למה:

יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

$B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V. $w_1,\dots,w_n\in W$.

אז קיימת העתקה לינארית יחידה $T:V\to W$ כך ש-

$T(v_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$

הוכחה:

יהי $v\in V$. נסמן $[v]_B=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$

נגדיר $T(v)=c_1w_1+\dots+c_nw_n$

בדיקות חיבור

נוכיח כי T היא העתקה לינארית.

יהיו $v,v'\in V$. נסמן $[v']=\begin{pmatrix}c_1'\\ \vdots\\ c_n'\end{pmatrix}$ $[v]_B=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$

אז מתקיים $v'=c_1'v_1+\dots+c_n'v_n$ $v=c_1v_1+\dots+c_nv_n$

מכאן $v+v'=(c_1+c_1')v_1+\dots+(c_n+c_n')\cdot v_n$

לסיכום $[v+v']_B=\begin{pmatrix}c_1'+c_1\\ \vdots\\ c_n+c_n'\end{pmatrix}$

לכן $T(v+v')=(c_1+c_1')\cdot w_1+\dots+(c_n+c')w_n=$

$=c_1w_1+\dots+c_nw_n+c_1'w_1+\dots+c_n'w_n=T(v)+T(v')$

יהיו $v \in V$, $c \in \mathbb{F}$ נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ רציפות כפל בסקלר אז

אז $v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$

מכאן $c \cdot v = (cc_1)v_1 + \ldots + (cc_n) v_n$ כלומר $[cv]_B = \begin{pmatrix} cc_1 \\ \vdots \\ cc_n \end{pmatrix}$

לפיכך

$$T(cv) = cc_1 w_1 + \ldots + cc_n w_n = c(c_1 w_1 + \ldots + c_n w_n) = c \cdot T(v)$$

בנוסף, לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $[v_i]_B = e_i = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$

לכן $T(v_i) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 1 \cdot w_i + \ldots + 0 \cdot w_n = w_i$

בכך הוכחנו את הקיום של העתקה לינאריות כנדרש.

כעת נוכיח יחידות.

יהיו $T, T' : V \longrightarrow W$ ה"ל כך ש- $T(v_i) = T'(v_i) = w_i$ לכל $1 \le i \le n$.

נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. אז $v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$

$$T(v) = c_1 T(v_1) + \ldots + c_n T(v_n) = c_1 T'(v_1) + \ldots + c_n T'(v_n) = T'(v)$$

לפיכך $T = T'$

מסקנה

תהי $T:\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ ה"ל.

אז קיימת $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $T = T_A$

כלומר $T(v) = Av$ לכל $v \in \mathbb{F}^n$

הוכחה

לכל $1 \le i \le n$ נסמן $w_i := T(e_i)$

נסמן ב- A את המטריצה כך ש- $C_i^A = w_i$

לכל $1 \le i \le n$ מתקיים $T(e_i) = w_i = A \cdot e_i$

מאחר ש- $(e_1, \dots, e_n)$ הוא בסיס של $\mathbb{F}^n$, לפי הטענה.

מתקיים $T = T_A$.

גרעין ותמונה

הגדרה: תהי $T: V \longrightarrow W$ ה"ל.

התמונה של T מוגדרת ע"י: $\mathrm{Im}\, T = \{T(v) \mid v \in V\}$

הגרעין של T מוגדר ע"י: $\mathrm{Ker}\, T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$

טענה

תהי $T: V \to W$ ה"ל. אז:

1. $\operatorname{Im} T$ תת-מרחב של W.
2. $\operatorname{Ker} T$ תת-מרחב של V.

הוכחה

1. מאחר ש- $T(0_V) = 0_W$, מתקיים $0_W \in \operatorname{Im} T$

יהיו $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}(T)$

אז קיימים $v_1, v_2 \in V$ כך ש- $T(v_2) = w_2$, $T(v_1) = w_1$

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} T$$

יהיו $w \in \operatorname{Im}(T)$, $c \in \mathbb{F}$

אז קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = w$

$$c \cdot w = c \cdot T(v) = T(c \cdot v) \in \operatorname{Im} T$$

2. מאחר ש- $T(0_V) = 0_W$ מתקיים $0_V \in \operatorname{Ker} T$

יהיו $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}(v)$ אז

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$$

ולכן $v_1+v_2 \in \ker T$

יהיו $v \in \ker T$, $c \in \mathbb{F}$ אזי

$$T(c\cdot v) = c\cdot T(v) = c\cdot 0_W = 0_W$$

ולכן $c\cdot v \in \ker T$

דוגמאות

1. $T: V \longrightarrow W$, $T(v) = 0_W$ לכל $v \in V$.

אזי $\operatorname{Im} T = \{0_W\}$, $\ker T = V$

2. $Id_V: V \longrightarrow V$, $Id_V(v) = v$ לכל $v \in V$

אזי $\operatorname{Im} Id_V = V$, $\ker Id_V = \{0_V\}$

3. $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $T_A: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$, $T_A(v) = Av$ לכל $v \in V$.

קב' הפתרונות של $Ax=0$: $\ker T_A = \{v \in \mathbb{F} \mid Av = 0\}$

$$\operatorname{Im} T_A = \{Av \mid v \in \mathbb{F}\} = \{b \in \mathbb{F}^m \mid \text{קיים } v \in \mathbb{F}^n \text{ כך ש- } Av = b\}$$

הקבוצה של $b \in \mathbb{F}^m$ כך ש- $Ax=b$ קיים פתרון.

4. S קבוצה, $z \in S$, $T_z: \mathbb{F}^S \longrightarrow \mathbb{F}$, $T_z(f) = f(z)$ לכל $f \in \mathbb{F}^S$

$$\ker T_z = \{f \in \mathbb{F}^S \mid f(z) = 0\}$$

לכל $a \in \mathbb{F}$ נגדיר $f_a : S \to \mathbb{F}$ ע"י $f_a(s) = a$ לכל $s \in S$

$T_z(f_a) = f_a(z) = a$ ומכאן $a \in \mathrm{Im}\, T_z$

לכן $\mathrm{Im}\, T_z = \mathbb{F}$

הגדרה: תהי $F : X \to Y$ העתקה.

* F נקראת **על** כאשר $F(X) = Y$
* F נקראת **חח"ע** כאשר לכל $x_1, x_2 \in X$ $x_1 \neq x_2$ מתקיים $F(x_1) \neq F(x_2)$

למה

תהי $T : V \to W$ ה"ל. אז:

1. T היא על אמ"מ $\mathrm{Im}\, T = W$
2. T היא חח"ע אמ"מ $\ker T = \{0_V\}$

הוכחה

1. ברור מההגדרה.
2. ($\Leftarrow$) נניח כי T חח"ע אז $T(0_V) = 0_W$ ולכל $0_V \neq v \in V$ מתקיים $T(v) \neq 0_W$. לכן $\ker T = \{0_V\}$

(ב) נניח כי $\ker T = \{0_V\}$

נניח בשלילה כי T אינה חח"ע,

כלומר קיימת $v_1, v_2 \in V$ $v_1 \neq v_2$ כך ש- $T(v_1) = T(v_2)$

אז $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = 0_W$

ולכן $0_V \neq v_1 - v_2 \in \ker T$ - סתירה.