בסיס

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

* קבוצה/סדרה של וקטורים מ-V נקראות **פורשת** במושג הכרגיל אם שווה ל-V.

* קבוצה/סדרה של וקטורים מ-V נקראות **בלתי-תלויה לינארית** במושג היא לא תלויה לינארית.

* סדרה $(v_1, \ldots, v_n)$ של וקטורים מ-V נקראות **בסיס** במושג היא פורשת ובלתי-תלויה לינארית (בו"ז).

דוגמא:

$V = \mathbb{F}^n$ $\quad$ $(e_1, \ldots, e_n)$ בסיס של $\mathbb{F}^n$.

* בסיס זה של $\mathbb{F}^n$ נקרא **הבסיס הסטנדרטי**.

(טענה

יהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^m$

נסמן ב-$A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ את המטריצה כך שהעמודה ה-j שלה היא v_j.

אז $(v_1,...,v_n)$ היא בסיס של $\mathbb{F}^m$

אמ"מ לכל $b\in\mathbb{F}^m$ למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

הוכחה

1) $(\Rightarrow)$ נניח כי לכל $b\in\mathbb{F}^m$ למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

אז בפרט נכון עבור $b=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

אז לפי הטענה שכתבנו $(v_1,...,v_n)$ בת"ל.

יהי $b\in\mathbb{F}^m$. מאחר שלמערכת $Ax=b$ קיים פתרון,

מתקיים $\operatorname{Span}(v_1,...,v_n)=\{Ax \mid x\in\mathbb{F}^n\}\ni b$.

לכן, $\operatorname{Span}(v_1,...,v_n)=\mathbb{F}^m$

כלומר $(v_1,...,v_n)$ פורשת. לפיכך $(v_1,...,v_n)$ בסיס.

2) $(\Leftarrow)$ נניח כי $(v_1,...,v_n)$ בסיס.

יהי $b\in\mathbb{F}^m$. מאחר ש- $(v_1,...,v_n)$ פורשת, מתקיים:

$$\{Ax \mid x\in\mathbb{F}^n\}=\operatorname{Span}(v_1,...,v_n)=\mathbb{F}^m$$

מכאן, $b\in\{Ax \mid x\in\mathbb{F}^n\}$

כלומר למערכת $Ax=b$ קיים פתרון.

יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{F}^n$ פתרונות של $Ax=b$, כלומר

$Ax_1 = b$ וגם $Ax_2 = b$

מכאן, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

כלומר, $x_1 - x_2$ הוא פתרון של מערכת משוואות הומוגניות $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

מאחר ש- $(v_1, \dots v_n)$ בת"ל, למערכת זו קיים פתרון יחיד,

ולכן $x_1 - x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

לכן $x_1 = x_2$ וכך הוכחנו שלמערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

טענה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהי $(v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V.

אז לכל $v \in V$ קיימים $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ יחידים

כך ש- $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$

הוכחה

מאחר ש- $(v_1, \dots, v_n)$ פורשת, מתקיים $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$

לכן, קיימים $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$.

יהי $d_1,\dots,d_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = d_1v_1+\dots+d_nv_n$.

מכאן $c_1v_1+\dots+c_nv_n = d_1v_1+\dots+d_nv_n$

לכן $(c_1-d_1)v_1+\dots+(c_n-d_n)v_n = 0$

מאחר ש- $(v_1,\dots,v_n)$ בת"ל, צירוף לינארי זה חייב להיות טריוויאלי.

כלומר, $c_1-d_1=\dots=c_n-d_n=0$

מכאן $c_1=d_1,\dots,c_n=d_n$

כלומר, $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ מקיימים את התנאי הנדרש.

הגדרה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V,

$v\in V$, $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ כמו בטענה, אז ה-n-יה $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$

נקראת **n-יות הקואורדינטות** של v ביחס ל- B ומסומנת ב- $[v]_B$.

דוגמאות:

$V=\mathbb{R}^2$ $\quad v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

הבסיס הסטנדרטי

1) $B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, אז $1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ולכן $[v]_B = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2) $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, אז $0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ולכן $[v]_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

3) $B = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, אז $2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ולכן $[v]_B = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

תכונות ת. ירת הקואורדינאטות

1) אם $V = \mathbb{F}^n$ $B = (e_1, \dots, e_n)$ אז $[v]_B = v$

2) אם V מ"ו $B = (v_1, \dots, v_n)$ $v = v_j$ אז $[v]_B = e_j$

3) אם C בסיס מתקבל מבסיס B ע"י שינוי סדר הווקטורים, אז $[v]_C$ מתקבלת מ- $[v]_B$ ע"י שינוי סדר הקואורדינאטות המתאימים.

הערה:

אם $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של $\mathbb{F}^m$, $v \in \mathbb{F}^m$

אז כדי למצוא את $[v]_B$ צריך למצוא את הפתרון

היחיד ל $Ax=v$ כאשר $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

היא המטריצה שהעמודה ה-j שלה היא v_j.

משפט מרכזי

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $v_1,\dots,v_m\in V$, $w_1,\dots,w_n\in V$

כך ש- $w_1,\dots,w_n\in Span(v_1,\dots,v_m)$.

אם $n>m$, אז $(w_1,\dots w_n)$ תלויה לינארית.

הוכחה

לכל $1\le j\le n$ קיימים $a_{1j},\dots,a_{mj}\in\mathbb{F}$ כך ש-

$$w_j=a_{1j}v_1+\dots+a_{mj}v_m$$

נגדיר:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

מאחר ש- $n>m$, למערכת משוואות הומוגנית $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ יש פתרון $\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. אז מתקיים:

$$d_1w_1+\dots+d_nw_n=\sum_{j=1}^{n}d_jw_j=\sum_{j=1}^{n}d_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\cdot v_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\cdot d_j\cdot v_i=$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot d_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i = 0_V$$

אז קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי של $w_1, \dots, w_n$ שמשווה לוקטור 0

ולכן, $(w_1, \dots, w_n)$ תלויה לינארית.