גרף דו-צדדי

הגדרה: $G=(V,E)$ הוא גרף דו-צדדי אם ניתן להציג את

V כאיחוד זר $V=V_1\cup V_2$,

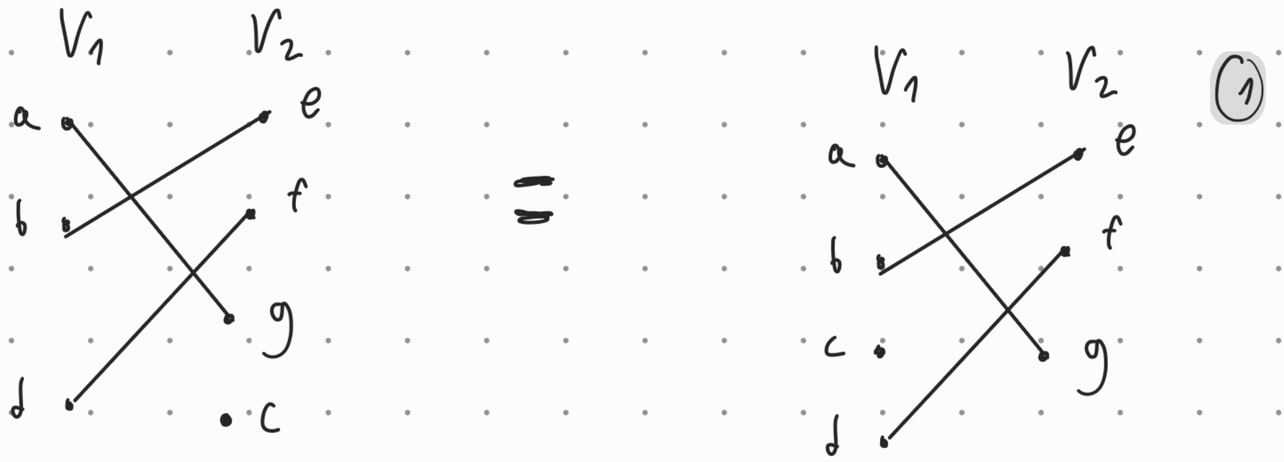
כך שכל $e\in E$ מחברת קודקוד מ-V_1 עם

קודקוד מ-V_2.

במקרה זה נסמן $G=(V_1,V_2,E)$ / $G=(V_1\cup V_2,E)$

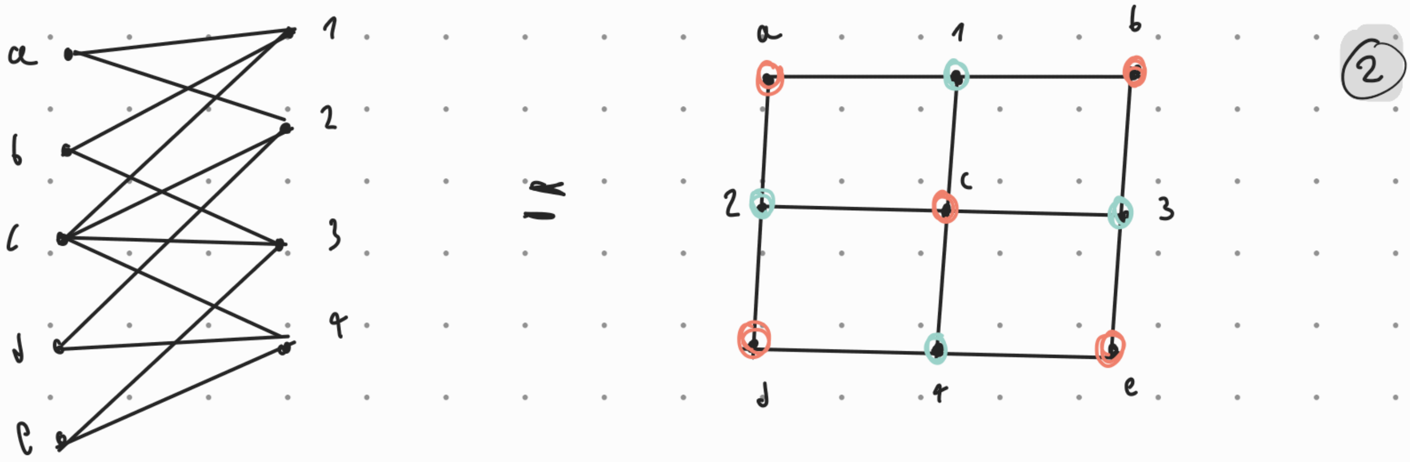
דוגמאות:

(1)

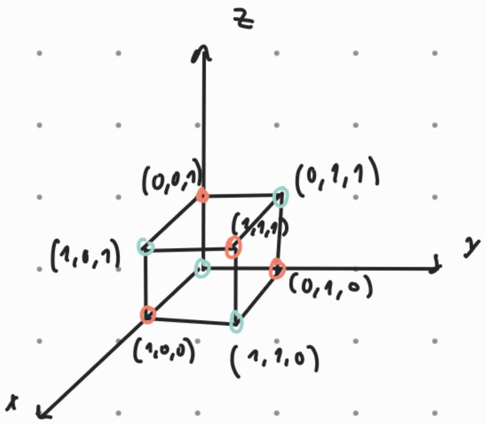


הערה: שים לב שניתן להציג את V_1,V_2 ביותר מדרך אחת.

(2)



③ גרף הקוביה: Q_3:



$$V = \{0,1\}^3 \qquad |V| = 8$$

$$E = \{\{a_1,b_1,c_1\},\{a_2,b_2,c_2\} \mid |a_1-a_2|+|b_1-b_2|+|c_1-c_2| = 1\}$$

כלומר שני הקודקודים נבדלים בדיוק בקואורדינטה אחת.

בגרף הקוביה, נגדיר: $V_1 = \{\{a,b,c\} \mid a+b+c \text{ זוגי}\}$

$V_2 = \{\{a,b,c\} \mid a+b+c \text{ אי-זוגי}\}$

④ הגרף הדו צדדי השלם $K_{n,m}$ כך ש:

$|V_1| = n$, $|V_2| = m$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$$E = \left\{\{v,u\} \,\middle|\, \begin{matrix} v \in V_1 \\ u \in V_2 \end{matrix}\right\}$$

$|E| = m \cdot n \qquad |V| = m+n$

טענה

בגרף דו-צדדי, מס' הקודקודים בכל מעגל פשוט הוא זוגי.

הסבר:

יהי נבחר קודקוד $v_0 \in V_1$ אז כל מסלול שמסתיים ב- v_0 מחייב מס' זוגי של צלעות, כי אחרי מס' אי-זוגי של צלעות נגיע לקבוצה V_2 בהכרח.

הגדרה: גרף הוא d-רגולרי אם לכל $v \in V$ $\deg(v) = d$

לדוגמה: Q_3 הוא 3-רגולרי.

טענה:

בגרף דו-צדדי רגולרי מתקיים $|V_1| = |V_2|$

הסבר:

$$|E| = d\cdot|V_1| = d\cdot|V_2|$$

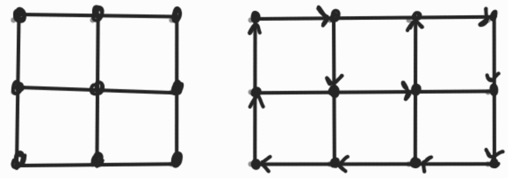
$$\Downarrow$$

$$|V_1| = |V_2|$$

מעגלי המילטון ואוילר

הגדרה: מעגל פשוט נקרא **מעגל המילטון** אם הוא עובר בכל קודקודי הגרף בדיוק פעם אחת.

כלומר $(v_0,v_1,\dots,v_n=v_0)$ מעגל המילטון אם לכל $v\in V$ קיים $1\le i\le n$ כך ש- $v_i=v$.



יש מעגל המילטון

אין מעגל המילטון

טענה

אם $G=(V_1\cup V_2,E)$ גרף דו-צדדי, וב- G קיים מעגל המילטון, אז $|V_1|=|V_2|$

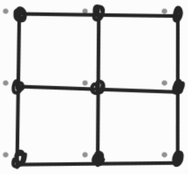
הוכחה

יהי $(v_0,v_1,\dots,v_n=v_0)$ מעגל המילטון, ונניח ש-

$v_0\in V_1 \Rightarrow v_1\in V_2 \Rightarrow v_2\in V_1 \Rightarrow \dots$

מכאן נובע ש- n מס' זוגי וכן $|V_1|=|V_2|=\frac{n}{2}$

תזכורת: קיבלנו תרגיל הכנה על גרף 3×3, המילטוני, אבל

בגרף  אין מעגל המילטוני.

הגדרה: $Q_n := (V,E)$ את:

$V = \{0,1\}^n$. $E = \left\{\{(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = 1\right\}$

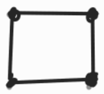
כלומר נבדלים בדיוק בקואורדינטה אחת.

טענה:

לכל $n \geq 2$, בגרף Q_n קיים מעגל המילטוני.

הוכחה:

בסיס האינדוקציה: $n=2$



צעד האינדוקציה: נניח את הטענה על Q_{n-1} ונוכיח על Q_n.

נסמן $A = \{(a_1,\dots,a_{n-1},0) \mid \forall i \in [n-1], a_i \in \{0,1\}\}$ - כל הקודקודים שקואורדינטה האחרונה שלהם היא 0.

$B = \{(a_1,\dots,a_{n-1},1) \mid \forall i \in [n-1], a_i \in \{0,1\}\}$ - כל הקודקודים שקואורדינטה האחרונה שלהם היא 1.

מתקיים $V = A \cup B$

מהנחת האינדוקציה, ב-A יש מעגל המילטוני $(v_0,\dots,v_{2^{n-1}} = v_0)$

נניח כי $V = Q_3$ אז A היא שכבה אחת - כלומר ריבוע.

נסמן $v_0 = (0, \dots, 0)$

גם ב-B יש מעגל המילטון $(u_0, \dots, u_{2^{n-1}} = u_0)$ ונניח $u_0 = (0, \dots, 0, 1)$

עוד יש לנו שני מעגלים ב-Q_{n-1} וננסה לפספר אותם.

נשים לב: כי u_i מתקבל מ-v_i על ידי החלפת הקואורדינטה האחרונה

מ-0 ל-1.

נקבל ש-$(v_0, v_1, \dots, v_{2^{n-1}-1}, u_{2^{n-1}-1}, \dots, u_1, u_0, v_0)$ הוא מעגל המילטון ב-Q_n.