הגדרה: מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ נקראת **לכסינה אורתוגונלית**

כאשר קיימת $O \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית כך ש-

$O^{-1}AO$ אלכסונית.

הגדרה: מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ נקראת **לכסינה אוניטרית**

כאשר קיימת $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית כך ש-

$U^{-1}AU$ אלכסונית.

מסקנה (מהמשפט במקרה הממשי)

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. אז A לכסינה אורתוגונלית אמ"מ

A סימטרית. (צמודה לעצמה במקרה הממשי)

מסקנה (מהמשפט במקרה המרוכב)

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$. אז A לכסינה אוניטרית אמ"מ

A נורמלית.

תבניות בילינאריות

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$.

הגדרה: **תבנית בילינארית** ב- V היא פונקציה $g: V\times V \longrightarrow \mathbb{F}$

שמקיימת את האקסיומות הבאות:

1. א. $g(x, y_1+y_2) = g(x,y_1)+g(x,y_2)$ לכל $x,y_1,y_2\in V$

   ב. $g(x, cy) = c\cdot g(x,y)$ לכל $x,y\in V$, $c\in\mathbb{F}$.

2. א. $g(x_1+x_2, y) = g(x_1,y)+g(x_2,y)$ לכל $x_1,x_2,y\in V$

   ב. $g(cx, y) = c\cdot g(x,y)$ לכל $x,y\in V$, $c\in\mathbb{F}$

(לינאריות לפי שני הרכיבים)

דוגמאות

1. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$,

   $g: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ תבנית בילינארית מוגדרת ע"י $g(x,y)=\langle x|y\rangle$

2. $\mathbb{F}$ שדה כלשהו, V מ"ו כלשהו מעל $\mathbb{F}$.

   $g: V\times V\longrightarrow\mathbb{F}$ מוגדרת ע"י $g(x,y)=0$ לכל $x,y\in V$.

3. $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^2$ $g: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

נשים לב כי $g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$ (ולכן זו לא מכפלה פנימית)

4. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י:

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

ונשים לב כי $g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq -1 = g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

5. $\mathbb{F}$ שדה, $V = \mathbb{F}^n$. $A \in M_n(\mathbb{F})$. $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$

מוגדרת ע"י: $g(x,y) = x^t A y$ לכל $x, y \in \mathbb{F}^n$

הערה:

- g מדוגמה 3 היא מקרה פרטי של דוגמה 5,

כאשר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 - x_2 y_2$

- g מדוגמה 4 היא מקרה פרטי של דוגמה 5,

כאשר $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$

הגדרה: יהי V מ"ו סוף ממדי מעל שדה $\mathbb{F}$,

$B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס של V, $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ תבנית בילינארית.

אזי המטריצה של g ביחס ל- B (מטריצת גרם)

ה:ו $G = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $a_{ij} = g(v_i, v_j)$

דוגמאות

1. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ מרחב אוקלידי, B בסיס אורתונורמלי.

$g(x,y) = \langle x | y \rangle$, אז $G = I_n$

2. $\mathbb{F}$ שדה, V מ״ו מעל $\mathbb{F}$ ממימד, ו- $g(x,y) = 0$ לכל $x,y \in V$.

אז $G = O_{M_n(\mathbb{F})}$

3. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על י:

$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $B = \mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

אז $g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$

$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$

$g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = -1$

$g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$

לכן $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$