מטריצה מצורפת

הגדרה: תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$

אז **המטריצה המצורפת** של A היא:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

כאשר $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

A_{ij} מתקבלת מ- A ע"י מחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j.

טענה

יהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, אז $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n$

הוכחה

המספר בתיתוך של השורה ה-j והעמודה ה-i של $A \cdot adj(A)$ הוא:

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot a_{ir} \cdot \det(A_{jr})$$

פיתוח $\det(A)$ לפי השורה ה-i

I אם $i = j$: המספר הנ"ל שווה ל-

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot a_{ir} \cdot \det(A_{ir}) = \det(A)$$

II אם $i \neq j$: תהי $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך שלכל $1 \leq k \leq n$, $k \neq j$

מתקיים $R_k^{A'} = R_k^{A}$, $R_j^{A'} = R_i^{A}$

אז מתקיים $R_j^{A'} = R_i^{A'}$, כלומר ל-A' יש שתי

שורות שוות, ולכן $\det(A') = 0$ כי ההגדל תוי ב-j

מצד שני מתקיים לכל $1 \leq r \leq n$, $A'_{rj} = A_{rj}$ ולכן:

פיתוח לפי השורה ה-j

$$\det(A') = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot a'_{jr} \cdot \det(A'_{jr}) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} \cdot a_{ir} \cdot \det(A_{rj})$$

לפיכך כאשר $i \neq j$ המספר בחיתוך השורה

ה-i והעמודה ה-j של $adj(A)$ הוא 0.

לסיכום, $A \cdot adj(A) = \det(A) \cdot I_n$

מסקנה

אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, אז ההופכית של A

היא $\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$

הוכחה

$$A \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{\det(A)} \cdot A \cdot adj(A) = I_n$$

טענה (נוסחאות קרמר)

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, $b \in \mathbb{F}^n$.

לכל $1 \le j \le n$ נסמן ב- $A^{(j)} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$

כך שלכל $1 \le k \le n$, $k \ne j$ $C_k^{A^{(j)}} = C_k^{A}$, $C_j^{A^{(j)}} = b$

אז $d = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A^{(1)} \\ \vdots \\ \det A^{(n)} \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המ"ל $Ax=b$.

הוכחה

ההופכית של A מהמסקנה

הפתרון היחיד של המ"ל הוא $\frac{1}{\det A}\cdot adj(A)\cdot b$

נסמן $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

הקואורדינטה ה-j של $adj(A)\cdot b$ היא:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot \det(A_{ij})\cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot \det(A^{(j)}_{ij})\cdot b_i = \det(A^{(j)})$$

העתקות לינאריות

הערה: כפל מטריצה במ"ו הינו העתקה לינארית

יהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ $x \in \mathbb{F}^n$ אזי $y = Ax \in \mathbb{F}^m$

כלומר A מגדירה פונקציה מ- $\mathbb{F}^n$ אל $\mathbb{F}^m$.

הגדרה: יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.

פונקציה $T : V \longrightarrow W$ נקראת **העתקה לינארית** אם:

① $\underbrace{T(v_1 + v_2)}_{\text{חיבור וקטורים ב- } V} = \underbrace{T(v_1) + T(v_2)}_{\text{חיבור וקטורים ב- } W}$ לכל $v_1, v_2 \in V$

② $T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$ לכל $v \in V$, $c \in \mathbb{F}$

תכונות של העתקות

תהי $T : V \longrightarrow W$ ה"ל. אזי:

① $T(0_V) = 0_W$

הוכחה: $T(0_V) = T(0_{\mathbb{F}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{F}} \cdot T(0_V) = 0_W$

② לכל $v_1, \dots, v_n \in V$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 \cdot T(v_1) + \dots + c_n \cdot T(v_n)$$

הוכחה:

$$T(c_1v_1+\dots+c_nv_n) \overset{(1)}{=} T(c_1v_1)+\dots+T(c_nv_n) \overset{(2)}{=} c_1\cdot T(v_1)+\dots+c_n\cdot T(v_n)$$

דוגמאות

1. V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

$T: V\to W$ מוגדרת ע"י $T(v)=0_W$ לכל $v\in V$.

2. V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

$Id_V: V\to V$ מוגדרת ע"י $Id_V(v)=v$ לכל $v\in V$

3. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ $\quad V=\mathbb{F}^n$ $\quad W=\mathbb{F}^m$

$T_A: \mathbb{F}^n\to \mathbb{F}^m$ מוגדרת ע"י $T_A(v)=Av$ לכל $v\in \mathbb{F}^n$

הוכחה:

I. יהיו $v_1,v_2\in \mathbb{F}^n$ מתקיים:

$$T_A(v_1+v_2)=A(v_1+v_2)=Av_1+Av_2=T_A(v_1)+T_A(v_2)$$

II. יהיו $v\in \mathbb{F}^n$, $c\in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$T_A(c\cdot v)=A(c\cdot v)=c\cdot A(v)=c\cdot T_A(v)$$

(4) יהי $\mathbb{F}$ שדה, S קבוצה, $z \in S$ ‏ $V = \mathbb{F}^S$

פונקציות מ- S ל- $\mathbb{F}$

$T_z : \mathbb{F}^S \longrightarrow \mathbb{F}$ מוגדרת ע"י $T_z(f) = f(z)$ לכל $f \in \mathbb{F}^S$

הוכחה:

(I) עבור $f_1, f_2 \in \mathbb{F}^S$ מתקיים:

$$T_z(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z) = T_z(f_1) + T_z(f_2)$$

(II) עבור $f \in \mathbb{F}^S$, ‏ $c \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$T_z(c \cdot f) = (c \cdot f)(z) = c \cdot f(z) = c \cdot T_z(f)$$