למה

לכל $-1<x<1$,
$$1+x \le \exp(x) \le \frac{1}{1-x}$$

הוכחת הלמה

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) \ge 1-x$$
$$\Downarrow$$
$$\exp(x) \le \frac{1}{1-x}$$

טענה

$\exp$ רציפה ב-0. כלומר $\lim\limits_{0} \exp = \exp(0) = 1$

הוכחת הטענה:

לכל $-1<x<1$,
$$\underset{\substack{\downarrow 0\\0}}{x} = (1-x)+1 \le \exp(x)-1 \le \frac{1}{1-x}-1 = \underset{\substack{\downarrow 0\\0}}{\frac{x}{1-x}}$$

לכן משפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{0}(\exp(x)-1)=0$ ולכן $\lim\limits_{0}\exp(x)=1$

מסקנה

לכל $a\in\mathbb{R}$, $\exp$ רציפה ב-a.

הוכחת המסקנה:

$$\exp(a+x) = \exp(a)\cdot\exp(x)$$

$$\lim_{0}\exp(a+x) = \exp(a)\cdot\lim_{0}\exp(x) = \exp(a)$$

ונזכיר את הרציפות. למה?

f רציפה ב- a $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך ש- $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$f(a+x)$ רציפה ב- 0 $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך ש $|x|<\delta \Rightarrow |f(a+x)-f(a)|<\varepsilon$

למה

$\exp$ עולה ממש.

הוכחת הלמה:

יהיו $y>x$ אז:

$$\exp(y)=\exp\left(x+(y-x)\right)=\exp(x)\cdot\exp(y-x)\geq\exp(x)\left(1+(y-x)\right)>\exp(x)$$

למה

$\lim_{\infty}\exp(x)=\infty$, $\lim_{-\infty}\exp(x)=0$

הוכחת הלמה:

מיידי כי $\exp(x)\geq 1+x$. ולכן $\lim_{\infty}\exp(x)=\infty$ וגם:

$$\lim_{-\infty}\exp(x)=\lim_{-\infty}\exp(-x)=\lim_{-\infty}\frac{1}{\exp(x)}=0$$

מסקנה

$\exp:\mathbb{R}\longrightarrow(0,\infty)$ חח"ע ועל.

הגדרה: פונקציית **הלוגריתם הטבעי** היא ההופכית של exp.

$$ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

טענה

לכל $x,y>0$, $ln(x\cdot y) = ln(x) + ln(y)$

הוכחת הטענה:

מהגדרה, לכל $x\in\mathbb{R}$, $ln(exp(x)) = x$ ולכל $y\in\mathbb{R}$ $exp(ln(y)) = y$

מתקיים:

$$exp(ln(x)+ln(y)) = exp(ln(x))\cdot exp(ln(y)) = x\cdot y = exp(ln(x\cdot y))$$

ובגלל ש- exp חח"ע $ln(x)+ln(y) = ln(x\cdot y)$

הערה: באינדוקציה, לכל $x_1,\dots,x_n>0$ $ln\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$

טענה

לכל $a>0$, ולכל $r\in\mathbb{Q}$, $ln(a^r) = r\cdot ln(a)$

הוכחת הטענה:

עבור $n\in\mathbb{N}$ $r=\frac{1}{n}$ נגדיר $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt[n]{a}$.

$$ln(a) = ln\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = n\cdot ln\sqrt[n]{a} = n\cdot ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$ln\, a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} ln\, a$$

עבור $n=m\in\mathbb{N}$ ניקח $x_1=x_2=\dots=x_m=a$

$$\ln(a^m)=m\ln(a)$$

$$0=\ln(a^m\cdot a^{-m})=\ln(a^m)+\ln(a^{-m})$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(a^{-m})=-m\ln(a)$$

עבור $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ $\quad$ $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ $\quad$ אז:

$$\ln(a^r)=\ln\left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\ln(a^m)=\frac{m}{n}\cdot\ln(a)=r\ln(a)$$

הגדרה: לכל $a>0$, לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר: $a^x=\exp(x\cdot\ln(a))$

טענה

עבור $x\in\mathbb{Q}$ שתי ההגדרות מתלכדות

הוכחת הטענה:

והרי $r\in\mathbb{Q}$, הוכחנו כי $\ln a^r=r\ln(a)$

$$\Downarrow$$

$$a^r=\exp(\ln(a^r))=\exp(r\ln(a))$$