משפט

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת פ"נ מנורמלת מ- $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ל- $\mathbb{F}$

והיא יחידה.

הוכחה

נוכיח קיום פ"נ מנורמלת באינדוקציה.

* בסיס $n=1$: נגדיר $D: M_{1\times 1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ ע"י $D(A)=a$

כאשר $A=(a)$.

ברור כי D היא פ"נ מנורמלת

* צעד האינדוקציה: נניח כי קיימת פ"נ מנורמלת $D': M_{n-1\times n-1}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$

שוב לפי הטענה משיעור קודם, קיימת פ"נ מנורמלת

$$D: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$

הגדרה: פונקציית נפח מנורמלת נקראת הדטרמיננטה ומסומנת ב- $\det$.

הערה:

לכל מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $\det(A) = \det(A^t)$

מסקנה:

לכל מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $1 \le j \le n$ מתקיים:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

ובנוסף, לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

זה אומר כי אפשר לבחור את הנוסחה המתאימה לפי כמות האפסים בשורה/עמודה, וכך החישוב יהיה קל יותר!

דטרמיננטה של מכפלה

למה:

אם ε היא פש"ו, אז $\mu(\varepsilon) = \det(\varepsilon(I_n))$

הוכחה:

$$\det(\varepsilon(I_n)) = \mu(\varepsilon) \cdot \det(I_n) = \mu(\varepsilon)$$

הוכח בשיעור בעבר   הוכח בשיעור שעבר

טענה.

יהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $\mathcal{E}$ הינו פש"ו, אז:

$$\det\left(\mathcal{E}(I_n)\cdot A\right) = \det\left(\mathcal{E}(I_n)\right)\cdot \det(A)$$

הוכחה

$$\det\left(\mathcal{E}(I_n)\cdot A\right) = \det\left(\mathcal{E}(A)\right) = \mu(\mathcal{E})\cdot \det(A) \underset{\text{לפי הלמה.}}{=} \det\left(\mathcal{E}(I_n)\right)\cdot \det(A)$$

למה

יהיו $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-B אינה הפיכה, אז המכפלה BA אינה הפיכה.

הוכחה

נניח בשלילה כי BA הפיכה, ונסמן את ההופכית שלה ב-C.

אז $B(AC) = BA(C) = I_n$

מכאן B הפיכה – סתירה.

משפט

אם $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, אז $\det(B\cdot A) = \det(B)\cdot\det(A)$

הוכחה

אם B אינה הפיכה, אז BA אינה הפיכה, ומכאן

$$\det(BA) = 0 = 0\cdot\det(A) = \det(B)\cdot\det(A)$$

אם B הפיכה, אז קיימת סדרה של פעו"ש $\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_s$

כך ש- $\mathcal{E}_s(\dots\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_1(B))\dots) = I_n$

לכל $s \geq i \geq 1$ נסמן ב- δ_i את הפעו"ש ההפוכה ל- $\mathcal{E}_i$

אז $B = \delta_1(\dots\delta_{s-1}(\delta_s(I_n))\dots) = \delta_1(I_n)\cdot\ldots\cdot\delta_{s-1}(I_n)\cdot\delta_s(I_n)$

$$\det(B\cdot A) = \det(\delta_1(I_n)\cdot\delta_2(I_n)\cdot\ldots\cdot\delta_{s-1}(I_n)\cdot\delta_s(I_n)\cdot A) \underset{\text{טענה}}{=}$$

$$= \det(\delta_1(I_n))\cdot\det(\delta_2(I_n)\cdot\delta_3(I_n)\cdot\ldots\cdot\delta_{s-1}(I_n)\cdot\delta_s(I_n)\cdot A) \underset{\text{טענה}}{=}$$

$$= \det(\delta_1(I_n))\cdot\det(\delta_2(I_n))\cdot\det(\delta_3(I_n)\cdot\delta_4(I_n)\cdot\ldots\cdot\delta_{s-1}(I_n)\cdot\delta_s(I_n)\cdot A) \underset{\text{טענה}}{=}$$

$$\vdots$$

$$= \det(\delta_1(I_n))\cdot\ldots\cdot\det(\delta_{s-1}(I_n))\cdot\det(\delta_s(I_n))\cdot\det(A) \underset{\text{טענה}}{=}$$

$$= \det(\delta_1(I_n))\cdot\ldots\cdot\det(\delta_{s-2}(I_n))\cdot\det(\delta_{s-1}(I_n)\cdot\delta_s(I_n))\cdot\det(A) =$$

$= \det(\delta_1(I_n)) \cdot \ldots \cdot \det(\delta_{s-3}(I_n)) \cdot \det(\delta_{s-2}(I_n) \cdot \delta_{s-1}(I_n) \cdot \delta_s(I_n)) \cdot \det(A) =$

$\vdots$

$= \det(\delta_1(I_n) \cdot \ldots \cdot \delta_{s-1}(I_n) \cdot \delta_s(I_n)) \cdot \det(A) =$

$= \det(B) \cdot \det(A)$

מסקנה (מהמשפט)

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, אז

① $\det(A) \neq 0$

② הדטרמיננטה של המטריצה ההופכית ל- A היא $\frac{1}{\det(A)}$

הוכחה:

נסמן את המטריצה ההופכית ל- A ב- B, אז $B \cdot A = I_n$.

לפי המשפט $\det(B) \cdot \det(A) = \det(B \cdot A) = \det(I_n) = 1$

מכאן, $\det(A) \neq 0$, בנוסף $\det(B) = \frac{1}{\det(A)}$