טענה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V.

$P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה.

אז קיים בסיס C של V כך ש- $P=[Id]^C_B$

הוכחה

נסמן
$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \vdots & & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

לכל $1\leq j\leq n$ נגדיר $w_j=p_{1j}\cdot v_1+\dots+p_{nj}\cdot v_n$

אז $[w_j]_B=C_j^P$

נוכיח כי $(w_1,\dots,w_n)$ מהווים בסיס של V.

קיימת
$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}$$
ההפכית ל- P.

אז לכל $1\leq k\leq n$ מתקיים:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{jk}\cdot w_j=\sum_{j=1}^{n} q_{jk}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\cdot v_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\cdot q_{jk}\right)\cdot v_i$$

$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\cdot q_{jk}$ הוא המספר שמופיע בחיתוך השורה ה-i והעמודה ה-k של $I_n=PQ$.

כלומר, 1 במקום $i=k$, ו-0 אחרת.

לכן, $$\sum_{j=1}^{n} q_{jk}\cdot w_j = 0\cdot v_1 + \dots + 1\cdot v_k + \dots + 0\cdot v_n = v_k$$

מכאן, $v_k \in Span(w_1,\dots,w_n)$ לכל $1\le k\le n$.

לסיכום $V = Span(v_1,\dots,v_n) \in Span(w_1,\dots,w_n)$

כלומר $w_1,\dots,w_n$ פורשת.

משום ש- $\dim V = n$, אלו מספיקים כי $C=(w_1,\dots,w_n)$

מהווה בסיס ל- V.

מההגדרה של w_j נובע כי $[Id]_B^C = P$

תזכורת: אם B,C בסיסים של V, $v\in V$

אז $[Id_V]_C^B \cdot [v]_B = [v]_C$

טענה

יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

B,B' בסיסים של V, C,C' בסיסים של W.

$T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית. אז:

$$[T]^{B'}_{C'} = [Id_W]^{C}_{C'} \cdot [T]^{B}_{C} \cdot [Id_V]^{B'}_{B}$$

הוכחה

$$\overset{B'}{V} \xrightarrow[Id_V]{} \overset{B}{V} \xrightarrow[T]{} \overset{C}{W} \xrightarrow[Id_W]{} \overset{C'}{W}$$

לפי המשפט של מכפלת ההרכבה, מתקיים:

$$[T]^{B}_{C} \cdot [Id_V]^{B'}_{B} = [T \circ Id_V]^{B'}_{C} = [T]^{B'}_{C}$$

כמו כן:

$$[Id_W]^{C}_{C'} \cdot [T]^{B'}_{C} = [Id_W \circ T]^{B'}_{C'} = [T]^{B'}_{C'}$$

מכאן:

$$[Id_W]^{B}_{C'} \cdot [T]^{B}_{C} \cdot [Id_V]^{B'}_{B}$$

מסקנה מרכזית

יהיו V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, B, B' בסיס של V.

$T: V \to V'$ העתקה לינארית.

אז
$$[T]_{B'}^{B'} = [Id_V]_{B'}^{B} \cdot [T]_{B}^{B} [Id]_{B}^{B'}$$

תזכורת!

מתקיים ש-
$$[Id]_{B'}^{B} = \left([Id]_{B}^{B'}\right)^{-1}$$

ניתן לרשום:

$$[T]_{B'}^{B'} = \left([Id]_{B}^{B'}\right)^{-1} \cdot [T]_{B}^{B} \cdot [Id]_{B'}^{B}$$

הגדרה: תהיינה $K, L \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

אם קיימת $P \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $L = P^{-1} K P$

אומרים כי L **דומה** ל- K.

ומסמנים $L \sim K$.

טענה

דמיון מטריצות הוא יחס שקילות.

הוכחה

1. רפלקסיביות: K דומה ל- K כי $K = I_n^{-1} \cdot K \cdot I_n$

2. סימטריה: נניח L דומה ל- K, אזי קיימת P הפיכה כך ש- $L = P^{-1} \cdot KP$.

מכאן $PLP^{-1} = P \cdot P^{-1}KPP^{-1} = K$

ולכן K דומה ל- L.

3. טרנזיטיביות: נניח M דומה ל- L, ו- L דומה ל- K, אזי קיימות מטריצות P, Q הפיכות, כך ש-

$$L = P^{-1}KP \qquad M = Q^{-1}LQ$$

מכאן:

$$M = (Q^{-1}P^{-1})K(PQ) = (PQ)^{-1} \cdot K \cdot (PQ)$$

ולכן M דומה ל- K.

טענה

יהי V מ"ו, B, B' בסיסים של V.

$T: V \to V$ ט"ל.

אז $[T]_{B'}^{B'}$ דומה ל- $[T]_B^B$

הוכחה

נסמן $P = [Id_V]_B^{B'}$ אז מתקיים

$$P^{-1} \cdot [T]_B^B \cdot P = [Id_V]_{B'}^{B} \cdot [T]_B^B \cdot [Id_V]_B^{B'} = [T]_{B'}^{B'}$$

טענה

יהי V מ"ו, B בסיס של V.

$T: V \longrightarrow V$ ה"ל. $K = [T]_B^B$, L מטריצה דומה ל- K.

אז קיים בסיס B' של V כך ש- $L = [T]_{B'}^{B'}$

הוכחה

קיימת P הפיכה כך ש- $L = P^{-1} K P$

לפי הטענה הראשונה של, קיים בסיס B' של V,

כך ש- $P = [Id_V]_B^{B'}$

אז:

$$L = \left(\left[Id_V\right]_B^{B'}\right)^{-1} \cdot \left[T\right]_B^B \cdot \left[Id\right]_B^{B'} = \left[T\right]_{B'}^{B'}$$

טענה)

יהיו $K, L \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ דומות, אז $rkK = rkL$.

הוכחה

נתבונן ב: $T_K : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ $\left(T_K(v) = Kv\right)$

נסמן ב: $B = (e_1, \dots, e_n)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

אז $\left[T_K\right]_B^B = K$

לפי הטענה הקודמת קיים בסיס B' של $\mathbb{F}^n$ כך ש-

$$L = \left[T_K\right]_{B'}^{B'}$$

מכאן $rkL = rkT_K = rkK$

מסקנה

יהיו $K, L \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ דומות, וגם K הפיכה,

אז L הפיכה.

טענה

נניח $K,L \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ דומות, אז $\det L = \det K$

הוכחה

קיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $L = P^{-1}KP$

מכאן
$$\det L = \det P^{-1} \cdot \det K \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det P \cdot \det K = \det K$$

מסקנות

נניח $\det K \neq \det L$ או $rk K \neq rk L$ אז המטריצות לא דומות.