תלות לינארית

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

קבוצה $S \subseteq V$ נקראת תלויה לינארית כאשר קיים $v \in S$ כך ש-

$$v \in span(S \setminus \{v\})$$

תכונות

① אם $0_V \in S$, אז S תלויה לינארית.

הוכחה: $span(S \setminus \{0_V\})$ הוא תת-מרחב, לכן $0_V \in span(S \setminus \{0_V\})$

מכאן S ת"ל.

② אם $S_1 \subseteq S_2$ וגם S_1 ת"ל, אז S_2 ת"ל

הוכחה: קיים $v \in S_1$ כך ש- $v \in span(S_1 \setminus \{v\})$.

מתקיים $v \in S_2$ וגם $S_1 \setminus \{v\} \subseteq S_2 \setminus \{v\}$

מכאן $span(S_1 \setminus \{v\}) \subseteq span(S_2 \setminus \{v\})$

לכן $v \in span(S_2 \setminus \{v\})$, לפיכך S_2 ת"ל.

3. אם $S = \{u\}$ ת"ל אז $u = 0_v$

הוכחה: מתקיים $u \in \operatorname{span}(S \setminus \{u\}) = \operatorname{span} \emptyset = \{0_v\}$

לפיכך $u = 0_v$

4. אם $S = \{u_1, u_2\}$ ת"ל, $u_2, u_1 \neq 0_v$

אז קיים $0 \neq c \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_2 = c \cdot u_1$

הוכחה: מתקיים $u_2 \in \operatorname{span}\{u_1\}$ או $u_1 \in \operatorname{span}\{u_2\}$

במקרה הראשון קיים $c \in \mathbb{F}$ כך ש $u_2 = cu_1$
$c \neq 0$ כי אחרת $u_2 = 0_v$

במקרה השני קיים $d \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_1 = du_2$
$d \neq 0$ כי אחרת $u_1 = 0_v$

מכאן $u_2 = d^{-1} d u_2 = d^{-1} u_1$

צירוף לינארי טריוויאלי

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}$

צירוף לינארי $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ נקרא טריוויאלי כאשר $c_1 = \dots = c_n = 0_{\mathbb{F}}$

הערה: ניתן לקבל 0_v גם מצירוף לינארי שהוא לא טריוויאלי

טענה

יהי V מ"ו, $S \subseteq V$, אז S ת"ל אם ורק אם

קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של וקטורים מ-S שונים זה מזה

ששווה ל-0_V.

הוכחה

($\Leftarrow$) נניח כי S ת"ל, אזי קיים $v \in S$ כך ש- $v \in \text{span}(S \setminus \{v\})$,

כלומר, קיימים $u_1, \dots, u_k \in S \setminus \{v\}$ ו- $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{F}$

כך ש- $v = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$

בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי $u_i \neq u_j$ עבור $i \neq j$ כי

אחרת נכנס מחוברים בצ"ל שבהם מופיע אותו וקטור ונקבל

צ"ל של וקטורים שונים זה מזה.

מכאן, $c_1 \cdot u_1 + \dots + c_k u_k + (-1) v = 0_V$

כלומר, מצאנו צ"ל לא טריוויאלי ששווה ל- 0_V.

($\Rightarrow$) נניח כי קיים צ"ל לא טריוויאלי של וקטורים מ- S שונים זה מזה

ששווה ל- 0_V. כלומר, קיימים $v_1, \dots, v_n \in S$ שונים זה מזה,

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ לא כולם 0, כך ש:

$$c_1v_1+\dots+c_nv_n=0_V$$

קיים $1\le i\le n$ כך ש- $c_i\neq 0$, אז מתקיים:

$$c_iv_i=-c_1v_1-\dots-c_{i-1}v_{i-1}-c_{i+1}v_{i+1}-\dots-c_nv_n$$

מכאן:

$$v_i=-c_i^{-1}c_1v_1-\dots-c_i^{-1}c_{i-1}v_{i-1}-c_i^{-1}c_{i+1}v_{i+1}-\dots-c_i^{-1}c_nv_n\in span(S\setminus\{v_i\})$$

לכן S ת"ל.

דוגמא: $V=\mathbb{F}^n$, $S=\{e_1,\dots,e_n\}$

אז S אינה תלויה לינארית.

נניח בשלילה שקיים $1\le i\le n$ כך ש-

$$e_i\in span\{e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots,e_n\}$$

אז קיימים סקלרים $c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_n\in\mathbb{F}$

כך ש- $e_i=c_1e_1+\dots+c_{i-1}e_{i-1}+c_{i+1}e_{i+1}+\dots+c_ne_n$ סתירה!

הקואורדינטה ה-i של הביטוי באגף ימין היא 0 ואילו הקואורדינטה

ה-i של e_i היא 1 - סתירה.

סדרת וקטורים

יהי V מ"ו באורך n ל וקטורים מ- V היא $(v_1,\dots,v_n)$

כאשר $V \ni v_1,\dots,v_n$.

הגדרה: $span(v_1,\dots v_n) = \{c_1v_1+\dots+c_nv_n \mid c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}\}$

הערה: $span(v_1,\dots,n) = span\{v_1,\dots,v_n\}$

סדרה תלויה לינארית

סדרה $(v_1,\dots,v_n)$ נקראת תלויה לינארית כאשר קיימים

$c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ לא כולם 0 כך ש- $c_1v_1+\dots+c_nv_n = 0_V$.

בקבוצה זה לא יכול להיות כי אין חזרות

תכונה 1

אם $(v_1,\dots,v_n)$ היא כך ש- $v_i=v_j$ עבור $i\neq j$,

אז הסדרה תלויה לינארית, כי ניתן לבחור:

$c_i=1$, $c_j=-1$, $c_k=0$ לכל $1\leq k\leq n$, $k\neq i,j$

תכונה 2

אם $(v_1,\dots,v_n)$ היא כך ש- $v_i\neq v_j$ לכל $i\neq j$,

אז הסדרה ת"ל אמ"ם הקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ ת"ל.

טענה

יהיו $v_1,\dots v_n \in \mathbb{F}^m$

נסמן ב- $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המטריצה שהעמודה ה-j שלה היא v_j.

אז $(v_1,\dots,v_n)$ ת"ל אמ"מ למערכת המשוואות $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ יש יותר מפתרון אחד.

כלומר הפתרון שהוא לא רק אפסים

הוכחה:

$(v_1,\dots,v_m)$ ת"ל אמ"מ

קיימים $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ לא כולם 0 כך ש- $c_1v_1+\dots+c_nv_n=0$

אמ"מ קיים $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ כך ש- $A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

אמ"מ למ"מ $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ קיים פתרון שונה מ- $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$