מטריצות אלמנטריות

תהי ε פש״ו שניתן לבצע על מטריצה בעלת m שורות.

המטריצה האלמנטרית המתאימה ל- ε היא $\varepsilon(I_m)$.

דוגמאות:

1.
$$\varepsilon = R_i \leftrightarrow R_j$$

$$\varepsilon(I_m) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2.
$$\varepsilon = R_i \to cR_i$$

$$\varepsilon(I_m) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

3.
$$\varepsilon = R_i \to R_i + cR_j$$

$$\varepsilon(I_m) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & c \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

הערה

תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}$ פעולת שורה לביצוע על מטריצות בעלות m שורות. אזי $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(I_m)\cdot A$.

הוכחה:

נוכיח את הערה במקרה כי $\mathcal{E} : R_i \to R_i + cR_j$. (שאר המקרים - תרגיל)

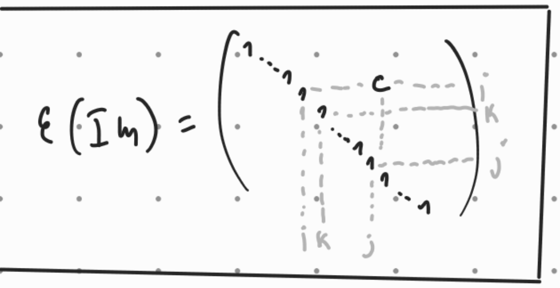
נסמן: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

תהי $M = M_{m\times n}(\mathbb{R})$. לכל $1 \le l \le n$, $1 \le k \le m$ נסמן M_{kl} את המספר המופיע בחיתוך של השורה ה-k והעמודה ה-l של M.

יהיו $1 < l \le n$, $1 \le k \le m$. אזי:

$$(\mathcal{E}(A))_{k,l} = \begin{cases} a_{kl} & \text{כאשר } k \ne i \\ a_{il} + c\cdot a_{jl} & \text{כאשר } k = i \end{cases}$$

נחשב את $(\mathcal{E}(I_m)\cdot A)_{k,l}$ אם $k \ne i$ ונקבל:



$$(\mathcal{E}(I_m)\cdot A) = \sum_{r=1}^{m} \left(\mathcal{E}(I_m)_{kr}\cdot a_{rl}\right) = (\mathcal{E}(I_m))_{kk}\cdot a_{kl} =$$
$$= a_{kl}$$

אם $k = i$:

$$(\mathcal{E}(I_m)\cdot A)_{kl} = (\mathcal{E}(I_m)\cdot A)_{il} = \sum_{r=1}^{m} (\mathcal{E}(I_m))_{ir}\cdot a_{rl} =$$

$$= \left(\mathcal{E}(I_m)\right)_{ii} \cdot a_{il} + \left(\mathcal{E}(I_m)\right)_{ij} \cdot a_{jl} = a_{il} + c a_{jl}$$

לסיכום: $\left(\mathcal{E}(I_m) \cdot A\right)_{kl} = \left(\mathcal{E}(A)\right)_{kl} = \left(\mathcal{E}(A)\right)_k$ לכל $1 \leq l \leq n$, $1 \leq k \leq m$

לכן: $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(I_m) \cdot A$.

מסקנה:

תהיינה $A,B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ שקולות שורה.

אז קיימת $P_{m \times m}(\mathbb{R})$ שמהווה מכפלה של מטריצות אלמנטריות,

כך ש- $B = PA$.

בנוסף, אם B מתקבלת מ- A ע"י סדרה של פעש"ר כלשהן,

אז P מתקבלת מ- I_m ע"י אותה סדרה של פעש"ר.

הוכחה:

נסמן ב- $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_k$ פעש"ר שבאמצעותן ניתן לקבל את B מ- A,

כלומר:

$$B = \mathcal{E}_k\left(\ldots\left(\mathcal{E}_2\left(\mathcal{E}_1(A)\right)\right)\ldots\right)$$

לכל $1 \leq i \leq k$, נסמן $E_i = \mathcal{E}_i(I_m)$, אז מתקיים:

$$B = \mathcal{E}_k\left(\ldots\left(\mathcal{E}_2\left(\mathcal{E}_1(A)\right)\right)\ldots\right) = B = \mathcal{E}_k\left(\ldots\left(\mathcal{E}_2\left(E_1 A\right)\right)\ldots\right) = \mathcal{E}_k\left(\ldots\left(E_2\left(E_1 A\right)\right)\ldots\right)$$

$$= E_k\left(\ldots\left(E_2\left(E_1 A\right)\right)\ldots\right)$$

$$= \left(E_k\left(\ldots\left(E_3\left(E_2 E_1\right)\right)\ldots\right)\right) \cdot A$$

נגדיר: $P = E_k\left(\ldots\left(E_3\left(E_2 E_1\right)\right)\right)$ ונקבל $B = PA$.

הוכחה:

$$E_k(\dots(E_2(E_1(I_m)))\dots) = E_k(\dots(E_2(E_1))\dots) = E_k(\dots(E_2E_1)) =$$

$$= E_k(\dots(E_2\cdot E_1)\dots) = P$$

דוגמא:

עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נמצא מטריצה מדורגת מצומצמת

R אשר שקולת שורה ל-A, ונמצא מטריצה $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

אשר מהווה מכפלה של מטריצות אלמנטריות כך ש- $R = P\cdot A$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = P\cdot A$$

מטריצות הופכיות

☆ מטריצות $A,B \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ נקראות הופכיות זו לזו כאשר:

$$A\cdot B = B\cdot A = I_m$$

☆ מטריצה $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ נקראת הפיכה כאשר קיימת $B \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ כך ש-
A ו-B הופכיות זו לזו.

טענה:

כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה!

בנוסף, המטריצה ההופכית של מטריצה אלמנטרית היא אלמנטרית!

הוכחה:

תהי E מטריצה אלמנטרית שמתאימה לפעולה ε.

נסמן את הפעולה האלמנטרית ההופכית ל-ε ב-δ.

נסמן D את המטריצה המתאימה ל-δ.

$$E=\varepsilon(I_m) \qquad D=\delta(I_m)$$

נוכיח כי E,D הופכיות זו לזו.

$$E\cdot D=\varepsilon(I_m)\cdot D=\varepsilon(D)=\varepsilon(\delta(I_m))=I_m$$

$$D\cdot E=\delta(I_m)\cdot E=\delta(E)=\delta(\varepsilon(I_m))=I_m$$

לכן E הפיכה וההופכית שלה (D) היא מטריצה אלמנטרית.