טרנספורמציה נילפוטנטית

הגדרה: יהי V מ"ו. ט"ל f נקרא **נילפוטנטי** כאשר קיים $m\in\mathbb{N}$, כך ש- $f^m=0$.

הגדרה: אם f נילפוטנטי, אז המספר $\min\{m\in\mathbb{F} \mid f^m=0\}$ נקרא **אינדקס הנילפוטנטיות** של f.

הגדרה: אם f נילפוטנטי, $v\in V$, קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $f^m(v)=0$.
המספר $\min\{m\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid f^m(v)=0\}$ נקרא **הגובה של v ביחס ל- f**.

(הגובה שווה ל- 0 אמ"מ $v=0$)

הערה: ברור כי הגובה של כל וקטור קטן שווה מאינדקס הנילפוטנטיות.

הגדרה: מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ נקראת **נילפוטנטית** כאשר f_A נילפוטנטי.
כלומר קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $A^m=0$.

הגדרה: **אינדקס הנילפוטנטיות** של מטריצה נילפ' A הוא אינדקס הנילפ' של f_A, כלומר $\min\{m\in\mathbb{N} \mid A^m=0\}$

דוגמא:

$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$. נסמן (e_1,e_2,e_4,e_4) את הבסיס הסטנדרטי:

$$f_A(e_1)=e_2,\quad f_A(e_2)=e_3,\quad f_A(e_3)=e_4,\quad f_A(e_4)=0$$

$$f_A^2(e_1)=f_A(e_2)=e_3,\quad f_A^2(e_2)=f_A(e_3)=e_4,\quad f_A^2(e_3)=f_A^2(e_4)=0$$

$$f^3(e_1)=f_A^2(e_2)=f_A(e_3)=e_4,\quad f_A^3(e_2)=f_A^3(e_3)=f_A^3(e_4)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f^4(e_1)=f^4(e_2)=f^4(e_3)=f^4(e_4)=0$$

- לכן אינדקס הנילפ' של f הוא 4.
- הגבהים של e_1,e_2,e_3,e_4 הם $4,3,2,1$ בהתאמה.

הגדרה:

$$J_n = \begin{bmatrix} 0&0&&&0&0 \\ 1&0&&&0&0 \\ 0&1&&&0&0 \\ 0&0&\ddots&&0&0 \\ \vdots&\vdots&&\ddots&\vdots&\vdots \\ 0&0&&&0&0 \\ 0&0&&&1&0 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$$

: __בלוק ז'ורדן נילפוטנטי אלמנטרי.__

מתקיים: $J_n^n=0$, $J_n^{n-1}\neq 0$ כי $J_n^{n-1}e_1=e_n$

למה.

יהי V מ"ו נ"ס. $f: V \longrightarrow V$ אנדו' נילפ'. $v\in V$, מגובה K ביחס ל-f. אז:

① $f^i(v)$ הוא מגובה $K-i$ לכל $1\le i\le K$. (ביחס ל-f)

② $B=(v, f(v),\dots, f^{K-1}(v))$ בסיס של $Z(f,v)$.

③ $\dim Z(f,v)=K$, והפולינום המינימלי של v ביחס ל-f הוא x^K.

④ $[f|_{Z(f,v)}]_B = J_K$

הוכחת הטענה:

(1) $v\neq 0$, $f(v)\neq 0, \ldots, f^{k-1}(v)\neq 0$, $f^k(v)=0$. אז:

$$f^{k-i}\left(f^i(v)\right) = f^k(v) = 0 \quad , \quad f^{k-1-i}\left(f^i(v)\right) = f^{k-1}(v) \neq 0$$

ולכן $f^i(v)$ הוא מגובה $k-i$.

(2) נוכיח כי $(v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v))$ בת"ל. יהיו $a_0,\ldots,a_{k-1}\in\mathbb{F}$ כך ש- $a_0 v+\ldots+a_{k-1}f^{k-1}(v)=0$. נניח בשלילה שקיים $0\le i\le k-1$ כך ש- $a_i\neq 0$.

נסמן $r=\min\{0\le i\le k-1 \mid a_i\neq 0\}$. אז $a_r f^r(v)+\ldots+a_{k-1}f^{k-1}(v)=0$.

נפעיל על שני האגפים את f^{k-r-1} ונקבל:

$a_r f^{k-1}(v)+a_{r+1}f^k(v)+\ldots+a_{k-1}f^{2k-2-r}(v)=0$. לכן $\underset{\neq 0}{a_r}\cdot \underset{\neq 0}{f^{k-1}(v)}=0$, סתירה.

לכן $(v,f(v),\ldots,f^{k-1}(v))$ בת"ל, כלומר $k=\min\{i\in\mathbb{N} \mid (v,f(v),\ldots,f^i(v)) \text{ ת"ל}\}$ ולכן,

מהטענה שהוכחנו בעבר מקבלים כי $(v,f(v),\ldots,f^{k-1}(v))$ הוא בסיס של $Z(f,v)$.

(3) + (4) $f^k(v)=0=0\cdot v\ldots 0\cdot f^{k-1}(v)$, ולכן $P_v=x^k$, ומהטענה שהוכחנו מקודם:

$$\left[f|_{Z(f,v)}\right]_B = J_k$$