המספרים הטבעיים

בכל שדה סדור, 1, 0, -1 הם איברים שונים, כמ״כ:

$$-1 < 0 < 1$$

בשדה סדור יש בהכרח עוד איברים.

$$0 < 1$$

$$1 \underset{(A3)}{=} 1 + 0 \underset{(O3)}{<} 1 + 1$$

מאותו השיקול:

$$1+1 = 1+1+0 < 1+1+1$$

$$\Downarrow$$

$$-1 < 0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots$$

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. $I \subseteq \mathbb{F}$ נקראת קבוצה אינדוקטיבית אם היא מקיימת:

1. $1 \in I$
2. לכל $a \in I$ מתקיים $a+1 \in I$

דוגמאות

(i) יהיו $\mathbb{F}$ שדה סדור, $\mathbb{F}$ קבוצה אינדוקטיבית.

(ii) $\{a\in\mathbb{F} \mid a>0\}$ קבוצה אינדוקטיבית.

(iii) $\{a\in\mathbb{F} \mid a\geq 1\}\cup\{0\}$ קבוצה אינדוקטיבית.

אנטי - דוגמאות

(i) $\{1\}$ אינה קבוצה אינדוקטיבית.

(ii) $\{x\in\mathbb{F} \mid x>1\}$ אינה קבוצה אינדוקטיבית.

(iii) $\{1, 1+1, 1+1+1\}$ אינה קבוצה אינדוקטיבית.

טענה

תהא $\mathcal{A}$ קבוצה (לא ריקה) של קבוצות אינדוקטיביות.

נסמן $I=\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$

כלומר $x\in I$ אמ"מ $x\in A$ לכל $A\in\mathcal{A}$

אזי, I היא קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה

לכל $A\in\mathcal{A}$ מתקיים $1\in A$ (כי A קבוצה אינדוקטיבית)

$\Leftarrow$ $1 \in I$.

נניח ש- $x \in I$.

$\Leftarrow$ $x \in A$ לכל $A \in \mathcal{A}$

$\Leftarrow$ $x+1 \in A$ לכל $A \in \mathcal{A}$

$\Leftarrow$ $x+1 \in I$

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. קבוצת המספרים הטבעיים היא הקבוצה שמתקבלת מחיתוך כל הקבוצות האינדוקטיביות.

נסמן קבוצה זו ב- $\mathbb{N}$

טענה

$\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית.

הוכחה

הוכחנו באופן כללי יותר שכל חיתוך של קבוצות אינדוקטיביות הוא קבוצה אינדוקטיבית.

טענה

אם $I \subseteq \mathbb{N}$ אינדוקטיבית, אז $I = \mathbb{N}$.

הוכחה

מהיות N החיתוך של כל הקבוצות האינדוקטיביות, נובע

ש- $N \subseteq I$ בנוסף נתון ש- $I \subseteq N$,

מכאן $N = I$

משפט עקרון האינדוקציה

נניח שלכל $n \in N$ קיים פסוק לוגי שנסמן $P(n)$

אם $P(1) = True$

ואם לכל $n \in N$ אם $P(n) = True \Rightarrow P(n+1) = True$

אזי $P(n) = True$ לכל $n \in N$

דוגמאות:

(i) $P(n) = \{$ הוא ראשוני $n+1$ $\}$

(ii) $P(1) =$ מחר יכ3 שמש

$P(2) =$ הכבאיות של. ירוקות

$P(n) = \{P(n-1) = True\}$ $\quad n \geq 2$

הוכחה:

נגדיר $I = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = True\}$

נתון $P(1) = True$ כלומר $1 \in I$

$P(n) = True \Rightarrow P(n+1) = True$ כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$

$n \in I \Rightarrow n+1 \in I$

מכיוון ש- $I \subseteq \mathbb{N}$ היא אינדוקטיבית, נובע ש- $I = \mathbb{N}$

כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ $P(n) = True$

טענה: $1 \in \mathbb{N}$

הוכחה: הוכחנו ש- $\mathbb{N}$ היא קבוצה אינדוקטיבית ולכן היא מכילה את 1.

טענה:

לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n+m \in \mathbb{N}$

הוכחה:

יהא $m \in \mathbb{N}$, נוכיח לכל $n \in \mathbb{N}$, $n+m \in \mathbb{N}$

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $P(n) = (n+m \in \mathbb{N})$

נגדיר $I = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = True\}$

$m \in \mathbb{N}$ (נתון)

$\mathbb{N}$ קבוצה אינדוקטיבית (הוכחנו)

$m+1 \in \mathbb{N}$ (מתכונות האינדוקטיביות)

⇐ $P(1) = True$ ⇐ $1 \in I$

נניח $n \in I$

⇐ $P(n) = True$ ⇐ $m+n \in \mathbb{N}$ ⇐ $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$

⇐ $m+(n+1) \in \mathbb{N}$ ⇐ $P(n+1) = True$ ⇐ $n+1 \in I$

מעקרון האינדוקציה נובע ש $P(n) = True$ לכל $n \in \mathbb{N}$

כלומר $n+m \in \mathbb{N}$ לכל $n,m \in \mathbb{N}$

טענה:

לכל $n,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $m \cdot n \in \mathbb{N}$

טענה:

$1 \le n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

הוכחה:

נתבונן בקבוצה $\{a \in \mathbb{F} \mid a \ge 1\}$. זו קבוצה אינדוקטיבית.

⇐ $\mathbb{N} \in I$ כלומר לכל $n \in \mathbb{N}$ מקיים ש- $n \geq 1$

טענה:

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ מתקיים $n-1 \in \mathbb{N}$

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים $1 \neq n \in \mathbb{N}$, כך ש- $n-1 \notin \mathbb{N}$

נתבונן בקבוצה $I = \mathbb{N} \setminus \{n\}$

מכיוון ש- $n \neq 1$ ו- $1 \in \mathbb{N}$ נקבל ש- $1 \in I$

נניח ש- $m \in I$ כלומר $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$

לכן $m+1 \in \mathbb{N}$ ובנוסף $m+1 \neq n$ מההנחה. ⇐ $m+1 \in I$

מכאן I היא קבוצה אינדוקטיבית אך $\mathbb{N} \not\subseteq I$ וזו סתירה.

טענה:

עבור $m,n \in \mathbb{N}$ $m < n$, אזי $n-m \in \mathbb{N}$