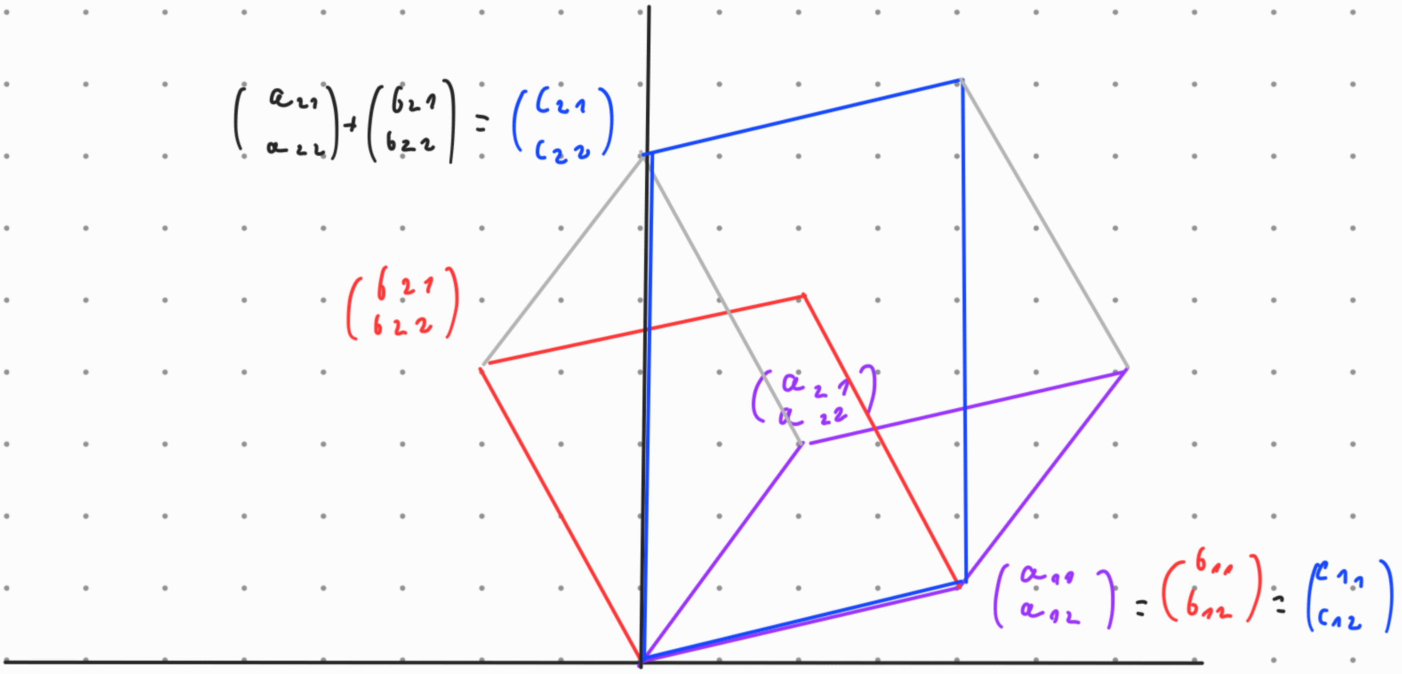
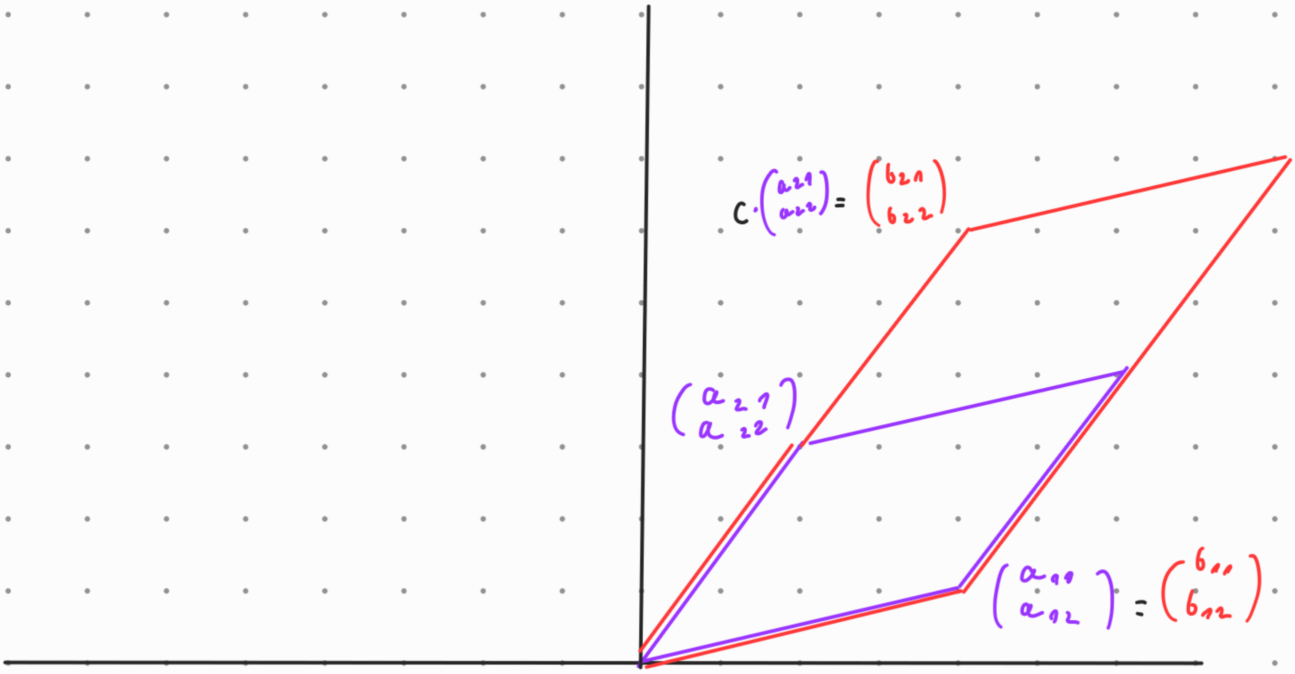
פרק III - דטרמיננטות



דרישה 1: $\blacksquare = \blacksquare + \blacksquare$



דרישה 2: $\blacksquare = c \cdot \blacksquare$

הגדרה: פונק' $D: M_{n \times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ נקראת לינ' שורתית לפי

השורה ה-i כאשר מתקיים:

1. יהיו $A,B,C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_j^A = R_j^B = R_j^C$

לכל $j \neq i$ וגם $R_i^A + R_i^B = R_i^C$,

אזי $D(A)+D(B)=D(C)$

2. יהיו $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_j^A = R_j^B$ לכל $j \neq i$

וגם $c\cdot R_i^A = R_i^B$ כאשר $c\in\mathbb{F}$, אזי $c\cdot D(A)=D(B)$

דוגמאות:

$D: M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, $D\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}$

אזי D לינארית לפי השורה ה-1.

אך D אינה לינארית לפי השורה ה-2.

$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ $c=2$ $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$D(A)=1=D(B)\neq 2D(A)$

הגדרה: פונקציה $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ נקראת מולטי-לינארית

כאשר היא לינארית לפי השורה ה-i לכל $1\le i\le n$.

דוגמא:

$D: M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ $\qquad$ $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{21}$

אז D מולטי-לינארית.

נבדוק לינאריות לפי השורה הראשונה.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(A) + D(B) = a_{11}\cdot a_{21} + b_{11}\cdot a_{21} = (a_{11}+b_{11})\cdot a_{21} = D(C)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c\cdot a_{11} & c\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$c\cdot D(A) = c\cdot a_{11}\cdot a_{21} = D(B)$$

בדומה, ניתן לבדוק את הלינאריות לפי השורה השנייה.

טענה:

יהי $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ מולטי-לינארית, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-.

$R_i^A = (0 \dots 0)$, אז $D(A) = 0$. אחת מהנקודות היא לא נוגעות הצירים,
אז השורה יוצאת קו.

הוכחה:

נניח $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_j^B = R_j^A$ לכל $j \neq i$

וגם $R_i^B = 2R_i^A$. אז $D(A) = D(B) = 2D(A)$

כי $B = A$

מכאן $D(A) = 0$

הגדרה! פונקציה $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ נקראת **מתחלפת** כאשר

לכל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ בעלת שתי שורות סמוכות זהות

מתקיים $D(A) = 0$.

הגדרה! פונקציה $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ נקראת **פונקציית נפח** כאשר

היא מולטי לינארית ומתחלפת.

דוגמא!

$D: M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$

ניתן לבדוק כי D מולטי-לינארית.

D מתחלפת כי $D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{12} - a_{12}\cdot a_{11} = 0$

למה 1

תהי $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא נפח, $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-

B מתקבלת מ-A ע"י החלפת השורה ה-i והשורה

ה-$i+1$; אז $D(B) = -D(A)$

הוכחה:

נסמן $l_i := R_i^A$ נגדיר את המטריצות הבאות:

$$A_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i + l_{i+1} \\ l_i + l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ l_i + l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{i+1} \\ l_i + l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad A = A_5 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_i \\ l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad B = A_6 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{i+1} \\ l_i \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{i+1} \\ l_{i+1} \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$0 = D(A_1) = D(A_2) + D(A_3) = \big(D(A_4) + D(A_5)\big) + \big(D(A_6) + D(A_7)\big) =$$

2 שורות סמוכות זהות

$$= \Big(\big(0 + D(A)\big) + \big(D(B) + 0\big)\Big) = D(A) + D(B)$$

ולכן $D(A) = -D(B)$