מספרים רציונליים

דוגמה טו:

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$R = \{((m_1,n_1),(m_2,n_2)) \mid m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot m_1\}$$

$$((1,3),(-2,-6)) \in R$$

נוכיח שזהו יחס שקילות:

1 רפלקסיביות: בהינתן $(m_1,n_1) \in A$

$$((m_1,n_1),(m_1,n_1)) \in R$$
$$\Leftrightarrow$$
$$m_1 \cdot n_1 = n_1 \cdot m_1$$

✓

2 סימטריה: נניח $((m_1,n_1),(m_2,n_2)) \in R$

אז נובע

$$m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$
$$\Leftarrow$$
$$m_2 \cdot n_1 = m_1 \cdot n_2$$
$$\Leftarrow$$
$$((m_2,n_2),(m_1,n_1))$$

3 טרנזיטיביות: נניח:

$$(*)\begin{cases} m_1 n_2 = m_2 n_1 \Leftarrow ((m_1,n_1),(m_2,n_2)) \in R \\ m_2 n_3 = m_3 n_2 \Leftarrow ((m_2,n_2),(m_3,n_3)) \in R \end{cases}$$

$$m_1 n_2 m_2 n_3 = m_2 n_1 m_3 n_2 \quad / : n_2 \neq 0$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot n_3 = m_2 \cdot n_1 \cdot m_3$$

אם $m_2 \neq 0$ נחלק בו ונקבל:

$$m_1 n_3 = n_1 m_3$$
$$\Downarrow$$
$$((m_1,n_1),(m_3,n_3))$$

אם $m_2 = 0$ נובע בהכרח מ- (*)

$$m_1 = m_3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$m_1 n_3 = m_3 n_1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$((m_1,n_1),(m_3,n_3))$$

דוגמאות:

A - אוסף כל הקבוצות הספירות

$$R = \{(B,C) \mid f: B \to C \text{ קיימת חח"ע ועל.}\}$$ = קבוצות באותו גודל.

יחס סדר חלקי

בהינתן יחס R על קבוצה A, נאמר ש- R הוא יחס סדר חלקי, אם R רפלקסיבי, אנטי - סימטרי, וטרנזיטיבי.

במקרה זה נאמר ש- A היא קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).

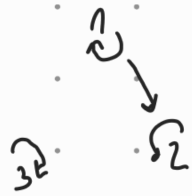
דוגמאות:

$$A = \{1,2,3\}$$

(1) יחס הזהות:

1,2,3 הם מקסימליים וגם מינימליים

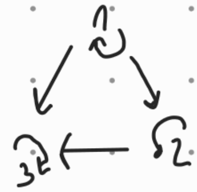
(2)



מקסימליים 3,2

מינימליים 3,1

(3)



מקסימלי 3

מינימלי 1

(4)

מקס: 3,2

מינ: 1

(5) $R = \{(x,y) \mid x \leq y\}$

(6) S קבוצה כלשהי $A = P(S)$

(יחס ההכלה)

מינ: $\emptyset$

מקס: S

יחס סדר קווי

<u>הגדרה</u>: יחס סדר חלקי המקיים כי לכל $x,y \in A$ מתקיים

$(x,y) \in R$ או $(y,x) \in R$ יקרא יחס סדר קווי.

איבר מינימלי ומקסימלי

<u>הגדרה</u>: נניח R יחס סדר חלקי על A

$x \in A$ יקרא מקסימלי אם לכל $y \in A$,

אם $(x,y) \in R$ אז בהכרח $x=y$.

(במילים אחרות, לא קיים $y \in A$ כך ש $x \neq y$ המקיים $(x,y) \in R$.

(מ- x לא יוצא חץ שאינו ל- x עצמו)

מוסכמה:

R יחס סדר חלקי

$(a,b) \in R$

ש

$a <_R b$

ראש החץ

תחתית החץ

$x\in A$ יקרא מינימלי אם לכל $y\in A$ אם $(y,x)\in R$ בהכרח $y=x$.

ש(לא נכנס חץ אלא התחיל ב-x).

דיאגרמת הסה

נאמר שזוג $(x,y)\in R$ זוג נחוץ בדיאגרמה אם $x\neq y$ וגם

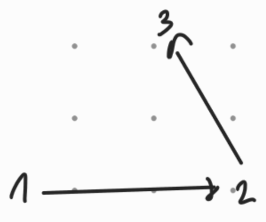
$$\forall z\in A \qquad (x,z),(z,y)\in R$$
$$\Downarrow$$
$$z=x \quad \text{או} \quad z=y$$

הגדרה: דיאגרמת הסה היא דיאגרמה בה לכל איבר ב-A מתאימה נקודה, ולכל זוג סדור $(x,y)\in R$ אם (x,y) זוג נחוץ, אז נצייר חץ מ-x אל y.

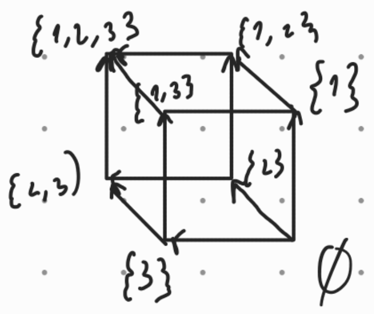
(כדי למנוע זהות, כל חיצי טרנזיטיביות)

דוגמאות:

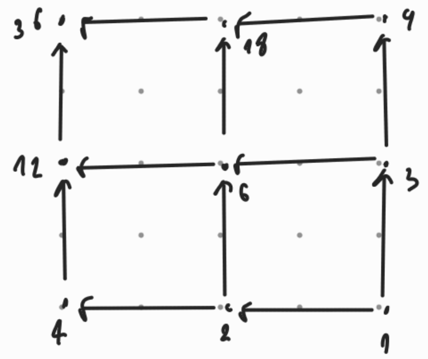
① $A=\{1,2,3\}$ עם היחס $\leq$:



② $A=P(\{1,2,3\})$ עם יחס ההכלה



$A=\{x\in\mathbb{N} \mid x|36\}$ היחס "מחלק את" $= R$ (3)



__טענה:__ יהי R יחס סדר קווי על A אז קיים

ב- A לכל היותר איבר מינימלי (מקסימלי) אחד.

__הוכחה:__ נניח בשלילה קיימים $x,y\in A$ מינימליים כך ש- $x\neq y$,

$x<_R y$

R קווי ולכן או ש- $(x,y)\in R$ $\Leftarrow$ סתירה ל- y מינימלי

$y<_R x$

או ש- $(y,x)\in R$ $\Leftarrow$ סתירה ל- x מינימלי