הגדרה: פונקציית נפח $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ נקראית מנורמלת כאשר $D(I_n) = 1$.

מסקנה. יהיו $D, D': M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ ק פ"נ מנורמלות, אזי $D' = D$.

הוכחת יחידות ה-d דטרמיננטה. יותר קל מהוכחת קיום.

למה

לכל פש"ו E קיימת פש"ו E^* כך שמתקיים:

① $E^*(I_n) = E(I_n)^t$

② $\mu(E^*) = \mu(E)$

הוכחה

אם $E = (R_i \to cR_i)$ או $E = (R_i \leftrightarrow R_j)$

אז אפשר להגדיר $E^* = E$

אם $E = (R_i \to R_i + cR_j)$, $i \neq j$

אז נגדיר $E^* = (R_j \to R_j + cR_i)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & c \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & c & 1 \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

ובנוסף $\mathcal{E}^*(I_n) = \mathcal{E}(I_n)^t$ וגם $\mathcal{M}(\mathcal{E}^*) = 1 = \mathcal{M}(\mathcal{E})$

טענה

תהי $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פ"ד.

אזי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, אז $D(A^t) = D(A)$

הוכחה:

אם A איננה הפיכה, אז A^t אינה הפיכה, ולכן

$$D(A^t) = 0 = D(A)$$

אחרת A הפיכה, אז קיימות סדרת פע"א $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_s$

כך ש- $\mathcal{E}_s(\dots(\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1(A)))\dots) = I_n$

לכל $1 \le i \le s$ נסמן ב- δ_i את פע"א ההפוכה ל- $\mathcal{E}_i$

אז מתקיים $\delta_1(\dots\delta_{s-1}(\delta_s(I_n))\dots) = A$. מכאן:

$$\delta_1(I_n) \cdot \delta_2(I_n) \cdot \ldots \cdot \delta_{s-1}(I_n) \cdot \delta_s(I_n) = A$$

$\boxed{\text{תזכורת: } (BA)^t = A^t \cdot B^t}$

$$\delta_s(I_n)^t \cdot \delta_{s-1}(I_n)^t \dots \delta_2(I_n)^t \cdot \delta_1(I_n)^t = A^t$$

לפי הלמה, קיימות $\delta_1^*, \dots, \delta_s^*$ כך ש-

וגם $\delta_i^*(I_n) = \delta(I_n)$ $\mu(\delta_i^*) = \mu(\delta_i)$ לכל $1 \le i \le s$

מכאן $\delta_s^* \cdots \delta_1^*(I_n) = A^t$

מכאן $\delta_s^*(\dots \delta_1^*(I_n) \dots) = A^t$

לפי המסקנה מאתמול, מתקיים:

$$D(A) = \mu(\delta_1) \cdots \mu(\delta_s) \cdot D(I_n) = \mu(\delta_s^*) \cdots \mu(\delta_1^*) = D(A^t)$$

טענה

קוראים לזה מינור

אם $D': M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ היא כל מנורמלת, וגם

$1 \le j \le n$ אז הפונקציה $D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י

$$D(A) = (-1)^{j+1}\left(a_{1j} \cdot D'(A_{1j}) - a_{2j} \cdot D'(A_{2j}) + \dots + (-1)^{n-1} a_{nj} \cdot D'(A_{nj})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot D(A_{ij})$$

היא גם פונקציית נפח מנורמלת כאשר

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{F}),$$

$A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ מתקבלת מ-A ע"י מחיקה של השורה ה-i והעמודה ה-j.

דוגמא:

$D: M_{3\times 3}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ $\quad D': M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ $\quad j=2$ $\quad n=3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D(A) = (-1)^3\left(a_{12}\cdot D'\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} \end{pmatrix} - a_{22}\cdot D'\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{32}\cdot D'\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\right)$$

הוכחה:

☆ נוכיח כי D מולטי-לינארית.

לכל $1 \le i \le n$, נגדיר $D_i: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ ע"י $D^{(i)}(A) = a_{ij}\cdot D'(A_{ij})$

מספיק להוכיח כי $D^{(i)}$ מולטי-לינארית.

כי גם החיבור שלהן מולטי לינארית כפי שהוכחנו.

נוכיח לינאריות של $D^{(i)}$ לפי השורה ה-k כאשר $1 \le k \le n$, $k \ne i$

נוכיח שוב (1) בהגדרת הלינאריות:

תהיינה $A,B,C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_l^A = R_l^B = R_l^C$ לכל $l \ne k$

ובנוסף $R_k^C = R_k^A + R_k^B$

אז מתקיים $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}$

עבור $k>i$, אז מתקיים: $R_\ell^{A_{ij}} = R_\ell^{B_{ij}} = R_\ell^{C_{ij}}$ לכל $\ell \neq k$

וגם $R_k^{C_{ij}} = R_k^{A_{ij}} + R_k^{B_{ij}}$

עבור $i<k$, אז מתקיים: $R_\ell^{A_{ij}} = R_\ell^{B_{ij}} = R_\ell^{C_{ij}}$ לכל $\ell \neq k-1$

וגם $R_{k-1}^{C_{ij}} = R_{k-1}^{A_{ij}} + R_{k-1}^{B_{ij}}$

בשני המקרים, מהמולטילינאריות של D' (נתון) נובע כי

$$D'(C_{ij}) = D'(A_{ij}) + D'(A_{ij})$$

אז $D^{(i)}(C) = c_{ij}\cdot D'(C_{ij}) = c_{ij}\cdot D'(A_{ij}) + c_{ij}\, D'(B_{ij}) =$

$$= a_{ij}\cdot D'(A_{ij}) + b_{ij}\cdot D'(B_{ij}) = D^{(i)}(A) + D^{(i)}(B)$$ — ① רכיב הלינאריות

הוכחה של 2 מרכיבה של הלינאריות -בדומה.

כעת, נוכיח את הלינאריות של $D^{(i)}$ לפי השורה ה-i

נוכיח את ① מרכיבת הלינאריות.

תהיינה $A,B,C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_\ell^A = R_\ell^B = R_\ell^B$ $\ell \neq i$

וגם $R_i^C = R_i^A + R_i^B$

אז מתקיים: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

בנוסף לכל $A_{ij} = B_{ij} = C_{ij}$

לכן:

$$D^{(i)}(C) = c_{ij}\cdot D'(C_{ij}) = a_{ij}\cdot D'(C_{ij}) + b_{ij}\cdot D'(C_{ij}) = a_{ij}\cdot D'(A_{ij}) + b_{ij}\cdot D'(B_{ij}) =$$

$$= D^{(i)}(A) + D^{(i)}(B)$$

ההוכחה של תכונה 2 של הלינאריות - בדומה.

☆ נוכיח כי D מתחלפת.

תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $R_k^A = R_{k+1}^A$

לכל $1\le i<k$ מתקיים $R_{k-1}^{A_{ij}} = R_k^{A_{ij}}$

לכל $k+1<i\le n$ מתקיים $R_k^{A_{ij}} = R_{k+1}^{A_{ij}}$

משני המקרים מהתחלפות של D' נובע כי $D'(A_{ij})=0$

אז מתקיים:

$$D(A) = (-1)^{j+1}\left(0-0+\dots+(-1)^{k-1}\cdot a_{kj}\, D'(A_{kj}) + (-1)^{k}\cdot a_{k+1,j}\cdot D(A_{k+1,j}) + \dots + (-1)^{n-1}\cdot 0\right) =$$

$$= 0$$

כי $a_{kj} = a_{k+1,j}$ וגם $A_{kj} = A_{k+1,j}$

☆ נוכיח כי D מנורמלת.

לכל $1\le i\le n$, $i\ne j$ מתקיים $a_{ij}=0$ עבור $A=I_n$

$$D(I_n) = (-1)^{j+1}\left(0-0+\dots+(-1)^{j-1}\cdot a_{jj}\cdot D'((I_n)_{jj}) + \dots + (-1)^{n}\cdot 0\right) = (-1)^{j+1+j-1}\cdot 1\cdot D'(I_{n-1}) = 1$$