1 זרימה ורשתות $Network\ Flow$

1.1 מציאת זרימה מקסימלית בעזרת אלגוריתם $F\&F$

1.1.1 הגדרות לא פורמליות:

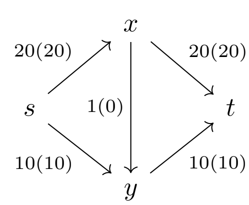
המטרה שלנו היא למדל זרימה ברשת. רשת זה גרף מכוון עם קיבולים חיוביים על הצלעות, עם שני קודקודים מיוחדים - קודקוד המקור ממנו יוצאת הזרימה וקודקוד הבור אליו הזרימה נכנסת. זרימה (חוקית) ברשת היא פונקציה אי-שלילית על צלעות הגרף המקיימת שני תנאים:

1. אילוץ הקיבול - הזרימה בצלע אינה גדולה מהקיבול של הצלע.
2. חוק שימור החומר - לכל קודקוד בגרף (חוץ מהמקור והבור) הזרימה הנכנסת לקודקוד שווה לזרימה היוצאת מהבור.

שטף הזרימה ברשת מוגדר באופן הבא - כמות הזרימה הכוללת היוצאת מהמקור. באופן שקול, זו כמות הזרימה הנכנסת לבור.

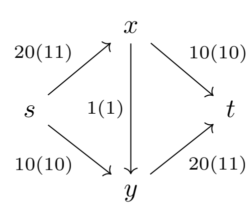
1.1.2 דוגמאות

1. נתבונן בדוגמא הבאה:



מחוץ לסוגריים הקיבול, בתוך הסוגריים - זרימה שנותנת שטף זרימה מקסימלי $|f| = 30$.

2. נתבונן בדוגמא הבאה:



מחוץ לסוגריים הקיבול, בתוך הסוגריים - זרימה שנותנת שטף זרימה מקסימלי $|f| = 21$.

1.1.3 הגדרות פורמליות:

1. רשת זרימה: היא חמישייה $N = (V, E, c, s, t)$ כאשר $G = (V, E)$ הוא גרף מכוון. כאשר $c : E \to \mathbb{R}_{>0}$ היא פונקציית הקיבול, $s \in V$ הוא קודקוד המקור, $t \in V$ הוא קודקוד הבור.
2. זרימה חוקית: ברשת זרימה N היא פונקציה $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את האילוצים הבאים:

(א) אילוץ הקיבול: לכל $e \in E$ מתקיים $0 \le f(e) \le c(e)$.

(ב) חוק שימור החומר: לכל $x \in V$, $x \neq s.t.$, מתקיים $\sum_{\substack{u\in V\\(x,u)\in E}} f(x,u) = \sum_{\substack{u\in V\\(u,x)\in E}} f(u,x)$

3. שטף הזרימה: בהינתן רשת זרימה N וזרימה f ברשת, נגדיר את השטף של f להיות:

$$|f| = \sum_{\substack{v\in V\\(s,c)\in E}} f(s,v)$$

הבעיה: בהינתן רשת זרימה N נרצה למצוא זרימה f ב-N בעלת שטף זרימה מירבי.

הערה: ניתן לפתור עם תכנון ליניארי = נגדיר אלגוריתם יעיל (וטוב) יותר.

מספר הנחות מקלות על הקלט

1. אין ברשת צלעות הנכנסות למקור או היוצאות מהבור.
2. אין לולאות.
3. כל הקיבולים ברשת הם מספרים שלמים.

1.1.4 טענות:

תכונות של מרחב הפתרונות החוקיים (הזרימות):

1. המרחב לא ריק - כי זרימת האפס היא זרימה חוקית (עם שטף 0).
2. מרחב הפתרונות מוגדר ע"י שוויונות ליניאריים ולכן הוא פאון, ולכן קבוצה קמורה.

אבחנות

- אם f, g זרימות ברשת, אז גם $\frac{f+g}{2}$ זרימה ברשת.
- אם f, g זרימות ברשת, אז גם $f + g$ היא זרימה בתנאי שהיא מקיימת את אילוץ הקיבול.

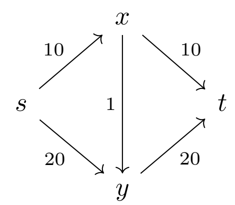
1.1.5 ניסיון ראשוני לאלגוריתם:

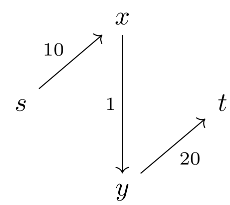
רעיון אלגוריתם איטרטיבי שבכל שלב מוצא מסילה מכוונת פשוטה בין s ל-t, מוצא זרימה מקסימלית אפשרית במסלול בלי לפגוע באילוץ הקיבול ומוסיף לזרימה שיש כרגע ברשת. האלגוריתם עוצר כאשר אין עוד מסילות מהמקור לבור.

תובנות על האלגוריתם

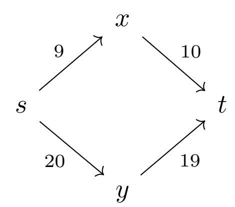
1. הקיבול האפקטיבי של הצלע = הקיבול המקורי פחות הזרימה בצלע.
2. הרשת כל הזמן משתנה, מעניין אותנו הגרף שמכיל רק את הצלעות שהקיבלו האפקטיבי שלהן גדול מ-0.

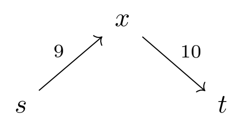
דוגמא

$N_0 =$ 

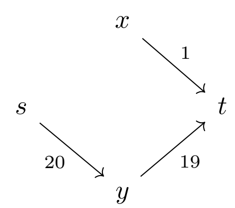
$p_1 =$ 

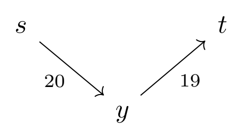
$f_1 = 1$

$N_1 =$ 

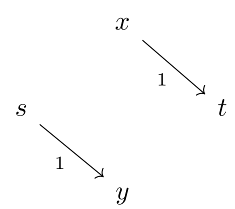
$p_2 =$ 

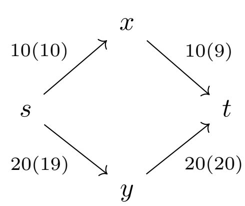
$f_2 = 9$

$N_2 =$ 

$p_3 =$ 

$f_3 = 19$

$N_4 =$ 

$solution =$ 

אז $|f^*| = 30 \leq 29 = f_1 + f_2 + f_3 = f$ ומכאן שהאלגוריתם אינו אופטימלי.

1.1.6 למת הכנה לאלגוריתם אופטימלי:

למה טכנית תהי N רשת זרימה, אז קיימת זרימה אופטימלית f ברשת זו עם התכונה הבאה: לא קיימים שני קודקודים x, y ברשת כך ש-$(x,y) \in E$, $(y,x) \in E$ ו-$f(x,y) > 0$, $f(y,x) > 0$.

הוכחת הלמה תהי g זרימה אופטימלית ברשת N. נגדיר:

$$B = \left\{ \{x, y\} : \begin{array}{c} (x,y) \in E \\ (y,x) \in E \\ g(x,y) > 0 \\ g(y,x) > 0 \end{array} \right\}$$

אם $B = \emptyset$, אז $f = g$ וסיימנו. אחרת, נגדיר f על צלעות הרשת באופן הבא: תהי $(a,b) = e \in E$. אם $\{a,b\} \notin B$ נגדיר $f(a,b) = g(a,b)$. אחרת נגדיר $f(a,b) = g(a,b) - min\{(g(a,b), g(b,a))\}$. עם הסתכלות קדימה, נשים לב כי $0 \leq f(a,b) \leq g(a,b)$. נוכיח כי f היא זרימה חוקית אופטימלית ברשת N המקיימת את תנאי הלמה.

1. <u>חוקיות:</u> לכל $e \in E$ מתקיים $0 \leq f(e) \leq g(e) \leq c(e)$ ולכן f מקיימת את אילוץ הקיבול. כדי להוכיח את חוק שימור החומר עבור f, נשים לב כי במעבר בין f ל-g, כמות הזרימה הנכנסת וכמות הזרימה היוצאת עבור כל קודקוד $x \in V$, קטנות באותה המידה. אזי, מכיוון ש-g היא זרימה חוקית ולכן מקיימת את חוק שימור החומר, גם f מקיימת זאת. לכן f זרימה חוקית.
2. <u>אופטימליות:</u> נראה כי $|f| = |g|$. תהי (s,v) עבור $v \in V$ צלע היוצאת מקודקוד המקור. לפי ההנחה, אין צלעות הנכנסות לקודקוד המקור, ולכן $(v,s) \notin E$. לכן, $\{s,v\} \notin B$ ולכן $f(S,v) = g(s,v)$. זה נכון לכל צלע היוצאת מהמקור ולכן $|f| = \sum_{\substack{v \in V \\ (s,v) \in E}} f(s,v) = \sum_{\substack{v \in V \\ (S,v) \in E}} g(s,v) = |g|$.
3. <u>תנאי הלמה:</u> נניח בשלילה כי קיימים קודקודים $x, y \in V$ כך ש-$(x,y), (y,x) \in E$ וכך ש-$f(x,y) > 0, f(y,x) > 0$. מכיוון שלכל $e \in E$, $f(e) \leq g(e)$, מתקיים כי $g(x,y) > 0$ וגם $g(y,x) > 0$. כלומר $\{x,y\} \in B$. נניח בה"כ כי $g(x,y) \geq g(y,x)$, ולכן על פי הגדרת f, מתקיים $f(y,x) = g(y,x) - min\{g(x,y), g(y,x)) = 0$ בסתירה להנחה.

1.1.7 הגדרות הכנה לאלגוריתם אופטימלי:

הגדרה 1 <u>הרחבה של רשת זרימה</u> - תהי $N = (V, E, c, s, t)$ רשת זרימה (רגילה). ההרחבה של רשת זו היא הרבעייה $N' = (V, c', s, t)$ כאשר c' היא פונקציית קיבול מורחבת $c' : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ עבור כל $x, y \in V$ נגדיר

$$c'(x,y) = \begin{cases} c(x,y) & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

הגדרה 2 <u>רשת זרימה מורחבת</u> - היא רביעייה $N' = (V, c', s, t)$ כאשר $c' : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ היא פונקציית קיבול מורחבת, $s \in V$ הוא קודקוד המקור, $t \in V$ הוא קודקוד הבור.

למה 1 תהא $N = (V, E, c, s, t)$ רשת זרימה. תהא $N' = (V, c', s, t)$ הרחבה של N אזי N' היא רשת זרימה מורחבת.

הגדרה 3 הרחבה של זרימה - תהי N רשת זרימה (רגילה) ותהי f זרימה רגילה ברשת זו המקיימת את התנאי הבא: אין x, y כך ש-$(x, y) \in E$, $(y, x) \in E$ ו-$f(x, y) > 0$, $f(y, x) > 0$. אז ההרחבה f' של f היא הפונקציה $f' : V \times V \to \mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא לכל $x, y \in V$:

$$f'(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in E, f(x, y) > 0 \\ -f(y, x) & (y, x) \in E, f(y, x) > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

הגדרה 4 זרימה מורחבת ברשת זרימה מורחבת - תהי $N' = (V, c', s, t)$ רשת זרימה מורחבת. זרימה מורחבת f' ברשת זו היא פונקציה $f' : V \times V \to \mathbb{R}$ המקיימת 3 אילוצים:

1. אנטי סימטריה: לכל $x, y \in V$ מתקיים $f'(x, y) = -f'(y, x)$.
2. אילוץ הקיבול: לכל $x, y \in V$ מתקיים $f'(x, y) \leq c'(x, y)$.
3. חוק שימור החומר: לכל $x \in V$ כך ש- $x \neq s, t$ מתקיים $\sum_{v \in V} f'(x, v) = 0$.

למה 2 תהי f זרימה (רגילה) ברשת זרימה (רגילה) N. אזי ההרחבה f' של f היא זרימה מורחבת ברשת המורחבת N' שהיא ההרחבה של הרשת N.

הגדרה 5 שטף של זרימה מורחבת - תהי $N' = (V, c', s, t)$ רשת זרימה מורחבת. תהי f' זרימה מורחבת ברשת זו. נגדיר את השטף של f' להיות:

$$|f'| = \sum_{v \in V} f'(s, v) = \sum_{v \in V} f'(v, t)$$

למה 3 תהי f זרימה (רגילה) ברשת (הרגילה) N, ותהי f' ההרחבה של f ברשת המורחבת N'. אזי $|f| = |f'|$.

הגדרה 6 צמצום של רשת זרימה - תהי $N' = (V, c', s, t)$ רשת זרימה מורחבת. נגדיר קבוצת צלעות $E \subseteq V \times V$ באופן הבא: $E = \{(x, y) : c'(x, y) > 0\}$. נגדיר פונקציית קיבול $c : E \to \mathbb{R}_{>0}$ באופן הבא: לכל $(x, y) \in E$ נגדיר $c(x, y) = c'(x, y)$. נגדיר $N = (V, E, c, s, t)$ להיות הצמצום של הרשת N'.

למה 4 תהי N רשת זרימה (רגילה) ותהי N' ההרחבה של N. תהי N_1 הצמצום של N'. אזי N_1 היא רשת זרימה רגילה וגם $N = N_1$.

הגדרה 7 צמצום של זרימה - תהי f' זרימה מורחבת ברשת זרימה מורחבת N'. תהי $N = (V, E, c, s, t)$ הצמצום של N'. נגדיר פונקציה $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ באופן הבא: לכל $(x, y) \in E$ נגדיר $f(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$. נאמר כי f היא הצמצום של f'.

למה 5 תהי f' זרימה מורחבת ברשת זרימה מורחבת N' תהי N הצמצום של N' ותהיי f הצמצום של f'. אזי f היא זרימה (רגילה) ברשת (הרגילה) N ו-$|f| = |f'|$.

1.1.8 הגדרות נוספות להכנה לאלגוריתם אופטימלי:

תהי $N = (V, c', s, t)$ רשת זרימה מורחבת ותהי f' זרימה מורחבת ברשת זו.

1. הקיבול השיורי (אפקטיבי): הוא פונקציה $c_{f'} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המוגדרת באופן הבא לכל $x, y \in V$: $c_{f'} = c'(x,y) - f'(x,y)$.
2. אוסף הצלעות השיורי: הוא $E_{f'} = \{(x,y) \in V \times V : c_{f'}(x,y) > 0\}$.
3. הרשת השיורית: היא $N_{f'} = (V, E_{f'}, c_{f'}, s, t)$.
4. מסילת הרחבה: היא מסילה מכוונת פשוטה בין s ל-t בגרף השיורי $G_{f'} = (V, E_{f'})$.
5. תהי p מסילת הרחבה. הקיבול השיורי של p מוגדר ע"י $c_{f'}(p) = \underset{(x,y)\in p}{min}\{c_{f'}(x,y)\}$.
6. תהי p מסילת הרחבה. הזרימה השיורית $\Delta_{f',p}$ היא פונקציה $\Delta_{f',p} : V \times V \to \mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא לכל $(x,y) \in V \times V$:

$$\Delta_{f',p}(x,y) = \begin{cases} c_{f'}(p) & (x,y) \in p \\ -c_{f'}(p) & (y,x) \in p \\ 0 & else \end{cases}$$

כלומר קדימה היא מזרימה את הקיבול השיורי של המסילה, ואחורה היא מזרימה את מינוס הקיבול.

1.1.9 האלגוריתם האופטימלי של $Ford$ & $Falkerson$

אלגוריתם 1 האלגוריתם של $F\&F$ למציאת זרימה אופטימלית ברשת זרימה

קלט: רשת זרימה רגילה N.
פלט: זרימה אופטימלית f ברשת N.

1. הרחבה: נרחיב את הרשת N לרשת זרימה מורחבת N'.
2. אתחול: נאתחל $f' = 0$ (כלומר $f'(x,y) = 0$ לכל $x, y \in V$).
3. איטרציה: נמצא מסילת הרחבה p (אפשר על ידי BFS) בגרף השיורי $G_{f'}$ ונעדכן $f' = f' + \Delta_{f',p}$.
4. עצירה: כאשר אין מסילות הרחבה בגרף השיורי $G_{f'}$ נעצור.
5. צמצום: נצמצם את הזרימה המורחבת f' לזרימה רגילה f ב-N. נחזיר את f.

1.1.10 הוכחת נכונות וזמן ריצה.

אנקדוטה הזרימה השיורית היא אנטי-סימטרית ומקיימת את חוק שימור החומר (המורחב).

מסקנה אם הקלט לאלגוריתם של FF הוא רשת עם קיבולים שלמים, האלגוריתם עוצר ומחזיר זרימה אופטימלית שערכיה הם מספרים שלמים.

למה 1 תהי $N' = (V, c', s, t)$ רשת זרימה מורחבת ותהי f' זרימה מורחבת ברשת זו. תהי p מסילת הרחבה בגרף השיורי $G_{f'}$. אזי $g = f + \Delta_{f',p}$ היא זרימה מורחבת ברשת N'. בנוסף, $|g| = |f'| + c_{f'}(p)$.

הוכחת למה 1 נראה כי g זרימה ברשת N'.

<u>אנטי-סימטריה של g:</u> נשים לב כי הזרימה השיורית $\Delta_{f',p}$ היא אנטי-סימטרית, וכי הזרימה f' גם היא אנטי-סימטרית כי f' חוקית. יהיו $x, y \in V$. אזי

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f'(x,y) + \Delta_{f',g}(x,y) \\ &= -f'(y,x) - \Delta_{f',p}(y,x) \\ &= -(f'(y,x) + \Delta_{f',p}(y,x)) \\ &= -g(y,x) \end{aligned}$$

<u>חוק שימור החומר עבור g:</u> נראה קודם את חוק שימור החומר המורחב עבור הזרימה השיורית (של מסילה כלשהי). כלומר, יהי $x \in V$, $x \neq s, t$, נראה כי $\sum_{v \in V} \Delta_{f',p}(x,v) = 0$. נבחין בין 2 אפשריות.

1. אם $x \notin p$, אזי לכל $v \in V$, מתקיים $\Delta_{f',p}(x,v) = 0$ ולכן $\sum_{v \in V} \Delta_{f',p}(x,v) = 0$.
2. אם $x \in p$. יהי y הקודקוד הקודם ל-x על המסילה ו-z הקודקוד הבא אחרי x על המסילה. אזי:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} \Delta_{f',p}(x,v) &= \Delta_{f',p}(x,y) + \Delta_{f',p}(x,z) \\ &= -c_{f'}(p) + c_{f'}(p) = 0 \end{aligned}$$

לכן $\Delta_{f',p}$ מקיימת את חוק שימור החומר. נסיק את חוק שימור החומר עבור g. יהי $x \in V$ כך ש-$x \neq s, t$. אזי:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} g(x,v) &= \sum_{v \in V} (f'(x,v) + \Delta_{f',p}(x,v)) \\ &= \sum_{v \in V} f'(x,v) + \sum_{v \in V} \Delta_{f',p}(x,v) \\ &= \underbrace{0}_{f' \ is \ legal} + \underbrace{0}_{just \ proved \ above} = 0 \end{aligned}$$

<u>אילוץ הקיבול עבור g:</u> יהיו $x, y \in V$. נראה כי $g(x,y) \leq c'(x,y)$. נבחין בין שתי אפשרויות:

1. אם $(x,y) \in p$, אזי:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f'(x,y) + \Delta_{f',g}(x,y) \\ &= f'(x,y) + c_{f'}(p) \\ &\le f'(x,y) + c_{f'}(x,y) \\ &= f'(x,y) + (c'(x,y) - f'(x,y)) \\ &= c'(x,y) \end{aligned}$$

2. אם $(x,y) \notin p$. במקרה זה $\Delta_{f',p}(x,y) \le 0$ ולכן:

$$g(x,y) = f'(x,y) + \Delta_{f',p}(x,y) \le f'(x,y) \le c'(x,y)$$

אזי g היא זרימה חוקית, כעת נראה כי $|g| = |f'| + c_{f'}(p)$. נסמן ב-x את הקודקוד הבא אחרי s על המסילה p שהוספנו. מתקיים:

$$\begin{aligned} |g| &= \sum_{v \in V} g(s,v) \\ &= \sum_{v \in V} (f'(s,v) + \Delta_{f'.p}(s,v)) \\ &= \sum_{v \in V} f'(s,v) + \sum_{v \in V} \Delta_{f'.p}(s,v)) \\ &= |f'| + \Delta_{f'.p}(s,x) \\ &= |f'| + c_{f'}(p) \end{aligned}$$

למה 2 נניח כי הקלט של האלגוריתם של FF הוא רשת עם קיבולים שלמים. אז הזרימות המורחבות f' ברשת המורחבת N' לאורך הריצה של האלגוריתם יהיו זרימות עם ערכים שלמים.

הוכחת למה 2 נוכיח באינדוקציה על מספר האיטרציה של האלגוריתם. אחרי האתחול (איטרציה 0) הזרימה f' היא זרימת ה-0 ולכן היא זרימה עם ערכים שלמים. נניח כי הזרימה f' ברשת אחרי i איטרציות של האלגוריתם היא זרימה עם ערכים שלמים. תהי p מסילת ההרחבה הנבחרת באיטרציה ה-$i+1$ של האלגוריתם. נשים לב כי לכל $x,y \in V$, $c_{f'}(x,y) = c'(x,y) - f'(x,y)$ הוא מספר שלם, כי על פי הנחת הלמה $c'(x,y)$ הוא מספר שלם, ועל פי הנחת האינדוקציה $f'(x,y)$ הוא מספר שלם. לכן $c_{f'}(p) = \underset{(x,y)\in p}{min} \{c_{f'}(x.y)\}$ הוא מספר שלם. לכן על פי הגדרת הזרימה השיורית, $\Delta_{f',p}$ היא זרימה עם ערכים שלמים. לכן הזרימה g ברשת אחרי $i+1$ איטרציות של האלגוריתם המוגדרת כ-$g = f' + \Delta_{f',p}$ היא זרימה עם ערכים שלמים.

טענה 1 נניח כי הקלט של האלגוריתם של FF הוא רשת עם קיבולים שלמים. אזי האלגוריתם עוצר אחרי לכל היותר $\sum_{\substack{v\in V\\(s,v)\in E}} c(s,v)$ איטרציות ומחזיר זרימה עם ערכים שלמים.

הוכחת טענה 1 נסמן ב-$f_i^{'}$ את הזרימה ברשת אחרי i איטרציות של האלגוריתם. בפרט f_0' היא זרימת ה-0. נראה כי לכל $i \geq 0$ מתקיים $|f_{i+1}'| \geq |f_i| + 1$. תהי p מסילת ההרחבה הנבחרת על ידי האלגוריתם באיטרציה ה-$i+1$. ראינו בהוכחת למה טכנית 2, שמתקיים כי הקיבול השיורי של p, $c_{f'}(p)$ הוא מספר שלם. מכיוון שהוא גם מספר חיובי, מתקיים $c_{f'}(p) \geq 1$. לכן, $|f_{i+1}'| \underbrace{=}_{lemma\,1} |f_i'| + c_{f'}(p) \geq |f_i'| + 1$. לכן, מכיוון ש-$|f_o| = 0$, לכל i מתקיים $|f_i'| \geq i$. מכיוון שהשטף של הזרימה האופטימלית חסום מלמעלה על ידי $\sum_{v\in V} c'(s,v) = \sum_{\substack{v\in V\\(s,v)\in E}} c(s,v)$, האלגוריתם חייב לעצור אחרי לכל היותר $\sum_{\substack{v\in V\\(s,v)\in E}} c(s,v)$ איטרציות. לפי למה 2, הזרימה f' ברשת אחרי עצירתו של האלגוריתם היא זרימה עם ערכים שלמים, ולכן גם הזרימה הרגילה f שהיא הצמצום של f' אותה האלגוריתם מחזיר היא זרימה עם ערכים שלמים.

1.1.11 חתכים וזרימות ברשת

הגדרה <u>חתך</u> (S,T) ברשת זרימה הוא חלוקה של קודקודים לשתי קבוצות $V = S\dot{\cup}T$ כך ש-$s \in S$ ו-$v \in V$.

הגדרה יהי (S,T) חתך ברשת זרימה מורחבת $N' = (V,c',s,t)$. נגדיר את <u>הקיבול של החתך (S,T)</u> להיות:

$$c'(S,T) = \sum_{\substack{x\in S\\y\in T}} c'(x,y) = \sum_{\substack{x\in S\\y\in T\\(x,y)\in E}} c(x,y)$$

הגדרה תהי N' רשת זרימה מורחבת. תהי f' זרימה מורחבת ב-N' ויהי (S,T) חתך ב-N. נגדיר את <u>הזרימה בחתך</u> להיות:

$$f'(S,T) = \sum_{\substack{x\in S\\y\in T}} f'(x,y)$$

(כלומר עבור זרימה רגילה f, מתקיים):

$$f(S,T) = \sum_{\substack{x\in S\\y\in T\\(x,y)\in E}} f(x,y) - \sum_{\substack{y\in S\\x\in T\\(x,y)\in E}} f(x,y)$$

למה 3 תהי N' רשת זרימה מורחבת, תהי f' זרימה מורחבת ברשת זו, ויהי (S,T) חתך ברשת. אזי $f'(S,T) = |f'|$.

הוכחת למה 3

$$\begin{aligned}
f'(S,T) &= \sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}} f'(x,y)\\
&= \sum_{x\in S}\sum_{y\in T} f'(x,y)\\
&= \sum_{x\in S}\left(\sum_{v\in V} f'(x,v) - \sum_{u\in S} f'(x,u)\right)\\
&= \sum_{x\in S}\sum_{v\in V} f'(x,v) - \sum_{x\in S}\sum_{u\in S} f'(x,u)
\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\sum_{x\in S}\sum_{v\in V} f'(x,v) = \sum_{v\in V} f'(s,v) + \sum_{x\in S\setminus\{s\}}\sum_{v\in V} f'(x,v) \stackrel{*}{=} |f'| + 0$$

כאשר $*$ נובע מחוק שימור החומר. בנוסף מתקיים:

$$\sum_{x\in S}\sum_{u\in S} f'(x,u) = \sum_{\{x,u\}\in S} \left(f'(x,u) + f'(u,x)\right) \stackrel{*}{=} 0$$

כאשר $*$ נובע מאנטי סימטריה של f'. אזי:

$$f'(S,T) = \sum_{x\in S}\sum_{v\in V} f'(x,v) - \sum_{x\in S}\sum_{u\in S} f'(x,u) = |f'|$$

<u>**משפט השטף והחתך** $(min-cut\ max-flow)$</u> תהי N' רשת זרימה מורחבת, ותהי f' זרימה מורחבת ברשת זו. אזי שלושת התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. f' זרימה אופטימלית ברשת N'.
2. לא קיימת מסילת הרחבה בגרף השיורי $G_{f'}$.
3. קיים חתך (S,T) ברשת N' כך ש-$f'(S,T) = c'(S,T)$.

הוכחת המשפט <u>$1 \Leftarrow 2$:</u> נניח בשלילה כי קיימת מסילת הרחבה p בגרף השיורי $G_{f'}$, אזי לפי למה 1, $g = f' + \Delta_{f',p}$ היא זרימה ב-N' ו-$|g| = |f'| + c_{f'}(p) > |f'|$ בסתירה לאופטימליות של f'.

$3 \Leftarrow 1$: תהי g זרימה ברשת. נסמן ב-(S,T) את החתך כך ש-$f'(S,T)=c'(S,T)$ אזי על פי למה 3 :

$$|g| \overset{lemma\,3}{=} g(S,T) = \sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}} g(x,y) \overset{iluts\,hakibul}{\leq} \sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}} c'(x,y) \overset{definition}{=} c'(S,T) \overset{hanacha}{=} f'(S,T) \overset{lemma\,3}{=} |f'|$$

$2 \Leftarrow 3$: נניח כי אין מסילות בגרף השיורי $G_{f'}$. נגדיר את הקבוצה S באופן הבא :

$S = \{s \cup \{x \in X : $קיימת מסילה מ-$s$ ל-x ב-$G_{f'}\}\}$

נגדיר $T = V \setminus S$. נשים לב כי על פי ההנחה $t \notin S$ כי אין מסילה אליו ולכן $t \in T$. לכן (S,T) הוא חתך ברשת N'. יהי $x \in S$, $y \in T$. נראה כי $f'(x,y)=c'(x,y)$. נניח בשלילה כי $f'(x,y) < c'(x,y)$. אז מתקיים :

$$0 < c_{f'}(x,y) = c'(x,y) - f'(x,y)$$

ולכן $(x,y) \in E_{f'}$ ($E_{f'}$ הן צלעות הגרף השיורי $G_{f'}$). נבנה מסלול בין s ל-y ב-$G_{f'}$ באופן הבא : על פי הגדרת S קיים מסלול בין s ל-x ב-$G_{f'}$ (כי $x \in S$) נוסיף למסלול הזה את הצלע (x,y) ובאופן זה נקבל מסלול בין s ל-y. לכן, על פי הגדרת S, $y \in S$ בסתירה להנחה כי $y \in T$. על כן $f'(x,y)=c'(x,y)$ ולכן :

$$f'(S,T) = \sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}} f'(x,y) = \sum_{\substack{x\in S\\ y\in T}} c'(x,y) = c'(S,T)$$

משפט אם האלגוריתם של FF עוצר, הוא מחזיר זרימה אופטימלית.

הוכחת המשפט האלגוריתם עוצר על זרימה f' ברשת שעבורה לא קיימות מסילות הרחבה בגרף השיורי $G_{f'}$. על פי משפט השטף והחתך, זה מבטיח כי f' היא זרימה אופטימלית.

מסקנה בהנחה כי הקלט לאלגוריתם FF היא רשת עם קיבולים שלמים, האלגוריתם עוצר אחרי לכל היותר $\sum_{\substack{v\in V\\ (s,v)\in E}} c(s,v)$ איטרציות ומחזיר זרימה אופטימלית עם ערכים שלמים.

1.2 שיפור לאלגוריתם FF - האלגוריתם של $Edmonds\&Karp$. (EK)

1.2.1 האלגוריתם

בדיוק אותו הדבר, רק בכל איטרציה נבחר מסלול בין S ו-t בעל מספר צלעות מינימלי (ע"י BFS)

1.2.2 זמן ריצה

<u>**משפט**</u> אם הקלט לאלגוריתם הוא רשת זרימה רגילה $N=(V,E,c,s,t)$ האלגוריתם עוצר אחרי לכל היותר $O(|V|\cdot|E|)$ איטרצות ולכן זמן הריצה הכולל שלו הוא:

$$O(|V|\cdot|E|\cdot(|V|+|E|)$$

הוכחת המשפט (<u>העשרה</u>) נסמן ב-f'_i את הזרימה הרשת אחרי i איטרצות של האלגוריתם של EK. נסמן ב-$\delta_i(x)$ את המרחק של x מ-s בגרף השיורי $G_{f'_i}$.

<u>למה 1</u>: לכל $x\in V$ ... $\delta_0(x)\le\delta_1(x)\le\delta_2(x)\le$

<u>הגדרה</u>: הצלע (x,y) היא <u>צלע קריטית</u> באיטרציה ה-$(i+1)$ אם היא שייכת למסילת ההרחבה שנבחרת באיטרציה הזו ואם הקיבול השיורי שלה מינימלי.

<u>אבחנה</u>: הצלע $(x,y)\notin G_{f'_{i+1}}$.

<u>למה 2</u>: נניח כי הצלע (x,y) היא צלע קריטית בזמנים $(i+1)$, $(j+1)$ עבור $j>i$. אז: $\delta_{j+1}(x)\ge\delta_{i+1}(x)+2$.

<u>מסקנה 1</u>: צלע יכולה לשמש כצלע קריטית לכל היותר $\frac{|V|-1}{2}$ פעמים.

<u>מסקנה 2</u>: מכיוון שרק $2|E|$ צלעות יכולות להופיע במסילות הרחבה, מספר האיטרציות של האלגוריתם עד העצירה הוא לכל היותר $|V|\cdot|E|$.