הגדרה: יהי V מ"ו, $U_1,\dots,U_k$ תת-מרחבים של V.

אז $U_1,\dots,U_k$ נמצאים **בסכום ישר** כאשר אם

$u_1\in U_1,\dots,u_k\in U$ כך ש- $u_1+\dots+u_k=0$, אז $u_1=\dots=u_k=0$.

ונסמן $U=U_1\oplus\dots\oplus U_k$

טענה.

יהי V מ"ו נ"ס, $f:V\longrightarrow V$ א"ל, $U_1,\dots,U_k$ ת"מ

f-אינווריאנטיים של V כך ש- $V=U_1\oplus\dots\oplus U_k$

$B_i=(v^i_1,\dots,v^i_{l_i})$ בסיס של U_i לכל $1\le i\le k$, אז:

$$[f]_B=\begin{bmatrix}\underbrace{[f|_{U_1}]_{B_1}}_{l_1}{}_{\}l_1} & & 0\\ & \underbrace{[f|_{U_2}]_{B_2}}_{l_2}{}_{\}l_2} & \\ 0 & & \ddots \quad \underbrace{[f|_{U_k}]_{B_k}}_{l_k}{}_{\}l_k}\end{bmatrix}$$

כאשר $B=(v^1_1,\dots,v^1_{l_1},\dots,v^k_1,\dots,v^k_{l_k})$

טענה.

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $f:V\longrightarrow V$ א"ל, $v_1,\dots,v_m$ ו"ע

של f השייכים ל- $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ כאשר $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ שונים בזוג.

אז $v_1,\dots,v_m$ בת"ל.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על m.

בסיס $(m=1)$: $v_1 \neq 0$ כי הוא ו"ע ולכן הסדרה בת"ל.

צעד: נניח כי הטענה מתקיימת עבור מספר ווקטורים קטן מ- m.

יהיו $v_1,\dots,v_m$ כמו בניסוח הטענה. לפי ההנחה, $(v_1,\dots,v_{m-1})$ בת"ל.

נניח בשלילה כי $(v_1,\dots,v_m)$ ת"ל. אז $v_m \in Span(v_1,\dots,v_{m-1})$

כלומר קיימים $a_1,\dots,a_{m-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $v_m = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$ (*)

מכאן:

$$\lambda_m \cdot v_m = f(v_m) = f(a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{m-1} \cdot v_{m-1}) = a_1 f(v_1) + \dots + a_{m-1} \cdot f(v_{m-1}) =$$

$$= a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + a_{m-1} \cdot \lambda_{m-1} \cdot v_{m-1}$$

נכפיל את (*) ב- λ_m ונחסר מהשוואה האחרונה.

$$0 = \lambda_m \cdot v_m - \lambda_m \cdot v_m = a_1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot v_1 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot v_{m-1}$$

מאחר ש- $(v_1,\dots,v_{m-1})$ בת"ל, אנו מקבלים כי:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m) = \dots = a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$$

מאחר ש- $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ לכל $1 \le i \le m-1$ אנו מסיקים כי:

$a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$, ולכן $v_m = 0$ בסתירה להיותו ו"ע.

מסקנה.

אם V מ"ו ממימד n, $f: V \to V$ ט"ל, אז ל-f יש לכל היותר n ע"ע שונים זה מזה.

למה.

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $f: V \to V$ ט"ל, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ ע"ע של f ששונים זה מזה. אז $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ נמצאים בסכום ישר.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיימים $u_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, u_k \in V_{\lambda_k}$ לא כולם 0 כך ש- $u_1 + \dots + u_k = 0$. נסמן ב- m את כמות הווקטורים מתוך $u_1, \dots, u_k$ אשר שונים מ- 0.

בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי $u_1 \neq 0, \dots, u_m \neq 0$ ושאר $u_{m+1} = \dots = u_k = 0$ מכאן $u_1 + \dots + u_m = 0$, ובנוסף, u_i הוא ו"ע לכל $1 \leq i \leq m$ אך לפי הלמה הקודמת, $u_1, \dots, u_m$ בת"ל בסתירה.

משפט

יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$, $f: V \to V$ ט"ל.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ ע"ע של f, שונים זה מזה.

$B_i = (v_1^i, \dots, v_{l_i}^i)$ בסיס של V_{λ_i} עבור כל i וגם $V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$, אז:

הסכום ישר וגם:

$$[f]_B = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}^{l_1} & & & 0 \\ & \overbrace{\lambda_2 \cdots \lambda_2}^{l_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overbrace{\lambda_k \cdots \lambda_k}^{l_k} \end{bmatrix}$$

כאשר $B = (v_1^1, \dots, v_{l_1}^1, \dots, v_1^k, \dots, v_{l_k}^k)$

אופרטורים לכסינים

הגדרה: יהי V מ"ו נ"ס, ט"ל $f: V \to V$ נקרא **לכסין** אם קיים בסיס B של V כך ש- $[f]_B$ אלכסונית.

טענה:

יהי V מ"ו נ"ס, $f: V \to V$ ט"ל. אז f לכסין

אמ"מ קיים ל- V בסיס המורכב מווקטורים עצמיים.

הוכחה:

⇐ נניח f לכסין, אזי קיימת בסיס $B=(v_1,\dots,v_n)$ כך ש-

$$[f]_B=\begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{bmatrix}$$

אזי $f(v_i)=c_i\cdot v_i$, כלומר v_i הוא ו"ע ששייך ל- c_i

⇒ נניח קיימת בסיס $B=(v_1,\dots,v_n)$ כך ש- v_i הוא וקטור עצמי ששייך ל- λ_i, אזי:

$$[f]_B=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

כלומר f לכסין.