טענה

לכל סדרה קיימת תת-סדרה מונוטונית.

הוכחת הטענה:

נתבונן בקבוצה $I=\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \ge a_k \ \forall k>n\}$. בהכרח מתקיים:

(I אינה חסומה) או (I חסומה)

נראה שאם I לא חסומה אז קיימת תת"ס יורדת.

ואם I חסומה אז קיימת תת"ס עולה.

- נניח ש-I אינה חסומה. הוכחנו בשיעור שעבר שקיימות תת"ס עולה ממש של אברים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ שכל איבריה ב-I. מהגדרת I, $a_{n_{k+1}} \le a_{n_k}$, כלומר $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת"ס יורדת.
- נניח ש-I חסומה אז קיים N כך שלכל $n>N$ $a_n \notin I$.

נבחר את $n_1 = N+1$. $n_1 \notin I$ ולכן קיים $n_2>n_1$ כך ש-$a_{n_2}>a_{n_1}$.

ומפני ש-$n_2>n_1>N$ גם $n_2\notin I$ ולכן קיים $n_3>n_2$ כך ש-$a_{n_3}>a_{n_2}$

מהיותו n_k המקיים $N<n_k$, קיים $n_{k+1}>n_k$ כך ש-$a_{n_{k+1}}>a_{n_k}$

בנינו סדרה עולה ממש של אינדקסים (n_k) כך שלכל k $a_{n_{k+1}}>a_{n_k}$

כלומר היא תת"ס עולה.

משפט בולצאנו - ויירשטראס

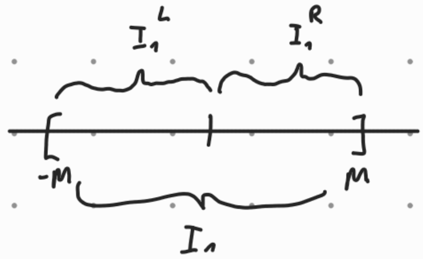
לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

הוכחת המשפט ver 1.0

כבר עתה הוכחנו שקיימת תת סדרה (a_{n_k}) מונוטונית. מכיוון שהסדרה חסומה גם תת-הסדרה חסומה, והוכחנו שכל סדרה מונוטונית חסומה מתכנסת.

הוכחת המשפט ver 2.0

נתון שהסדרה חסומה. לכן קיים $0<M$ כך ש- $-M<a_n<M$ לכל n



החלוקה מוזרה ולא ממש מפורשת כי זה עובד לקבוצות לא סופיות.

נגדיר $J_1^R=\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_1^R\}$, $J_1^L=\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_1^L\}$

נגדיר
$$I_2=\begin{cases} I_1^L & J_2^L \text{ לא חסומה} \\ I_1^R & \text{אחרת} \end{cases}$$

הקטע I_2 מקיים את התכונות הבאות:

$I_2\subseteq I_1$, אורכו מחצית מ- I_1, $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_2\}$ אינה חסומה.

נניח שקיבלנו $\underbrace{I_k}_{\text{קטע סגור}}$ כך ש- $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_k\}$ אינה חסומה.

באותו אופן נבחר קטע סגור I_{k+1} כך שהדברים יתקיימו.

באופן אינדוקטיבי בנינו סדרת קטעים סגורים (I_k) כך ש-

- $I_{k+1} \subseteq I_k$ לכל k.
- אורך הקטע ה-$k+1$ שווה לאורך הקטע הראשון חלקי 2^k
- $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \in I_k\}$ קבוצה לא חסומה.

מהלמה של קנטור, קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ יחיד שמקיים $\alpha\in I_k$ לכל k.

נוכיח כי α הוא גבול חלקי של הסדרה. נשתמש בקריטריון שהוכחנו.

בהינתן $\varepsilon>0$ קיים k מספיק גדול כך ש- $I_k \subset (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$

ולכן $\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in I_k\} \subset \{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\}$

ולכן $\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\}$ אינה חסומה ולכן α גבול חלקי של (a_n)