תכונות של מרחבים וקטוריים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$

① יהי $u \in V$ כך ש- $v+u=v$ לכל $v \in V$, אז $u=0_V$

② יהיו $u,v \in V$ כך ש- $v+u=0_V$ אז $u=-v$.

③ $0_{\mathbb{F}} \cdot v = 0_V$ לכל $v \in V$

$c \cdot 0_V = 0_V$ לכל $c \in \mathbb{F}$

תת-מרחבים

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$.

תת הקבוצה U של V נקראת תת-מרחב כאשר:

① $0_V \in U$

סגירות חיבור

② יהיו $v_1, v_2 \in U$ אז $v_1+v_2 \in U$

סגירות כפל בסקלר

③ יהיו $v \in U$, ו- $c \in \mathbb{F}$, אז $c \cdot v \in V$

הערה: יהי U הינו תת-מרחב של מ"ו V,

אז U הוא מ"ו בעצמו.

הערה: אם $U \neq \emptyset$ היא תת קבוצה של מרחב וקטורי V

אשר מקיימת תנאי ③ מהגדרת תת-המרחב,

אז U מקיימת את תנאי ①.

כיון קיים $v \in U$, ואז לפי תכונה 3 מתקיים

$$0_V = 0_{\mathbb{F}} \cdot v \in U$$

דוגמאות:

1) אם V מ"ו אז $U = V$ הוא תת-מרחב.

2) אם V מ"ו אז $U = \{0_V\}$ הוא תת-מרחב.

3) אם $V = \mathbb{F}^n$ (כל ה-n-יות בשדה $\mathbb{F}$) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; x_n = 0_{\mathbb{F}} \right\}$

הוא תת-מרחב.

הוכחה:

① ברור כי $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{F}^n} \in U$

② אם $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U$, אז $y_n = 0$ וגם $x_n = 0$.

מכאן $x_n + y_n = 0$ ולפיכך $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in U$

③ אם $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U$, $c \in \mathbb{F}$, אז $x_n = 0$, ומכאן $c \cdot x_n = 0$

לפיכך:

$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix} \in U$$

הערה: אם $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \geq 0 \right\}$

אז U אינו תת-מרחב כי הוא לא סגור

ביחס לכפל בסקלר. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, $c = -1 \in \mathbb{R}$

$$c \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin U$$

הערה: אם $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1^2 = x_2^2 \right\}$

אז U אינו תת מרחב כי הוא לא סגור בחיבור:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$$

4) אם $V = \mathbb{F}[x]$ פולינומים, אז $\mathbb{F}[x]_{\leq n} = U = \{ P \in \mathbb{F}[x] \mid \deg P \leq n \}$

הוא תת מרחב. $n = 0, 1, 2, \dots$

הוכחה:

① ברור כי $0 \in \mathbb{F}[x]_{\leq n}$

② אם $p, q \in \mathbb{F}[x]_{\leq n}$ אז $\deg q \leq n$, $\deg p \leq n$, אז $\deg(p+q) \leq n$

וכן $p+q \in \mathbb{F}[x]$

③ יהי $p \in \mathbb{F}[x]_{\le n}$, $0 \ne c \in \mathbb{F}$, אז $\deg(c \cdot p) = \deg p \le n$

ולכן $c \cdot p \in \mathbb{F}[x]$.

דוגמה: יהי $V = \mathbb{F}[x]$, $U = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid \deg p = 2\} \cup \{0\}$

אז U אינו תת-מרחב כי הוא לא סגור בחיבור:

$p = x^2 + x,\ q = -x^2 \in U$ $\quad p + q = x \notin U$

למה

תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, אז

① $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$ לכל $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^n$

② $A(cv) = c \cdot (Av)$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$, $c \in \mathbb{F}$

הוכחה: תרגיל ☹

טענה:

תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

אז $U = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה:

① ברור ש- $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in U$

② יהיו $x,y\in U$, ו- $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$, $Ay=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ לפי הלמה:

$$A(x+y)=Ax+Ay=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

לכן $x+y\in U$

③ יהיו $x\in U$, $c\in\mathbb{F}$, אזי $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ומהלמה

$$A(cx)=c\cdot Ax=c\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

ולכן $cx\in U$.

טענה:

יהיו U_1, U_2 תת מרחבים של מ"ו V,

אזי $U_1\cap U_2$ גם תת-מרחב של V.

הוכחה:

① $0_V\in U_1$, $0_V\in U_2$ $\Leftarrow$ $0_V\in U_1\cap U_2$

② יהיו $v_1,v_2\in U_1\cap U_2$, אזי $v_1\in U_1$, $v_2\in U_1$, $v_1\in U_2$, $v_2\in U_2$

מכיוון $v_1+v_2\in U_2$, $v_1+v_2\in U_1$.

לפיכך, $v_1+v_2 \in U_1 \cap U_2$

③ אם $v \in U_1 \cap U_2$, $c \in \mathbb{F}$ אז $v \in U_2$, $v \in U_1$

מכאן $cv \in U_2$, $cv \in U_1$

לכן, $cv \in U_1 \cap U_2$

<u>טענה:</u>

אם במרחב וקטורי V נתון אוסף כלשהו של תתי-מרחבים,

אז החיתוך של כולם תת-מרחב.

<u>פרוש</u>

S תת-קבוצה של V.

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. $S \subseteq V$.

נגדיר הפרוש של S (מסומן $\text{span}\, S$) כחיתוך של כל

תתי-המרחבים של V שמכילים את S.

כלומר תת המרחב <u>הקטן ביותר</u> שמכיל את

כל הווקטורים ב-S.