טענה - יחידות האיבר האדיש לחיבור

אם $b, x \in \mathbb{R}$ מקיימים $x+b=b$ אז $x=0$.

הוכחה

נתבונן במשוואה $x+b=b$

מהמשפט שהוכחנו בשיעור הקודם, למשוואה זו יש פתרון יחיד.

מצד שני, מאקסיומה $(A3)$ $x=0$ פותר את המשוואה.

טענה - יחידות הנגדי.

אם $b, x \in \mathbb{R}$ מקיימים $x+b=0$

אז: $x=(-b)$

הוכחה

נתבונן במשוואה $1\cdot x+b=0$

מהמשפט שהוכחנו בשיעור הקודם, למשוואה זו יש פתרון יחיד.

מצד שני, מאקסיומה $(A4)$ $x=(-b)$ פותר את המשוואה.

טענה - מותר לצמצם.

אם $a,b,c\in\mathbb{R}$ מקיימים $a+c=b+c$

אז $a=b$

הוכחה

נתבונן במשוואה $x+c=b+c$

נשים לב שמהנתון $x=a$

מצד שני, מהטענה. $x=b$

אך מיחידות הפתרון $x=a=b$

טענה - כפל באפס

לכל $a\in\mathbb{R}$, $a\cdot 0=0$

הוכחה

$$a\cdot 0+0 \overset{(A3)}{=} a\cdot 0 \overset{(A3)}{=} a\cdot(0+0) \overset{(D)}{=} a\cdot 0+a\cdot 0$$

אז: $a\cdot 0+0=a\cdot 0+a\cdot 0$

מהטענה הקודמת, $0=a\cdot 0$

מש״ל

מאקסיומות השדה נובע:

- $-(-a)=a$
- $(a^{-1})^{-1}=a$
- $(-1)\cdot a=-a$
- $-(a+b)=(-a)+(-b)$
- $-(a-b)=(-a)+(b)$
- $(-a)(-b)=ab$
- $a/1$
- $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

טענה?

לא נכון!

אם $a-b=b-a$ אז $a=b$

הוכחה?

לא נכון!

נתון: $a-b=b-a$

(E1) $(a+(-b))+(a+b)=(b+(-a))+(a+b)$

(A2),(A1) $(a+(b+(-b)))+a=(b+((-a)+a))+b$

(A3),(A4) $a+a=b+b$

(M3) $1\cdot a+1\cdot a=1\cdot b+1\cdot b$

(D) $(1+1)\cdot a=(1+1)\cdot b$

בשדה כללי "ייתכן" ש- $1+1=0$ אז זה לא נכון.

הגדרה - שדה סדור

שדה נקרא **סדור** אם לכל $a,b\in\mathbb{F}$

הפסוק "$a<b$" הוא פסוק לוגי, כך ש:

(01) טריכוטומיה - לכל $a,b\in\mathbb{F}$

$a<b$ או $a>b$ או $a=b$

(02) אם $a<b$, $b<c$ אז $a<c$

(03) אם $a<b$ אז לכל $c\in\mathbb{F}$ $c+a<c+b$

(04) אם $a<b$ אז לכל $0<c\in\mathbb{F}$ $c\cdot a<c\cdot b$

הערות

- הסימון $b>a$ פירושו $a<b$
- הסימון $a\le b$ פירושו $a<b$ או $a=b$
- הסימון $b\ge a$ פירושו $b>a$ או $b=a$
- לקבוצה $\{a\in\mathbb{F} \mid 0<a\}$ נקרא האיברים החיוביים.
  $\{a\in\mathbb{F} \mid a<0\}$ נקרא האיברים השליליים.
- מתכונת הטרנזיטיביות אפשר לשרשר אי-שוויון $(a<b<c<d)$

טענה

אם $\mathbb{F}$ שדה סדור, $a,b \in \mathbb{F}$ $0 < a,b$

מתקיים $0 < a+b$, $0 < a \cdot b$

הוכחה

$$0 \overset{\text{נתון}}{<} b \overset{(A3)}{=} 0+b \overset{(O3)}{<} a+b$$

$$0 \overset{\text{הוכחנו}}{=} 0 \cdot b \overset{(O4)}{<} a \cdot b$$

טענה

אם $\mathbb{F}$ שדה סדור, $a \in \mathbb{F}$.

אז $0<a$ אמ"מ $(-a)<0$

הוכחה

(א) נניח ש- $0<a$.

$$\Downarrow (O3)$$

$$0+(-a) < a+(-a)$$

$$\Downarrow$$

$$(-a) > 0$$

(ב) נניח ש- $(-a) < 0$

$$\Downarrow (O3)$$

$$(-a) + a < 0 + a$$

$$\Downarrow (A4),(A3)$$

$$0 < a$$

מסקנה

קבוצת החיוביים אינה ריקה.

הוכחה

נתבונן במספר 1.

מהנחת היסוד $1 \neq 0$

מטריכוטומיה, נותרו 2 אפשרויות -

או ש- $1 > 0$ ואז קבוצת החיוביים אינה ריקה.

או ש- $1 < 0$ ואז $0 < (-1)$ וקבוצת החיוביים אינה ריקה.

הערה

$$1 > 0$$

הוכחה

מטריכוטומיה, ובגלל ש- $1 \neq 0$, מספיק לפסול את האפשרות

ש- $1 < 0$.

נניח בשלילה ש- $1 < 0$.

יהי a איבר חיובי בשדה (הוכחנו שקיים כזה)

מ- $(O4)$: $1 \cdot a < 0 \cdot a$

$$\Downarrow$$

$$a < 0$$

סתירה לטריכוטומיה.

הערה

בשדה סדור $a < b$ אומ"מ $(-b) < (-a)$

הערה

בשדה סדור $0 < a$ אומ"מ $a^{-1} > 0$

טענה

אם $a<0$ ו- $b<0$ אז $a\cdot b>0$

הוכחה

כיוון ש- $0<(-a) \Leftarrow a<0$

$0<(-b) \Leftarrow b<0$

$$\Downarrow$$

$$0<(-a)(-b)=a\cdot b$$

מסקנה

לכל $a\neq 0$, $a^2=a\cdot a>0$

הערה

אין סדר מתאים על המספרים המרוכבים.

$$i^2=-1<0$$

ולכן הם לא שדה סדור.