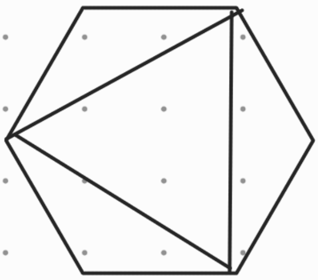
בעיה - שילוש מצולעים

שילוש של מצולע הוא חלוקה של המצולע למשולשים ע"י העברת אלכסונים שלא נחתכים בפנים שלהם.



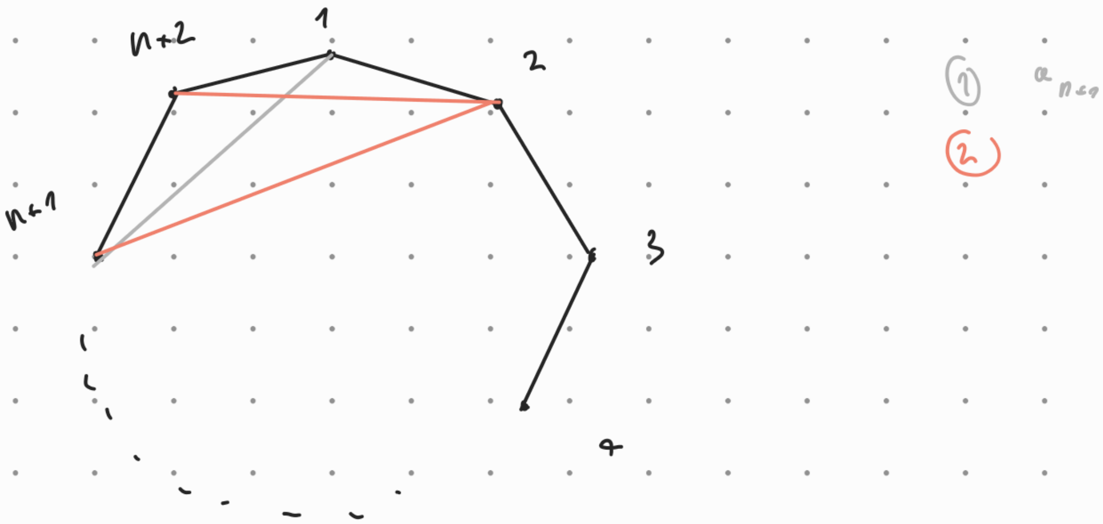
- נסמן ב- a_n את מס' השילושים של מצולע משל $n+2$ צלעות.

$a_1 = 1$ 

$a_2 = 2$ 

$a_3 = ?$ 

נרצה למצוא נוסחאות נסיגה ל- a_n.



נסמן ב- A את קבוצת כל השילושים ונפצל אותה למחלקות זרות.

A_1 = קב' כל השילושים המכילים את המשולש $\{1, n+1, n+2\}$

$$|A_1| = a_{n-1}$$

כי נותר משולש מצולע בעל $n+1$ צלעות. $(n+1-2 = n-1)$

A_2 = קב' כל השילושים המכילים את המשולש $\{2, n+1, n+2\}$

$$|A_2| = a_1 \cdot a_{n-2}$$

מס' השילושים של המצולע הקטן כפול הגדול.

לכל $1 \le k \le n$

A_k = קב' כל השילושים המכילים את המשולש $\{k, n+1, n+2\}$

מתקיים:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

$$\Downarrow \text{זרים}$$

$$a_n = |A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

נחשב את גודל הקב' A_k:

כל שילוש ב- A_k יוצר חלוקה של המצולע לשני חלקים, האחד

הוא המשולש $\{k, n+1, n+2\}$, השני הוא המצולע שקודקודיו $\underbrace{\{1, \dots, k, n+2\}}_{k+1 \text{ קודקודים}}$

a_{k-1} שילושים

והשלישי הוא המצולע $\underbrace{\{k, k+1, \dots, n+1\}}_{n-k+2 \text{ קודקודים}}$

a_{n-k} שילושים

☆ מעקרון המכפלה:

$$|A_k| = a_{k-1} \cdot a_{n-k}$$

מסקנה: $a_n = \sum_{k=1}^{n} |A_k| = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot a_{n-k}$

$a_1 = 1$

נגדיר $a_0 = 1$ כדי שיתיישב עם זה.

$\Downarrow$

$a_n = a_0 \cdot a_{n-1} + a_1 \cdot a_{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot a_{n=0}$

נשים לב כי $a_0 = C(0)$, $a_1 = C(1)$

ולכן $n \in \mathbb{N}$ $a_n = C(n)$

מסקנה: $\boxed{a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$

קצב גידול אסימפטוטי

כל הסדרות שנעסוק בהן

הגדרה: סדרה (a_n) היא כמעט תמיד חיובית אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $a_n > 0$.

הגדרה: בהינתן $(a_n), (b_n)$ סדרות כ"ת חיוביות נאמר כי $a_n = O(b_n)$ ("O גדול של") ($(a_n) = O((b_n))$) אם קיים $N \in \mathbb{N}$ $0 < C \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $a_n \leq C \cdot b_n$

דוגמא:

$a_n = 7n+5$ $\qquad$ $b_n = n^2$

$$7n+5 \le 7n+5n = 12n \le 12n^2$$

נבחר $N=1$ $\qquad$ $c=12$

ומתקיים לכל $n \ge 1$ $\qquad$ $a_n \le 12 b_n$

תכונות

① אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N$ $\qquad$ $a_n \le b_n$

$c=1$

אז $a_n = O(b_n)$

② אם $a_n = O(b_n)$ ויהי $0 < k \in \mathbb{R}$, אז גם $k \cdot a_n = O(b_n)$

הוכחה:

קיימים N, c כך שלכל $n \ge N$ $\qquad$ $a_n \le c \cdot b_n$

$\Leftarrow$ $k a_n \le k \cdot c \cdot b_n$

נבחר $N_1 = N$ $\quad$ $c_1 = k \cdot c$ והם מקיימים את ההגדרה לכך ש-

$k \cdot a_n = O(b_n)$

③ אם $a_n = O(b_n)$ $\quad$ $a'_n = O(b_n)$ אז $a_n + a'_n = O(b_n)$

הוכחה:

קיימים $N_1 \in \mathbb{N}$ $\quad$ $0 < c_1 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \ge N_1$ $\qquad$ $a_n \le c \cdot b_n$

בדומה קיימים $N_2 \in \mathbb{N}$ $0 < c_2 \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \geq N_2$ $a'_n \leq c_2 b_n$

נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$. מתקיים כי לכל $n \geq N$

$$a_n + a'_n \leq c_1 \cdot b_n + c_2 \cdot b_n = (c_1 + c_2) b_n$$

$\Leftarrow$ N, $c_1 + c_2$ מקיימים את ההגדרה לכך ש- $a_n + a'_n = O(b_n)$

---

4 אם $b_n = O(d_n)$, $a_n = O(b_n)$ אז $a_n = O(d_n)$

הוכחה: תרגיל ☺

טענה 1:

נניח $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$ אזי

I (n^k) היא $O(n^l)$

II (n^l) שאיננה $O(n^k)$

I **הסבר:**

לכל $n \in \mathbb{N}$ $n^k \leq n^l$

II **הוכחה:**

נניח בשלילה כי עבור $n \geq N$ מתקיים $n^l \leq c \cdot n^k$

אזי $n^{l-k} \le c$. ניקח $n > c^{\frac{1}{l-k}}$ $(n \ge N)$.

אך כן $n^{l-k} > \left(c^{\frac{1}{l-k}}\right)^{l-k}$ $\Leftarrow$ $n^{l-k} > c$ בסתירה.

טענה 2:

יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $b_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ אזי:

(I) n^k הוא $O(b_n)$

(II) b_n הוא $O(n^k)$

(II) הוכחה:

$$b_n = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ גורמים}} \le n^k$$

(?)

$C=1$, $N=1$ $\Leftarrow$ $b_n = O(n^k)$

(I) הוכחה: צ"ל $n^k = O(b_n)$

$$n^k = 2^k\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^k$$

נשים לב שאם $\frac{n}{2} \le n-k+1$ אז $\frac{n}{2} \le n-k+2$

$\vdots$

$\frac{n}{2} \le n-1$

$\vdots$

$\frac{n}{2} \le n$

ולכן $n^k = 2^k\left(\frac{n}{2}\right)^k \le 2^k\cdot n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = 2^k\cdot b_n$

אזי נבחר $N=2k$ $C=2^k$

אז אכן לכל $n \ge N$, מתקיימת $n^k \le C \cdot b_n$

מסקנה.

מהטע. ת התכונות:

$$n^k = O\binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$b_n = O\binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k} = O(b_n)$$

כולם בעצם פולינומים ממעלה k