טענה) (תהליך גרם - שמידט)

יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, $b_1,\dots,b_m \in V$ כך ש-$(b_1,\dots,b_m)$ בת"ל.

אז קיימים $u_1,\dots,u_m \in V$ כך ש-$(u_1,\dots,u_m)$ סדרה אורתונורמלית

כך ש- $Span(u_1,\dots,u_i) = Span(b_1,\dots,b_i)$ לכל $1 \le i \le m$.

הוכחת הטענה:

נבנה את $u_1,\dots,u_m$ באופן רקורסיבי:

- נגדיר $u_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$, אז (u_1) סדרה אורתונורמלית וגם $Span(u_1) = Span(b_1)$.
- נניח כי כבר בנינו סדרה אורתונורמלית $(u_1,\dots,u_i)$ כך ש-

$Span(u_1,\dots,u_i) = Span(b_1,\dots,b_i)$.

נסמן $U = Span(u_1,\dots,u_i)$ ונגדיר b'_{i+1} להיות ההטלה האורתוגונלית של b_{i+1} על U.

נסמן $b''_{i+1} = b_{i+1} - b'_{i+1}$. אז $b''_{i+1} \in U^\perp$.

כמו כן, מאחר ש-$(b_1,\dots,b_{i+1})$ בת"ל, $b_{i+1} \notin Span(b_1,\dots,b_i) = U$

ובנוסף $b'_{i+1} \in U$ ולכן $b'_{i+1} \neq b_{i+1}$ כלומר $b''_{i+1} \neq 0$

נגדיר $u_{i+1} = \frac{b''_{i+1}}{\|b''_{i+1}\|}$. אז $u_{i+1} \in U^\perp$, $\|u_{i+1}\| = 1$.

לכן הסדרה $(w_1,\dots,w_{i+1})$ היא סדרה אורתונורמלית.

בנוסף כי $b_{i+1}, w_1,\dots,w_i \in Span(b_1,\dots,b_{i+1})$ גם מתקיים $b'_{i+1} \in U \subseteq Span(b_1,\dots,b_{i+1})$

מכאן $b''_{i+1} \in Span(b_1,\dots,b_{i+1})$, u_i.

לכן $Span(w_1,\dots,w_{i+1}) \subseteq Span(b_1,\dots,b_{i+1})$.

$(b_1,\dots,b_{i+1})$ בת"ל. מאחר ש- $(w_1,\dots,w_{i+1})$ אורתונורמלית גם היא בת"ל.

לכן, $\dim Span(w_1,\dots,w_{i+1}) = i+1 = \dim Span(b_1,\dots,b_{i+1})$ ולכן $Span(w_1,\dots,w_{i+1}) = Span(b_1,\dots,b_{i+1})$

מסקנה.

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי. ל- V קיים בסיס אורתונורמלי.

הוכחה

יהי $(b_1,\dots,b_n)$ בסיס כלשהו ל- V ממימד סופי. אז לפי גרם-שמידט

קיימת סדרה אורתונורמלית $(w_1,\dots,w_n)$ כך ש-

$V = Span(b_1,\dots,b_n) = Span(w_1,\dots,w_n)$, בנוסף, $(w_1,\dots,w_n)$ בת"ל כי היא

אורתונורמלית ולכן $(w_1,\dots,w_n)$ מהווה בסיס ל- V.

מסקנה

יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, W תת-מרחב של V ממימד סופי, $v\in V$.

אז קיים היטל אורתוגונלי יחיד של v על W.

טענה)

יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ, $(u_1,\dots,u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V. $v,w\in V$.

אז:

(א) $$\langle v|w\rangle = \underbrace{[v]_B\cdot[w]_B}_{\text{מכפלה סקלרית}} = \overline{\langle u_1|v\rangle}\cdot\langle u_1|w\rangle+\dots+\overline{\langle u_n|v\rangle}\cdot\langle u_n|w\rangle$$

(ב) $$\|v\|=\|[v]_B\|_{\mathbb{F}^n}=\sqrt{|\langle u_1|v\rangle|^2+\dots+|\langle u_n|v\rangle|^2}$$

כאשר $\|\cdot\|_{\mathbb{F}^n}$ זו נורמה ב-$\mathbb{F}^n$ עם המכפלה הסקלרית.

הוכחת הטענה:

(א) נסמן $[v]_B=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$, $[w]_B=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$, אז $v=a_1u_1+\dots+a_nu_n$, $w=b_1u_1+\dots+b_nu_n$

$$\langle v|w\rangle=\langle a_1u_1+\dots+a_nu_n|b_1u_1+\dots+b_nu_n\rangle=\bar a_1\langle u_1|b_1u_1+\dots+b_nu_n\rangle+\dots+\bar a_n\langle u_n|b_1u_1+\dots+b_nu_n\rangle=$$

$$=\bar a_1b_1\langle u_1|u_1\rangle+\dots+\bar a_1b_n\langle u_1|u_n\rangle+\dots\ \dots\ \dots\ \bar a_nb_1\langle u_n|u_1\rangle+\dots+\bar a_nb_n\langle u_n|u_n\rangle=$$

$$=\bar a_1b_1\langle u_1|u_1\rangle+\dots+\bar a_nb_n\langle u_n|u_n\rangle=\bar a_1b_1+\dots+\bar a_nb_n=[v]_B\cdot[w]_B$$

(ב) $$\|v\|=\sqrt{\langle v|v\rangle}=\sqrt{[v]_B\cdot[v]_B}=\|[v]_B\|_{\mathbb{F}^n}$$

טענה.

יהי $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ $(u_1,\dots,u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V

$W=\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_k)$ אז: $W^\perp=\mathrm{Span}(u_{k+1},\dots,u_n)$.

הוכחת הטענה:

לפי הנתון, $u_i\in\{u_1,\dots,u_k\}^\perp$ לכל $k+1\le i\le n$.

ולכן $u_{k+1},\dots,u_n\in W^\perp$ ומאחר ש- $W^\perp$ תת-מרחב, $\mathrm{Span}(u_{k+1},\dots,u_n)\subseteq W^\perp$.

יהי $v\in W^\perp$. אז:

$$v=\langle u_1|v\rangle\cdot u_1+\dots+\langle u_n|v\rangle u_n=\langle u_{k+1}|v\rangle\cdot u_{k+1}+\dots+\langle u_n|v\rangle\cdot u_n\in \mathrm{Span}(u_{k+1},\dots,u_n)$$

לסיכום $W^\perp\subseteq \mathrm{Span}(u_{k+1},\dots,u_n)$.

מסקנה.

יהי $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, W תת-מרחב של V.

אז $V=W\oplus W^\perp$.

הוכחה

נבחר בסיס $(b_1,\dots,b_k)$ עבור W. נרחיב אותו לבסיס

$(b_1,\dots,b_k,b_{k+1},\dots,b_n)$ של V. לפי (גרם - שמידט) קיימת סדרה אורתונורמלית

$(u_1,\dots,u_n)$ כך ש- $\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_n)=\mathrm{Span}(b_1,\dots,b_n)=V$ ובנוסף:

$\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_k)=\mathrm{Span}(b_1,\dots,b_k)=W$.

אז לפי הגדרה, $W^\perp=\mathrm{Span}(u_{k+1},\dots,u_n)$.

מכאן $W+W^\perp=\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_k,u_{k+1},\dots,u_n)=V$

ובנוסף, $\dim W^\perp=n-k$, $\dim W=k$, לכן

$$\dim W\cap W^\perp=\dim W+\dim W^\perp-\dim W+W^\perp=k+(n-k)=0$$

כלומר $W\cap W^\perp=\{0\}$