חשבון אינפיניטסימלי 1

<u>ביבליוגרפיה:</u>
- 3/3 מ"לפב (חשבון אינפיניטסימלי)
- מ"ק הנמן (" ")
- רשימות של רז קופרמן
- הקלטות מפונצות מ 2020

פרק ראשון: המספרים הממשיים

הגדרה: <u>המספרים הממשיים</u> הם שדה סדור ושלם.

נסמן את קבוצת הממשיים באות $\mathbb{R}$.

הגדרה:
- <u>שדה</u> הוא קבוצה שיש בה לפחות שני איברים.
  לאחד מהם קוראים אפס - 0.
  לאחר קוראים אחד - 1.
- על איברי השדה מוגדרות שתי פעולות בינאריות
  (2 - מקומיות): חיבור וכפל.

כלומר לכל $a,b\in\mathbb{R}$: • קיים $c\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $a+b=c$

• קיים $d\in\mathbb{R}$ יחיד כך ש- $a\cdot b=d$

הפעולות הללו מקיימות 9 תכונות:

(A1): חיבור מקיים את חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ $\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

(A2): חיבור מקיים את חוק החילוף (קומוטטיביות)

לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad a+b=b+a$

(A3): 0 איבר אדיש לחיבור.

לכל $a\in\mathbb{R}$ $\quad a+0=0+a=a$

(A4): קיום מספר נגדי.

לכל $a\in\mathbb{R}$ קיים איבר בשדה שנסמן ב- $(-a)$

כך ש- $a+-a=0$

(D) חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות)

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ $\quad a(b+c)=ab+ac$

(M1): כפל מקיים את חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ $(ab)c = a(bc)$

(M2): חיבור מקיים את חוק החילוף (קומוטטיביות)

לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $a\cdot b = b\cdot a$

(M3): 1 איבר אדיש לכפל.

לכל $a\in\mathbb{R}$ $a\cdot 1 = 1\cdot a = 1$

(M4): קיום מספר הופכי.

לכל $a\in\mathbb{R}$ $a\neq 0$ (!!!) קיים איבר בשדה

שנסמן ב- a^{-1} כך ש- $a\cdot a^{-1} = 1$

הערות:

- פעולת <u>החיסור</u> מוגדרת באופן הבא:

  לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $a-b = a+(-b)$

- פעולת <u>החילוק</u> מוגדרת באופן הבא:

  לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $b\neq 0$ $\frac{a}{b} = a\cdot b^{-1}$

שתי אקסיומות "נסתרות" - הלימה בין סימן השוויון לפעולות.

(E1) לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ אם $a=b$ אז $a+c=b+c$

(E2) " " " " " $a\cdot c=b\cdot c$

דוגמא 3 לשדה

יש רק 2 איברים $\{0,1\}$. לשדה זה קוראים $\mathbb{F}_2$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

טענה: זה שדה.

הוכחה: מוודאים את כל התכונות אחת אחת.

משפט

לכל $p,q,r\in\mathbb{R}$, $p\neq 0$, קיים $x\in\mathbb{R}$ יחיד המקיים:

$$p\cdot x+q=r$$

הוכחה

נוכיח תחילה קיום פתרון.

נראה ש- $x = p^{-1}(r+(-q))$ פותר את המשוואה.

$$p(p^{-1}\cdot(r+(-q))) + q \overset{(M1)}{=}$$

$$(pp^{-1})(r+(-q)) \overset{(M4)}{=}$$

$$1\cdot(r+(-q)) + q \overset{(M3)}{=}$$

$$(r+(-q)) + q \overset{(A1)}{=}$$

$$r + ((-q)+q) \overset{(A4)}{=}$$

$$r + 0 \overset{(A3)}{=} r$$

כעת נוכיח יחידות. נראה שאם קיימים 2 פתרונות למשוואה,

הם שווים. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש- $\begin{cases} px+q = r \\ py+q = r \end{cases}$

מטרנזיטיביות שוויון:

$$px+q = py+q$$

$$\Downarrow (E1)$$

$$(px+q)+(-q) = (py+q)+(-q)$$

$$\Downarrow (A1)\ (A4), (A3)$$

$$px = py$$

$$\Downarrow p \neq 0, (E2)$$

$$p^{-1}(px) = p^{-1}(py)$$

$\Downarrow$ (m1), (m4), (m3)

$x = y$