ישריות

הערה: אם V מ"ו, $S \subseteq V$, $v \in V$ אז

$$\{v\} + S = \{v + w \mid w \in S\}$$

הגדרה: ישריה במ"ו V היא סכום של קבוצה בעלת וקטור
וקטור אחד ותת-מרחב של V.

כלומר קבוצה מהצורה $\{v\} + U$ כאשר $v \in V$, U תת-מרחב.

תזכורת: קבוצת הפתרונות של ממ"ל הומוגנית ב-n נעלמים
היא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$

טענה

יהיו $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^m$, $v \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $Av = b$.

נסמן ב- U, Z את קבוצות הפתרונות של הממ"ל הבאות:

$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ax = b$ בהתאמה.

אז $Z = \{v\} + U$

הוכחה:

1) נוכיח $\subseteq$:

יהי $z\in\{v\}+U$, אז קיים $u\in U$ כך ש $z=v+u$

אז מתקיים: $Az=A(v+u)=Av+Au=b+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=b$

ולכן $z\in Z$

2) נוכיח $\subseteq$:

יהי $z\in Z$, אז $Az=b$.

נגדיר $u=z-v$

מתקיים $Au=A(z-v)=Az-Av=b-b=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ולכן $u\in U$.

מכיוון $z=v+u\in\{v\}+U$

מסקנה:

אם קבוצת הפתרונות של ממ"ל $Ax=b$ אינה ריקה, אז היא יריעה.

מציאת בסיס בתת-מרחבים של $\mathbb{F}^n$

בעיה 1:

תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ $\quad U=\{x\in\mathbb{F}^n\mid Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\}$

איך מוצאים בסיס עבור U?

ל קבוצת הפתרונות של ממ"ל הומוגנית.

טענה

בהנחות הקודמות, תהיה $\{t_1u_1+\dots+t_ku_k \mid t_1,\dots,t_k\in\mathbb{F}\}$ הצגה פרמטרית עבור U.

אז $(u_1,\dots,u_k)$ מהווה בסיס של U.

הוכחה:

ברור כי $\operatorname{span}(u_1,\dots,u_k)=U$.

עבור $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{F}$, נסמן $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=t_1u_1+\dots+t_ku_k$

אז לכל $1\le i\le k$ קיים $1\le j\le n$ כך ש- $t_i=x_j$

אם $t_1u_1+\dots+t_ku_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ אז $x_j=0$ לכל $1\le j\le n$

מכאן $t_i=0$ לכל $1\le i\le k$, ולכן $(u_1,\dots,u_k)$ בת"ל.

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_4=0\\ x_3+x_4=0\end{cases}$$

לכל i יש j אבל יש פחות i מ- j

x_2, x_4 הם המשתנים החופשיים, נגדיר $t_1=x_2,\quad t_2=x_4$

אז $x_3=-4t_2$, $\quad x_1=-2t_1-3t_2$

$$\left\{\begin{pmatrix} -2t_1-3t_2 \\ t_1 \\ -4t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \middle| \; t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\} = \left\{ t_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$

בעיה 2

יהיו $v_1,\dots,v_m \in \mathbb{F}^n$ $\quad U = Span(v_1,\dots,v_m)$

איך למצוא בסיס עבור U?

סימון: עבור $M\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, נסמן ב- $R_1^M,\dots,R_m^M \in M_{1\times n}(\mathbb{F})$

את השורות של M.

טענה:

תהיינה $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורה.

אז $Span(R_1^A,\dots,R_m^A) = Span(R_1^B,\dots,R_m^B)$

הוכחה:

מאחר ששקילות שורה היא סימטרית, מספיק להוכיח כי

$$Span(R_1^B,\dots,R_m^B) \subseteq Span(R_1^A,\dots,R_m^A)$$

ב׳ הגבלת הכלליות, ניתן להניח כי B מתקבלת מ- A ע״י

פע״א אחת.

יש להתייחס ל-3 סוגים של פש״ו.

נתייחס למקרה בו הפש״א הינו $R_i \to R_i + cR_j$ $\quad 0 \neq c \in \mathbb{F}$

שאר המקרים תרגיל. ☹

אז לכל $1 \le k \le m$, $k \ne i$ מתקיים $R_k^B = R_k^A$

בנוסף $R_i^B = R_i^A + cR_j^A$

אז לכל $1 \le k \le m$ מתקיים $R_k^B \in Span(R_1^A, \dots, R_m^A)$

מכאן: $Span(R_1^B, \dots, R_m^B) \subseteq Span(R_1^A, \dots, R_m^A)$

טענה)

תהי $R \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת בעלת r איברים מובילים,

אז הסדרה $(R_1^R, \dots, R_r^R)$ היא בסיס של $Span(R_1^R, \dots, R_m^R)$

$m-r$ שורות אפסים.

הוכחה:

מאחר ש- $R_{r+1}^R, \dots, R_m^R$ הן שורות אפסים

מתקיים כי $R_k^R \in Span(R_1^R, \dots, R_r^R)$ לכל $1 \le k \le m$

ולכן $(R_1^R, \dots, R_r^R)$ פורשת את $Span(R_1^R, \dots, R_m^R)$

כי $0 \in Span$ (?)

עבור $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ נסמן $(x_1,\dots,x_n)=c_1R_1^R+\dots+c_nR_n^R$

אזי בגלל המוביל של השורה R_i^R נמצא בעמודה j,

אזי $x_j = c_1\cdot 0+\dots+c_i\cdot 1+\dots+c_n\cdot 0$

אם $(0,\dots,0) = c_1R_1^R+\dots+c_nR_n^R$,

אזי $x_j=0$ לכל $1\le j\le n$ ומכאן $c_i=0$ לכל $1\le i\le n$

לסיכום הטענה $(R_1^R,\dots,R_n^R)$ היא בת"ל.

אזי כדי למצוא בסיס של פרוש של וקטורים מ-$\mathbb{F}^n$

נתונים, אפשר להציב אותם בתור שורות במטריצה,

לדרג אותה, ולקחת את השורות שיש בהן איבר

מוביל בתור איברים של הבסיס.