כעת, נציב $a=-1,\ b=1$ בבינום של ניוטון.

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\binom{n}{k}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots$$

מסקנה:

מספר תתי-הקבוצות של $[n]\neq 0$ בגודל זוגי שווה למספר תתי-הקבוצות של $[n]$ בגודל אי-זוגי.

$n=7:\quad \binom{7}{0}+\binom{7}{2}+\binom{7}{4}+\binom{7}{6}=\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}$ ← נכון גם בגלל סימטריה

$n=6:\quad \binom{6}{0}+\binom{6}{2}+\binom{6}{4}+\binom{6}{6}=\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{5}$ ← סימטריה לא קשורה.

הוכחה שונה למסקנה:

תהי $A\neq\emptyset$ קבוצה בגודל n. קיים $a\in A$.

נגדיר: $F_1=\{B\subseteq A \mid \text{זוגי } |B|\}$,

$$F_2=\{B\subseteq A \mid \text{אי-זוגי } |B|\}$$

נגדיר: $f: F_1 \to F_2$ לכל $B \in F_1$

$$f(B) = \begin{cases} B \setminus \{a\} & \text{אם } a \in B \\ B \cup \{a\} & \text{אם } a \notin B \end{cases}$$

מוסיף / מחסיר איבר —

נשים לב: אם $|B|$ זוגי אז $|f(B)|$ אי"ז

$$f(f(B)) = B$$

$$\Downarrow$$

f הפיכה

$$\Downarrow$$

f חח"ע ועל

$$\Downarrow$$

$$|F_1| = |F_2|$$

הכללה לנוסחאות הבינום:

$$(a+b+c)^{17} = \dots + \boxed{?}\, a^3 b^6 c^8 + \dots \boxed{?}\, a^2 b^{11} c^4$$

מה המקדם של המחובר $a^3 b^6 c^8$?

השאלה הזאת שקולה לשאלה: בכמה דרכים ניתן לצבוע בשורה

3 a-ים, 6 b-ים, 8 c-ים?

אך זה אנחנו יודעים להשיב! $\binom{17}{3,6,8} = \frac{17!}{3!\,6!\,8!}$

נוסחאות המולטינום:

$$(x_1+x_2+x_3+\dots+x_n)^m=\sum_{\substack{k_1,k_2,\dots k_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ k_1+k_2+\dots+k_n=m}}\binom{m}{k_1,k_2,\dots k_n}\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ \dots\ \cdot x_n^{k_n}$$

(*) נציב $x_1=x_2=\dots=x_n=1$, נקבל:

$$n^m=\sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=m\\ k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}\binom{m}{k_1,k_2,\dots,k_n}$$

- פרשנות קומבינטורית לצביעות.

בעיית הבקניות

כמו בעיית התור בקולנוע. - (כרטיס עולה שקל, יש אנשים עם שקל ואנשים עם שנקל.)

2 מוזמנים: A, B 2n פתקים.

כמו מספר הסדרות המאוזנות של n סוגריים שמאליים וn ימניים.

$( ))(( )$ לא מאוזן

$( )(( ))$ מאוזן

על n פתקים רשום A.

על n פתקים כתוב B.

בכמה דרכים ניתן לסדר את הפתקים בשורה כך שבכל רישה אהבת

משמאל לימין, A לעולם לא מוביל $(\#B\geq\#A)$

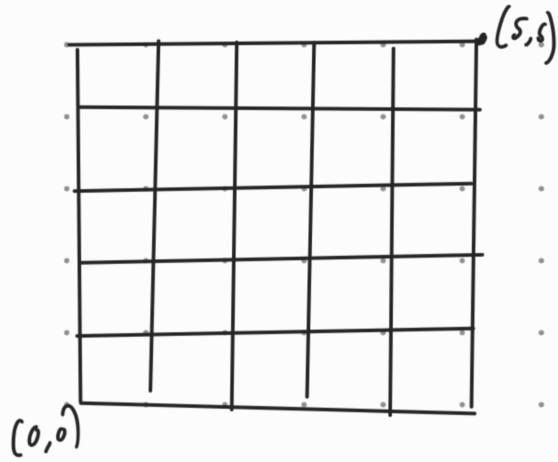
דרך אחרת להציג את הבעיה

$$A=\left\{a\in\{-1,1\}^{2n}\ \middle|\ \sum_{i=1}^{2n}a_i=0\right\}$$

נתעניין בקבוצה B הקבוצה כאשר:

$$B=\left\{a\in A\ \middle|\ \forall k\in[2n]\ \sum_{i=1}^{k}a_i\leq 0\right\}$$

3 דחק טוחנת - בדיית הסכום



בכמה דרכים ניתן להגיע מ- (0,0) ל- (5,5) בעזרת צעדים ימינה ולמעלה בלבד? $\binom{10}{5}$

ובאופן כללי מ- (0,0) ל- (n,n)? מס' הדרכים $\binom{2n}{n}$

נוסיף דרישה בכל שלב: # ימינה $\leq$ # למעלה

$\Leftrightarrow$ אסור לעלות מעל לאלכסון הראשי

$\Leftrightarrow$ אסור לגעת בישר $y=x+1$

<u>נסמן:</u>

A - סט המסלולים מ- (0,0) ל- (n,n). $|A|=\binom{2n}{n}$

B - המסלולים ב-A שאינם עולים מעל לאלכסון הראשי

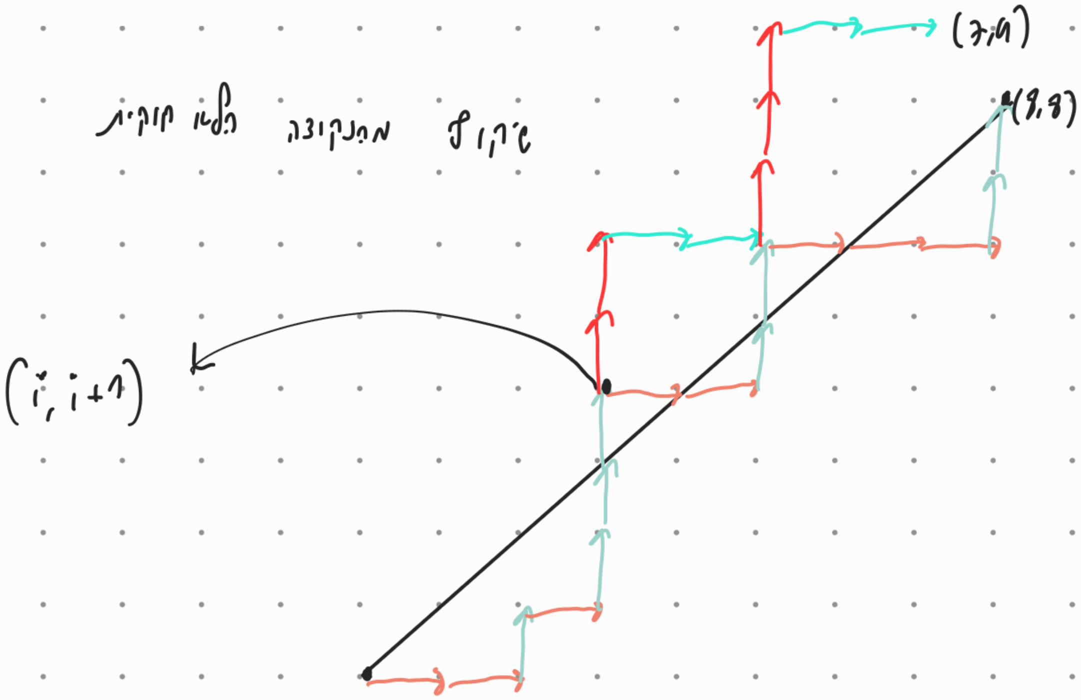
C - המסלולים ב-A שעולים מעל לאלכסון הראשי.

$$B=A\setminus C$$

$$C\subseteq A$$

$$\Downarrow$$

$$|B|=|A|\setminus|C|$$



D - סך המסלולים מ- $(0,0)$ אל $(n-1,n+1)$ $\qquad |D| = \binom{2n}{n-1}$

נתאר $f: C \to D$

יהי $a \in C$. נניח שהנק' $(i,i+1)$ היא הנק' הראשונה שבה a עולה מעל האלכסון הראשי.

נעביר את a למסלול הבא:

עד לנק' $(i,i+1)$ ללא שינוי והמשך כל צעד ימינה נחליף במעלה
וכל צעד למעלה נחליף בימינה

ולכן מגיע $f(a) \in D$.

כשהמסלול הגיע לנק' $(i,i+1)$, נשאר בה נותרו $n-i$ צעדים ימינה
$n-i-1$ צעדים למעלה

אחרי ההפעלה של f נותרו $n-i-1$ צעדים ימינה
$n-i$ צעדים למעלה

ליון צעד 2

$$(i+n-i-1,\ i+1+n-i) = (n-1,\ n+1)$$