1 חמדניים

1.1 בעיית אופטימיזציה גנרית

בעיית אופטימיזציה גנרית

<u>קלט</u>: קבוצה סופית $S = \{x_1, ..., x_n\}$, פונקציית משקל $w : S \to \mathbb{R}_+$. בנוסף, משפחה I של תת-קבוצות של S (המהווה אוסף של פתרונות חוקיים לבעיה).

<u>פלט</u>: תת-קבוצה $A \in I$ שמשקלה מקסימלי כאשר $w(A) = \sum_{x_i \in A} w(x_i)$.

אפשר גם למצוא קבוצה שמשקלה מינימלי (אבל בגודל מקסימלי) עם שינוי קל לפונקציית המשקל.

1.1.1 דוגמאות

(1) קבוצת ווקטורים בת"ל עם משקל מקסימלי:

$$S = \{v_1, ..., v_i\}$$

$$I = \{A \subseteq S : \text{הווקטורים בת"ל}\}$$

$w : S \to \mathbb{R}_+$ פונקציית המשקל של הווקטורים

(2)(א) בעיית שיבוץ משימות:

$$S = \{[s_1, f_1], ..., [s_n, f_n]\}$$

$$I = \{A \subseteq S : \text{הקטעים ב-}A\text{ זרים זה לזה}\}$$

$$w([s_i, f_i]) = 1$$

(2)(ב) פונקציית משקל אחרת:

$$w([s_i, f_i]) = s_i - f_i$$

ניתן לפתור על ידי אלגוריתם דינמי.

(3) בעיית התרמיל השלם:

$$S=\{(v_1,w_1),...,(v_n,w_n)\}$$
$$I=\{A\subseteq S:\sum_{i\in A}w_i\leq W\}$$
$$w((v_i,w_i))=v_i$$

1.1.2 אלגוריתם חמדן גנרי:

אלגוריתם 1 אלגוריתם חמדן גנרי לבעיית אופטימיזציה גנרית

---

1. עיבוד מידע מוקדם: נמיין את הפריטים ב-S לפי משקלם בסדר יורד. (מעכשיו נניח כי $w(x_1)\geq...\geq w(x_n)$)
2. אתחול: $G=\emptyset$, $A=[n]$.
3. איטרציה: בכל שלב נמחק מ-A את כל הפריטים באינדקסים $1\leq j\leq n$ שמקיימים: $G\cup\{j\}\notin I$ (השלב החמדני). ואז נעביר מ-A ל- G את האינדקס הנמוך היותר ב-A.
4. סיום: כאשר $A=\emptyset$ נעצור ונחזיר את G.

1.1.3 מתי האלגוריתם עובד?

הגדרה: הזוג (S,I) כאשר S היא קבוצה סופית לא ריקה, ו-I משפחה של תת קבוצות של S ייקרא מטרואיד אם מתקיימות התכונות הבאות:

1. I לא ריקה.
2. I מקיימת תורשתיות. (אם $A\in I$, $B\subseteq A$, אזי $B\in I$).
3. I מקיימת את למת ההחלפה. (אם $A,B\in I$, $|A|>|B|$ אזי קיים $a\in A\setminus B$ כך ש-$B\cup\{A\}\in I$).

משפט 1: אם בבעיה האלגוריתמית הגנרית שהגדרנו הזוג (S,I) הוא מטרואיד, אזי האלגוריתם החמדן הגנרי שהצגנו יחזיר פתרון אופטימלי (וחוקי) לכל פונקציית משקל w.

הוכחת משפט 1: בדיוק כמו ההוכחה למשפחת ווקטורים בת"ל בעלת משקל מקסימלי.

משפט 2: אם בבעיה האלגוריתמית הגנרית שהגדרנו הזוג (S,I) אינו מטרואיד, כלומר המשפחה I היא משפחה תורשתית לא ריקה, אבל למת ההחלפה לא מתקיימת, אזי קיימת פונקציית משקל w כך שעל הקלט S,I ו-w האלגוריתם החמדן הגנרי לא מחזיר פתרון אופטימלי.

הוכחת משפט 2: לפי הנתון קיימות שתי תתי קבוצות $X, Y \in I$ כך ש-$|X| < |Y|$ אבל לא קיים $y \in Y \setminus X$ כך ש-$X \cup \{y\} \in I$.

נגדיר פונקציית משקל באופן הבא, לכל $s \in S$:

$$w(s) = \begin{cases} 1 & s \in X \\ 1-\epsilon & s \in Y \setminus X \\ \epsilon & s \notin X \cup Y \end{cases}$$

כאשר $\epsilon = \frac{|Y|-|X|}{2n}$, $n = |S|$.

על פי דרך פעולתו של האלגוריתם החמדן הגנרי ב-$|X|$ האיטרציות הראשונות שלו הוא בוחר את הקבוצה X. עד האיטרציה $|X|$ האלגוריתם מוחק מ-A את כל הפריטים ב-$Y \setminus X$. לכן הפתרון החמדן G לא יכיל שום פריט מ-$Y \setminus X$. לכן:

$$w(G) \leq w(X) + w((X \cup Y)^c) = |X| + \epsilon \cdot |(X \cup Y)^c| < |X| + \epsilon \cdot n = |X| + \frac{|Y|-|X|}{2n} \cdot n = \frac{|X|+|Y|}{2}$$

נבדוק כי הפתרון החוקי Y שוקל יותר וכך נוודא שהאלגוריתם החמדן לא מחזיר פתרון אופטימלי.

$$W(Y) \geq (1-\epsilon)|Y| = |Y| - \epsilon \cdot |Y| \geq |Y| - \epsilon \cdot n = |Y| - \frac{|Y|-|X|}{2n} \cdot n = \frac{|X|+|Y|}{2}$$