תכונות של שדות (המשך)

(1) יהי $d \in \mathbb{F}$ כך ש- $a+d=a$ לכל $a \in \mathbb{F}$ אז $d=0_{\mathbb{F}}$.

(2) יהי $a,b \in \mathbb{F}$ כך ש- $a+b=0_{\mathbb{F}}$ אז $b=-a$.

הוכחה:

$$b \underset{(3)}{=} b+0 \underset{(4)}{=} b+(a+(-a)) \underset{\substack{(2)\\ \text{אסוציאטיביות}}}{=} (b+a)+(-a) \underset{(1)}{=} (a+b)+(-a) \underset{\text{נתון}}{=} 0+(-a) \underset{(1)}{=} (-a)+0 \underset{(3)}{=} -a$$

(3) יהי $a \in \mathbb{F}$ כך ש- $a+a=a$, אז $a=0$.

הוכחה:

$$a \underset{(3)}{=} a+0 \underset{(4)}{=} a+(a+(-a)) \underset{(2)}{=} (a+a)+(-a) \underset{\text{נתון}}{=} a+(-a) \underset{(4)}{=} 0$$

(4) לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a \cdot 0 = 0$.

הוכחה:

$$a \cdot 0 \underset{(3)}{=} a \cdot (0+0) \underset{(9)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$$

לפי תכונה 3 שלנו מקבלים כי $a \cdot 0 = 0$

n-יות בשדות

יהי $\mathbb{F}$ שדה. נגדיר $\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ \text{לכל } 1 \le i \le n \quad x_i \in \mathbb{F} \right\}$

נגדיר חיבור וכפל בסקלאר ב- $\mathbb{F}^n$ באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c x_1 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$

☆ כל ההגדרות, הטענות והמשפטים מפרק 1 תקפות כאשר מחליפים את $\mathbb{R}$ ב- $\mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה כלשהו.

מרחב וקטורי

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

קבוצה V עם איבר מיוחד 0_V (וקטור האפס), פעולת חיבור שמתאימה לכל זוג איברים מ- V איבר נוסף מ- V, ופעולת כפל בסקלאר שמתאימה לכל איבר מ- V וכל סקלאר מ- $\mathbb{F}$, איבר נוסף מ- V,

נקראת **מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$** כאשר מתקיימות האקסיומות הבאות:

① $u+v=v+u$ לכל $u,v\in V$

② $(u+v)+w=u+(v+w)$ לכל $u,v,w\in V$

③ $v+0_V=v$ לכל $v\in V$

④ לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש- $v+(-v)=0_V$

קיבוץ כמו שדה

⑤ $(c_1\cdot c_2)\cdot v=c_1\cdot(c_2\cdot v)$ לכל $v\in V$ ולכל $c_1,c_2\in\mathbb{F}$

⑥ $1_{\mathbb{F}}\cdot v=v$ לכל $v\in V$

⑦ $(c_1+c_2)\cdot v=c_1\cdot v+c_2\cdot v$ לכל $v\in V$ ולכל $c_1,c_2\in\mathbb{F}$

⑧ $c\cdot(v_1+v_2)=c\cdot v_1+c\cdot v_2$ לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $c\in\mathbb{F}$

דוגמאות:

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1) $\mathbb{F}^n$, $0_{\mathbb{F}^n}=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$, חיבור וכפל בסקלר "כרגיל".

2) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $0_{M_{m\times n}(\mathbb{F})}=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}} & \cdots & 0_{\mathbb{F}}\\ \vdots & & \\ 0_{\mathbb{F}} & \cdots & 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$

חיבור וכפל בסקלר מוגדרים באופן הבא:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$c\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cdot a_{11} & \cdots & c\cdot a_{1n} \\ \vdots & & \\ c\cdot a_{m1} & \cdots & c\cdot a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\{0_{\mathbb{F}}\} \cup \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid n = 0,1,2,\dots \quad \text{לכל } 0\le i\le n \quad a_i \in \mathbb{F},\ a_n \neq 0\} \qquad (3)$$

$$\| $$

$$\mathbb{F}[x]$$

המעלה של הפולינום $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$

מוגדרת כ- n ומסומנת כ- $\deg P$.

בנוסף נגדיר $\deg 0_{\mathbb{F}} = -1$

$$0_{\mathbb{F}[x]} = 0_{\mathbb{F}}$$

חיבור של פולינומים מוגדר ע"י חיבור המקדמים לפי החזקות דומות. עבור $n \geq m$

$$(a_0 + a_1x + \dots a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) =$$

$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_m+b_m)\cdot x^m + a_{m+1}\cdot x^{m+1} + \dots + a_nx^n$$

כפל בסקלר של פולינומים מוגדר באופן הבא:

$$c(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = ca_0 + ca_1x + \dots + ca_n\cdot x^n$$

4) תהי $S \neq \emptyset$ קבוצה.

$\mathbb{F}^S = \{f: S \longrightarrow \mathbb{F}\}$ (קבוצה של כל הפונקציות מ-S ל-$\mathbb{F}$)

$0_{\mathbb{F}^S}: S \longrightarrow \mathbb{F}$ מוגדרת ע"י $0_{\mathbb{F}^S}(s) = 0_{\mathbb{F}}$ לכל $s \in S$

* חיבור של $f, g: S \longrightarrow \mathbb{F}$ מוגדר באופן הבא:

$f+g: S \longrightarrow \mathbb{F}$ $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$ לכל $s \in S$

* כפל של h $f: S \longrightarrow \mathbb{F}$ בסקלאר $c \in \mathbb{F}$ מוגדר באופן הבא:

$cf: S \longrightarrow \mathbb{F}$, $(cf)(s) = c\, f(s)$ לכל $s \in S$.