אריתמטיקה של רציפות

משפט

אם f,g רציפות ב-a, אז:

1. $f+g$ רציפה ב-a
2. $f\cdot g$ רציפה ב-a
3. אם $g(a)\neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ רציפה ב-a.

הוכחת המשפט

נתון: $\lim_a f = f(a)$, $\lim_a g = g(a)$

מאריתמטיקה של גבולות: $\lim_a (f+g) = f(a)+g(a) = f+g(a)$, $\lim_a (f\cdot g) = f(a)\cdot g(a) = f\cdot g(a)$

ולכן $f\cdot g$ ו- $f+g$ רציפות ב-a.

בנ"ל מאריתמטיקה של גבולות, בגלל ש $\lim_a g \neq 0$ מתקיים

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$$

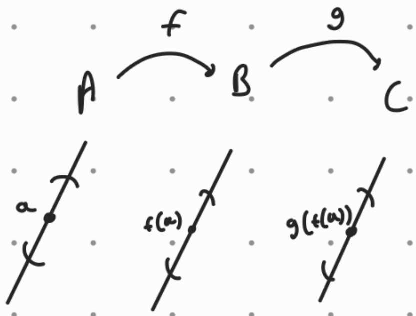
מסקנה / דוגמא:

1. הפונקציה $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + x^2\cos x}{x^2+1}$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.
2. מה לגבי $f(x)=\sin(x^2)$, האם היא רציפה?

משפט

תהיינה $f: A \to B$, $g: B \to C$ כך ש- f רציפה ב-a

ו- g רציפה ב- $f(a)$, אזי $g \circ f$ רציפה ב-a.



הוכחת המשפט (ε, δ)

בהינתן $\varepsilon > 0$ קיים $\eta > 0$ כך ש- $|y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

וקיים $\delta > 0$ כך ש- $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta$

ולכן $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$

ולכן $g \circ f$ רציפה ב-a.

הוכחת המשפט (היינה)

תהי $x_n \to a$, אזי מרציפות f ב-a נובע $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

מרציפות g ב- $f(a)$ נובע: $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$

x_n הייתה שרירותית ולכן מהיינה בכיוון ההפוך ולכן $g \circ f$ רציפה ב-a.

הגדרה:

• נאמר ש- f **רציפה מימין** ב- a אם $\lim_{a^+} f = f(a)$

(כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a \le x \le a+\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.)

• נאמר ש- f **רציפה משמאל** ב- a אם $\lim_{a^-} f = f(a)$

(כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $a-\delta \le x \le a$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.)

• תהא $f:A\to B$, U תת קבוצה של A.

נאמר ש- f **רציפה ב- U** אם היא רציפה בכל $a\in U$.

• נאמר ש- f **רציפה בקטע סגור** $[a,b]$ אם היא רציפה ב- (a,b) וגם היא רציפה מימין ב- a ורציפה משמאל ב- b.

דוגמאות:

$\tan$ רציפה ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ אבל לא ב- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$