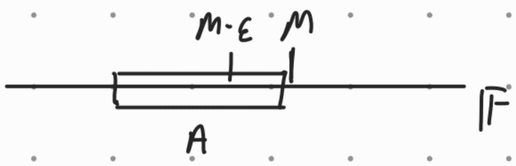
למה

תהי $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה. אז M הוא החסם העליון של A $(M = \sup(A))$ אמ"מ:

① M הוא חסם מלעיל של A.

② לכל $\mathbb{F} \ni \varepsilon > 0$ קיים איבר $a \in A$ כך ש- $a > M - \varepsilon$



הוכחה

$\Leftarrow$ נניח ש- $M = \sup(A)$, נובע מהגדרה שהוא חסם מלעיל.

לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $M - \varepsilon < M$.

מהגדרת החסם העליון $M - \varepsilon$ אינו חסם מלעיל של A

אז קיים $a \in A$ כך ש- $M - \varepsilon < a$.

$\Rightarrow$ נניח ש- M חסם מלעיל של A ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$

כך ש- $M - \varepsilon < a$. נניח בשלילה שקיים ל-A חסם מלעיל

$M > M'$. אז $M' = M - \underbrace{(M - M')}_{\text{חיובי}}$. אז נסמן $\varepsilon = M - M'$, ולכן קיים

$a \in A$ כך ש- $a > M - (M - M') = M'$ בסתירה לחסימה מלעיל.

טענה

תהי $A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה. אם קיים ל-A מקסימום, אז גם קיים לה חסם עליון ו- $\sup A = \max A$.

הוכחה

נתון שקיים $M \in A$ כך ש- $a \le M$ לכל $a \in A$.

יהי M' חסם מלעיל של A, מכיוון ש- $M \in A$, אז $M' \ge M$

אז M הוא החסם העליון של A.

דוגמא:

נתבונן בקבוצה הבאה: $A = \{x \in \mathbb{F} \mid x > 0,\ x^2 < 2\}$

- A אינה ריקה כי $1 \in A$.
- אם $M > 0$ וגם $M^2 > 2$ אז M חסם מלעיל ל- A.

כי לכל $x \in A$ אז $x > 0$ וגם $x^2 < 2 < M^2 \Rightarrow x < M$

- A חסומה מלעיל $(2 > 0 \quad 4 = 2^2 > 2)$
- אם קיים ל- A חסם עליון, אז $(\sup A)^2 = 2$

ולכן אם $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ קיימות קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל
שאין להן חסם עליון

הוכחה: נסמן $\sup A = \alpha$

נניח ש $\alpha^2 < 2$, כלומר $2-\alpha^2 > 0$. נבחר $\beta \in \mathbb{F}$ שמקיים:

$0 < \beta < \max\left\{\alpha, \frac{2-\alpha^2}{3\alpha^3}\right\}$. נתמקד ב- $(\alpha+\beta)$. הוא גדול מ- α.

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \le \alpha^2+3\alpha\cdot\beta < \alpha^2+(2-\alpha^2) = 2$$

ולכן $(\alpha+\beta) \in A$. מצאנו איבר ב- A שגדול מ- α, בסתירה להיותו חסם עליון.

נניח ש- $\alpha^2 > 2$. אז נבחר $\beta \in \mathbb{F}$ שמקיים

$0<\beta$, $\beta<\alpha$, $\beta < \frac{\alpha^2-2}{2\alpha}$. נתמקד ב- $(\alpha-\beta)$, הוא חיובי וקטן מ- α.

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \ge \alpha^2-2\alpha\beta > \alpha^2+(2-\alpha^2) = 2$$

מצאנו חסם מלעיל של A שקטן מ- α, בסתירה להיות α החסם העליון.

$\boxed{\text{משפט}}$

בשדה סדור שלם, לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל, מלרע

קיים חסם עליון. תחתון

הוכחה

תהא A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נסמן:

$$B = \{ b \in \mathbb{F} \mid b \text{ חסם מלעיל של } A \}$$

מהגדרת חסם מלעיל, כל $b \in B$ מקיימת $a \le b$ לכל $a \in A$.

אז קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש- $a \le c \le b$ לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$

אז c חסם מלעיל של a, וקטן שווה מכל חסם מלעיל אחר.

אז הוא החסם העליון.

משפט

שדה סדור שלם הוא ארכימדי (כלומר $\mathbb{N}$ איננה חסומה מלעיל)

הוכחה

נניח בשלילה ש- $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל, אז היה לה חסם עליון. נסמן

אותו $\alpha = \sup \mathbb{N}$, מהגדרת של $\sup$ קיים מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$

כך ש- $n > \alpha - \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $n+1 > \alpha + \frac{1}{2} > \alpha$ בסתירה להיות

α חסם מלעיל של $\mathbb{N}$

משפט

אם $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ אז קיים $r \in \mathbb{Q}$ $x < r < y$

("הרציונליים צפופים בממשיים")

הוכחה

מכיוון שהשדה ארכימדי $\mathbb{Z}$ לא חסומה מלרע, קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$m < x$. כמו כן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n} < y - x$

נתבונן בקבוצה הבאה: $B = \left\{ m + \frac{k}{n} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$

אם בשלילה B חסומה מלעיל ע"י β, אז $m + \frac{k}{n} < \beta$ לכל $k \in \mathbb{N}$

ולכן $k < n(\beta - m)$ לכל $k \in \mathbb{N}$ בסתירה לארכימדיות.

לכן קיימים איברים ב- B גדולים מ- x.

נתבונן בקבוצה הבאה: $\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; m + \frac{k}{n} > x \right\}$

מעקרון הסדר הטוב קיים איבר מינימלי, כלומר קיים k כך ש:

$$m + \frac{k}{n} > x$$

$$m + \frac{k-1}{n} \le x$$

$$\Downarrow$$

$$x < m + \frac{k}{n} \le x + \frac{1}{n} < y$$

מש"ל.