יהי $1 \le j \le n$, נסמן ב- e_j את ה- n-יה של הקואורדינטות אלה
בן 0 חוץ מהקואורדינטה ה- j שלו שווה ל- 1.

כלומר $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j$

דוגמא: $n=4$, אז $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

נסמן ב- I_n את המטריצה בעלת n שורות ו- n עמודות כך
שהעמודה ה- j שלה היא e_j.

דוגמא: $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

מטריצה זו נקראת **מטריצת היחידה**.

תכונות נוספות של כפל מטריצה ב- n יה.

③ אם $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, והעמודות של A הן $c_1, c_2, \dots c_n$,

אז $A \cdot e_j = c_j$

④ לכל $v \in \mathbb{R}^n$, $I_n \cdot v = v$.

הוכחה: נסמן $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, אז מתקיים:

$$I_n \cdot v = I_n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 e_1 + \dots v_n e_n = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v$$

כפל מטריצות

הגדרה: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{1\times m}(\mathbb{R})$

נסמן את העמודות של A ב- $C_1,\dots\dots,C_n \in \mathbb{R}^m$

נגדיר $BA \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ כך שהעמודה ה-j שלה היא $BC_j \in \mathbb{R}^1$

$1 \le j \le n$.

הערה: אם $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{l1} & \dots & b_{lm} \end{pmatrix}$

נסמן את המספר בחיתוך של השורה ה-i והעמודה ה-j של BA ב- $(BA)_{ij}$.

אז $(BA)_{ij}$ היא הקואורדינטה ה-i של BC_j,

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

כלומר $(BA)_{ij} = a_{1j}\cdot b_{i1} + a_{2j} b_{i2} + \dots + a_{mj}\cdot b_{im} =$

$$= \sum_{s=1}^{m} a_{sj}\cdot b_{is} = \boxed{\sum_{s=1}^{m} b_{is}\cdot a_{sj}}$$

שורה i ב-B כפול עמודה j ב-A. (מספר)

סימון: תהי $K \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, נסמן את:

* העמודות של K ב- $C_1^K,\dots\dots, C_n^K$
* השורות של K ב- $R_1^K,\dots\dots, R_m^K$

תכונות של כפל מטריצות

1. אם $C_j^{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, אז $C_j^{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$

2. אם $R_i^{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{m}$, אז $R_i^{BA} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n}$

3. אם $A = I_m$, אז $B \cdot I_m = B$

הוכחה: מתקיים $C_j^{I_m} = e_j$ לכן:

$$C_j^{BI_m} = B \cdot C_j^{I_m} = Be_j = C_j^{B}$$

לכן $BI_m = B$

4. אם $B = I_m$, אז $I_m \cdot A = A$

טענה N (חוק הקיבוץ מטריצות)

אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{l\times m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{k\times l}(\mathbb{R})$

אז $(CB)\cdot A = C(BA)$

הוכחה:

נסמן
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{lm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \\ c_{k1} & \cdots & c_{kl} \end{pmatrix}$$

המספר בחיתוך השורה ה-i והעמודה ה-j של $(CB)A$ הוא:

$$((CB)A)_{ij} = \sum_{s=1}^{m} (CB)_{is}\cdot a_{sj} = \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{l} c_{ir}\cdot b_{rs}\right)\cdot a_{sj} =$$
$$= \sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{l} c_{ir}\cdot b_{rs}\cdot a_{sj}$$

המספר בחיתוך השורה ה-i והעמודה ה-j של $C(BA)$ הוא:

$$(C(BA))_{ij} = \sum_{r=1}^{l} c_{ir}\cdot (BA)_{rj} = \sum_{r=1}^{l} c_{ir}\cdot\left(\sum_{s=1}^{m} b_{rs}\cdot a_{sj}\right) =$$
$$= \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{m} c_{ir}\cdot b_{rs}\cdot a_{sj}$$

בשני המקרים קיבלנו אותה תוצאה.

מכאן נובע שוויון של שתי המטריצות.