טענה

יהי $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ כאשר n אי-זוגי.

אזי קיימת נקודה שבה f מתאפסת.

הוכחת הטענה:

נסמן $M=\max\{1,2n|a_0|,\dots,2n|a_{n-1}|\}$.

נראה ש- $f(M)>0$ וכי $f(-M)<0$ ונסיק ממשפט ערך הביניים שקיימת נקודה ב- $(-M,M)$ שבה הפונקציה מתאפסת.

$$f(M)=M^n+a_{n-1}M^{n-1}+\dots+a_1M+a_0=M^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{M}+\dots+\frac{a_1}{M^{n-1}}+\frac{a_0}{M}\right)\geq$$

$$\geq M^2\left(1-\frac{|a_{n-1}|}{M}-\dots-\frac{|a_0|}{M^n}\right)\geq M^n\left(1-\frac{|a_{n-1}|}{M}-\dots-\frac{|a_0|}{M}\right)\geq$$

$$\geq M^2\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\dots-\frac{1}{2n}\right)=\frac{M^2}{2}>0$$

דרך אחרת לכתוב את זה:

$$f(k)=k^n\left(1+\frac{a_{n+1}}{k}+\dots+\frac{a_0}{k^n}\right)$$

אז קיים k מספיק גדול כך ש- $\left(1+\frac{a_{n+1}}{k}+\dots+\frac{a_0}{k^n}\right)>\frac{1}{2}$

וגם לקחת k על נתמוך ב- $f(-k)$.

$$f(-k)=(-k)^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{(-k)}+\dots+\frac{a_0}{(-k)^n}\right)$$

טענה

יהי $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ כאשר n זוגי.

אזי יש ל- f נקודת מינימום.

הוכחת הטענה:

נגדיר $M = \max\{1, 2n|a_0|, \dots, 2n|a_{n-1}|\}$. אז לכל $|x| > M$

$$f(x) = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) \geq x^n\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|^n}\right) \geq x^n\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \dots - \frac{|a_0|}{|x|}\right) \geq$$

$$\geq x^n\left(1 - \overbrace{\frac{1}{2n} - \dots - \frac{1}{2n}}^{n \text{ פעמים}}\right) = \frac{x^n}{2}$$

נסמן $b = \max\{M, 2\sqrt[n]{|f(0)|}\}$.

אז עבור $x > b$: $f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq |f(0)| \geq f(0)$

ועבור $x < -b$: $f(x) \geq \frac{x^n}{2} |f(0)| \geq f(0)$

אז לכל $|x| > b$, $f(x) \geq f(0)$.

נתבונן בקטע $[-b,b]$. מווירשטרס המינימום קיימת $c \in [-b,b]$

כך ש- $f(c) \leq f(x)$ לכל $x \in [-b,b]$. (בפרט $f(c) \leq f(0)$

ולכן $b < |x|$ $f(c) \leq f(0) \leq f(x)$

ולכן $f(c) \leq f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$

כלומר קיימת נקודת מינימום.

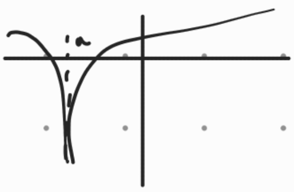
גבולות במובן הרחב:

תזכורת

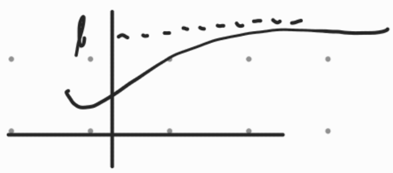
1. תהא f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a.

נאמר כי $\boxed{\lim_a f = \infty}$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$,
כך ש- $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

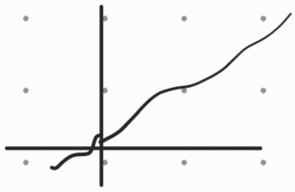
2. נאמר ש- $\boxed{\lim_a f = -\infty}$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $\delta > 0$
כך ש- $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$.



3. נאמר ש- $\boxed{\lim_\infty f = \ell} \in \mathbb{R}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך ש-
$x > M \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.



4. נאמר ש- $\boxed{\lim_\infty f = \infty}$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $K \in \mathbb{R}$
כך ש- $x > K \Rightarrow f(x) > M$.



דוגמא:

$f(x) = \frac{1}{|x|}$. צריך: $\lim_0 f = \infty$.

הוכחה: בהינתן $M > 0$, נבחר $\delta = \frac{1}{M}$ ואז $|x-0| < \delta$ אז

$$f(x) = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{\delta} = M$$