פעולות שורה אלמנטריות

תהי A מטריצה בעלת m שורות.

נסמן ב- $R_1, \dots, R_m$ את השורות של A.

פעולות שורה אלמנטריות הן:

1. החלפת R_i ו- R_j: $R_i \leftrightarrow R_j$
2. כפל R_i ב- $0 \neq c \in \mathbb{R}$: $R_i \to cR_i$
3. הוספה ל- R_i כפולה של R_j, $j \neq i$: $R_i \to R_i + cR_j$

הערה: לכל אחת מפעו׳ קיימת פעו׳ הפוכה.

1. ההפוכה ל- $R_i \leftrightarrow R_j$ היא $R_i \to R_j$
2. ההפוכה ל- $R_i \to cR_i$ היא $R_i \to \frac{1}{c}R_i$
3. ההפוכה ל- $R_i \to R_i + cR_j$ היא $R_i \to R_i - cR_j$

טענה:

נתונות שתי מערכות של m משוואות לינאריות ב- n נעלמים עם מטריצות מורחבות A ו- B.

* אם B מתקבלת מ- A ע״י קיבוץ פעו׳ כלשהי, אז קבוצת הפתרונות של המערכת הראשונה שווה לקבוצת הפתרונות של המערכת השנייה.

הוכחה:

יהי $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ פתרון של המערכת הראשונה. $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ \vdots&&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right)$

נראה כי $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון של המערכת השנ"ה.

נתייחס ל-3 סוגים של פש"ט:

סוג 1 הצבה ברור

סוג 2 אם $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון של המשוואה $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n=b_i$

אז $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון של המשוואה $ca_{i1}x_1+\dots+ca_{in}x_n=cb_i$

סוג 3 אם $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון של $a_{i1}x_1+\dots+a_{in}x_n=b_i$

$a_{j1}x_1+\dots+a_{jn}x_n=b_j$

אז $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ פתרון של $(a_{i1}+ca_{j1})x_1+\dots+(a_{in}+ca_{jn})x_n=b_i+cb_j$

* מאחר שלכל פעולה קיימת פעולה הפוכה, A מתקבלת מ-B ע"י פש"ט כלשהי.

לכן, לפי אותו נימוק כמו מקודם, אם $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ הוא פתרון של מערכת המשוואות השנייה, אז $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ הוא פתרון של מערכת המשוואות הראשונה.

מטריצות שקולות שורה

הגדרה: יהיו A ו-B מטריצות בעלות m שורות ו-n עמודות. נאמר כי B שקולת שורה ל-A, כאשר ניתן לקבל את B מ-A ע"י סדרה של פעש"א.

תכונה: אם B שקולת שורה ל-A, אז A שקולת שורה ל-B.

מסקנה: אם נתונות שתי מערכות משוואות ליניאריות, כך שהמטריצות המורחבות שלהן שקולות שורה, אז קבוצות הפתרונות של המערכות הללו, שוות.

טענה: כל מטריצה שקולת שורה למטריצה מדורגת מצומצמת כלשהי!

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כפל מטריצה בוקטור

* נסמן ב- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ את הקבוצה של כל המטריצות בעלות m שורות ו- n עמודות עם מקדמים ממשיים.

תהי: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

נסמן ב- $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^m$ את העמודות של A.

נגדיר את המכפלה של A ב- v באופן הבא:

$$\boxed{Av = v_1 \cdot c_1 + \dots + v_n \cdot c_n = \sum_{i=1}^{n} v_i c_i \in \mathbb{R}^m}$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 20 \\ 2 & 30 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Av = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 66 \\ 94 \end{pmatrix}$$

הערה: נתונה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נסמן מטריצה של המערכת ב- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

בנוסף נסמן $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

אז ניתן לרשום את המערכת באופן הבא: $Ax = b$

הגדרה: יהיו

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

אז הקואורדינטה ה-i של Av היא

$$v_1 a_{i1} + v_2 a_{i2} + \dots + v_n a_{in}$$

תכונות

1. $$\underset{\in \mathbb{R}^n}{A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{\in \mathbb{R}^m}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2. אם השורה ה-i של A היא שורת אפסים
אז הקואורדינטה ה-i של Av היא אפס.