פונקציות מונוטוניות

הגדרה: $f: A \to \mathbb{R}$ נקראת <u>מונוטונית עולה</u> (עולה ממש) אם לכל $x, y \in A$

$$x < y \Rightarrow f(x) \le f(y) \quad \big(f(x) < f(y)\big)$$

הגדרה: $f: A \to \mathbb{R}$ נקראת <u>מונוטונית יורדת</u> (יורדת ממש) אם לכל $x, y \in A$

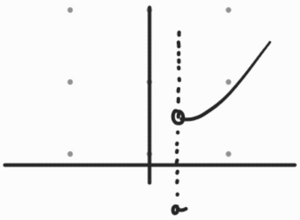
$$x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y) \quad \big(f(x) > f(y)\big)$$

דוגמאות:

1. $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ עולה ממש.
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ אינה מונוטונית.
3. $\cos: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ מונוטונית יורדת ממש.

משפט

תהי f מוגדרת בסביבה ימנית מנוקבת של a. אם f מונוטונית עולה וחסומה מלרע אז $\lim\limits_{a^+} f$ קיים.



הוכחת המשפט

תהא $(a, a+c)$ סביבה ימנית של a שבה f מוגדרת.

נתבונן בתמונה של f: $\{f(x) \mid a < x < a+c\}$. זו קבוצה לא ריקה,

וחסומה מלרע. מתכונות האינפימום בשדה סדור שלם, קיים

$m=\inf\{f(x) \mid a<x<a+c\}$. יהא $\varepsilon>0$. מתכונות האינפימום,

קיים $a<x<a+\delta$ כך ש- $f(x)<m+\varepsilon$. נקרא ל- x, $\delta+a$.

אז: $m \le f(a+\delta) < m+\varepsilon$

ולכל $x\in(a,a+\delta)$ מהמונוטוניות של f:

$$m\le f(x)\le f(a+\delta)<m+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-m|<\varepsilon$$

ולכן $\lim_{a^+} f = m$ (ובפרט) קיים.

הערה

- בצורה דומה, אם f מונוטונית עולה בסביבה שמאלית של a והיא חסומה מלעיל אז קיים $\lim_{a^-} f$.
- מונוטונית יורדת בסביבה ימנית וחסומה מלעיל.
- מונוטונית יורדת בסביבה שמאלית וחסומה מלרע.

מסקנה

אם f מונוטונית ומוגדרת בסביבה מנוקבת של a, אז $\lim_{a^+} f$ ו- $\lim_{a^-} f$ קיימים.

הוכחה:

בה"כ נניח ש- f עולה.

תהי $a<c$ בתחום ההגדרה, ממונוטוניות, בסביבה השמאלית של a,

f מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ע"י $f(c)$.

תהי $a<d$ בתחום ההגדרה, ממונוטוניות, בסביבה הימנית של a,

f מונוטונית עולה וחסומה מלרע ע"י $f(d)$.

ומהמשפט הקודם הגבולות החד-צדדיים קיימים.

מסקנה

לפונקציה מונוטונית המוגדרת בסביבה של a, אין נקודות

אי רציפות סליקה ב- a.

טענה

תהי f מונוטונית עולה מוגדרת על סביבה מלאה של a.

אזי $f(a)\le \lim_{a^+} f$

הוכחת הטענה:

נניח בשלילה כי $f(a)>\lim_{a^+} f$, אז נבחר $\varepsilon=f(a)-\lim_{a^+} f$ אז קיימת

$\delta>0$ כך שלכל $a<x<a+\delta$ $\left|f(x)-\lim_{a^+} f\right|<\varepsilon$:אז

$$f(x) < \lim_{a^+} f + \varepsilon = \lim_{a^+} f + \left(f(a) - \lim_{a^+} f\right) = f(a)$$

ולכן סתירה למונוטוניות.