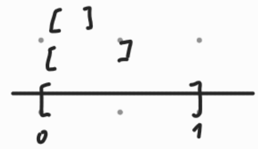
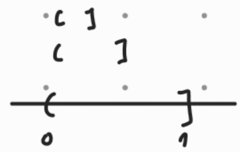
דוגמא 1:



נתבונן בסדרת קטעים $I_n=[0,\frac{1}{n}]$. לכל $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\subset I_n$

אוסף הקטעים (הכנס הקבוצות) מתכנס ל-0. (ענה: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{0\}$

דוגמא 2:



נתבונן בסדרת קטעים $J_n=(0,\frac{1}{n}]$. לכל $n\in\mathbb{N}$ $J_{n+1}\subset J_n$.

אוסף הקטעים (הכנס הקבוצות) מתכנס ל-0. (ענה: $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n=\phi$

הלמה של קנטור

שהוא בכלל מפסל ושו ושו

תהיו $(I_n=[a_n,b_n])$ סדרה של קטעים סגורים המקיימים:

① $I_{n+1}\subseteq I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ② $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

אזי קיימת $c\in\mathbb{R}$ יחידה כך ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{c\}$

הוכחה:

מיחס ההכלה של (I_n), a_n היא סדרה מונוטונית עולה, ו- b_n

היא סדרה מונוטונית יורדת, ולכל n:

* $a_n<b_n\le b_1$, כלומר b_1 חסם מלעיל של a_n.

* $b_n>a_n\ge a_1$, כלומר a_1 חסם מלרע של b_n.

מ המשפט של סדרות מונוטוניות חסומות, קיימים $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$

מאריתמטיקה של גבולות, $0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \beta - \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$ נסמן $c = \alpha = \beta$

נשאר להוכיח: $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ וגם אם $d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ אז $d = c$ (יחידות)

לכל n $a_n \le \sup\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\} \le b_n$

ולכן $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. נניח כי $d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, אז לכל n, $a_n \le d \le b_n$ וגם $a_n \le c \le b_n$

ומכאן $0 \le |d-c| \le b_n - a_n$ הסדרה הקבועה $d-c$ מתכנסת ל-0 ולכן $d=c$.
מסנדוויץ':

תת סדרות

דוגמא: התבוננו בסדרה $a_n = (-1)^n$. הוכחנו שהיא אינה מתכנסת.

דוגמאות לתת - סדרות (לפני שאנו יודעים מה זה)

① תהא a_n סדרה. נגדיר את הסדרה (b_n) ע"י:

$b_n = a_{n+1}$ לכל n. (זו דוגמא לתת סדרה של (a_n))

② $a_n = \frac{1}{n}$, נגדיר $b_1 = a_2,\ b_2 = a_1$, $b_n = a_n$ לכל $n > 2$.

(זו אינה תת-סדרה - כי הסדר לא נשמר)

③ (a_n) סדרה: $b_1 = a_2,\ b_2 = a_3,\ b_3 = a_5,\ b_4 = a_7, \dots, b_n = a_{\pi_n}$ כאשר π_n

הוא המספר הראשוני ה-n. (b_n) תת-ס' של a_n.

④ $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. כלומר $b_n = a_{2n}$

האם (b_n) תת-סדרה של (a_n)? כן...

הגדרה: תהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. הסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ נקראת **תת-סדרה** של (a_n) אם קיימת סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$b_k = a_{n_k}$$

דוגמאות:

④ $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. כלומר $b_n = a_{2n}$

כדי להראות ש-(b_n) תת-סדרה של (a_n) צריך למצוא סדרה עולה ממש של טבעיים כך ש- $b_k = a_{n_k}$ לכל $k \in \mathbb{N}$. נבחר $n_k = 2k$ היא סדרה עולה ממש של טבעיים ו- $b_k = \frac{1}{2k} = \frac{1}{n} = a_{n_k}$

⑤ $a_n = (-1)^n$, $b_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

נתבונן בסדרה $n_k = 2K$ ואז $a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 = b_k$

(כל מספר זוגי ה״ה זוגי)

למה

תהא (P_n) סדרה של פסוקים לוגיים ותהא (n_k) סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. (כלומר $(P_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת-סדרה של $((P_n))$) אזי:

1. $n_k \ge k$ לכל k (באינדוקציה)
2. אם $P_n = True$ החל ממקום מסוים, אז $P_{n_k} = True$ החל ממקום מסוים.
3. אם $P_{n_k} = True$ החל ממקום מסוים, אז לכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ כך ש- $P_n = True$.

הוכחה 2:

נתון שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, $P_n = True$.

לכל $k > N$, מהסעיף הראשון $n_k \ge k > N$ ולכן $P_{n_k} = True$

הוכחה 3:

נתון שקיים $K \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > K$ $P_{n_k} = True$.

יהי $N \in \mathbb{N}$. מכיוון שהסדרה (n_k) אינה חסומה, נבחר $k = \max\{N, K\} + 1$

אזי $n_k > N$, $k > K$, אז נסמן $n = n_k$ אז $P_n = True$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{n^3+17}{n+3}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad n_k = 2k-1$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad b_k = a_{n_k} = \frac{(2k-1)^3+17}{(2k-1)+5}$$