שחלוף מטריצות

הגדרה: תהי $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

המטריצה $A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ נקראת המטריצה המשוחלפת

של A.

דוגמא: אם $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6\end{pmatrix}$ אז $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

שיקוף ביחס לאלכסון

תזכורת: המספר שמופיע בחיתוך השורה ה-i והעמודה ה-j של מטריצה K מסומן ב- k_{ij}.

תכונה: $(A^t)_{ij}=a_{ji}$

טענה: תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{l\times m}$ אז

$$(BA)^t=A^t\cdot B^t$$

הוכחה: מתקיים $(BA)^t, A^tB^t\in M_{n\times l}(\mathbb{R})$.

נסמן: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{l1} & \cdots & b_{lm}\end{pmatrix}$

יהיו i,j כך ש- $1\le j\le l$, $1\le i\le n$. אז מתקיים:

$$((BA)^t)_{ij}=(BA)_{ji}=\sum_{r=1}^{m} b_{jr}\cdot a_{ri}$$

$$(A^tB^t)_{ij} = \sum_{r=1}^{m} (A^t)_{ir}\cdot(B^t)_{rj} = \sum_{r=1}^{m} a_{ri}\cdot b_{jr}$$

לכן $(BA)^t = A^tB^t$

טענה: תהי $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$.

אזי A הפיכה, אם״ם A^t הפיכה.

בנוסף המטריצה ההופכית של A^t היא השחלוף של המטריצה ההופכית של A.

הוכחה: נסמן את המטריצה ההופכית ל-A ב-B. אזי מתקיים:

$$A^t\cdot B^t = (BA)^t = (I_m)^t = I_m$$

לכן A^t, B^t הופכיות זו לזו.

מטריצות סימטריות

הגדרה: מטריצה $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ נקראת סימטרית כאשר $A^t = A$

דוגמא: $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ - סימטרית $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ - לא סימטרית

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$$

טענה: תהי מטריצה $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ הפיכה וסימטרית,

אזי המטריצה ההופכית ל-A גם סימטרית.

הוכחה: נסמן את המטריצה ההופכית ל- A ב- B.

$$B^t = I_m B^t = (BA)B^t = B(A^t B^t) = B I_m = B$$

לכן B סימטרית.

פרק שני

שדות

הגדרה: קבוצה $\mathbb{F}$ עם שני איברים מיוחדים שונים

בה מצה המסומנים ב- $0_{\mathbb{F}}$ ו- $1_{\mathbb{F}}$

ושתי פעולות המכונות חיבור וכפל.

נקראות שדה כאשר מתקיימות האקסיומות הבאות:

4 חיבור:

(1) $a+b=b+a$ לכל $a,b\in\mathbb{F}$

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$

(3) $a+0_{\mathbb{F}}=a$ לכל $a\in\mathbb{F}$

(4) לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים $-a\in\mathbb{F}$ כך ש- $a+(-a)=0_{\mathbb{F}}$

4 כפל:

(5) $ab=ba$ לכל $a,b\in\mathbb{F}$

(6) $(ab)c=a(bc)$ לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$

ז) $a\cdot 1_{\mathbb{F}}=a$ לכל $a\in\mathbb{F}$

ח) לכל $a\in\mathbb{F}$, $a\neq 0_{\mathbb{F}}$ קיים $a^{-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $a\cdot a^{-1}=1$

ט) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$

דוגמאות:

1) $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R} \mid$ קיימים a שלם, b טבעי כך ש- $x=\frac{a}{b}\}$

3) $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$0_{\mathbb{C}}=0+0i$ $\quad$ $1_{\mathbb{C}}=1+0i$

4) $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

x	0	1
0	0	0
1	0	1

תכונות של שדות

יהי $\mathbb{F}$ שדה, אז מתקיימות התכונות הבאות:

1) אם $d\in\mathbb{F}$ כך שלכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $a+d=a$

אז $d=0_{\mathbb{F}}$

הוכחה: מתקיים

$$d \underset{3}{=} d + 0_F \underset{1}{=} 0_F + d \underset{\text{נתון}}{=} 0_F$$