בעיה: בכמה דרכים ניתן לסדר k כדורים שחורים, l כדורים לבנים,

כך שלא יהיו 2 כדורים שחורים סמוכים.

(בתחום: $l \geq k-1$)

כתנון: עבור $l=k-1$ התשובה: 1

עבור $l=k$ התשובה $k+1$

המקרה הכללי:

מתוך l הכדורים הלבנים, $k-1$ מתוכם חייבים להיות

"מפרידים" בין k הכדורים השחורים.

נותרו $l-(k-1)$ כדורים לבנים אותם יש לסדר בין $k+1$ המרווחים שהתקבלו.

מכל צד של הכדורים

השחורים.

חזרנו לבעיה הבסיסית:

בכמה דרכים ניתן לפתור את המשוואה:

$$x_1+\dots+x_{\underbrace{k+1}_{n \text{ בבעיה } 4}} = \underbrace{l-(k-1)}_{k \text{ בבעיה } 4}$$

$$\binom{(k+1)+(l-k+1)-1}{\underbrace{k+1-1}_{n-1 \text{ בבעיה } 4}} = \binom{l+1}{k}$$

נניח 4 שחורים

" לבנים

פתרון אחר:

נניח קודם את 11 הכדורים הלבנים, מתקבלים 12 אזורים

עבור הכדורים השחורים.

בכל אזור כזה מותר להניח לכל היותר כדור שחור אחד.

בכמה דרכים ניתן לבחור 4 מתוך 12 המקומות? $\binom{12}{4}$

משולש פסקל

שימו לב: ⊛ $\binom{n}{n}=1 \quad \binom{n}{0}=1$

⊛ $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

בעזרת שני סעיפים אלו נוכל לחשב את כל המקדמים הבינומיים.

$n=0$: $\binom{0}{0}$ 1

$n=1$: $\binom{1}{0}$ 1 $\quad \binom{1}{1}$ 1

$n=2$: $\binom{2}{0}$ 1 $\quad \binom{2}{1}$ 2 $\quad \binom{2}{2}$ 1

$n=3$: $\binom{3}{0}$ 1 $\quad \binom{3}{1}$ 3 $\quad \binom{3}{2}$ 3 $\quad \binom{3}{3}$ 1

$n=4$: $\binom{4}{0}$ 1 $\quad \binom{4}{1}$ 4 $\quad \binom{4}{2}$ 6 $\quad \binom{4}{3}$ 4 $\quad \binom{4}{4}$ 1

$n=5$: $\binom{5}{0}$ 1 $\quad \binom{5}{1}$ 5 $\quad \binom{5}{2}$ 10 $\quad \binom{5}{3}$ 10 $\quad \binom{5}{4}$ 5 $\quad \binom{5}{5}$ 1

תכונות של משולש פסקל:

* לכל $n\in\mathbb{N}$ $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

* לכל $k,n\in\mathbb{N}$ $0\le k\le n$ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

* אוני - מודליות:

$$\binom{n}{k+1}\ge\binom{n}{k} \iff \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\ge\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\iff \frac{k!}{(k+1)!}\ge\frac{(n-k-1)}{(n-k)!} \iff \frac{1}{k+1}\ge\frac{1}{n-k} \iff n-k\ge k+1$$

$$\iff \frac{n-1}{2}\ge k$$

מעניין אותנו:

$$P([n])=\{A \mid A\subseteq n\}$$

$$\left|2^{[n]}\right|=|P([n])|=?$$

תזכורת:

בהינתן $S\subseteq A$, הפונ' המציינת של S:

$$(\mathbb{1}_S)\quad \chi_S: A\to\{0,1\}$$

$$\chi_S(a)=\begin{cases}1 & a\in S\\ 0 & a\notin S\end{cases}$$ לכל $a\in S$

טענה:

$$|P([n])|=2^n$$

נמצא קבוצה A כך ש- $|A|=2^n$

וכן קיימת $f:P([n])\to A$ חח"ע ועל (ולכן הן באותו גודל)

– לכל ... נותנים 1/0 פונקציה יחידה המקודדת הנציגות.

הוכחה: נגדיר $B=\{f \mid f:[n]\to\{0,1\}\}$

אנחנו יודעים כי $|B|=2^n$

נגדיר פונ' $T:P([n])\to B$

באופן הבא: לכל $A\in P([n])$ $(A\subseteq[n])$

נגדיר: $T(A)=\chi_A \begin{cases}1 & a\in A\\ 0 & a\notin A\end{cases}$

ה׳ **תרגיל:** להוכיח ש- T חח"ע ועל (הפיכה) (רמז: למצוא לה את הגדרת ההופכי)

$$T^{-1}(f)=\{k\in[n] \mid f(k)=1\}$$

מסקנה: $|P([n])|=|B|=2^n$

נוסחת הבינום של ניוטון

מטרה: לפתח מצגה ל- $(a+b)^n$

כמות הבחירות אפשריות את a

$$(a+b)^1=a+b$$

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=\binom{2}{0}b^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}a^2$$

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=\binom{3}{0}b^3+\binom{3}{1}ab^2+\binom{3}{2}a^2b+\binom{3}{3}a^3$$

$$(a+b)^{17}=\binom{17}{0}b^{17}+\dots+\binom{17}{5}a^5b^{12}+\dots+\binom{17}{15}a^{15}b^2+\dots+\binom{17}{17}a^{17}$$

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}}$$

הוכחה 3: נציב בנוסחא $a=1$, $b=1$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$|P([n])|$$

$$|P([n])| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$