תכונות של פרוש

1) $\operatorname{span} S$ הוא תת-מרחב של V.

2) $S \subseteq \operatorname{span} S$.

3) אם U תת-מרחב של V כך ש- $S \subseteq U$,
אז $\operatorname{span} S \subseteq U$.

שוב הפרוש הוא תת המרחב הקטן ביותר שמכיל את S.

---

4) אם S הוא תת-מרחב של V, אז $\operatorname{span} S = S$.

הוכחה: 1) $S \subseteq \operatorname{span} S$ לפי תכונה 2.

2) $\operatorname{span} S \subseteq S$ לפי תכונה 3 עבור $U = S$.

---

5) $\operatorname{span} \emptyset = \{0\}$

הוכחה: 1) $\{0_V\} \subseteq \operatorname{span} \emptyset$ כי שייך לכל תת מרחב של V.

2) $\operatorname{span} \emptyset \subseteq \{0_V\}$ לפי תכונה 3 עבור: $U = \{0_V\}$ $S = \emptyset$

---

6) אם $S_1 \subseteq S_2$, אז $\operatorname{span} S_1 \subseteq \operatorname{span} S_2$

הוכחה: נגדיר $U = \operatorname{span} S_2$

לפי תכונה 1 U הוא תת-מרחב.

לפי תכונה 2 $S_2 \subseteq U$. לפי הנתון $S_1 \subseteq S_2$.

לכן $S_1 \subseteq U$.

אז לפי תכונה 3: $\text{span}S_1 \subseteq U = \text{span}S_2$

צירוף לינארי במ"ו

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ $v_1,\dots,v_n \in V$

צירוף לינארי של $v_1,\dots,v_n$ הוא ביטוי מהצורה:

$$c_1 \cdot v_1 + \dots + c_2 \cdot v_2$$

כאשר $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$.

טענה 1

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, $S \subseteq V$,

$v_1,\dots,v_n \subseteq S$ $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$,

אז $c_1v_1 + \dots + c_nv_n \in \text{span}S$

הוכחה:

לפי תכונה 2, $S \subseteq \text{span}S$ ולכן $v_1,\dots,v_n \in \text{span}S$.

לפי תכונה 1, $\text{span}S$ הוא תת-מרחב.

בזכות הסגירות של תת-מרחב ביחס לכפל בסקלר ובחיבור,

ולכן מסיקים כי $c_1v_1+\dots+c_nv_n \in \operatorname{span} S$

טענה 2

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $\emptyset \neq S \subseteq V$ אז

$$U=\{c_1v_1+\dots+c_nv_n \mid v_1,\dots,v_n \in S,\ c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}\}$$ מ"ו.

הוכחה

1) קיים $v \in S$, אז $0_V = 0_{\mathbb{F}}\cdot v \in U$

2) יהיו $c_1v_1+\dots+c_nv_n,\ d_1w_1+\dots+d_mw_m \in U$

אז $c_1v_1+\dots+c_nv_n+d_1w_1+\dots+d_mw_m \in U$

3) יהיו $c_1v_1+\dots+c_nv_n \in U$, $c \in \mathbb{F}$

אז $c(c_1v_1+\dots+c_nv_n) = (cc_1)v_1+\dots(cc_n)v_n \in U$

מסקנה

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $\emptyset \neq S \subseteq V$

אז $\operatorname{span} S = \{c_1v_1+\dots+c_nv_n \mid v_1\dots v_n \in S,\ c_1\dots c_n \in \mathbb{F}\}$

הוכחה

נסמן $U = \{c_1v_1+\dots+c_nv_n \mid v_1\dots v_n \in S,\ c_1\dots c_n \in \mathbb{F}\}$

1) לפי טענה 1 לכל $v_1,\dots,v_n \in S$ ולכל $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$

מתקיים $c_1v_1+\dots+c_nv_n \in \operatorname{span} S$.

לכן $U \subseteq \operatorname{span} S$

2) לכל $v \in S$ מתקיים $v = 1\cdot v \in U$. לכן $S \subseteq U$.

בנוסף, לפי טענה 2, U הוא תת-מרחב.

לפי תכונה 3, $\operatorname{span} S \subseteq U$,

טענה 3

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $S=\{u_1,\dots,u_k\}\subseteq V$

אז $\operatorname{span} S=\{a_1u_1+\dots+a_ku_k \mid a_1,\dots,a_k\in\mathbb{F}\}$

כפי שציינו קודם $u_1\dots u_k$ כמו מקודם.

הוכחה

יהי U כמו במסקנה.

1) $\{a_1u_1+\dots+a_ku_k \mid a_1,\dots,a_k\in\mathbb{F}\}\subseteq U$ ברור.

2) יהי $c_1v_1+\dots+c_nv_n\in U$, אז לכל $1\le i\le n$ קיים $1\le j\le k$

כך ש- $v_i=u_j$.

אם $V_{i_1} = V_{i_2}$ נכנס את המחוברים המתאימים ע"י:

$$C_{i_1} + V_{i_1} + C_{i_2} + V_{i_2} = (C_{i_1} + C_{i_2})V_{i_1}$$

אם $u_j \neq v_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ נוסיף את המחובר $0 \cdot u_j$.

כך קיבלנו שבסכום כל אחד מהווקטורים $u_1, \dots, u_k$

יופיע עם מקדם כלשהו בדיוק פעם אחת.

אז ע"י שינוי סדר המחוברים נקבל ביטוי מהצורה $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$

לכן $U \subseteq \{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{F}\}$

דוגמא:

עמודות של מטריצת היחידה

$V = \mathbb{F}^n$, $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

אז $\operatorname{span} S = \{c_1 e_1 + \dots + c_n e_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F} \right\} = \mathbb{F}^n$$

מסקנה

יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}^m$

נסמן ב- $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה כך שהעמודה ה-j שלה היא v_j.

אז: $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\}$

הוכחה

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}\} =$$

$$= \left\{ A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F} \right\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\}$$

מרחב הפתרונות של מטריצה =

פרוש של העמודות שלה.