## טענה.

יהי $V$ מ"ו נ"ס, $f:V\to V$ ט"ל, $B, C$ בסיסים של $V$ כך ש-

$[f]_B, [f]_C$ הן מטריצות ז'ורדן. אז $[f]_C$ מתקבלת מ-$[f]_B$

ע"י שינוי סדר בלוקי ז'ורדן.

## הוכחת הטענה:

נסמן $[f]_B = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_r) \end{pmatrix}$, $[f]_B = \begin{pmatrix} J(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\mu_s) \end{pmatrix}$

אז $\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ ה"ה קבוצת הערכים העצמיים של $f$.

כנ"ל לגבי $\{\mu_1,\dots,\mu_s\}$. לכן $\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}=\{\mu_1,\dots,\mu_s\}$, ובפרט $r=s$.

לכן, ע"י שינוי סדר הווקטורים של הבסיס $C$, ניתן לקבל בסיס $B'$

כך ש- $[f]_{B'} = \begin{pmatrix} J'(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J'(\lambda_r) \end{pmatrix}$ כאשר $\{J'(\lambda_1),\dots,J'(\lambda_r)\} = \{J(\mu_1),\dots,J(\mu_r)\}$

יהיו $l_1,\dots,l_r,l_1',\dots,l_r' \in \mathbb{N}$ כך ש- $J(\lambda_i)\in M_{l_i\times l_i}(\mathbb{F})$, $J'(\lambda_i)\in M_{l_i'\times l_i'}(\mathbb{F})$

אז $(x-\lambda_1)^{l_1'}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{l_r'} = \chi_f = (x-\lambda_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{l_r}$

מכאן $l_1'=l_1,\dots,l_r'=l_r$. נסמן $B=(u_1^1,\dots,u_{l_1}^1,\dots\dots,u_1^r,\dots,u_{l_r}^r)$, $B'=(w_1^1,\dots,w_{l_1}^1,\dots\dots,w_1^r,\dots,w_{l_r}^r)$

עפ"י הטענה משיעור קודם: $\mathrm{Span}(u_1^i,\dots,u_{l_i}^i) = V^{\lambda_i} = \mathrm{Span}(w_1^i,\dots,w_{l_i}^i)$.

וגם $[f|_{V^{\lambda_i}}]_{B_i} = J(\lambda^i)$ וגם $[f|_{V^{\lambda_i}}]_{B_i'} = J'(\lambda_i)$.

מכאן $[(f-\lambda id_V)|_{V^{\lambda_i}}]_{B_i} = J(\lambda_i)-\lambda_i I_{l_i}$ וגם $[(f-\lambda id_V)|_{V^{\lambda_i}}]_{B_i'} = J'(\lambda_i)-\lambda_i I_{l_i}$.

משותף שמטריצות אלה הן בלוקי ז'ורדן נילפוטנטיים שמייצגים את האופרטור הנילפוטנטי $f-\lambda id_V|_{V^{\lambda_i}}$, הן צריכות להיות שוות, ולכן $J'(\lambda_i)=J(\lambda_i)$.

## טענה.

בהינתן מטריצת ז'ורדן, לכל $1\le i\le r$, נסמן ב- $t_i$ את הגודל של הבלוק הז'ורדן הנילפוטנטי הראשון במטריצה $J(\lambda_i)$. אזי הפולינום המינימלי של האופרטור הינו $(x-\lambda_1)^{t_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_r)^{t_r}$.

## הוכחת הטענה:

לכל $1\le i\le r$ נסמן $Q_i=(x-\lambda_i)^{t_i}$, $Q=Q_1\cdot\ldots\cdot Q_r$.

אינדקס הנילפוטנטיות של המטריצה $J(\lambda_i)-\lambda_i I_{l_i}$ הוא $t_i$.

לכן, אינדקס הנילפוטנטיות של $(f-\lambda_i id_V)|_{V^{\lambda_i}}$ גם שווה ל- $t_i$.

אז לכל $1\le j\le l_i$ מתקיים $Q_i(f)(v_j^i) = (f-\lambda_i id_V)^{t_i}(v_j^i)=0$

מכאן $Q(f)(v_j^i)=0$ ולכן $Q(f)(v)=0$ לכל $v\in V$, כלומר $Q(f)=0$.

לפיכך $\mu_f \mid Q$.

הפולינום המינימלי של $v_1^i$ ביחס ל- $(f-\lambda_i \cdot id_V)$ הוא $x^{t_i}$

כי $(f-\lambda_i id_V)(v_j^i)=v_{j+1}^i$ לכל $1\le j\le t_i-1$, ו- $(f-\lambda_i id_V)(v_{t_i}^i)=0$.

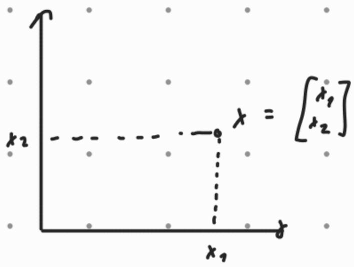
מכאן הפולינום המינימלי של $v_1^i$ ביחס ל- $f$ הוא $(x-\lambda_i)^{t_i}$

לכן $Q_i \mid m_f$, מכאן $Q \mid m_f$, ולכן $m_f = Q$

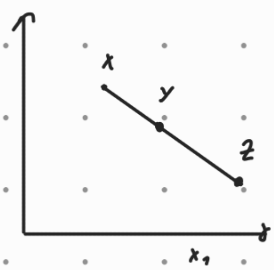
# מכפלה פנימית

ציון

נתבונן ב- $\mathbb{R}^2$ ונתייחס לכל $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ נקודה במישור.




אז הנקודות $x,y,z$ במישור נמצאות על אותו ישר אמ"מ קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $c(x-z)=y-z$.




אבל יש דברים שאי אפשר להביע כך בעזרת חיבור וכפל בסקלר:

לדוגמא: מרחק בין שתי נקודות.

**הגדרה:** **מכפלה סקלארית** ב- $\mathbb{R}^2$ מוגדרת באופן הבא:

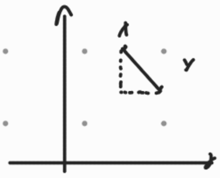
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = x_1y_1+x_2\cdot y_2$$

נסמן ב- $0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. אז המרחק מ- $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ל- $0$ הוא:

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{x\cdot x}$$

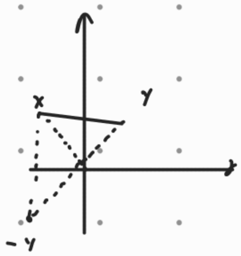
מכפלה סקלרית

בדומה, המרחק מ- $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ל- $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$ הוא:




$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}=\sqrt{(y-x)(y-x)}$$

יהיו $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, אז הזווית $xOy$ ישרה אמ"מ המרחק מ- $x$ ל- $y$ שווה למרחק מ- $x$ ל- $(-y)$, כלומר:




$$\sqrt{(x-y)(x-y)}=\sqrt{(x-(-y))(x-(-y))}=\sqrt{(x+y)(x+y)}$$

לכן שקול לכך ש-

$$(x-y)(x-y)=(x+y)(x+y)$$
$$\Updownarrow$$
$$x\cdot x-2xy+yy=xx+2xy+yy$$
$$\Updownarrow$$
$$4xy=0$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{xy=0}$$