למה

בכל עץ בעל יותר מקודקוד אחד, יש עלה.

הוכחה

יהי $G(V,E)$ עץ, יהי $v_0 \in V$.

אם $\deg v = 0$, אז מאחר ש-G קשיר, מתקיים $V=\{v\}$

וזו סתירה. לכן, $\deg v_0 \geq 1$.

תהי $(v_0,v_1,\dots,v_n)$ מסילה פשוטה מקסימלית שמתחילה ב-v_0.

נוכיח כי v_n הוא עלה.

יהי $w \in V$ כך ש $\{v,w\} \in E$

אם לכל $0 \leq i \leq n-1$ מתקיים $w \neq v_i$ אז $(v_0,\dots v_n,w)$

מסילה פשוטה וקיבלנו סתירה עם המקסימליות של $(v_0,v_1,\dots,v_n)$

אם קיים $0 \leq i \leq n-2$ כך ש-$w=v_i$ אז $(v_i,v_{i+1},\dots,v_n,w)$

הוא מעגל פשוט - סתירה עם זה ש-G עץ.

מכאן v_{n-1} הוא השכן היחיד של v_n ולכן $\deg v_n = 1$

כלומר v_n עלה.

טענה

יהי $G=(V,E)$ עץ, אז $|V|-|E|=1$

הוכחה

באינדוקציה ב- $|V|$.

בסיס: יהי $|V|=1$, אז $E=\emptyset$ ולכן: $|V|-|E|=1-0=1$

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור כל גרף G עם $|V|=n$

יהי גרף $G=(V,E)$ כך ש- $|V|=n+1$.

לפי הלמה, קיים $v\in V$ עלה.

תהי $e\in E$ כך ש- $v\in e$.

נגדיר $G'=(V\setminus\{v\}, E\setminus\{e\})$

אז G' הוא עץ כי אין בו מעגלים פשוטים,

וגם הוא קשיר (כי הורדנו מ- G עלה.)

בנוסף, $|V\setminus\{v\}|=|V|-1=n$ $\quad |E\setminus\{e\}|=|E|-1$

לכן G' מקיים את הנחות האינדוקציה ולכן

$$|V|-|E|=(|V|-1)-(|E|-1)=|V\setminus\{v\}|-|E\setminus\{e\}|=1$$

טענה

יהי $G=(V,E)$ גרף ללא מעגלים פשוטים, כך ש-

$$|V|-|E|=1$$

אז G קשיר.

הוכחה

יהיו $V_1,\dots,V_\ell$ רכיבי הקשירות של G.

לכל $1\le i\le \ell$ נסמן $E_i=\{\{u,w\}\in E \mid u,w\in V_i\}$

מתקיים $E_i\cap E_j=\emptyset$ וגם $E_1\cup\dots\cup E_\ell=E$

מכאן $|E_1|+\dots+|E_\ell|=|E|$

בנוסף, לכל $1\le i\le \ell$, הגרף $G_i=(V_i,E)$ הוא עץ,

כי הוא קשיר וחסר מעגלים פשוטים.

לכן, לפי הטענה הקודמת, מתקיים $|V_i|-|E_i|=1$ מתקיים:

$$1=|V|-|E|=\left(|V_1|+\dots+|V_\ell|\right)-\left(|E_1|+\dots+|E_\ell|\right)=\left(|V_1|-|E_1|\right)+\dots+\left(|V_\ell|-|E_\ell|\right)=$$

$$=\underbrace{1+\dots+1}_{\ell}=\ell$$

לכן ל-G יש רכיב קשירות אחד ולכן G קשיר.

טענת עזר

יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר.

יהי $(v_0,\dots,v_n)$ מעגל פשוט ב- G.

אז הגרף $G'=(V,E\setminus\{\{v_0,v_n\}\})$ קשיר.

הוכחה

יהיו $u,w\in V$. מכיוון ש- G קשיר, קיים מסלול ב- G

שמחבר ביניהם: $(u=w_0,\dots,w_k=w)$

אם לכל $1\le i\le k$ מתקיים $\{v_0,v_n\}\neq\{w_{i-1},w_i\}$, אז מסלול זה

הוא מסלול ב- G' ולכן u,w מקושרים ב- G'.

אחרת קיים $1\le i\le k$ כך ש- $\{w_{i-1},w_i\}=\{v_0,v_n\}$, אז

$(w_i=v_n$ וגם $w_{i-1}=v_0)$ I או $(w_i=v_0$ וגם $w_{i-1}=v_n)$ II

- במקרה I המסלול $(u=w_0,w_1,\dots,w_{i-1}=v_0=v_n,v_{n-1},\dots,v_2,v_1=w_i,w_{i+1},\dots,w_k=w)$

הוא מסלול ב- G' שמחבר בין u ל- w.

- במקרה II המסלול $(u=w_0,w_1,\dots,w_{i-1}=v_1,v_2,\dots,v_{n-1},v_n=v_0=w_i,w_{i+1},\dots,w_k=w)$

הוא מסלול ב- G' שמחבר בין u ל- w.

בכל מקרה u,w מחוברים ב- G'.

לכן, G' קשיר.

טענה

אם $G=(V,E)$ גרף קשיר כך ש- $|V|-|E|=1$,

אז ב- G אין מעגלים פשוטים.

תזכורת מהשיעור הקודם

כמות רכיבי הקשירות בגרף $G=(V,E)$ גדולה או שווה ל- $|V|-|E|$.

הוכחה

נניח בשלילה כי ב- G קיים מעגל פשוט: $(v_0,v_1,\dots,v_n)$

לפי טענה העזר, הגרף $G'=(V,E\setminus\{\{v_0,v_1\}\})$ קשיר.

מתקיים $|E\setminus\{\{v_0,v_1\}\}|=|E|-1$

אז לפי הטענה מהשיעור הקודם, כמות רכיבי הקשירות ב- G', גדולה

או שווה ל- $|V|-|E\setminus\{\{v_0,v_1\}\}|=|V|-(|E|-1)=(|V|-|E|)+1=2$

לכן G' לא קשיר - סתירה.

משפט סיכום

יהי: $G=(V,E)$ גרף.

כל 2 מתוך שלושת התנאים הבאים, גוררים את השלישי.

1. G קשיר.
2. ב- G אין מעגלים פשוטים.
3. $|V|-|E|=1$