מערכות משוואות שבהן מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים

ח

טענה: תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$.

אזי A הפיכה, אם למערכת המשוואות $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

בנוסף, אם מטריצה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ היא ההופכית של A,

אזי הפתרון היחיד של המערכת הינו Pb.

הוכחה: נוכיח כי קבוצת הפתרונות של המערכת היא: $\{Pb\}$.

תחילה, נוכיח כי Pb הוא פתרון המערכת.

אכן $A(Pb)=(AP)b=I_nb=b$

כעת, נוכיח כי כל פתרון של המערכת שווה ל Pb.

יהי $x\in\mathbb{R}^n$ פתרון המערכת. אזי $Ax=b$. מכאן

$$x=I_nx=(PA)x=P(Ax)=Pb$$

מערכת משוואות הומוגנית

הגדרה: תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מערכת משוואות מהצורה $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

אזי היא מערכת משוואות הומוגנית.

תכונות

① לכל מערכת משוואות הומוגניות $X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ הוא אחד מהפתרונות המערכת.

② אם $m<n$, אז בהכרח המשלים של קבוצת הפתרונות של המערכת יש לפחות רכיב אחד.

הוכחה: תהי R מטריצה מדורגת מצומצמת המתקבלת מ-A ע"י תהליך הדירוג. אז קבוצות הפתרונות של מ"מ $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ו- $Rx=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ זהות.

מספר האיברים המובילים של R קטן או שווה ל-m, ולכן הוא קטן ממש מ-n.

לכן ב-R יש עמודה ללא איבר מוביל, ולכן, למערכת המשוואות יש משתנה חופשי. (אז יש רכיב ואינסוף פתרונות)

(2)

טענה: תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך שלמערכת המשוואות $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

קיים פתרון יחיד. אז A הפיכה.

הוכחה: תהי R מטריצה מדורגת מצומצמת המתקבלת מ-A ע"י תהליך

הדירוג. אז למערכת המשוואות $Rx=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

אז נניח כי A שאינה הפיכה, אז $R\neq I_n$.

מכאן, לפי למה 2 (מהשיעור הקודם) מספר העמודות המובילות של R

קטן ממש מ-n.

לכן, ב-R יש עמודה ללא איבר מוביל,

ולכן, למערכת המשוואות $Rx=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ יש יותר מפתרון אחד.

זו סתירה, ולכן A הפיכה.

3

טענה: יהיו $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש- $BA=I_n$, אז A ו-B הופכיות זו לזו. (כלומר גם $AB=I_n$)

הוכחה: יהי $x\in \mathbb{R}^n$ פתרון של מערכת המשוואות $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

מכאן,
$$x = I_n x = (BA)\cdot x = B\cdot Ax = B\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

לפיכך, למערכת המשוואות $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

אז לפי טענה 2 המטריצה A הפיכה.

נסמן ב- C את המטריצה ההופכית של A, כלומר $CA=AC=I_n$.

לפי טענה שראינו בעבר, אנו מסיקים כי $B=C$ וגם A ו-B הופכיות זו לזו.

4

טענה: תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך שלכל $b\in\mathbb{R}^n$ למערכת המשוואות $Ax=b$ קיים פתרון. אז A הפיכה.

הוכחה: נסמן ב- R את המטריצה המדורגת המצומצמת שמתקבלת מ- A ע"י תהליך הדירוג.

נניח בשלילה כי A אינה הפיכה, אז $R\neq I_n$.

לפי למה 2, מספר האיברים המובילים של R קטן ממש מ- n.

לכן, ב- R יש שורה ללא איבר מוביל, כלומר השורה האחרונה של R היא שורת אפסים.

קיימת מטריצה הפיכה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש $R=PA$.

לכן, קיימת $Q\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ הופכית ל- P.

נגדיר: $b=Q\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

יהי $x\in\mathbb{R}^n$ פתרון של מערכת המשוואות $Ax=b$, אז

$$Rx=PAx=P(Ax)=Pb=P\left(Q\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)=PQ\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=I_n\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

מאחר שהשורה האחרונה של R היא שורת האפסים, הקואורדינטה האחרונה של Rx היא 0. סתירה

מכל אחד נובעות האחרות,

משפט סיכום

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, אז ארבעת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. A הפיכה
2. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ למערכת המשוואות $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
3. למערכת המשוואות $AX=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.
4. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ למערכת המשוואות $Ax=b$ קיים פתרון.

הוכחה: נוכיח כי

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, Rightarrow] & \\ & 2 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ 3 \arrow[uur, Rightarrow] & & 4 \arrow[uul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

$1 \Rightarrow 2$ - טענה 1

$2 \Rightarrow 3$ - ברור

$2 \Rightarrow 4$ - ברור

$3 \Rightarrow 1$ - טענה 2

$4 \Rightarrow 1$ - טענה 4