אלגברה ליניארית 1

נושאים

1. מערכות משוואות ליניאריות
2. וקטורים
3. דטרמיננטות
4. העתקות ליניאריות

סימונים והגדרות בסיסיות

- קבוצה היא אוסף של אובייקטים.
- אם איבר x שייך לקבוצה S רושמים: $x \in S$
  אם לא, רושמים: $x \notin S$

דרכי הגדרת קבוצה:

1) ע"י רשימת איברים: $S = \{1, 3, 4\}$
2) ע"י קבוצה נתונה ותנאי: $\{3, 4\} = \{x \in S \mid x > 2\}$
3) ע"י קבוצה נתונה ונוסחה: $\{3, 5, 6\} = \{x + 2 \mid x \in S\}$

חיתוך:

החיתוך של הקבוצות S_1 ו- S_2 הוא קבוצת האיברים המשותפים של S_1 ו- S_2.

$$S_1 \cap S_2$$

- קבוצה שלא שייך לה אף איבר נקראת ריקה ומסומנת $\emptyset = \{\ \}$
- הקבוצה של המספרים הממשיים מסומנת ב- $\mathbb{R}$

פעולת חיבור (כפל) מתאימה לכל $x, y \in \mathbb{R}$ איבר חדש
מ- $\mathbb{R}$ שנקרא סכום (מכפלה) ומסומן ב- $x+y$ $(x \cdot y)$

תכונות של פעולות ב- $\mathbb{R}$

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $x+0=x$
4. לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש- $x+y=0$.
5. $x \cdot y=y \cdot x$
6. $x(y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
7. $x \cdot 1=x$
8. לכל $0 \neq x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש- $x \cdot y=1$.
9. $(x+y)z=x \cdot z+y \cdot z$

n-יה של מספרים ממשיים

הגדרה: ביטוי מהצורה $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ כאשר $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

* ב n-יה יתכנו חזרות וסדר האיברים חשוב!

* $x_1, \ldots, x_n$ נקראות הקואורדינטות של $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

* קבוצת כל ה-n-יות מסומנת ב- $\mathbb{R}^n$, כלומר:

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \middle| \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}}$$

* ב- $\mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר חיבור וכפל באיבר מ- $\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+y_1\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$$

$$c \cdot \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\cdot x_1\\\vdots\\c\cdot x_n\end{pmatrix}$$

משוואה לינארית ב-n נעלמים

הגדרה:

$$\boxed{a_1x_1+\dots\dots+a_nx_n=b}\quad(*)$$

כאשר $a_1,\dots,a_n,b\in\mathbb{R}$ המקדמים של המשוואה,
$x_1,\dots,x_n$ הם הנעלמים.

* n-יה $\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ נקראת פתרון המשוואה $(*)$
כאשר מתקיים: $a_1d_1+\dots+a_nd_n=b$.

דוגמה: $x_1-x_2=1$ אז $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון למשוואה
ואילו $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ אינו פתרון למשוואה.

הצגה פרמטרית של קבוצת הפתרונות

↵ של משוואה $(*)$, כלומר $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; a_1x_1+\dots+a_nx_n=b\right\}$

באופן הבא: $\{u_0+t_1u_1+\dots+t_ku_k \mid t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}\}$

כאשר $u_0,u_1,\dots,u_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in\{0,1,2,3,\dots\}$

דוגמה:

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1-x_2=1\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1=1+x_2\right\}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1+t\\t\end{pmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{\underset{u_0}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}}+t\underset{u_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}} \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$$