$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "\omega_B"'] & W \arrow[d, shift left, "\omega_C"] \\
\mathbb{F}^n \arrow[u, shift right, "\varphi_B"'] \arrow[r, "T_A"'] & \mathbb{F}^m \arrow[u, shift left, "\varphi_C"]
\end{tikzcd}$$

## טענה:

יהיו $T_2: V \to W$ , $T_1: U \to V$ ה"ל. אז:

1) אם $T_1$ על, אז $rk\, T_2 \circ T_1 = rk\, T_2$

2) אם $T_2$ חח"ע אז $rk\, T_2 \circ T_1 = rk\, T_1$

## הוכחה

1) נוכיח כי $Im\, T_2 = Im\, T_2 \circ T_1$.

הכלה $\subseteq$: יהי $w \in Im\, T_2 \circ T_1$ אז קיים $u \in U$

כך ש- $T_2(T_1(u)) = T_2 \circ T_1(u) = w$.

לכן $w \in Im\, T_2$.

הכלה $\supseteq$: יהי $w \in Im\, T_2$ אז קיים $v \in V$

כך ש- $T_2(v) = w$.

מאחר ש- $T_1$ על, קיים $u \in U$

כך ש- $T_1(u) = v$

מכאן: $(T_2\circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)) = T_2(v) = w$

לכן $w \in Im(T_2\circ T_1)$

2 נסמן $V' = Im T_1$, $W' = Im T_2\circ T_1$

נוכיח כי לכל $v \in V'$ מתקיים $T_2(v) \in W'$

לכן אומר, $v \in V' = Im T_1$, אז קיים $u \in U$ כך ש-

$T_1(u) = v$ אז $T_2(v) = T_2(T_1(u)) = (T_2\circ T_1)(u) \in Im T_2 T_1 = W'$

נגדיר $T_2' : V' \longrightarrow W'$ ע"י $T_2'(v) = T_2(v)$ לכל $v \in V'$.

$T_2'$ חח"ע כי $T_2$ חח"ע.

כמו כן, $T_2'$ על, כי לכל $w \in W'$, קיים $u \in U$

כך ש- $T_2\circ T_1(u) = w = T_2(T_1(u))$

לכן $w = T_2'(T_1(u))$.

לפיכך $T_2'$ הפיכה ומכאן $rk T_1 = \dim V' = \dim W' = rk T_2\circ T_1$

## מסקנה

יהיו $T_3 : W \longrightarrow Z$, $T_2 : V \longrightarrow W$, $T_1 : U \longrightarrow V$, הל'.

כך ש- $T_1, T_3$ הפיכות, אז $rk\, T_3\circ T_2\circ T_1 = rk T_2$

## הוכחה

$$rk\,T_2 \overset{T_1 \text{ על}}{=\!=} rk\,T_2 \circ T_1 \overset{T_3 \text{ חח"ע}}{=\!=} rk\,T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

## מסקנה

תהי $T: V \to W$ ה"ל.

$B, C$ בסיסים של $V, W$ בהתאמה, $A = [T]^B_C$

אז $rk\,A = rk\,T$

## הוכחה

$$rk\,A = rk\,T_A = rk(\omega_C \circ T \circ \varphi_B) = rk\,T$$

## מטריצה של הרכבה (של העתקות)

## טענה

תהיינה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{\ell \times m}(\mathbb{F})$

אז $T_{BA} = T_B \circ T_A$ וגם $[T_B \circ T_A]^B_D = [T_B]^C_D \cdot [T_A]^B_C$

כאשר $B, C, D$ הם הבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m, \mathbb{F}^\ell$ בהתאמה.

## הוכחה

לכל $x \in \mathbb{F}^n$ מתקיים

$$T_{BA}(x) = BAx = T_B(T_A(x)) = T_B \circ T_A(x)$$

$$[T_B \circ T_A]^B_D = [T_{BA}]^B_D = BA = [T_B]^C_D \cdot [T_A]^B_C$$

## משפט

תהיינה $T_1 : U \to V$, $T_2 : V \to W$ ה"ל,

$B, C, D$ בסיסים של $U, V, W$ בהתאמה. אז:

$$[T_2 \circ T_1]^B_D = [T_2]^C_D \cdot [T_1]^B_C$$

## הוכחה

נסמן $B = (u_1, \dots, u_n)$

אז לכל $1 \le j \le n$, העמודה ה-$j$ של $[T_2 \circ T_1]^B_D$ היא:

$$[(T_2 \circ T_1(u_j))]_D = [T_2(T_1(u_j))]_D$$ ע"פ משפט מהתרגול

$$= [T_2]^C_D \cdot [T_1(u_j)]_C$$

$[T_1(u_j)]_C$ היא העמודה ה-$j$ של $[T_1]^B_C$.

ולכן העמודה ה-$j$ של $[T_2 \circ T_1]^B_D$ שווה ל-

העמודה ה-j של $[T_2]^C_D \cdot [T_1]^B_C$

**הגדרה:** יהיו $C=(w_1,\dots,w_n)$, $B=(u_1,\dots,u_n)$ בסיסים של מ"ו $V$. אז המטריצה $[Id_V]^B_C$ נקראת **מטריצת מעבר בסיס** מ-$B$ ל-$C$.

לכל $1\le j\le n$, העמודה ה-j של $[Id_V]^B_C$ היא: $[u_j]_C$

**טענה**

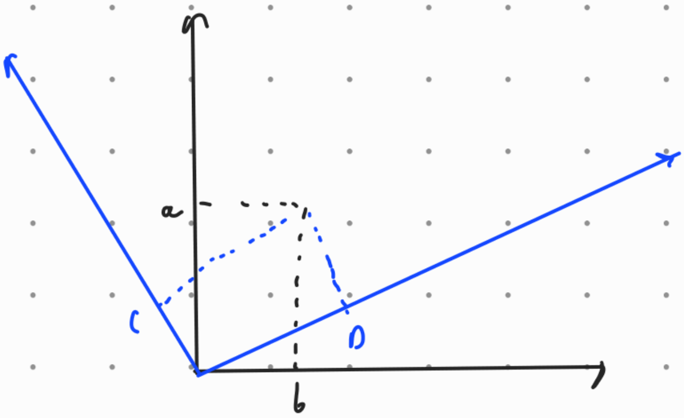
יהיו $B,C$ בסיסים של מ"ו $V$, $v\in V$. אז:

$$[Id_V]^B_C [v]_B = [v]_C$$

**הוכחה**

לפי המשפט מאתמול:

$$[Id_V]^B_C\cdot[v]_B=[Id_V(v)]_C=[v]_C$$




$$[Id]^{\text{בסיס שחור}}_{\text{בסיס כחול}}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

# תכונות של מטריצת המעבר

① אם $V=\mathbb{F}^n$, $C=(e_1,\dots,e_n)$ הבסיס הסטנדרטי,

אז העמודה ה-$j$ של $[Id]_C^B$ היא $u_j = [u_j]_C$

② $[Id_V]_B^B = I_n$

③ $[Id_V]_D^C \cdot [Id_V]_D^B = [Id_V \circ Id_V]_D^B = [Id_V]_D^B$

④ $[Id_V]_B^C \cdot [Id_V]_C^B = [Id_V]_B^B = I_n$

⑤ $[Id_V]_C^B$, $[Id_V]_B^C$ הופכיות זו לזו ובפרט כל אחת מהן הפיכה.