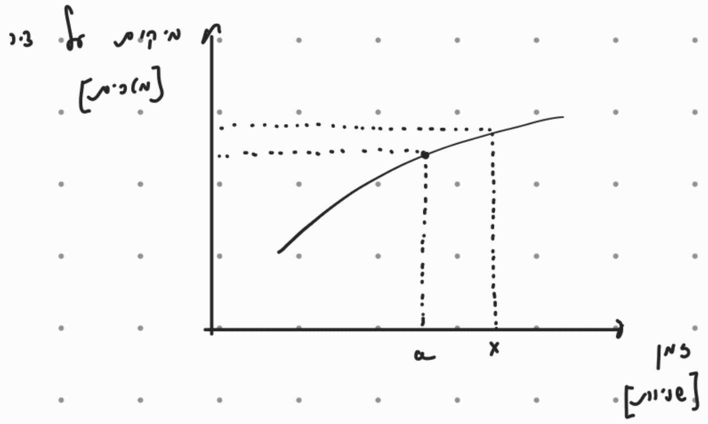
נגזרת

מוטיבציה:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$



שינוי במיקום בין זמן a ל- x $= f(x)-f(a)$

קצב השתנות ממוצע $= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

‖

מהירות ממוצעת

הגדרה:

תהי f מוגדרת בסביבה של $a\in\mathbb{R}$. בסביבה זו נגדיר

$\Delta_{f,a}(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$. אם הגבול $\lim_{t\to a}\Delta_{f,a}(t)$ קיים,

נאמר ש- f גזירה ב- a ונסמן גבול זה ב- $f'(a)$.

"גזירה" = "דיפרנציאבילית"

סימון מקובל נוסף (לייבניץ): $\frac{df}{dx}(a)$

הגדרה:

אם f גזירה של כל נק' בקבוצה U פתוחה,

הגדרה, אזי נגדיר את $f':U\to\mathbb{R}$ שמתאימה את הנגזרת.

דוגמאות:

(1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$. $a\in\mathbb{R}$, $\Delta_{f,a}:\mathbb{R}\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$.

$$\Delta_{f,a}(t) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \frac{c-c}{t-a} = 0$$

אז ל- $\Delta_{f,a}$ קיים גבול ב- a ולכן $f'(a)=0$.

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. האם f גזירה ב- x?

$$\Delta_{f,x}(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=\frac{t^2-x^2}{t-x}=t+x$$

$$\lim_{t\to x}\Delta_{f,x}(t)=2x$$

כלומר f גזירה בכל מקום, $f'(x)=2x$

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$

• יהי $x>0$, האם f גזירה ב- x?

$$\Delta_{f,x}(t)=\frac{|t|-|x|}{t-x}$$

מספיק להסתכל לתחום שבו $t>0$:

$$\Delta_{f,x}(t)=\frac{t-x}{t-x}=1 \Rightarrow f'(x)=1$$

• יהי $x<0$, האם f גזירה ב- x?

מספיק להסתכל לתחום שבו $t<0$:

$$\Delta_{f,x}(t)=\frac{-t-(-x)}{t-x}=-1 \Rightarrow \lim_{t\to x}\Delta_{f,x}(t)=-1 \Rightarrow f'(x)=-1$$

• האם f גזירה ב- $x=0$?

$$\Delta_{f,0}=\frac{|t|-|0|}{t-0}=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\lim_{t\to 0}\Delta_{f,0}(t)$ אינו קיים.

אז נקבל $f':\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

הערה

אם f גזירה ב-a, מההגדרה $\lim_{t\to a}\Delta_{f,a}(t)$ קיים.

אז ל-$\Delta_{f,a}$ יש אי רציפות סליקה ב-a.

כלומר הפונקציה $f \longrightarrow \begin{cases} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} & t\neq a \\ f'(a) & t=a \end{cases}$ היא רציפה ב-a.

הגדרה: • אם $\lim_{t\to a^+}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ קיים נאמר ש-f גזירה מימין ב-a.

ונסמן גבול זה ב-$f'(a^+)$.

• אם $\lim_{t\to a^-}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ קיים נאמר ש-f גזירה משמאל ב-a.

ונסמן גבול זה ב-$f'(a^-)$.

הגדרה: • $f: A\to\mathbb{R}$, נניח ש-f גזירה ב-$B\subseteq A$.

אז קיבלנו $f': B\to\mathbb{R}$. אם f' גזירה ב-a, נסמן את

הנגזרת שלה ב- $f''(a)=\lim_{t\to a}\frac{f'(t)-f'(a)}{t-a}$

ונקרא לה הנגזרת השנייה של f ב-a.

• סימון של נגזרות גבוהות ואילך: $f^{(4)}$

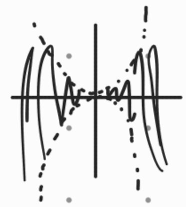
דוגמאות:

1. $f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ האם f גזירה ב-0.

$$\Delta_{f,0}(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{t\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

$\lim\limits_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ אינו קיים ולכן $f(x)$ אינה גזירה ב-0.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ האם f גזירה ב-0?



$$\Delta_{f,0}(t) = \frac{t^2\cdot\sin\frac{1}{t}}{t} = t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

מכיון ש- $\lim\limits_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0$, $f'(0) = 0$

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. האם היא גזירה ב-x?

$$\Delta_{f,x} = \frac{\sin(t)-\sin(x)}{t-x} = \frac{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)}{t-x} = \frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)$$

$\lim\limits_{t\to x}\cos\left(\frac{t+x}{2}\right) = \cos\left(\frac{2x}{2}\right)$ כי זו הרכבה של פונקציות רציפות.

$\lim\limits_{t\to x}\frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)} = 1$ ממשפט גבול של הרכבה עבור $k(g(t))$ כך ש:

$$k(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad g(t) = \frac{t-x}{2}$$

$$\lim_{z\to 0} k(z) = 1, \quad \lim_{t\to x} g(t) = 0$$

לכן $\sin'(x) = \cos(x)$ ובאופן דומה. $\cos'(x) = -\sin(x)$

דיון:

האם רציפות בנק' גוררת גזירות בנק'? לא! דוג': $f(x)=|x|$ בנק' 0.

האם גזירות בנק' גוררת רציפות בנק'? כן!

טענה

גזירות בנק' גוררת רציפות בנק'.

הוכחת הטענה:

תהא f גזירה בנק' a. צ"ל: $\lim_{t\to a} f(t)=f(a)$

לכל $t\neq a$,

$$f(t)=f(a)+\underbrace{(t-a)}_{\xrightarrow{t\to a}\ 0}\underbrace{\frac{f(t)-f(a)}{t-a}}_{\xrightarrow{t\to a}\ f'(a)}$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות $f(t)=f(a)$

טענה

אם f פונקציה קבועה, $f'(x)=0$.

טענה

עבור $f(x)=x$, $f'(x)=1$

משפט

יהיו f גזירה ב-a, ו- g גזירה ב-a אזי:

$f+g$ גזירה ב-a ומתקיים $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$

הוכחת המשפט

$$\Delta_{f+g,a}(t) = \frac{(f+g)(t)-(f+g)(a)}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a} + \frac{g(t)-g(a)}{t-a} = \Delta_{f,a}(t) + \Delta_{g,a}(t)$$

לכן מאריתמטיקה של גבולות (כולל שהגבולות קיימים):

$$(f+g)'(a) = \lim_{t\to a} \Delta_{f+g,a}(t) = f'(a)+g'(a)$$

משפט (כלל לייבניץ)

יהיו f גזירה ב-a וגם g גזירה ב-a, אזי:

$f\cdot g$ גזירה ב-a ומתקיים: $(f\cdot g)'(a) = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$

הוכחת המשפט

$$\Delta_{f\cdot g,a}(t) = \frac{f(t)\cdot g(t) - f(a)\cdot g(a)}{t-a} = \frac{f(t)\cdot g(a) - f(a)\cdot g(a) + f(t)\cdot g(a) - f(t)\cdot g(a)}{t-a} =$$

$$= f(t)\frac{g(t)-g(a)}{t-a} + g(a)\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f(t)\cdot\Delta_{g,a}(t) + g(a)\cdot\Delta_{f,a}(t)$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות:

$$(f\cdot g)'(a) = \lim_{t\to a}\Delta_{f\cdot g,a}(t) = f(a)\cdot g'(a) + f'(a)\cdot g(a)$$

ז.ו:

יש להוכיח באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$, אם $f(x) = x^n$

אז: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$