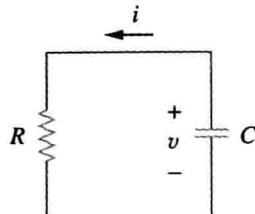


图 7-81 习题 1 图

- 2 求图 7-82 所示 RC 电路的时间常数。

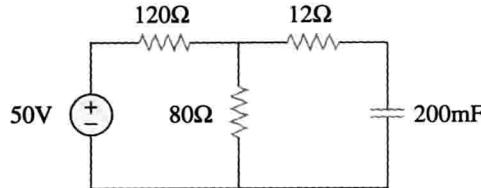


图 7-82 习题 2 图

- 3 求图 7-83 所示电路的时间常数。

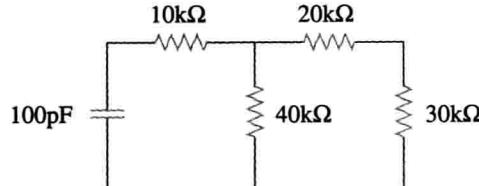


图 7-83 习题 3 图

- 4 图 7-84 中, 开关在 A 位置时电路已达稳态, 假设在 $t=0$ 时开关从 A 位置切换到 B 位置。当 $t>0$ 时, 求 v 。

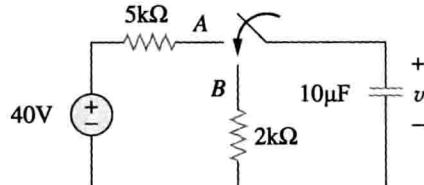


图 7-84 习题 4 图

- 5 利用图 7-85 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解无源 RC 电路。

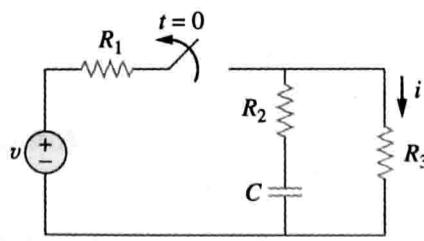


图 7-85 习题 5 图

$$6(a); 7(c); 8(e); 9(c, d); 10(b)$$

- 6 图 7-86 中, 开关处于关闭状态且电路已达稳态, $t=0$ 时开关关闭。求 $t \geq 0$ 时的 $v(t)$ 。

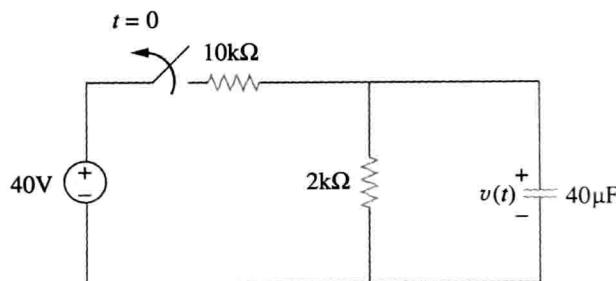


图 7-86 习题 6 图

- 7 在图 7-87 中, 假设开关在 A 位置时电路已达稳态, $t=0$ 时开关切换到 B 位置, $t=1s$ 时开关由 B 切换到 C, 求 $t \geq 0$ 时的 $v_C(t)$ 。

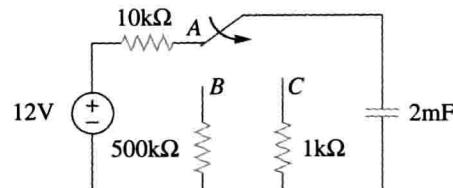


图 7-87 习题 7 图

- 8 图 7-88 所示电路中, 如果当 $t>0$ 时, $v=10e^{-4t}V$, $i=0.2e^{-4t}A$ 。(a)求 R 和 C ; (b)求时间常数; (c)求电容的初始能量; (d)求储存的能量降到初始值的 50% 时所需的时间。

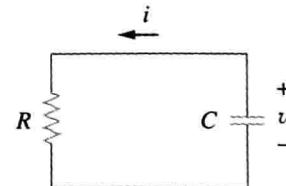


图 7-88 习题 8 图

- 9 在图 7-89 中, 开关在 $t=0$ 时打开, 求 $t>0$ 时的 v_o 。

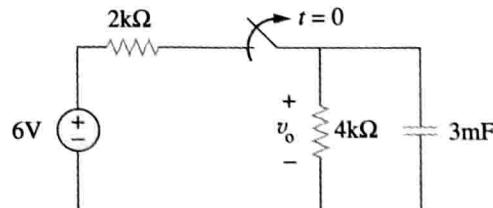


图 7-89 习题 9 图

- 10 在图 7-90 中, 求 $t>0$ 时的 τ , 以及电容电压从 $t=0$ 开始降到其初始值的 $1/3$ 时所需的时间。

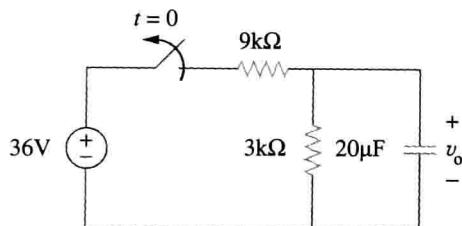


图 7-90 习题 10 图

11 在图 7-91 中, 求 $t > 0$ 时的 i_o 。

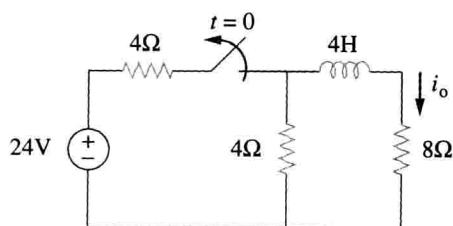


图 7-91 习题 11 图

12 利用图 7-92 设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解无源 RL 电路。
ED

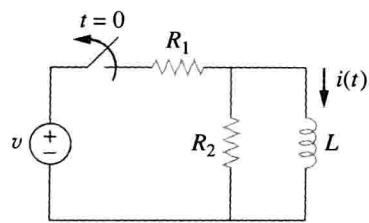


图 7-92 习题 12 图

13 图 7-93 所示电路中:

$$v(t) = 80e^{-10^3 t} \text{ V}, \quad t > 0;$$

$$i(t) = 5e^{-10^3 t} \text{ A}, \quad t > 0$$

(a)求 R 、 L 和 τ ; (b)求 $0 < t < 0.5 \text{ ms}$ 时电阻上消耗的能量。

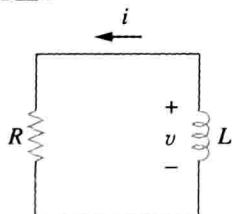


图 7-93 习题 13 图

14 求图 7-94 所示电路的时间常数。

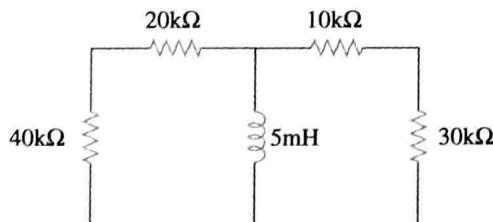


图 7-94 习题 14 图

15 求图 7-95 所示的各个电路中的时间常数。

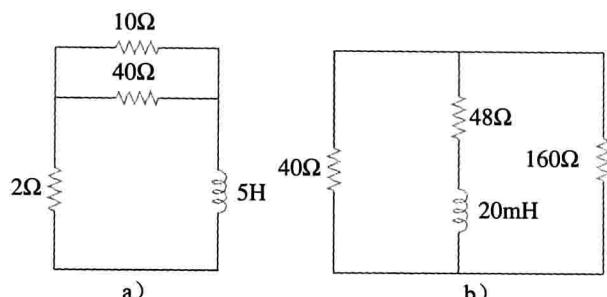


图 7-95 习题 15 图

16 求图 7-96 所示的各个电路中的时间常数。

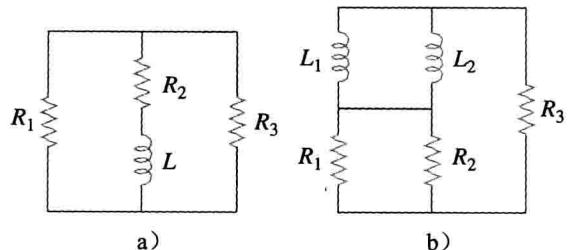


图 7-96 习题 16 图

17 图 7-97 所示电路中, 若 $i(0) = 6 \text{ A}$ 且 $v(t) = 0$, 求 $v_o(t)$ 。

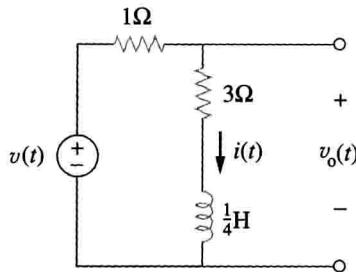


图 7-97 习题 17 图

18 图 7-98 所示电路中, 若 $i(0) = 5 \text{ A}$ 且 $v(t) = 0$, 求 $v_o(t)$ 。

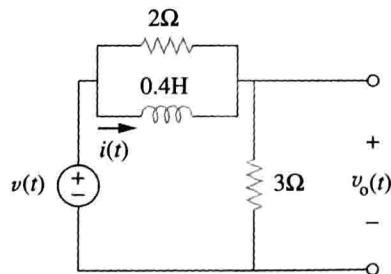


图 7-98 习题 18 图

19 图 7-99 所示电路中, 若 $i(0) = 6 \text{ A}$, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

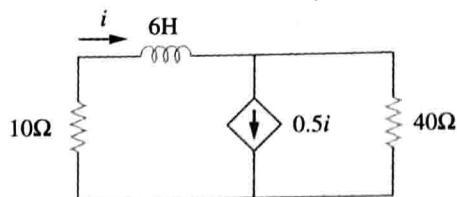


图 7-99 习题 19 图

- 20 图 7-100 所示电路中, $v = 90e^{-50t}$ V 且 $t > 0$ 时
 $i = 30e^{-50t}$ A。(a)求 L 和 R ; (b)求时间常数;
(c)在 10ms 内初始能量减少多少。

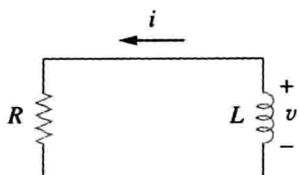


图 7-100 习题 20 图

- 21 图 7-101 所示电路中, 当电容储存的稳态能量是 1J 时, 求 R 的值。
ED

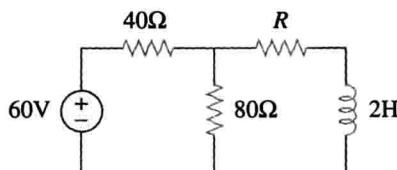


图 7-101 习题 21 图

- 22 图 7-102 所示电路中, 假设 $i(0) = 10A$, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 和 $v(t)$ 。

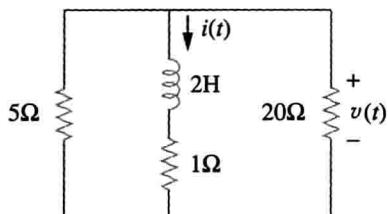


图 7-102 习题 22 图

- 23 图 7-103 所示电路中, $v_o(0) = 10V$, 求 $t > 0$ 时的 v_o 和 v_x 。

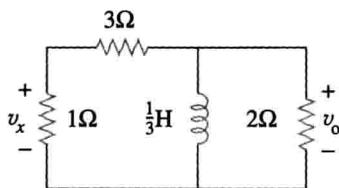


图 7-103 习题 23 图

7.4 节

- 24 用奇异函数来表达下列的信号。

$$(a) v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -5, & t > 0 \end{cases}$$

$$(b) i(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -10, & 1 < t < 3 \\ 10, & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

$$(c) x(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 4-t, & 3 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(d) y(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ -5, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

- 25 设计一个问题帮助其他同学能更好地理解奇偶函数。
ED

- 26 用奇异函数表示图 7-104 所示信号。

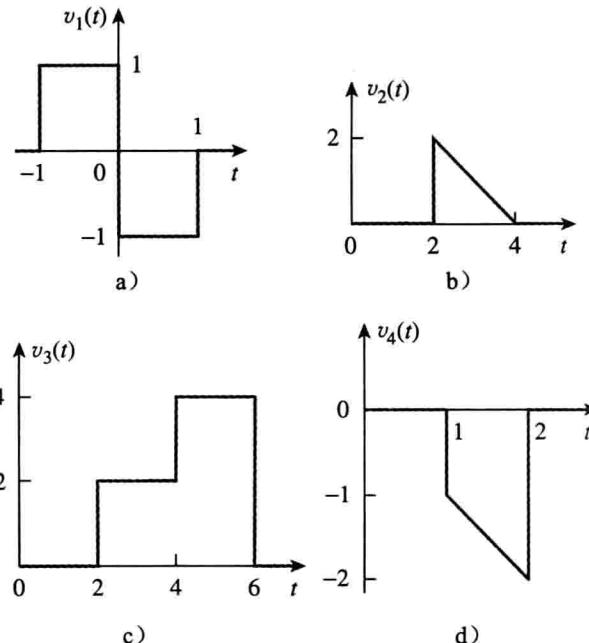


图 7-104 习题 26 图

- 27 用阶跃函数表示出图 7-105 所示的 $v(t)$ 。

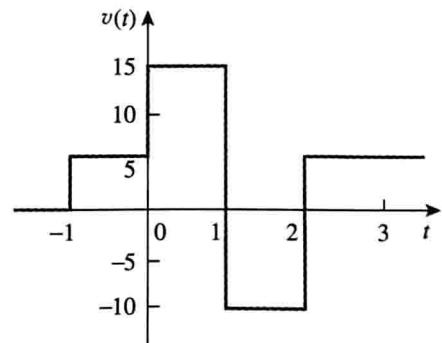


图 7-105 习题 27 图

- 28 画出下列式子代表的波形:

$$i(t) = r(t) - r(t-1) - u(t-2) - r(t-2) + r(t-3) + u(t-4)$$

- 29 画出下列函数: (a) $x(t) = 10e^{-t}u(t-1)$; (b) $y(t) = 10e^{-(t-1)}u(t)$; (c) $z(t) = \cos 4t\delta(t-1)$ 。

- 30 计算下列脉冲函数的积分:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} 4t^2 \delta(t-1) dt$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} 4t^2 \cos 2\pi t \delta(t-0.5) dt$$

- 31 计算下列积分:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2} \delta(t-2) dt$$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} [5\delta(t) + e^{-t}\delta(t) + \cos 2\pi t \delta(t)] dt$

32 计算下列积分:

(a) $\int_1^t u(\lambda) d\lambda$ (b) $\int_0^4 r(t-1) dt$

(c) $\int_1^5 (t-6)^2 \delta(t-2) dt$

33 10mH 电感上的电压为 $15\delta(t-2)$ mV, 假设电感初始未充电, 求电感电流。

34 计算下列微分:

(a) $\frac{d}{dt} [u(t-1)u(t+1)]$

(b) $\frac{d}{dt} [r(t-6)u(t-2)]$

(c) $\frac{d}{dt} [\sin 4tu(t-3)]$

35 计算下列等式:

(a) $\frac{dv}{dt} + 2v = 0, v(0) = -1$ V

(b) $2 \frac{di}{dt} - 3i = 0, i(0) = 2$

36 参照初始条件, 求下列式子中的 v :

(a) $dv/dt + v = u(t), v(0) = 0$

(b) $2dv/dt - v = 3u(t), v(0) = -6$

37 电路的描述如下:

$$4 \frac{dv}{dt} + v = 10$$

(a) 求电路的时间常数; (b) 求 v 的最终值 $v(\infty)$; (c) 如果 $v(0) = 2$, 求 $t \geq 0$ 时的 $v(t)$ 。

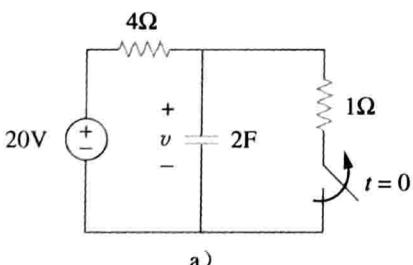
38 电路的描述如下:

$$\frac{di}{dt} + 3i = 2u(t)$$

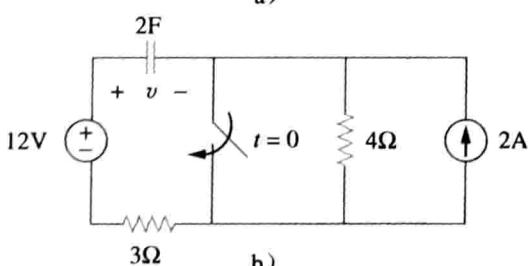
如果 $i(0) = 0$, 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

7.5 节

39 图 7-106 所示的电路中, 求每个电路 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的电容电压。



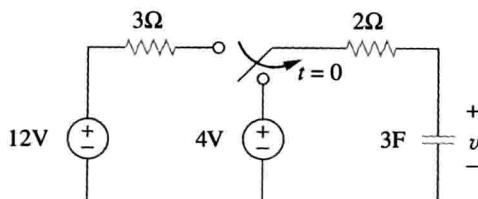
a)



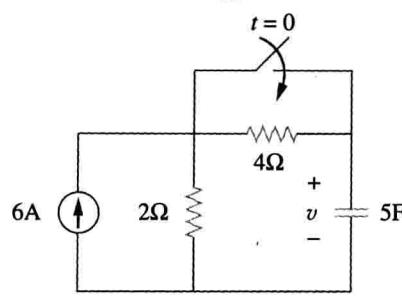
b)

图 7-106 习题 39 图

40 图 7-107 所示的电路中, 求每个电路 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的电容电压。



a)



b)

图 7-107 习题 40 图

41 利用图 7-108 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解 RC 电路的阶跃响应。 ED

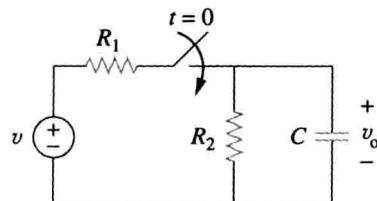


图 7-108 习题 41 图

42 (a) 在图 7-109 中, 开关处于打开状态且电路已达稳态, 当 $t = 0$ 时开关关闭, 求 $v_o(t)$;
(b) 开关处于关闭状态且电路已达稳态, 当 $t = 0$ 时开关打开, 求 $v_o(t)$ 。

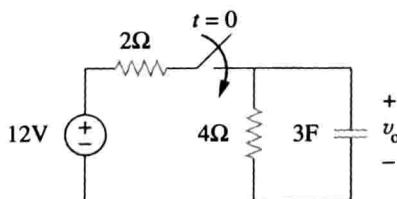


图 7-109 习题 42 图

43 图 7-110 所示电路中, 求 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

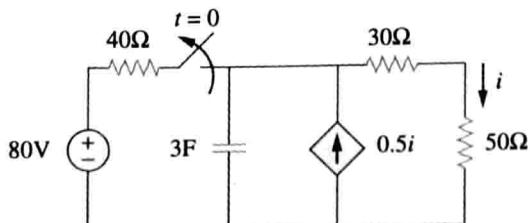


图 7-110 习题 43 图

44 图 7-111 所示电路中, 开关处于 a 位置且电路

已达稳态，当 $t=0$ 时，开关切换到 b 位置，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

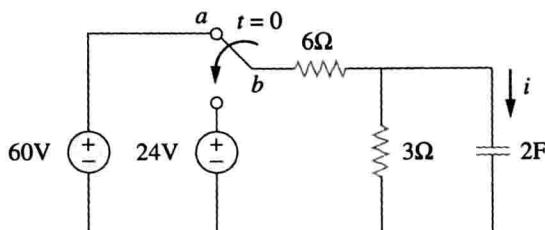


图 7-111 习题 44 图

- 45 图 7-112 所示电路中， $v_s = 30u(t)$ ，假设 $v_o(0) = 5V$ ，求 v_o 。

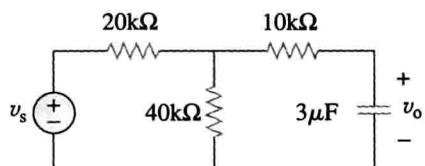


图 7-112 习题 45 图

- 46 图 7-113 所示电路中， $i_s(t) = 5u(t)$ ，求 $v(t)$ 。

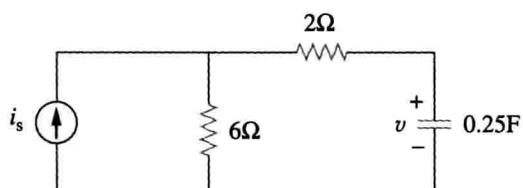


图 7-113 习题 46 图

- 47 图 7-114 所示电路中，如果 $v(0) = 0$ ，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

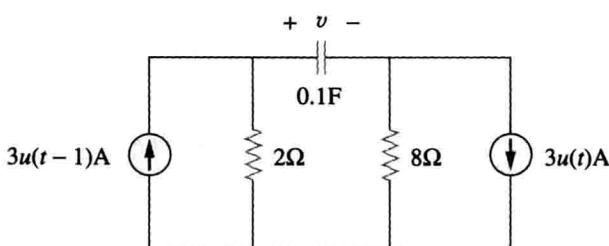


图 7-114 习题 47 图

- 48 图 7-115 所示电路中，求 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

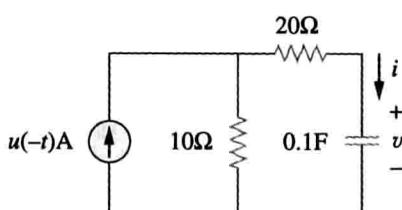
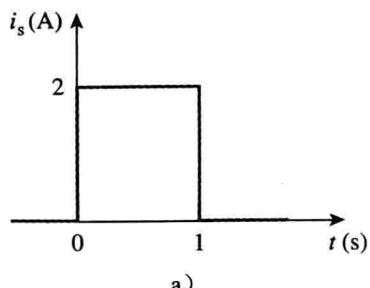


图 7-115 习题 48 图

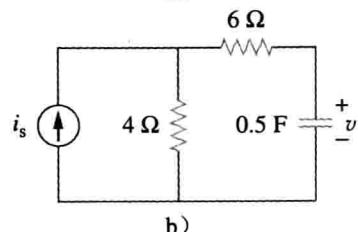
- 49 图 7-116a 所示波形对应图 7-116b 所示电路，假设 $v(0) = 0$ ，求 $v(t)$ 。

- * 50 图 7-117 所示电路中，如果 $R_1 = R_2 = 1k\Omega$ ， $R_3 = 2k\Omega$ ， $C = 0.125mF$ ，当 $t>0$ 时，求 i_x 。
- 51 在 7.6 节中，用 KVL 而不是用短路方法来求

式(7.60)。



a)



b)

图 7-116 习题 49 图

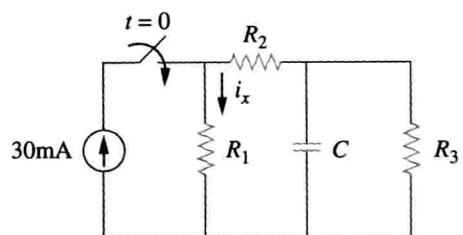


图 7-117 习题 50 图

- 52 利用图 7-118 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解 RL 电路的阶跃响应。 **ED**

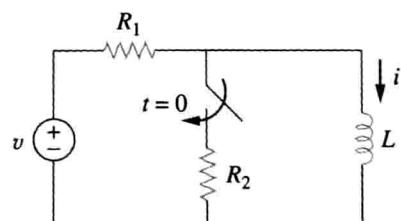
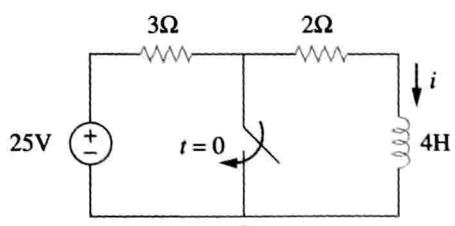
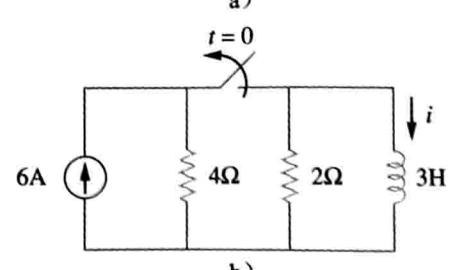


图 7-118 习题 52 图

- 53 图 7-119 中，求每个电路在 $t<0$ 和 $t>0$ 时的电感电流 $i(t)$ 。



a)



b)

图 7-119 习题 53 图

- 54 图 7-120 中, 求每个电路在 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的电感电流。

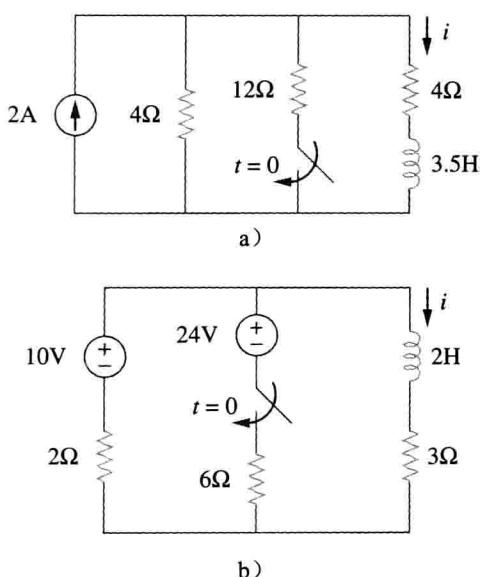


图 7-120 习题 54 图

- 55 图 7-121 所示电路中, 求当 $t < 0$ 和 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

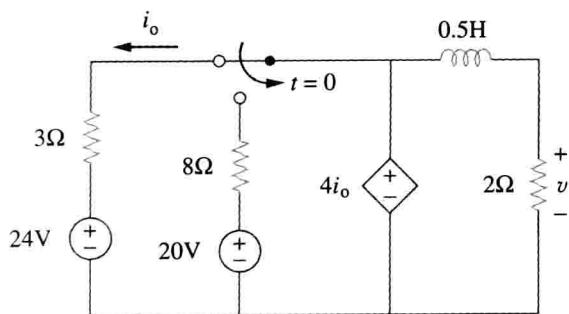


图 7-121 习题 55 图

- 56 图 7-122 所示网络中, 求当 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

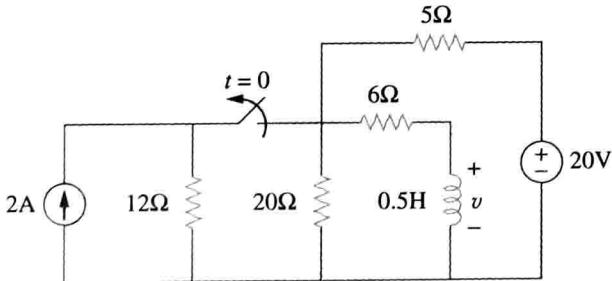


图 7-122 习题 56 图

- 57 图 7-123 所示电路中, 求 $t > 0$ 时的 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$ 。

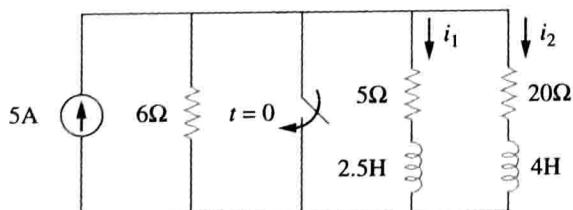


图 7-123 习题 57 图

- 58 在习题 7.17 中, 若 $i(0) = 10A$ 且 $v(t) = 20u(t)V$, 重做该题。

- 59 图 7-124 中, 若 $u_s = 18u(t)$, 求阶跃响应 $v_o(t)$ 。

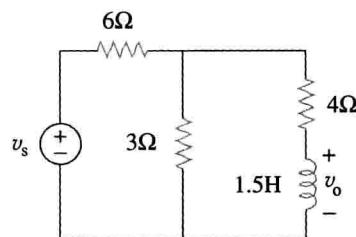


图 7-124 习题 59 图

- 60 图 7-125 中所示电路中, 如果电感初始电流为零, 求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

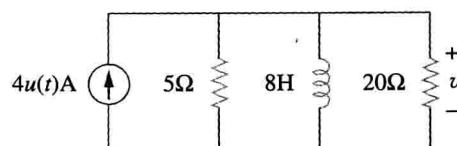


图 7-125 习题 60 图

- 61 图 7-126 所示电路中, 当 $t=0$ 时, i_s 从 5A 变化到 10A, 即 $i_s = 5u(-t) + 10u(t)$, 求 v 和 i 。

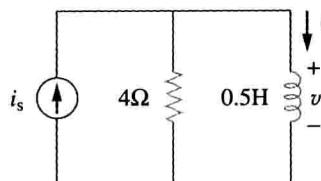


图 7-126 习题 61 图

- 62 图 7-127 所示电路中, 如果 $i(0)=0$, 求 $i(t)$ 。

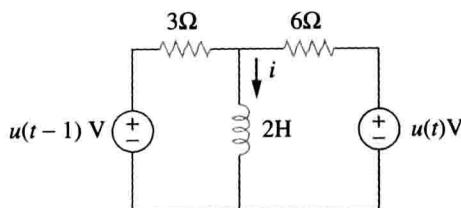


图 7-127 习题 62 图

- 63 图 7-128 中所示电路中, 求 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

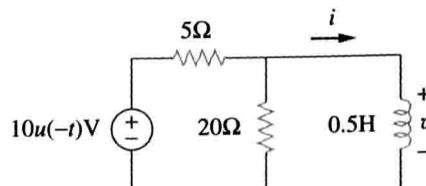


图 7-128 习题 63 图

- 64 图 7-129 所示电路中, $v_m(t) = [40 - 40u(t)]V$, 求 $i_L(t)$ 和电路中在 $t=0$ 到 $t=\infty$ 时所消耗的能量。

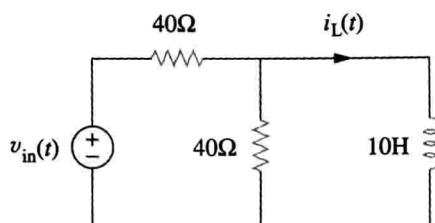


图 7-129 习题 64 图

- 65 图 7-130a 所示波形对应图 7-130b 所示电路，求 v_o 。

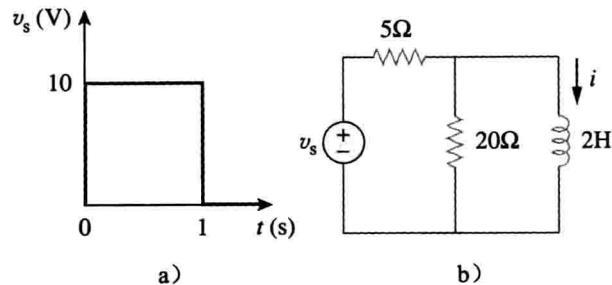


图 7-130 习题 65 图

7.7 节

- 66 利用图 7-131 所示电路设计一个问题，帮助其他同学来更好地理解一阶运放电路。 **ED**

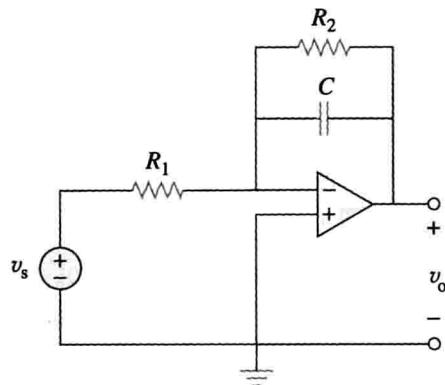


图 7-131 习题 66 图

- 67 图 7-132 所示电路中， $v(0)=5V$, $R=10k\Omega$, $C=1\mu F$ 。求 $t>0$ 时的 $v_o(t)$ 。

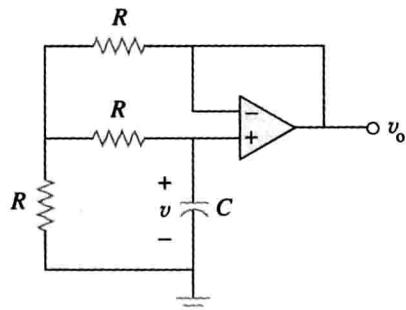


图 7-132 习题 67 图

- 68 图 7-133 所示电路中，求 $t>0$ 时的 v_o 。
69 图 7-134 所示电路中，求 $t>0$ 时的 $v_o(t)$ 。

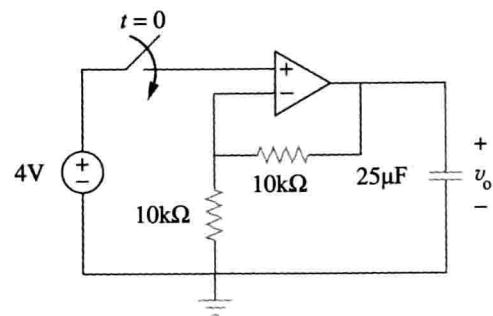


图 7-133 习题 68 图

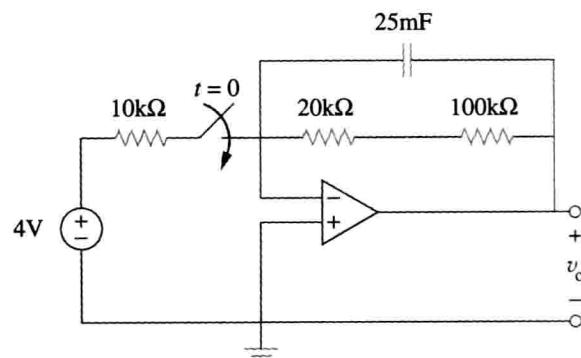


图 7-134 习题 69 图

- 70 图 7-135 所示运放电路的 $v_s = 20mV$ ，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

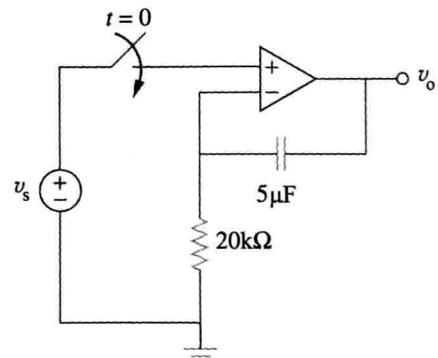


图 7-135 习题 70 图

- 71 图 7-136 所示运放电路中， $v_o = 0$ 且 $v_s = 3V$ ，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

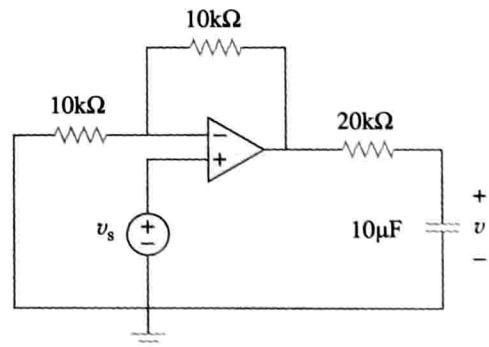


图 7-136 习题 71 图

- 72 图 7-137 所示运放电路中，假设 $v(0) = -2V$, $R = 10k\Omega$, $C = 10\mu F$ ，求 i_o 。

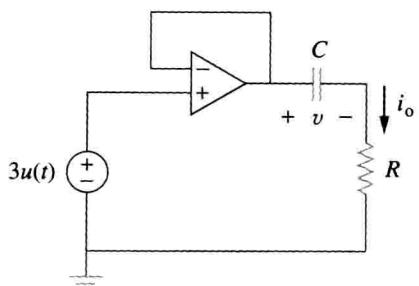


图 7-137 习题 72 图

- 73 图 7-138 所示运放电路中, 令 $R_1 = 10k\Omega$, $R_f = 20k\Omega$, $C = 20\mu F$, 且 $v(0) = 1V$, 求 v_o 。

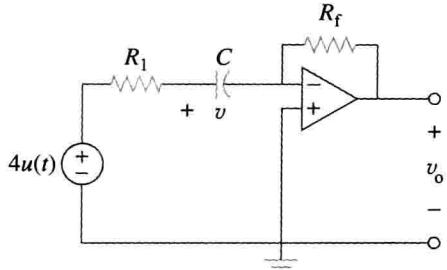


图 7-138 习题 73 图

- 74 图 7-139 所示电路中, $i_s = 10u(t)\mu A$, 假设电容最初没有充电, 求 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。

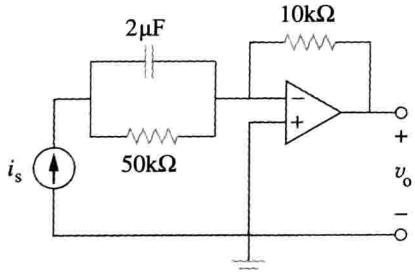


图 7-139 习题 74 图

- 75 图 7-140 所示电路中, $v_s = 4u(t)V$, $v(0) = 1V$, 求 v_o 和 i_o 。

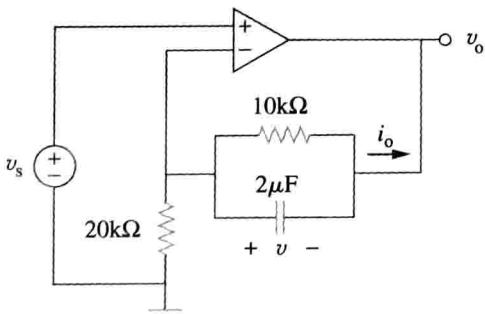


图 7-140 习题 75 图

7.8 节

- 76 用 PSpice 或 MultiSim 重复习题。

- 77 图 7-141 所示电路中, 开关在 $t = 0$ 时打开, 用 PSpice 或 MultiSim 求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

- 78 图 7-142 所示电路中, 当 $t = 0$ 时开关由 a 切换到 b , 用 PSpice 或 MultiSim 求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

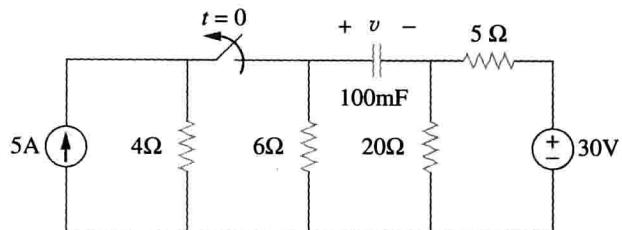


图 7-141 习题 77 图

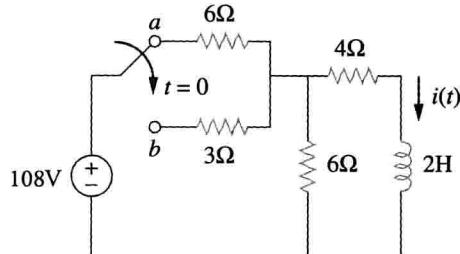


图 7-142 习题 78 图

- 79 图 7-143 所示电路中, 开关在 a 位置时电路已达稳态, 当 $t = 0$ 时开关迅速切换到 b 位置, 求 $i_o(t)$ 。

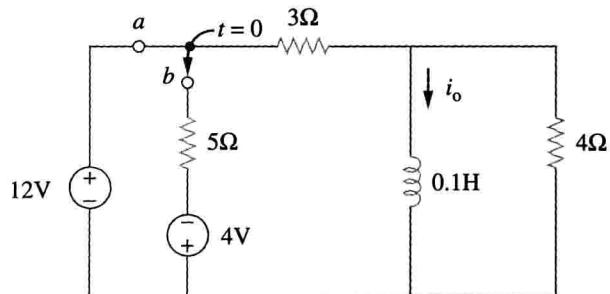


图 7-143 习题 79 图

- 80 图 7-144 所示电路中, 假设开关在 a 位置时电路已达稳态, 求: (a) $i_1(0)$ 、 $i_2(0)$ 和 $v_o(0)$; (b) $i_L(t)$; (c) $i_1(\infty)$ 、 $i_2(\infty)$ 和 $v_o(\infty)$ 。

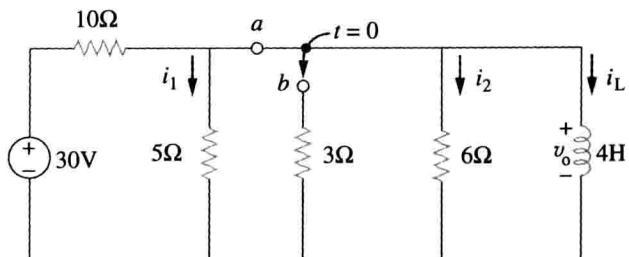


图 7-144 习题 80 图

- 81 用 PSpice 或 MultiSim 重做习题 65。

- 82 设计一个信号开关电路, 如果 $100\mu F$ 电容的时间常数为 $3ms$, 则该电路需要多大的电阻。

- 83 一个 RC 电路由一个 $120V$ 的电源、一个开关、一个 $34M\Omega$ 的电阻和一个 $15\mu F$ 的电容组成。该电路用来计算 $4km$ 的赛马比赛所需要的时间, 当赛马出发时开关闭合, 当赛马到达终点时开关打开, 假设电容充电 $85.6V$, 求马的速度。

- 84 一个 $160mH$ 的线圈的电阻是 8Ω , 当电压加到该线圈上时, 求电流到达其最终值的 60%

时所需要的时间。

- 85 图 7-145 所示电路中, 当电压达到 75V 时氖光灯亮, 当电压下降到 30V 时灯灭。灯打开时的电阻是 120Ω , 关闭时电阻无穷大。
(a) 电容每次放电可以让灯亮多久? (b) 灯的两次点亮间隔是多长时间?

ED

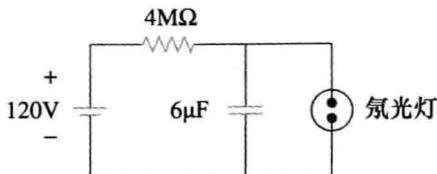


图 7-145 习题 85 图

- 86 图 7-146 所示电路是用来设定焊接机器电极上所加电压的时间长度的。时间长度等于电容从 0V 充电到 8V 所需的时间。求通过可变电阻可以控制的时间范围。

ED

- 87 一个 120V 的直流发电机带动一个具有 $50H$ 电

综合理解题

- 88 图 7-148a 所示电路中, 根据输出端所用电阻或电感, 可以将该电路设计成一个微分或积分电路。电路的时间常数 $\tau = RC$, 输入如图 7-148b 所示时间长度为 T 的信号。当 $\tau \ll T$ 时该电路为微分电路; 或者当 $\tau \gg T$, 如 $\tau > 10T$ 时该电路为一个积分电路。(a) 允许通过微分电路的输出端电容上的最小脉冲宽度是多少? (b) 如果输出端是输入端的积分形式, 那么允许的脉冲宽度的最大值是多少?

ED

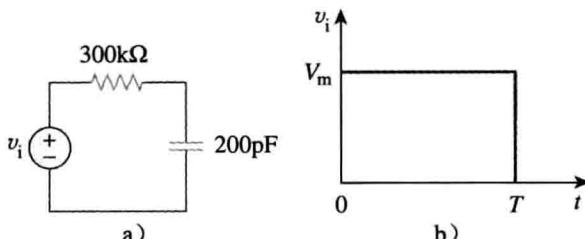


图 7-148 习题 88 图

- 89 一个 RL 电路, 当输出端加上一个电容就可被改成一个微分电路。且 $\tau \ll T$ ($\tau < 0.1T$), 这里的 T 是指输入信号的时间宽度。如果 R 被固定在 $200k\Omega$, 当 $T = 10\mu s$ 时求该微分电路所需要的 L 的最大值。

ED

- 90 一个示波器带有衰减电子探针, 能够以 10 的倍数来减小输入电压 v_i 的大小, 如图 7-149 所示, 该示波器有内部电阻 R_s 和电容 C_s , 探针有内部电阻 R_p , 当 R_p 固定在 $6M\Omega$, 且时间常数为 $15\mu s$ 时, 求 R_s 和 C_s 。

- 91 图 7-150 所示电路用于“蛙跳”生物研究, 开关关闭时青蛙会有轻微跳动, 但是开关打开时,

感和 100Ω 电阻的电动机。如图 7-147 所示, 该电动机与一个 400Ω 的电阻并联以避免发生损坏。系统处在稳定状态, 求当开关闭合后 $100ms$ 内电阻上通过的电流。

ED

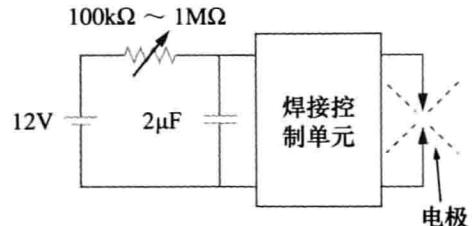


图 7-146 习题 86 图

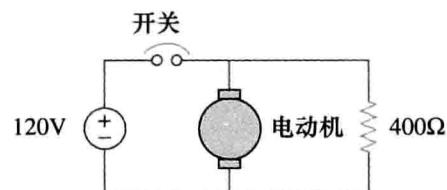


图 7-147 习题 87 图

青蛙会剧烈跳动 $5s$ 。假设需要 $10mA$ 来引起青蛙的剧烈跳动, 把青蛙作为一个电阻并计算它的电阻值。

ED

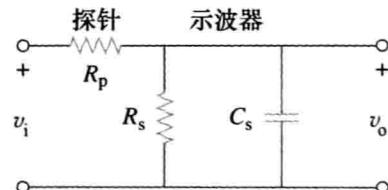


图 7-149 习题 90 图

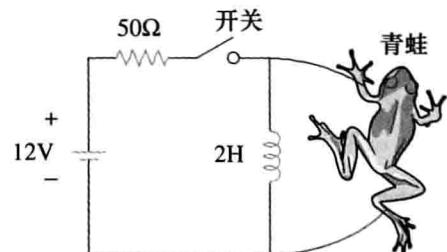


图 7-150 习题 91 图

- 92 若要移动屏幕上的阴极射线管的一个点(见图 7-151), 需要通过一个偏转金属片来使电压产生线性增加, 假设金属片的电容为 $4nF$, 画出流经金属片的电流。

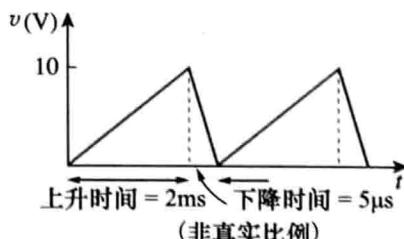


图 7-151 习题 92 图

第 8 章

二阶电路

如果有能力获得工程硕士学位，就一定要去实现它，以便使你的事业获得更大的成功。而如果想要进行科学研究，或者在工程方面有更高的造诣，亦或在大学教书，拥有自己的企业，那就需要获得博士学位。

——Charles K. Alexander

增强技能与拓展事业

在毕业后，为了增加就业机会，你需要透彻理解一系列工程领域的基本知识。如果可能的话，当完成本科学位后，最好能够通过努力获得研究生学位。

在工程上，每个学位代表一个学生所获得的某种技能。在学士学位水平，你所学习的是工程语言以及工程设计的基础。在硕士期间，你将获得处理先进工程项目和在口头、书面方面有效沟通的能力。博士学位代表你彻底掌握了解决工程尖端问题的能力，并且能够与别人沟通成果。

如果你不知道毕业后应该从事什么样的工作，攻读研究生学位将增强你的职业选择能力。因为本科学位只会为你提供工程基础，工程类的硕士学位将补充工商管理的业务课程。获得 MBA 最好的时间是你从事工程师多年以后，并想通过加强商业技能来进一步发展事业。

工程师应不断进行自我学习，无论是正式的或非正式的。或许没有比加入一个专业团体(如 IEEE)并成为一个活跃的成员更好的方法来拓展你的事业。

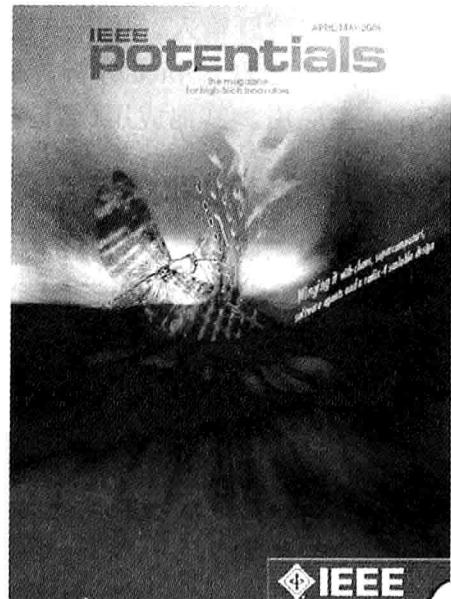
8.1 引言

前一章中，我们讨论了带有单个储能元件(一个电容器或一个电感器)的电路，因为它们是用一阶微分方程描述的，所以称为一阶电路。在这一章中，我们将考虑包含两个储能元件的电路，称为二阶(second-order)电路，因为它们的响应是由包含二阶导数的微分方程描述的。

二阶电路的典型例子是 RLC 电路，在这种电路中，三种无源器件均存在。图 8-1a、b 就是这种电路的例子，图 8-1c、d 分别是 RC 和 RL 电路。从图 8-1 中可以看出，一个二阶电路可能有两个不同类型或同一类型的储能元件(相同类型的元件不能用一个等效元件来替代)。含有两个储能元件的运算放大器电路也可以是二阶电路。与一阶电路相比，二阶电路可能包含几个电阻以及有源和无源的电源。

二阶电路的特点是二阶微分方程，它包含电阻和两个等效的储能元件。

对于二阶电路的分析类似于一阶电路，首先考虑由存储元件初始条件激励的电路。尽



增强技能与拓展事业包括对目标的理解、对变化的适应，对机遇到来的预期和对个人所处环境的规划 ©2005 年 IEEE

管这些电路可能包含非独立电源，但它们依然是无源电源，并将发生自然响应。稍后将考虑有独立源激励的电路，这些电路有自由响应和强迫响应。这一章主要考虑直流独立源，正弦和指数源的情况将在后面的章节介绍。

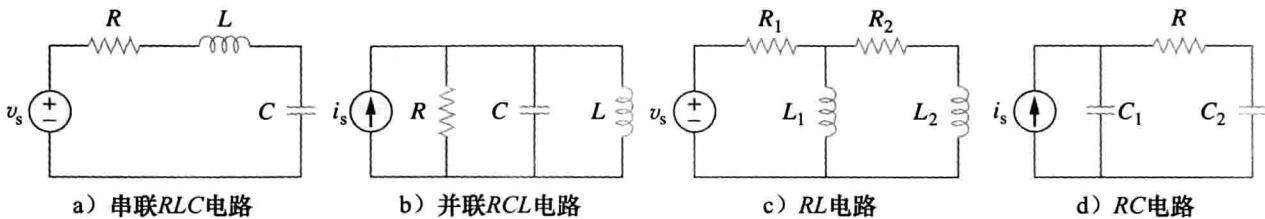


图 8-1 二阶电路的典型例子

本章首先学习如何计算电路变量及其导数的初始条件，因为这对于分析二阶电路非常重要。然后考虑图 8-1 所示串联及并联 RLC 电路在两种情况下的激励：能量存储元件的初始条件和阶跃输入。接下来检查其他类型的二阶电路，包括运算放大器电路。之后还将讨论二阶电路的 PSpice 分析。最后将会讨论汽车点火系统和滤波电路，它们是这一章电路的典型应用。其他应用（如谐振电路和滤波器）将在第 14 章介绍。

8.2 计算初值和终值

在处理二阶电路时面临的主要问题是获得电路变量的初值和终值，通常比较容易得到 v 和 i 的初值和终值，但是求解它们的导数 (dv/dt , di/dt) 是比较困难的。由于这个原因，本节将详细讲解 $v(0)$ 、 $i(0)$ 、 $dv(0)/dt$ 、 $dv(0)/dt$ 、 $di(0)/dt$ 、 $i(\infty)$ 、 $v(\infty)$ 的求解。除了特别说明外，本章中的 v 代表电容电压， i 代表电感电流。

在确定初始条件时需要牢记两点：

- 1. 在进行电路分析时，必须谨慎处理电容电压 $v(t)$ 的极性和电感电流 $i(t)$ 的方向。 v 和 i 的定义必须严格遵守无源符号的国际惯例（见图 6-3、6-23）。应该仔细观察这些符号是如何定义及应用的。

- 2. 记住，电容电压总是连续的，故：

$$v(0^+) = v(0^-) \quad (8.1a)$$

电感电流也是连续的，故：

$$i(0^+) = i(0^-) \quad (8.1b)$$

式中， $t=0^-$ 表示开关闭合前的时刻， $t=0^+$ 表示开关闭合后的时刻，假设开关切换发生在 $t=0$ 时刻。

因此，在计算初始条件时，首先关注那些不能立即改变的变量，利用式(8.1)求解电容电压和电感电流。下面的例子给出了具体的计算方法。

例 8-1 图 8-2 中的开关已经闭合了很长时间，在 $t=0$ 时刻将其打开，求解：(a) $i(0^+)$ ， $v(0^+)$ ；(b) $di(0^+)/dt$ ， $dv(0^+)/dt$ ；(c) $i(\infty)$ ， $v(\infty)$ 。

解：(a) 如果在 $t=0$ 时刻之前开关已经闭合了很长时间，就意味着在 $t=0$ 时刻电路已经达到了直流稳态。在直流稳态时，电感相当于短路，而电容相当于断路，得到图 8-3a 所示的电路。在 $t=0^-$ 时，有：

$$i(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2(A), \quad v(0^-) = 2i(0^-) = 4(V)$$

由于电感电流和电容电压不会突变，所以：

$$i(0^+) = i(0^-) = 2(A), \quad v(0^+) = v(0^-) = 4(V)$$

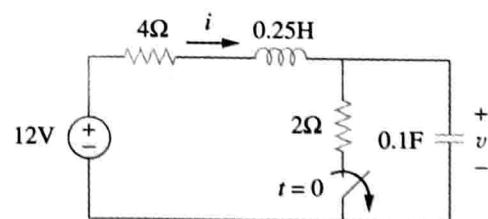


图 8-2 例 8-1 图

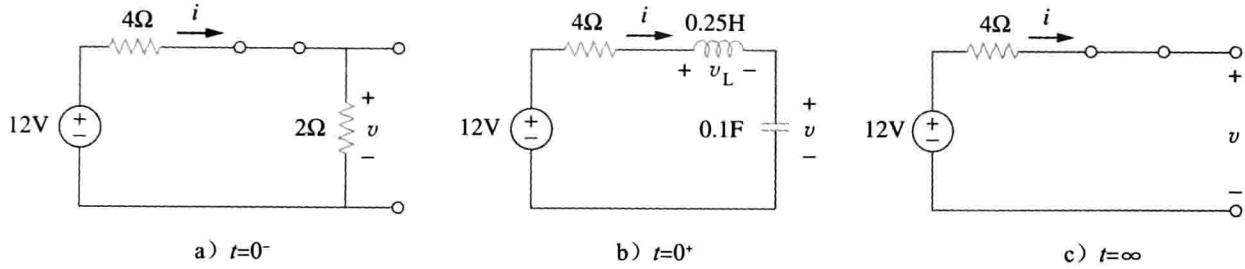


图 8-3 例 8-2 的等效电路

(b) 在 $t=0^+$ 时刻, 开关打开; 等效电路图如 8-3b 所示。相同的电流流过电感和电容。因此:

$$i_C(0^+) = i(0^+) = 2A$$

由于 $Cdv/dt = i_C$, $dv/dt = i_C/C$, 得到:

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{2}{0.1} = 20(V/s)$$

同理, 由于 $Ldi/dt = v_L$, $di/dt = v_L/L$, 在图 8-3b 中应用 KVL 可以得到 v_L 。结果如下:

$$-12 + 4i(0^+) + v_L(0^+) + v(0^+) = 0$$

即

$$v_L(0^+) = 12 - 8 - 4 = 0$$

所以:

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{0}{0.25} = 0(A/s)$$

(c) $t>0$ 时电路发生暂态变化。但当 $t\rightarrow\infty$ 时, 电路又重新达到稳定状态。电感相当于短路, 电容相当于开路, 所以电路转化成图 8-3c 所示形式, 可以得到:

$$i(\infty) = 0A, v(\infty) = 12V$$

练习 8-1 图 8-4 中的开关已经打开很长时间, 但是在 $t=0$ 时关闭。求解: (a) $i(0^+)$, $v(0^+)$; (b) $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$; (c) $i(\infty)$, $v(\infty)$ 。

答案: (a) 2A, 4V; (b) 50A/s, 0V/s; (c) 12A, 24V

例 8-2 图 8-5 所示的电路中, 计算: (a) $i_L(0^+)$, $v_C(0^+)$, $v_R(0^+)$; (b) $di_L(0^+)/dt$, $dv_C(0^+)/dt$, $dv_R(0^+)/dt$; (c) $i_L(\infty)$, $v_C(\infty)$, $v_R(\infty)$ 。

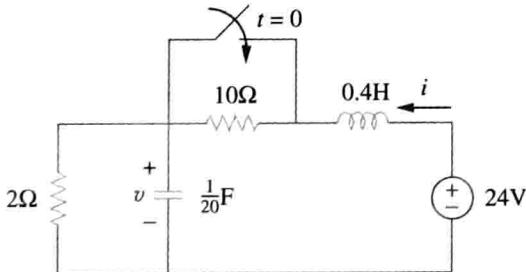


图 8-4 练习 8-1 图

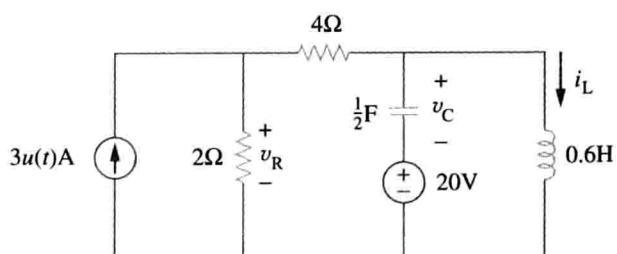


图 8-5 例 8-2 图

解: (a) 当 $t<0$ 时, $3u(t)=0$ 时, 当 $t=0^-$ 时, 电路已经达到了稳定状态, 电感相当于短路, 电容相当于开路, 如图 8-6 所示, 可得:

$$i_L(0^-) = 0, \quad v_R(0^-) = 0, \quad v_C(0^-) = -20V \quad (8.2.1)$$

虽然在 $t=0^-$ 时刻, 不要求计算这些参量的导数, 但很明显它们都是 0, 因为电路已经达到稳定状态, 并未发生改变。

当 $t>0$ 时, $3u(t)=3$, 等效电路图如图 8-6b 所示。由于电感电路和电容电压不会立

即发生改变，所以：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0, \quad v_C(0^+) = v_C(0^-) = -20V \quad (8.2.2)$$

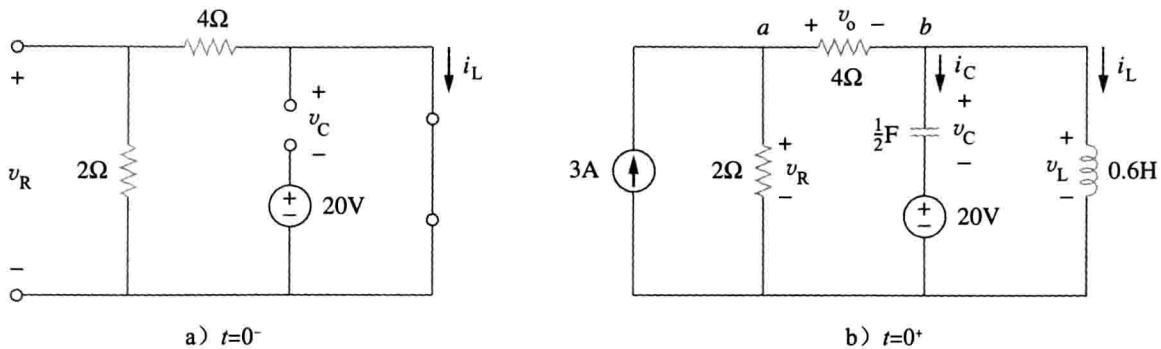


图 8-6 图 8-5 中电路的两种情况

尽管不要求计算 4Ω 电阻对应的电压，但可以通过它利用 KVL 和 KCL 定理。将其定义为 v_o ，针对节点 a 使用 KCL 定理得到：

$$3 = \frac{v_R(0^+)}{2} = \frac{v_o(0^+)}{4} \quad (8.2.3)$$

对图 8-6 的中间环路应用 KVL 定理得到：

$$-v_R(0^+) + v_o(0^+) + v_C(0^+) + 20 = 0 \quad (8.2.4)$$

因为 $v_C(0^+) = -20V$ ，从式(8.2.2)和(8.2.4)推出：

$$v_R(0^+) = v_o(0^+) \quad (8.2.5)$$

根据式(8.2.3)和(8.2.5)得到：

$$v_R(0^+) = v_o(0^+) = 4V \quad (8.2.6)$$

(b) 由于 $Ldi/dt = v_L$ ，可得：

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L}$$

根据图 8-6b 的右边环路，应用 KVL 定理可以得到：

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) + 20 = 0$$

所以：

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = 0 \quad (8.2.7)$$

同理，由于 $Cdv_C/dt = i_C$ ，所以 $dv_C/dt = i_C/C$ 。针对图 8-6b 中的节点 b 利用 KCL 定理可以得到 i_C ：

$$\frac{v_o(0^+)}{4} = i_C(0^+) + i_L(0^+) \quad (8.2.8)$$

由于 $v_o(0^+) = 4$, $i_L(0^+) = 0$, $i_C(0^+) = 4/4 = 1A$ ，所以：

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{1}{0.5} = 2(V/s) \quad (8.2.9)$$

为了得到 $dv_R(0^+)/dt$ ，针对节点 a 利用 KCL 得到：

$$3 = \frac{v_R}{2} + \frac{v_o}{4}$$

对上式每项求导，并令 $t=0^+$ ，得到：

$$0 = 2 \frac{dv_R(0^+)}{dt} + \frac{dv_o(0^+)}{dt} \quad (8.2.10)$$

同样对图 8-6b 的中间环路利用 KVL 得到：

$$-v_R + v_C + 20 + v_o = 0$$

对上式每项进行求导, 令 $t=0^+$, 得到:

$$-\frac{dv_R(0^+)}{dt} + \frac{dv_C(0^+)}{dt} + \frac{dv_o(0^+)}{dt} = 0$$

将 $dv_C(0^+)/dt=2$ 代入得到:

$$\frac{dv_R(0^+)}{dt} = 2 + \frac{dv_o(0^+)}{dt} \quad (8.2.11)$$

通过式(8.2.10)和(8.2.11)得到:

$$\frac{dv_R(0^+)}{dt} = \frac{2}{3} (\text{V/s})$$

还可以求解出 $di_R(0^+)/dt$ 。由于 $v_R=5i_R$, 所以:

$$\frac{di_R(0^+)}{dt} = \frac{1}{5} \frac{dv_R(0^+)}{dt} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} (\text{A/s})$$

(c) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到稳定状态, 得到等效电路如图 8-6a 所示。3A 电流源有效, 根据分流原理可得:

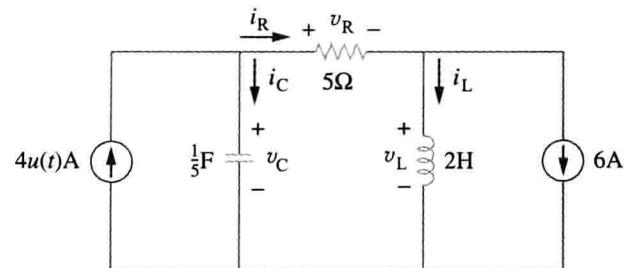
$$i_L(\infty) = \frac{2}{2+4} \times 3\text{A} = 1\text{A}$$

$$v_R(\infty) = \frac{4}{2+4} \times 3\text{A} \times 2 = 4\text{V}, \quad v_C(\infty) = -20\text{V} \quad (8.2.12) \blacktriangleleft$$

练习 8-2 电路图如图 8-7 所示, 求解:

- (a) $i_L(0^+)$, $v_C(0^+)$, $v_R(0^+)$; (b)
 $di_L(0^+)/dt$, $dv_C(0^+)/dt$, $dv_R(0^+)/dt$;
- (c) $i_L(\infty)$, $v_C(\infty)$, $v_R(\infty)$

答案: (a) -6A , 0 , 0 ; (b) 0 , 20V/s , 0 ;
(c) -2A , 20V , 20V



8.3 无源串联 RLC 电路

图 8-7 练习 8-2 图

理解串联 RLC 电路的自然响应是理解滤波器设计和通信网络研究的基础。

分析图 8-8 中的串联 RLC 电路。电路中包含存储在电容和电感的初始能量, 其中能量用初始电容电压 V_0 和初始电感电流 I_0 表示。因此, 在 $t=0$ 时刻:

$$v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt = v_0 \quad (8.2a)$$

$$i(0) = I_0 \quad (8.2b)$$

对于图 8-8 中的环路利用 KVL 定理得:

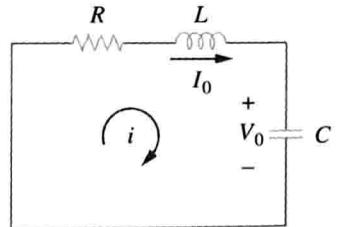


图 8-8 无源串联 RLC 电路

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = 0 \quad (8.3)$$

为计算上式中的积分, 对 t 进行求导并整理得到:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (8.4)$$

上式是一个二阶差分方程(second-order differential equation), 所以本章中的 RLC 电路称作二阶电路。为了求解式(8.4), 需要知道两个初始条件, 比如 i 的初始值及其一阶导数, 或是某个 i 和 v 的初值。 i 的初值可以通过式(8.2b)求解。通过式(8.2a)和(8.3)可以得到 i 的一阶导数的初值。即:

$$Ri(0) + L \frac{di(0)}{dt} + V_0 = 0$$

即

$$\frac{di(0)}{dt} = -\frac{1}{L}(RI_0 + V_0) \quad (8.5)$$

利用式(8.2b)和式(8.5)的两个初始条件可以求解式(8.4)。在上一章中求解一阶电路的经验是采用指数形式，因此，令：

$$i = Ae^{st} \quad (8.6)$$

其中 A 和 s 是需要求解的常数。将式(8.6)带入式(8.4)中，并求一阶导数，可以得到：

$$As^2 e^{st} + \frac{AR}{L} s e^{st} + \frac{A}{LC} e^{st} = 0$$

即

$$A s^2 \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (8.7)$$

由于 $i = Ae^{st}$ 是需要求解的，故只有括号中的表达式为 0：

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.8)$$

这个二次方程是微分方程式(8.4)的特征方程。由于方程的根取决于 i 的特征，故式(8.8)的两个根为：

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.9a)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8.9b)$$

进一步化简上式得到：

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (8.10)$$

其中：

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.11)$$

s_1 和 s_2 称为自然频率(Np/s)，因为它们与电路的自然响应有关系。 ω_0 是谐振频率或无阻尼固有频率，表示每秒转过的弧度， α 是奈培频率或阻尼系数。将 α 和 ω_0 代入后，式(8.8)可以表示为：

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (8.8a)$$

提示：Np 是以苏格兰数学家约翰·奈培(1550—1617)命名的无量纲单位。

变量 ω_0 和 s 是比较重要的，我们将在后面章节予以介绍。

提示： α/ω_0 是阻尼系数 ξ 。

式(8.10)中 s 的两个值表明 i 有两个解，每个解对应式(8.6)的一种形式。即：

$$i_1 = A_1 e^{s_1 t}, \quad i_2 = A_2 e^{s_2 t} \quad (8.12)$$

由于式(8.4)是一个线性方程，所以两个解 i_1 和 i_2 的线性组合也是式(8.4)的解。即式(8.4)的完整解或者全解是 i_1 和 i_2 的线性组合。因此，串联 RLC 电路的自然响应如下：

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8.13)$$

其中常量 A_1 和 A_2 取决于式(8.2b)和式(8.5)的初值 $i(0)$ 和 $di(0)/dt$ 。

通过式(8.10)可以推测出解的 3 种形式：

1. 当 $\alpha > \omega_0$ 时，为过阻尼情况；

2. 当 $\alpha = \omega_0$ 时, 为临界阻尼情况;
3. 当 $\alpha < \omega_0$ 时, 为欠阻尼情况。

提示: 当电路的特征方程的两个根不相等且为实数时, 响应为过阻尼; 当根相等且为实数时, 响应为临界阻尼; 当根为复数时, 响应为欠阻尼。

下面将分别讨论以上各种情况。

过阻尼情况 ($\alpha > \omega_0$):

从式(8.9)和(8.10)可以看出, 当 $\alpha > \omega_0$ 时, $C > 4L/R^2$ 。此时根 s_1 和 s_2 为正实根。解为:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8.14)$$

随着 t 的增大, 解的值减小且趋近于 0。图 8-9a 是过阻尼响应的典型例子。

临界阻尼情况 ($\alpha = \omega_0$):

当 $\alpha = \omega_0$ 时, $C = 4L/R^2$, 得到:

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L} \quad (8.15)$$

此时, 式(8.13)需要满足:

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

其中 $A_3 = A_1 + A_2$ 。这不能作为方程解, 因为两个初始条件不能满足于单一的常数 A_3 。错误出在何处? 在临界阻尼的特殊情况下, 复指数解决方案的假设是不正确的。现在回到式(8.4), 当 $\alpha = \omega_0 = R/2L$ 时, 式(8.4)变为:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \alpha^2 i = 0$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) + \alpha \left(\frac{di}{dt} + \alpha i \right) = 0 \quad (8.16)$$

假设:

$$f = \frac{di}{dt} + \alpha i \quad (8.17)$$

则式(8.16)变为:

$$\frac{df}{dt} + \alpha f = 0$$

上式为一阶微分方程, 解为 $f = A_1 e^{-\alpha t}$, A_1 为常数。

式(8.17)变为:

$$\frac{di}{dt} + \alpha i = A_1 e^{-\alpha t}$$

即

$$e^{\alpha t} \frac{di}{dt} + e^{\alpha t} \alpha i = A_1 \quad (8.18)$$

此式可变换为:

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} i) = A_1 \quad (8.19)$$

对左右两边进行积分得:

$$e^{\alpha t} i = A_1 t + A_2$$

即

$$i = (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \quad (8.20)$$

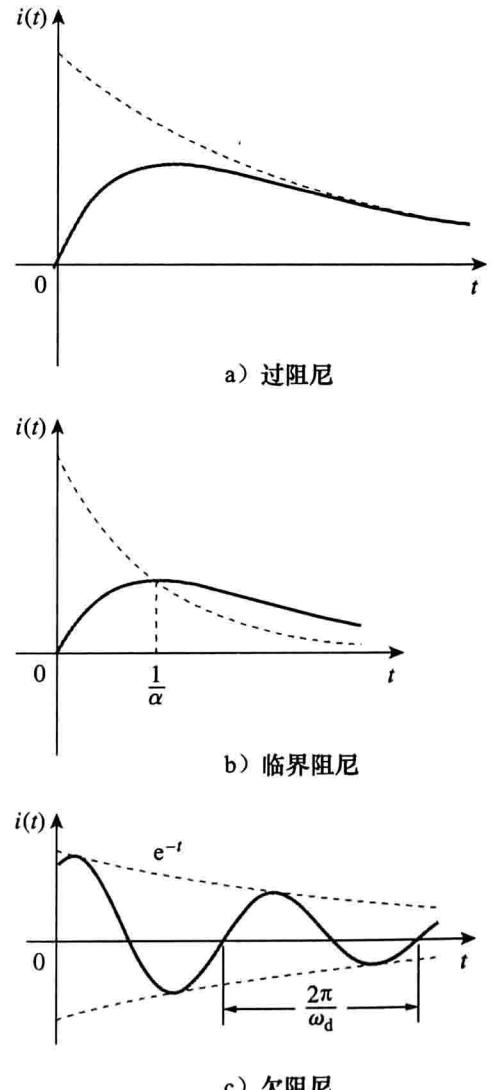


图 8-9 三种阻尼情况

其中 A_2 也为常数。因此，临界阻尼电路的自然响应是两项之和：负指数项和负指数乘以线性项，即：

$$i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t} \quad (8.21)$$

典型的临界阻尼响应如图 8-9b 所示。事实上，图 8-9b 是 $i(t) = te^{-\alpha t}$ 的形式。当 $t=1/\alpha$ 时，达到最大值，即常数 e^{-1}/α ，之后慢慢减小并趋近于 0。

欠阻尼情况 ($\alpha < \omega_0$)：

当 $\alpha < \omega_0$ 时， $C < 4L/R$ 。根的形式如下：

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d \quad (8.22a)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d \quad (8.22b)$$

其中， $j = \sqrt{-1}$ ； $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ，表示阻尼频率。 ω_0 和 ω_d 都是自然频率，因为它们决定自然响应； ω_0 称为欠阻尼频率， ω_d 称为过阻尼频率。自然响应为：

$$i(t) = A_1 e^{-(\alpha-j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha+j\omega_d)t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (8.23)$$

运用欧拉公式：

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \quad (8.24)$$

得到：

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\alpha t} [A_1 (\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t) + A_2 (\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t)] \\ &= e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos\omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin\omega_d t] \end{aligned} \quad (8.25)$$

令 $A_1 + A_2 = B_1$ ， $j(A_1 - A_2) = B_2$ ，上式转换为：

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t) \quad (8.26)$$

根据正弦和余弦函数的性质，可以看出此时自然响应具有指数衰减和振荡的性质。该响应的时间常数为 $1/\alpha$ ，周期为 $T = 2\pi/\omega_d$ 。图 8-9c 是一个典型的欠阻尼响应。(在图 8-9 中，假设 $i(0)=0$ 。)

一旦确定上述串联 RLC 电路中的电感电流 $i(t)$ ，则元件电压等其他电路参量也很容易确定。例如，电阻电压为 $v_R = Ri$ ，电感电压为 $v_L = Ldi/dt$ 。将电感电流 $i(t)$ 作为关键变量首先计算，可以方便利用式(8.1b)计算其他参量。

下面将 RLC 网络的特性总结如下：

1. 可以从阻尼的角度来描述 RLC 网络，即初始储能逐渐损耗，这一点从持续下降的幅度响应便可证实。阻尼效应是由电阻 R 引起的，阻尼因子 α 决定了阻尼响应的频率。如果 $R=0$ ，则 $\alpha=0$ ，得到 LC 电路，其中欠阻尼自然频率为 $1/\sqrt{LC}$ 。由于这种情况中的 $\alpha < \omega_0$ ，该响应为无阻尼振荡。这个电路被称为无损电路，因为没有损耗或阻尼元件。通过调整 R 的值，响应可以为无阻尼、过阻尼或欠阻尼情况。

提示： $R=0$ 产生理想的正弦响应。由于 L 和 C 的内在损耗，在实际中并不能用 L 和 C 来实现正弦响应。参见图 6-8 和 6-26，可以利用振荡器来实现理想的正弦响应。

提示： 例 8-5 和 8-7 证明了调整 R 带来的影响。

提示： 如图 8-1c 和 d 所示，带有两个相同类型储能元件的二阶电路的响应不能振荡。

2. 由于存在两种类型的储能元件，有可能发生振荡响应，能量在 L 和 C 两个元件之间来回流动。由于欠阻尼响应出现的阻尼振荡现象被称为振铃。它源于储能元件 L 和 C 的能力，能量将在二者之间来回转移。

3. 通过观察图 8-9 可以发现，不同响应的波形是不同的，过阻尼和临界阻尼响应的波形较难区分。临界阻尼是欠阻尼和过阻尼之间的边界，它衰减得最快。相同初始条件下，过阻尼情况拥有最长的稳定时间，因为它需要最长的时间损耗初始存储能量。如果期望得到最快无振荡或振铃的响应，临界阻尼电路是正确的选择。

提示：在实际的电路中，要寻找的过阻尼电路应尽可能地与临界阻尼电路接近。

例 8-3 在图 8-8 中， $R=40\Omega$, $L=4H$, $C=1/4F$ 。计算电路的特征根，并判断自然响应为过阻尼、欠阻尼还是临界阻尼。

解：首先计算：

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \times 4} = 5, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times \frac{1}{4}}} = 1$$

根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5 \pm \sqrt{25 - 1}$$

即

$$s_1 = -1.101, \quad s_2 = -9.899$$

由于 $\alpha > \omega_0$ ，所以该响应为过阻尼的。也可从负实根得出相同的结论。

练习 8-3 如果图 8-8 中的 $R=10\Omega$, $L=5H$, $C=2mF$ ，求解 α 、 ω_0 、 s_1 、 s_2 。电路中的自然响应为哪种类型？

答案：1, 10, $-1 \pm j9.95$ ，欠阻尼

例 8-4 求出图 8-10 电路中的 $i(t)$ 。假设电路在 $t=0^-$ 时刻达到稳定状态。

解：当 $t < 0$ 时，开关闭合，电容相当于开路，电感相当于短路。等效电路如图 8-11a 所示。因此，在 $t=0$ 时：

$$i(0) = \frac{10}{4+6} = 1A, \quad v(0) = 6i(0) = 6V$$

其中 $i(0)$ 为初始电感电流， $v(0)$ 为初始电容电压。

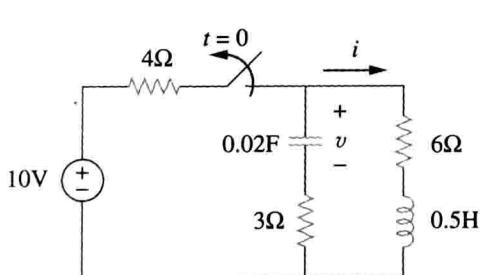


图 8-10 例 8-4 图

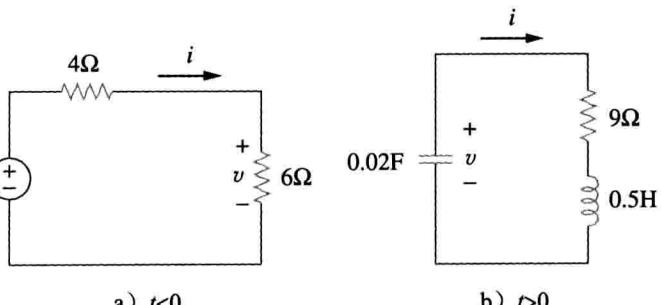


图 8-11 图 8-10 中电路

当 $t > 0$ 时，开关打开，电压源断开，等效电路如图 8-11b 所示，为无源串联 RLC 电路。观察 3Ω 和 6Ω 电阻，在开关打开时（见图 8-10）为串联，结合图 8-11b 得出 $R=9\Omega$ ，根的计算如下：

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2 \left(\frac{1}{2}\right)} = 9, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{50}}} = 10$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm \sqrt{81 - 100}$$

即

$$s_{1,2} = -9 \pm j4.359$$

因此，该响应为欠阻尼 ($\alpha < \omega_0$)；即：

$$i(t) = e^{-9t} (A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t) \quad (8.4.1)$$

下面利用初始条件计算 A_1 和 A_2 。当 $t=0$ 时：

$$i(0) = 1 = A_1 \quad (8.4.2)$$

通过式(8.5)得：

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{L}[Ri(0) + v(0)] = -2[9 \times 1 - 6] = -6 \text{ (A/s)} \quad (8.4.3)$$

其中 $v(0) = v_0 = -6 \text{ V}$, 这是因为图 8-11b 中 v 的极性和图 8-8 中是相反的。对式(8.4.1)中的 $i(t)$ 求微分:

$$\frac{di}{dt} = -9e^{-9t}(A_1 \cos 4.359t + A_2 \sin 4.359t) + 4.359e^{-9t}(-A_1 \sin 4.359t + A_2 \cos 4.359t)$$

式(8.4.3)在 $t=0$ 时刻得到:

$$-6 = -9(A_1 + 0) + 4.359(-0 + A_2)$$

式(8.4.2)中的 $A_1 = 1$, 则:

$$-6 = -9 + 4.359A_2 \Rightarrow A_2 = 0.6882$$

将 A_1 和 A_2 的值代入到式(8.4.1)中得到最终的答案:

$$i(t) = e^{-9t}(\cos 4.359t + 0.6882 \sin 4.359t) \text{ A} \quad \blacktriangleleft$$

练习 8-4 图 8-12 中的电路在 $t=0^-$ 时刻已经达到稳定状态。在 $t=0$ 时刻, 将之前闭合于 a 位置的开关移动到 b 位置, 计算 $t>0$ 时 $i(t)$ 的值。

$$\text{答案: } e^{-2.5t}(10\cos 1.6583t - 15.076 \sin 1.6583t) \text{ A}$$

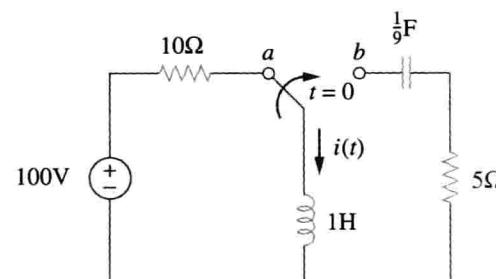


图 8-12 练习 8-4 图

并联 RLC 电路具有很多实际的应用, 尤其是在通信网络和滤波器的设计中。

考虑图 8-13 中的并联 RLC 电路。假设电感电流的初始值为 I_0 , 电容电压的初始值为 V_0 , 得到:

$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt \quad (8.27a)$$

$$v(0) = V_0 \quad (8.27b)$$

由于三个元件是并联的, 它们具有相同的电压 v 。根据无源符号约定, 电流从顶部节点进入每个元件, 在顶点处运用 KCL 定理得到:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (8.28)$$

对上式中的 t 进行微分并除以 C 得到:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (8.29)$$

用 s 代替一阶微分, s^2 代替二阶微分, 便可得到特征方程。与通过式(8.8)建立式(8.4)的方法相同, 得到的特征方程如下:

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (8.30)$$

特征方程的根为:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

即

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (8.31)$$

其中:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC} \quad (8.32)$$

这些术语的名称跟前面章节中的是相同的，因为它们的作用相同。解的可能情况也有三种，取决于 $\alpha > \omega_0$ 、 $\alpha = \omega_0$ 或 $\alpha < \omega_0$ 。下面分别讨论各种情况。

过阻尼情况 ($\alpha > \omega_0$)：

通过式(8.32)可知，当 $L > 4R^2C$ 时， $\alpha > \omega_0$ 。特征方程的根为正实根。响应为：

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8.33)$$

临界阻尼情况 ($\alpha = \omega_0$)：

当 $L = 4R^2C$ 时， $\alpha = \omega_0$ 。根为相同并且是实数，响应为

$$v(t) = (A_1 + A_1 t) e^{-\alpha t} \quad (8.34)$$

欠阻尼情况 ($\alpha < \omega_0$)：

当 $L < 4R^2C$ 时， $\alpha < \omega_0$ 。在这种情况下，根为复数，可以用下式描述：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (8.35)$$

其中：

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (8.36)$$

响应为：

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (8.37)$$

三种情况中的常数 A_1 和 A_2 可以由初始条件决定，为此需要 $v(0)$ 和 $dv(0)/dt$ 的值。第一项可以根据式(8.27b)得到。结合式(8.27)和式(8.28)可以得到第二项的值，如下：

$$\frac{V_0}{R} + I_0 + C \frac{dv(0)}{dt} = 0$$

即

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{(V_0 + RI_0)}{RC} \quad (8.38)$$

电压的波形和图 8-9 相似，取决于该电路是过阻尼、欠阻尼或临界阻尼。

按照如上所述求解并联 RLC 电路中的电压 $v(t)$ ，可以很容易地获得元件电流等其他电路参量。例如，电阻电流为 $i_R = v/R$ ，电容电压为 $v_C = Cdv/dt$ 。选择电容电压 $v(t)$ 为关键变量首先计算，可以方便利用式(8.1a)计算其他参量。注意，第一次求解电感电流 $i(t)$ 是在 RLC 串联电路，然而求解电容电压 $v(t)$ 是在并联 RLC 电路中。

例 8-5 在图 8-13 的并联电路中，求解 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。假设 $v(0) = 5V$ ， $i(0) = 0$ ， $L = 1H$ ， $C = 10mF$ ，考虑电阻分别为 $R = 1.923\Omega$ ， $R = 5\Omega$ 和 $R = 6.25\Omega$ 的情况。

解：第一种情况 当 $R = 1.923\Omega$ 时：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = 26$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 10 \times 10^{-3}}} = 10$$

由于 $\alpha > \omega_0$ ，在这种情况下，响应为过阻尼。特征方程的根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -2, -50$$

响应为：

$$v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-50t} \quad (8.5.1)$$

运用初始条件求解 A_1 和 A_2 ：

$$v(0) = 5 = A_1 + A_2 \quad (8.5.2)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{1.923 \times 10 \times 10^{-3}} = -260$$

对式(8.5.1)求微分得到：

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 50A_2 e^{-50t}$$

在 $t=0$ 时刻：

$$-260 = -2A_1 - 50A_2 \quad (8.5.3)$$

根据式(8.5.2)和(8.5.3)，可以得到 $A_1 = -0.2083$ 和 $A_2 = 5.208$ 。将 A_1 和 A_2 代入式(8.5.1)得到：

$$v(t) = -0.2083e^{-2t} + 5.208e^{-50t} \quad (8.5.4)$$

第二种情况 当 $R=5\Omega$ 时：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 5 \times 10 \times 10^{-3}} = 10$$

ω_0 仍为 10，所以 $\alpha=\omega_0=10$ ，该响应为临界阻尼。因此， $s_1=s_2=-10$ ，且：

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-10t} \quad (8.5.5)$$

利用初始条件求解 A_1 和 A_2 ：

$$v(0) = 5 = A_1 \quad (8.5.6)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{5 \times 10 \times 10^{-3}} = -100$$

对式(8.5.5)求微分可得：

$$\frac{dv}{dt} = (-10A_1 - 10A_2 t + A_2)e^{-10t}$$

在 $t=0$ 时刻：

$$100 = -10A_1 + A_2 \quad (8.5.7)$$

根据式(8.5.6)和(8.5.7)，可以得到 $A_1=5$ 和 $A_2=-50$ ，因此：

$$v(t) = (5 - 50t)e^{-10t} \text{ V} \quad (8.5.8)$$

第三种情况 当 $R=6.25\Omega$ 时：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = 8$$

ω_0 仍为 10，所以 $\alpha<\omega_0$ ，该响应为欠阻尼情况。特征方程的根为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -8 \pm j6$$

因此：

$$v(t) = (A_1 \cos 6t + A_2 \sin 6t)e^{-8t} \quad (8.5.9)$$

求解 A_1 和 A_2 ：

$$v(0) = 5 = A_1 \quad (8.5.10)$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{5 + 0}{6.25 \times 10 \times 10^{-3}} = -80$$

对式(8.5.9)求解微分：

$$\frac{dv}{dt} = (-8A_1 \cos 6t - 8A_2 \sin 6t - 6A_1 \sin 6t + 6A_2 \cos 6t)e^{-8t}$$

在 $t=0$ 时刻：

$$-80 = -8A_1 + 6A_2 \quad (8.5.11)$$

根据式(8.5.10)和(8.5.11)，可以得到 $A_1=5$ 和 $A_2=-6.667$ 。因此：

$$v(t) = (5 \cos 6t - 6.667 \sin 6t)e^{-8t} \quad (8.5.12)$$

注意，随着 R 值的增加，阻尼的程度降低，且响应情况也有所不同。三种情况如图 8-14 所示。

 **练习 8-5** 在图 8-13 中，令 $R=2\Omega$, $L=0.4\text{H}$, $C=25\text{mF}$, $v(0)=0$, $i(0)=50\text{mA}$,

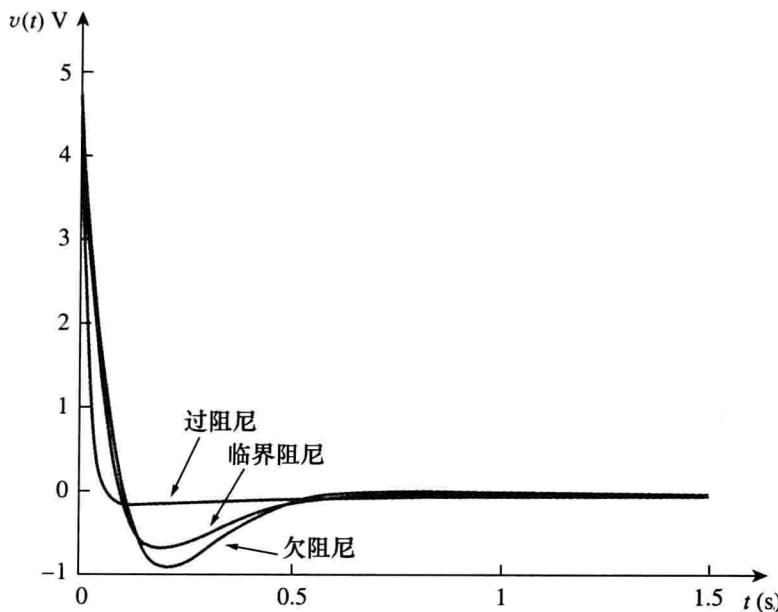


图 8-14 例 8-5 中三种程度的阻尼响应

求 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

答案: $-2te^{-10t}u(t)V$

例 8-6 $t > 0$ 时, 求解图 8-15 中 RLC 电路的 $v(t)$ 。

解: 当 $t < 0$ 时, 开关打开, 电感相当于短路, 电容相当于开路。电容的初始电压相当于 50Ω 电阻的电压, 即:

$$v(0) = \frac{50}{30 + 50} \times 40 = \frac{5}{8} \times 40 = 25(V) \quad (8.6.1)$$

电感值的初始电流为:

$$i(0) = -\frac{40}{30 + 50} = -0.5(A)$$

电流的方向如图 8-15 所示, 与图 8-13 中 I_0 的方向一致, 这和电流从电感器正端流入的法则是一致的(见图 6-23)。为了求解 v , 需要将式 dv/dt 写为:

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0) + Ri(0)}{RC} = -\frac{25 - 50 \times 0.5}{50 \times 20 \times 10^{-6}} = 0 \quad (8.6.2)$$

当 $t > 0$ 时, 开关闭合。与 30Ω 电阻连接的电压源与其他电路分离, 并行 RLC 电路类似于独立电压源, 如图 8-16 所示, 求解特征方程的根为:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 500$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.4 \times 20 \times 10^{-6}}} = 354$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -500 \pm \sqrt{250000 - 124997.6} = -500 \pm 354$$

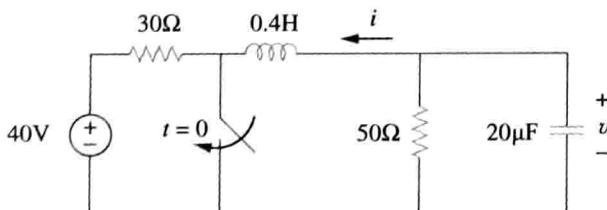
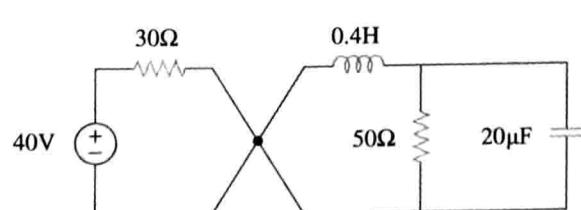


图 8-15 例 8-6 图

图 8-16 $t > 0$ 时的电路, 右边的并联 RLC 电路与左边的电路相互独立

即

$$s_1 = -854, \quad s_2 = -146$$

由于 $\alpha > \omega_0$, 得到过阻尼响应为:

$$v(t) = A_1 e^{-854t} + A_2 e^{-146t} \quad (8.6.3)$$

当 $t=0$ 时, 代入式(8.6.1)的条件得到:

$$v(0) = 25 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = 25 - A_1 \quad (8.6.4)$$

对式(8.6.3)中的 v 进行求导得到:

$$\frac{dv}{dt} = -854A_1 e^{-854t} - 146A_2 e^{-146t}$$

代入式(8.6.2)的条件得到:

$$\frac{dv(0)}{dt} = 0 = -854A_1 - 146A_2$$

即

$$0 = 854A_1 + 146A_2 \quad (8.6.5)$$

求解式(8.6.4)和式(8.6.5)得到:

$$A_1 = -5.156, \quad A_2 = 30.16$$

因此式(8.6.3)转换为:

$$v(t) = -5.156e^{-854t} + 30.16e^{-146t}$$

 练习 8-6 对于图 8-17 中的电路, 求解 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

$$\text{答案: } 150(e^{-10t} - e^{-2.5t})V$$

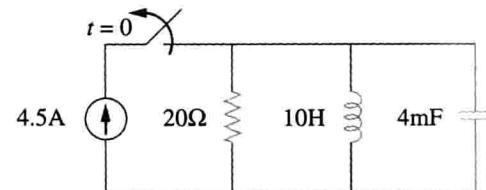


图 8-17 练习 8-6 图

8.5 串联 RLC 电路的阶跃响应

正如前一章所学习的, 直流电源的突然作用会产生阶跃响应。在图 8-18 所示的串联 RLC 电路中, 当 $t>0$ 时, 针对环路应用 KVL 定理, 得到:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = V_s \quad (8.39)$$

其中:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

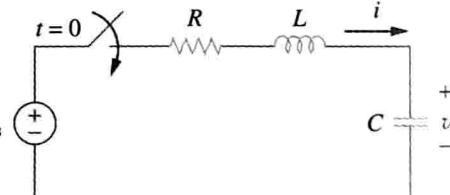


图 8-18 串联 RLC 电路的阶跃响应

将 i 代入式(8.39)中, 整理得到:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC} \quad (8.40)$$

式(8.40)的形式和式(8.4)相同。它们系数相同(其在决定频率参数时是至关重要的), 但是变量不同。(同样地, 观察式(8.47)。)因此, 串联 RLC 电路的特征方程并未受到直流电源的影响。

式(8.40)的解中包含两个部分: 暂态响应 $v_t(t)$ 和稳态响应 $v_{ss}(t)$; 即:

$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t) \quad (8.41)$$

暂态响应就是当 $V_s=0$ 时式(8.40)的解, 和 8.3 节的求解方式是相同的。过阻尼情况、欠阻尼情况、临界阻尼情况的自然频率 ν_t 如下:

$$v_t(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{过阻尼}) \quad (8.42a)$$

$$v_t(t) = (A_1 + A_2) e^{-\alpha t} \quad (\text{临界阻尼}) \quad (8.42b)$$

$$v_t(t) = (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} \quad (\text{欠阻尼}) \quad (8.42c)$$

稳态响应为平稳状态或者最终情况下 $v(t)$ 。在图 8-18 的电路中, 电容电压的值和电源电压 V_s 是相同的。故:

$$v_{ss}(t) = v(\infty) = V_s \quad (8.43)$$

因此, 过阻尼、欠阻尼、临界阻尼情况下的全解为:

$$v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{过阻尼}) \quad (8.44a)$$

$$v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t} \quad (\text{临界阻尼}) \quad (8.44b)$$

$$v(t) = V_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t} \quad (\text{欠阻尼}) \quad (8.44c)$$

常数 A_1 和 A_2 可以通过初始条件 $v(0)$ 和 $dv(0)/dt$ 获得。记住, v 和 i 分别为电容电压和电感电流。因此, 式(8.44)仅仅用来求解 v 。由于电容电压 $v_C = v$, 可以得到 $i = Cdv/dt$, 通过电容、电感、电阻的电流是相同的。故电阻电流为 $v_R = iR$, 电感电流为 $v_L = Ldi/dt$ 。

另外, 可以直接求解任何变量 $x(t)$ 的全响应, 通解形式为:

$$x(t) = x_{ss}(t) + x_t(t) \quad (8.45)$$

其中, 终值为 $x_{ss}(t) = x(\infty)$, $x_t(t)$ 为暂态响应。终值的求解如 8.2 节所述。暂态响应和式(8.42)形式相同, 有关常量可以通过式(8.44)、 $x(0)$ 和 $dx(0)/dt$ 求解。

例 8-7 图 8-19 所示的电路中, 求解 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。考虑以下几种情况: $R = 5\Omega$, $R = 4\Omega$, $R = 1\Omega$ 。

解: 第一种情况 $R = 5\Omega$ 。当 $t < 0$ 时, 开关闭合, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 初始电流为:

$$i(0) = \frac{24}{5+1} = 4(\text{A})$$

电容的电压和 1Ω 电阻两端的电压是相同的。即:

$$v(0) = 1i(0) = 4(\text{V})$$

当 $t > 0$ 时, 开关打开, 1Ω 电阻没有连接上。其余部分是串联 RLC 电路和电压源。特征根如下:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \times 1} = 2.5, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1 \times 0.25}} = 2$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -1, -4$$

由于 $\alpha > \omega_0$, 得到过阻尼自然响应。全响应如下:

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t})$$

其中 v_{ss} 为稳态响应, 它是电容电压的终值。在图 8-19 中, $v_{ss} = 24\text{V}$ 。所以:

$$v(t) = 24 + (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}) \quad (8.7.1)$$

利用初始条件求解常数 A_1 和 A_2 :

$$v(0) = 4 = 24 + A_1 + A_2$$

即

$$-20 = A_1 + A_2 \quad (8.7.2)$$

电感电流的值并不能立刻改变, 因为电感和电容是串联的, 所以它的值和电容在 $t=0^+$ 时刻的电流值相同, 因此:

$$i(0) = C \frac{dv(0)}{dt} = 4 \Rightarrow \frac{dv(0)}{dt} = \frac{4}{C} = \frac{4}{0.25} = 16$$

在利用该条件之前, 需要对式(8.7.1)进行求导:

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 4A_2 e^{-4t} \quad (8.7.3)$$

当 $t=0$ 时:

$$\frac{dv(0)}{dt} = 16 = -A_1 - 4A_2 \quad (8.7.4)$$

通过式(8.7.2)和式(8.7.4)可以求出, $A_1 = -64/3$, $A_2 = 4/3$ 。将 A_1 和 A_2 的值代入式(8.7.1),

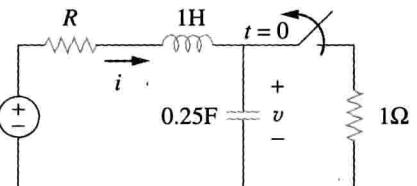


图 8-19 例 8-7 图

得到：

$$v(t) = 24 + \frac{4}{3}(-16e^{-t} + e^{-4t})V \quad (8.7.5)$$

由于 $t > 0$ 时，电感和电容串联，故电感电流和电容电流是相同的。所以：

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

将式(8.7.3)乘以 $C=0.25$ ，并将 A_1 和 A_2 的值代入得到：

$$i(t) = \frac{4}{3}(4e^{-t} - e^{-4t})A \quad (8.7.6)$$

注意， $i(0)=4A$ ，与期望结果相同。

第二种情况 $R=4\Omega$ 。当 $t < 0$ 时，开关闭合，电容相当于开路，电感相当于短路，初始电流如下：

$$i(0) = \frac{24}{4+1} = 4.8(A)$$

电容初始电压为：

$$v(0) = 1i(t) = 4.8(V)$$

特征根如下：

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

ω_0 仍为 2。这种情况下， $s_1=s_2=-\alpha=-2$ ，得到临界阻尼自然响应。全响应如下：

$$v(t) = v_{ss} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

其中， $v_{ss}=24V$ ，得到：

$$v(t) = 24 + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \quad (8.7.7)$$

需要利用初始条件求解常数 A_1 和 A_2 ：

$$v(0) = 4.8 = 24 + A_1 \Rightarrow A_1 = -19.2 \quad (8.7.8)$$

因为 $i(0)=Cd(v(0)/dt)=4.8$ ，所以：

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{4.8}{C} = 19.2$$

通过式(8.7.7)可得：

$$\frac{dv}{dt} = (-2A_1 - 2A_2 t + A_2)e^{-2t} \quad (8.7.9)$$

当 $t=0$ 时：

$$\frac{dv(0)}{dt} = 19.2 = -2A_1 + A_2 \quad (8.7.10)$$

通过式(8.7.8)和式(8.7.10)可以求出， $A_1=-19.2$ ， $A_2=-19.2$ 。将 A_1 和 A_2 的值代入到式(8.7.1)，得到：

$$v(t) = 24 - 19.2(1+t)e^{-2t}V \quad (8.7.11)$$

电感电流和电容电流是相同的，所以：

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

将式(8.7.9)乘以 $C=0.25$ ，并将 A_1 和 A_2 的值代入得到：

$$i(t) = (4.8 + 9.6t)e^{-2t}A \quad (8.7.12)$$

注意， $i(0)=4.5A$ ，与期望结果相同。

第三种情况 $R=1\Omega$ 。初始电感电流为：

$$i(0) = \frac{24}{1+1} = 12(A)$$

电容初始电压和 1Ω 电阻两端电压是相同的，所以：

$$v(0) = 1i(0) = 12(V)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2 \times 1} = 0.5$$

由于 $\alpha=0.5$, $\omega_0=2$ 。得到欠阻尼响应为：

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0.5 \pm j1.936$$

全响应如下：

$$v(t) = 24 + (A_1 \cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t)e^{-0.5t} \quad (8.7.13)$$

求解 A_1 和 A_2 ：

$$v(0) = 12 = 24 + A_1 \Rightarrow A_1 = -12 \quad (8.7.14)$$

因为 $i(0)=Cd(v/dt)=12$ ，所以：

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{12}{C} = 48 \quad (8.7.15)$$

由于：

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= e^{-0.5t}(-1.936A_1 \sin 1.936t + 1.936A_2 \cos 1.936t) \\ &\quad - 0.5e^{-0.5t}(A_1 \cos 1.936t + A_2 \sin 1.936t) \end{aligned} \quad (8.7.16)$$

当 $t=0$ 时：

$$\frac{dv(0)}{dt} = 48 = (-0 + 1.936A_2) - 0.5(A_1 + 0)$$

将 $A_1=-12$, $A_2=21.694$ 代入，式(8.7.13)变为：

$$v(t) = 24 + (21.694 \sin 1.936t - 12 \cos 1.936t)e^{-0.5t}V \quad (8.7.17)$$

电感电流为：

$$i(t) = C \frac{dv}{dt}$$

将式(8.7.9)和 $C=0.25$, A_1 和 A_2 的值代入得到：

$$i(t) = (3.1 \sin 1.936t + 12 \cos 1.936t)e^{-0.5t}A \quad (8.7.18)$$

注意， $i(0)=12A$ ，与期望结果相同。

图8-20画出了三种情况下的响应，可以看出临界阻尼响应在24V附近增长最快。

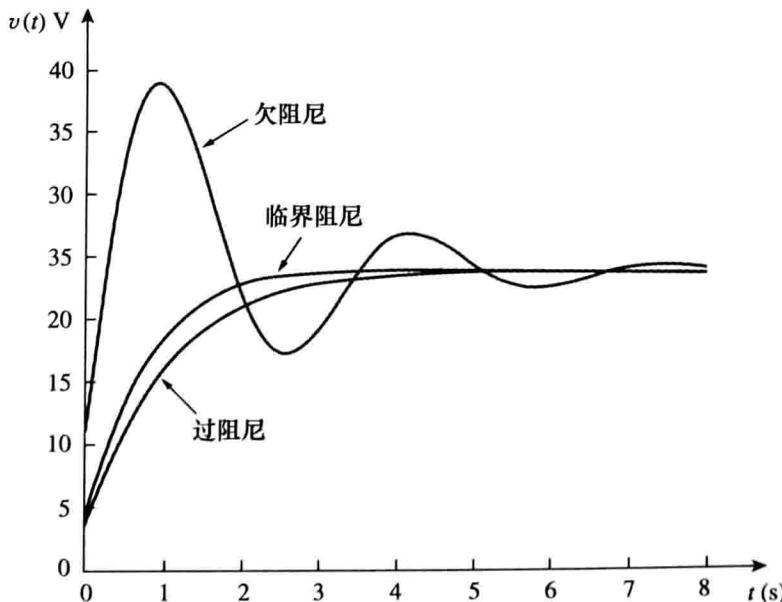
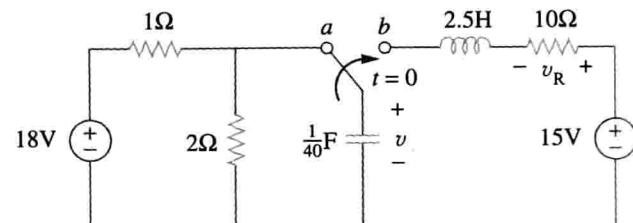


图8-20 例8-7三种阻尼的响应

练习 8-7 在图 8-21 中，开关在 *a* 位置闭合很长时间，在 $t=0$ 时刻，开关移动到 *b* 位置。求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 和 $v_R(t)$ 。

答案： $[15 - (1.7321 \sin 3.464t + 3 \cos 3.464t) e^{-2t}] V$, $3.464e^{-2t} \sin 3.464t V$



8.6 并联 RLC 电路的阶跃响应

图 8-22 所示的并联 RLC 电路中，需要求解由于直流电流源的突然的作用而产生的 i 。针对顶点节点运用 KCL 定理，得到：

$$\frac{v}{R} + i + C \frac{dv}{dt} = I_s \quad (8.46)$$

由于：

$$v = L \frac{di}{dt}$$

将 v 代入式(8.46)并在两边同时除以 LC 得到：

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC} \quad (8.47)$$

式(8.47)与式(8.29)具有相同的特征方程。

式(8.47)的全解包括暂态响应 $i_t(t)$ 和稳态响应 $i_{ss}(t)$ ；即：

$$i(t) = i_{ss}(t) + i_t(t) \quad (8.48)$$

暂态响应与之前 8.3 节得到的相同。稳态响应为稳定状态或者最终的 i 值。在图 8-22 所示电路中，电感电流的终值与电源电流 I_s 相同。故

$i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$	(过阻尼)
$i(t) = I_s + (A_1 + A_2) e^{-\alpha t}$	(临界阻尼)
$i(t) = I_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t}$	(欠阻尼)

(8.49)

每一项中的常数 A_1 和 A_2 可以通过初始条件 i 和 di/dt 决定。记住，式(8.49)中仅仅利用了电感电流 i ，电阻电流为 $i_R = v/R$ ，电容电流为 $i_C = Cdv/dt$ 。另外，任何变量 $x(t)$ 的全响应的直接形式如下：

$$x(t) = x_{ss}(t) + x_t(t) \quad (8.50)$$

其中 x_{ss} 和 x_t 分别为它的终值和暂态响应。

例 8-8 在图 8-23 所示电路中，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 和 $i_R(t)$ 。

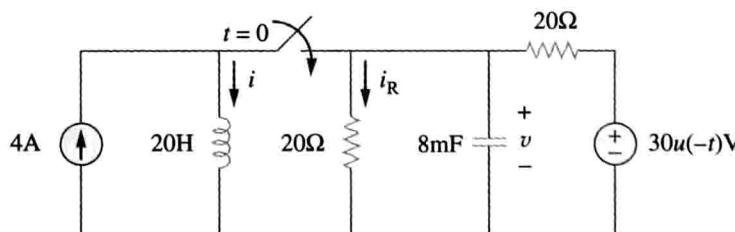


图 8-23 例 8-8 图

解：当 $t<0$ 时，开关断开，电路被分成两个独立的子电路。4A 的电流经过电感，所以：

$$i(0) = 4A$$

当 $t<0$ 时， $30u(-t)=30$ ；当 $t>0$ 时，为 $30u(-t)=0$ 。所以当 $t<0$ 时，电源电压有效。

电容相当于开路，它两端的电压和 20Ω 电阻两端的电压相同。分压后，初始电容电压为：

$$v(0) = \frac{20}{20+20} \times 30 = 15(\text{V})$$

当 $t>0$ 时，开关闭合，得到仅有一个电流源的并联 RLC 电路。电压源为0相当于短路。两个 20Ω 电阻并联，并联后的电阻为 $R=20\Omega \parallel 20\Omega=10\Omega$ 。特征根为：

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10 \times 8 \times 10^{-3}} = 6.25$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 8 \times 10^{-3}}} = 2.5$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -6.25 \pm \sqrt{39.0625 - 6.25} = -6.25 \pm 5.7282$$

即

$$s_1 = -11.978, \quad s_2 = -0.5218$$

由于 $\alpha > \omega_0$ ，得到过阻尼的情况。因此：

$$i(t) = I_s + A_1 e^{-11.978t} + A_2 e^{-0.5218t} \quad (8.8.1)$$

其中 $I_s=4\text{A}$ ，为 $i(t)$ 的终值。利用初值条件求解 A_1 和 A_2 。当 $t=0$ 时：

$$i(0) = 4 = 4 + A_1 + A_2 \Rightarrow A_2 = -A_1 \quad (8.8.2)$$

对式(8.8.1)中的 $i(t)$ 求导：

$$\frac{di}{dt} = -11.978A_1 e^{-11.978t} - 0.5218A_2 e^{-0.5218t}$$

所以当 $t=0$ 时：

$$\frac{di(0)}{dt} = -11.978A_1 - 0.5218A_2 \quad (8.8.3)$$

由于：

$$L \frac{di(0)}{dt} = v(0) = 15 \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{15}{L} = \frac{15}{20} = 0.75$$

将上式代入到式(8.8.3)并结合式(8.8.2)，得到：

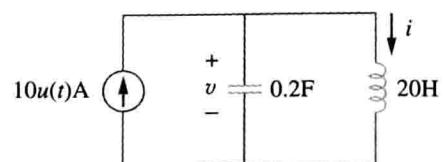
$$0.75 = (11.978 - 0.5218)A_2 \Rightarrow A_2 = 0.0655$$

所以， $A_1=-0.0655$ 和 $A_2=0.0655$ 。将 A_1 和 A_2 的值代入到式(8.8.1)得到全解为：

$$i(t) = 4 + 0.0655(e^{-0.5218t} - e^{-11.978t})(\text{A})$$

利用 $i(t)$ 得到 $v(t)=Ldi/dt$ ，且：

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{20} = \frac{L}{20} \frac{di}{dt} = 0.785e^{-11.978t} - 0.0342e^{-0.5218t} (\text{A})$$



练习 8-8 图 8-24 所示电路中，求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 和 $v(t)$ 。
答案： $10(1-\cos 0.25t)\text{A}$, $50\sin 0.25t\text{V}$

图 8-24 练习 8-8 图

8.7 一般二阶电路

现在我们已经掌握了串联和并联 RLC 电路，下面将在此基础上学习二阶电路。尽管串联和并联 RLC 电路是人们关注最多的，但运放等其他二阶电路也很有用。对于任意二阶电路，设阶跃响应为 $x(t)$ (可能为电压或电流)，则求解 $x(t)$ 的具体步骤为：

- 假设初始条件为 $x(0)$ 和 $dx(0)/dt$ ，终值为 $x(\infty)$ ，如8.2节介绍的方法。
- 关闭独立电源并利用KCL和KVL求解暂态响应 $x_t(t)$ 。得到二阶微分方程后，求解特征根。判断该响应是过阻尼、临界阻尼，或欠阻尼情况，求解响应中的未知常数。

提示：一个电路刚看起来可能比较复杂，但是为了求解暂态响应，关闭电源后，合并储能元件，那么这个电路可能化简为一阶电路，或者构成并联/串联 RLC 电路。如果能化

简为一阶电路，解答便和第7章所述一样简单。如果能构成并联/串联RLC电路，可以采用这章前面介绍的解法。

3. 求解出稳态响应：

$$x_{ss}(t) = x(\infty) \quad (8.51)$$

其中 $x(\infty)$ 为 x 的终值，根据步骤1求解。

4. 全响应包括暂态响应和稳态响应：

$$x(t) = x_t(t) + x_{ss}(t) \quad (8.52)$$

最终根据初始条件 $x(0)$ 和 $dx(0)/dt$ ，求解响应中的常数，如步骤1。

可运用上述的步骤求解任意二阶电路的阶跃响应，包括放大器等。后面的例子将解释上面的4个步骤。

提示：本章的问题也可以用拉普拉斯变换来解答，具体方法将在第15和16章讨论。

例8-9 图8-25所示电路中，求 $t > 0$ 时的全响应 v 和 i 。

解：首先求初值和终值。当 $t = 0^-$ 时，电路到达稳定状态。开关打开，等效电路如图8-26a所示，得到：

$$v(0^-) = 12V, \quad i(0^-) = 0$$

当 $t = 0^+$ 时，开关闭合，等效电路8-26b所示。通过连续电容电压和电感电流，可知：

$$v(0^+) = v(0^-) = 12V, \quad i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad (8.9.1)$$

运用 $Cdu/dt = i_C$ 或者 $du/dt = i_C/C$ 得到 $dv(0^+)/dt$ 。针对图8-26b中的节点a利用KCL定理得到：

$$i(0^+) = i_C(0^+) + \frac{v(0^+)}{2}$$

$$0 = i_C(0^+) + \frac{12}{2} \quad i_C(0^+) = -6A$$

因此：

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-6}{0.5} = -12(V/s) \quad (8.9.2)$$

如图8-26b所示，电感相当于短路，电容相当于开路，可以求出终值，即：

$$i(\infty) = \frac{12}{4+2} = 2(A), \quad v(\infty) = 2i(\infty) = 4(V) \quad (8.9.3)$$

下面求 $t > 0$ 时的暂态响应。关闭12V的电压源，得到图8-27所示的电路。针对图8-27中的节点a利用KCL定理得到：

$$i = \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} \quad (8.9.4)$$

针对左边的回路利用KVL定理得到：

$$4i + 1 \frac{di}{dt} + v = 0 \quad (8.9.5)$$

由于需要求解电压 v ，将式(8.9.4)中的 i 代入到式(8.9.5)中，得到：

$$2v + 2 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2v}{dt^2} + v = 0$$

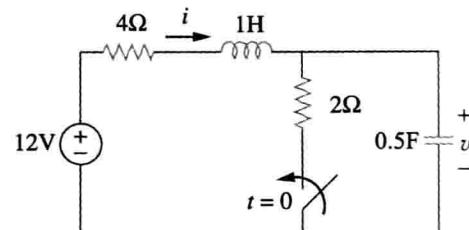
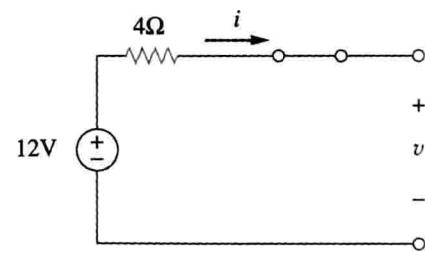
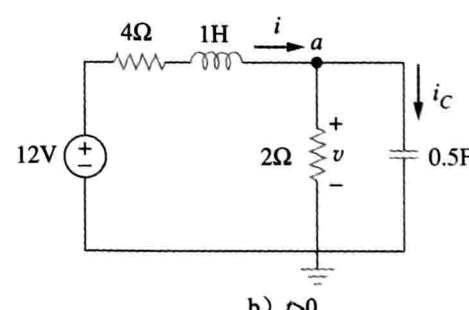


图8-25 例8-9图



a) $t < 0$



b) $t > 0$

图8-26 图8-25的等效电路

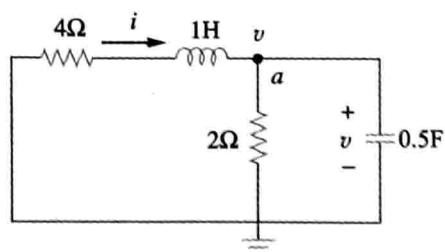


图8-27 例8-9的暂态响应

即

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = 0$$

由此可以得到特征方程如下：

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

根分别为： $s = -2$, $s = -3$, 所以自由响应为：

$$v_n(t) = Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (8.9.6)$$

其中 A 和 B 是需要求解的常数。稳态响应为：

$$v_{ss}(t) = v(\infty) = 4 \quad (8.9.7)$$

全响应为：

$$v(t) = v_t + v_{ss} = 4 + Ae^{-2t} + Be^{-3t} \quad (8.9.8)$$

现在利用初值求解常数 A 和 B 。通过式(8.9.1)得到 $v(0) = 12$, 将其代入到式(8.9.8)中得到：

$$12 = 4 + A + B \Rightarrow A + B = 8 \quad (8.9.9)$$

对式(8.9.8)中的 v 进行求导得到：

$$\frac{dv}{dt} = -2Ae^{-2t} - 3Be^{-3t} \quad (8.9.10)$$

将式(8.9.2)代入到式(8.9.10)中得到：

$$-12 = -2A - 3B \Rightarrow 2A + 3B = 12 \quad (8.9.11)$$

通过式(8.9.9)和式(8.9.11)得到：

$$A = 12, \quad B = -4$$

因此式(8.9.8)变为：

$$v(t) = 4 + 12e^{-2t} - 4e^{-3t} (V), \quad t > 0 \quad (8.9.12)$$

通过 v 可以得到图 8-26b 中其他变量的值，例如：

$$\begin{aligned} i &= \frac{v}{2} + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} = 2 + 6e^{-2t} - 2e^{-3t} - 12e^{-2t} + 6e^{-3t} \\ &= 2 - 6e^{-2t} + 4e^{-3t} (A) \quad t > 0 \end{aligned} \quad (8.9.13)$$

注意， $i(0) = 0$ 与式(8.9.1)相同。

练习 8-9 图 8-28 所示的电路中，求 $t > 0$ 时的 v 和 i 。

答案： $12(1 - e^{-5t})V$, $3(1 - e^{-5t})A$

例 8-10 图 8-29 所示电路中，求 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。

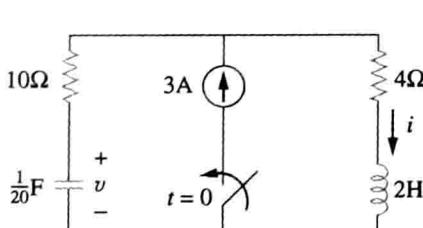


图 8-28 练习 8-9 图

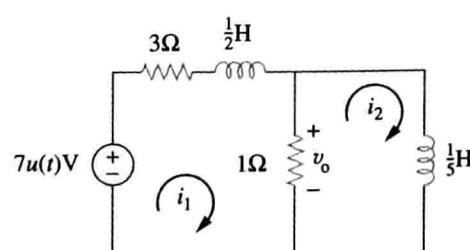


图 8-29 例 8-10 图

解：这是带有两个电感的二阶电路，首先确定网络电流 i_1 和 i_2 ，它们恰好是流过电感的电流，需要确定这些电流的初值和终值。

当 $t < 0$ 时， $7u(t) = 0$ ，因此 $i_1(0^+) = 0 = i_2(0^+)$ ；当 $t > 0$ 时， $7u(t) = 7$ ，所以等效电路如图 8-30a 所示。由于电感电流的连续性，有：

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0, \quad i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0 \quad (8.10.1)$$

$$v_{L2}(0^+) = v_o(0^+) = 1[i_1(0^+) - i_2(0^+)] = 0 \quad (8.10.2)$$

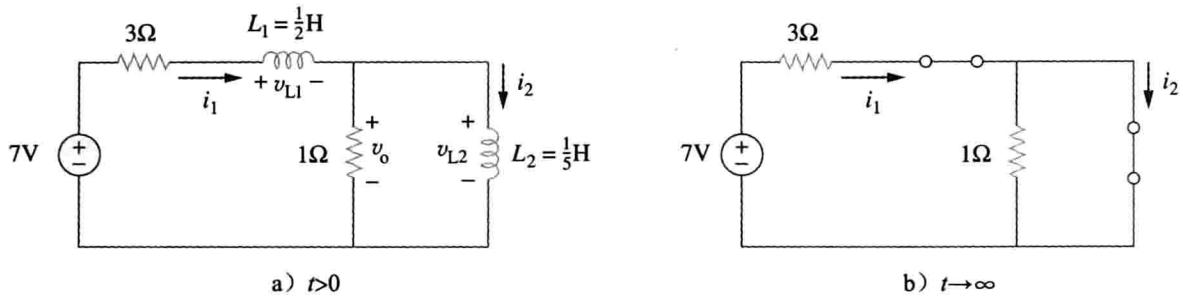


图 8-30 图 8-29 的等效电路

对左边的回路在 $t=0^+$ 时应用 KVL 得：

$$7 = 3i_1(0^+) + v_{L1}(0^+) + v_o(0^+)$$

即

$$v_{L1}(0^+) = 7V$$

由于 $L_1 di_1/dt = v_{L1}$ ，所以：

$$\frac{di_1(0^+)}{dt} = \frac{v_{L1}}{L_1} = \frac{7}{1/2} = 14V/s \quad (8.10.3)$$

类似地，由于 $L_2 di_2/dt = v_{L2}$ ，所以：

$$\frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{v_{L2}}{L_2} = 0 \quad (8.10.4)$$

在 $t \rightarrow \infty$ 时，电路达到稳定状态，电感可以用短路来代替，如图 8-30b 所示。从此可以得到：

$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{7}{3}A \quad (8.10.5)$$

接下来，通过移除电压源的方法来获得暂态响应，如图 8-31 所示。在两个网孔中应用 KVL 得到：

$$4i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (8.10.6)$$

和

$$i_2 + \frac{1}{5} \frac{di_2}{dt} - i_1 = 0 \quad (8.10.7)$$

由公式(8.10.6)可得：

$$i_2 = 4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} \quad (8.10.8)$$

把式(8.10.8)代入式(8.10.7)可得：

$$\begin{aligned} 4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} + \frac{4}{5} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{10} \frac{d^2 i_1}{dt^2} - i_1 &= 0 \\ \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 13 \frac{di_1}{dt} + 30i_1 &= 0 \end{aligned}$$

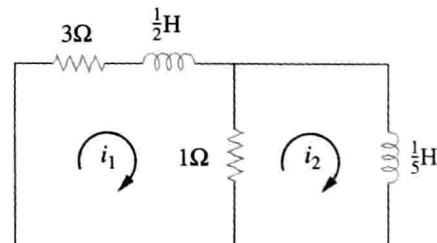


图 8-31 求解例 8-10 的暂态响应

从这些公式中可以得到特征方程：

$$s^2 + 13s + 30 = 0$$

根为 $s = -3$ 和 $s = -10$ 。因此，暂态响应是：

$$i_{1n} = Ae^{-3t} + Be^{-10t} \quad (8.10.9)$$

其中 A 和 B 是常数。稳态响应是：

$$i_{1ss} = i_1(\infty) = \frac{7}{3}A \quad (8.10.10)$$

从式(8.10.9)和(8.10.10)可得全响应是：

$$i_1(t) = \frac{7}{3} + Ae^{-3t} + Be^{-10t} \quad (8.10.11)$$

最终由初值求得 A 和 B 。从式(8.10.1)和式(8.10.11)得到：

$$0 = \frac{7}{3} + A + B \quad (8.10.12)$$

对式(8.10.11)求导，之后设 $t=0$ ，计算式(8.10.3)，可得：

$$14 = -3A - 10B \quad (8.10.13)$$

由式(8.10.12)和式(8.10.13)可得： $A=-4/3$, $B=-1$ 。因此：

$$i_1(t) = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}e^{-3t} - e^{-10t} \quad (8.10.14)$$

现在由 i_1 求解 i_2 ，对图 8-30a 左边回路应用 KVL 得到：

$$7 = 4i_1 - i_2 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt} \Rightarrow i_2 = -7 + 4i_1 + \frac{1}{2} \frac{di_1}{dt}$$

把 i_1 代入式(8.10.14)可得：

$$i_2(t) = -7 + \frac{28}{3} - \frac{16}{3}e^{-3t} - 4e^{-10t} + 2e^{-3t} + 5e^{-10t} = \frac{7}{3} - \frac{10}{3}e^{-3t} + e^{-10t} \quad (8.10.15)$$

从图 8-29 可得：

$$v_o(t) = 1[i_1(t) - i_2(t)] \quad (8.10.16)$$

把式(8.10.14)和(8.10.15)代入式(8.10.16)得到：

$$v_o(t) = 2(e^{-3t} - e^{-10t}) \quad (8.10.17)$$

注意 $v_o(0)=0$ ，符合式(8.10.2)的初值。

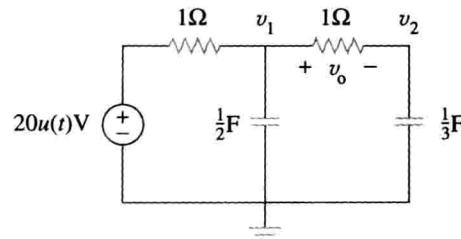


图 8-32 练习 8-10 图

练习 8-10 求图 8-32 所示电路在 $t>0$ 时的 $v_o(t)$ 。
(提示：首先求出 v_1 和 v_2)

答案： $8(e^{-t}-e^{-6t})V$, $t>0$

8.8 二阶运算放大器电路

如果一个运算放大器电路带有两个储能元件，而这两个元件又不能合并为一个独立的元件，那么这个电路就是二阶的。因为电感体积大且笨重，所以很少用在实际的运算放大器电路中。因此，本节仅考虑 RC 二阶运算放大器电路，这种电路应用广泛，例如滤波器和振荡器。

提示：在二阶电路中使用运算放大器可以不必使用电感，这在有些不适用于出现电感的应用中是很有用的。

二阶运算放大器电路的计算遵循 8.7 节给出的四个步骤。

例 8-11 在图 8-33 所示的运算放大器中，计算 $v_s = 10u(t)mV$ 且 $t>0$ 时的 $v_o(t)$ 。令 $R_1 = R_2 = 10k\Omega$, $C_1 = 20\mu F$, $C_2 = 100\mu F$ 。

解：尽管可以利用前面给出的四个步骤来解决这个问题，但是求解过程还是会有一些不同。由于电压跟随器的结构，使得 C_1 两端的电压是 v_o 。在节点 1 利用 KVL 得：

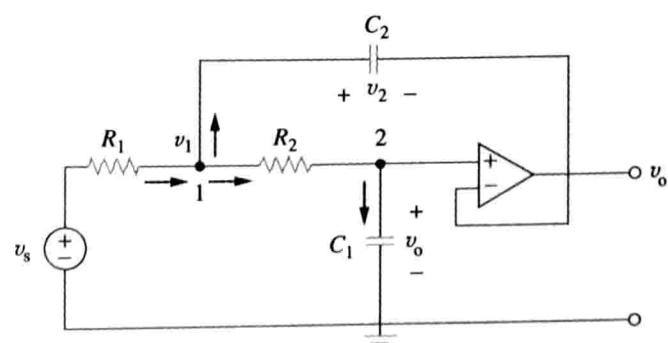


图 8-33 例 8-11 图

$$\frac{v_s - v_1}{R_1} = C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 - v_o}{R_2} \quad (8.11.1)$$

在节点 2, 利用 KCL 得:

$$\frac{v_1 - v_o}{R_2} = C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.2)$$

其中:

$$v_2 = v_1 - v_o \quad (8.11.3)$$

尝试消去从式(8.11.2)~(8.11.3)中的 v_1 和 v_2 , 把式(8.11.2)和(8.11.3)代入式(8.11.1)中, 得:

$$\frac{v_s - v_1}{R_1} = C_2 \frac{dv_1}{dt} - C_2 \frac{dv_o}{dt} + C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.4)$$

从式(8.11.2)可得:

$$v_1 = v_o + R_2 C_1 \frac{dv_o}{dt} \quad (8.11.5)$$

把公式(8.11.5)代入式(8.11.4)中, 得到:

$$\frac{v_s}{R_1} = \frac{v_o}{R_1} + \frac{R_2 C_1}{R_1} \frac{dv_o}{dt} + C_2 \frac{dv_o}{dt} + R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} - C_2 \frac{dv_o}{dt} + C_1 \frac{dv_o}{dt}$$

即

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{v_s}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (8.11.6)$$

代入 R_2 、 R_2 、 C_1 、 C_2 , 式(8.11.6)变成:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 2 \frac{dv_o}{dt} + 5 v_o = 5 v_s \quad (8.11.7)$$

为了获得暂态响应, 设式(8.11.7)中的 $v_s = 0$, 和关闭电源的效果相同。特征方程是:

$$s^2 + 2s + 5 = 0$$

复数根 $s_{1,2} = -1 \pm j2$ 。因此, 暂态响应是:

$$v_{ot} = e^{-t} (A \cos 2t + B \sin 2t) \quad (8.11.8)$$

其中 A 和 B 是需要确定的未知常数。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电路达到稳定状态, 电容可以用开路来代替。因为在稳定状态下, 没有电流流过 C_1 和 C_2 , 而且没有电流进入理想运算放大器的输入端, 电流不会流过 R_1 和 R_2 。

因此:

$$v_o(\infty) = v_1(\infty) = v_s$$

那么稳态响应是:

$$v_{oss} = v_o(\infty) = v_s = 10 \text{mV}, \quad t > 0 \quad (8.11.9)$$

全响应是:

$$v_o(t) = v_{ot} + v_{oss} = 10 + e^{-t} (A \cos 2t + B \sin 2t) (\text{mV}) \quad (8.11.10)$$

为了确定 A 和 B , 需要确定初值。当 $t < 0$ 时, $v_s = 0$, 因此:

$$v_o(0^-) = v_2(0^-) = 0$$

当 $t > 0$ 时, 电源开始工作。然而, 由于电容电压的连续性, 所以:

$$v_o(0^+) = v_2(0^+) = 0 \quad (8.11.11)$$

由式(8.11.3)可得:

$$v_1(0^+) = v_2(0^+) + v_o(0^+) = 0$$

因此, 由式(8.11.2)得:

$$\frac{dv_o(0^+)}{dt} = \frac{v_1 - v_o}{R_2 C_1} = 0 \quad (8.11.12)$$

现在将式(8.11.11)代入全响应的表达式(8.11.10), 在 $t=0$ 时:

$$0 = 10 + A \Rightarrow A = -10 \quad (8.11.13)$$

对式(8.11.10)求导得:

$$\frac{dv_o}{dt} = e^{-t}(-A\cos 2t - B\sin 2t - 2A\sin 2t + 2B\cos 2t)$$

设 $t=0$, 并结合式(8.11.12), 得到:

$$0 = -A + 2B \quad (8.11.14)$$

从式(8.11.13)和(8.11.14)可得, $A = -10$, $B = -5$ 。

因此, 阶跃响应变为:

$$v_o(t) = 10 - e^{-t}(10\cos 2t + 5\sin 2t) \text{ (mV)}, \quad t > 0$$

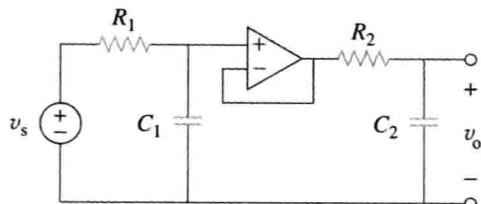


图 8-34 练习 8-11 图

练习 8-11 图 8-34 所示的运算放大器电路中, $v_s = 10u(t) \text{ V}$, 计算 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。假设 $R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 20\mu\text{F}$, $C_2 = 100\mu\text{F}$ 。

答案: $(10 - 12.5e^{-t} + 2.5e^{-5t}) \text{ V}, \quad t > 0$

8.9 基于 PSpice 的 RLC 电路分析

如同第 7 章的 RC 或 RL 电路一样, 利用 PSpice 可以很方便地对 RLC 电路进行分析。接下来用两个例题进行解释说明。

例 8-12 图 8-35a 的输入电压对应图 8-35b 中的 v_s 。利用 PSpice 画出 $v(t)$ 在 $0 < t < 4\text{s}$ 时的波形。

解: 1. 明确问题。正如大多数题目一样, 问题已经很明确了。

2. 列出已知条件。输入是一个时长为 2s 、幅度为 12V 的方波, 可以利用 PSpice 画出输出波形。

3. 确定备选方案。因为需要使用 PSpice, 这仅仅是方案之一。但是, 可以用在 8.5 节所述方法来验证它(串联 RLC 电路的阶跃响应)。

4. 尝试求解。原理图如图 8-36 所示。用 VPWL 电压源限定脉冲, 但也可以使用 VPULSE 来替代它。利用分段线性函数, 设置 VPWL 参数如下: $T1=0$, $V1=0$, $T2=0.0001$, $V2=12$ ……如图 8-36 所示。插入两个电压探针来绘制输入输出电压波形。画出电路图且设置好参数后, 选择 Analysis/Setup/Transient 打开暂态分析对话框。对于并联 RLC 电路, 特征方程的根是 -1 和 -9 。因此, 可以设置终止时间为 4s (较小根幅度的 4

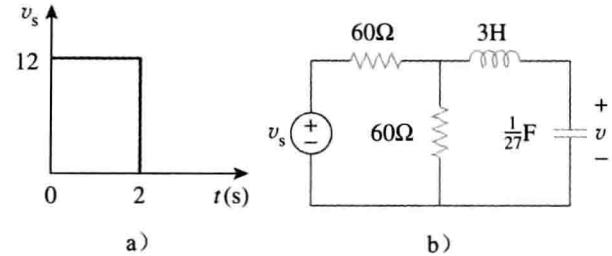


图 8-35 例 8-12 图

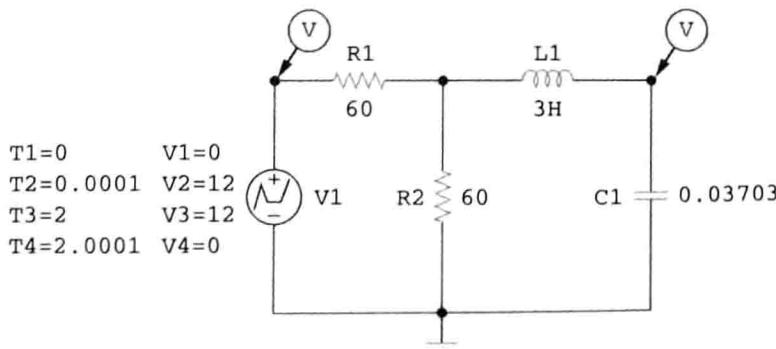


图 8-36 图 8-35b 的电路原理图

倍)。保存好原理图后, 选择 Analysis/Simulate 获得输入输出电压的波形图, PSpice A/D 窗口如图 8-37 所示。

现在用 8.5 节的方法来进行验证。首先计算电源和电阻串联支路两端的戴维南等效电压, $v_{Th}=12/2=6V$ (开路时两个电阻进行平分电压), 等效阻抗是 $30\Omega(60\parallel60)$ 。因此, 可以利用 $R=30\Omega$, $L=3H$, $C=1/27F$ 来求解响应。

首先需要求解 α 和 ω_0 :

$$\alpha=R/(2L)=30/6=5$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{3\times\frac{1}{27}}}=3$$

因为 $5>3$, 所以为过阻尼情况:

$$s_{1,2}=-5\pm\sqrt{5^2-9}=-1,-9, \quad v(0)=0, \quad v(\infty)=6V, \quad i(0)=0$$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

其中:

$$v(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-9t}+6$$

$$v(0)=0=A_1+A_2+6$$

$$i(0)=0=C(-A_1-9A_2)$$

得到 $A_1=-9A_2$ 。代入上式得: $0=9A_2-A_2+6$, 即 $A_2=0.75$ 和 $A_1=-6.75$

$$v(t)=(-6.75e^{-t}+0.75e^{-9t}+6)u(t)V \quad 0 < t < 2s$$

当 $t=1s$ 时, $v(1)=-6.75e^{-1}+0.75e^{-9}+6=-2.483+0.0001+6=3.517V$ 。当 $t=2s$ 时, $v(2)=-6.75e^{-2}+0+6=5.086V$ 。注意, $2 < t < 4s$ 时, $V_{Th}=0$, 这表明 $v(\infty)=0$ 。从而, $v(t)=(A_3e^{-(t-2)}+A_4e^{-9(t-2)})u(t-2)(V)$ 。当 $t=2s$ 时, $A_3+A_4=5.086$ 。

$$i(t)=\frac{(-A_3e^{-(t-2)}-9A_4e^{-9(t-2)})}{27}$$

和

$$i(2)=\frac{(6.75e^{-2}-6.75e^{-18})}{27}=33.83(mA)$$

因此 $-A_3-9A_4=0.9135$ 。

联立两个方程式, 得到 $-A_3-9\times(5.086-A_3)=0.9135$, 解得 $A_3=5.835$, $A_4=-0.749$ 。

$$v(t)=(5.835e^{-(t-2)}-0.749e^{-9(t-2)})u(t-2)(V)$$

当 $t=3s$ 时, $v(3)=(2.147-0)=2.147V$; 当 $t=4s$ 时, $v(4)=0.789V$ 。

5. 评价结果。上面的计算值和图 8-37 绘出的值在所示的精度范围内符合程度很高。

6. 是否满意? 是的, 结果得到验证, 可以作为问题的解决方案。

练习 8-12 图 8-35a 中的脉冲电压对应图 8-38 电路中的 v_s , 利用 PSpice 计算 $0 < t < 4s$ 时的 $i(t)$ 。

答案: 结果如 8-39 所示

例 8-13 对于图 8-40 的电路, 利用 PSpice 求 $0 < t < 3s$ 时的 $i(t)$ 。

解: 当开关处在 a 位置时, 6Ω 电阻未连入电路。这种情况的原理图如图 8-41a 所示。为了确保 $i(t)$ 流入探针, 在电感放入电路前将其旋转 3 次, 对电容器实施同样的操作。

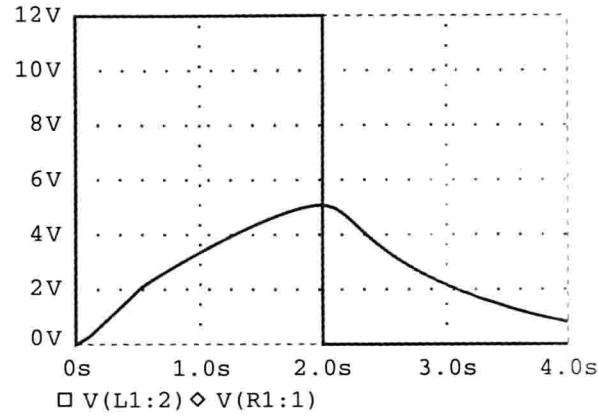


图 8-37 例 8-12 的输入和输出

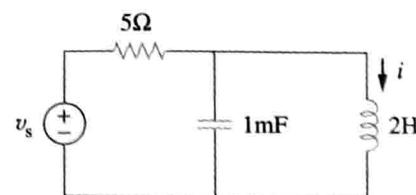


图 8-38 练习 8-12 图

加入伪元件 VIEWPOINT 和 IPROBE 来确定初始电容电压和初始电感器电流。选择 Analysis/Simulate 进行直流 PSpice 分析。如图 8-41a 所示，从直流分析获得的初始电容电压是 0V，初始电感电流 $i(t)$ 为 4A。这些初始值会在暂态分析中用到。

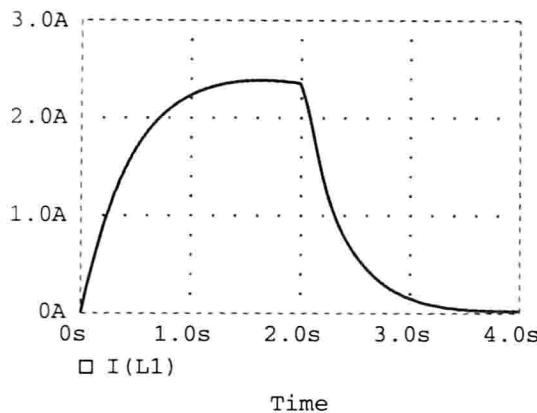
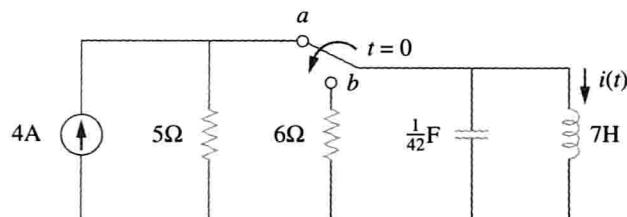
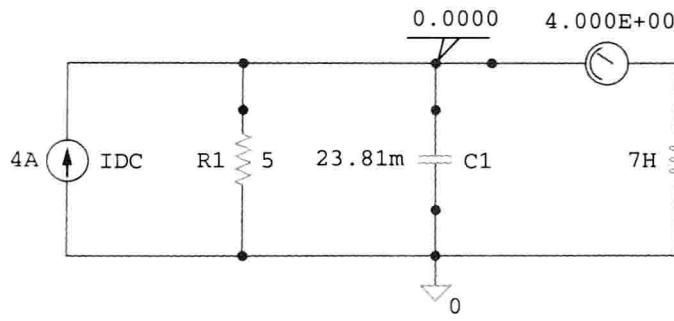
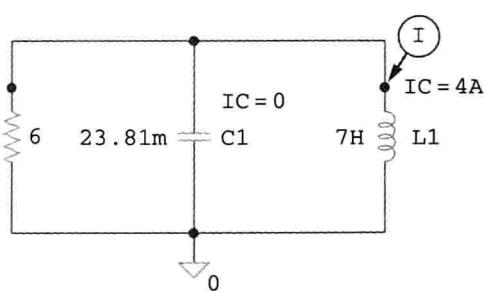
图 8-39 练习 8-12 的 $i(t)$ 波形图

图 8-40 例 8-13 图



a) 直流分析

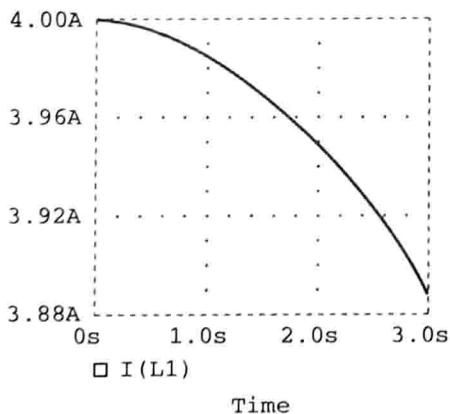
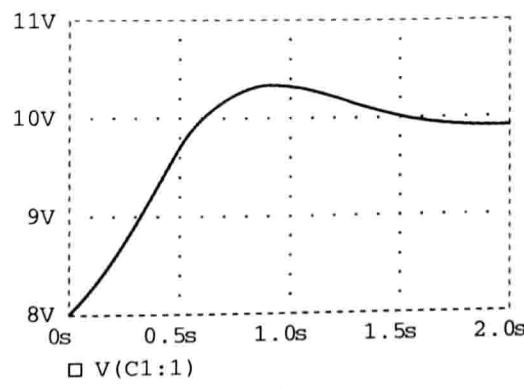


b) 暂态分析

图 8-41 例 8-13 图

当开关处于 b 位置时，电路变成一个无源的并联 RLC 电路，原理图如图 8-41b 所示。设置初始状态：对于电容 $IC=0$ ，对于电感 $IC=4A$ 。把电流标签标在电感的引脚 1 处，选择 Analysis/Setup/Transient 打开暂态分析对话框，并设置终止时间为 3s。在保存好原理图后，选择 Analysis/Transient。 $i(t)$ 的波形图如图 8-42 所示。波形图符合 $i(t)=4.8e^{-t}-0.8e^{-6t}$ (A)，即符合手工计算的结果。

练习 8-13 对于图 8-21 的电路(参见练习 8.7)，利用 PSpice 求 $0 < t < 2$ 时 $v(t)$ 的结果：见图 8-43

图 8-42 例 8-13 的 $i(t)$ 波形图图 8-43 练习 8-13 的 $v(t)$ 波形图

† 8.10 对偶原理

利用对偶的概念解决电路问题是一种省时且有效的方法。考虑式(8.4)和式(8.29)之间的相似性，这两个公式是一样的，除了必须交换以下参量：(1)电压和电流；(2)电阻和电导；(3)电容和电感。因此，虽然有时两个电路并不相同，但它们的方程和解是一样的，除了某些补充元素需要互相交换。这种可交换性就是对偶(duality)原理。

对偶定理表明了特征方程对以及电子电路定理之间的平行性。

对偶对如表 8-1 所示。注意，并没有出现在表 8-1 中，这是因为是非线性的，不具备对偶性，因此不能应用对偶原理。另外从表 8-1 也可看出，对偶定理扩展了电路元件、电路结构和电路理论。

表 8-1 对偶对

电阻 R	电导 G	串联	并联
电感 L	电容 C	开路	短路
电压 v	电流 i	KVL	KCL
电压源	电流源	戴维南	诺顿
节点	网孔		

如果两个电路可以用带有互补参量的相同的特征方程表述，那么称它们是对偶的。

对偶性定理的有用性是不言而喻的。一旦知道某种电路的解决方案，便自动获得了对偶电路的解决方案。很明显，图 8-8 和图 8-13 是对偶电路，因此，式(8.32)与式(8.11)是对偶的。必须清楚的是，这里的对偶性方法仅限于平面电路，非平面电路的对偶性超出了本书的范围，因为非平面电路不能描述为网孔方程系统。

提示：即使满足线性定理，一个电路或变量也可能没有对偶量。例如，互感(参见第 13 章)没有对偶量。

为了求出给定电路的对偶电路，没有必要写出网孔方程或节点方程，而可以使用图解技术。对于给定的平面电路，通常通过以下三个步骤来构建对偶电路：

1. 在给定电路的每个网孔中心标定节点，在电路外部放置对偶电路的参考节点(接地)。

2. 在节点之间画线，每条线穿过一个元件，并用对偶原理替换该元件。

3. 为了确定电压源的极性以及电流源的方向，按照以下原则：电压源产生一个正面(顺时针)的网孔电流，它的对偶电流源的参考方向从地到非参考节点。

如果还有疑问，可以通过写出节点或网孔方程来验证对偶电路。原始电路的网孔(节点)方程和对偶电路的节点(网孔)方程是相似的。以下两个例题可以解释对偶原理。

例 8-14 构建图 8-44 所示电路的对偶电路。

解：如图 8-45a 所示，首先在两个网孔上标定节点 1、2 以及接地点 0。连接不同的节点，使连线穿过一个元件。用对偶原理替换连线穿过的元件。例如，在节点 1 和 2 之间的线穿过 2H 的电感，因此需要把 2F 的电容(电感的对偶)放在线上。在节点 1 和 0 之间的线穿过 6V 电压源，因此替换为一个 6A 的电流源。画出穿过所有元件的连线，便画出了图 8-45a 所示电路的对偶电路。清楚的对偶电路如图 8-45b 所示。

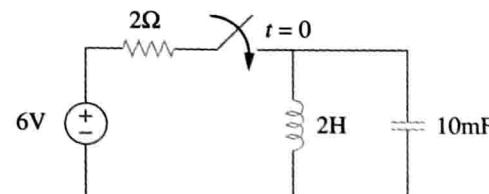
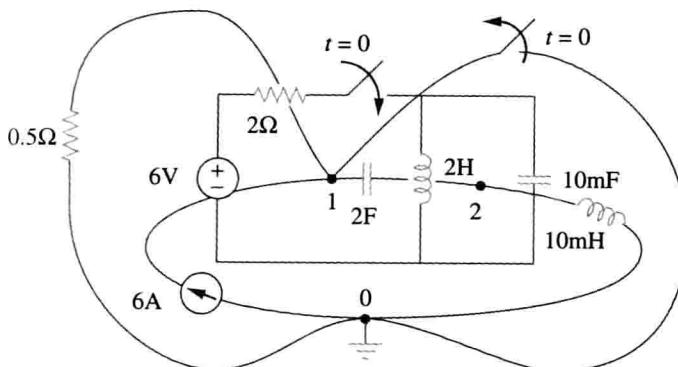
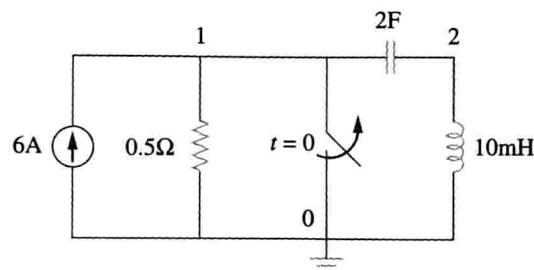


图 8-44 例 8-14 图



a) 构建例8-44的对偶电路



b) 重建的对偶电路

图 8-45 求解例 8-14

练习 8-14 构建图 8-46 所示电路的对偶电路。

答案：见图 8-47

例 8-15 求图 8-48 的对偶电路。

解：原始电路的对偶电路如图 8-49a 所示。首先标记节点 1、2、3 和参考节点 0。连接节点 1 和 2，把穿过这两点的 2F 电容用 2H 电感代替。

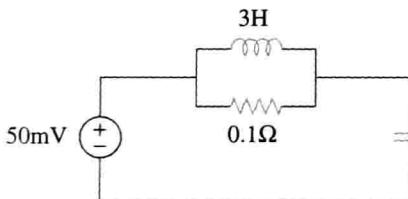


图 8-47 图 8-46 的对偶电路

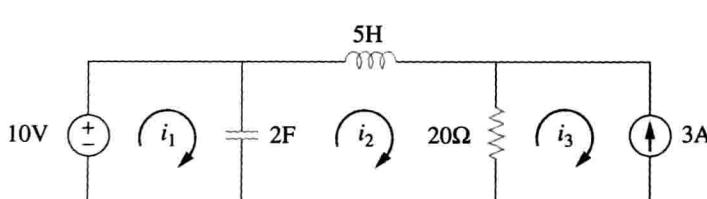
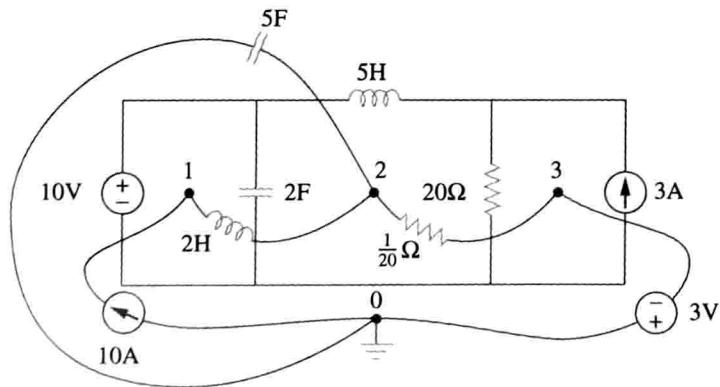
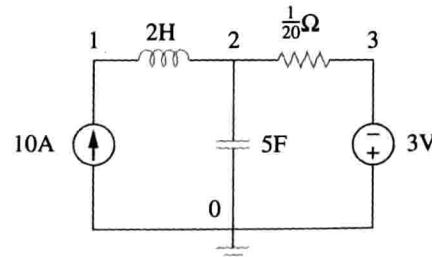


图 8-48 例 8-15 图

连接节点 2 和 3，把穿过这两点的 20Ω 电阻用 $1/20\Omega$ 电阻代替。重复这样的操作直到所有的元件都完成替换。结果如图 8-49a 所示，重建的对偶电路如图 8-49b 所示。



a) 构建图8-48的对偶电路



b) 重建的对偶电路

图 8-49 例 8-15 图

为了验证电压源和电流源的方向，可以使用图 8-48 所示原始电路的网孔电流 i_1 、 i_2 、 i_3 （所有电流都是顺时针方向）。10V 的电压源产生正向的网孔电流 i_1 ，所以它的对偶元件便是一个从节点 0 流向 1 的 10A 的电流源。同理，图 8-48 所示的 $i_3 = -3A$ 的对偶为 $v_3 = -3V$ ，如图 8-49b 所示。

练习 8-15 构建图 8-50 所示电路的对偶电路。

答案：见图 8-51

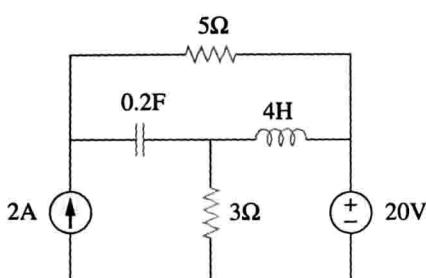


图 8-50 练习 8-15 图

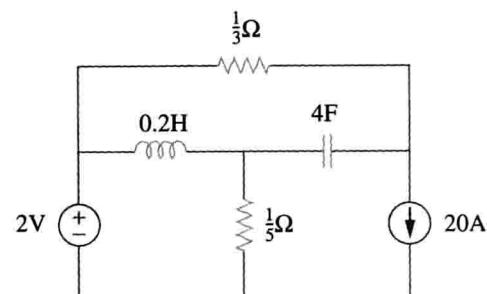


图 8-51 图 8-50 的对偶电路

† 8.11 应用实例

RLC 电路可用于控制和通信电路中，例如振铃电路、校正电路、谐振电路、平滑电路以及滤波器等。在介绍交流源之前，大部分电路还没有涉及，因此本节仅讨论两个简单的应用：汽车点火和平滑电路。

8.11.1 汽车点火系统

在 7.9.4 节中，我们把汽车点火系统看成是一个充电系统，而这仅仅是系统的一部分。本节考虑另一部分——发电系统。系统模型如图 8-52 所示，12V 的电源由电池和交流发电机供应， 4Ω 电阻表示接线电阻，点火线圈表示为 8mH 的电感， $1\mu\text{F}$ 的电容（汽车的机械电容器）和开关（断点或电子点火）串联。接下来的例 8-16 将会解释图 8-52 所示的 RLC 电路是如何产生高电压的。

例 8-16 假设图 8-52 的开关在 $t=0^-$ 之前处于闭合状态，求 $t>0$ 时的电感电压 v_L 。

解：如果开关在 $t=0^-$ 之前闭合，且电路处于稳定状态，那么：

$$i(0^-) = \frac{12}{4} = 3\text{A}, v_C(0^-) = 0$$

在 $t=0^+$ 时，开关断开，由连续性条件可得：

$$i(0^+) = 3\text{A}, \quad v_C(0^+) = 0 \quad (8.16.1)$$

由 $v_L(0^+)$ 求得 $di(0^+)/dt$ 。在 $t=0^+$ 时，利用 KVL 可得：

$$\begin{aligned} -12 + 4i(0^+) + v_L(0^+) + v_C(0^+) &= 0 \\ -12 + 4 \times 3 + v_L(0^+) + 0 &= 0 \Rightarrow v_L(0^+) = 0 \end{aligned}$$

因此：

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 0 \quad (8.16.2)$$

随着 $t \rightarrow \infty$ 系统达到稳定状态，因此电容表现为开路。因此：

$$i(\infty) = 0 \quad (8.16.3)$$

在 $t>0$ 时应用 KVL 定理，得到：

$$12 = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_C(0)$$

对每一项求导，得到：

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (8.16.4)$$

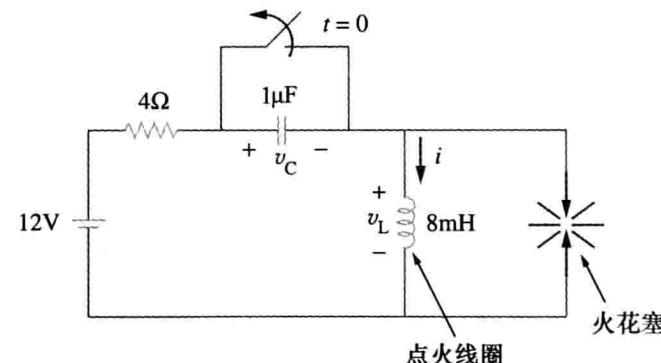


图 8-52 汽车点火电路

采取8.3节的步骤可以求得暂态响应。代入 $R=4\Omega$, $L=8mH$, $C=1\mu F$, 得到:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 250, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.118 \times 10^4$$

因为 $\alpha < \omega_0$, 所以响应是欠阻尼的。阻尼频率是:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \approx \omega_0 = 1.118 \times 10^4$$

暂态响应是:

$$i_t(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \quad (8.16.5)$$

其中 A 和 B 是常数。稳态响应是:

$$i_{ss}(t) = i(\infty) = 0 \quad (8.16.6)$$

所以完全响应是:

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t) = e^{-250t} (A \cos 11180t + B \sin 11180t) \quad (8.16.7)$$

现在确定 A 和 B :

$$i(0) = 3 = A + 0 \Rightarrow A = 3$$

对式(8.16.7)求导, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & -250e^{-250t} (A \cos 11180t + B \sin 11180t) \\ & + e^{-250t} (-11180A \sin 11180t + 11180B \cos 11180t) \end{aligned}$$

取 $t=0$, 结合式(8.16.2)可得:

$$0 = -250A + 11180B \Rightarrow B = 0.0671$$

所以:

$$i(t) = e^{-250t} (3 \cos 11180t + 0.0671 \sin 11180t) \quad (8.16.8)$$

电感电压是:

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = -268e^{-250t} \sin 11180t \quad (8.16.9)$$

当正弦值为1时得到最大值, 即 $11180t_0 = \pi/2$ 或 $t_0 = 140.5\mu s$ 。在 t_0 时刻, 电感电压峰值为:

$$v_L(t_0) = -268e^{-250t_0} = -259V \quad (8.16.10)$$

尽管这个值远小于汽车点燃火花塞所需的 $6000\sim10000V$ 的电压范围, 但可以应用变压器把电感电压提高到所需的水平。

练习 8-16 在图 8-52 中, 计算 $t>0$ 时的电容电压。

答案: $12 - 12e^{-250t} \cos 11180t + 267.7e^{-250t} \sin 11180t(V)$

8.11.2 平滑电路

在典型的数字通信系统中, 传输的信号首先要经过采样。采样是从待处理信号中选择信号的过程, 而不是处理全部信号。每个采样信号转换成用一系列脉冲表示的二进制数字。这些脉冲经传输线传输, 例如同轴电缆、双绞线、光纤等。在接收端, 信号由数-模转换器(D/A)进行恢复, 而数模转换器的输出具有梯子功能, 即每个时间间隔都是固定的。为了恢复模拟信号, 需要一个平滑电路来平滑输出信号, 如图8-53所示, RLC电路可以实现这一功能。

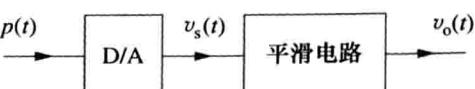
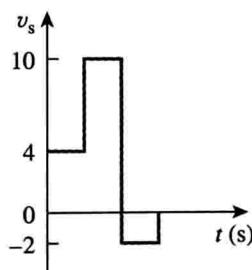


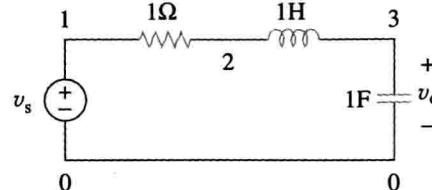
图 8-53 数-模转换器的输入为一系列脉冲, 输出用于平滑电路

例 8-17 D/A转换器的输出如图8-54a所示, 图8-54a的RLC电路用作平滑电路, 试求电压 $v_o(t)$ 。

解: 最好的解决方案是利用PSpice仿真, 原理图如图8-55a所示。

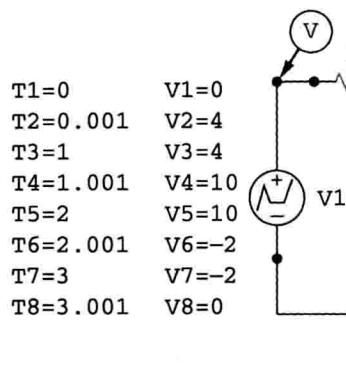


a) D/A 转换器的输出

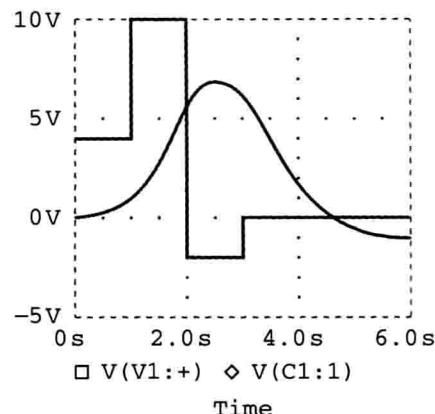


b) RLC 平滑电路

图 8-54 例 8-17 图



a) 原理图



b) 输入和输出电压

图 8-55 例 8-17 图(PSpice)

图 8-54a 的脉冲可以利用分段线性函数来输入。V1 的参数设置为：T1=0, V1=0, T2=0.001, V2=4, V3=4……为了画出输入和输出电压的波形，可以插入两个电压探针。在暂态分析对话框中，选择 Analysis/Setup/Transient 并设置终止时间为 6s。保存完原理图后，选择 Analysis/Simulate 运行可以获得图 8-55b 所示的图形。

练习 8-17 如果 D/A 转换器的输出如图 8-56 所示，重做例 8-17。 答案：见图 8-57

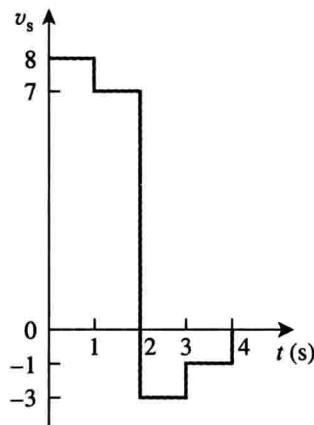


图 8-56 练习 8-17 图

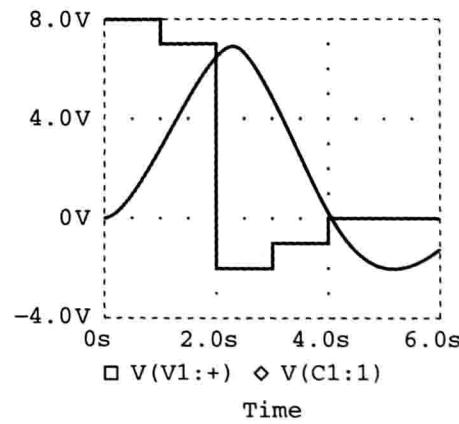


图 8-57 练习 8-17 的 PSpice 仿真结果

8.12 本章小结

- 确定初始值 $x(0)$ 、 $dx(0)/dt$ 和最终值 $x(\infty)$ 对分析二阶电路非常重要。
- RLC 电路是二阶电路，因为它是用二阶差分方程表征的。它的表达式是 $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$ ，其中， α 是阻尼系数， ω_0 是非阻尼自然频率。串联电路的 $\alpha = R/2L$ ，并联电路的 $\alpha = 1/2RC$ ，这两种情况的 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 。
- 如果开关关闭(或者其他突变)后，电路中没有独立电源，可以认为电路是无源的，其

全解就是自然响应。

4. 一个 RLC 电路的自然响应是过阻尼、欠阻尼或者临界阻尼，取决于特征方程的根。根相等的话是临界阻尼($s_1 = s_2$ 或 $\alpha = \omega_0$)，根是实数且不相等($s_1 \neq s_2$ 或 $\alpha > \omega_0$)代表过阻尼，根是共轭复数($s_1 = s_2^*$ 或 $\alpha > \omega_0$)代表欠阻尼。
5. 如果在开关断开之后，独立电源还存在，那么完全响应就是暂态响应和稳态响应之和。
6. 利用 PSpice 仿真分析 RLC 电路和分析 RC、RL 电路一样。
7. 如果一个电路的网孔方程与另一个电路的节点方程具有相同的形式，那么这两个电路是对偶的。对一个电路的分析可转换为对其对偶电路的分析。
8. 汽车点火系统和平滑电路是本章典型的实际应用。

复习题

- 1 图 8-58 中， $t=0^-$ (在开关闭合前)时的电容电压是：

(a) 0V (b) 4V (c) 8V (d) 12V

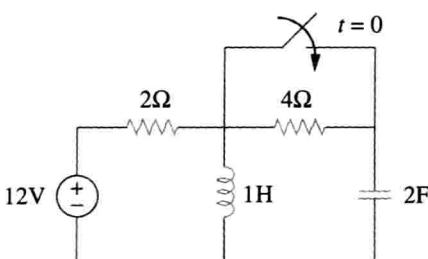


图 8-58 复习题 1 和 2 图

- 2 图 8-58 中，电感初始电流($t=0$ 时)是：

(a) 0A (b) 4A (c) 8A (d) 12A

- 3 把阶跃输入应用到二阶电路时，电路变量的最终值可以通过以下哪个途径获得：(a) 电容短路，电感开路；(b) 电容开路，电感短路；(c) 以上都不是。

- 4 如果一个 RLC 电路的特征方程的根是 -2 和 -3 ，那么响应是：

(a) $(A\cos 2t + B\sin 2t)e^{-3t}$ (b) $(A + 2Bt)e^{-3t}$
(c) $Ae^{-2t} + Bte^{-3t}$ (d) $Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

其中 A, B 为常数

- 5 在一个串联电路里，设置 $R=0$ 将会产生：

(a) 过阻尼响应 (b) 临界阻尼响应
(c) 欠阻尼响应 (d) 无阻尼响应
(e) 以上都不是

- 6 串联 RLC 电路中： $L=2H$, $C=0.25F$ 。将会产生单位阻尼系数的 R 值是：

(a) 0.5Ω (b) 1Ω (c) 2Ω (d) 4Ω

- 7 图 8-59 所示的串联 RLC 电路将会产生如下哪种响应：

(a) 过阻尼 (b) 欠阻尼
(c) 临界阻尼 (d) 以上都不是

- 8 图 8-60 所示的并联 RLC 电路将会产生下列哪种响应：

(a) 过阻尼 (b) 欠阻尼

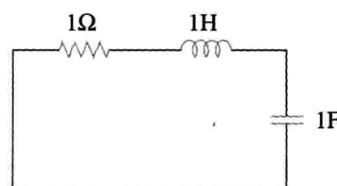


图 8-59 复习题 7 图

(c) 临界阻尼

(d) 以上都不是

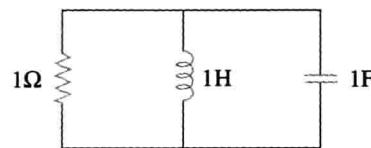
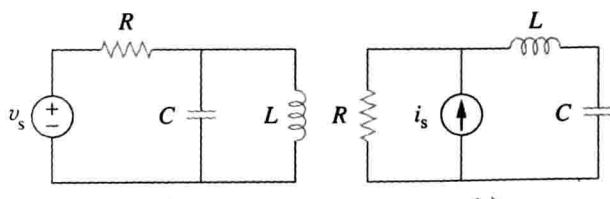


图 8-60 复习题 8 图

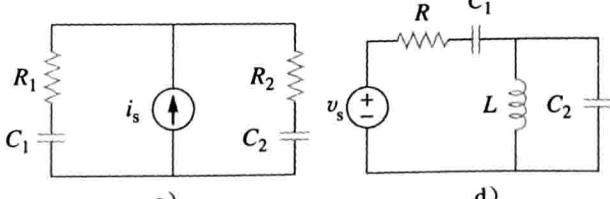
- 9 下列哪项可以匹配图 8-61 所示的电路：

(a) 一阶电路 (b) 二阶串联电路
(c) 二阶并联电路 (d) 以上都不是



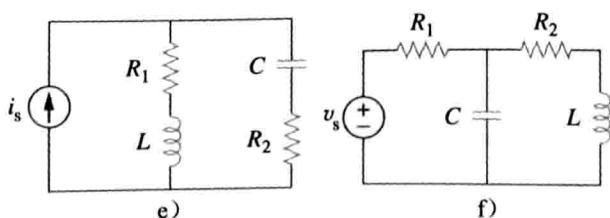
a)

b)



c)

d)



e)

f)

图 8-61 复习题 9 图

10 在一个电子电路中，电阻的对偶元件是：

- | | |
|--------|--------|
| (a) 电导 | (b) 电感 |
| (c) 电容 | (d) 开路 |
| (e) 短路 | |

习题

8.2节

1 对于图 8-62 所示电路，计算：(a) $i(0^+)$ 和 $v(0^+)$ ；(b) $di(0^+)/dt$ 和 $dv(0^+)/dt$ ；(c) $i(\infty)$ 和 $v(\infty)$ 。

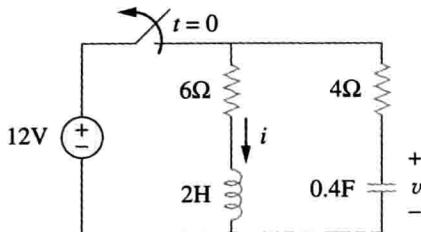


图 8-62 习题 1 图

2 利用图 8-63 设计一个问题帮助其他同学更好地理解初始值和最终值的求解。 **ED**

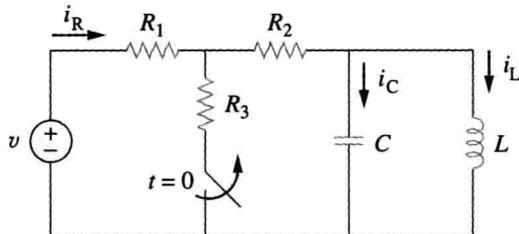


图 8-63 习题 2 图

3 对于图 8-64 所示电路，计算：(a) $i_L(0^+)$ ， $v_C(0^+)$ 和 $v_R(0^+)$ ；(b) $di_L(0^+)/dt$ ， $dv_C(0^+)/dt$ 和 $dv_R(0^+)/dt$ ；(c) $i_L(\infty)$ ， $v_C(\infty)$ 和 $v_R(\infty)$ 。

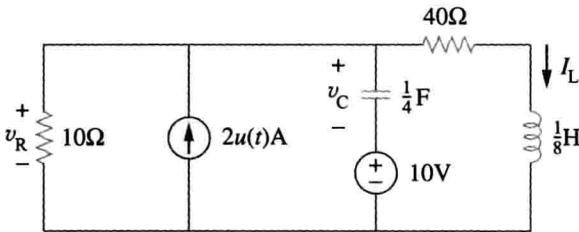


图 8-64 习题 3 图

4 对于图 8-65 所示电路，计算：(a) $v(0^+)$ 和 $i(0^+)$ ；(b) $dv(0^+)/dt$ 和 $di(0^+)/dt$ ；(c) $v(\infty)$ 和 $i(\infty)$ 。

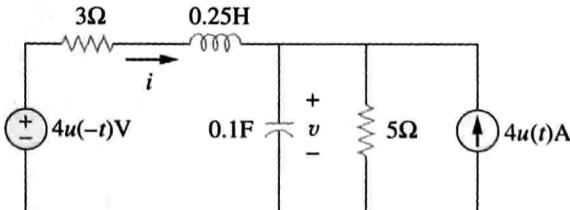


图 8-65 习题 4 图

答案：1(a); 2(c); 3(b); 4(d); 5(d);

- 6(c); 7(b); 8(b); 9(c, b, e, a, d, f);
10(a)

5 对于图 8-66 所示电路，计算：(a) $i(0^+)$ 和 $v(0^+)$ ；(b) $di(0^+)/dt$ 和 $dv(0^+)/dt$ ；(c) $i(\infty)$ 和 $v(\infty)$ 。

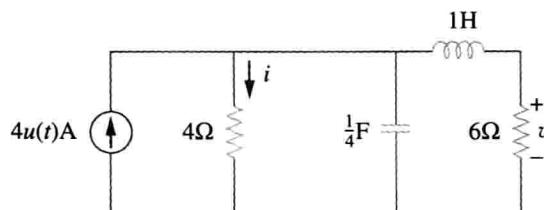


图 8-66 习题 5 图

6 对于图 8-67 所示电路，计算：(a) $v_R(0^+)$ 和 $v_L(0^+)$ ；(b) $dv_R(0^+)/dt$ 和 $dv_L(0^+)/dt$ ；(c) $v_R(\infty)$ 和 $v_L(\infty)$ 。

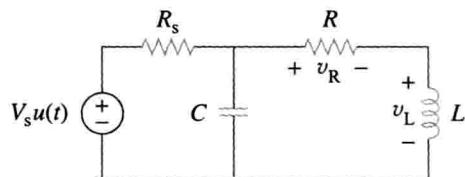


图 8-67 习题 6 图

8.3节

7 串联 RLC 电路中： $R = 20\text{k}\Omega$ ， $L = 0.2\text{mH}$ ， $C = 5\mu\text{F}$ 。电路表现为哪种阻尼形式？

8 设计一个问题帮助其他学生来更好地理解无电源 RLC 电路。**ED**

9 RLC 电路的电流可表示为：

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 10 \frac{di}{dt} + 25i = 0$$

如果 $i(0) = 10\text{A}$ ， $di(0)/dt = 0$ 。求 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

10 RLC 网络中描述电压的微分方程为：

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 4v = 0$$

如果 $v(0) = 0$ ， $dv(0)/dt = 10\text{V/s}$ ，求 $v(t)$ 。

11 RLC 电路的自然响应可由微分方程描述：

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + v = 0$$

初始条件 $v(0) = 10\text{V}$ ， $dv(0)/dt = 0$ ，求 $v(t)$ 。

12 如果 $R = 50\Omega$ ， $L = 1.5\text{H}$ ， C 取何值可以构成以下形式的 RLC 串联电路：(a) 过阻尼；(b) 临界阻尼；(c) 欠阻尼。

13 对于图 8-68 所示电路，计算构成临界阻尼响

应的 R 值。

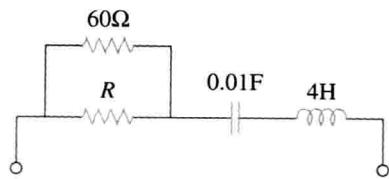


图 8-68 习题 13 图

- 14 在 $t=0$ 时，图 8-69 中的开关由 A 转向 B（确认开关必须在 A 断开前连接到点 B，即先通后断开关）。令 $v(0)=0$ ，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

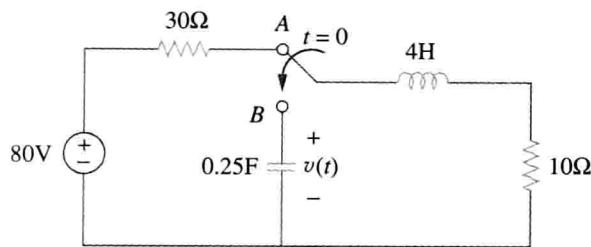


图 8-69 习题 14 图

- 15 串联 RLC 电路的响应是：

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 30 - 10e^{-20t} + 30e^{-10t} (\text{V}) \\ i_L(t) &= 40e^{-20t} - 60e^{-10t} (\text{mA}) \end{aligned}$$

其中 v_C 和 i_L 分别是电容电压和电感电流。确定 R 、 L 、 C 值。

- 16 计算图 8-70 所示电路在 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

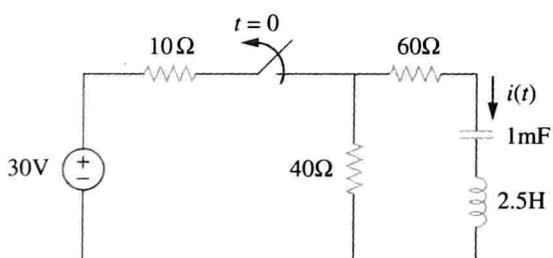


图 8-70 习题 16 图

- 17 在图 8-71 的电路中，开关瞬间由 A 转向 B，求 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

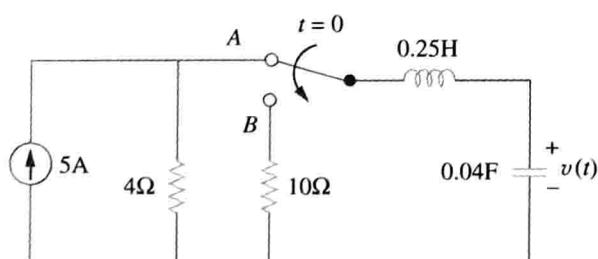


图 8-71 习题 17 图

- 18 对于图 8-72 所示电路，计算 $t>0$ 时的电容电压，假设 $t=0^-$ 时已达稳态。
19 对于图 8-73 所示电路，计算 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

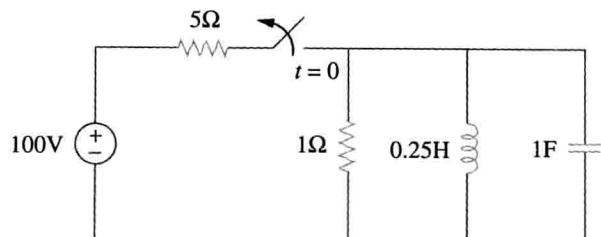


图 8-72 习题 18 图

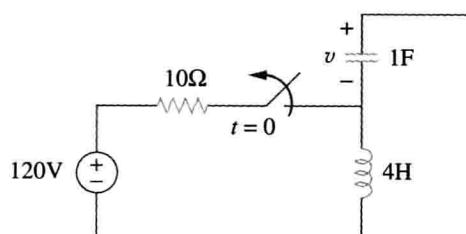


图 8-73 习题 19 图

- 20 图 8-74 所示电路的开关长期处于闭合状态，在 $t=0$ 时开关断开。求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

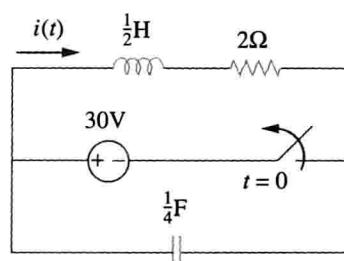


图 8-74 习题 20 图

- * 21 计算图 8-75 所示电路在 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。 **PS**

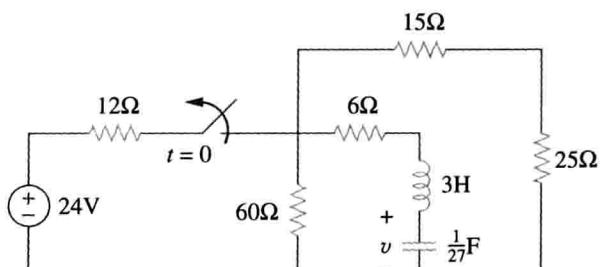


图 8-75 习题 21 图

8.4 节

- 22 假设 $R=2\text{k}\Omega$ ，设计一个具有如下特征方程的并联 RLC 电路：
 $s^2 + 100s + 10^6 = 0$
23 图 8-76 所示电路中， C 取何值时电路为欠阻尼且阻尼系数为 1 ($\alpha=1$)？

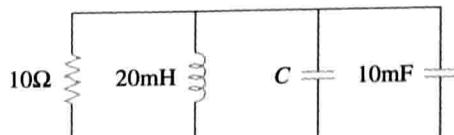


图 8-76 习题 23 图

- 24 图 8-77 所示开关在 $t=0$ 时从 A 转向 B(确认开关必须在 A 断开前连接到 B, 即先通后断开关)。求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

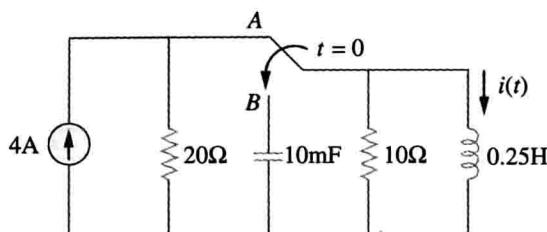


图 8-77 习题 24 图

- 25 利用图 8-78 设计一个问题帮助其他的同学更好地理解无源 RLC 电路。**ED**

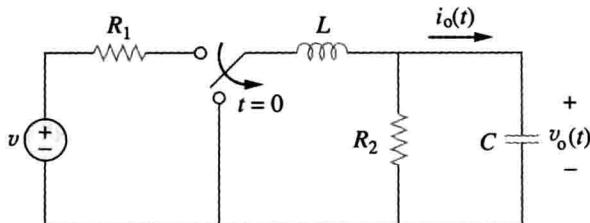


图 8-78 习题 25 图

8.5 节

- 26 RLC 电路的阶跃响应如下所示：

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} + 5i = 0$$

如果 $i(0)=2$, $di(0)/dt=4$, 求 $i(t)$ 。

- 27 RLC 电路的支路电压表达式为：

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4 \frac{dv}{dt} + 8v = 24$$

如果初始状态为 $v(0)=0=dv(0)/dt$, 求 $v(t)$ 。

- 28 串联 RLC 电路的表达式为：

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 10$$

当 $L=0.5\text{ H}$ 、 $R=4\Omega$ 、 $C=0.2\text{ F}$ 时, 求电路响应。令 $i(0)=1$, $di(0)/dt=0$ 。

- 29 计算下列给定初始条件下的各项差分方程：

- (a) $d^2v/dt^2 + 4v = 12$, $v(0)=0$, $dv(0)/dt=2$;
 (b) $d^2i/dt^2 + 5di/dt + 4i = 8$, $i(0)=-1$,
 $di(0)/dt=0$;
 (c) $d^2v/dt^2 + 2dv/dt + v = 3$,
 $v(0)=5$, $dv(0)/dt=1$;
 (d) $d^2i/dt^2 + 2di/dt + 5i = 10$, $i(0)=4$, $di(0)/dt=-2$ 。

- 30 串联 RLC 电路的阶跃响应是：

$$v_C = 40 - 10e^{-2000t} - 10e^{-4000t}(\text{V}), \quad t > 0$$

$$i_L(t) = 3e^{-2000t} + 6e^{-4000t}(\text{mA}), \quad t > 0$$

(a) 计算 C ; (b) 确定该电路的阻尼类型。

- 31 对于图 8-79 所示电路, 计算 $v_L(0^+)$ 以及 $v_C(0^+)$ 。**PS**

- 32 对于图 8-80 所示电路, 计算 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

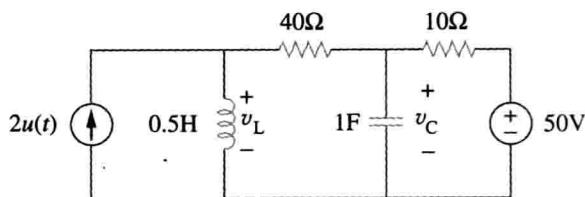


图 8-79 习题 31 图

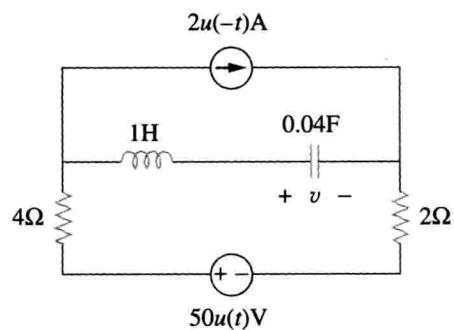


图 8-80 习题 32 图

- 33 对于图 8-81 所示电路, 计算 $t>0$ 时的 $v(t)$ 。**PS**

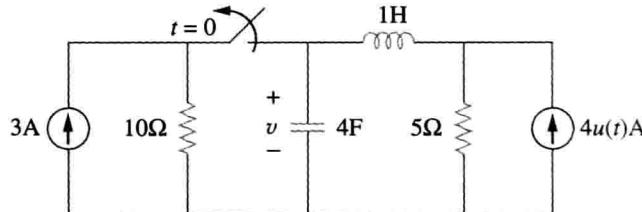


图 8-81 习题 33 图

- 34 对于图 8-82 所示电路, 计算 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

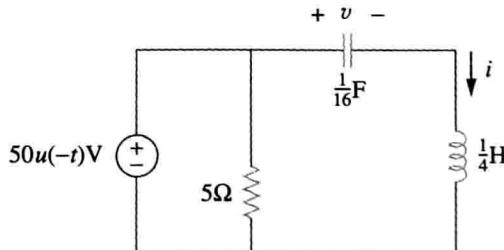


图 8-82 习题 34 图

- 35 利用图 8-83 设计一个问题, 帮助其他的同学更好地理解串联 RLC 电路的阶跃响应。**ED**

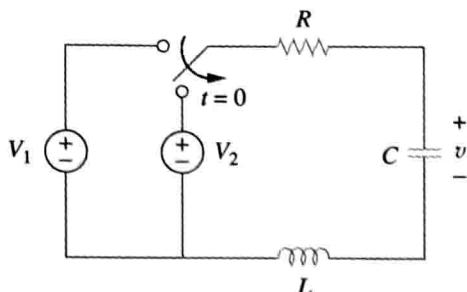


图 8-83 习题 35 图

- 36 对于图 8-84 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

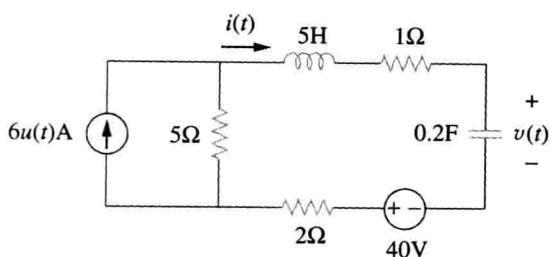


图 8-84 习题 36 图

- * 37 对于图 8-85 所示电路，确定 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

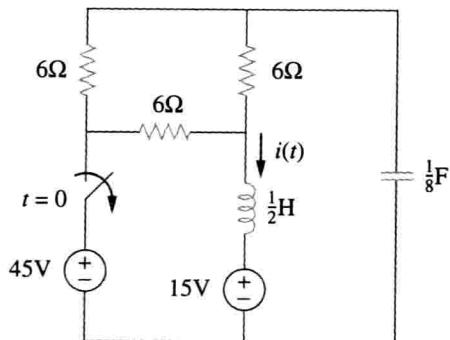


图 8-85 习题 37 图

- 38 对于图 8-86 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

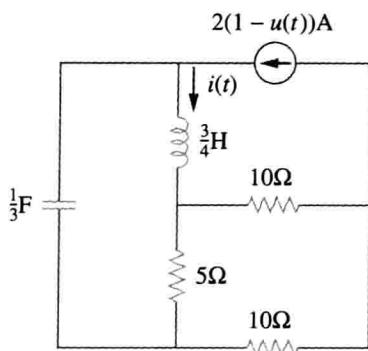


图 8-86 习题 38 图

- 39 对于图 8-87 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

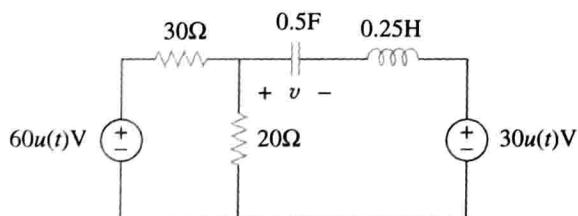


图 8-87 习题 39 图

- 40 图 8-88 所示电路中，开关在 $t = 0$ 时由 a 转向 b ，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。 **PS**

- 41 对于图 8-89 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

- 42 对于图 8-90 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

- 43 图 8-91 所示电路达到稳态后，在 $t = 0$ 时刻开关断开。计算 R 和 C 使得 $\alpha = 8\text{Np/s}$, $\omega_d = 8\text{Np/s}$ 。

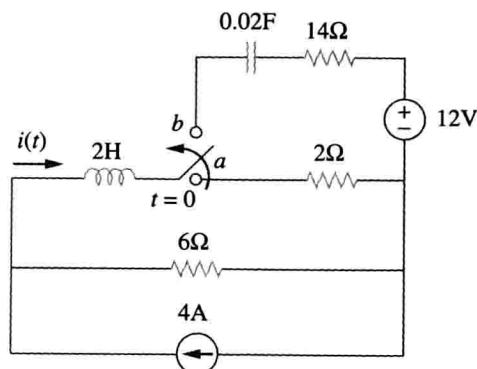


图 8-88 习题 40 图

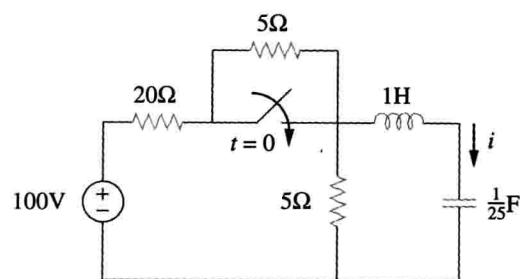


图 8-89 习题 41 图

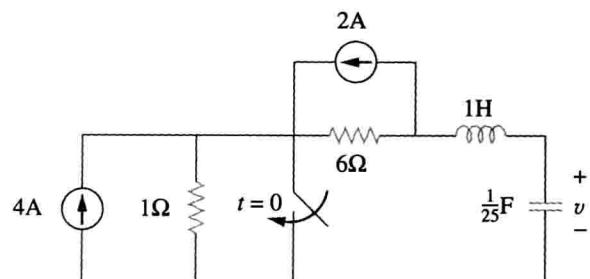


图 8-90 习题 42 图

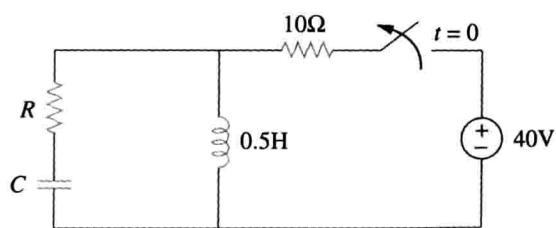


图 8-91 习题 43 图

- 44 串联 RLC 电路参数如下： $R = 1\text{k}\Omega$, $L = 1\text{H}$, $C = 10\text{nH}$ ，电路表现为哪种阻尼形式？

8.6 节

- 45 对于图 8-92 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。假设 $v(0) = 0\text{V}$, $i(0) = 1\text{A}$ 。

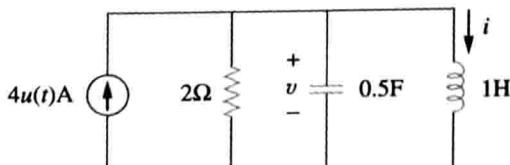


图 8-92 习题 45 图

- 46 利用图 8-93 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解并联 RLC 电路的阶跃响应。 **ED**

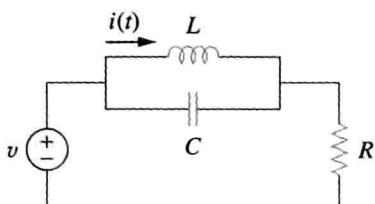


图 8-93 习题 46 图

- 47 计算图 8-94 所示电路的输出电压 $v_o(t)$ 。

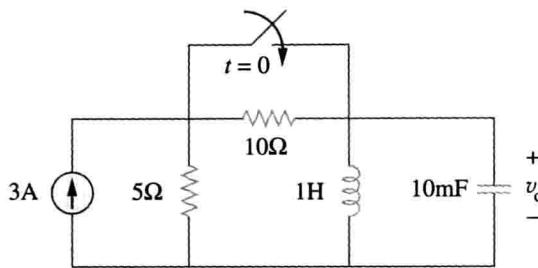


图 8-94 习题 47 图

- 48 对于图 8-95 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 和 $i(t)$ 。

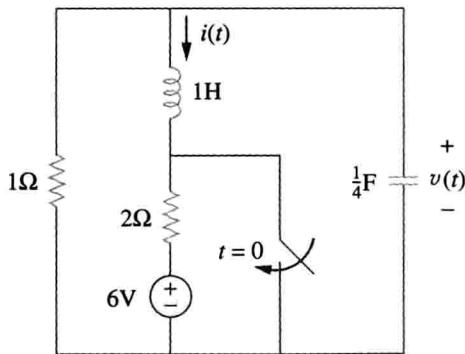


图 8-95 习题 48 图

- 49 对于图 8-96 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

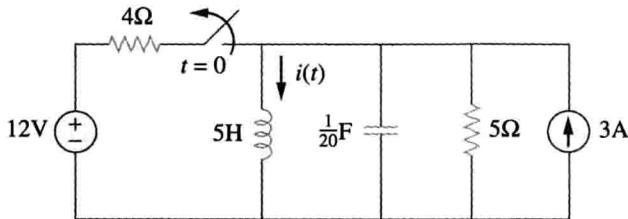


图 8-96 习题 49 图

- 50 对于图 8-97 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

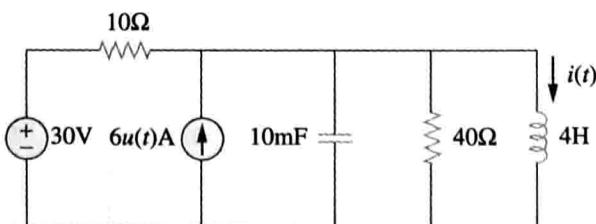


图 8-97 习题 50 图

- 51 对于图 8-98 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。

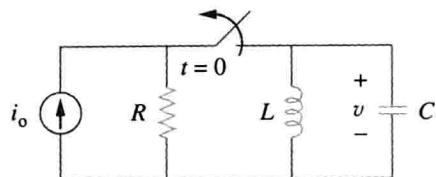


图 8-98 习题 51 图

- 52 并联 RLC 电路的阶跃响应是：

$$v = 10 + 20e^{-300t}(\cos 400t - 2\sin 400t) \text{ V}, t \geq 0$$

当电感是 50mH 时，计算 R 和 C 。

8.7 节

- 53 图 8-99 所示电路中，已断开一天的开关在 $t=0$ 时闭合。计算 $t > 0$ 时 $i(t)$ 的差分方程。

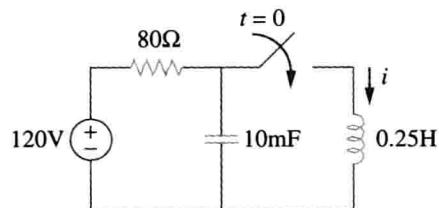


图 8-99 习题 53 图

- 54 利用图 8-100 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解一般二阶电路。 **ED**

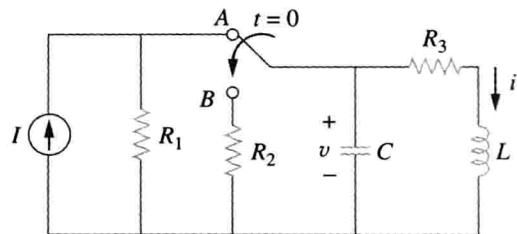


图 8-100 习题 54 图

- 55 对于图 8-101 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $v(t)$ 。
假设 $v(0^+) = 4 \text{ V}$, $i(0^+) = 2 \text{ A}$ 。

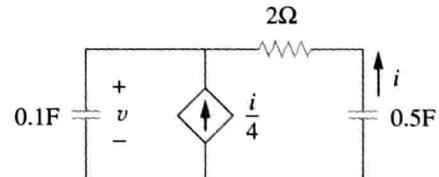


图 8-101 习题 55 图

- 56 对于图 8-102 所示电路，计算 $t > 0$ 时的 $i(t)$ 。

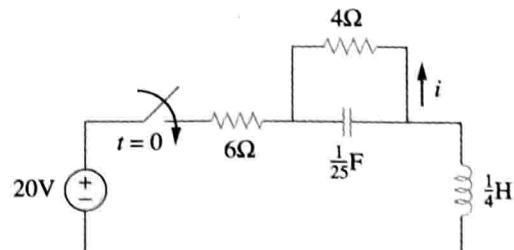


图 8-102 习题 56 图

- 57 如果图 8-103 中的开关在 $t=0$ 之前长时间处于闭合状态，但是在 $t=0$ 时断开。计算：
(a) 电路的差分方程；(b) $t>0$ 时的 i_x 和 v_R 。

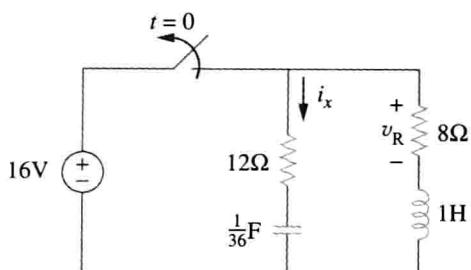


图 8-103 习题 57 图

- 58 图 8-104 所示电路中的开关长期处于 1 状态，在 $t=0$ 时转向 2。计算：(a) $v(0^+)$, $dv(0^+)/dt$ ；(b) $t>0$ 时的 $v(t)$ 。

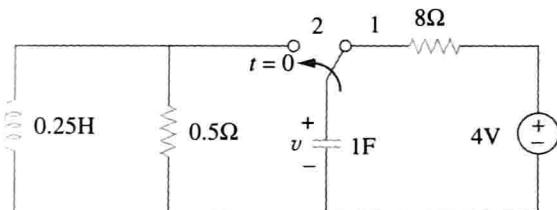


图 8-104 习题 58 图

- 59 在 $t<0$ 时，图 8-105 中的开关处于位置 1。在 $t=0$ 时，开关转向电容顶部。注意，这是一个先通后断开关，即开关一直与位置 1 相连，直到与电容顶部的连接建立后才断开与位置 1 的连接。试求 $v(t)$ 。

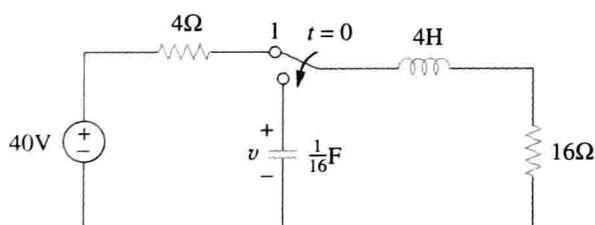


图 8-105 习题 59 图

- 60 对于图 8-106 所示电路，计算 $t>0$ 时的 i_1 和 i_2 。

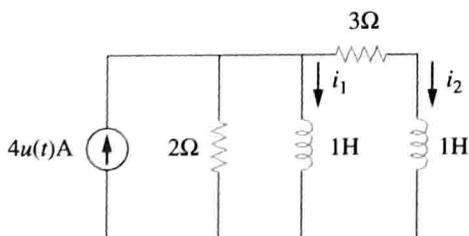


图 8-106 习题 60 图

- 61 对于习题 5 所示电路，计算 $t>0$ 时的 i 和 v 。
62 对于图 8-107 所示电路，计算 $t>0$ 时的响应 $v_R(t)$ 。令 $R=3\Omega$, $L=2H$, $C=1/18F$ 。

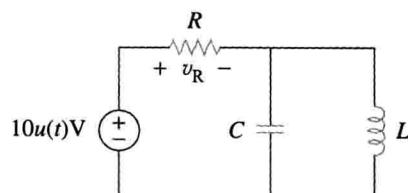


图 8-107 习题 62 图

8.8 节

- 63 对于图 8-108 所示运算放大器电路，计算 $i(t)$ 的差分方程。

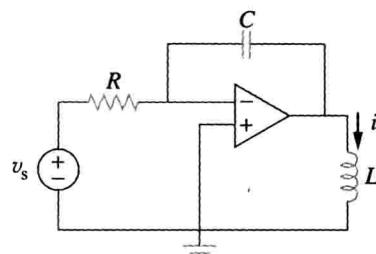


图 8-108 习题 63 图

- 64 利用图 8-109 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解二阶运算放大器电路。 ED

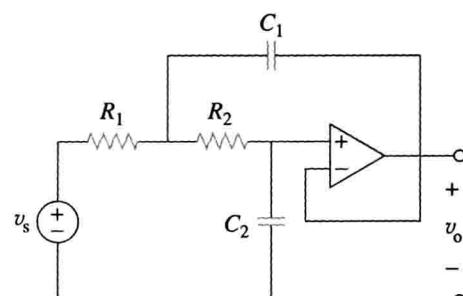


图 8-109 习题 64 图

- 65 计算图 8-110 所示运算放大器电路的差分方程。如果 $v_1(0^+)=2V$, $v_2(0^+)=0V$ ，计算 $t>0$ 时的 v_o 。令 $R=100k\Omega$, $C=1\mu F$ 。

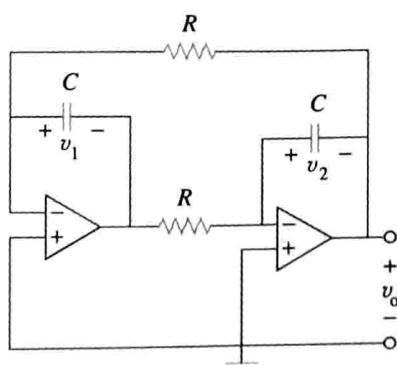


图 8-110 习题 65 图

- 66 计算图 8-111 所示运算放大器电路中 $v_o(t)$ 的差分方程。

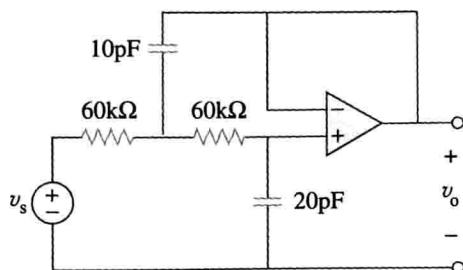


图 8-111 习题 66 图

- * 67 在图 8-112 所示的运算放大器电路中，计算 $t > 0$ 时的 $v_o(t)$ 。令 $v_{in} = u(t)$, $R_1 = R_2 = 10k\Omega$, $C_1 = C_2 = 100\mu F$ 。

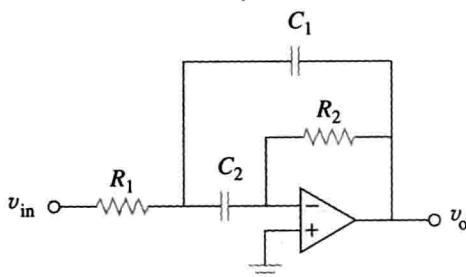


图 8-112 习题 67 图

8.9 节

- 68 对于阶跃函数 $v_s = u(t)$ ，利用 PSpice 或者 MultiSim 求解图 8-113 所示电路在 $0 < t < 6s$ 时的响应 $v(t)$ 。
PS

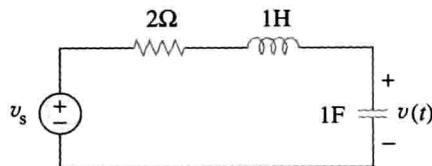


图 8-113 习题 68 图

- 69 对于图 8-114 所示无源电路，利用 PSpice 或者 MultiSim 求解 $0 < t < 20s$ 时的 $i(t)$ 。令 $v(0) = 30V$, $i(0) = 2A$ 。

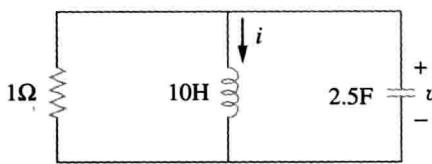


图 8-114 习题 69 图

- 70 利用 PSpice 或者 MultiSim 求解图 8-115 所示电路在 $0 < t < 20s$ 时的响应 $v(t)$ 。假设电容电压和电感电流在 $t = 0$ 时都为零。

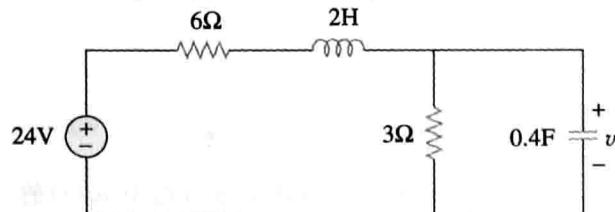


图 8-115 习题 70 图

- 71 利用 PSpice 或者 MultiSim 求解图 8-116 所示电路在 $0 < t < 4s$ 时的 $v(t)$ 。

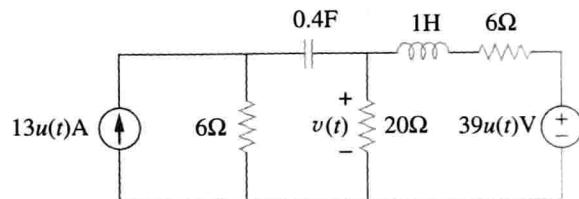


图 8-116 习题 71 图

- 72 图 8-117 中的开关处于位置 1 很长时间，在 $t = 0$ 时开关转向位置 2。利用 PSpice 或者 MultiSim 求解 $0 < t < 0.2s$ 时的 $i(t)$ 。

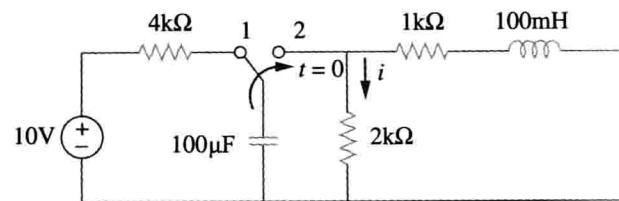


图 8-117 习题 72 图

- 73 设计一个利用 PSpice 或者 MultiSim 求解的问题，帮助其他同学更好地理解无源 RLC 电路。
ED

8.10 节

- 74 画出图 8-118 所示电路的对偶电路。

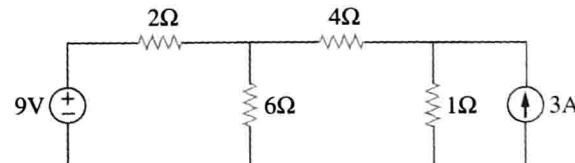


图 8-118 习题 74 图

- 75 画出图 8-119 所示电路的对偶电路。

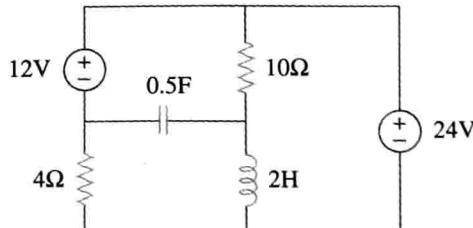


图 8-119 习题 75 图

- 76 画出图 8-120 所示电路的对偶电路。

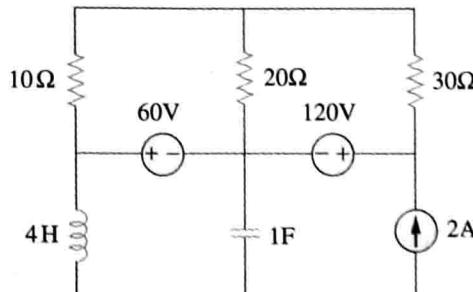


图 8-120 习题 76 图

77 画出图 8-121 所示电路的对偶电路。

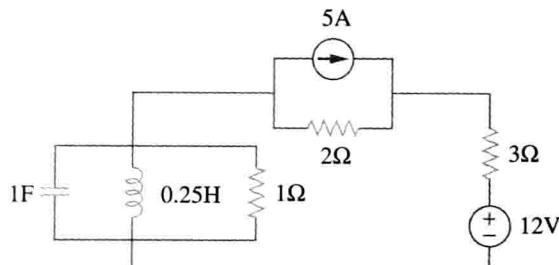


图 8-121 习题 77 图

8.11 节

78 汽车气囊点火器的模型如图 8-122 所示。计

算开关由 A 转向 B 时，点火器电压达到峰值所需要的时间。

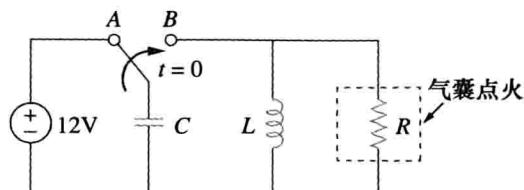


图 8-122 习题 78 图

- 79 某负载为 250mH 电感与 12Ω 电阻的并联。电容器需要连接负载，以使网络在 60Hz 时产生临界阻尼响应，计算所需的电容值。

综合理解题

80 通过串联 RLC 电路建模的机械系统中，需要产生时间常数为 0.1ms 和 0.5ms 的过阻尼响应。如果串联电阻为 $50\text{k}\Omega$ ，计算 L 和 C 的值。**ED**

81 用并联 RLC 二阶电路建模一个波形。需要在 200Ω 电阻上提供欠阻尼电压。如果阻尼频率是 4kHz ，而且包络的时间常数是 0.25s ，求 L 和 C 的值。**ED**

82 图 8-123 所示电路是人体函数的电子模拟部分，用于医学院中抽搐学的研究。模拟方式如下：

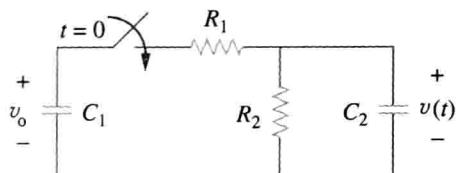


图 8-123 习题 82 图

C_1 = 药品的流体体积

C_2 = 给定区域的血流体积

R_1 = 从输入到血流的药品通路的电阻

R_2 = 分泌物路径的阻抗，例如肾脏等

v_0 = 药品剂量的初始浓度

$v(t)$ = 血流中药物的浓度

在 $C_1 = 0.5\mu\text{F}$, $C_2 = 5\mu\text{F}$, $R_1 = 5\text{M}\Omega$ 以及 $v_0 = 60\mu\text{A}(t)\text{V}$ 时，计算 $t > 0$ 时 $v(t)$ 。

83 图 8-124 是一个典型的隧道二极管振荡器电路。二极管模型是一个非线性电阻， $i_D = f(v_D)$ ，二极管电流是穿过二极管的电压的非线性函数。试用 v 和 i_D 导出电路的微分方程。**ED**

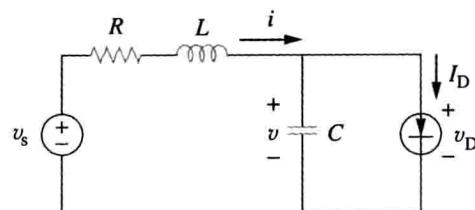
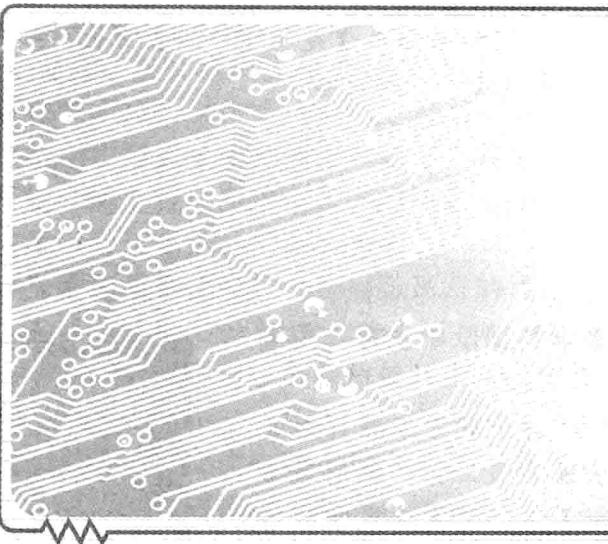


图 8-124 习题 83 图

第二部分

交流电路



- 第 9 章 正弦量与相量
- 第 10 章 正弦稳态分析
- 第 11 章 交流功率分析
- 第 12 章 三相电路
- 第 13 章 磁耦合电路
- 第 14 章 频率响应

第9章

正弦量与相量

无知而不知者是愚人——躲开他；无知而知之者是孩童——教育他；知之而不知者，在熟睡——唤醒他；知之而知之者，是智者——追随他。

——波斯格言

增强技能与拓展事业

ABET 工程标准 2000 (3. d), “在多学科团队中发挥作用的能力”

“在多学科团队中发挥作用的能力”对于职业工程师而言是极为重要的。工程师很少独立地从事某项工作，他们通常是某个团队的组成部分，并在团队中工作。需要提醒学生的是，你并不需要与团队中的任何人一样，只要能够成为团队成功的一分子即可。

团队中通常包括许多具有不同学科背景的工程师，以及市场、金融等非工科学科的工作人员。

学生通过参与所选课程的学习小组就可以很容易地培养并增强这方面的技能。显然，在非工程课程学习小组以及非本专业工程课程学习小组的工作，同样会帮助学生获得在多学科团队中工作的宝贵经验。



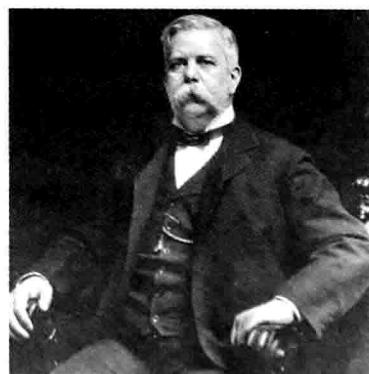
由 Charles Alexander 摄影

历史珍闻

尼古拉·特斯拉(Nikola Tesla, 1856—1943)与**乔治·威斯丁豪斯**(George Westinghouse, 1846—1914)提出了电能传输与配送的重要模式——交流电。

如今，交流发电已经成为电能高效、经济传输的重要形式，然而，在19世纪末期，交流电与直流电哪种电能传输形式更好一直是争论的热点，双方都有强有力的支持者。直流电一方的倡导者托马斯·爱迪生因其大量卓越的贡献而赢得了极高的声誉。正是由于特斯拉的成功才使交流发电得到认可，而交流发电真正的商业成功则是源于乔治·威斯丁豪斯及其领导的包括特斯拉在内的杰出团队。另外两个有影响的名字是斯科特(C. F. Scott)与拉曼(B. G. Lamme)。

对交流发电的早期成功做出重要贡献的是特斯拉于1888年获得的多相交流电动机的专利。感应电动机和多相发电与配电系统的成功实现使交流电战胜直流电成为主要的能源形式。



George Westinghouse
© Bettmann/Corbis

9.1 引言

到目前为止，前面各章主要限于讨论直流电路，即由恒定电源(时不变电源)激励的电路。为简单起见，同时也是出于教学和历史发展的考虑，限定电路的强迫函数为直流电源。从历史发展的角度来看，在19世纪末之前，直流电源一直是提供电力的主要方式。19世纪末，直流电与交流电之争开始显现，双方都有相应的电气工程师作为支持者，但由于交流电在长距离传送中更为高效、经济，二者之争最终以交流电系统的胜利而告终。因此，本教材也按照历史事件的发展顺序，首先介绍直流电源的有关内容。

下面开始介绍电源电压或电源电流随时间变化的电路分析问题，本章专门讨论正弦时变激励，即激励为正弦信号的电路分析。

正弦信号是指具有正弦或余弦函数形式的信号。

正弦电流通常称为交流电(alternating current, ac)，这种电流以规则的时间间隔出现极性反转，并交替地表现出正值和负值，由正弦电流源或正弦电压源激励的电路称为交流电路(ac circuit)。

之所以要讨论正弦交流电路有很多原因。首先，许多自然现象本身呈现出正弦特性。例如钟摆的运动、琴弦的振动、海洋表面的波纹、欠阻尼二阶系统的自然响应等，而这些仅仅是自然现象的一小部分实例。其次，正弦信号易于产生和传输，世界各国输送给家庭、工厂、实验室等的供电电压均呈正弦交流形式。同时，正弦信号也是通信系统和电力工业系统中主要的信号传输形式。再次，由傅里叶分析可知，任何实际的周期信号都可以表示为许多正弦信号之和，因此，在周期信号分析中，正弦信号起着重要的作用。最后，正弦信号在数学上易于处理，其导数与积分仍然是正弦信号。正是基于上述原因，使得正弦信号成为电路分析中一个极为重要的函数。

与第7章和第8章介绍的阶跃函数类似，正弦激励函数也会引起暂态响应与稳态响应。其中暂态响应随时间而消失，最终仅存在稳态响应，当暂态响应与稳态响应相比可以忽略时，则称电路工作在正弦稳定状态下。本章讨论的主要内容即正弦稳态响应(sinoidal steady-state response)。

本章首先介绍正弦信号与相量的基本知识，之后介绍阻抗与导纳的概念，接着将直流电路中介绍过的基尔霍夫定律和欧姆定律等基本电路定律引入交流电路。最后讨论交流电路在移相器电路和桥式电路中的应用。

9.2 正弦信号

正弦电压可以表示为：

$$v(t) = V_m \sin \omega t \quad (9.1)$$

其中， V_m =正弦电压的幅度或振幅(amplitude)； ω =角频率(angular frequency)，单位为rad/s； ωt =正弦电压的幅角(argument)。

该正弦电压 $v(t)$ 与其幅角 ωt 之间的函数关系如图9-1a所示， $v(t)$ 与时间 t 之间的函数关系如图9-1b所示。显然，该正弦电压每隔T秒就会重复一遍，所以称T为该正弦电压的周期(period)。由图9-1所示的两个波形可知， $\omega T = 2\pi$ ，即：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9.2)$$

将式(9.1)中的 t 用 $(t+T)$ 代替，即可证明 $v(t)$ 每隔T秒重复一次，即：

$$\begin{aligned} v(t+T) &= V_m \sin \omega(t+T) = V_m \sin \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) \\ &= V_m \sin(\omega t + 2\pi) = V_m \sin \omega t = v(t) \end{aligned} \quad (9.3)$$

因此：

$$v(t+T) = v(t) \quad (9.4)$$

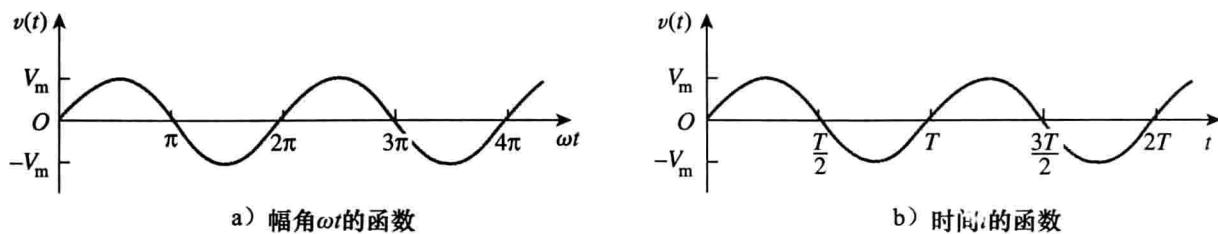


图 9-1 $V_m \sin \omega t$ 的波形

也就是说，在 $(t+T)$ 和 t 两个时刻， v 取值相同，因此称 $v(t)$ 是周期性的(periodic)。周期函数是指对所有时间 t 和所有整数 n ，满足条件 $f(t)=f(t+nT)$ 的函数。

周期函数的周期 T 是指一个完整循环的时间或者每个循环的秒数，周期的倒数是指每秒的循环个数，称为正弦信号的循环频率(cyclic frequency) f 。因此：

$$f = \frac{1}{T} \quad (9.5)$$

显然，由式(9.2)与式(9.5)可以得到：

$$\omega = 2\pi f \quad (9.6)$$

其中， ω 的单位为弧度每秒(rad/s)， f 的单位为赫兹(Hz)。

提示：频率 f 的单位是以德国物理学家赫兹(1857—1894)的名字命名的。

历史珍闻

赫兹(Heinrich Rudolf Hertz, 1857—1894)，德国实验物理学家，证明了电磁波遵循与光波相同的基本定律。他的研究工作证实了麦克斯韦(Maxwell)于1864年提出的著名理论以及电磁波存在的预言。

赫兹出生在德国汉堡的一个富裕家庭，就读于柏林大学，并师从著名物理学家赫尔曼·冯·赫尔姆霍茨(Hermann von Helmholtz)攻读博士学位。之后在卡尔斯鲁厄大学担任教授，并开始了对电磁波的研究与探索。赫兹成功地产生并检测到电磁波，成为首位证明光是一种电磁能量的科学家，1877年，赫兹首先发现了分子结构中电子的光电效应。虽然赫兹的一生仅有短短37年，但他对电磁波的发现为电磁波成功用于无线电、电视、通信系统等领域铺平了道路。后人将频率的单位以他的名字命名，就是为了纪念赫兹做出的杰出贡献。



美国加州圣马里诺亨廷顿图书馆馆藏

下面考虑正弦电压的一般表达式：

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.7)$$

其中， $(\omega t + \phi)$ 为辐角， ϕ 为相位(phase)，辐角与相位的单位均为弧度或度。

下面考虑图9-2所示的两个正弦电压信号 $v_1(t)$ 与 $v_2(t)$ ：

$$v_1(t) = V_m \sin \omega t, \quad v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.8)$$

图9-2中 v_2 的起点在时间上先出现，因此称 v_2 超前(lead) v_1 相位 ϕ 或称 v_1 滞后(lag) v_2 相位 ϕ 。如果 $\phi \neq 0$ ，则称 v_1 与 v_2 不同相(out of phase)。如果 $\phi = 0$ ，则称 v_1 与 v_2 同相。

(in phase), 即二者到达最小值和最大值的时刻完全相同。以上对 v_1 与 v_2 进行比较的条件是二者具有相同的频率, 但未必具有相同的幅度。

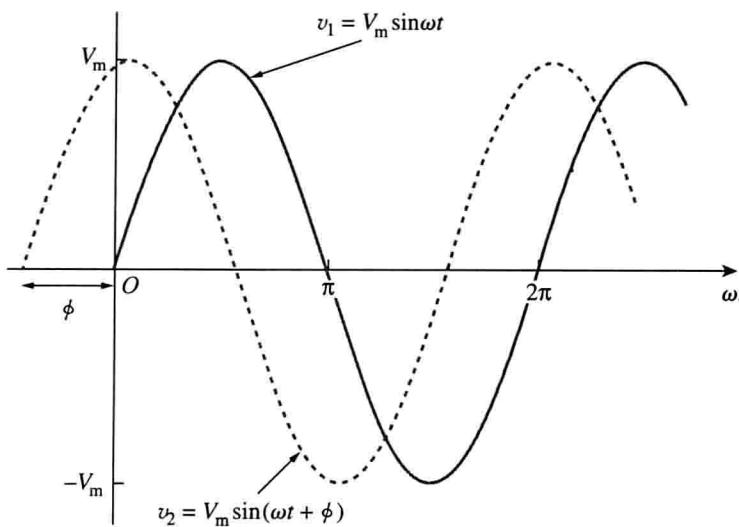


图 9-2 具有不同相位的两个正弦电压信号

正弦信号既可以用正弦函数表示, 也可以用余弦函数表示。对两个正弦信号进行比较时, 将二者表示为幅度为正的正弦函数或余弦函数会比较方便。在表示正弦信号时通常会用到如下三角函数恒等式:

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B\end{aligned}\quad (9.9)$$

利用上述恒等式容易证明:

$$\begin{aligned}\sin(\omega t \pm 180^\circ) &= -\sin \omega t \\ \cos(\omega t \pm 180^\circ) &= -\cos \omega t \\ \sin(\omega t \pm 90^\circ) &= \pm \cos \omega t \\ \cos(\omega t \pm 90^\circ) &= \mp \sin \omega t\end{aligned}\quad (9.10)$$

利用这些关系式即可将正弦函数转换为余弦函数, 反之亦然。

除利用式(9.9)与式(9.10)给出的三角恒等式表示正、余弦函数之间的关系外, 还可以采用图形法对正、余弦信号进行联系和比较。在图 9-3a 所示的坐标系中, 水平轴表示余弦分量的幅度, 垂直轴(箭头向下)表示正弦分量的幅度。角度的正负与常用的极坐标系的规定相同, 即从水平轴开始, 逆时针为正。这种图形表示方法可用于确定两个正弦信号之间的关系, 例如, 由图 9-3a 可见, $\cos \omega t$ 的辐角减去 90° 就得到 $\sin \omega t$, 即 $\cos(\omega t - 90^\circ) = \sin \omega t$ 。类似地, $\sin \omega t$ 的辐角加上 180° 就得到 $-\sin \omega t$, 即 $\sin(\omega t + 180^\circ) = -\sin \omega t$, 如图 9-3b 所示。

当一个信号具有正弦形式, 另一个信号具有余弦形式, 且二者频率相同时, 还可利用上述图形方法实现这两个同频正弦信号的相加运算。在图 9-4a 中, 要实现信号 $A \cos \omega t$ 与 $B \sin \omega t$ 的相加运算, 其中 A 为 $\cos \omega t$ 的幅度, B 为 $\sin \omega t$ 的幅度, 则相加后用余弦函数表示的正弦信号的幅度和相位可以用三角关系得到, 即:

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \theta) \quad (9.11)$$

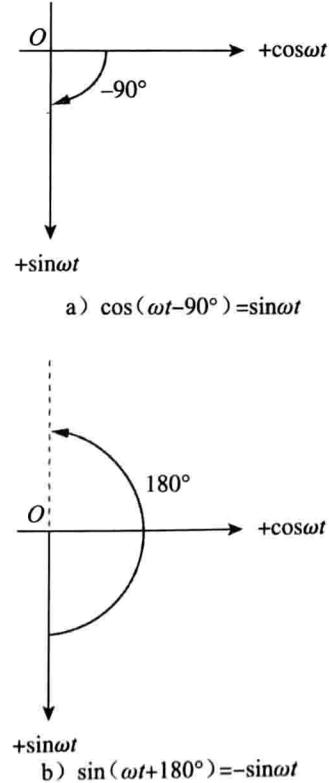


图 9-3 联系余弦函数与正弦函数的图形方法

其中：

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \theta = \arctan \frac{B}{A} \quad (9.12)$$

例如， $3\cos\omega t$ 与 $-4\sin\omega t$ 相加的图形表示如图 9-4 所示，由此可以得到：

$$3\cos\omega t - 4\sin\omega t = 5\cos(\omega t + 53.1^\circ) \quad (9.13)$$

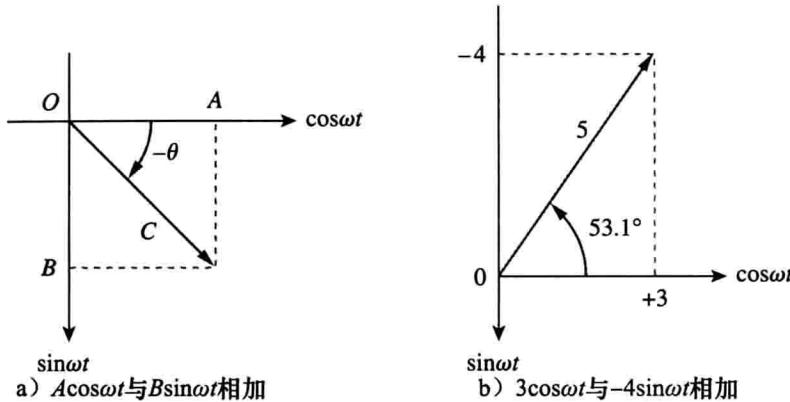


图 9-4 相加运算

与式(9.9)、式(9.10)给出的三角恒等式相比，上述图形方法的优点是无需记忆。但是，一定不要将图形法中的正弦坐标轴和余弦坐标轴与下一节即将讨论的复数坐标轴混淆。对于图 9-3 与图 9-4 还应该注意的是，虽然垂直坐标轴的正方向通常是向上的，但在图形法中正弦函数的正方向是向下的。

例 9-1 试求正弦信号 $v(t) = 12\cos(50t + 10^\circ)$ V 的幅度、相位、周期和频率。

解：幅度 $V_m = 12$ V，相位 $\phi = 10^\circ$ ，角频率 $\omega = 50$ rad/s，周期 $T = 2\pi/\omega = 0.1257$ s，频率 $f = 1/T = 7.958$ Hz。 ◀

练习 9-1 已知正弦信号 $30\sin(4\pi t - 75^\circ)$ ，试计算其幅度、相位、角频率、周期和频率。
答案：30, -75° , 12.57 rad/s, 0.5 s, 2 Hz

例 9-2 计算 $v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ)$ 与 $v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$ 之间的相位角，并说明哪一个信号超前。

解：下面采用三种方法计算相位，前两种方法利用三角恒等式，第三种方法为图形法。

方法 1 为了比较 v_1 与 v_2 ，必须将二者表达为相同的形式。如果用幅度为正的余弦函数表示，则有：

$$\begin{aligned} v_1 &= -10\cos(\omega t + 50^\circ) = 10\cos(\omega t + 50^\circ - 180^\circ) \\ v_1 &= 10\cos(\omega t - 130^\circ) \quad \text{或} \quad v_1 = 10\cos(\omega t + 230^\circ) \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

和

$$\begin{aligned} v_2 &= 12\sin(\omega t - 10^\circ) = 12\cos(\omega t - 10^\circ - 90^\circ) \\ v_2 &= 12\cos(\omega t - 100^\circ) \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

由式(9.2.1)与式(9.2.2)可以推出， v_1 与 v_2 之间的相位差为 30° ，可以将 v_2 写成：

$$v_2 = 12\cos(\omega t - 130^\circ + 30^\circ) \quad \text{或} \quad v_2 = 12\cos(\omega t + 260^\circ) \quad (9.2.3)$$

比较式(9.2.1)与式(9.2.3)可知， v_2 比 v_1 超前 30° 。

方法 2 将 v_1 用正弦函数表示为：

$$\begin{aligned} v_1 &= -10\cos(\omega t + 50^\circ) = 10\sin(\omega t + 50^\circ - 90^\circ) \\ &= 10\sin(\omega t - 40^\circ) = 10\sin(\omega t - 10^\circ - 30^\circ) \end{aligned}$$

而 $v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$ 。比较二者可知， v_1 较 v_2 滞后 30° ，与 v_2 较 v_1 超前 30° 是

一样的。

方法3 可将 v_1 看成是相移为 $+50^\circ$ 的 $-10\cos\omega t$, 如图 9-5 所示, 类似地, 可将 v_2 看做是相移为 -10° 的 $12\sin\omega t$ 。可见, v_2 超前 v_1 的相位为 30° , 即 $90^\circ - 50^\circ - 10^\circ = 30^\circ$ 。

练习 9-2 求 $i_1 = -4\sin(377t + 55^\circ)$ 与 $i_2 = 5\cos(377t - 65^\circ)$ 之间的相位角, 并判断 i_1 是超前还是滞后于 i_2 。

答案: 210° , i_1 超前于 i_2

9.3 相量

正弦信号可以很容易地用相量来表示, 处理相量要比处理正、余弦函数更为方便。

相量是一个表示正弦信号的幅度和相位的复数。

相量提供了一种分析由正弦电源激励的线性电路的简单方法, 否则这类电路的求解将很困难, 利用相量求解交流电路的概念是由斯坦梅茨于 1893 年首次提出的。在定义相量并将其用于电路分析之前, 需要完整地复习有关复数的知识。

提示: 查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨 (Charles Proteus Steinmetz, 1865—1923) 是一位德裔奥地利数学家和电气工程师。

历史珍闻

查尔斯·普洛特斯·斯坦梅茨 (Charles Proteus Steinmetz, 1865—1923), 德裔奥地利数学家和工程师, 在交流电路的分析中引入了相量方法, 并以磁滞理论方面的出色研究而闻名。

斯坦梅茨出生于德国的布雷斯劳, 一岁时就失去了母亲。青年时期由于政治活动被迫离开德国, 当时, 他在布雷斯劳大学即将完成其数学博士论文。他移居瑞士后不久又去了美国, 并于 1883 年受雇于通用电气公司, 同年, 他发表了一篇论文, 首次将复数应用于交流电路的分析中。他一生出版了多部教科书, 基于那篇论文的著作《交流现象的理论与计算》于 1897 年由麦格劳-希尔 (McGraw-Hill) 出版社出版。1901 年斯坦梅茨成为美国电气工程协会 (即后来的 IEEE) 的主席。



© Bettmann/Corbis

复数 z 的直角坐标形式为:

$$z = x + jy \quad (9.14a)$$

其中, $j = \sqrt{-1}$, x 是 z 的实部, y 是 z 的虚部。这里变量 x 与 y 并不表示在二维矢量分析中的具体位置, 而是复数 z 在复平面上的实部和虚部。尽管如此, 复数运算与二维矢量运算之间仍然存在一定的相似性。

复数 z 也可以表示为极坐标形式或指数形式:

$$z = r \angle \phi = re^{j\phi} \quad (9.14b)$$

其中, r 为 z 的模值, ϕ 为 z 的相位。至此, 得到复数 z 的三种表示形式:

$$z = x + jy \quad \text{直角坐标形式}$$

$$z = r \angle \phi \quad \text{极坐标形式}$$

$$z = re^{j\phi} \quad \text{指数形式}$$

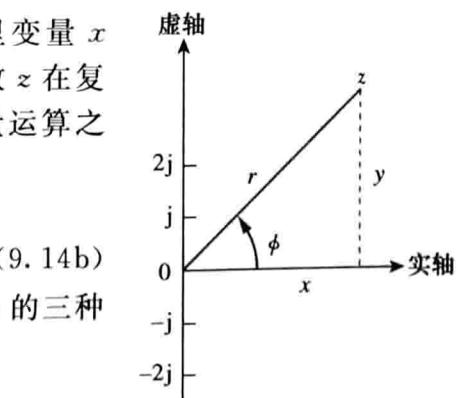


图 9-6 复数 $z = x + jy = r \angle \phi$ 的表示方法

直角坐标形式与极坐标形式之间的关系如图 9-6 所示, 其中 x 轴表示复数 z 的实部, y 轴表示复数 z 的虚部。给定 x 与 y , 即可得到 r 与 ϕ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (9.16a)$$

反之, 如果已知 r 与 ϕ , 也可以求得 x 与 y :

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi \quad (9.16b)$$

于是, 复数 z 可以写作:

$$z = x + jy = r \angle \phi = r(\cos\phi + j\sin\phi) \quad (9.17)$$

复数的加减运算利用直角坐标表示更为方便, 而乘除运算则用极坐标更好。已知复数,

$$\begin{aligned} z &= x + jy = r \angle \phi, & z_1 &= x_1 + jy_1 = r_1 \angle \phi_1 \\ && z_2 &= x_2 + jy_2 = r_2 \angle \phi_2 \end{aligned}$$

则有如下运算公式。

加法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \quad (9.18a)$$

减法:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \quad (9.18b)$$

乘法:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle \phi_1 + \phi_2 \quad (9.18c)$$

除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \phi_1 - \phi_2 \quad (9.18d)$$

倒数:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \angle -\phi \quad (9.18e)$$

平方根:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \angle \phi / 2 \quad (9.18f)$$

共轭复数:

$$z^* = x - jy = r \angle -\phi = r e^{-j\phi} \quad (9.18g)$$

由式(9.18e)可以看出:

$$\frac{1}{j} = -j \quad (9.18h)$$

相量表达方式的依据是欧拉恒等式。一般而言,

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi \quad (9.19)$$

上式表明可以将 $\cos\phi$ 与 $\sin\phi$ 分别看做 $e^{j\phi}$ 的实部与虚部, 即:

$$\cos\phi = \operatorname{Re}(e^{j\phi}) \quad (9.20a)$$

$$\sin\phi = \operatorname{Im}(e^{j\phi}) \quad (9.20b)$$

其中, Re 与 Im 分列表示实部(real)与虚部(imaginary)。已知正弦信号 $v(t) = V_m \times \cos(\omega t + \phi)$, 则利用式(9.20a)可将 $v(t)$ 表示为:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) \quad (9.21)$$

即

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}) \quad (9.22)$$

因此:

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) \quad (9.23)$$

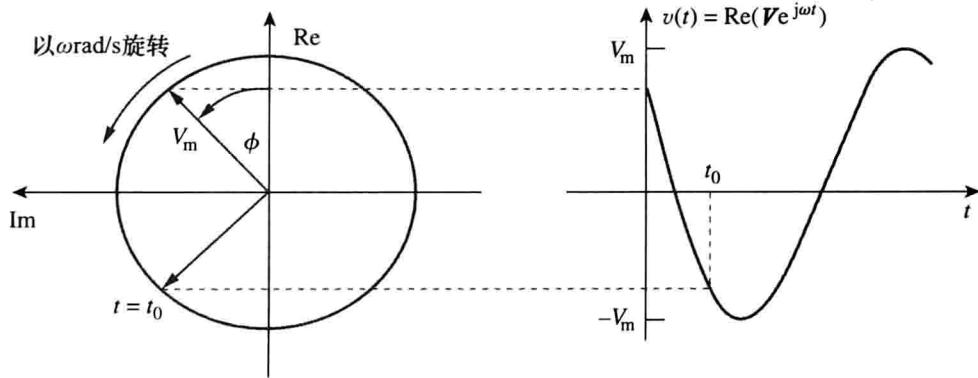
其中：

$$V = V_m e^{j\phi} = V_m / \underline{\phi} \quad (9.24)$$

V 称为正弦信号 $v(t)$ 的相量表示，换句话说，相量就是正弦信号的幅度与相位的复数表示。式(9.20a)或式(9.20b)均可用于推导相量的概念，但习惯上通常采用式(9.20a)作为标准形式。

提示：相量可以看做是省略了时间依赖关系的正弦信号的等效数学表达式。

理解式(9.23)与式(9.24)的一种方法是在复平面上画出正弦矢量 $V e^{j\omega t} = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$ ，随着时间的增加，该正弦矢量在半径为 V_m 的圆周上沿逆时针方向以角速度 ω 做圆周运动，如图 9-7a 所示。 $v(t)$ 可以看做是正弦矢量在实轴上的投影，如图 9-7b 所示。正弦矢量在 $t=0$ 时刻的值就是正弦信号 $v(t)$ 的相量 V ，正弦矢量也可以看做是旋转相量。所以，只要将正弦信号表示为一个相量，其中便隐含 $e^{j\omega t}$ 项。因此，在进行相量运算时，切记相量的频率 ω 是非常重要的，否则，就会出现严重的错误。



a) 沿逆时针方向旋转的正弦矢量 b) 矢量在实轴上的投影随时间变化的函数曲线

图 9-7 $V e^{j\omega t}$ 的表示方法

提示：如果利用正弦函数取代余弦函数来表示相量，则 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Im}(V_m e^{j(\omega t + \phi)})$ ，并且对应的相量与式(9.24)具有相同的形式。

式(9.23)表明，要得到对应已知相量 V 的正弦信号，只需用时间因子 $e^{j\omega t}$ 乘以该相量后取实部即可。相量作为一个复数，同样可以表示为直角坐标形式、极坐标形式和指数形式。相量也有模值和相位(方向)，因此与矢量具有类似的特性，常用黑斜体字母表示。例如，相量 $V = V_m / \underline{\phi}$ 与 $I = I_m / \underline{-\theta}$ 的图形表示如图 9-8 所示。这种相量的图形表示法称为相量图。

提示：通常采用小写斜体字母(如 z)表示复数，采用黑斜体字母(如 V)表示相量，因为相量与矢量是类似的。

式(9.21)~式(9.23)表明，求取与正弦信号相对应的相量时，首先要将正弦信号表示为余弦函数形式，以便将正弦信号写成复数的实部，之后去掉时间因子 $e^{j\omega t}$ ，其余部分即对应于正弦信号的相量。通过去掉时间因子的方法，即可将正弦信号从时域转换到相量域，该转换关系可以归纳为：

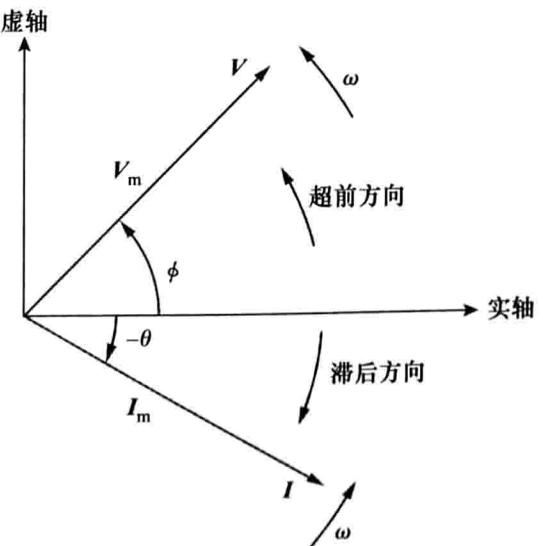


图 9-8 $V = V_m / \underline{\phi}$ 和 $I = I_m / \underline{-\theta}$ 的相量图

$$\boxed{v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \mathbf{V} = V_m / \phi}$$
(9.25)

已知正弦信号 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, 则其对应的相量为 $\mathbf{V} = V_m / \phi$ 。以表格形式表示的式(9.25)如表 9-1 所示, 其中不但给出了余弦函数对应的相量, 而且给出了正弦函数对应的向量。由式(9.25)可见, 确定正弦信号的相量表示时, 只需将该信号表示为余弦函数形式, 之后取其幅度和相位即可。反过来, 如果已知相量, 也可以将该相量表示为时域余弦函数形式, 该余弦函数的幅度与相量的幅度相等, 辐角等于 ωt 加上相量的相位角。这种在不同的域表示信息的思想在工程领域中是至关重要的。

表 9-1 正弦信号-相量的转换关系

时域表示	$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \sin(\omega t + \theta)$
相量域表示	V_m / ϕ	$V_m / \phi - 90^\circ$	I_m / θ	$I_m / \theta - 90^\circ$

注意, 在式(9.25)中去掉了频率(时间)因子 $e^{j\omega t}$, 因为 ω 是常量, 所以在相量域表示中没有明确写出频率。然而, 电路的响应仍然取决于频率。因此, 相量域通常也称为频率域。

由式(9.23)与式(9.24)可知, $v(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, 因此:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\omega V_m \sin(\omega t + \phi) = \omega V_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \\ &= \operatorname{Re}(\omega V_m e^{j\omega t} e^{j\phi} e^{j90^\circ}) = \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{V} e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (9.26)$$

这说明 $v(t)$ 的导数被转换为相量域中的 $j\omega \mathbf{V}$, 即:

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow j\omega \mathbf{V} \quad (9.27)$$

提示: 正弦信号的微分等效于其对应的相量乘以 $j\omega$ 。

类似地, $v(t)$ 的积分被转换为相量域中的 $\mathbf{V}/j\omega$, 即:

$$\int v dt \Leftrightarrow \frac{\mathbf{V}}{j\omega} \quad (9.28)$$

提示: 正弦信号的积分等效于其对应的相量除以 $j\omega$ 。

式(9.27)表明信号在时域中的微分对应于相量域中乘以 $j\omega$, 而式(9.28)表明信号在时域中的积分对应于相量域中除以 $j\omega$ 。式(9.27)与式(9.28)在确定电路的稳态解时非常有用, 而且无需知道所求电路变量的初始值, 这也是相量的重要应用之一。

除了在时域微分与时域积分中的应用外, 相量的另一重要应用是同频正弦信号的叠加, 后面通过例 9-6 可以很好地说明这种应用。

提示: 同频正弦信号的叠加等效于它们的对应相量叠加。

$v(t)$ 与 \mathbf{V} 之间的区别可归纳如下:

1. $v(t)$ 是瞬时或时域表示, 而 \mathbf{V} 是频域或相量域表示。

2. $v(t)$ 是与时间有关的, 而 \mathbf{V} 与时间无关(学生常常会忘记这一区别)。

3. $v(t)$ 始终是没有复数项的实数, 而 \mathbf{V} 通常为复数。

最后, 必须牢记的是, 相量分析仅适用于频率恒定的情况。即只有当两个或多个正弦信号具有相同的频率时, 才能应用相量进行运算。

例 9-3 计算如下复数的值:

$$(a) (40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ)^{1/2}; \quad (b) \frac{10 \angle -30^\circ + (3-j4)}{(2+j4)(3-j5)}$$

解: (a) 利用极坐标与直角坐标之间的转换关系可得:

$$40 \angle 50^\circ = 40(\cos 50^\circ + j\sin 50^\circ) = 25.71 + j30.64$$

$$20 \angle -30^\circ = 20[\cos(-30^\circ) + j\sin(-30^\circ)] = 17.32 - j10$$

相加后得到：

$$40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ = 43.03 + j20.64 = 47.72 \angle 25.63^\circ$$

取平方根后得到：

$$(40 \angle 50^\circ + 20 \angle -30^\circ)^{1/2} = 6.91 \angle 12.81^\circ$$

(b) 利用极坐标与直角坐标转换关系，经过相加、相乘和相除的运算，可得：

$$\begin{aligned} \frac{10 \angle -30^\circ + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 - j5)^*} &= \frac{8.66 - j5 + (3 - j4)}{(2 + j4)(3 + j5)} \\ &= \frac{11.66 - j9}{-14 + j22} = \frac{14.73 \angle -37.66^\circ}{26.08 \angle 122.47^\circ} = 0.565 \angle -160.13^\circ \end{aligned}$$



练习 9-3 试计算下列复数的值：

$$(a) [(5+j2)(-1+j4) - 5 \angle 60^\circ]^* ; (b) \frac{10+j5+3 \angle 40^\circ}{-3+j4} + 10 \angle 30^\circ + j5$$

答案：(a) $-15.5 - j13.67$; (b) $8.293 + j7.2$

例 9-4 试将下列正弦信号转换为相量：

$$(a) i = 6\cos(50t - 40^\circ) A ; (b) v = -4\sin(30t + 50^\circ) V$$

解：(a) $i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ 的相量为：

$$I = 6 \angle -40^\circ A$$

(b) 由于 $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$ ，则：

$$v = -4\sin(30t + 50^\circ) = 4\cos(30t + 50^\circ + 90^\circ) = 4\cos(30t + 140^\circ) V$$

于是 v 的相量为：

$$V = 4 \angle 140^\circ V$$



练习 9-4 试以相量来表示下列正弦量：

$$(a) v = 7\cos(2t + 40^\circ) V ; (b) i = -4\sin(10t + 10^\circ) A$$

答案：(a) $V = 7 \angle 40^\circ V$; (b) $I = 4 \angle 100^\circ A$

例 9-5 试求如下相量所表示的正弦信号：

$$(a) I = -3 + j4 A ; (b) V = j8e^{-j20^\circ} V$$

解：(a) $I = -3 + j4 = 5 \angle 126.87^\circ$ ，将其转换到时域，有：

$$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87^\circ) A$$

(b) 由于 $j = 1 \angle 90^\circ$ ，所以：

$$\begin{aligned} V &= j8 \angle -20^\circ = (1 \angle 90^\circ)(8 \angle -20^\circ) \\ &= 8 \angle 90^\circ - 20^\circ = 8 \angle 70^\circ V \end{aligned}$$

将其转到时域，可得：

$$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^\circ) V$$



练习 9-5 试求对应于如下相量的正弦信号：

$$(a) V = -25 \angle 40^\circ V ; (b) I = j(12 - j5) A$$

答案：(a) $v(t) = 25\cos(\omega t - 140^\circ) V$ 或 $25\cos(\omega t + 220^\circ) V$;

$$(b) i(t) = 13\cos(\omega t + 67.38^\circ) A$$

例 9-6 已知 $i_1(t) = 4\cos(\omega t + 30^\circ) A$, $i_2(t) = 5\sin(\omega t - 20^\circ) A$ ，求两信号之和。

解：本题用于说明相量的一个重要应用：计算同频正弦信号之和。电流 $i_1(t)$ 为标准形式，其相量为：

$$\mathbf{I}_1 = 4 \angle 30^\circ$$

下面需将 $i_2(t)$ 表示为余弦函数的标准形式，将正弦函数转换为余弦函数的方法是减 90° ，于是：

$$i_2 = 5\cos(\omega t - 20^\circ - 90^\circ) = 5\cos(\omega t - 110^\circ)$$

其相量为：

$$\mathbf{I}_2 = 5 \angle -110^\circ$$

如果令 $i = i_1 + i_2$ ，则有：

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 4 \angle 30^\circ + 5 \angle -110^\circ \\ &= 3.464 + j2 - 1.71 - j4.698 = 1.754 - j2.698 = 3.218 \angle -56.97^\circ \end{aligned} \quad (\text{A})$$

将上述结果转换到时域，得到：

$$i(t) = 3.218\cos(\omega t - 56.97^\circ) \text{ A}$$

当然，也可以利用式(9.9)计算 $(i_1 + i_2)$ ，但这种方法较为困难。

 **练习 9-6** 如果 $v_1 = -10\sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$, $v_2 = 20\sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, 试求 $v = v_1 + v_2$ 。

$$\text{答案: } v(t) = 29.77\cos(\omega t + 49.98^\circ) \text{ V}$$

例 9-7 利用相量方法求由如下微积分方程描述的电路中的电流 $i(t)$ 。

$$4i + 8 \int idt - 3 \frac{di}{dt} = 50\cos(2t + 75^\circ)$$

解：首先将方程中的每一项都由时域转换到相量域。利用式(9.27)与式(9.28)即可得到该方程的相量形式：

$$4\mathbf{I} + \frac{8\mathbf{I}}{j\omega} - 3j\omega\mathbf{I} = 50 \angle 75^\circ$$

由于 $\omega = 2$ ，所以：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(4 - j4 - j6) &= 50 \angle 75^\circ \\ \mathbf{I} &= \frac{50 \angle 75^\circ}{4 - j10} = \frac{50 \angle 75^\circ}{10.77 \angle -68.2^\circ} = 4.642 \angle 143.2^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

将上述相量转换到时域，有：

$$i(t) = 4.642\cos(2t + 143.2^\circ) \text{ A}$$

需要注意的是，这仅仅是电路的稳态解，无需知道其初始值即可求解。

 **练习 9-7** 利用相量方法求由如下微积分方程描述的电路中的电压 $v(t)$ 。

$$2 \frac{dv}{dt} + 5v + 10 \int v dt = 50\cos(5t - 30^\circ)$$

$$\text{答案: } v(t) = 5.3\cos(5t - 88^\circ) \text{ V}$$

9.4 电路元件的相量关系

掌握了如何在相量域或频域中表示电压和电流之后，如何将相量方法应用于包含无源元件 R 、 L 、 C 的电路中呢？方法是将电路中各元件的电压-电流关系由时域转换到频域。转换时仍需遵循无源符号国际惯例。

首先介绍电阻。如果流过电阻 R 的电流为 $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ ，则由欧姆定律可知，其两端的电压为：

$$v = iR = RI_m \cos(\omega t + \phi) \quad (9.29)$$

该电压的相量表示为：

$$\mathbf{V} = RI_m \angle \phi \quad (9.30)$$

而电流的相量表示为 $\mathbf{I} = I_m \angle \phi$ ，因此：

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (9.31)$$

上式表明，电阻在相量域中的电压-电流关系服从欧姆定律，与时域的情况相同，图9-9给出了相量域中电阻的电压-电流关系，由式(9.31)可以看出，电阻的电压与电流是同相的，如图9-10的相量图所示。

对于电感而言，假设流过电感的电流为 $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$ ，则电感两端电压为：

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (9.32)$$

由式(9.10)可知 $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$ ，于是电感两端的电压可以写为：

$$v = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (9.33)$$

转换为相量，得到：

$$\mathbf{V} = \omega L I_m e^{j(\phi+90^\circ)} = \omega L I_m e^{j\phi} e^{j90^\circ} = \omega L I_m / \phi + 90^\circ \quad (9.34)$$

而 $I_m / \phi = \mathbf{I}$ ，且由式(9.19)可知 $e^{j90^\circ} = j$ ，因此：

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (9.35)$$

上式表明，电感两端电压的幅度为 $\omega L I_m$ ，相位为 $(\phi + 90^\circ)$ ，电压与电流的相位差为 90° 并且电流滞后于电压。图9-11给出了电感的电压-电流关系，图9-12所示为二者的相量图。

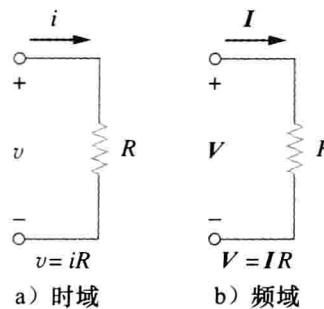


图 9-9 电阻的电压-电流关系

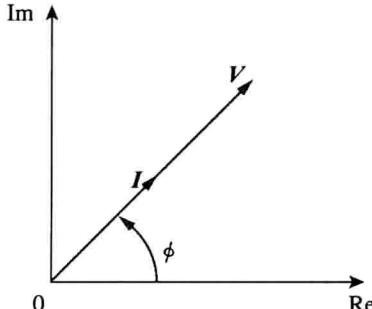


图 9-10 电阻的相量图

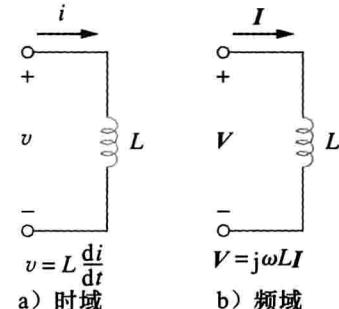


图 9-11 电感的电压-电流关系

提示：虽然说电感的电压超前于电流同样是正确的，但习惯上通常说电流相对于电压的相位关系。

对于电容 C 而言，假设电容两端的电压为 $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$ ，则流过电容的电流为：

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (9.36)$$

可以按照分析电感的步骤，或将式(9.27)用于式(9.36)，得到：

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} \quad (9.37)$$

式(9.37)表明，对于电容而言，电压与电流的相位差为 90° ，且电流超前于电压。图9-13给出了电容的电压-电流关系，图9-14所示为二者的相量图。表9-2总结了电路无源元件的时域与相量域表示。

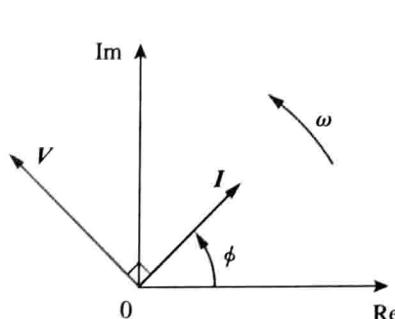


图 9-12 电感的相量图

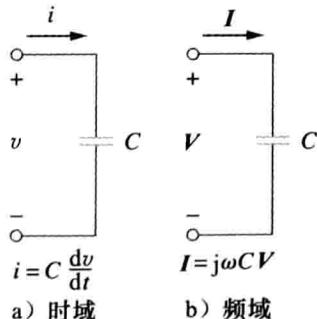


图 9-13 电容的电压-电流关系图

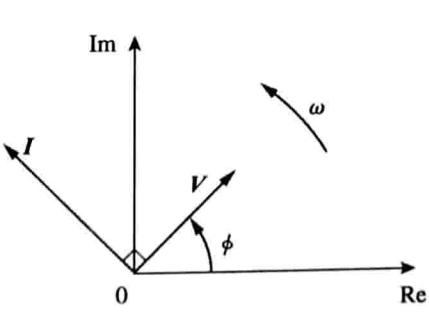


图 9-14 电容的相量图

例 9-8 0.1H 电感两端的电压为 $v=12\cos(60t+45^\circ)$, 计算该电感的稳态电流。

解: 对于电感而言, $\mathbf{V}=\mathbf{j}\omega LI$, 其中 $\omega=60\text{rad/s}$, $\mathbf{V}=12\angle 45^\circ\text{V}$, 因此:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{j}\omega L} = \frac{12\angle 45^\circ}{\mathbf{j}60 \times 0.1} = \frac{12\angle 45^\circ}{6\angle 90^\circ} = 2\angle -45^\circ(\text{A})$$

将该电流转换到时域, 得到:

$$i(t) = 2\cos(60t - 45^\circ)\text{A}$$

练习 9-8 若 $50\mu\text{F}$ 电容两端的电压为 $v=10\times\cos(100t+30^\circ)$, 计算流过该电容的电流。

表 9-2 电压-电流关系总结

元件	时域	频域
R	$v=Ri$	$\mathbf{V}=R\mathbf{I}$
L	$v=L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V}=\mathbf{j}\omega LI$
C	$i=C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{j}\omega C}$

答案: $50\cos(100t+120^\circ)\text{mA}$

9.5 阻抗与导纳

前一节介绍了三个无源元件 R 、 L 、 C 的电压-电流关系为:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad \mathbf{V} = \mathbf{j}\omega LI \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{j}\omega C} \quad (9.38)$$

利用相量电压与相量电流之比表示上述方程可得:

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{j}\omega L, \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{\mathbf{j}\omega C} \quad (9.39)$$

由以上三个表达式, 即可得到任意一种无源元件欧姆定律的相量形式, 即:

$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$

或

$\mathbf{V} = \mathbf{ZI}$

(9.40)

其中, \mathbf{Z} 是一个与频率有关的量, 称为阻抗(impedance), 单位为欧姆。

电路的阻抗是指相量电压 \mathbf{V} 与相量电流 \mathbf{I} 之比, 单位为欧姆(Ω)。

阻抗表示电路对正弦电流的阻碍程度。虽然阻抗是两个相量之比, 但它本身不是相量, 因为阻抗并不遵循正弦规律变化。

由式(9.39)可以得到电阻、电感与电容的阻抗。表 9-3 总结了这些元件的阻抗与导纳。由表可知: $\mathbf{Z}_L = \mathbf{j}\omega L$, $\mathbf{Z}_C = -\mathbf{j}/\omega C$ 下面考虑角频率的两个极端情况, 当 $\omega=0$ 时(直流源), $\mathbf{Z}_L=0$, $\mathbf{Z}_C \rightarrow \infty$, 证实了以前学过的知识, 电感对直流相当于短路, 电容对直流相当干开路; 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时(高频情况), $\mathbf{Z}_L \rightarrow \infty$, $\mathbf{Z}_C=0$, 表明对高频而言, 电感相当于开路, 电容相当于短路。图 9-15 说明了上述两种极端情况。

阻抗作为一个复数, 可以用直角坐标形式表示为:

$$\mathbf{Z} = R + \mathbf{j}X \quad (9.41)$$

其中 $R = \text{Re } \mathbf{Z}$ 为电阻(resistance), $X = \text{Im } \mathbf{Z}$ 为电抗(reactance)。电抗 X 可以为正值, 也可以为负值。如果 X 为正值, 则称阻抗为感性的, 如果 X 为负值, 则称阻抗为容性的。因此, 阻抗 $\mathbf{Z} = R + \mathbf{j}X$ 称为感性(inductive)阻抗或滞后阻抗, 因为流过该阻抗的电流滞后于该阻抗两端的电压。而阻抗 $\mathbf{Z} = R - \mathbf{j}X$ 则称为容性(capacitive)阻抗或超前阻抗, 因为流过该阻抗的电流超前于该阻抗两端的

表 9-3 无源元件的阻抗与导纳

元件	阻抗	导纳
R	$\mathbf{Z}=R$	$\mathbf{Y}=\frac{1}{R}$
L	$\mathbf{Z}=\mathbf{j}\omega L$	$\mathbf{Y}=\frac{1}{\mathbf{j}\omega L}$
C	$\mathbf{Z}=\frac{1}{\mathbf{j}\omega C}$	$\mathbf{Y}=\mathbf{j}\omega C$

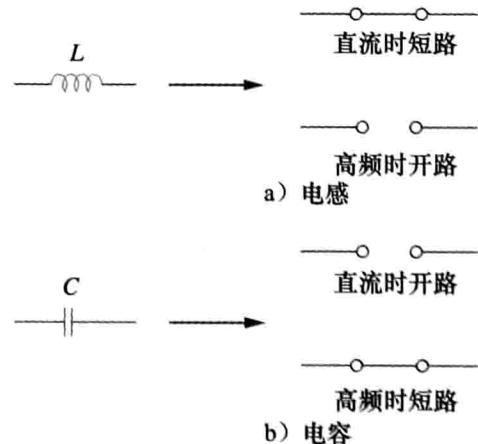


图 9-15 直流与高频时的等效电路

电压。阻抗、电阻、电抗的单位均为欧姆。阻抗也可以表示为极坐标形式：

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \theta \quad (9.42)$$

比较式(9.41)与式(9.42)可以推出：

$$\boxed{\mathbf{Z} = R + jX = |\mathbf{Z}| \angle \theta} \quad (9.43)$$

其中：

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta = \arctan \frac{X}{R} \quad (9.44)$$

且

$$R = |\mathbf{Z}| \cos \theta, \quad X = |\mathbf{Z}| \sin \theta \quad (9.45)$$

有时候采用阻抗的倒数，即导纳(admittance)运算起来比较方便。

导纳 Y 定义为阻抗的倒数，单位为西门子(S)。

元件(电路)的导纳 Y 等于流过该元件(电路)的相量电流与该元件(电路)两端的相量电压之比。即：

$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}} \quad (9.46)$$

由式(9.39)可以得到电阻、电感与电容的导纳，表 9-3 已将其总结在内。导纳 Y 作为一个复数，可以表示为：

$$\boxed{Y = G + jB} \quad (9.47)$$

其中， $G = \text{Re } Y$ 称为电导，而 $B = \text{Im } Y$ 称为电纳。导纳、电导与电纳的单位均为西门子(姆欧)。由式(9.41)与式(9.47)可得：

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (9.48)$$

分母有理化后得到：

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (9.49)$$

令实部、虚部分别对应相等，得到：

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad (9.50)$$

由此可见， $G \neq 1/R$ ，这与纯电阻电路不同。当然，如果 $X=0$ ，则有 $G=1/R$ 。

例 9-9 求图 9-16 所示电路的 $v(t)$ 与 $i(t)$ 。

解：由电压源 $v_s = 10 \cos 4t$, $\omega = 4$ ，可得：

$$\boxed{V_s = 10 \angle 0^\circ V}$$

其阻抗为：

$$\mathbf{Z} = 5 + \frac{1}{j\omega C} = 5 + \frac{1}{j4 \times 0.1} = (5 - j2.5)\Omega$$

于是电流为：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 - j2.5} = \frac{10(5 + j2.5)}{5^2 + 2.5^2} = 1.6 + j0.8 = 1.789 \angle 26.57^\circ (A) \quad (9.9.1)$$

电容两端的电压为：

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \mathbf{Z}_c = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C} = \frac{1.789 \angle 26.57^\circ}{j4 \times 0.1} = \frac{1.789 \angle 26.57^\circ}{0.4 \angle 90^\circ} = 4.47 \angle -63.43^\circ (V) \quad (9.9.2)$$

将式(9.9.1)与式(9.9.2)中的 \mathbf{I} 与 \mathbf{V} 转换到时域，得到：

$$i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) A$$

$$v(t) = 4.47 \cos(4t - 63.43^\circ) \text{ V}$$

可以看出, $i(t)$ 超前 $v(t)$ 90° , 与预期相一致。

练习 9-9 求图 9-17 所示电路中的 $v(t)$ 与 $i(t)$ 。

答案: $8.944 \sin(10t + 93.43^\circ) \text{ V}$, $4.472 \sin(10t + 3.43^\circ) \text{ A}$

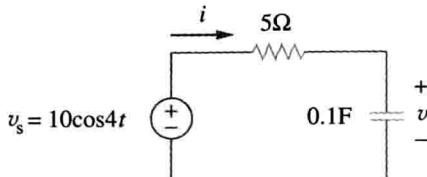


图 9-16 例 9-9 图

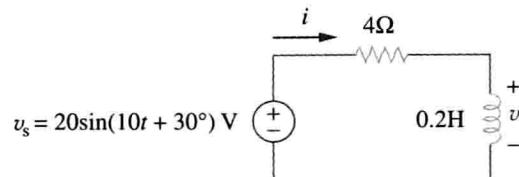


图 9-17 练习 9-9 图

† 9.6 频域中的基尔霍夫定律

在频域中进行电路分析时, 必须利用基尔霍夫电流定律和电压定律。因此, 本节将推导这两个定律在频域中的形式。

对于 KVL 而言, 设 v_1, v_2, \dots, v_n 为闭合回路中的电压, 则有:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0 \quad (9.51)$$

在正弦稳定状态下, 各电压可以用余弦函数表示。于是, 式(9.51)变为:

$$V_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \dots + V_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0 \quad (9.52)$$

也可以写为:

$$\operatorname{Re}(V_{m1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_{m2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t}) + \dots + \operatorname{Re}(V_{mn} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}) = 0$$

即

$$\operatorname{Re}[(V_{m1} e^{j\theta_1} + V_{m2} e^{j\theta_2} + \dots + V_{mn} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}] = 0 \quad (9.53)$$

如果令 $\mathbf{V}_k = V_{mk} e^{j\omega t}$, 则有:

$$\operatorname{Re}[(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n) e^{j\omega t}] = 0 \quad (9.54)$$

由于 $e^{j\omega t} \neq 0$, 所以:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_n = 0 \quad (9.55)$$

表明基尔霍夫电压定律对于相量依然成立。

按照类似的推导过程, 可以证明基尔霍夫电流定律同样对相量成立。如果令 i_1, i_2, \dots, i_n 为 t 时刻流入或流出网络中一个闭合平面的电流, 则有:

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0 \quad (9.56)$$

如果 $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n$ 为正弦信号 i_1, i_2, \dots, i_n 的相量形式, 则:

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_n = 0 \quad (9.57)$$

此即频域中的基尔霍夫电流定律。

一旦证明了 KCL 与 KVL 在频域中成立, 即可很容易地进行电路分析, 如阻抗合并、节点分析与网孔分析、叠加定理以及电源转换等。

9.7 阻抗合并

考虑如图 9-18 所示的 N 个串联阻抗, 流过各阻抗的电流为同一电流 \mathbf{I} 。沿该回路应用 KVL, 可得:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N) \quad (9.58)$$

输入端的等效阻抗为:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N$$

即

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_N \quad (9.59)$$

上式表明，串联阻抗的总阻抗(等效阻抗)等于各个阻抗之和，这与电阻串联的结论类似。

如果 $N=2$ ，如图 9-19 所示，则流过阻抗的电流为：

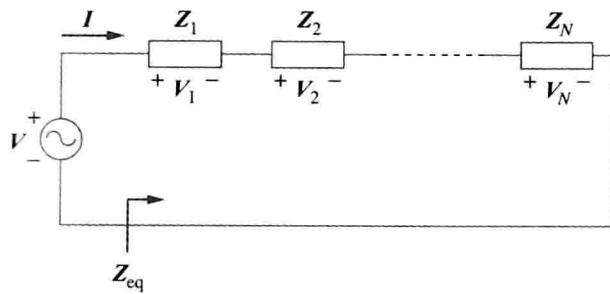


图 9-18 N 个阻抗的串联

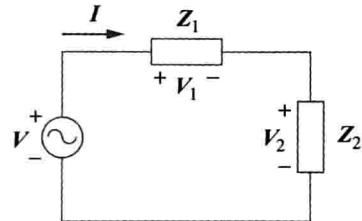


图 9-19 分压原理

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (9.60)$$

由于 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}$ ，所以：

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V} \quad (9.61)$$

即分压公式。

同理，可以得到图 9-20 所示的 N 个并联阻抗的等效阻抗或等效导纳，各阻抗两端的电压是相同的，对顶部节点应用 KCL，可以得到：

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_N = \mathbf{V} \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N} \right) \quad (9.62)$$

其等效阻抗为：

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{eq}}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Z}_N} \quad (9.63)$$

等效导纳为：

$$\mathbf{Y}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_N \quad (9.64)$$

上式表明，并联导纳的等效导纳等于各导纳之和。

当 $N=2$ 时，如图 9-21 所示，其等效阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} = \frac{1}{1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (9.65)$$

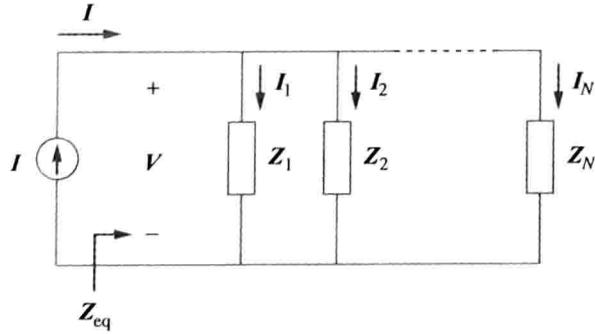


图 9-20 N 个阻抗并联

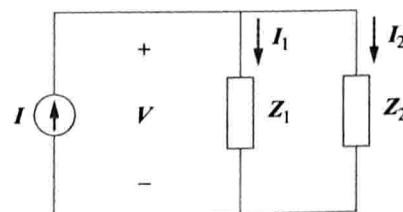


图 9-21 分流原理

又因为：

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_2 \mathbf{Z}_2$$

因此，流过各阻抗的电流为：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I} \quad (9.66)$$

即分流原理。

电阻电路中的Y-△与△-Y转换同样适用于阻抗电路。对于图9-22所示的阻抗电路，其变换公式如下。

Y-△的转换：

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_a &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1} \\ \mathbf{Z}_b &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2} \\ \mathbf{Z}_c &= \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_3 \mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_3}\end{aligned}\quad (9.67)$$

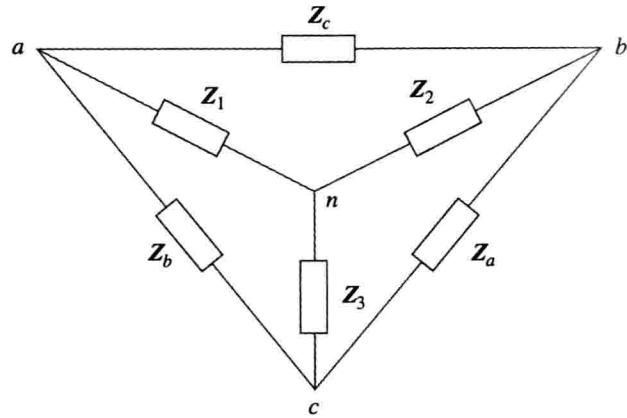


图9-22 叠加的Y网络与△网络

△-Y的转换：

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= \frac{\mathbf{Z}_b \mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \\ \mathbf{Z}_2 &= \frac{\mathbf{Z}_c \mathbf{Z}_a}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c} \\ \mathbf{Z}_3 &= \frac{\mathbf{Z}_a \mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}\end{aligned}\quad (9.68)$$

在△电路或Y电路中，如果其三条支路上的阻抗均相等，则称该△电路或者Y电路为平衡的。

如果△-Y电路是平衡的，则式(9.67)与式(9.68)变为：

$$\mathbf{Z}_\Delta = 3\mathbf{Z}_Y \quad \text{或} \quad \mathbf{Z}_Y = \frac{1}{3}\mathbf{Z}_\Delta \quad (9.69)$$

其中， $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3$ 和 $\mathbf{Z}_\Delta = \mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c$ 。

通过本节的学习可知，之前学习的分压原理、分流原理、电路化简、阻抗等效以及Y-△转换等均适用于交流电路。第10章还将证明，与直流电路分析相同，叠加定理、节点分析法、网孔分析法、电源转换、戴维南定理以及诺顿定理等电路分析方法同样适用于交流电路分析。

例9-10 求图9-23所示电路的输入阻抗，假设电路的工作角频率为 $\omega=50\text{rad/s}$ 。

解：设 $\mathbf{Z}_1=2\text{mF}$ 电容的阻抗， $\mathbf{Z}_2=3\Omega$ 电阻与 10mF 电容串联的阻抗， $\mathbf{Z}_3=0.2\text{H}$ 电感与 8Ω 电阻串联的阻抗。则有：

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \times 2 \times 10^{-3}} = -j10(\Omega)$$

$$\mathbf{Z}_2 = 3 + \frac{1}{j\omega C} = 3 + \frac{1}{j50 \times 10 \times 10^{-3}} = (3 - j2)\Omega$$

$$\mathbf{Z}_3 = 8 + j\omega L = 8 + j50 \times 0.2 = (8 + j10)\Omega$$

于是，输入阻抗为：

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{in} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \parallel \mathbf{Z}_3 = -j10 + \frac{(3 - j2)(8 + j10)}{11 + j8} \\ &= -j10 + \frac{(44 + j14)(11 - j8)}{11^2 + 8^2} = (-j10 + 3.22 - j1.07)\Omega\end{aligned}$$

因此：

$$Z_{in} = (3.22 - j11.07)\Omega$$

练习 9-10 计算图 9-24 所示电路在 $\omega=10\text{rad/s}$ 时的输入阻抗。

答案: $(149.52 - j195)\Omega$

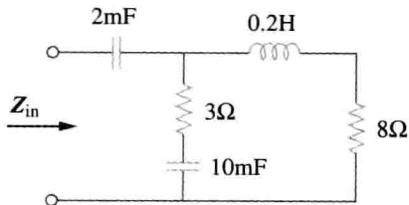


图 9-23 例 9-10 图

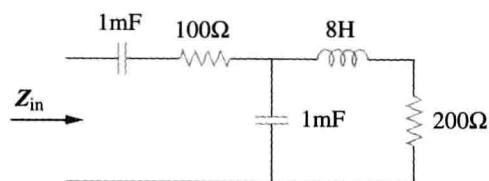


图 9-24 练习 9-10 图

例 9-11 求图 9-25 所示电路中的 $v_o(t)$ 。

解: 为了进行频域分析, 首先必须将图 9-25 所示的时域电路转换为图 9-26 所示的相量域等效电路, 转换过程如下:

$$v_s = 20\cos(4t - 15^\circ) \Rightarrow V_s = 20 \angle -15^\circ, \quad \omega = 4$$

$$10\text{mF} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4 \times 10 \times 10^{-3}} = -j25(\Omega)$$

$$5\text{H} \Rightarrow j\omega L = j4 \times 5 = j20(\Omega)$$

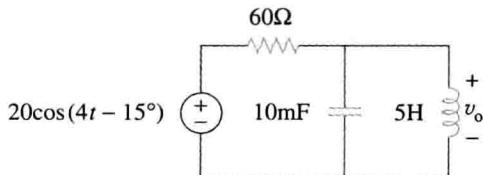


图 9-25 例 9-11 图

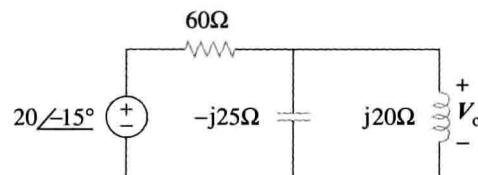


图 9-26 图 9-25 的频域等效电路

设 $Z_1 = 60\Omega$ 电阻的阻抗, $Z_2 = 10\text{mF}$ 电容与 5H 电感的并联阻抗, 则 $Z_1 = 60\Omega$ 且:

$$Z_2 = -j25 \parallel j20 = \frac{-j25 \times j20}{-j25 + j20} = j100(\Omega)$$

由分压原理可得:

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_s = \frac{j100}{60 + j100} (20 \angle -15^\circ) \\ &= (0.8575 \angle 30.96^\circ) (20 \angle -15^\circ) = 17.15 \angle 15.96^\circ (\text{V}) \end{aligned}$$

将其转换到时域得到:

$$v_o(t) = 17.15 \cos(4t + 15.96^\circ) \text{V}$$

练习 9-11 计算图 9-27 所示电路中的 v_o 。 答案: $v_o(t) = 35.36 \cos(10t - 105^\circ) \text{V}$

例 9-12 计算图 9-28 所示电路中的电流 I 。

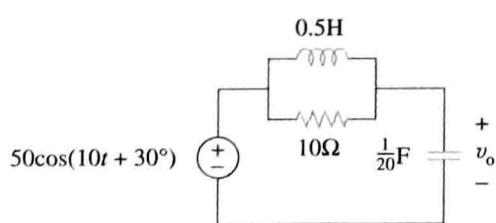


图 9-27 练习 9-11 图

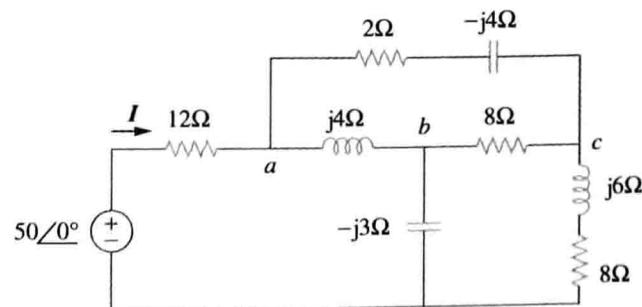


图 9-28 例 9-12 图

解: 电路中与节点 a 、 b 、 c 相连接的 \triangle 网络可以转换为图 9-29 所示的 Y 网络。利用

式(9.68)可以求出该Y网络中的各阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{an} = \frac{j4(2-j4)}{j4+2-j4+8} = \frac{4(4+j2)}{10} = (1.6+j0.8)\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{bn} = \frac{j4 \times 8}{10} = j3.2\Omega, \quad \mathbf{Z}_{cn} = \frac{8(2-j4)}{10} = (1.6-j3.2)\Omega$$

电源两端的总阻抗为：

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= 12 + \mathbf{Z}_{an} + (\mathbf{Z}_{bn} - j3) \parallel (\mathbf{Z}_{cn} + j6 + 8) = 12 + 1.6 + j0.8 + (j0.2) \parallel (9.6 + j2.8) \\ &= 13.6 + j0.8 + \frac{j0.2(9.6 + j2.8)}{9.6 + j3} = 13.6 + j1 = 13.64 / 4.204^\circ (\Omega) \end{aligned}$$

所求的电流为：

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{50 / 0^\circ}{13.64 / 4.204^\circ} = 3.666 / -4.204^\circ (\text{A})$$

练习 9-12 试求图 9-30 所示电路中的 \mathbf{I} 。

答案：9.546 / 33.8° A

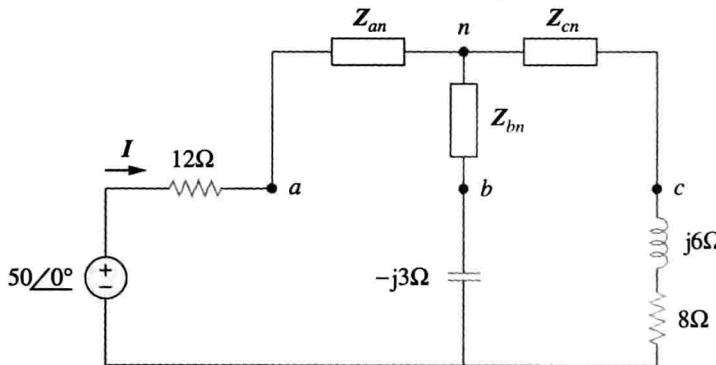


图 9-29 图 9-28 经 Δ -Y 转换后的电路

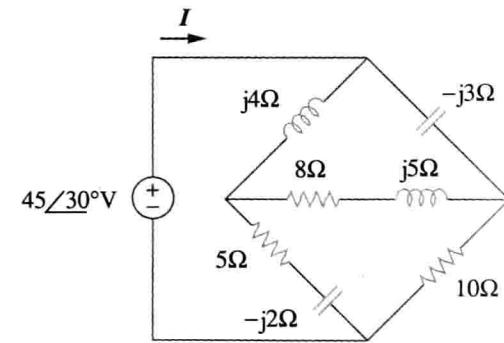


图 9-30 练习 9-12 图

†9.8 应用实例

第 7 章与第 8 章已经介绍了 RC 、 RL 和 RLC 电路在直流电路中的应用实例，这些电路同样可以用于交流电路，例如耦合电路、移相电路、滤波器、振荡电路、交流电桥电路和变压器等。本节仅讨论两个简单实例： RC 移相电路与交流电桥电路。其他部分电路将在后续章节中讨论。

9.8.1 移相器

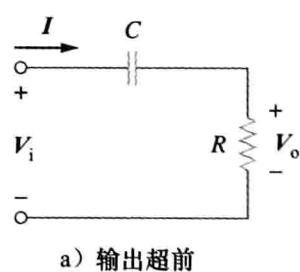
移相电路通常用于校正电路中不必要的相移或者用于产生某种特定的效果，采用 RC 电路即可达到这一目的，因为该电路中的电容会使得电路电流超前于激励电压。两种常用的 RC 电路如图 9-31 所示。（ RL 电路或任意电抗性电路也可以用作移相电路）。

在图 9-31a 所示电路中，电流 I 超前于激励电压 V_i 相位角 θ ， $0 < \theta < 90^\circ$ ， θ 的大小取决于 R 和 C 的值。如果 $X_C = 1/\omega C$ ，则电路的总阻抗为 $Z = R + jX_C$ ，其相移为：

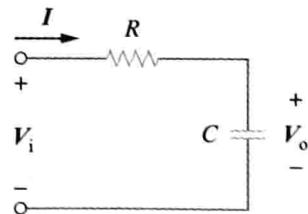
$$\theta = \arctan \frac{X_C}{R} \quad (9.70)$$

上式表明，相移的大小取决于 R 和 C 的值以及工作频率。由于电阻两端的输出电压 V_o 与电流同相，所以 V_o 超前于 V_i （正相移），如图 9-32a 所示。

在图 9-31a 所示电路中，输出为电容两端电压，电流 I 超前于输入电压 V_i 相位角 θ ，但是电容两端的输出电压 $v_o(t)$ 滞后于输入电压 $v_i(t)$ （负相移），如图 9-32b 所示。



a) 输出超前



b) 输出滞后

图 9-31 RC 串联移相电路

注意, 图 9-31 所示的简单 RC 电路也可以用作分压电路, 因此, 当相移 θ 趋近于 90° 时, 其输出电压 V_o 也趋近于零。正是基于上述原因, 仅在所需的相移量很小时才使用这类简单的 RC 电路。如果要求相移量大于 60° , 则可以将简单的 RC 电路级联起来, 从而使得级联后的总相移量等于各个相移量之和。实际上, 除非采用运算放大器将前后级隔离开, 否则由于后级作为前级的负载, 会导致各级的相移并不相等。

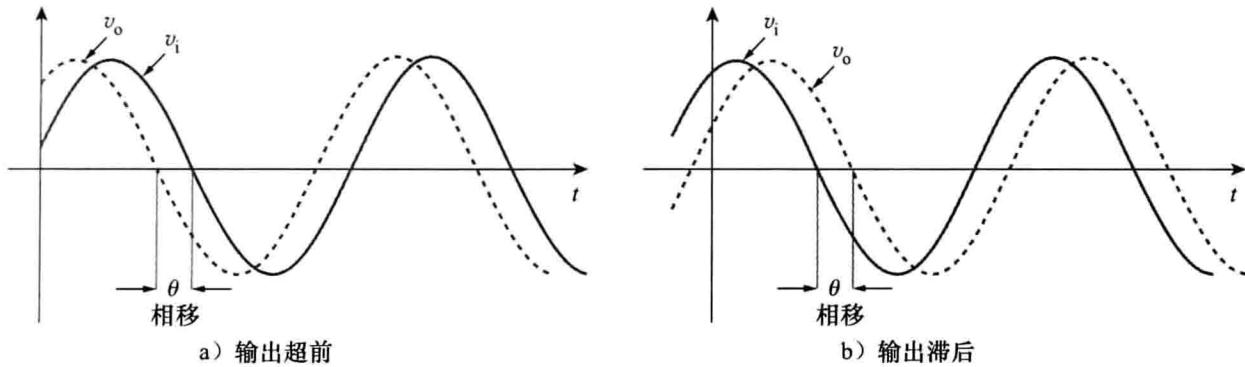


图 9-32 RC 电路中的相移

例 9-13 设计一个可以提供 90° 超前相位的 RC 电路。

解: 如果在某特定频率处, 使得电路元件具有相等的欧姆值, 例如 $R = |X_C| = 20\Omega$, 则由式(9.70)可知, 相移量恰好为 45° 。将图 9-31a 所示的两个 RC 电路级联起来, 就得到图 9-33 所示的电路, 该电路提供了 90° 的超前相移或正相移, 下面将予以证明。利用串并联合并方法, 可以得到图 9-33 所示电路的阻抗 Z 为:

$$Z = 20 \parallel (20 - j20) = \frac{20(20 - j20)}{40 - j20} = (12 - j4)\Omega \quad (9.13.1)$$

由分压公式可得:

$$V_1 = \frac{Z}{Z - j20} V_i = \frac{12 - j4}{12 - j24} V_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ V_i \quad (9.13.2)$$

且

$$V_o = \frac{20}{20 - j20} V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ V_1 \quad (9.13.3)$$

将式(9.13.2)代入式(9.13.3)得到:

$$V_o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ V_i\right) = \frac{1}{3} \angle 90^\circ V_i$$

因此, 输出超前输入 90° , 但其幅度只是输入的 33% 。

练习 9-13 设计一个 RC 电路, 实现输出电压相位滞后输入电压相位 90° , 如果将方均根值为 $60V$ 的交流电压作用于该电路, 试求输出电压。

答案: 电路的典型设计如图 9-34 所示, 输出电压为 $20V_{rms}$

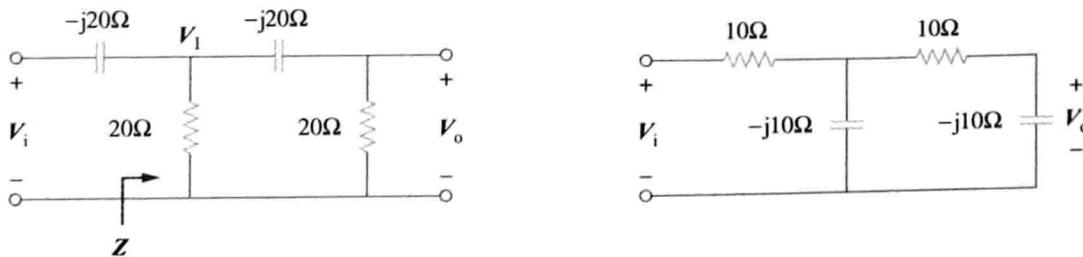
图 9-33 例 9-13: 超前 90° 的 RC 移相电路

图 9-34 练习 9-13 图

例 9-14 对于图 9-35a 所示的 RL 电路，计算频率为 2kHz 时的相移量。

解：当频率为 2kHz 时，10mH 与 5mH 电感对应的阻抗为：

$$10\text{mH} \Rightarrow X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 10 \times 10^{-3} = 40\pi = 125.7\Omega$$

$$5\text{mH} \Rightarrow X_L = \omega L = 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3} = 20\pi = 62.83\Omega$$

在图 9-35b 所示电路中，阻抗 Z 为 $j125.7\Omega$ 与 $(100+j62.83)\Omega$ 的并联，因此：

$$Z = j125.7 \parallel (100 + j62.83) = \frac{j125.7(100 + j62.83)}{100 + j188.5} = 69.56 / 60.1^\circ (\Omega) \quad (9.14.1)$$

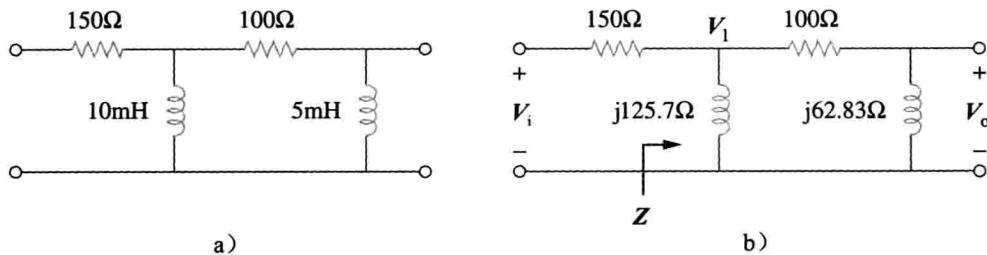


图 9-35 例 9-14 图

利用分压公式得到：

$$V_1 = \frac{Z}{Z + 150} V_i = \frac{69.56 / 60.1^\circ}{184.7 + j60.3} V_i = 0.3582 / 42.02^\circ V_i \quad (9.14.2)$$

且

$$V_o = \frac{j62.83}{100 + j62.83} V_1 = 0.532 / 57.86^\circ V_1 \quad (9.14.3)$$

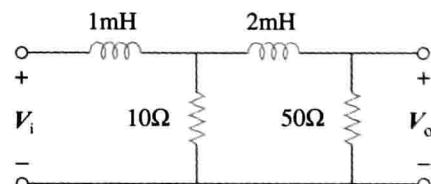
将式(9.14.2)与式(9.14.3)合并后可得：

$$V_o = (0.532 / 57.86^\circ) \times (0.3582 / 42.02^\circ) V_i = 0.1906 / 100^\circ V_i$$

上式表明，输出电压的幅度仅为输入电压幅度的 19%，但相位超前输入 100°。如果在该电路终端连接一个负载，则负载将会影响相移量。

练习 9-14 对于图 9-36 所示的 RL 电路，如果输入电压 V_i 为 10V，试求输出电压在频率为 5kHz 时的幅度和相移，并确定相移是超前还是滞后。

答案：1.7161V, 120.39°, 滞后



9.8.2 交流电桥

图 9-36 练习 9-14 图

交流电桥电路用于测量电感的电感 L 或电容的电容

C ，与测量未知电阻的惠斯顿电桥(参见 4.10 节)形式类似且原理相同。但是在测量 L 和 C 时，需要用交流电源和交流电表来取代检流计，交流电表可以是灵敏的交流电流表或交流电压表。

交流电桥电路的一般形式如图 9-37 所示。当无电流流过交流电表时，该电桥是平衡的，意味着 $V_1 = V_2$ ，由分压原理可知：

$$V_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_s = V_2 = \frac{Z_x}{Z_3 + Z_x} V_s \quad (9.71)$$

因此：

$$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_x}{Z_3 + Z_x} \Rightarrow Z_2 Z_3 = Z_1 Z_x \quad (9.72)$$

即

$$\mathbf{Z}_x = \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} \mathbf{Z}_2 \quad (9.73)$$

此即交流电桥电路的平衡方程，与式(4.30)表示的电阻电桥平衡方程类似，只是用 \mathbf{Z} 取代了 R 。

用于测量 L 与 C 的交流电桥电路如图 9-38 所示，其中 L_x 与 C_x 分别为待测未知电感与电容，而 L_s 和 C_s 分别为标准电感与电容(其值已知，具有很高精度)。在图 9-38 所示两种情况下，通过改变两个电阻 R_1 与 R_2 的值使得交流电表读数为零，从而使电桥进入平衡状态。由式(9.73)可以得到：

$$L_x = \frac{R_2}{R_1} L_s \quad (9.74)$$

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} C_s \quad (9.75)$$

注意，图 9-38 所示交流电桥的平衡并不取决于交流电源的频率 f 。因为式(9.74)与式(9.75)中未出现频率 f 。

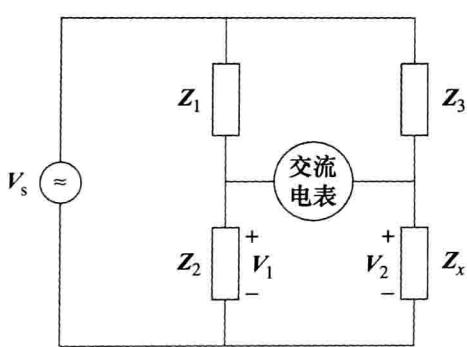


图 9-37 一般交流电桥

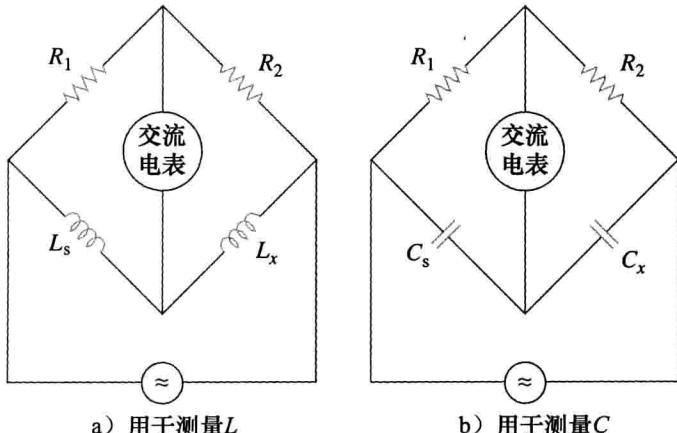


图 9-38 特殊交流电桥

例 9-15 在图 9-37 所示的交流电桥电路中， Z_1 是 $1\text{k}\Omega$ 电阻， Z_2 为 $4.2\text{k}\Omega$ 电阻， Z_3 是 $1.5\text{M}\Omega$ 电阻与 12pF 电容的并联。当 $f=2\text{kHz}$ 时，该电桥达到平衡，试求：(a) 组成 Z_x 的串联元件；(b) 组成 Z_x 的并联元件。

解：1. 明确问题。本例所要求解的电路已阐述清楚。

2. 列出已知条件。本例要求确定使得给定量平衡的未知条件，由于该电路存在并联等效和串联等效，需将两者均求出。

3. 确定备选方案。虽然求解未知量的方法不只一种，但直接等效法最佳。一旦得到答案，即可通过节点分析或者利用 PSpice 进行验证。

4. 尝试求解。由式(9.73)可得：

$$\mathbf{Z}_x = \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1} \mathbf{Z}_2 \quad (9.15.1)$$

其中：

$$\mathbf{Z}_x = R_x + jX_x, \mathbf{Z}_1 = 1000\Omega, \quad \mathbf{Z}_2 = 4200\Omega \quad (9.15.2)$$

和

$$\mathbf{Z}_3 = R_3 \parallel \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{j\omega C_3}{R_3 + 1/j\omega C_3} = \frac{R_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

当 $R_3=1.5\text{M}\Omega$, $C_3=12\text{pF}$ 时：

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{1.5 \times 10^6}{1 + j2\pi \times 2 \times 10^3 \times 1.5 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-12}} = \frac{1.5 \times 10^6}{1 + j0.2262}$$

即

$$\mathbf{Z}_3 = (1.427 - j0.3228) M\Omega \quad (9.15.3)$$

(a) 假设 \mathbf{Z}_x 由串联元件组成, 将式(9.15.2)与式(9.15.3)代入式(9.15.1), 可得:

$$R_x + jX_x = \frac{4200}{1000} (1.427 - j0.3228) \times 10^6 = (5.993 - j1.356) M\Omega \quad (9.15.4)$$

令实部与虚部分别对应相等, 可得 $R_x = 5.993 M\Omega$, 且容性电抗为:

$$X_x = \frac{1}{\omega C} = 1.356 \times 10^6$$

即

$$C_3 = \frac{1}{\omega X_x} = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 10^3 \times 1.356 \times 10^6} = 58.69 pF$$

(b) \mathbf{Z}_x 与式(9.15.4)保持不变, 但 R_x 与 X_x 为并联关系, 假设 RC 进行并联合并, 可得:

$$\mathbf{Z}_x = (5.993 - j1.356) M\Omega = R_x \parallel \frac{1}{j\omega C_x} = \frac{R_x}{1 + j\omega R_x C_x}$$

令实部与虚部分别对应相等可得:

$$R_x = \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{Z}_x)^2 + \operatorname{Im}(\mathbf{Z}_x)^2}{\operatorname{Re}(\mathbf{Z}_x)} = \frac{5.993^2 + 1.356^2}{5.993} = 6.3 M\Omega$$

$$C_x = -\frac{\operatorname{Im}(\mathbf{Z}_x)}{\omega [\operatorname{Re}(\mathbf{Z}_x)^2 + \operatorname{Im}(\mathbf{Z}_x)^2]} = -\frac{-1.356}{2\pi \times 2000 \times (5.917^2 + 1.356^2)} = 2.852 \mu F$$

在这种情况下, 假设为并联的 RC 组合。

5. 评价结果。下面利用 PSpice 验证结果的正确性, 对等效电路进行 PSpice 仿真, 将电路的“电桥”部分开路, 并施加 10V 输入电压, 在“电桥”输出端得到相对于电路参考点的电压如下:

```
FREQ      VM($N_0002)  VP($N_0002)
2.000E+03  9.993E+00  -8.634E-03
2.000E+03  9.993E+00  -8.637E-03
```

由于电压基本相同, 所以对于连接电桥两端的任意元件而言, 无可测电流流过“电桥”部分, 从而得到平衡电桥。这表明我们已经正确地确定了未知量。

对于上述运算而言, 还存在一个非常重要的问题! 通过以上计算过程得到的是理想的“理论”解, 但对于实际系统而言, 并不是一个很好的答案。这是因为, 上下两条支路的阻抗差别过大, 在实际电桥电路中无法接受。对于高精度测量而言, 总阻抗大小至少要在同一数量级。为了提高解的精度, 建议将上面支路阻抗的大小增加到 $500 k\Omega \sim 1.5 M\Omega$ 。对于实际系统的另一个问题是: 这些阻抗的大小在实际测量时同样会造成严重的问题, 因此必须利用适当的仪器以达到使电路负载最小的目的(负载可能会改变实际的电压读数)。

6. 是否满意? 通过前面的步骤已经求出未知量并进行了验证, 结果有效, 可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习 9-15 在图 9-37 所示的交流电桥电路中, \mathbf{Z}_1 为 $4.8 k\Omega$ 电阻, \mathbf{Z}_2 为 10Ω 电阻与 $0.25 \mu H$ 电感的串联, \mathbf{Z}_3 为 $12 k\Omega$ 电阻, 当 $f=6 MHz$ 时, 电桥达到平衡状态, 确定组成 \mathbf{Z}_x 的串联元件值。
答案: 25Ω 电阻与 $0.625 \mu H$ 电感串联

9.9 本章小结

1. 正弦信号是具有正弦函数或余弦函数形式的信号, 其一般表达式为:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

其中, V_m 为幅度(振幅), $\omega = 2\pi f$ 为角频率, $(\omega t + \phi)$ 为辐角, ϕ 为相位。

2. 相量是一个表示正弦信号幅度与相位的复数。给定正弦信号 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$, 其相量 \mathbf{V} 为:

$$\mathbf{V} = V_m / \phi$$

3. 在交流电路中, 电压相位与电流相位在任何时刻均存在固定的关系。如果 $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$ 表示元件两端的电压, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ 表示流过该元件的电流, 则对于电阻元件而言, $\phi_i = \phi_v$; 对于电容元件而言, ϕ_i 超前 $\phi_v 90^\circ$; 对于电感元件而言, ϕ_i 滞后 $\phi_v 90^\circ$ 。

4. 电路的阻抗 Z 等于该电路两端的电压与流过它的电流相量之比:

$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R(\omega) + jX(\omega)$$

导纳 y 是阻抗的倒数:

$$Y = \frac{1}{Z} = G(\omega) + jB(\omega)$$

串并联的阻抗合并方法与串并联电阻的合并方法相同, 即串联时阻抗相加, 并联时导纳相加。

5. 电阻的阻抗为 $Z=R$, 电感的阻抗为 $Z=jX=j\omega L$, 电容的阻抗为 $Z=-jX=1/j\omega C$ 。

6. 电路的基本定律(欧姆定律和基尔霍夫定律)同样适用于交流电路, 其形式与直流电路中的基本定律相同, 即:

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

$$\sum \mathbf{I}_k = 0 \text{ (KCL)}$$

$$\sum \mathbf{V}_k = 0 \text{ (KVL)}$$

7. 分压/分流原理, 阻抗/导纳的串联/并联合并、电路的化简以及 $Y-\Delta$ 转换等方法均适用于交流电路的分析。

8. 交流电路可应用于移相电路与电桥电路中。

复习题

- 1 下列哪一项不能正确地表示正弦信号 $A \cos \omega t$?

- (a) $A \cos 2\pi f t$ (b) $A \cos(2\pi t/T)$
 (c) $A \cos \omega(t-T)$ (d) $A \sin(\omega t - 90^\circ)$

- 2 以固定时间间隔重复自身的函数称为:

- (a) 相量 (b) 谐波
 (c) 周期性 (d) 电抗

- 3 下列频率中, 哪一个的周期较短?

- (a) 1krad/s (b) 1kHz

- 4 如果 $v_1 = 30 \sin(\omega t + 10^\circ)$, $v_2 = 20 \sin(\omega t + 50^\circ)$, 下述哪项叙述是正确的?

- (a) v_1 超前 v_2 (b) v_2 超前 v_1
 (c) v_2 滞后 v_1 (d) v_1 滞后 v_2
 (e) v_1 与 v_2 同相

- 5 电感两端的电压较流过它的电流超前 90° 。

- (a) 正确 (b) 错误

- 6 阻抗的虚部称为:

- (a) 电阻 (b) 导纳
 (c) 电纳 (d) 电导
 (e) 电抗

- 7 电容的阻抗随频率的增加而增加。

- (a) 正确 (b) 错误

- 8 图 9-39 所示电路在什么频率下的输出电压 $v_o(t)$ 等于输入电压 $v(t)$?

- (a) 0 rad/s (b) 1 rad/s
 (c) 4 rad/s (d) $\infty \text{ rad/s}$
 (e) 哪个都不是

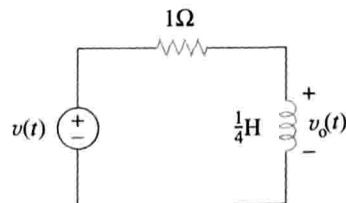


图 9-39 复习题 8 图

- 9 某 RC 串联电路中, $|V_R| = 12 \text{ V}$, $|V_C| = 5 \text{ V}$, 则其供电电压的幅度为:

- (a) -7 V (b) 7 V
 (c) 13 V (d) 17 V

- 10 某 RLC 串联电路的 $R = 30 \Omega$, $X_C = 50 \Omega$,

$X_L = 90\Omega$ 。则该电路的阻抗为：

- (a) $30+j140\Omega$ (b) $30+j40\Omega$
 (c) $30-j40\Omega$ (d) $-30-j40\Omega$

习题

9.2 节

1 已知正弦电压 $v(t) = 50\cos(30t + 10^\circ)$ V。

试求：(a) 振幅 V_m ；(b) 周期 T ；(c) 频率 f ；
 (d) $t = 10\text{ms}$ 时的 $v(t)$ 。

2 某线性电路中的电流为 $i_s = 15\cos(25\pi t + 25^\circ)$ A。

(a) 该电流的振幅为多少？(b) 角频率为多少？
 (c) 试求该电流的频率 f 。(d) 计算 $t = 2\text{ms}$ 时的 i_s 。

3 将如下函数表达为余弦函数形式：(a) $10\sin(\omega t + 30^\circ)$ ；(b) $-9\sin(8t)$ ；(c) $-20\sin(\omega t + 45^\circ)$ 。

4 设计一个问题帮助其他同学更好地理解正弦曲线。 **ED**

5 已知 $v_1 = 45\sin(\omega t + 30^\circ)$ V 和 $v_2 = 50\cos(\omega t - 30^\circ)$ V，计算这两个正弦信号之间的相位角，并指出哪一个是滞后的。

6 对于如下各组正弦信号，确定哪一个超前的，超前多少？(a) $v(t) = 10\cos(4t - 60^\circ)$ 和 $i(t) = 4\sin(4t + 50^\circ)$ ；(b) $v_1(t) = 4\cos(377t + 10^\circ)$ 和 $v_2(t) = -20\cos(377t)$ ；(c) $x(t) = 13\cos 2t + 5\sin 2t$ 和 $y(t) = 15\cos(2t - 11.8^\circ)$ 。

9.3 节

7 如果 $f(\phi) = \cos\phi + j\sin\phi$ ，证明 $f(\phi) = e^{j\phi}$ 。

8 计算下列各复数，并将计算结果表示为直角坐标形式。

$$(a) \frac{60 \angle 45^\circ}{7.5 - j10} + j2$$

$$(b) \frac{32 \angle -20^\circ}{(6 - j8)(4 + j2)} + \frac{20}{-10 + j24}$$

$$(c) 20 + (16 \angle -50^\circ)(5 + j12)$$

9 计算下列各复数，并将计算结果表示为极坐标形式。

$$(a) 5 \angle 30^\circ \left(6 - j8 + \frac{3 \angle 60^\circ}{2 + j} \right)$$

$$(b) \frac{(10 \angle 60^\circ) \times (35 \angle -50^\circ)}{(2 + j6) - (5 + j)}$$

10 设计一个问题帮助其他同学更好地理解相量。 **ED**

11 试求如下信号对应的相量：(a) $v(t) = 21\cos(4t - 15^\circ)$ V；(b) $i(t) = -8\sin(10t + 70^\circ)$ mA；(c) $v(t) = 120\sin(10t - 50^\circ)$ V；(d) $i(t) = -60\cos(30t + 10^\circ)$ mA。

12 设 $\mathbf{X} = 4 \angle 40^\circ$, $\mathbf{Y} = 20 \angle -30^\circ$ ，计算以下各量

$$(e) -30 + j40\Omega$$

答案：1(d); 2(c); 3(b); 4(b, d); 5(a);
 6(e); 7(b); 8(d); 9(c); 10(b)

并将结果表示为极坐标形式：(a) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{X}^*$ ；

$$(b) (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^*$$
; (c) $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})/\mathbf{X}$ 。

13 计算如下复数：

$$(a) \frac{2 + j3}{1 - j6} + \frac{7 - j8}{-5 + j11}$$

$$(b) \frac{(5 \angle 10^\circ) \times (10 \angle -40^\circ)}{(4 \angle -80^\circ) \times (-6 \angle 50^\circ)}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 + j3 & -j2 \\ -j2 & 8 - j5 \end{vmatrix}$$

14 化简如下各式：

$$(a) \frac{(5 - j6) - (2 + j8)}{(-3 + j4) \times (5 - j) + (4 - j6)}$$

$$(b) \frac{(240 \angle 75^\circ + 160 \angle -30^\circ) \times (60 - j80)}{(67 + j84) \times (20 \angle 32^\circ)}$$

$$(c) \left(\frac{10 + j20}{3 + j4} \right)^2 \sqrt{(10 + j5)(16 - j20)}$$

15 计算如下各行列式的值：

$$(a) \begin{vmatrix} 10 + j6 & 2 - j3 \\ -5 & -1 + j \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 20 \angle -30^\circ & -4 \angle -10^\circ \\ 16 \angle 0^\circ & 3 \angle 45^\circ \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 - j & -j & 0 \\ j & 1 & -j \\ 1 & j & 1 + j \end{vmatrix}$$

16 将如下各正弦信号转换为相量：(a) $-20\cos(4t + 135^\circ)$ ；(b) $8\sin(20t + 30^\circ)$ ；(c) $20\cos(2t) + 15\sin(2t)$ 。

17 电压 v_1 与 v_2 串联时，其和为 $v = v_1 + v_2$ 。如果 $v_1 = 10\cos(50t - \pi/3)$ V, $v_2 = 12\cos(50t + 30^\circ)$ V，试求 v 。

18 计算如下各相量所对应的正弦信号：(a) $\mathbf{V}_1 = 60 \angle 15^\circ$ V, $\omega = 1$ ；(b) $\mathbf{V}_2 = (6 + j8)$ V, $\omega = 40$ ；
 (c) $\mathbf{I}_1 = 2.8e^{-j\pi/3}$ A, $\omega = 377$ ；(d) $\mathbf{I}_2 = (-0.5 - j1.2)$ A, $\omega = 10^3$ 。

19 利用相量计算如下各式的值：(a) $3\cos(20t + 10^\circ) - 5\cos(20t - 30^\circ)$ ；(b) $40\sin 50t + 30\cos(50t - 45^\circ)$ ；(c) $20\sin 400t + 10\cos(400t + 60^\circ) - 5\sin(400t - 20^\circ)$ 。

20 某线性网络的输入电流为 $7.5\cos(10t + 30^\circ)$ A，输入电压为 $120\cos(10t + 75^\circ)$ V，计算相应的阻抗。

21 化简如下各式：

$$(a) f(t) = 5\cos(2t + 15^\circ) - 4\sin(2t - 30^\circ)$$

- (b) $g(t) = 8\sin t + 4\cos(t + 50^\circ)$
(c) $h(t) = \int_0^t (10\cos 40t + 50\sin 40t) dt$
- 22 某交流电压为 $v(t) = 55\cos(5t + 45^\circ)$ V, 利用相量计算:
- $$10v(t) + 4 \frac{dv}{dt} - 2 \int_{-\infty}^t v(t) dt$$
- 假设 $t = -\infty$ 时的积分值为 0。
- 23 利用相量分析计算如下各式: (a) $v = [110\sin(20t + 30^\circ) + 220\cos(20t - 90^\circ)]$ V; (b) $i = [30\cos(5t + 60^\circ) - 20\sin(5t + 60^\circ)]$ A。
- 24 利用向量法确定下列微积分方程中的 $v(t)$:
- (a) $v(t) + \int v dt = 10\cos t$;
- (b) $\frac{dv}{dt} + 5v(t) + 4 \int v dt = 20\sin(4t + 10^\circ)$

25 利用相量法确定下列方程中的 $i(t)$:

(a) $2 \frac{di}{dt} + 3i(t) = 4\cos(2t - 45^\circ)$
(b) $10 \int i dt + \frac{di}{dt} + 6i(t) = 5\cos(5t + 22^\circ)$ A

26 某 RLC 串联电路的回路方程为:

$$\frac{di}{dt} + 2i + \int_{-\infty}^t idt = \cos 2t$$

假设 $t = -\infty$ 时的积分值为 0, 利用相量法求 $i(t)$ 。

27 某 RLC 并联电路的节点方程为:

$$\frac{dv}{dt} + 50v + 100 \int v dt = 110\cos(377t - 10^\circ)$$

假设 $t = -\infty$ 时的积分值为 0, 利用相量法确定 $v(t)$ 。

9.4 节

- 28 计算流过一个与电压源 $v_s = 110\cos 377t$ V 相连接的 8Ω 电阻的电流。
- 29 如果流过一个 $2\mu F$ 电容的电流为 $i = 4\sin(10^6 t + 25^\circ)$ A, 求该电容两端的瞬时电压。
- 30 将电压 $v(t) = 100\cos(60t + 20^\circ)$ V 作用于相互并联的 $40k\Omega$ 电阻与 $50\mu F$ 电容两端, 求流过该电阻与电容的稳态电流。
- 31 某 RLC 串联电路中, $R = 80\Omega$, $L = 240mH$, $C = 5mF$, 如果输入电压为 $v(t) = 10\cos 2t$ V, 求流过该电路的电流。
- 32 利用图 9-40 所示电路, 试设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解电路元件的相量关系。 ED

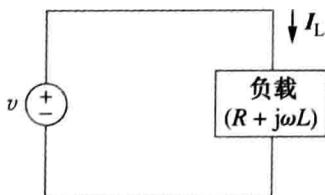


图 9-40 习题 32 图

- 33 某 RL 串联电路接到 $110V$ 交流电源上, 如果电阻两端的电压为 $85V$, 求电感两端的电压。
- 34 角频率 ω 取何值时, 图 9-41 所示电路的强迫响应 v_o 为零?

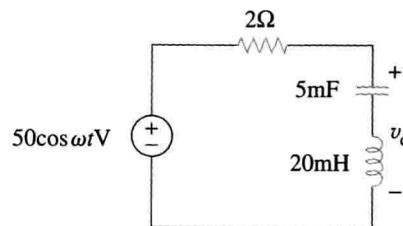


图 9-41 习题 34 图

9.5 节

- 35 在图 9-42 所示电路中, 求 $v_s(t) = 50\cos 200t$ V 时的电流 i 。

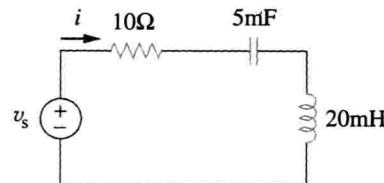


图 9-42 习题 35 图

- 36 利用图 9-43 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解阻抗。 ED

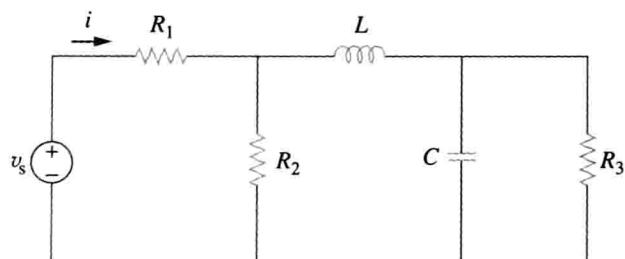


图 9-43 习题 36 图

- 37 计算图 9-44 所示电路中的导纳 Y 。

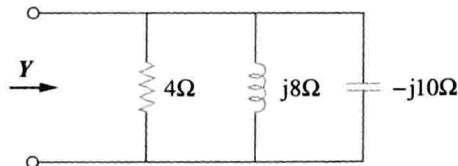


图 9-44 习题 37 图

- 38 利用图 9-45 设计一个问题帮助其他同学更好地理解导纳。 ED

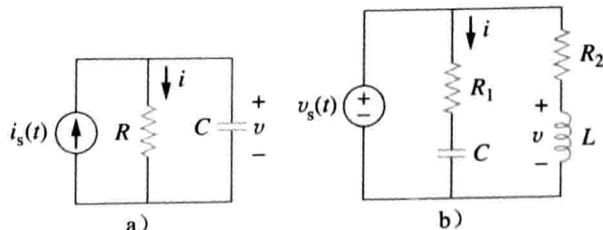


图 9-45 习题 38 图

- 39 计算图 9-46 所示电路中的 Z_{eq} ，并利用该结果计算电流 I ，假设 $\omega=10\text{rad/s}$ 。

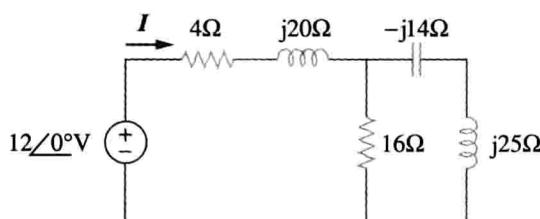


图 9-46 习题 39 图

- 40 计算图 9-47 所示电路在下列几种情况下的 i_o ：
(a) $\omega=1\text{rad/s}$ ；(b) $\omega=5\text{rad/s}$ ；(c) $\omega=10\text{rad/s}$ 。

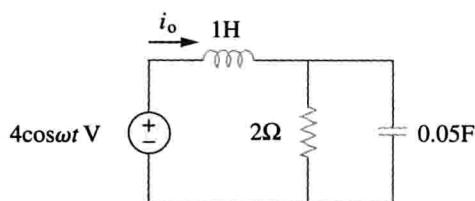


图 9-47 习题 40 图

- 41 计算图 9-48 所示 RLC 电路中的 $v(t)$ 。

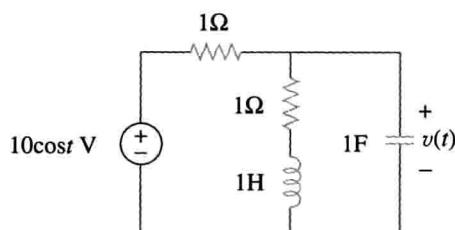


图 9-48 习题 41 图

- 42 计算图 9-49 所示电路中的 $v_o(t)$ 。

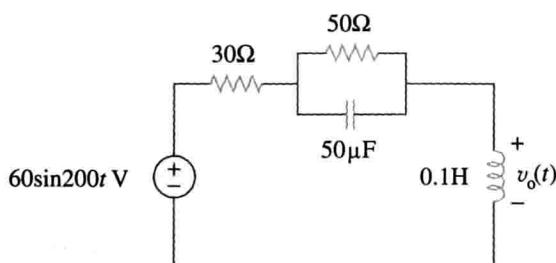


图 9-49 习题 42 图

- 43 计算图 9-50 所示电路中的 I_o 。

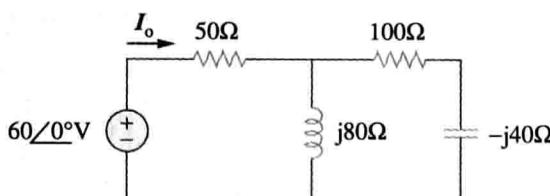


图 9-50 习题 43 图

- 44 计算图 9-51 所示电路中的 $i(t)$ 。

- 45 计算图 9-52 所示电路中的电流 I_o 。 **PS ML**

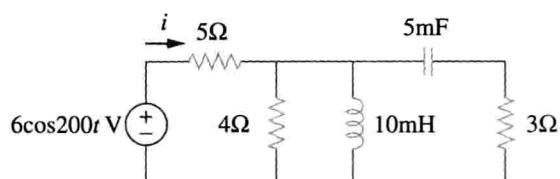


图 9-51 习题 44 图

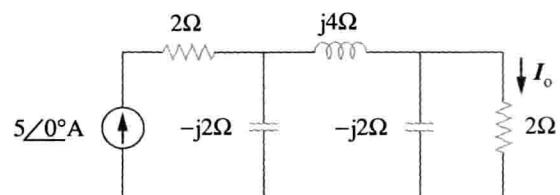


图 9-52 习题 45 图

- 46 如果图 9-53 所示电路中的 $i_s=5\cos(10t+40^\circ)\text{A}$ ，试求 i_o 。
PS

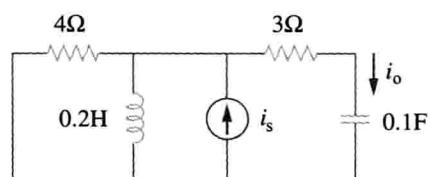


图 9-53 习题 46 图

- 47 计算图 9-54 所示电路中的 $i_s(t)$ 。

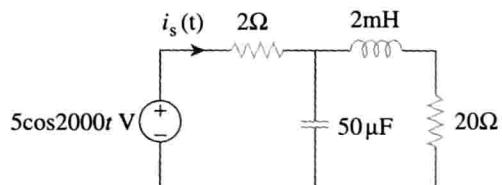


图 9-54 习题 47 图

- 48 如果图 9-55 所示电路中的 $v_s(t)=20\sin(100t-40^\circ)$ ，试求 $i_x(t)$ 。
PS

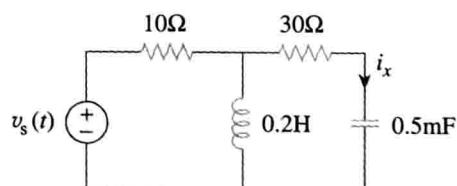


图 9-55 习题 48 图

- 49 如果流过图 9-56 所示电路中 1Ω 电阻的电流 i_x 为 $0.5\sin200t \text{ A}$ ，试求 $v_s(t)$ 。

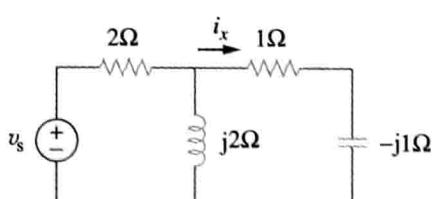


图 9-56 习题 49 图

- 50 计算图 9-57 所示电路中 v_x ，假设 $i_s(t)=5\cos(100t+40^\circ)\text{A}$ 。

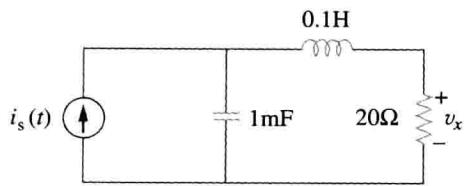


图 9-57 习题 50 图

- 51 如果图 9-58 所示电路中 2Ω 电阻两端的电压 v_o 为 $10\cos 2t \text{V}$, 试求 i_s 。

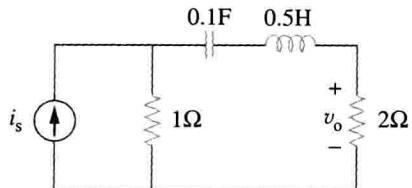


图 9-58 习题 51 图

- 52 如果图 9-59 所示电路中 $V_o = 8 \angle 30^\circ \text{V}$, 试求 I_s 。

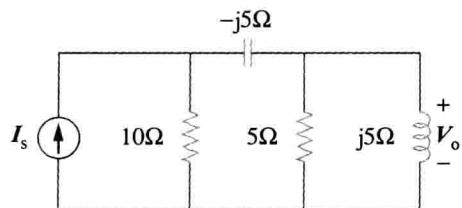


图 9-59 习题 52 图

- 53 计算图 9-60 所示电路中的电流 I_o 。 **PS ML**

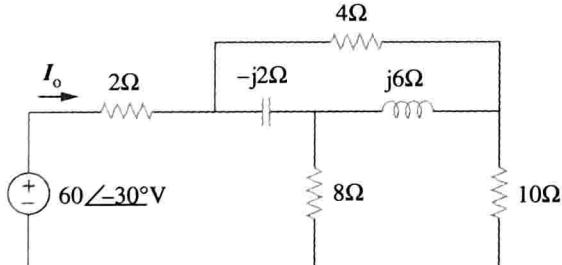


图 9-60 习题 53 图

- 54 在图 9-61 所示电路中, $I_o = 2 \angle 0^\circ \text{A}$, 试求 V_s 。

PS ML

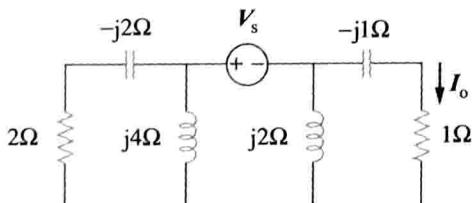


图 9-61 习题 54 图

- 55 计算图 9-62 所示电路中的 Z , 假设 $V_o = 4 \angle 0^\circ \text{V}$ 。

ML

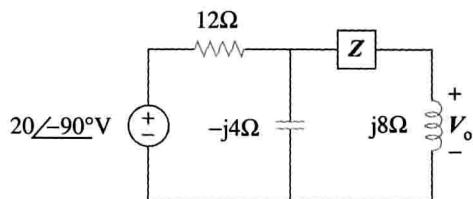


图 9-62 习题 55 图

9.7 节

- 56 计算图 9-63 所示电路在 $\omega = 377 \text{rad/s}$ 时的输入阻抗。

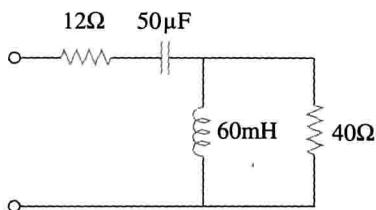


图 9-63 习题 56 图

- 57 计算图 9-64 所示电路在 $\omega = 1 \text{rad/s}$ 时的输入导纳。

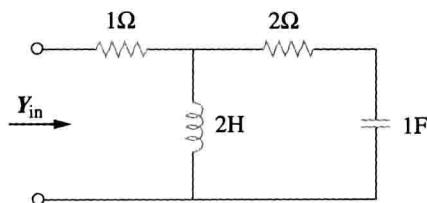


图 9-64 习题 57 图

- 58 利用图 9-65 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解阻抗合并。

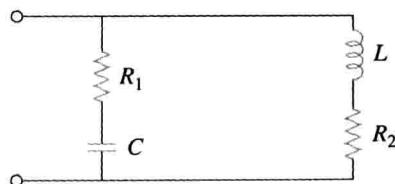


图 9-65 习题 58 图

- 59 计算图 9-66 所示电路在 $\omega = 10 \text{rad/s}$ 时的输入阻抗 Z_{in} 。

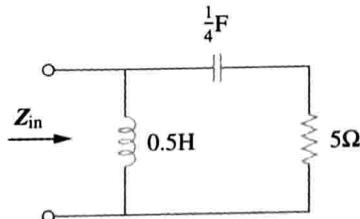


图 9-66 习题 59 图

- 60 求图 9-67 所示电路中的 Z_{in} 。

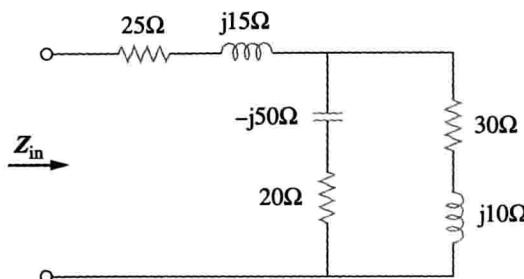


图 9-67 习题 60 图

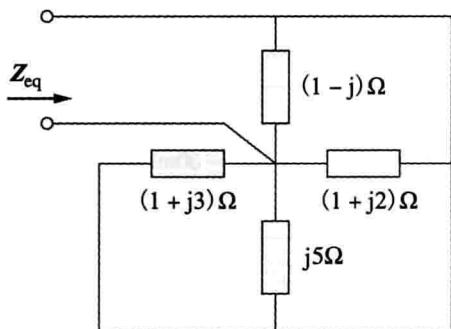
61 试求图 9-68 所示电路中的 Z_{eq} 。

图 9-68 习题 61 图

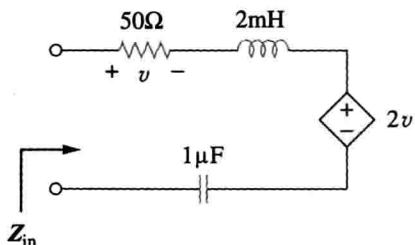
62 计算图 9-69 所示电路在 $\omega=10\text{krad/s}$ 时的输入阻抗 Z_{in} 。

图 9-69 习题 62 图

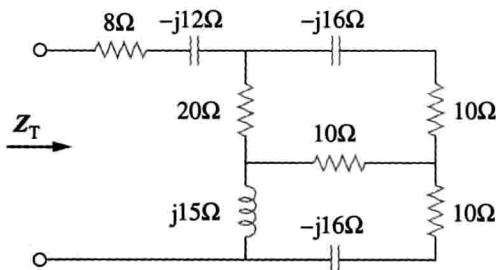
63 计算图 9-70 所示电路中 Z_T 。

图 9-70 习题 63 图

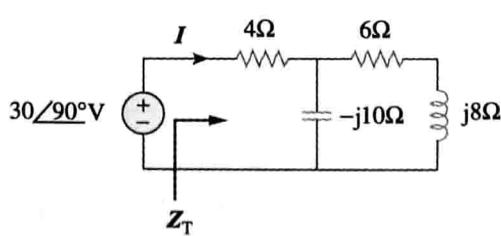
64 求图 9-71 所示电路中的 Z_T 与 I 。

图 9-71 习题 64 图

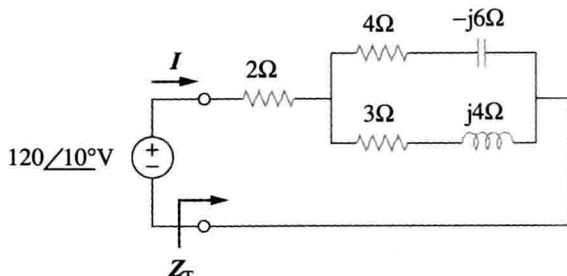
65 求图 9-72 所示电路中的 Z_T 与 I 。

图 9-72 习题 65 图

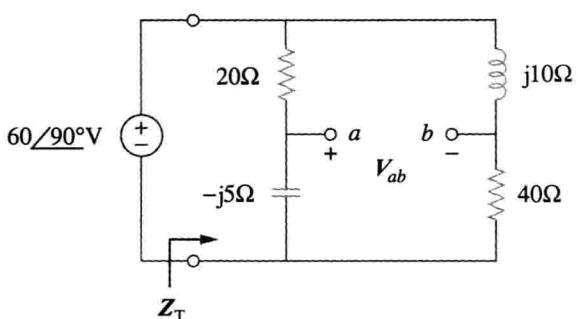
66 计算图 9-73 所示电路中的 Z_T 与 V_{ab} 。

图 9-73 习题 66 图

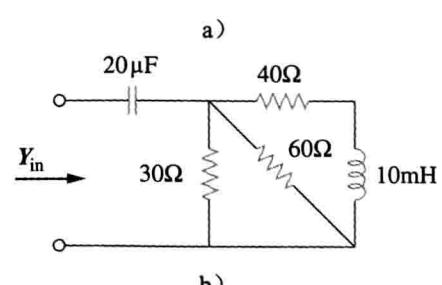
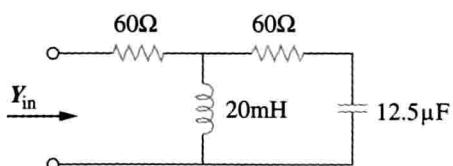
67 计算图 9-74 所示各电路在 $\omega=10^3\text{rad/s}$ 时的输入导纳。

图 9-74 习题 67 图

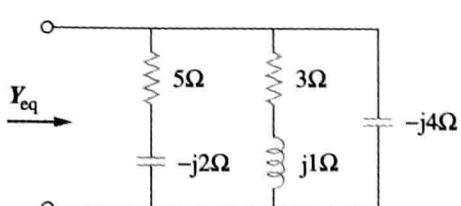
68 求图 9-75 所示电路中的 Y_{eq} 。

图 9-75 习题 68 图

69 求图 9-76 所示电路的等效导纳 Y_{eq} 。

70 求图 9-77 所示电路的等效阻抗。

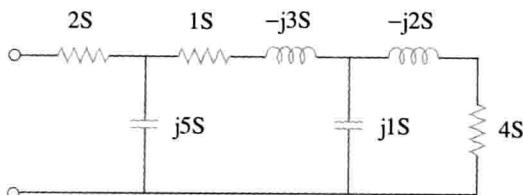


图 9-76 习题 69 图

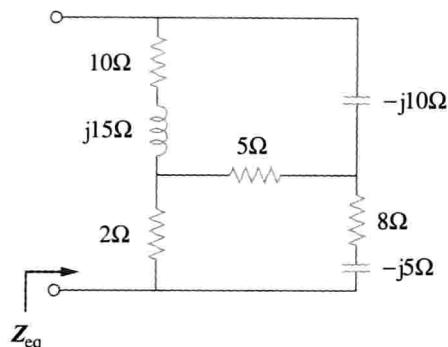


图 9-77 习题 70 图

71 求图 9-78 所示电路的等效阻抗。

ML

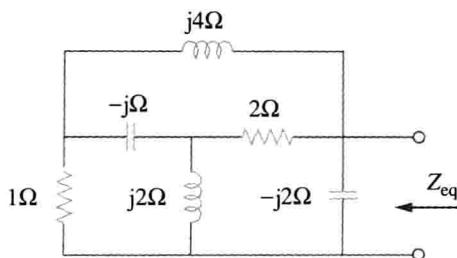


图 9-78 习题 71 图

72 求图 9-79 所示网络的 Z_{ab} 。

ML

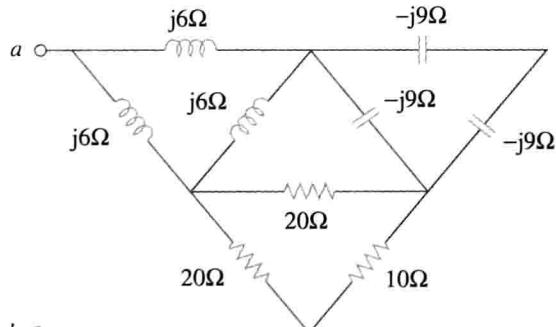


图 9-79 习题 72 图

73 求图 9-80 所示电路的等效阻抗。

ML

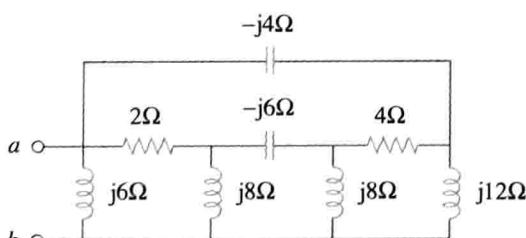


图 9-80 习题 73 图

9.8 节

74 设计一个 RL 电路，实现超前相移 90° 。

ED

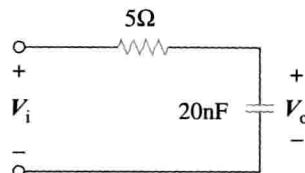
75 设计一个电路，将正弦电压输入转换为余弦电压输出。
ED76 对如下各组信号，试确定 v_1 超前还是滞后 v_2 ，以及超前或滞后的相角大小。(a) $v_1 = 10\cos(5t - 20^\circ)$, $v_2 = 8\sin 5t$; (b) $v_1 = 19\cos(2t + 90^\circ)$, $v_2 = 6\sin 2t$; (c) $v_1 = -4\cos 10t$, $v_2 = 15\sin 10t$ 。77 对于如图 9-81 所示的 RC 电路。(a)计算频率为 2MHz 时的相移；(b)计算相移为 45° 时的频率。

图 9-81 习题 77 图

78 阻抗为 $(8+j6)\Omega$ 的线圈与容抗 X 串联后，再与电阻 R 并联，如果该电路的等效阻抗为 $5\angle 0^\circ\Omega$ ，试求 R 与 X 的值。

79 (a)计算图 9-82 所示电路的相移；(b)说明相移是超前还是滞后(输出相对与输入的相移)；(c)当输入为 120V 时，试确定输出的幅度。

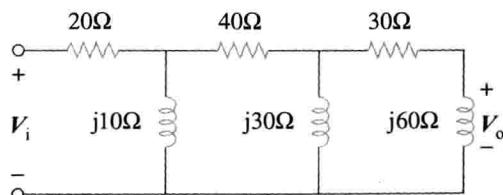


图 9-82 习题 79 图

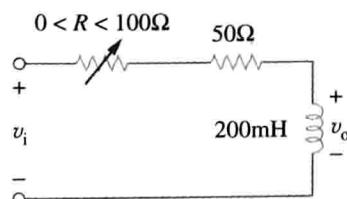
80 考虑图 9-83 所示的相移电路，频率为 60Hz 时 $V_i = 120V$ ，试求：(a)当 R 为最大值时的 V_o ；(b)当 R 为最小值时的 V_o ；(c)产生相移为 45° 时的 R 值。

图 9-83 习题 80 图

81 当 $R_1 = 400\Omega$, $R_2 = 600\Omega$, $R_3 = 1.2k\Omega$, $C_2 = 0.3\mu F$ 时，图 9-37 所示的交流电桥平衡，试求 R_x 与 C_x 。假设 R_2 与 C_2 串联。82 当 $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $C_s = 40\mu F$ 时，电容电桥平衡，求待测电容 C_x 的电容值。83 当 $R_1 = 1.2k\Omega$, $R_2 = 500\Omega$, $L_s = 250mH$ 时，电感电桥平衡，试求待测电感 L_x 的电感值。

- 84 图 9-84 所示的交流电桥称为麦克斯韦电桥 (Maxwell bridge)，可用于精确测量线圈的电感与电阻，其中 C_s 为标准电容，试证明电桥平衡时，如下关系式成立：

$$L_x = R_2 R_3 C_s \quad \text{和} \quad R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3$$

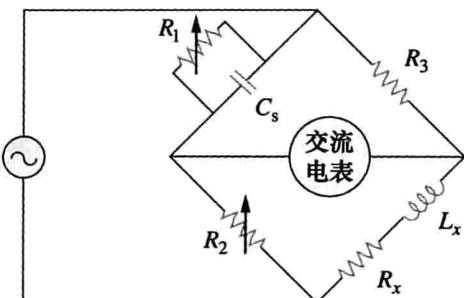


图 9-84 习题 84 图

当 $R_1 = 40\text{k}\Omega$, $R_2 = 1.6\text{k}\Omega$, $R_3 = 4\text{k}\Omega$, $C_s =$

综合理解题

- 86 图 9-86 所示为电视接收器电路，试求该电路的总阻抗。

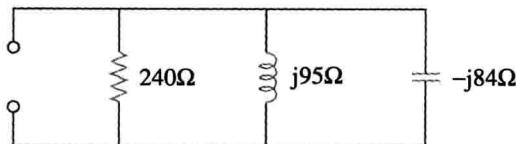


图 9-86 习题 86 图

- 87 图 9-87 所示为某工业电子传感器电路的组成部分，试求该电路在 2kHz 时的总阻抗。

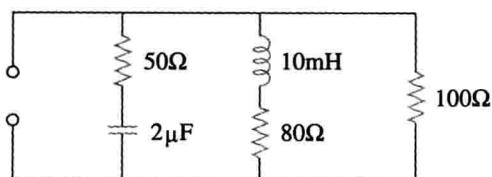


图 9-87 习题 87 图

- 88 某串联音频电路如图 9-88 所示。
(a) 该电路的阻抗为多少？
(b) 如果频率减半，该电路的阻抗为多少？

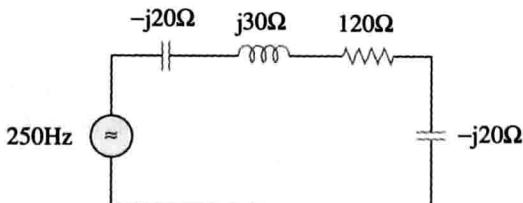


图 9-88 习题 88 图

- 89 某工业负载可建模为图 9-89 所示电容与电阻

的串联组合。该串联电路两端应连接多大的电容 C ，才能在 2kHz 频率处使得电路阻抗呈电阻性。

- 85 图 9-85 所示的交流电桥称为维恩电桥 (Wien bridge)，可用于测量电源的频率。试证明电桥平衡时，所测得的频为：

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_2 R_4 C_2 R_4}}$$

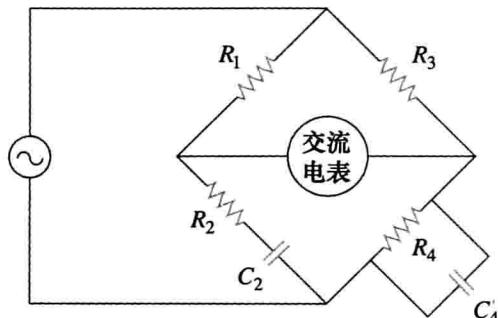


图 9-85 习题 85 图

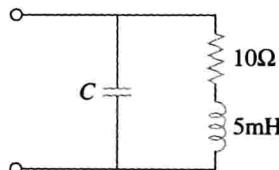


图 9-89 习题 89 图

- 90 某工业线圈可建模为电感 L 与电阻 R 的串联组合，如图 9-90 所示。当电路工作在稳定状态下，工作频率为 60Hz 时，利用交流电压表测得的正弦信号幅度为：

$|V_s| = 145\text{V}$, $|V_1| = 50\text{V}$, $|V_o| = 110\text{V}$ ，
利用上述测量结果确定 L 与 R 的值。

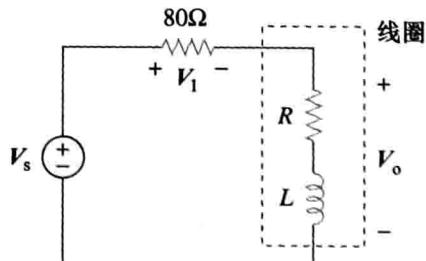


图 9-90 习题 90 图

- 91 图 9-91 所示为一个电感与一个电阻的并联组合，如果要求该并联组合串联一个电容，使得网络阻抗在 10MHz 频率处呈电阻性。试问

所需的 C 值为多少?

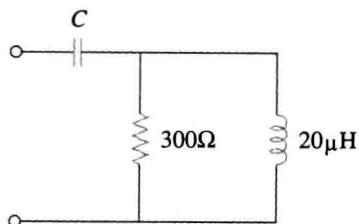


图 9-91 习题 91 图

- 92 某传输线的串联阻抗为 $Z = 100 \angle 75^\circ \Omega$, 分流导纳为 $Y = 450 \angle 48^\circ \mu\text{s}$ 。试求: (a) 特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{Z/Y}$, (b) 传播常数 $\gamma = \sqrt{ZY}$ 。

- 93 某功率传输系统模型如图 9-92 所示, 已知: $V_s = 115 \angle 0^\circ \text{V}$, 源阻抗 $Z_s = (1 + j0.5) \Omega$, 线阻抗 $Z_t = (0.4 + j0.3) \Omega$, 负载阻抗 $Z_L = (23.2 + j18.9) \Omega$ 。试求负载电流 I_L 。

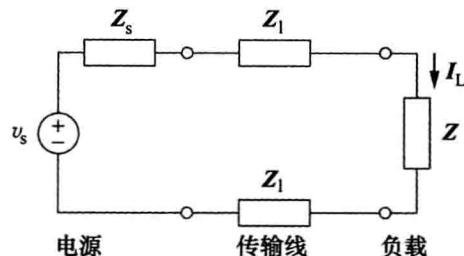


图 9-92 习题 93 图

第10章

正弦稳态分析

我的朋友分为三类，爱我的人、恨我的人和不关心我的人。爱我的人让我学会温柔善良，恨我的人让我学会小心谨慎，不关心我的人让我学会独立。

——J. E. Dinger

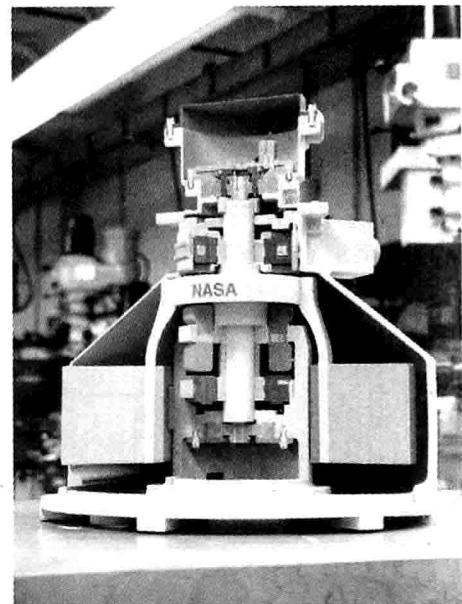
拓展事业

软件工程领域的职业生涯

软件工程是指在计算机程序的设计、构建以及验证过程中处理科学计算的实际应用问题，以及开发、处理和维护相关文档的工程领域。软件工程是电子工程的一个分支，目前，需要采用各类软件执行程序任务的学科越来越多，可编程微电子系统的应用越来越广泛，因此软件工程也变得日益重要。

不能将软件工程师的角色与计算机科学家的角色相混淆。软件工程师是一个实践工作者，而不是理论家。软件工程师必须具备良好的计算机编程技能，熟悉编程语言，特别是熟悉应用日益普及的 C++ 语言。由于软件与硬件是密切相关的，因此，软件工程师必须全面掌握硬件设计的相关知识。最重要的是，软件工程师还应该具备一定的与所开发软件的具体应用领域相关的专业知识。

总之，软件工程领域为乐于从事编程和软件开发的人士提供了广阔的职业空间，大量有趣的、具有挑战性的机遇都青睐受过研究生教育的人，同样，更高的回报总是属于那些准备充分的人。



NASA 飞轮的 AutoCAD 模型
三维打印技术

10.1 引言

第 9 章介绍了利用相量法确定电路对正弦输入信号的强迫响应或稳态响应的方法，并且证明了欧姆定律与基尔霍夫定律同样适用于交流电路。本章将介绍如何利用节点分析法、网孔分析法、戴维南定理、诺顿定理、叠加定理以及电源变换等分析交流电路。由于这些方法已经在直流电路的分析中讲解过，因此本章的重点在于举例说明。

分析交流电路通常包括三个步骤：

1. 将电路转换到相量域或频域。
2. 利用相应的电路分析方法(节点分析法、网孔分析法、叠加定理等)求解电路。
3. 将所求得的相量转换到时域。

如果所求解的问题已经属于频域，则无需进行步骤 1。在步骤 2 中，分析方法与直流电路的分析方法相同，只是在交流电路分析中出现了复数运算的问题。掌握了第 9 章的知识，步骤 3 就变得易于处理了。

本章最后介绍如何应用 PSpice 软件求解交流电路，并将交流电路分析方法应用于两个实际的交流电路中：振荡器与交流晶体管电路。

提示：利用相量实现交流电路的频域分析要比时域分析容易得多。

10.2 节点分析法

节点分析法的基础是基尔霍夫电流定律。正如 9.6 节所述，由于 KCL 同样适用于相量，因此，可以利用节点分析法求解交流电路。下面通过例题予以说明。

例 10-1 利用节点分析法求图 10-1 所示电路中的 i_x 。

解：首先将该电路转换到频域：

$$\begin{aligned} 20\cos 4t &\Rightarrow 20 \angle 0^\circ, \quad \omega = 4 \text{ rad/s} \\ 1\text{H} &\Rightarrow j\omega L = j4\Omega \\ 0.5\text{H} &\Rightarrow j\omega L = j2\Omega \\ 0.1\text{F} &\Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2.5\Omega \end{aligned}$$

于是，得到频域中的等效电路如图 10-2 所示。

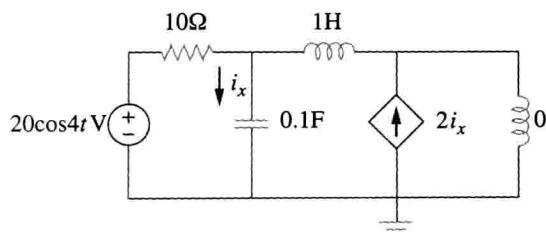


图 10-1 例 10-1 图

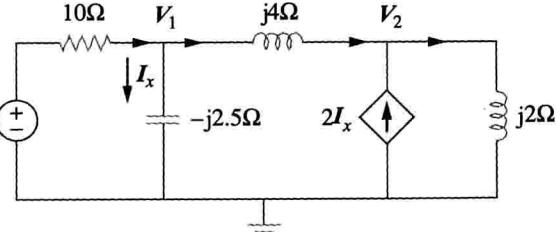


图 10-2 图 10-1 的频域等效电路

在节点 1 处应用 KCL，得到：

$$\frac{20 - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j2.5} + \frac{V_1 - V_2}{j4}$$

即

$$(1 + j1.5)V_1 + j2.5V_2 = 20 \quad (10.1.1)$$

在节点 2 处有：

$$2I_x + \frac{V_1 - V_2}{j4} = \frac{V_2}{j2}$$

$I_x = V_1 / -j2.5$ ，将其代入后得到：

$$\frac{2V_1}{-j2.5} + \frac{V_1 - V_2}{j4} = \frac{V_2}{j2}$$

化简后得到：

$$11V_1 + 15V_2 = 0 \quad (10.1.2)$$

将式(10.1.1)与式(10.1.2)写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 1 + j1.5 & j2.5 \\ 11 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 + j1.5 & j2.5 \\ 11 & 15 \end{vmatrix} = 15 - j5 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 20 & j2.5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 300, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 + j1.5 & 20 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -220 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{300}{15 - j5} = 18.97 / 18.43^\circ (\text{V})$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-220}{15 - j5} = 13.91 / 198.3^\circ (\text{V})$$

于是，电流为：

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1}{-j2.5} = \frac{18.97 / 18.43^\circ}{2.5 / -90^\circ} = 7.59 / 108.4^\circ (\text{A})$$

将上述结果转换到时域，可得：

$$i_x = 7.59 \cos(4t + 108.4^\circ) \text{ A}$$

练习 10-1 利用节点分析法求图 10-3 所示电路中的 v_1 与 v_2 。

答案： $v_1(t) = 11.325 \cos(2t + 60.01^\circ) \text{ V}$, $v_2(t) = 33.02 \cos(2t + 57.12^\circ) \text{ V}$

例 10-2 计算图 10-4 所示电路中的 \mathbf{V}_1 与 \mathbf{V}_2 。

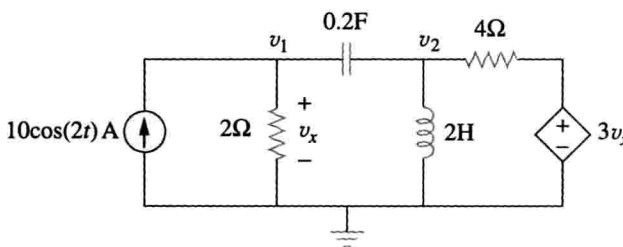


图 10-3 练习 10-1 图

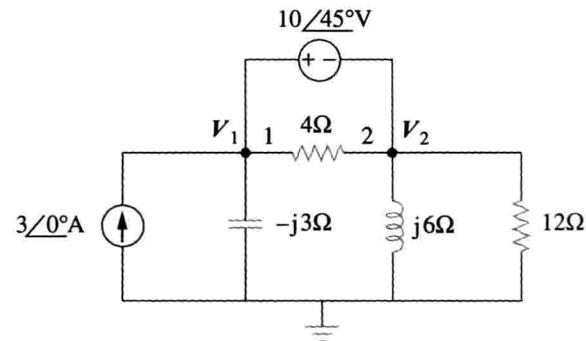


图 10-4 例 10-2 图

解：节点 1 与节点 2 组成一个超节点（广义节点），如图 10-5 所示。在该超节点处应用 KCL，得到：

$$3 = \frac{\mathbf{V}_1}{-j3} + \frac{\mathbf{V}_2}{j6} + \frac{\mathbf{V}_2}{12}$$

即

$$36 = j4\mathbf{V}_1 + (1 - j2)\mathbf{V}_2 \quad (10.2.1)$$

电压源连接在节点 1 与节点 2 之间，所以：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + 10 \angle 45^\circ \quad (10.2.2)$$

将式(10.2.2)代入式(10.2.1)，得到：

$$36 - 40 \angle 135^\circ = (1 + j2)\mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbf{V}_2 = 31.41 \angle -87.18^\circ (\text{V})$$

由式(10.2.2)可得：

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + 10 \angle 45^\circ = 25.78 \angle -70.48^\circ (\text{V})$$

练习 10-2 计算图 10-6 所示电路中的 \mathbf{V}_1 与 \mathbf{V}_2 。

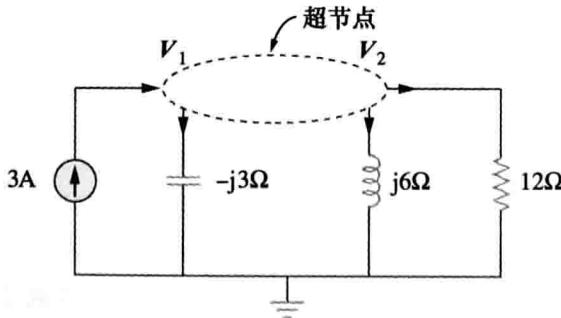


图 10-5 图 10-4 中的超节点

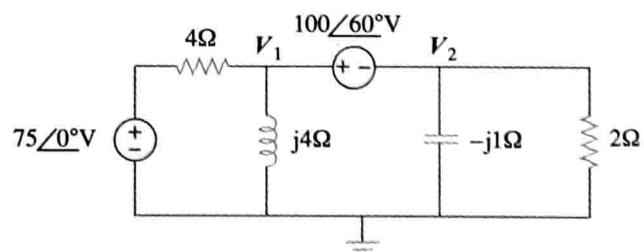


图 10-6 练习 10-2 图

答案: $V_1 = 96.8 \angle 69.66^\circ V$, $V_2 = 16.88 \angle 165.72^\circ V$

10.3 网孔分析法

网孔分析法的基础是基尔霍夫电压定律。9.6 节已经说明 KVL 对于交流电路的有效性, 下面通过举例予以说明。注意, 网孔分析法本质上仅适用于平面电路。

例 10-3 试利用网孔分析法确定如图 10-7 所示电路中的电流。

解: 对网孔 1 应用 KVL, 可得:

$$(8 + j10 - j2)I_1 - (-j2)I_2 - j10I_3 = 0 \quad (10.3.1)$$

对网孔 2 应用 KVL, 可得:

$$(4 - j2 - j2)I_2 - (-j2)I_1 - (-j2)I_3 + 20 \angle 90^\circ = 0 \quad (10.3.2)$$

对网孔 3 而言, $I_3 = 5$, 将其代入式(10.3.1)与式(10.3.2), 得到:

$$(8 + j8)I_1 + j2I_2 = j50 \quad (10.3.3)$$

$$j2I_1 + (4 - j4)I_2 = -j20 - j10 \quad (10.3.4)$$

将式(10.3.3)与式(10.3.4)写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j2 \\ j2 & 4 - j4 \end{vmatrix} = 32(1 + j)(1 - j) + 4 = 68$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 + j8 & j50 \\ j2 & -j30 \end{vmatrix} = 340 - j240 = 416.17 \angle -35.22^\circ$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{416.17 \angle -35.22^\circ}{68} = 6.12 \angle -35.22^\circ (A)$$

所求的电流为:

$$I_o = -I_2 = 6.12 \angle 144.78^\circ A$$

练习 10-3 利用网孔分析法求图 10-8 所示电路中的 I_o 。

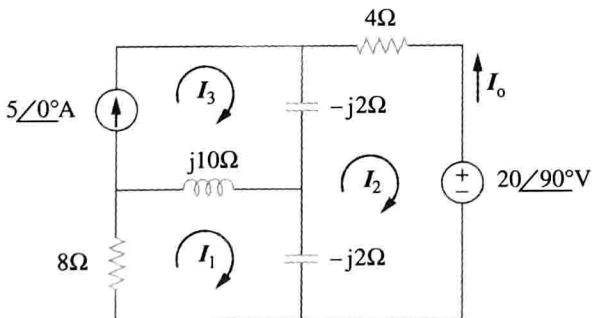


图 10-7 例 10-3 图

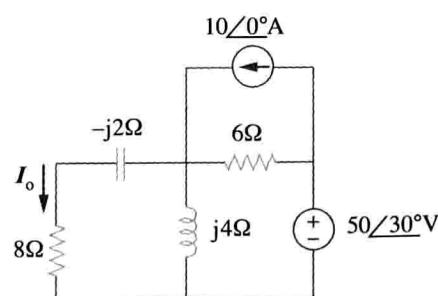


图 10-8 练习 10-3 图

答案: $5.969 \angle 65.45^\circ A$

例 10-4 利用网孔分析法求图 10-9 所示电路中的 V_o 。

解: 由于网孔 3 与网孔 4 之间包括电流源, 所以网孔 3 与网孔 4 组成一个超网孔(广义网孔), 如图 10-10 所示。对网孔 1 运用 KVL, 可得:

$$-10 + (8 - j2)I_1 - (-j2)I_2 - 8I_3 = 0$$

即

$$(8 - j2)I_1 + j2I_2 - 8I_3 = 10 \quad (10.4.1)$$

对于网孔 2, 有:

$$\mathbf{I}_2 = -3 \quad (10.4.2)$$

对于超网孔，有：

$$(8 - j4)\mathbf{I}_3 - 8\mathbf{I}_1 + (6 + j5)\mathbf{I}_4 - j5\mathbf{I}_2 = 0 \quad (10.4.3)$$

由于网孔3与网孔4之间存在电流源，因此在节点A处，有：

$$\mathbf{I}_4 = \mathbf{I}_3 + 4 \quad (10.4.4)$$

方法1 将上述四个方程通过消元化简为两个方程。

将式(10.4.1)与式(10.4.2)合并后得到：

$$(8 - j2)\mathbf{I}_1 - 8\mathbf{I}_3 = 10 + j6 \quad (10.4.5)$$

将式(10.4.2)~式(10.4.4)合并后得到：

$$-8\mathbf{I}_1 + (14 + j)\mathbf{I}_3 = -24 - j35 \quad (10.4.6)$$

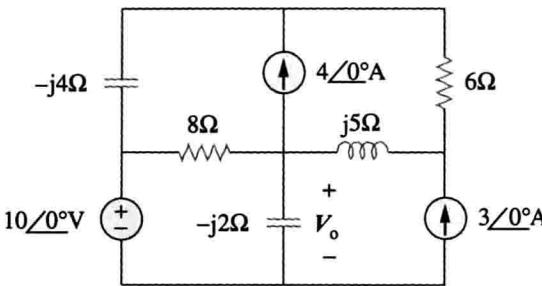


图 10-9 例 10-4 图

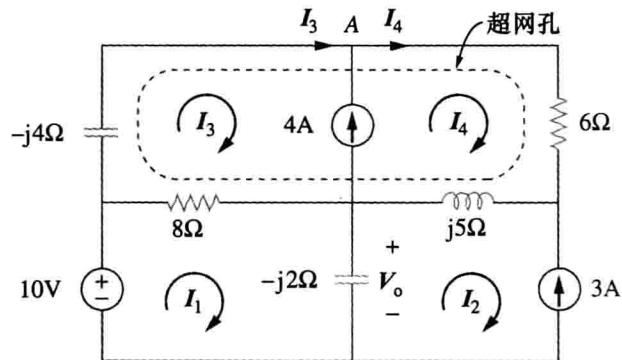


图 10-10 图 10-9 的电路分析

由式(10.4.5)与式(10.4.6)可得矩阵方程为：

$$\begin{bmatrix} 8 - j2 & -8 \\ -8 & 14 + j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + j6 \\ -24 - j35 \end{bmatrix}$$

相关的行列式为：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 - j2 & -8 \\ -8 & 14 + j \end{vmatrix} = 112 + j8 - j28 + 2 - 64 = 50 - j20$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 + j6 & -8 \\ -24 - j35 & 14 + j \end{vmatrix} = 140 + j10 + j84 - 6 - 192 - j280 = -58 - j186$$

于是，电流 \mathbf{I}_1 为：

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-58 - j186}{50 - j20} = 3.618 \angle 274.5^\circ \text{ (A)}$$

所求电压 V_o 为：

$$\begin{aligned} V_o &= -j2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = -j2(3.618 \angle 274.5^\circ + 3) \\ &= -7.2134 - j6.568 = 9.756 \angle 222.32^\circ \text{ (V)} \end{aligned}$$

方法2 利用 MATLAB 求解式(10.4.1)~式(10.4.4)，首先将上述四个方程写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 8 - j2 & j2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -j5 & 8 - j4 & 6 + j5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (10.4.7a)$$

即

$$\mathbf{AI} = \mathbf{B}$$

求 \mathbf{A} 的逆矩阵即可得到 \mathbf{I} ：

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (10.4.7b)$$

以下为利用 MATLAB 求解的程序和得到的结果：

```

>> A = [(8-j*2) j*2 -8 0;
          0 1 0 0;
          -8 -j*5 (8-j*4) (6+j*5);
          0 0 -1 1];
>> B = [10 -3 0 4]';
>> I = inv(A)*B

I =
0.2828 - 3.6069i
-3.0000
-1.8690 - 4.4276i
2.1310 - 4.4276i
>> Vo = -2*j*(I(1) - I(2))

Vo =
-7.2138 - 6.5655i

```

与采用方法 1 得到的结果相同。

练习 10-4 计算图 10-11 所示电路中的电流 I_o 。

答案：6.089 / 5.94° A

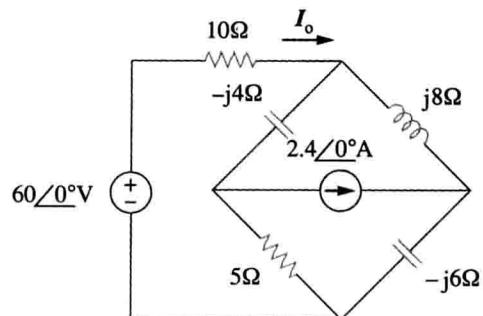


图 10-11 练习 10-4 图

10.4 叠加定理

由于交流电路是线性电路，所以叠加定理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的。如果电路中包括以不同频率工作的若干个电源，叠加定理将变得更为重要。在这种情况下，由于阻抗取决于频率，因此对于不同的频率必须采用不同的频域电路，总响应则是时域中各个响应之和。在向量域或频域中叠加响应是不正确的，因为在正弦分析中，指数因子 $e^{j\omega t}$ 是隐含的，即对于不同的角频率该指数因子是变化的，因此，在相量域中不同频率响应的叠加是没有任何意义的。因此，当电路中包括以不同频率工作的电源时，必须在时域中完成各频率响应的叠加。

例 10-5 利用叠加定理计算图 10-7 所示电路中的 I_o 。

解：令

$$I_o = I'_o + I''_o \quad (10.5.1)$$

其中， I'_o 和 I''_o 分别为由电压源与电流源引起的电流。为了求解 I'_o ，考虑图 10-12a 所示的电路。如果设 Z 为 $-j2\Omega$ 与 $(8+j10)\Omega$ 的并联阻抗，则有：

$$Z = \frac{-j2(8+j10)}{-2j+8+j10} = (0.25-j2.25)\Omega$$

于是，电流 I'_o 为：

$$I'_o = \frac{j20}{4-j2+Z} = \frac{j20}{4.25-j4.25}\text{A}$$

即

$$I'_o = (-2.353+j2.353)\text{A} \quad (10.5.2)$$

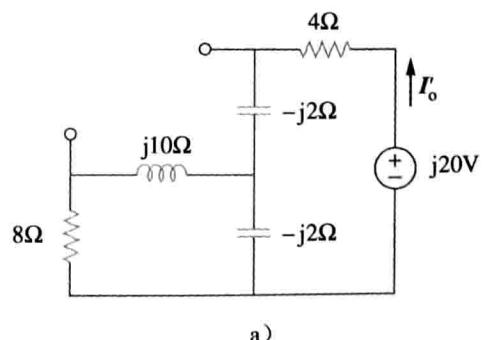
为了求解 I''_o ，考虑图 10-12b 所示电路。对于网孔 1，有：

$$(8+j8)I_1 - j10I_3 + j2I_2 = 0 \quad (10.5.3)$$

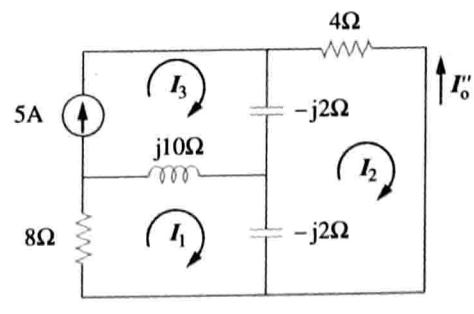
对于网孔 2，有：

$$(4-j4)I_2 + j2I_1 + j2I_3 = 0 \quad (10.5.4)$$

对于网孔 3，有：



a)



b)

图 10-12 求解例 10-5

$$\mathbf{I}_3 = 5 \quad (10.5.5)$$

由式(10.5.4)与式(10.5.5)可得：

$$(4 - j4)\mathbf{I}_2 + j2\mathbf{I}_1 + j10 = 0$$

利用 \mathbf{I}_2 表示 \mathbf{I}_1 可得：

$$\mathbf{I}_1 = (2 + j2)\mathbf{I}_2 - 5 \quad (10.5.6)$$

将式(10.5.5)与式(10.5.6)代入式(10.5.3)得到：

$$(8 + j8)[(2 + j2)\mathbf{I}_2 - 5] - j50 + j2\mathbf{I}_2 = 0$$

即

$$\mathbf{I}_2 = \frac{90 - j40}{34} = (2.647 - j1.176)A$$

于是，电流 \mathbf{I}''_o 为：

$$\mathbf{I}''_o = -\mathbf{I}_2 = (-2.647 + j1.176)A \quad (10.5.7)$$

由式(10.5.2)与式(10.5.7)可得：

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}'_o + \mathbf{I}''_o = -5 + j3.529 = 6.12 / 144.78^\circ A$$

与例 10-3 得到的结果一致。可以看出，利用叠加定理求解本例并非最佳方法，求解过程要比用原电路求解复杂一倍。然而，从下面的例 10-6 中可以看到，利用叠加定理求解该例则是最简单的办法。

 练习 10-5 利用叠加定理求图 10-8 所示电路中的 \mathbf{I}_o 。

答案： $5.97 / 65.45^\circ A$

例 10-6 利用叠加定理求图 10-13 所示电路中的 v_o 。

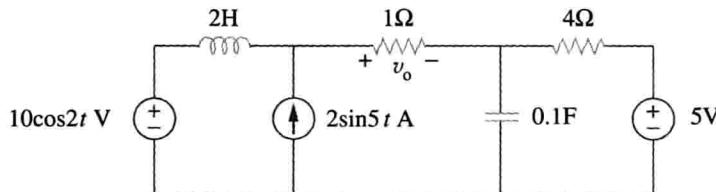


图 10-13 例 10-6 图

解：本题的电路工作在三个不同的频率（直流电压源的 $\omega=0$ ），求解本例的一种方法是利用叠加定理，将所求的响应分解为三个单一频率响应的叠加。因此，设：

$$v_o = v_1 + v_2 + v_3 \quad (10.6.1)$$

其中， v_1 为由 5V 直流电压源引起的响应， v_2 为由 $10\cos 2t$ V 电压源引起的响应， v_3 为由 $2\sin 5t$ A 电流源引起的响应。

为了求出 v_1 ，需将除 5V 直流电压源以外的其他电源均设置为零。在稳定状态下，电容器对直流相当于开路，电感器对直流相当于短路，或者从另一个角度讲，由于 $\omega=0$ ，所以 $j\omega L=0$ ， $1/j\omega C=\infty$ 。此时的等效电路如图 10-14a 所示。由分压原理可知：

$$-v_1 = \frac{1}{1+4} \times 5 = 1(V) \quad (10.6.2)$$

为了求出 v_2 ，需将 5V 直流电源与 $2\sin 5t$ A 电流源设置为零，并将该电路转换到频域：

$$10\cos 2t \Rightarrow 10 / 0^\circ, \quad \omega = 2\text{rad/s}$$

$$2H \Rightarrow j\omega L = j4\Omega$$

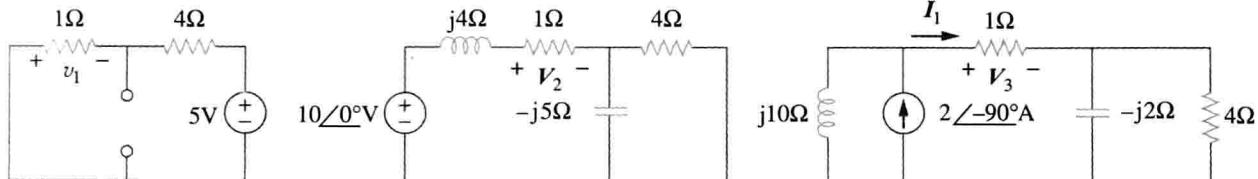
$$0.1F \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j5\Omega$$

此时的等效电路如图 10-14b 所示。设：

$$\mathbf{Z} = -j5 \parallel 4 = \frac{-j5 \times 4}{4 - j5} = (2.439 - j1.951)\Omega$$

由分压原理可知：

$$V_2 = \frac{1}{1+j4+Z} (10 \angle 0^\circ) = \frac{10}{3.439+j2.049} = 2.498 \angle -30.79^\circ (\text{V})$$



a) 将除5V直流电源以外的其他电源均设置为零

b) 将除交流电压源以外的其他电源均设置为零

c) 将除交流电流源以外的所有电源均设置为零

图 10-14 求解例 10-6

变换到时域为：

$$v_2 = 2.498 \cos(2t - 30.79^\circ) \text{V} \quad (10.6.3)$$

为了求出 v_3 ，需将两个电压源均设置为零，并将相应的电路转换到频域。

$$2\sin 5t \Rightarrow 2 \angle -90^\circ, \quad \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$2 \text{ H} \Rightarrow j\omega L = j10 \Omega$$

$$0.1 \text{ F} \Rightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j2 \Omega$$

此时的等效电路如图 10-14c 所示。令：

$$Z_1 = -j2 \parallel 4 = \frac{-j2 \times 4}{4 - j2} = (0.8 - j1.6) \Omega$$

由分流原理可知：

$$I_1 = \frac{j10}{j10 + 1 + Z_1} (2 \angle -90^\circ) (\text{A})$$

$$V_3 = I_1 \times 1 = \frac{j10}{1.8 + j8.4} (-j2) = 2.328 \angle -80^\circ (\text{V})$$

转换到时域为：

$$v_3 = 2.328 \cos(5t - 80^\circ) = 2.33 \sin(5t + 10^\circ) (\text{V}) \quad (10.6.4)$$

将式(10.6.2)~式(10.6.4)代入式(10.6.1)，可得：

$$v_o(t) = [-1 + 2.498 \cos(2t - 30.79^\circ) + 2.33 \sin(5t + 10^\circ)] \text{V}$$

练习 10-6 利用叠加定理计算图 10-15 所示电路中的 v_o 。

$$\text{答案: } [11.577 \sin(5t - 81.12^\circ) + 3.154 \cos(10t - 86.24^\circ)] \text{V}$$

10.5 电源变换

频域中的电源变换包括将与阻抗串联的电压源转换为阻抗并联的电流源，或反之，如图 10-16 所示。将一种类型的电源转换成另一种类型的电源时，必须牢记如下关系：

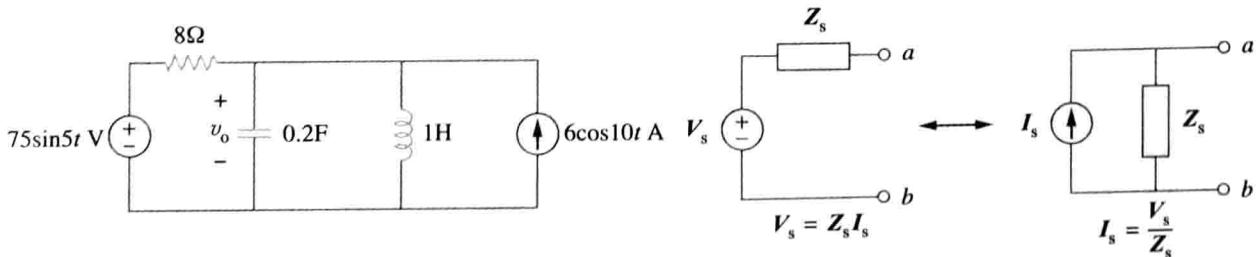


图 10-15 练习 10-6 图

图 10-16 电源变换

$$\boxed{V_s = Z_s I_s \Leftrightarrow I_s = \frac{V_s}{Z_s}} \quad (10.1)$$

例 10-7 利用电压源变换方法计算图 10-17 所示电路中的 V_x 。

解：将图 10-17 中的电压源转换为电流源，得到图 10-18a 所示的电路，其中：

$$I_s = \frac{20 \angle -90^\circ}{5} = 4 \angle -90^\circ = -j4 \text{ A}$$

5Ω 电阻与 $(3+j4)\Omega$ 阻抗并联后，得到：

$$Z_1 = \frac{5(3+j4)}{8+j4} = (2.5 + j1.25) \Omega$$

再将电流源转换为电压源，得到图 10-18b 所示电路，其中：

$$V_s = I_s Z_1 = -j4(2.5 + j1.25) = (5 - j10) \text{ V}$$

由分压原理可知：

$$V_x = \frac{10}{10 + 2.5 + j1.25 + 4 - j13} (5 - j10) = 5.519 \angle -28^\circ \text{ V}$$

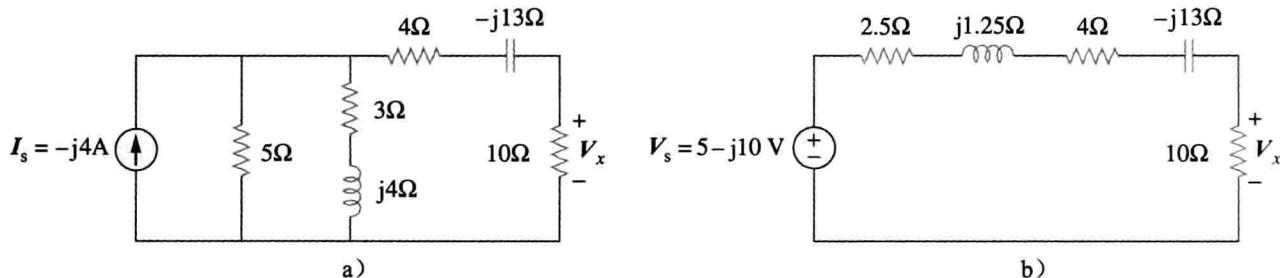


图 10-18 求解图 10-17

练习 10-7 利用电源变换的概念求解图 10-19 所示电路中的 I_o 。

答案：9.863 ∠ 99.46° A

10.6 戴维南等效电路与诺顿等效电路

戴维南定理与诺顿定理在交流电路中的应用与在直流电路中的应用是相同的，唯一的不同只是需要进行复数运算。戴维南等效电路的频域形式如图 10-20 所示，其中的线性电路用一个电压源和与之串联的阻抗来取代。诺顿等效电路的频域形式如图 10-21 所示，其中的线性电路用一个电流源和与之并联的阻抗来取代。上述两种等效电路之间的关系为：

$$\boxed{V_{Th} = Z_N I_N, \quad Z_{Th} = Z_N} \quad (10.2)$$

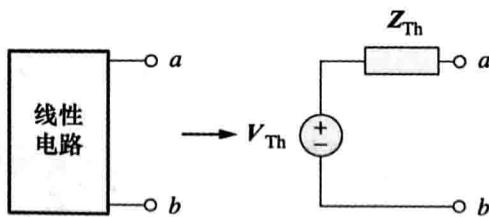


图 10-20 戴维南等效电路

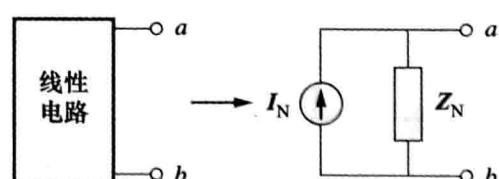


图 10-21 诺顿等效电路

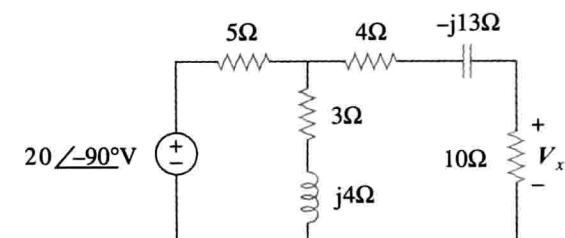


图 10-17 例 10-7 图

这组关系恰好是前一节介绍的电源变换关系，其中 V_{Th} 为开路电压， I_N 为短路电流。

如果电路中包括以不同频率工作的电源（如，见例 10-6），就必须针对各个频率确定其戴维南等效电路或诺顿等效电路。这样就会得到若干个完全不同的等效电路，每一个电路对应一个不同的频率，而不是用等效电源和等效阻抗组成等效电路。

例 10-8 确定图 10-22 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

解：将电压源设置为零即可求出 Z_{Th} 。如图 10-23a 所示， 8Ω 电阻与 $-j6\Omega$ 电抗并联，于是，合并后的阻抗为：

$$Z_1 = -j6 \parallel 8 = \frac{-j6 \times 8}{8 - j6} = (2.88 - j3.84)\Omega$$

同理， 4Ω 电阻与 $j12\Omega$ 电抗并联，合并后的电阻为：

$$Z_2 = 4 \parallel j12 = \frac{j12 \times 4}{4 + j12} = (3.6 + j1.2)\Omega$$

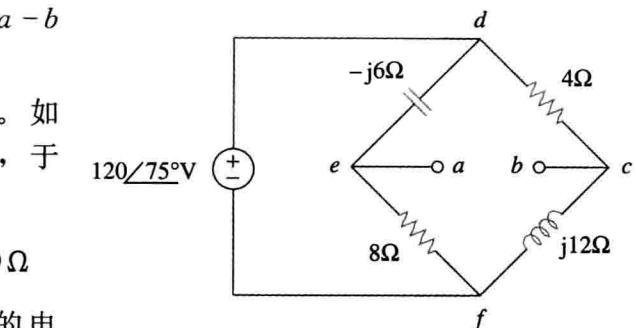
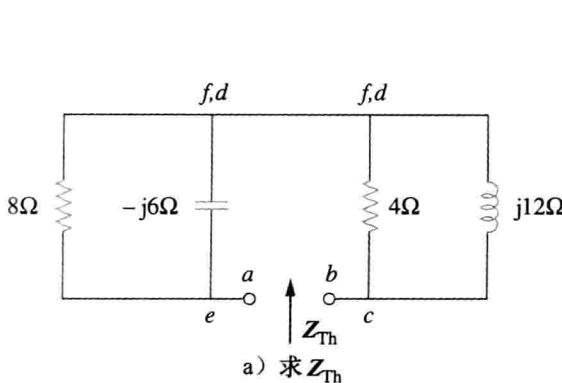


图 10-22 例 10-8 图

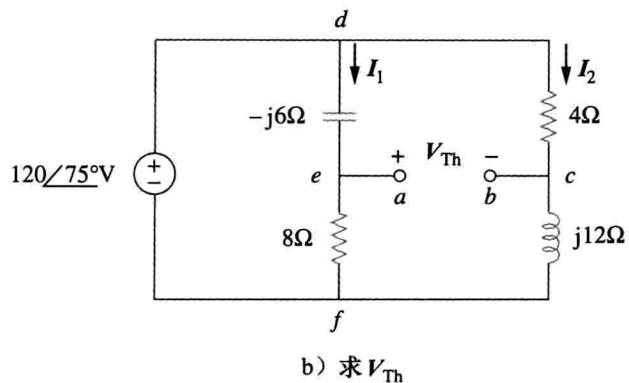


图 10-23 求解图 10-22

戴维南阻抗为 Z_1 与 Z_2 的串联，即：

$$Z_{Th} = Z_1 + Z_2 = (6.48 - j2.64)\Omega$$

为了求解 V_{Th} ，考虑图 10-23b 所示电路，其中 I_1 与 I_2 分别为：

$$I_1 = \frac{120 \angle 75^\circ}{8 - j6} A, \quad I_2 = \frac{120 \angle 75^\circ}{4 + j12} A$$

沿图 10-23b 所示电路中的回路 $bcdeab$ 应用 KVL，得到：

$$V_{Th} - 4I_2 + (-j6)I_1 = 0$$

于是：

$$\begin{aligned} V_{Th} &= 4I_2 + j6I_1 = \frac{480 \angle 75^\circ}{4 + j12} + \frac{720 \angle 75^\circ + 90^\circ}{8 - j6} \\ &= 37.95 \angle 3.43^\circ + 72 \angle 201.87^\circ \\ &= -28.936 - j24.55 = 37.95 \angle 220.31^\circ (V) \end{aligned}$$

练习 10-8 求图 10-24 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

答案： $Z_{Th} = (12.4 - j3.2)\Omega$, $V_{Th} = 63.24 \angle -51.57^\circ V$

例 10-9 求图 10-25 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

解：为了求出 V_{Th} ，对图 10-26a 所示电路中的节点 1 应用 KCL，可得：

$$15 = I_o + 0.5I_o \Rightarrow I_o = 10A$$

对图 10-26a 所示电路的右边回路应用 KVL，得到：

$$-\mathbf{I}_o(2 - j4) + 0.5\mathbf{I}_o(4 + j3) + \mathbf{V}_{Th} = 0$$

即

$$\mathbf{V}_{Th} = 10(2 - j4) - 5(4 + j3) = -j55$$

于是，戴维南电压为：

$$\mathbf{V}_{Th} = 55 \angle -90^\circ \text{V}$$

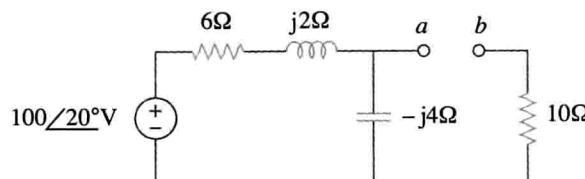


图 10-24 练习 10-8 图

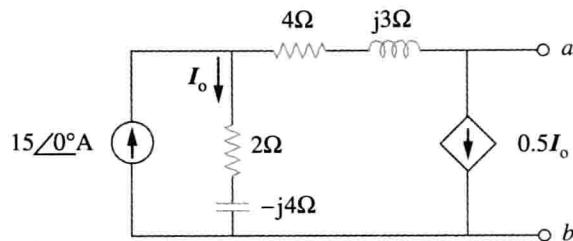


图 10-25 例 10-9 图

为了求出 \mathbf{Z}_{Th} ，需去掉独立电源，由于存在受控电流源，所以需要在端口 $a-b$ 处连接一个 3A 的电流源（这里的 3A 是为了计算方便任意选取的，是一个可以被流出节点的总电流整除的数），如图 10-26b 所示。在节点处应用 KCL，可得：

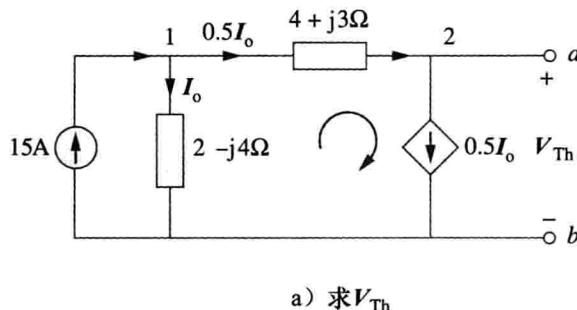
$$3 = \mathbf{I}_o + 0.5\mathbf{I}_o \Rightarrow \mathbf{I}_o = 2\text{A}$$

对图 10-26b 中的外围回路应用 KVL，有：

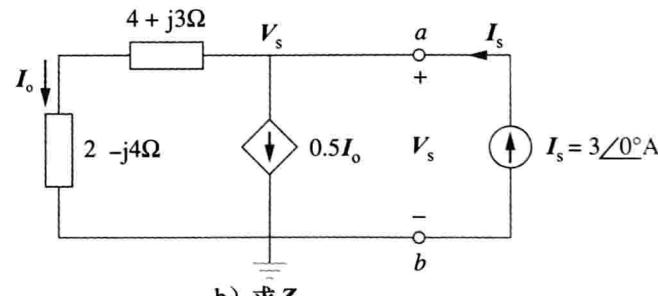
$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I}_o(4 + j3 + 2 - j4) = 2(6 - j)(\text{V})$$

所以，戴维南阻抗为：

$$\mathbf{Z}_{Th} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_s} = \frac{2(6 - j)}{3} = (4 - j0.6667)\Omega$$



a) 求 V_{Th}



b) 求 Z_{Th}

图 10-26 求解图 10-25

练习 10-9 确定图 10-27 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的戴维南等效电路。

$$\text{答案: } \mathbf{Z}_{Th} = 4.473 \angle -7.64^\circ \Omega, \mathbf{V}_{Th} = 7.35 \angle 72.9^\circ \text{V}$$

例 10-10 利用诺顿定理计算图 10-28 所示电路中的电流 I_o 。

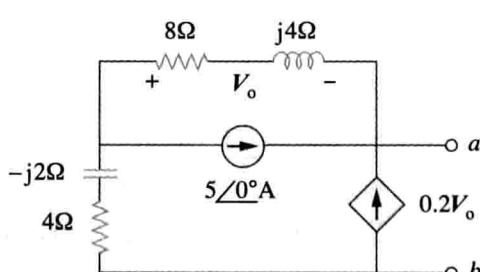


图 10-27 练习 10-9 图

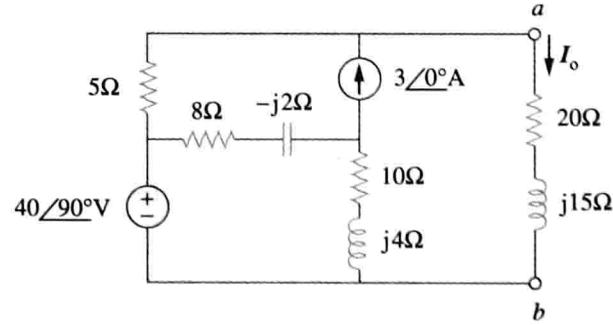


图 10-28 例 10-10 图

解：首先要确定端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。 \mathbf{Z}_N 的求法与 \mathbf{Z}_{Th} 的求法相同，将各电

源设置为零, 得到图 10-29a 所示电路, 其中阻抗 $(8-j2)\Omega$ 与 $(10+j4)\Omega$ 被短路了, 于是:

$$Z_N = 5\Omega$$

为了求出 I_N , 将端口 $a-b$ 短路, 如图 10-29b 所示, 利用网孔分析法求解。由于网孔 2 与网孔 3 之间存在电流源, 所以网孔 2 与网孔 3 形成一个超网孔。对于网孔 1, 有:

$$-j40 + (18+j2)I_1 - (8-j2)I_2 - (10+j4)I_3 = 0 \quad (10.10.1)$$

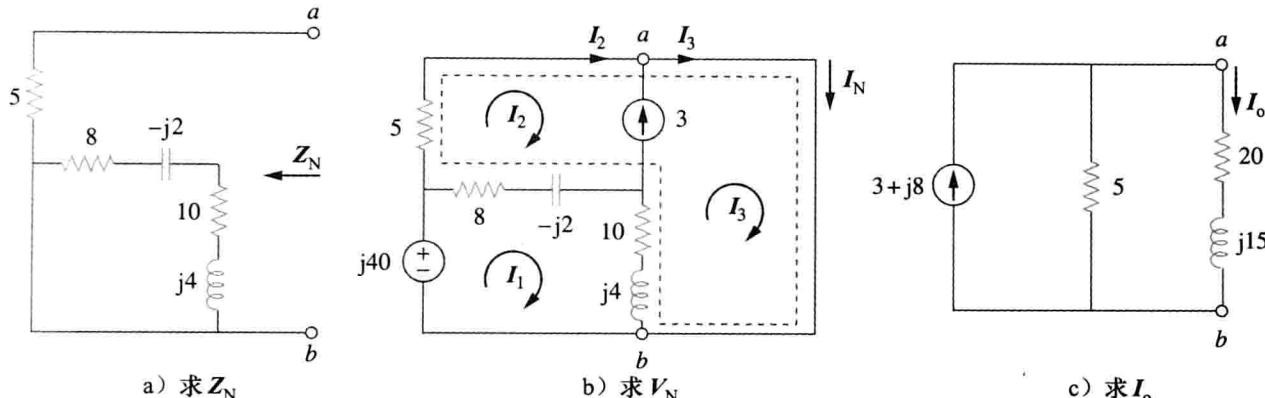


图 10-29 求解图 10-28

对于超网孔, 有:

$$(13-j2)I_2 + (10+j4)I_3 - (18+j2)I_1 = 0 \quad (10.10.2)$$

由于网孔 2 与网孔 3 之间电流源的存在, 于是在节点 a 处有:

$$I_3 = I_2 + 3 \quad (10.10.3)$$

将式(10.10.1)和式(10.10.2)相加, 得到:

$$-j40 + 5I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = j8A$$

由式(10.10.3)可得:

$$I_3 = I_2 + 3 = 3 + j8$$

于是, 诺顿电流为:

$$I_N = I_3 = (3 + j8)A$$

图 10-29c 给出了诺顿等效电路以及端口 $a-b$ 两端的负载阻抗。由分流原理, 可得:

$$I_o = \frac{5}{5+20+j15} I_N = \frac{3+j8}{5+j3} = 1.465 \angle 38.48^\circ (A)$$

练习 10-10 确定图 10-28 所示电路从端口 $a-b$ 看进去的诺顿等效电路, 并利用所求出的等效电路计算 I_o 。

答案: $Z_N = (3.176 + j0.706)\Omega$, $I_N = 8.396 \angle -32.68^\circ A$, $I_o = 1.9714 \angle -2.10^\circ A$

10.7 交流运算放大器电路

只要运算放大器工作在线性区域, 10.1 节介绍的分析交流电路的三个步骤就同样适用于运算放大器电路。通常假设运算放大器是理想的(参见 5.2 节), 正如第 5 章所讨论的, 分析运算放大器电路的关键是牢记理想运算放大器的两个重要特性:

1. 运算放大器两个输入端无电流流入。
2. 运算放大器输入端的电压为零。

下面举例说明交流运算放大器电路的分析。

例 10-11 计算图 10-30a 所示运算放大器电路的 $v_o(t)$, 假设 $v_s(t) = 3\cos 1000t V$ 。

解: 首先将电路转换到频域, 如图 10-31b 所示, 其中 $V_s = 3 \angle 0^\circ$, $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ 。在节点 1 处应用 KCL 得到:

$$\frac{3 \angle 0^\circ - V_1}{10} = \frac{V_1}{-j5} + \frac{V_1 - 0}{10} + \frac{V_1 - V_o}{20}$$

即

$$6 = (5 + j4)V_1 - V_o \quad (10.11.1)$$

在节点 2 处应用 KCL 得到：

$$\frac{V_1 - 0}{10} = \frac{0 - V_o}{-j10}$$

即

$$V_1 = -jV_o \quad (10.11.2)$$

将式(10.11.2)代入式(10.11.1)有：

$$6 = -j(5 + j4)V_o - V_o = (3 - j5)V_o$$

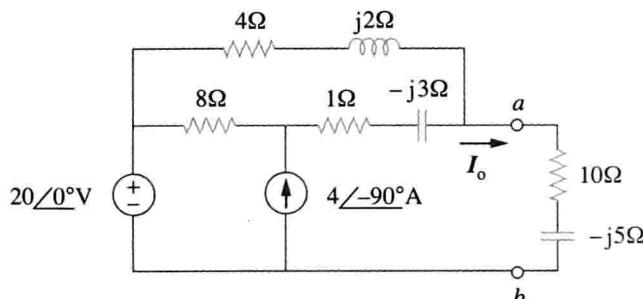
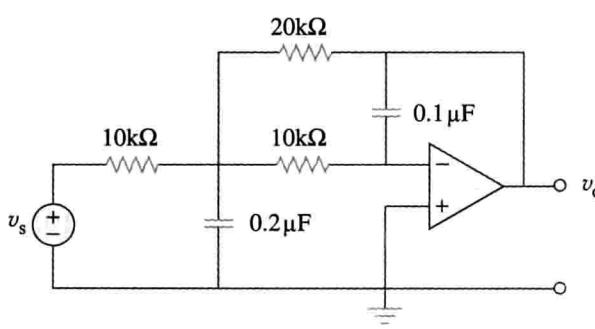


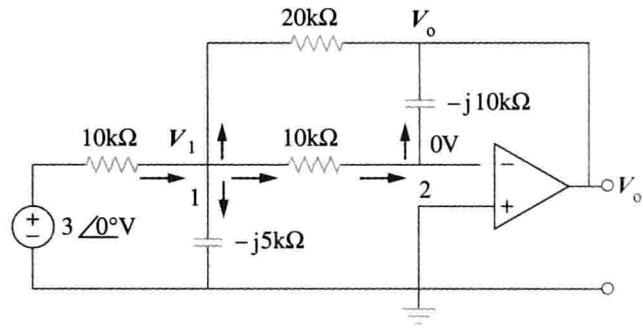
图 10-30 练习 10-10 图

所以：

$$v_o(t) = 1.029 \cos(1000t + 59.04^\circ) V$$



a) 时域原始电路



b) 频域等效电路

图 10-31 例 10-11 图

练习 10-11 试求图 10-32 所示运算放大器

电路的 v_o 与 i_o ，假设 $v_s = 12\cos 5000t$ V。

答案： $4\sin 5000t$ V, $400\sin 5000t$ μA

例 10-12 计算图 10-33 所示电路的闭环增益与相移，假设 $R_1 = R_2 = 10k\Omega$, $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 1\mu F$, $\omega = 200rad/s$ 。

解：图 10-33 中反馈阻抗和输入阻抗分别为：

$$Z_f = R_2 \left| \frac{1}{j\omega C_2} \right| = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$Z_i = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1}$$

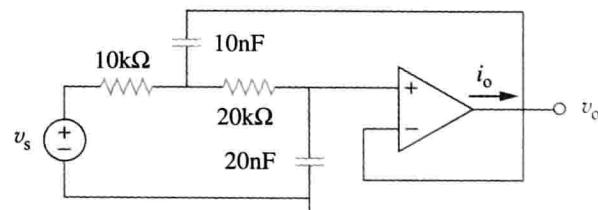


图 10-32 练习 10-11 图

由于图 10-33 所示电路是一个反相放大器，因此闭环增益为：

$$G = \frac{V_o}{V_s} = -\frac{Z_f}{Z_i} = \frac{-j\omega C_1 R_2}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

将给定的 R_1 、 R_2 、 C_1 、 C_2 、 ω 的值代入后得到：

$$G = \frac{-j4}{(1 + j4)(1 + j2)} = 0.434 \angle 130.6^\circ$$

所以，该运算放大器电路的闭环增益为 0.434，相移为 130.6° 。

练习 10-12 试求图 10-34 所示电路的闭环增益与相移，假设 $R = 10k\Omega$, $C = 1\mu F$, $\omega = 1000rad/s$ 。

答案：1.0147, -5.6°

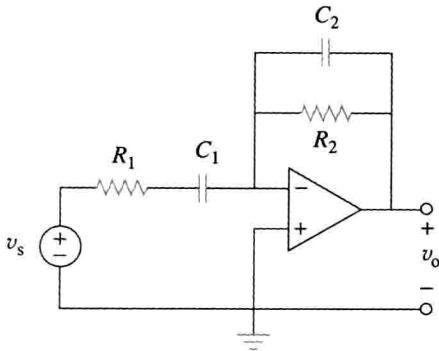


图 10-33 例 10-12 图

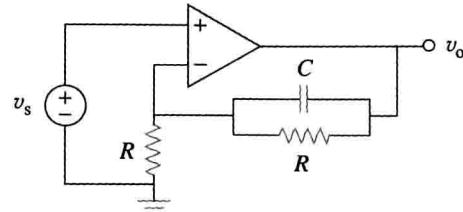


图 10-34 练习 10-12 图

10.8 基于 PSpice 的交流电路分析

PSpice 软件为交流电路分析中繁杂的复数运算提供了极大的方便。利用 PSpice 分析交流电路的过程与分析直流电路的过程基本相同。交流电路分析是在相量域或频域中进行的，所有电源必须具有相同的频率。虽然 PSpice 中的交流分析包括 AC Sweep 命令，但本章所涉及的交流电路分析仅限于单个频率 $f = \omega / 2\pi$ 。PSpice 的输出文件包括电压相量与电流相量。如果需要，还可以利用输出文件中的电压与电流计算输出阻抗。

例 10-13 利用 PSpice 计算图 10-35 所示电路中的 v_o 与 i_o 。

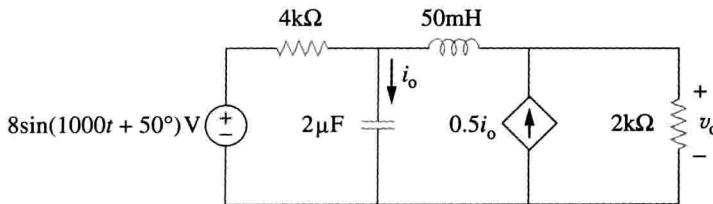


图 10-35 例 10-13 图

解：首先将正弦函数转换为余弦函数，得到：

$$\begin{aligned} 8\sin(1000t + 50^\circ) &= 8\cos(1000t + 50^\circ - 90^\circ) \\ &= 8\cos(1000t - 40^\circ) \end{aligned}$$

由 ω 可求出频率：

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159.155 \text{ Hz}$$

该电路的原理图如图 10-36 所示。注意，其中连接的电流控制电流源 F1 使得电流从节点 0 流向节点 3，从而与图 10-35 所示原始电路的电流方向保持一致。由于本例仅需求出 v_o 与 i_o 的幅度和相位，因此需将 IPRINT 与 VPRINT1 的属性分别设置为 AC = yes，MAG = yes，PHASE = yes。对于单一频率分析而言，选择 Analysis/Setup/AC Sweep，并在对话框中输入 Total Pts = 1, Start Freq = 159.155, Final Freq = 159.155。保存电路之后，即可运行 Analysis/Simulate 对电路进行仿真。输出文件除包括伪元件 IPRINT 与 VPRINT1 的属性外，还包括电源频率：

FREQ	IM(V_PRINT3)	IP(V_PRINT3)
1.592E+02	3.264E-03	-3.743E+01
FREQ	VM(3)	VP(3)
1.592E+02	1.550E+00	-9.518E+01

由输出文件可得：

$$V_o = 1.55 \angle -95.18^\circ \text{ V}, \quad I_o = 3.264 \angle -37.43^\circ \text{ mA}$$

将上述相量转换到时域得到：

$$v_o = 1.55 \cos(1000t - 95.18^\circ) = 1.55 \sin(1000t - 5.18^\circ) \text{ V}$$

和

$$i_o = 3.264 \cos(1000t - 37.43^\circ) \text{ mA}$$

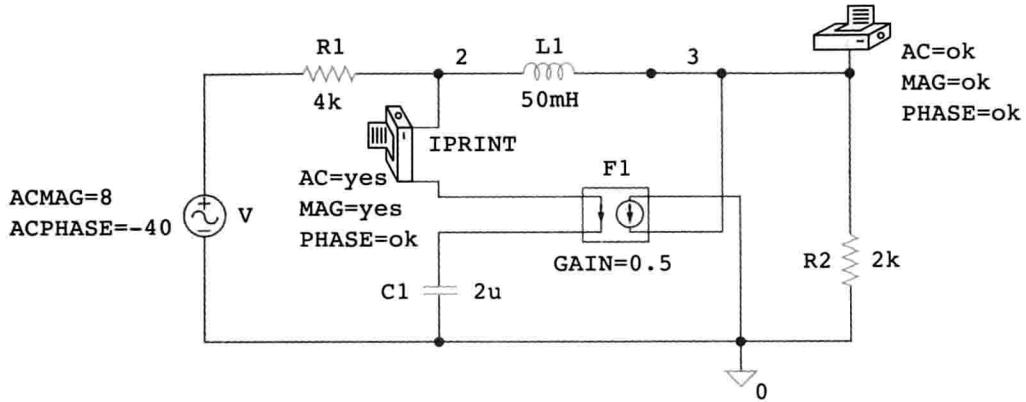


图 10-36 图 10-35 的原理图

练习 10-13 利用 PSpice 计算图 10-37 所示电路中的 v_o 与 i_o 。

答案: $536.4 \cos(3000t - 154.6^\circ) \text{ mV}$,

$1.088 \cos(3000t - 55.12^\circ) \text{ mA}$

例 10-14 计算图 10-38 所示电路中的 V_1 与 V_2 。

解: 1. 明确问题。本例所要解决的问题已阐述清楚。需要再次强调的是, 这一步骤花费的时间必将节省后续计算的时间! 可能出现的问题是, 如果本题的参数不全, 就需要问清楚命题者相应的参数。如果问不到结果, 则需假设参数的值, 之后阐明所做出的处理及其原因。

2. 列出已知条件。已知电路为频域电路, 且未知节点电压 V_1 与 V_2 同样为频域量。显然, 需要在频域中求解这些未知量。

3. 确定备选方案。求解本例的方法有两种, 即直接利用节点分析法求解, 或者利用 PSpice 软件求解。由于 10.8 节的重点是 PSpice 仿真, 因此就选择 PSpice 求解 V_1 与 V_2 。之后再利用节点分析法验证所得到的答案。

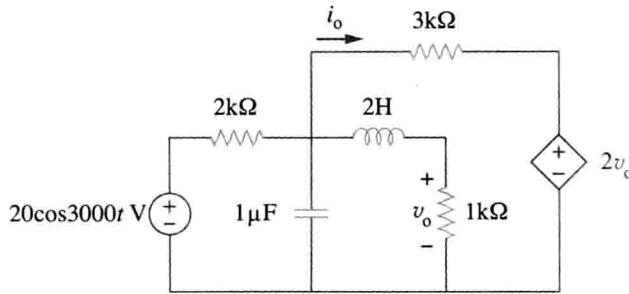


图 10-37 练习 10-13 图

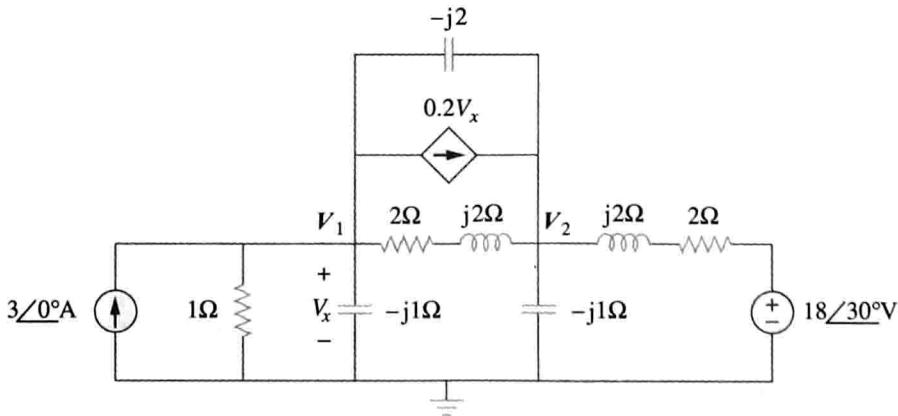


图 10-38 例 10-14 图

4. 尝试不同的工作频率。图 10-35 所示电路是时域电路, 而图 10-38 所示电路是频域电路。由于没有给出利用 PSpice 分析电路所需的工作频率, 因此可以选择一个与给定阻抗相一致的任意工作频率。例如, 当选择 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 时, 相应的工作频率为 $f = \omega/2\pi = 0.15916 \text{ Hz}$ 。因此可以求出电容值 ($C = 1/\omega X_C$) 和电感值 ($L = X_L/\omega$)。由此得到的电路原

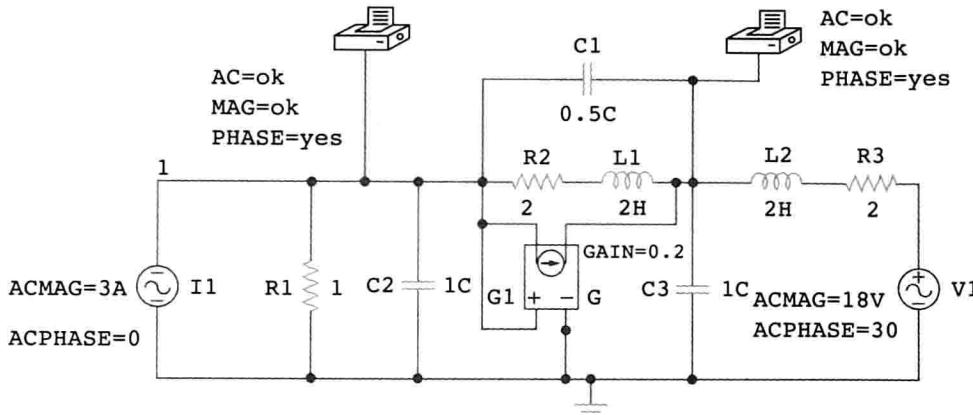


图 10-39 图 10-38 的原理图

理图如图 10-39 所示。为便于连线，将电压控制电流源 G1 与 $(2+j2)\Omega$ 阻抗位置互换。可以看出，G1 的电流方向是从节点 1 流向节点 3，而控制电压则是电容器 C2 两端的电压，与图 10-38 要求的一致。伪元件 VPRINT1 的属性设置已在图 10-39 中标明。对于单一频率分析而言，选择 Analysis/Setup/AC Sweep 菜单，并在对话框中输入 Total Pts=1，Start Freq=0.15916，Final Freq=0.15916。保存电路之后，执行 Analysis/Simulate 命令对电路进行仿真，得到如下输出文件：

FREQ	VM(1)	VP(1)
1.592E-01	2.708E+00	-5.673E+01
FREQ	VM(3)	VP(3)
1.592E-01	4.468E+00	-1.026E+02

由此可求出：

$$V_1 = 2.708 \angle -56.74^\circ \text{V} \quad \text{和} \quad V_2 = 6.911 \angle -80.72^\circ \text{V}$$

5. 评价结果。注意，利用 PSpice 等分析软件进行电路分析时，仍然需要验证结果的正确性。导致错误的可能性很多，包括遇到 PSpice 的 bug 而导致不正确的结果。

如何验证所得到的结果呢？显然，可以利用节点分析法重新求解本例，或者利用 MATLAB 重新计算，看是否得到相同的结果。这里采用另一种方法进行验证：写出节点方程，并将 PSpice 计算的结果代入，看节点方程是否成立。

该电路的节点方程如下，注意，方程中已经将 $V_1 = V_x$ 代入受控源：

$$\begin{aligned} -3 + \frac{V_1 - 0}{1} + \frac{V_1 - 0}{-j1} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} + 0.2V_1 + \frac{V_1 - V_2}{-j2} &= 0 \\ (1 + j + 0.25 - j0.25 + 0.2 + j0.5)V_1 & \\ -(0.25 - j0.25 + j0.5)V_2 &= 3 \\ (1.45 + j1.25)V_1 - (0.25 + j0.25)V_2 &= 3 \\ 1.9144 \angle 40.76^\circ V_1 - 0.3536 \angle 45^\circ V_2 &= 3 \end{aligned}$$

下面即可将 PSpice 运算的结果代入方程中验证答案的正确性，即：

$$\begin{aligned} 1.9144 \angle 40.76^\circ \times 2.708 \angle -56.74^\circ - 0.3536 \angle 45^\circ \times 6.911 \angle -80.72^\circ & \\ = 5.184 \angle -15.98^\circ - 2.444 \angle -35.72^\circ & \\ = 4.984 - j1.4272 - 1.9842 + j1.4269 & \\ = 3 - j0.0003 & \quad [\text{答案得到验证}] \end{aligned}$$

6. 是否满意？虽然仅利用节点 1 的方程检验所得到的答案，但这足以说明由 PSpice 得到的结果的有效性，因此可以将上述求解过程作为本题的答案。

练习 10-14 计算图 10-40 所示电路中的 V_x 与 I_x 。

答案：39.37 $\angle 44.78^\circ \text{V}$, 10.336 $\angle 158^\circ \text{A}$

† 10.9 应用实例

本章所学的概念将在后续章节中计算电功率、确定频率响应时用到，同时还可以用于分析磁耦合电路、三相电路、交流晶体管电路、滤波器、振荡器和其他交流电路。本节将所学概念应用于两个实际的交流电路，即电容倍增器与正弦波振荡器。

10.9.1 电容倍增器

图 10-41 所示运算放大器电路称为电容倍增器 (capacitance multiplier)，稍后将解释命名原因。该电路常用于集成电路中，当集成电路需要大电容时，通过该电路可以将一个物理电容 C 倍增为若干倍。图 10-41 所示电路的倍增因子高达 1000。例如，10pF 电容器通过该电路后，其作用相当于 100nF 电容器。

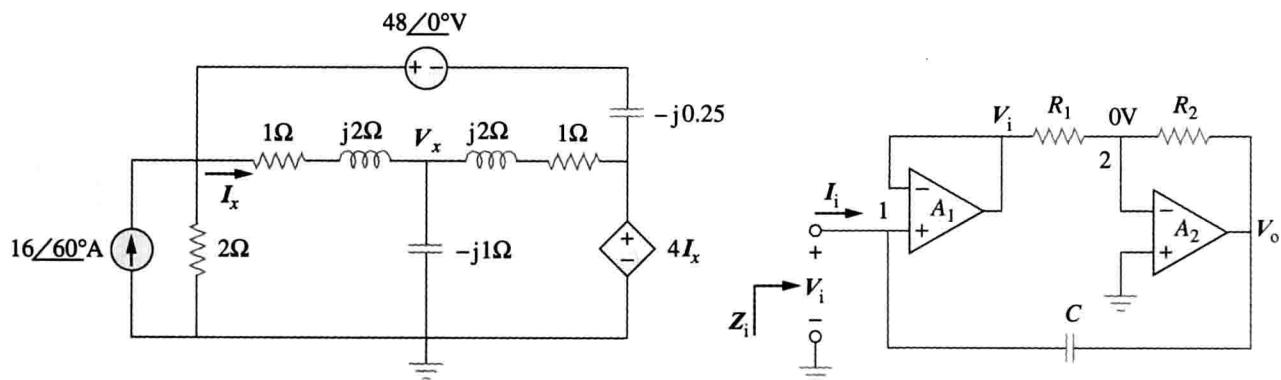


图 10-40 练习 10-14 图

图 10-41 电容倍增器

在图 10-41 所示电路中，第一级运算放大器为电压跟随器，而第二级则为反相放大器。电压跟随器将电路的电容与反相放大器负载隔离开来。因为无电流流入运算放大器的输入端，所以输入电流 I_i 流过反馈电容器，因此，在节点 1 处有：

$$I_i = \frac{V_i - V_o}{1/j\omega C} = j\omega C(V_i - V_o) \quad (10.3)$$

对节点 2 应用 KCL，得到：

$$\frac{V_i - 0}{R_1} = \frac{0 - V_o}{R_2}$$

即

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}V_i \quad (10.4)$$

将式(10.4)代入式(10.3)得到：

$$I_i = j\omega C \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i$$

即

$$\frac{I_i}{V_i} = j\omega \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) C \quad (10.5)$$

于是，输入阻抗为：

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{1}{j\omega C_{eq}} \quad (10.6)$$

其中：

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) C \quad (10.7)$$

因此，适当地选取电阻值 R_1 与 R_2 ，图 10-41 所示的运算放大器电路就可以在输入端与地

之间产生一个有效电容量，其容值为实际电容 C 的若干倍。有效电容量的大小实际上受到反相输出电压的限制。因此，电容倍增因子越大，允许的输入电压就越小，这样才能避免运算放大器进入饱和状态。

同理，也可以设计出用于模拟电感的运算放大器电路(参见习题 89)以及实现电阻倍增的运算放大器电路。

例 10-15 计算图 10-41 所示电路中的 C_{eq} ，假设 $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\text{M}\Omega$, $C = 1\text{nF}$ 。

解：由式(10.70)可得：

$$C_{eq} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)C = \left(1 + \frac{1 \times 10^6}{10 \times 10^3}\right) \times 1\text{nF} = 101(\text{nF})$$

练习 10-15 计算图 10-41 所示运算放大器电路的等效电容，假设 $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\text{M}\Omega$, $C = 10\text{nF}$ 。
答案： $10\mu\text{F}$

10.9.2 振荡器

直流电可以用电池产生，那么，交流电如何产生呢？一种方法是利用振荡器(oscillator)将直流电转换为交流电。

振荡器是一种以直流电驱动的，输出为交流波形的电路。

振荡器所需要的唯一外部电源是直流供电电源。有趣的是，直流供电电源通常是将供电公司发出的交流电转换为直流电得到的，为什么又要利用振荡器再一次将直流电转换为交流电呢？这是因为美国供电公司提供的交流电频率预定为 60Hz (其他一些国家为 50Hz)，而在电子电路、通信系统以及微波设备等大量实际应用中所需要的频率范围却是 $0\sim 10\text{GHz}$ ，甚至更高。因此，就需要利用振荡器来产生这些频率的交流信号。

提示：频率 60Hz 对应于角频率 $\omega = 2\pi f = 377\text{rad/s}$ 。

为了使正弦波振荡器保持振荡，必须满足如下巴克豪森准则(Barkhausen Criteria)：

1. 振荡器的总增益必须等于或大于 1，因此，电路损耗必须通过放大设备予以补偿。
2. 电路的总相移(从输入到输出再反馈到输入)必须为零。

常见的三种正弦波振荡器包括移相型振荡器、双 T 形振荡器和维恩桥式振荡器，本节仅讨论维恩桥式振荡器。

维恩桥式振荡器(Wien-bridge oscillator)被广泛应用于产生频率低于 1MHz 的正弦波。它是一个仅由少量元件组成的 RC 运算放大器电路，便于调节，易于设计。如图 10-42 所示，这种振荡器主要由包括两条反馈支路的同相放大器组成，同相输入端的正反馈支路用于产生振荡，而反相输入端的负反馈支路则用于调整增益。如果定义 RC 串联阻抗与并联阻抗分别为 Z_s 与 Z_p ，则：

$$Z_s = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} \quad (10.8)$$

$$Z_p = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \quad (10.9)$$

反馈系数为：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} \quad (10.10)$$

将式(10.8)与式(10.9)代入式(10.10)，得到：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{R_2}{R_2 + \left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1}\right)(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

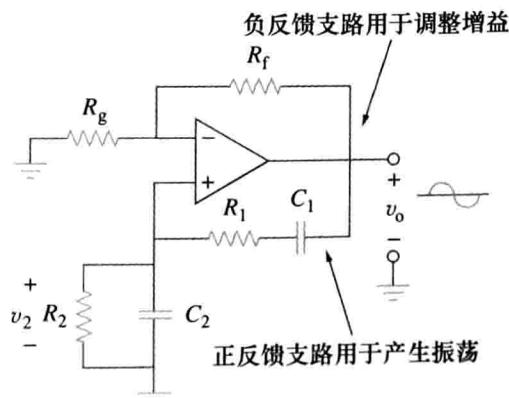


图 10-42 维恩桥式振荡器

$$= \frac{\omega R_2 C_1}{\omega(R_2 C_1 + R_1 C_1 + R_2 C_2) + j(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)} \quad (10.11)$$

为了满足巴克豪森准则二, V_2 与 V_o 必须同相, 这意味着式(10.11)的反馈系数必须为纯实数, 也就是说, 虚部必须为零。由虚部为零可以得到振荡频率 ω_o 为:

$$\omega_o^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1 = 0$$

即

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (10.12)$$

在许多实际应用中, $R_1 = R_2 = R$ 且 $C_1 = C_2 = C$, 于是有:

$$\omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o \quad (10.13)$$

即

$$f_o = \frac{1}{2\pi RC} \quad (10.14)$$

将式(10.13)以及 $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ 代入式(10.11), 得到:

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3} \quad (10.15)$$

因此, 为了满足巴克豪森准则一, 运算放大器的补偿增益必须大于等于 3, 从而使总增益大于等于 1。对于同相放大器而言:

$$\frac{V_o}{V_2} = 1 + \frac{R_f}{R_g} = 3 \quad (10.16)$$

即

$$R_f = 2R_g \quad (10.17)$$

由于维恩桥式振荡器中运算放大器所固有的延时, 其振荡频率仅限于 1MHz 或以下。

例 10-16 设计一个振荡频率为 10kHz 的维恩桥式电路。

解: 由式(10.14)得到的电路时间常数为:

$$RC = \frac{1}{2\pi f_o} = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3} = 1.59 \times 10^{-6} (\text{s}) \quad (10.16.1)$$

如果选择 $R = 10\text{k}\Omega$, 则由式(10.16.1)可得 $C = 159\text{pF}$ 。由于增益必须为 3, 所以 $R_f/R_g = 2$, 可选择 $R_f = 20\text{k}\Omega$, 则 $R_g = 10\text{k}\Omega$ 。

 **练习 10-16** 在图 10-42 所示的维恩桥式振荡器电路中, 如果 $R_1 = R_2 = 2.5\text{k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 1\text{nF}$, 试确定振荡器的振荡频率 f_o 。
答案: 63.66kHz

10.10 本章小结

1. 由于 KCL 与 KVL 适用于电路的相量形式, 所以节点电压分析法与网孔电流分析法同样可以用于分析交流电路。
2. 在求解电路的稳态响应时, 如果电路中包含不同频率的多个独立源, 则必须分别考虑每个独立源。分析这类电路最基本的方法是采用叠加定理。对于不同频率的相量电路必须单独求解, 并将相应的响应转换为时域响应, 电路总响应则为各个相量电路的时域响应之和。
3. 电源转换的概念同样适用于频域。
4. 交流电路的戴维南等效电路由等效电压源 V_{Th} 和与之串联的戴维南阻抗 Z_{Th} 组成。
5. 交流电路的诺顿等效电路由等效电流源 I_N 和与之并联的诺顿阻抗 $Z_N (= Z_{Th})$ 组成。
6. PSpice 软件是求解交流电路的一个简单而有力的工具, 它极大地简化了电路稳态分析。

过程中遇到的繁杂的复数运算问题。

7. 电容倍增器与交流振荡器是本章中的两个典型应用实例。电容倍增器是一个运算放大器电路，所实现的等效电容是某实际电容容量的若干倍。振荡器则是直流输入产生交流输出的一种电路设备。

复习题

- 1 图 10-43 所示电路中电容器两端的电压 V_o 为：

- (a) $5 \angle 0^\circ \text{V}$ (b) $7.071 \angle 45^\circ \text{V}$
 (c) $7.071 \angle -45^\circ \text{V}$ (d) $5 \angle -45^\circ \text{V}$

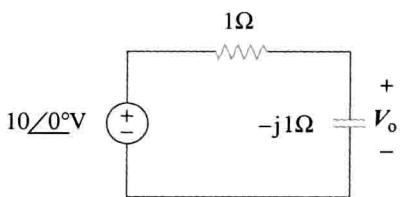


图 10-43 复习题 1 图

- 2 图 10-44 所示电路中电流 I_o 为：

- (a) $4 \angle 0^\circ \text{A}$ (b) $2.4 \angle -90^\circ \text{A}$
 (c) $0.6 \angle 0^\circ \text{A}$ (d) -1A

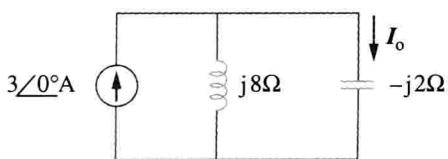


图 10-44 复习题 2 图

- 3 利用节点分析法求出图 10-45 所示电路中的 V_o 。

- (a) -24V (b) -8V
 (c) 8V (d) 24V

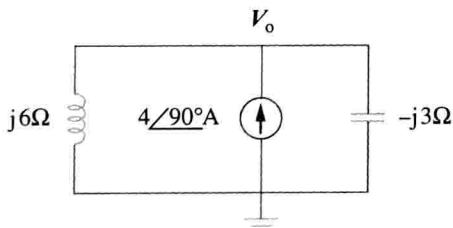


图 10-45 复习题 3 图

- 4 在图 10-46 所示电路中，电流 $i(t)$ 为：

- (a) $10\cos t \text{A}$ (b) $10\sin t \text{A}$
 (c) $5\cos t \text{A}$ (d) $5\sin t \text{A}$
 (e) $4.472\cos(t - 63.43^\circ)\text{A}$

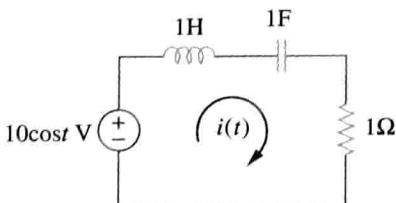


图 10-46 复习题 4 图

- 5 在图 10-47 所示电路中，两个电源具有不同频率，试问电流 $i_x(t)$ 可以由以下哪种方法求得？

- (a) 电源变换 (b) 叠加定理
 (c) PSpice 软件

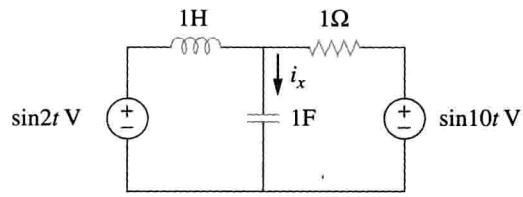


图 10-47 复习题 5 图

- 6 对于图 10-48 所示电路，端口 $a-b$ 处的戴维南阻抗为：

- (a) 1Ω (b) $(0.5 - j0.5)\Omega$
 (c) $(0.5 + j0.5)\Omega$ (d) $(1 + j2)\Omega$
 (e) $(1 - j2)\Omega$

- 7 在图 10-48 所示电路中，端口 $a-b$ 处的戴维南电压为：

- (a) $3.535 \angle -45^\circ \text{V}$ (b) $3.535 \angle 45^\circ \text{V}$
 (c) $7.071 \angle -45^\circ \text{V}$ (d) $7.071 \angle 45^\circ \text{V}$

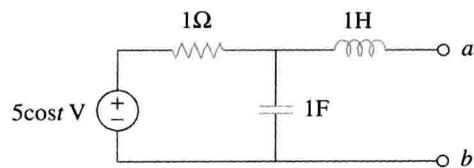


图 10-48 复习题 6 和 7 图

- 8 在图 10-49 所示电路中，端口 $a-b$ 处的诺顿等效阻抗为：

- (a) $-j4\Omega$ (b) $-j2\Omega$
 (c) $j2\Omega$ (d) $j4\Omega$

- 9 图 10-49 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿电流为：

- (a) $1 \angle 0^\circ \text{A}$ (b) $1.5 \angle -90^\circ \text{A}$
 (c) $1.5 \angle 90^\circ \text{A}$ (d) $3 \angle 90^\circ \text{A}$

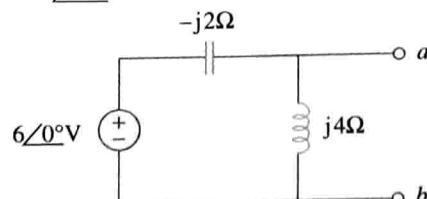


图 10-49 复习题 8 和 9 图

- 10 PSpice 软件可以处理包括两个不同频率独立电源的电路。

(a) 正确

(b) 错误

答案: 1(c); 2(a); 3(d); 4(a); 5(b);
6(c); 7(a); 8(a); 9(d); 10(b)

习题

10.2 节

- 1 计算图 10-50 所示电路中的 i 。

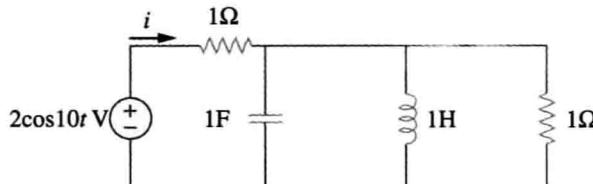


图 10-50 习题 1 图

- 2 利用图 10-51 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解节点分析法。 **ED**

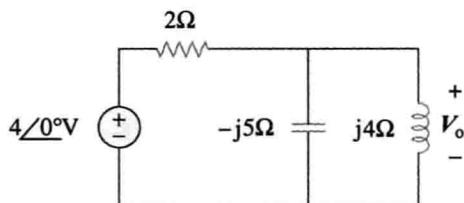


图 10-51 习题 2 图

- 3 计算图 10-52 所示电路中的 v_o 。

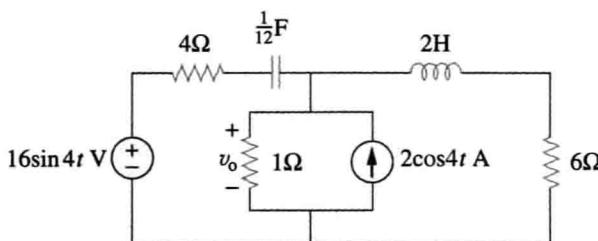


图 10-52 习题 3 图

- 4 计算图 10-53 所示电路中的 $v_o(t)$ 。

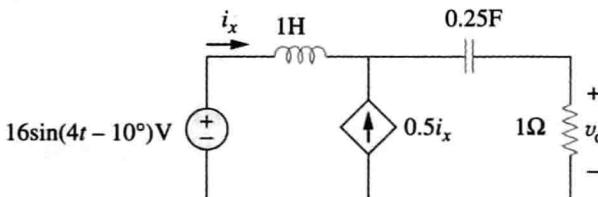


图 10-53 习题 4 图

- 5 计算图 10-54 所示电路中的 i_o 。 **PS**

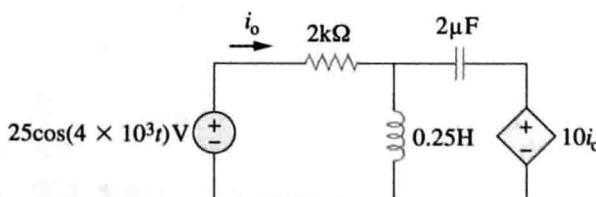


图 10-54 习题 5 图

- 6 计算图 10-55 所示电路中的 V_x 。

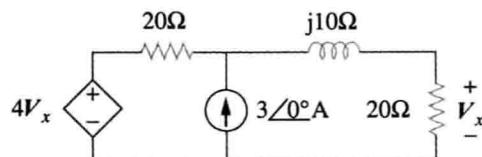


图 10-55 习题 6 图

- 7 利用节点分析法计算图 10-56 所示电路中的 V_{∞} 。

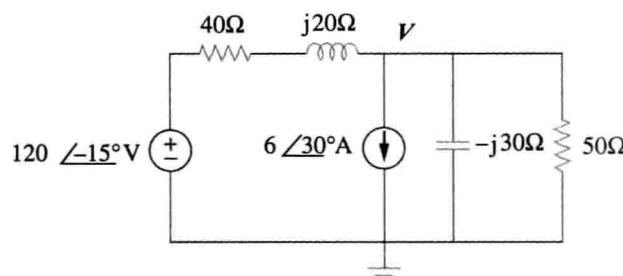


图 10-56 习题 7 图

- 8 利用节点分析法计算图 10-57 所示电路中的 i_o ，假设 $i_s = 6\cos(200t + 15^\circ) A$ 。 **PS ML**

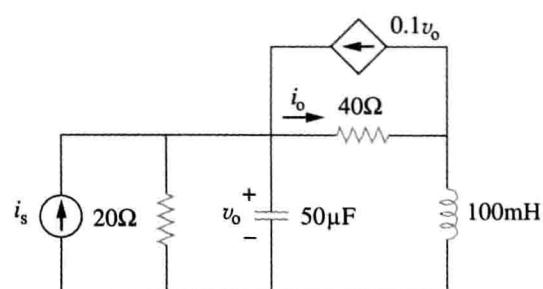


图 10-57 习题 8 图

- 9 利用节点分析法计算图 10-58 所示电路中的 v_o 。 **PS ML**

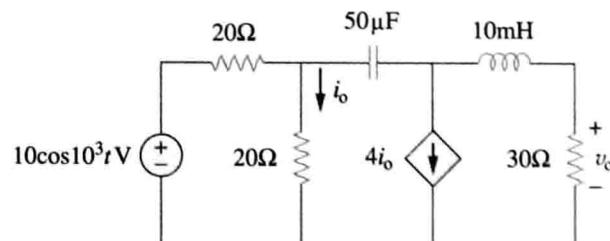


图 10-58 习题 9 图

- 10 利用节点分析法计算图 10-59 所示电路中的 v_o ，假设 $\omega = 2 \text{ krad/s}$ 。 **PS ML**

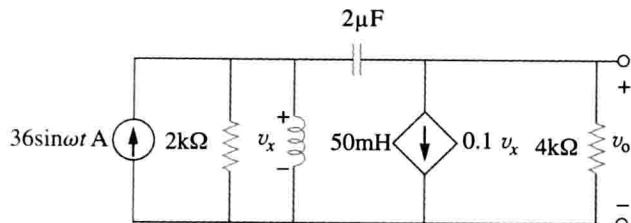


图 10-59 习题 10 图

- 11 利用节点分析法计算图 10-60 所示电路中的电流 $i_o(t)$ 。
PS ML

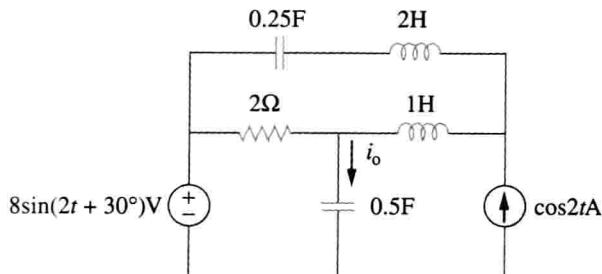


图 10-60 习题 11 图

- 12 利用图 10-61 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解节点分析法。
ED

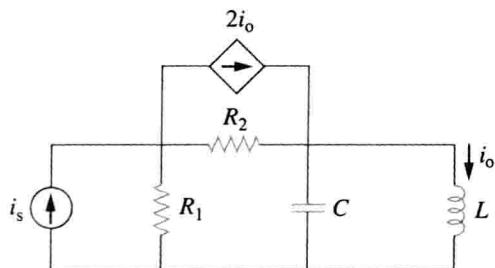


图 10-61 习题 12 图

- 13 自行选择方法计算图 10-62 所示电路中的 V_x 。
PS ML

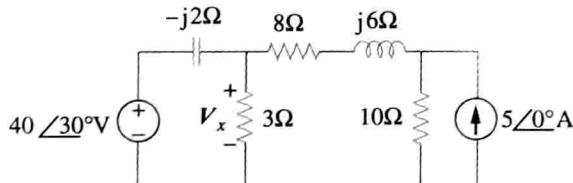


图 10-62 习题 13 图

- 14 利用节点分析法计算图 10-63 所示电路中节点 1 与节点 2 的电压。
PS ML

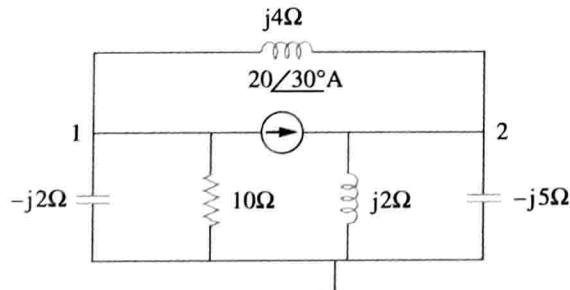


图 10-63 习题 14 图

- 15 利用节点分析法计算图 10-64 所示电路中的电流 I 。
PS ML

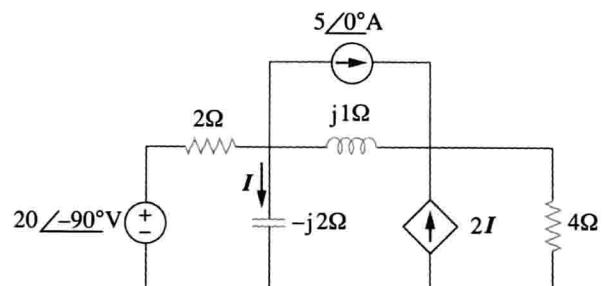


图 10-64 习题 15 图

- 16 利用节点分析法计算图 10-65 所示电路中的电压 V_x 。
PS ML

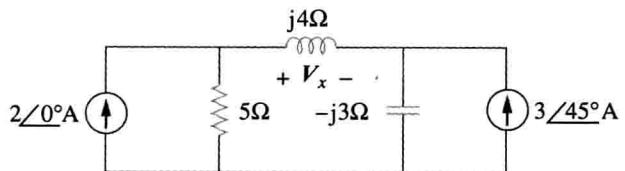


图 10-65 习题 16 图

- 17 利用节点分析法计算图 10-66 所示电路中的电流 I_o 。
PS ML

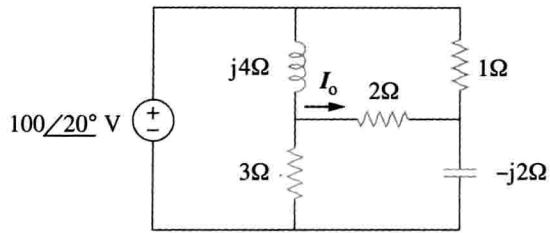


图 10-66 习题 17 图

- 18 利用节点分析法计算图 10-67 所示电路中的电压 V_o 。
PS ML

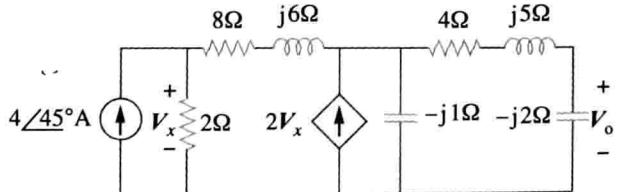


图 10-67 习题 18 图

- 19 利用节点分析法计算图 10-68 所示电路中的电压 V_o 。
PS ML

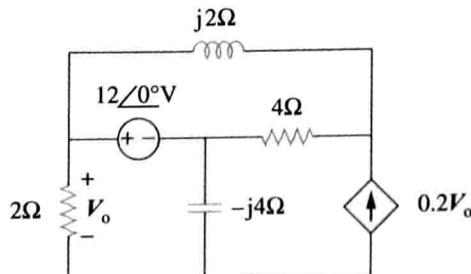


图 10-68 习题 19 图

- 20 在图 10-69 所示电路中, $v_s(t) = V_m \sin \omega t$ V, $v_o(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ V, 试推导 A 与 ϕ 的表达式。

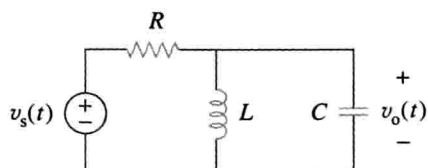


图 10-69 习题 20 图

- 21 对于图 10-70 所示各电路, 试求 $\omega=0$ 、 $\omega \rightarrow \infty$ 以及 $\omega^2=1/LC$ 时的 V_o/V_i 。

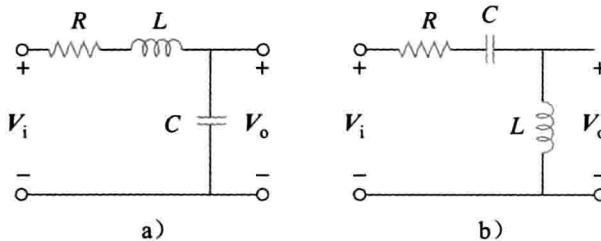


图 10-70 习题 21 图

- 22 计算图 10-71 所示电路中的 V_o/V_s 。

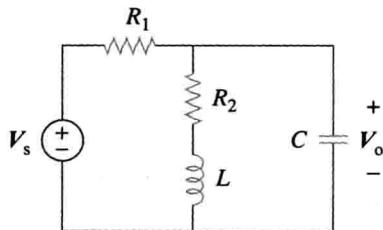


图 10-71 习题 22 图

- 23 利用节点分析法计算图 10-72 所示电路中的电压 V 。

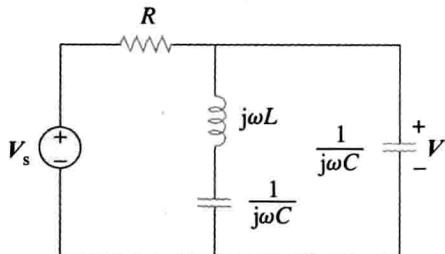


图 10-72 习题 23 图

10.3 节

- 24 设计一个问题帮助其他同学更好地理解网孔分析法。**ED**
- 25 利用网孔分析法计算图 10-73 所示电路中的 i_o 。**ML**

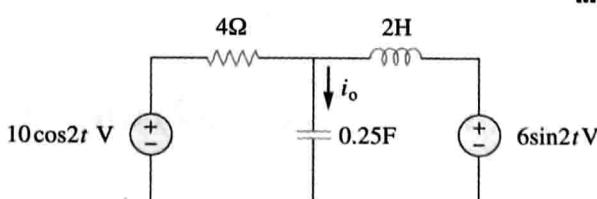


图 10-73 习题 25 图

- 26 利用网孔分析法计算图 10-74 所示电路中的 i_o 。

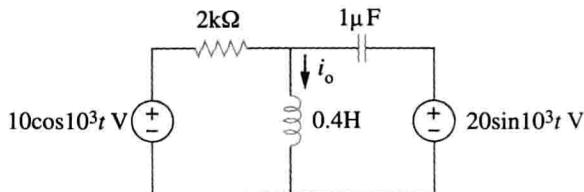


图 10-74 习题 26 图

- 27 利用网孔分析法计算图 10-75 所示电路中的电流 I_1 与 I_2 。**ML**

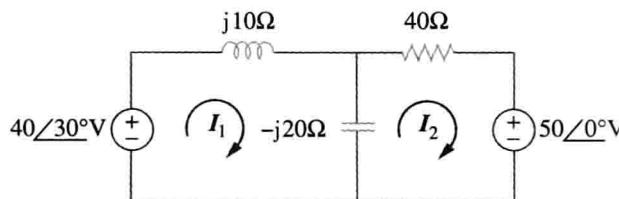


图 10-75 习题 27 图

- 28 图 10-76 所示电路中, 假设 $v_1 = 10\cos 4t$ V, $v_2 = 20\cos(4t - 30^\circ)$ V, 计算网孔电流 i_1 与 i_2 。**ML**

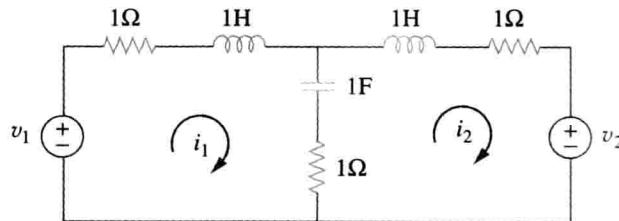


图 10-76 习题 28 图

- 29 利用图 10-77 所示电路设计一个问题, 帮助其他同学更好地理解网孔分析法。**ED**

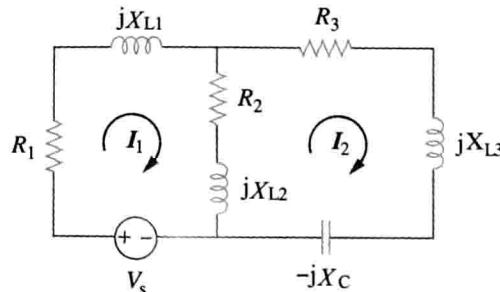


图 10-77 习题 29 图

- 30 利用网孔分析法计算图 10-78 所示电路中的 v_o , 假设 $v_{s1} = 120\cos(100t + 90^\circ)$ V, $v_{s2} = 80\cos 100t$ V。**PS ML**

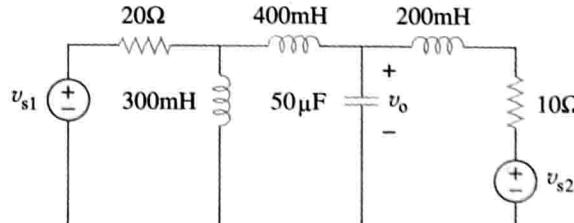


图 10-78 习题 30 图

- 31 利用网孔分析法计算图 10-79 所示电路中的电流 I_o 。
PS ML

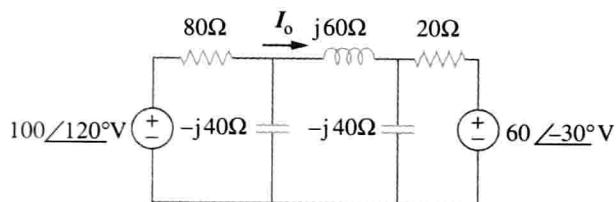


图 10-79 习题 31 图

- 32 利用网孔分析法计算图 10-80 所示电路中的 V_o 与 I_o 。
PS ML

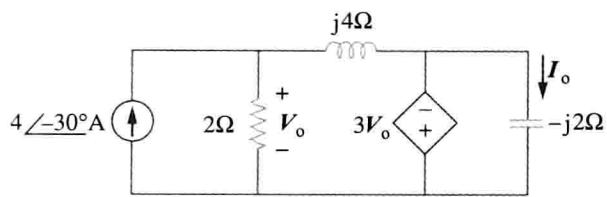


图 10-80 习题 32 图

- 33 利用网孔分析法计算习题 15 中的 I 。
PS ML

- 34 利用网孔分析法计算图 10-28 所示电路(例 10-10)中的 I_o 。
PS ML

- 35 利用网孔分析法计算图 10-30 所示电路(练习 10-10)中的 I_o 。
PS ML

- 36 利用网孔分析法计算图 10-81 所示电路中的 V_o 。
PS ML

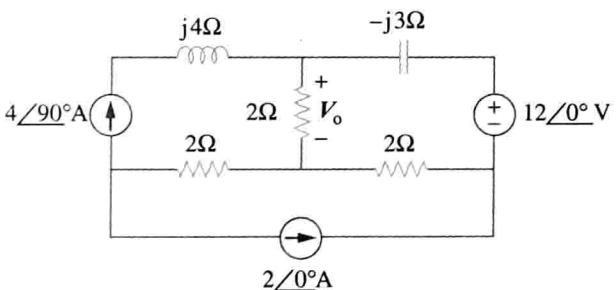


图 10-81 习题 36 图

- 37 利用网孔分析法计算图 10-82 所示电路中的 I_1 、 I_2 与 I_3 。
PS ML

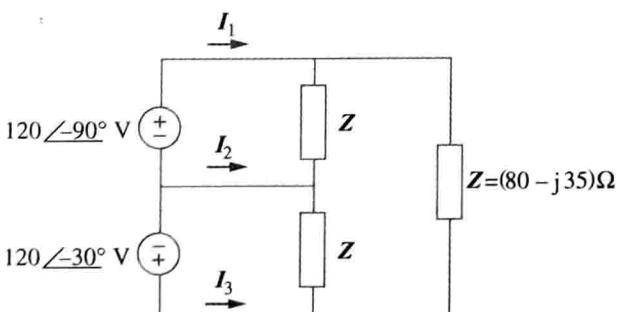


图 10-82 习题 37 图

- 38 利用网孔分析法计算图 10-83 所示电路中的 I_o 。
PS ML

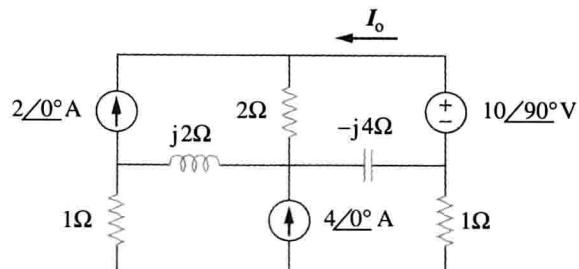


图 10-83 习题 38 图

- 39 计算图 10-84 所示电路中的 I_1 、 I_2 、 I_3 与 I_x 。
PS ML

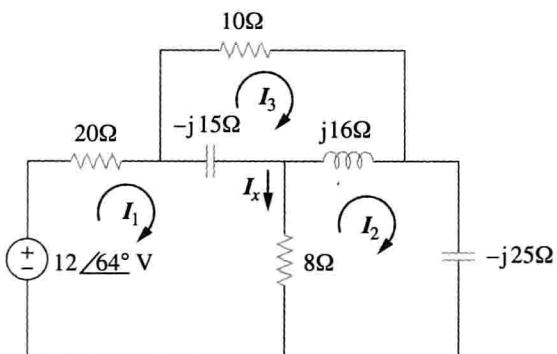


图 10-84 习题 39 图

10.4 节

- 40 利用叠加定理计算图 10-85 所示电路中的 i_o 。

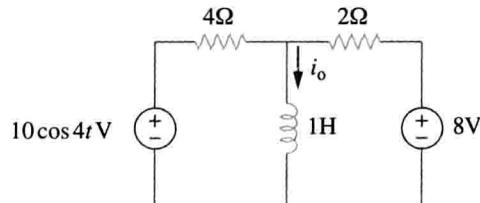


图 10-85 习题 40 图

- 41 计算图 10-86 所示电路中的 v_o ，假设 $v_s = (6\cos 2t + 4\sin 4t)V$ 。

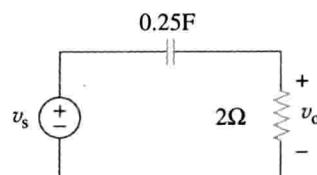


图 10-86 习题 41 图

- 42 利用图 10-87 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解叠加定理。
ED

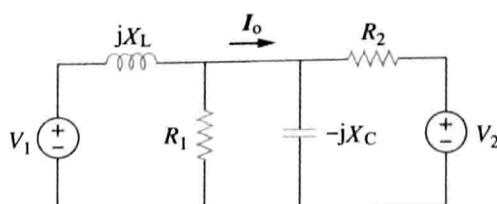


图 10-87 习题 42 图

43 利用叠加定理计算图 10-88 所示电路中的 i_x 。

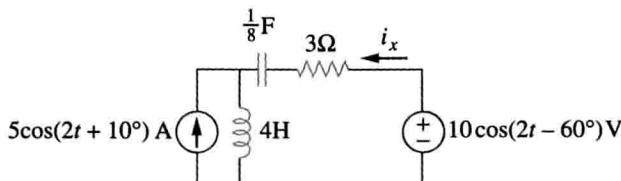


图 10-88 习题 43 图

44 利用叠加定理计算图 10-89 所示电路中的 v_x ，假设 $v_s = 50\sin 2t \text{ V}$, $i_s = 12\cos(6t + 10^\circ) \text{ A}$ 。

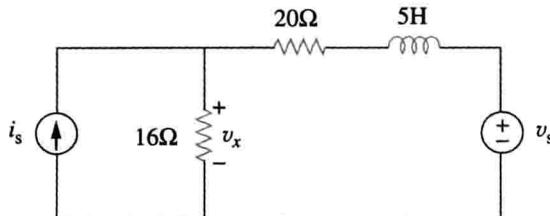


图 10-89 习题 44 图

45 利用叠加定理计算图 10-90 所示电路中的 $i(t)$ 。

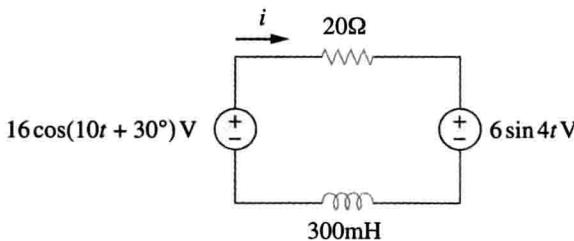


图 10-90 习题 45 图

46 利用叠加定理计算图 10-91 所示电路中的 $v_o(t)$ 。

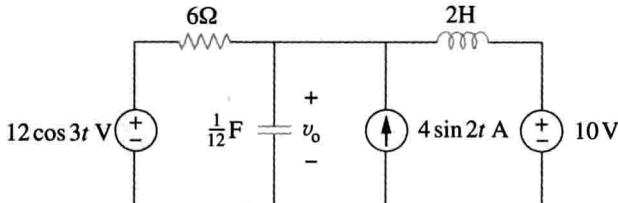


图 10-91 习题 46 图

47 利用叠加定理计算图 10-92 所示电路中的 i_o 。

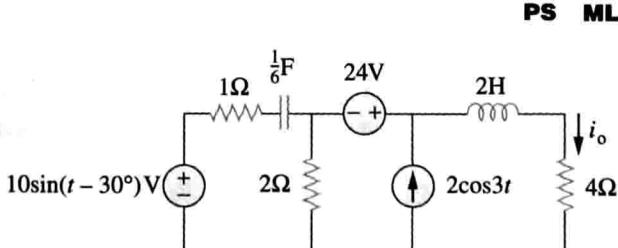


图 10-92 习题 47 图

48 利用叠加定理计算图 10-93 所示电路中的 i_o 。

PS ML

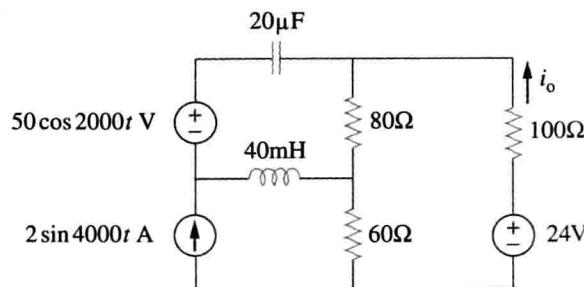


图 10-93 习题 48 图

10.5 节

49 利用电源变换方法计算图 10-94 所示电路中的 i 。

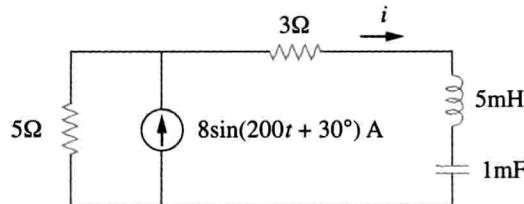


图 10-94 习题 49 图

50 利用图 10-95 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解电源变换方法。 **ED**

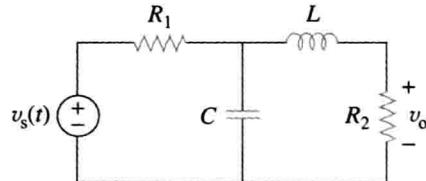


图 10-95 习题 50 图

51 利用电源变换方法求解习题 42 电路中的 I_o 。

52 利用电源变换方法计算图 10-96 所示电路中的 I_x 。 **PS**

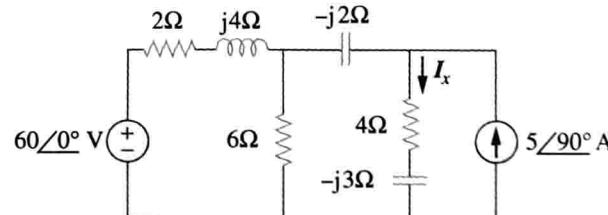


图 10-96 习题 52 图

53 利用电源变换方法计算图 10-97 所示电路中的 V_o 。 **PS**

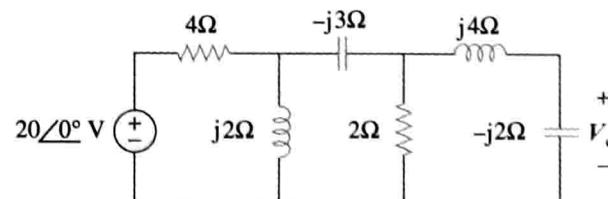
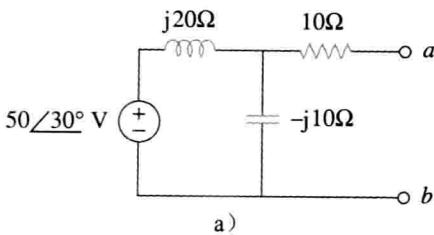


图 10-97 习题 53 图

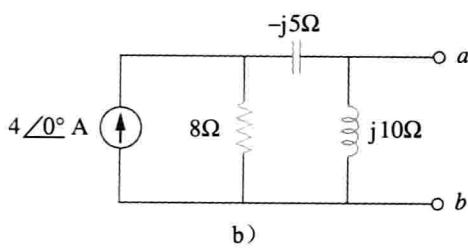
54 利用电源变换方法重做习题 7。

10.6 节

- 55 求图 10-98 所示各电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。



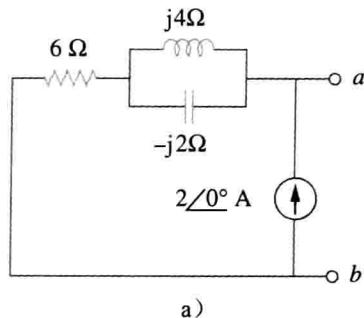
a)



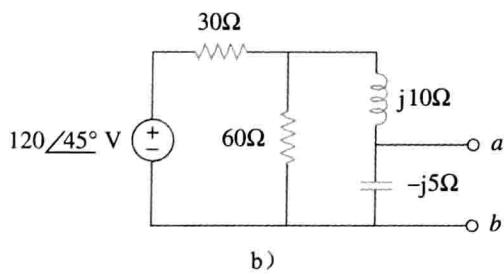
b)

图 10-98 习题 55 图

- 56 求图 10-99 所示各电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。



a)



b)

图 10-99 习题 56 图

- 57 利用图 10-100 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解戴维南等效电路和诺顿等效电路。

ED

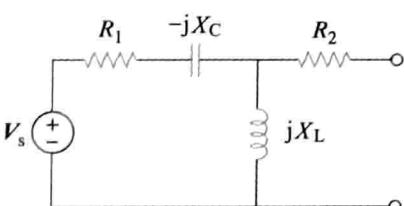


图 10-100 习题 57 图

- 58 求图 10-101 所示各电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

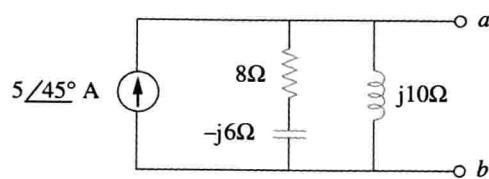


图 10-101 习题 58 图

- 59 计算图 10-102 所示电路的输出阻抗。

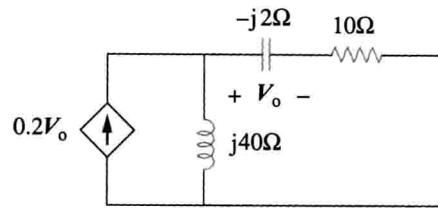


图 10-102 习题 59 图

- 60 求图 10-103 所示电路从如下端口看进去的戴维南等效电路：(a) 端口 $a-b$ ；(b) 端口 $c-d$ 。

PS

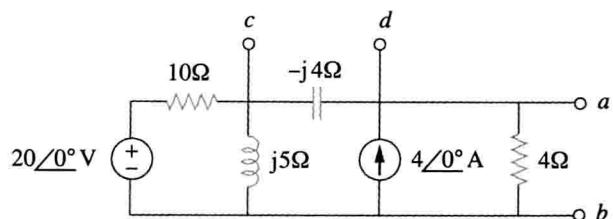


图 10-103 习题 60 图

- 61 求图 10-104 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。

PS ML

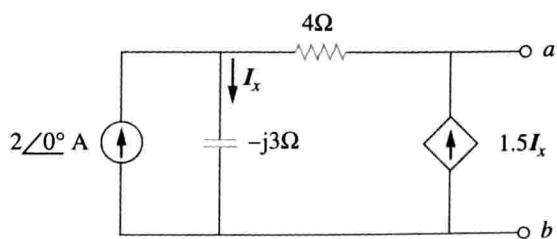


图 10-104 习题 61 图

- 62 利用戴维南定理计算图 10-105 所示电路中的 v_o 。

PS

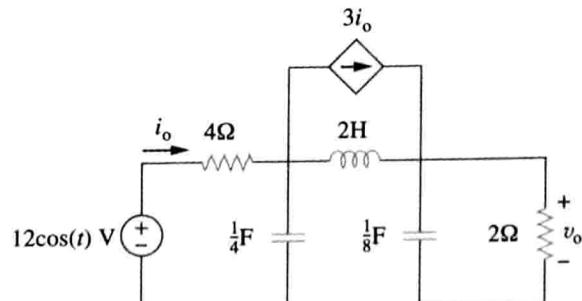


图 10-105 习题 62 图

- 63 求图 10-106 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。 **PS**

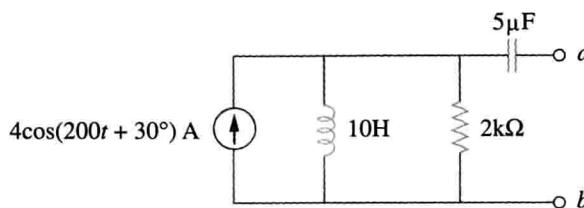


图 10-106 习题 63 图

- 64 求图 10-107 所示电路在端口 $a-b$ 处的诺顿等效电路。 **PS**

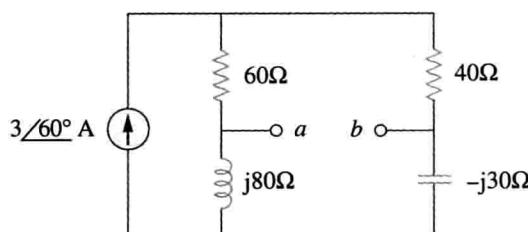


图 10-107 习题 64 图

- 65 利用图 10-108 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解诺顿定理。 **ED**

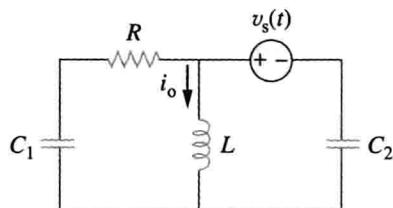


图 10-108 习题 65 图

- 66 求图 10-109 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路，假设 $\omega=10\text{rad/s}$ 。 **PS**

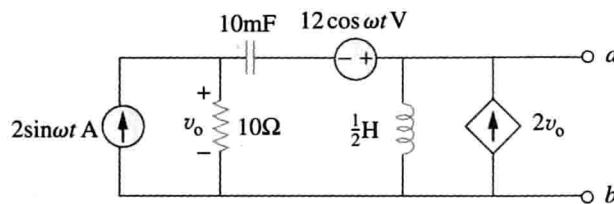


图 10-109 习题 66 图

- 67 求图 10-110 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路与诺顿等效电路。 **PS ML**

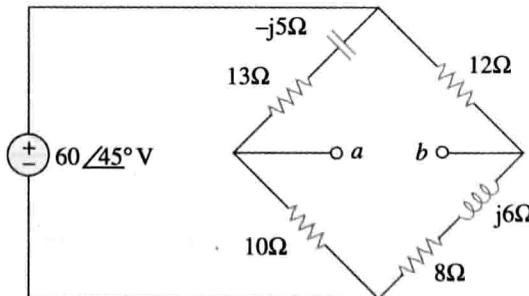


图 10-110 习题 67 图

- 68 求图 10-111 所示电路在端口 $a-b$ 处的戴维南等效电路。 **PS**

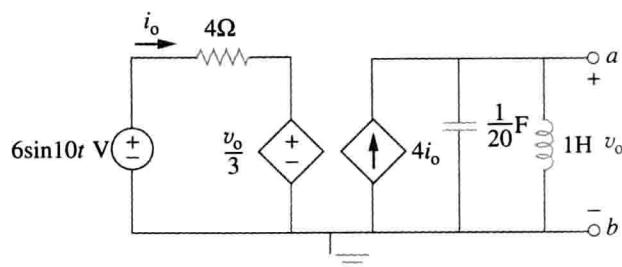


图 10-111 习题 68 图

10.7 节

- 69 对于图 10-112 所示的微分器电路，计算 V_o/V_s ，并求出当 $v_s(t)=V_m \sin \omega t$ 且 $\omega=1/RC$ 时的输出 $v_o(t)$ 。

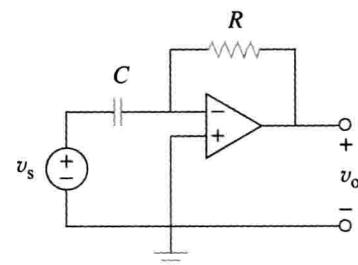


图 10-112 习题 69 图

- 70 利用图 10-113 所示电路设计一个问题，帮助其他同学更好地理解交流运算放大器电路。 **ED**

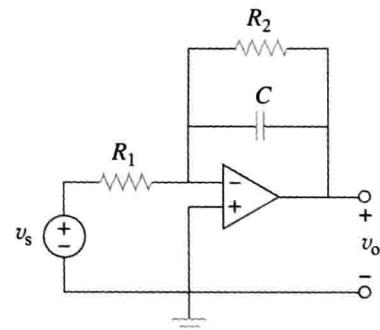


图 10-113 习题 70 图

- 71 计算图 10-114 所示运算放大器电路的 v_o 。

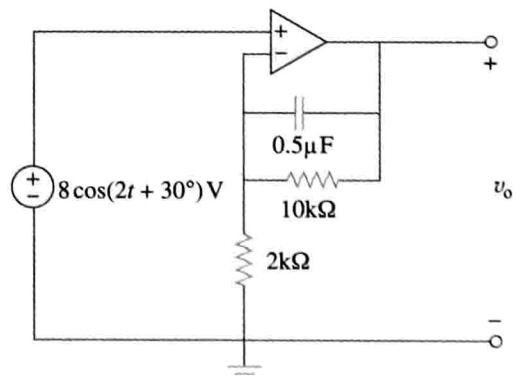


图 10-114 习题 71 图

- 72 计算图 10-115 所示运算放大器电路在 $v_s = 4\cos 10^4 t$ V 时的 v_o 。

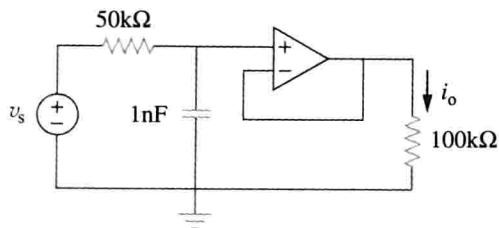


图 10-115 习题 72 图

- 73 如果输入阻抗定义为 $Z_{in} = V_s/I_s$, 试求 $R_1 = 10k\Omega$ 、 $R_2 = 20k\Omega$ 、 $C_1 = 10nF$ 、 $C_2 = 20nF$ 、 $\omega = 5000rad/s$ 时, 图 10-116 所示运算放大器的输入阻抗。

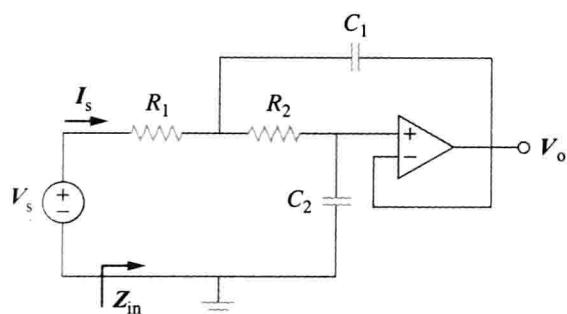


图 10-116 习题 73 图

- 74 计算图 10-117 所示运算放大器电路的电压增益 $A_v = V_o/V_s$, 并求出 $\omega = 0$ 、 $\omega \rightarrow \infty$ 、 $\omega = 1/R_1 C_1$ 、 $\omega = 1/R_2 C_2$ 四种情况下的 A_v 。

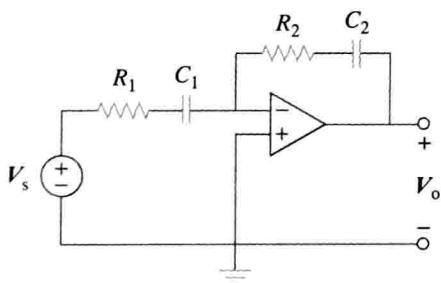


图 10-117 习题 74 图

- 75 在图 10-118 所示运算放大器电路中, 如果 $C_1 = C_2 = 1nF$, $R_1 = R_2 = 100k\Omega$, $R_3 = 20k\Omega$, $R_4 = 40k\Omega$, $\omega = 2000rad/s$, 试求闭环增益与输出电压相对于输入电压的相移。 PS ML

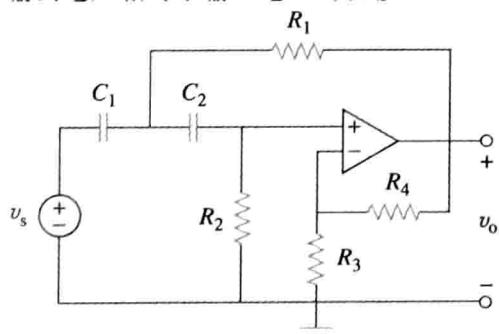


图 10-118 习题 75 图

- 76 计算图 10-119 所示运算放大器电路中的 V_o 与 I_o 。

PS ML

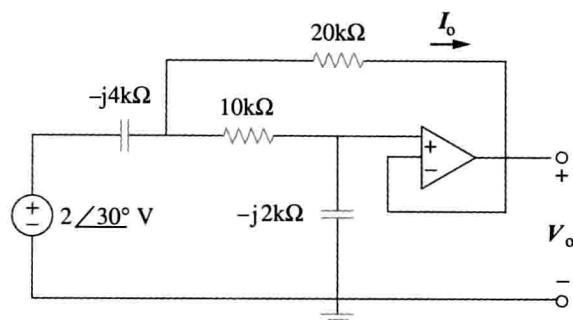


图 10-119 习题 76 图

- 77 计算图 10-120 所示运算放大器电路的闭环增益 V_o/V_s 。

PS ML

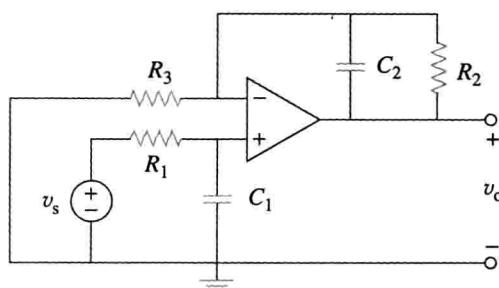


图 10-120 习题 77 图

- 78 计算图 10-121 所示运算放大器电路的 $v_o(t)$ 。

PS ML

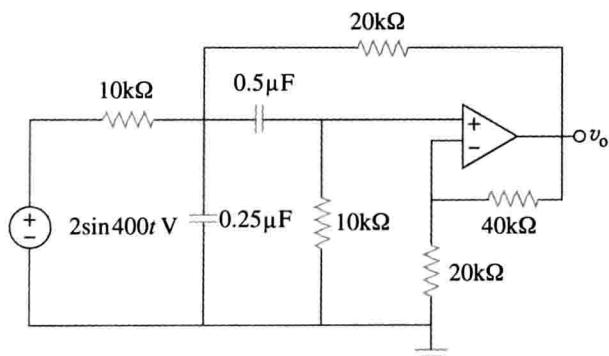


图 10-121 习题 78 图

- 79 计算图 10-122 所示运算放大器电路的 $v_o(t)$ 。

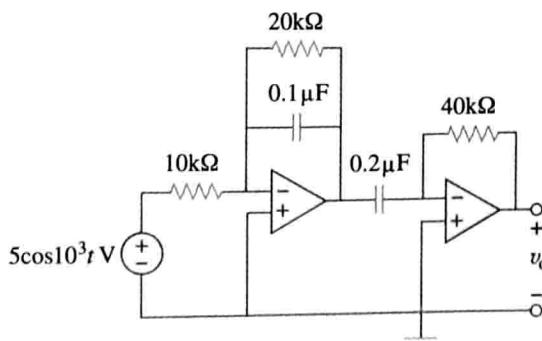


图 10-122 习题 79 图

- 80 计算图 10-123 所示运算放大器电路在 $v_s = 4\cos(1000t - 60^\circ)$ V 时的 $v_o(t)$ 。 **PS ML**

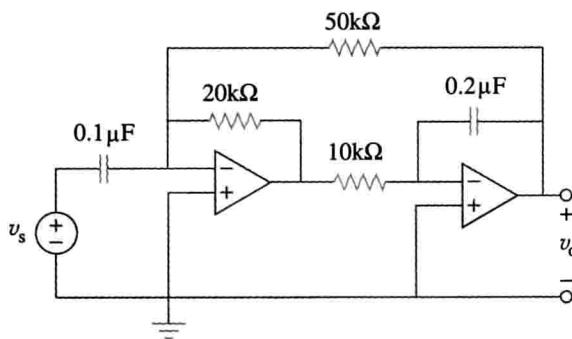


图 10-123 习题 80 图

10.8 节

- 81 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-124 所示电路中的 V_o ，假设 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 。 **PS**

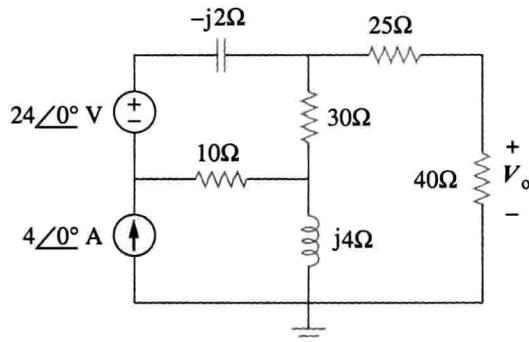


图 10-124 习题 81 图

- 82 利用 PSpice 或 MultiSim 求解习题 19。

- 83 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-125 所示电路中的 $v_o(t)$ ，假设 $i_s = 2\cos 10^3 t$ A。

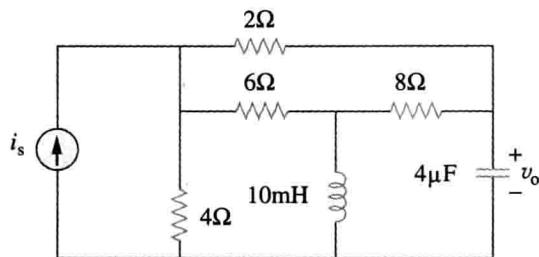


图 10-125 习题 83 图

- 84 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-126 所示电路中的 V_o 。

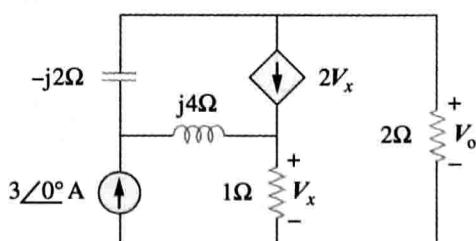


图 10-126 习题 84 图

- 85 利用图 10-127 设计一个问题，帮助其他同学更好地理解如何使用 PSpice 或者 MultiSim 进行交流分析。 **ED**

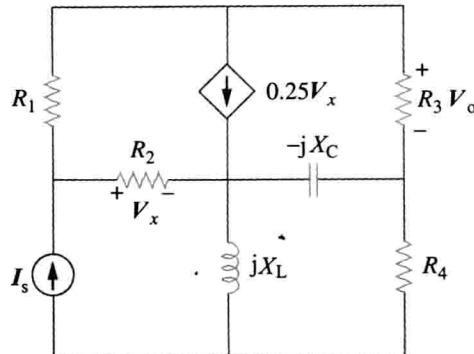


图 10-127 习题 85 图

- 86 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-128 所示网络中的 V_1 、 V_2 与 V_3 。

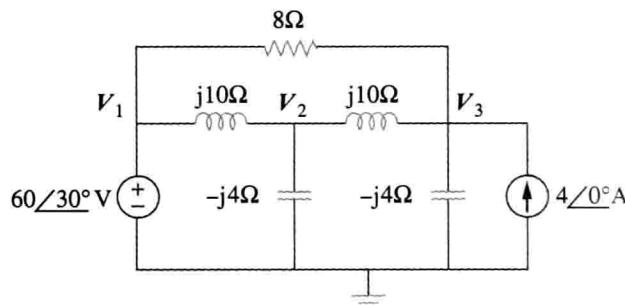


图 10-128 习题 86 图

- 87 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-129 所示电路中的 V_1 、 V_2 与 V_3 。

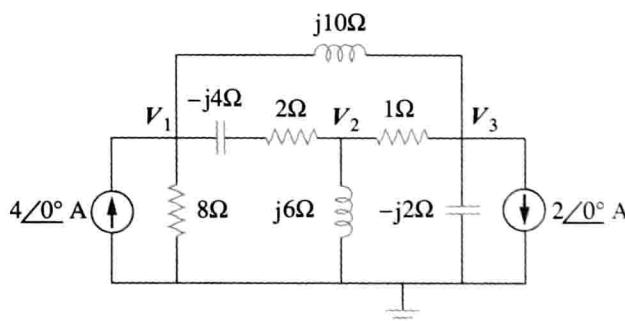


图 10-129 习题 87 图

- 88 利用 PSpice 或 MultiSim 求解图 10-130 所示电路中的 v_o 与 i_o 。

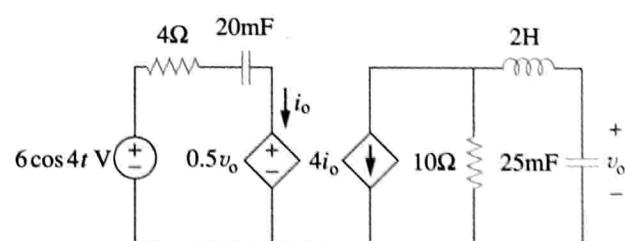


图 10-130 习题 88 图

10.9 节

- 89 图 10-131 所示运算放大器电路称为电感模拟器，证明其输入阻抗为 $Z_{in} = V_{in}/I_{in} = j\omega L_{eq}$ ，其中 $L_{eq} = (R_1 R_3 R_4 / R_2)C$ 。

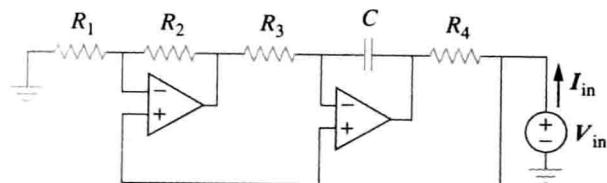


图 10-131 习题 89 图

- 90 图 10-132 所示为维恩电桥网络，试证明输入信号与输出信号相移为零时的频率 f 为 $f = \frac{1}{2}\pi RC$ ，并且在该频率处所需的增益为 $A_v = V_o/V_i = 3$ 。

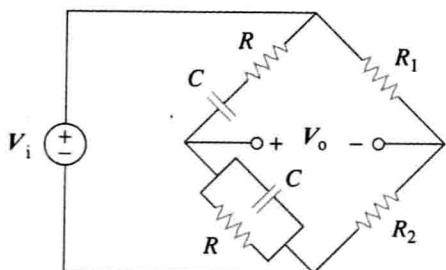


图 10-132 习题 90 图

- 91 对于图 10-133 所示的振荡器电路：(a) 确定其振荡频率；(b) 确定振荡器起振时所需的 R 的最小值。

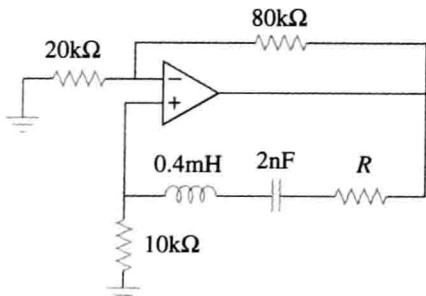


图 10-133 习题 91 图

- 92 图 10-134 所示振荡器电路采用理想运算放大器。(a) 计算振荡器起振时所需的最小电阻值 R_o ；(b) 求振荡频率。

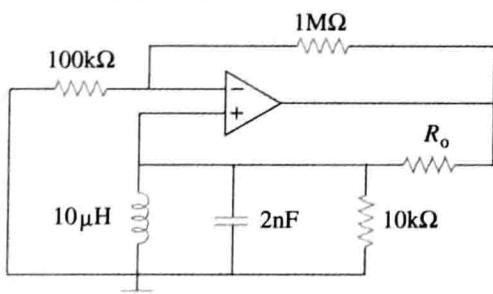


图 10-134 习题 92 图

- 93 图 10-135 所示为考毕兹振荡器，证明其振荡频率为： $f_o = 1/(2\pi\sqrt{LC_T})$ ，其中， $C_T = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ ，假设 $R_i \gg X_{C_2}$ 。(提示：将反馈电路中阻抗的虚部设置为零)。 **ED**

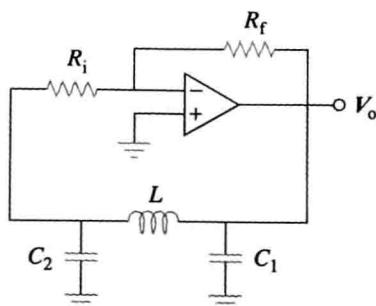


图 10-135 考毕兹振荡器，习题 93 图

- 94 设计一个工作频率为 50kHz 的考毕兹振荡器。 **ED**

- 95 图 10-136 所示为哈特莱振荡器，证明其振荡频率为：

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$$

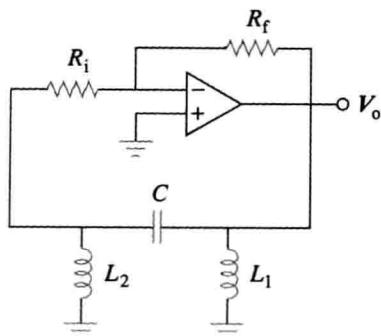


图 10-136 习题 95 图

- 96 对于如图 10-137 所示的振荡器：

- (a) 证明：

$$\frac{V_2}{V_o} = \frac{1}{3 + j(\omega L/R - R/\omega L)}$$

- (b) 确定其振荡频率 f_o ；(c) 确定使得振荡器起振的 R_1 与 R_2 之间的关系。

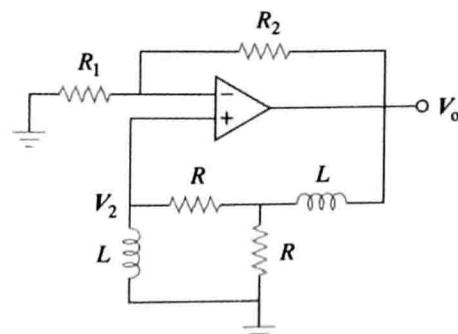


图 10-137 习题 96 图