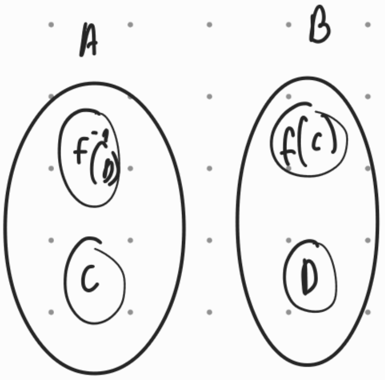
טענה: בהינתן A, B סופיות, $f: A \to B$ וכן $D \subseteq B$ $C \subseteq A$

א) $|f(C)| \le |C|$ (אוסף התמונות של C קטנה שווה ל-C)



ב) אם f חח"ע $\Leftarrow$ $|f(C)| = |C|$

ג) אם f חח"ע $\Leftarrow$ $|f^{-1}(D)| = |D|$

ד) אם f על $\Leftarrow$ $|f^{-1}(D)| \ge |D|$

ה) אם f חח"ע, $|A| = |B|$ $\Leftarrow$ f על

הוכחה של דרך השלילה:

אם f לא על, יש לפחות איבר אחד ב-B שאין לו מקור.
לכן אנחנו במצב ש-n תאים נשלחים ל-$n-1$ איברים בלבד $\Leftarrow$ סתירה לחח"ע.

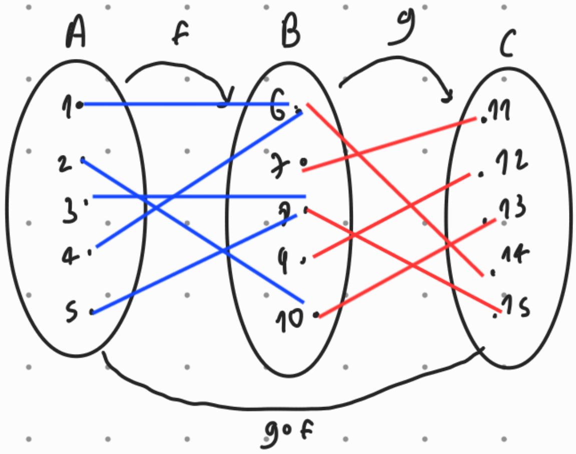
עקרון שובך היונים

ו) אם f על, $|A| = |B|$ $\Leftarrow$ f חח"ע

אם לא חח"ע, יש שני איברים שנשלחים לאותה תמונה.
נוציא שני תאים אלה ואת היונים הללו, נישאר
עם $n-2$ תאים שמכסים $n-1$ איברים ב-B, סתירה.

הרכבה של פונקציות

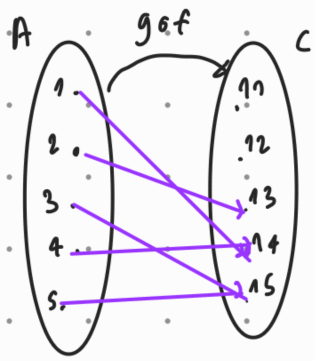
הגדרה: בהינתן קב' A,B,C ופונ' $g: B\to C$, $f: A\to B$



נגדיר את ההרכבה, של g עם f $g\circ f: A\to C$ כך

לכל $a\in A$:

$$(g\circ f)a = g(f(a))$$



פונקציית הזהות

הגדרה: בהינתן קבוצה A, $Id_A: A \to A$ כך שלכל $a \in A$

$Id_A(a) = (a)$.

הערה: בהינתן $f: A \to B$ $Id_A: A \to A$

$$f \circ Id_A : A \to B$$

$$f \circ Id_A = f$$

$$Id_B \circ f : A \to B$$

$$Id_B \circ f = f$$

פונקציה הופכית

הגדרה: בהינתן $f: A \to B$ נאמר שפונ' $g: B \to A$ היא הופכית ל f, אם:

$$f \circ g = Id_B \qquad g \circ f = Id_A$$

טענה: אם קיימת ל f הופכית אז היא יחידה, ואז נוכל לסמנה

$$\boxed{f^{-1}}$$

הערה: f הפיכה אם קיימת לה פונקציה הופכית.

משפט: תהי $f: A \to B$. פונ' f __הפיכה__ אם ורק אם __f חח"ע ועל__!

__הוכחה:__ * נניח ש- f^{-1} היא ההופכית של f.

נוכיח כי f על:

יהי $b \in B$, נגדיר $a = f^{-1}(b)$,

ומתקיים $f(a) = \underbrace{f(f^{-1}}_{Id}(b)) = b$

נוכיח כי f חח"ע:

נניח שקיימים $a_1, a_2 \in A$ כך ש

$$a_2 = a_1 \Leftarrow f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) \Leftarrow f(a_1) = f(a_2)$$

* נתון ש- f חח"ע ועל.

נבנה את f^{-1}:

יהי $b \in B$. f על, לכן קיים $a \in A$ יחיד כך ש- $f(a) = b$.

נגדיר $f^{-1}(b) = a$

נותר לבדוק שהיא אכן ההפכית של f.

$n \in \mathbb{N}$ $\quad [n] = \{1,2,\dots,n\}$

תמורות

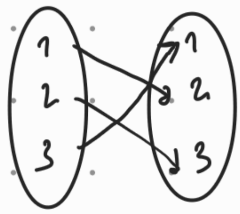
הגדרה: תמורה של $[n]$ היא פונקציה $f:[n]\to[n]$ חח"ע ועל.

לדוגמא: $Id_{[n]}$

דרכים להציג תמורה

$[(2\ 3\ 1)]$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$



דוג' נוספת:

$$\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&6&5&4\end{pmatrix}$$

הצגה בעזרת מחזורים:

$(1\ 2\ 3)(4\ 6)(5)$

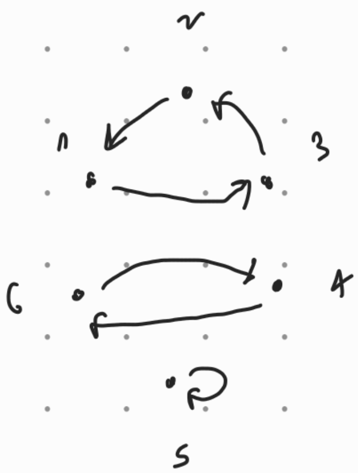
ויותר מדרך אחת:

$(2\ 3\ 1)(6\ 4)(5)$

התמורה ההופכית

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&6&5&4\end{pmatrix}$$

$(1\ 3\ 2)(4\ 6)(5)$



הרכבה של תמורות

אם $f:A\to A$ אז ניתן לבצע את ההרכבה $f^2 = f\circ f : A\to A$

ובכלל: $f^m = \underbrace{f\circ f\circ f\circ \dots \circ f}_{m \text{ פעמים}}$

<u>טענה:</u> אם $f: A\to B$ חח"ע ועל, $g: B\to C$ חח"ע ועל
אז $g\circ f$ חח"ע ועל.

<u>מסקנה:</u> הרכבה של תמורה על עצמה היא תמורה.

$f\circ f\circ f$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

$2 \to 3 \to 1 \to 2$

$3 \to 1 \to 2 \to 3$

* מה מספר הפעמים הקטן ביותר שיש להרכיב תמונה על עצמה כדי לקבל את פונקציית הזהות?

נסתכל על אורכי המחזוריות ונמצא את ה"כפל" המינימלי המתחלק בפולמר σ: <u>הכפולה המשותפת המינימלית של אורכי המחזוריות.</u>

<u>מסקנה:</u> $\sigma^6 = Id_{[6]}$

σ^{100}