מסקנה מהמשפטים בשיעורים האחרונים

לכל סדרה קיים לפחות גבול חלקי אחד (במובן הרחב).

מה עוד למדנו?

אם סדרה מתכנסת, יש לה גבול חלקי יחיד.

$\Updownarrow$

אם לסדרה יש יותר מגבול חלקי יחיד, היא אינה מתכנסת.

משפט

אם סדרה אינה מתכנסת (במובן הרחב), אז יש לה לפחות 2 גבולות חלקיים במובן הרחב.

הוכחת המשפט

לכל סדרה קיים לפחות גבול חלקי אחד.

נתבונן תחילה במקרה שבו $\alpha \in \mathbb{R}$ גבול חלקי של (a_n).

מכיוון ש- α אינו גבול של (a_n) קיים $\varepsilon>0$ כך ש-

$\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \notin (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)\}$ אינה חסומה. (מלמה שעשינו)

כלומר קיימת סדרה עולה ממש (n_k) כך שלכל k, $b_k = a_{n_k} \notin (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$. ל- (b_k) קיים לפחות גבול חלקי אחד שהוא

גם גבול חלקי של (a_n) נסמן אותו β ו- $\beta \neq \alpha$.

למה

תהא (a_n) סדרה מתכנסת ל- $\alpha \in \mathbb{R}$. $b_n = a_{n+1} - a_n$

אזי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

הוכחת הלמה:

יש הוכחה קלה עם טורים חיקה...

יהי $\varepsilon > 0$, מהגדרת הגבול קיים N כך שלכל $n > N$ $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

ולכן: $|a_{n+1} - a_n| \le |a_{n+1} - \alpha| + |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

שאלה:

האם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ גורר ש- (a_n) מתכנסת?

תשובה: לא! נתבונן בסדרה $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

מתקיים: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אבל הסדרה לא מתכנסת.

הגדרה:

סדרה (a_n) מקיימת את **תנאי קושי**

אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $|a_n - a_m| < \varepsilon$

לכל $n, m > N$.

מסקנה

טוב, סדרה מתכנסת היא מקיימת את תנאי קושי.

הוכחה = קל.

משפט

סדרה המקיימת את תנאי קושי מתכנסת.

הוכחת המשפט

נוכיח שהסדרה חסומה. מתנאי קושי, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n,m > N$, $|a_n - a_m| < 1$. בפרט, אם ניקח $m = N+1$ אז:

לכל $n > N$: $|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_{N+1}| + |a_n - a_{N+1}| < |a_{N+1}| + 1$

ולכל $n \leq N$: $|a_n| \leq \max\{|a_k| \mid 1 \leq k \leq N\}$ ולכן a_n סדרה חסומה.

עתה ממשפט בולצאנו ויירשטראס קיים לה גבול חלקי: נסמן אותו כ-α.

יהי $\varepsilon > 0$, יהי N כך שלכל $m,n > N$: $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

ועתה קיימת סדרה (n_k) של אינדקסים וקיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$: $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. בפרט, קיים $k > K$ כך ש-$n_k > N$. ולכל $n > N$:

$$|a_n - \alpha| \underset{\text{אי השוויון}}{\leq} |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$