HIT 离散数学引论习题解析

Author

2024 年 5 月 9 日

目录

第一章　集合及其运算

1.1　集合的概念

1. 本节无习题

1.2　子集、集合的相等

1. 略

2. 略

3. 略

4. 正确的:$b, c, e, g, i, k, l, p, q, r, s$

5. 因为有 $A_1 \subseteq A_n$ 且 $A_n \subseteq A_1$ 则 $A_1 = A_n$ 则有 $A_1 \subseteq A_{n-1}$ 且 $A_{n-1} \subseteq A_1$, 如此进行即可得证

6. $2^S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

7. 数学归纳法

第二章　图的基本概念

2.1　图论的产生与发展概述

1. 本节无习题

2.2　基本定义

1. 略应有一十个

2. 略应有十六个

3. 略

4. 设图 $G=(V,E)$ 其中 V 是所有参加宴会的人,$\forall v_1,v_2\in V, v_1v_2\in E$ 当且仅当 v_1,v_2 握过手，则每个顶点的度数即为每人握手的次数，由推论 6.2.1 即可证

5. 假设有一个方案可以满足要求，考虑除起点和终点外经过每个点时都需要选择两条不同的未经过的边。但是图中有三个点度数为奇数，至少有一个奇度数的点不是起点或终点，所以只能经过这个点一次，但是一次经过只能走过两条边，所以不存在这种方案

6. 略

2.3　路、圈、连通图

1. 如果是通道则不一定，因为如果存在通道 $v_1v_2\cdots v_n$ 则 $v_1v_2\cdots v_nv_{n-1}\cdots v_1v_2\cdots v_n$ 则是另一条通道。如果是迹则一定，假设有 $v_1v_2\cdots v_n$ 和 $v_1v_2^{'}\cdots v_n$ 两条迹，如果两条迹除去起始结束点没有重复点，则 $v_1v_2\cdots v_nv_{n-1}^{'}\cdots v_2^{'}v_1$ 是一个圈。否则假设 $v_i=v_j^{'}$ 是第一个重复的点则存在一个 v_i 到 $v_j^{'}$ 的圈

2. 对于 p 归纳，$p=1,2$ 时显然成立，若 $p=k-1$ 时成立，则对于图 (p,q) 删去任意顶点 v 后有 m 个分支 $G_1,G_2,\cdots G_m$。由归纳假设 $q_i\geq p_i-1$。则 $\sum\limits_{i=1}^{m}q_i=k-\deg v\geq k-1-m$ 由于图连通，所以 v 到每个分支 G_i 至少有一条边，即 $\deg v\geq m$ 从而 $q\geq k-1$

3. 如果图是完全图则成立，否则假设有两个不相邻顶点 u,v 有 $\deg u+\deg v\leq p-2$ 删去这两个顶点，图 $G-\{u,v\}$ 的点数为 $p-2$，边数至少为 $\frac{(p-2)^2}{2}$ ，这是不可能的，所以对于任意不相邻顶点 u,v 有 $\deg u+\deg v\geq p-1$，即图连通

4. 证明思路同 3

5. 反证，假设存在两条不相交的最长路 P_1, P_2 ，任取 $v_1 \in P_1, v_k \in P_2$，由于图连通，则存在 $v_1v_2\cdots v_k$ 的一条路，取最大的 l 使 $v_l\ inP_1$，最小的 r 使 $r > l$ 且 $v_r \in P_2$ 则 $v_l \cdots v_r$ 中间的点都不在 P_1 或 P_2 中。通过这条路连接 P_1, P_2 中较长的两部分，则得到的新路长度至少为 $|P_1| + 1$ ，矛盾，得证

6. 与 8 相同

7. $\Rightarrow$ 任取 $v_1 \in V_1, v_k \in V_2$，有路 $v_1v_2\cdots v_k$，则存在 v_iv_{i+1} 在路中且 $v_i \in V_1, v_{i+1} \in V_2$
$\Leftarrow$ $\forall v_1, v_n \in G$，取 $V_1 = \{v_1\}, V_2 = V/\{v_1\}$，则存在 $v_2 \in V_2$ 使得 $v_1v_2 \in E$，之后取 $V_1 = \{v_1, v_2\}, V2 = V/V_1$，如此进行，可知每次操作后均存在一条路从 v_1 到 v_i，直到 $v_i = v_k$

8. 取图中最长路 $P = v_1v_2\cdots v_n$ 可知不存在 $v1v_k \in E$ 且 $v_k \notin P$ 否则 $v_k + P$ 是更长的路。则 v_1 所有连边都是 $v_1v_i, v_i \in P$，由于 $\deg v_1 \geq \delta(G)$，则至少存在一个 $i \geq \delta(G)+1$ 使得 v_1v_i，则 $v_1v_2\cdots v_iv_1$ 是一个长度至少为 $\delta(G) + 1$ 的圈

9. (a) 如果图 G 不连通，则至少有一个支有 $q \geq p$ ，所以只需对连通图 G 证明。如果 $\delta(G) > 1$ ，则由 8 可知存在长度至少为 3 的圈，否则删去一个 $degv = 1$ 的点，此时图 $G' = G - \{v\}$ 仍然满足 $q \geq p$，若还有 $\delta(G') = 1$ ，则继续删去一个度数为 1 的点，直到 $\delta(G') \geq 2$。因为点数为 $1, 2$ 的图不可能有 $q \geq p$，而上述删点过程保证了 $q \geq p$ ，所以此时图点数至少为 3 且 $\delta \geq 2$，至少存在一个大小为 3 的圈

   (b) 只需证明 $q = p+4$ 成立即可。反证，假设存在一个图使得 $q = p+4$ 且不存在边不重的圈，取一个点数最小的这样的图记作 G, 显然图中不存在度数为 1 的点，否则删去这个点后图点数会更小同时仍然符合条件。且该图最小圈长度为 5，否则取一个长度小于等于 4 的圈，删去这个圈上所有边后仍有 $q \geq p$，由上一问得到还有一个圈，不符合假设。下面证明 $\delta(G) \geq 3$，若存在 $\deg v = 2$，假设两条边为 vv_1, vv_2，可知 $v_1v_2 \notin E$，否则有一个三元环。则删去 v 加入边 v_1v_2，此时仍有 $q \geq p+4$ 且满足性质，矛盾。故 $\delta(G) \geq 3$，则 $2p + 8 = 2q = \sum \deg v \geq 3p$ 即 $p \leq 8$。此时取图中一个最小的的圈 C，C 上的顶点除 C 上的边外都有一条不在 C 中的边，记 S 为所有和 C 上顶点距离为 1 的点，则 S 中点只有一条边与 C 中顶点相连，否则会形成一个长度至多为 $\frac{|C|}{2} + 2 < |C|$ 的环，矛盾。所以 $|S| > |C| \geq 5$ 且 S 与 C 顶点不重合，则 $p > |S| + |C| \geq 10$ 与 $p \geq 8$ 矛盾。综上不存在这样的图

10. 取 G 中最长路 $P = v_1v_2\cdots v_n$，可知 v_1 所有边的终点在 P 中，否则会有更长的路。对于 v_1v_i 与 v_1v_j 有 $|j - i| \geq 2$，否则存在长度为三的圈 $v_1v_iv_j$。v_1 的 k 条边依次为 $v_1v_2, v_1v_{i_2}, v_1v_{i_3}\cdots v_1v_{i_k}$ 则 $i_k \geq 2 + (k-1)\times 2 = 2k$ 所以 P 长度至少为 $2k$，则该图至少有 $2k$ 个顶点。同时让 $i_j = i_{j-1} + 2$ 就得到 $2k$ 个顶点的图的唯一构造

2.4 补图、偶图

1. G 不是连通图，则存在 $m \geq 2$ 个支 $G_1, G_2, \cdots G_m$，任取两点 u, v，若 u, v 在同一个支 G_i 中，则在补图 G^c 中存在 ux, vx 两条边使其连通，其中 x 是另外一支的一个点。若 u, v 在不同支则 u, v 有边连通。

2. 待补充

3. 显然每个自补图所对应的完全图边数都是偶数，即 $\frac{p(p-1)}{2}$ 是偶数，即 p 为 $4n$ 或 $4n+1$

4. 没有三角形我们考虑构造一个偶图,将点划分为 U, V 两个集合 $|U| = |V| = n$,连边为 $u_1v_1, u_2v_2, \cdots u_nv_n$, $u_1v_2, u_2v_3, \cdots u_{n-1}v_n$, $u_2v_1, u_3v_2, \cdots u_nv_{n-1}$ 与 u_1v_n, u_nv_1

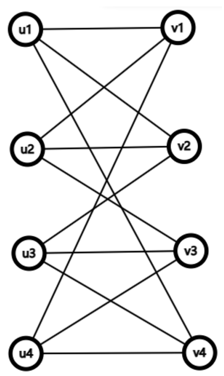

图 2.1: 示例

5. 因为 A 是 0 点,B 是 1 点,从 A 到 B 一定走了奇数步,但是不重不漏的走完整个棋盘需要偶数步,所以不可能

6. 下面对 p 是偶数证明,p 是奇数应该也差不多。先证明没有度数大于 $\frac{p}{2}$ 的点,若存在度数最大的点 v 有 $d(v) > \frac{p}{2}$,则他所连的 $d(v)$ 个点中每个点度数都小于 $n - d(v)$,则 $2q \le d(v) + (d(v)-1)(p-d(v)) + d(v)(p-d(v)-1) = (p-d(v))(2d(v)-1)$ 可知 $(p-d(v))(2d(v)-1)$ 是小于 $\frac{p^2}{2}$ 的,所以最大度数小于等于 $\frac{p}{2}$,又 $p \times \frac{p}{2} = \frac{p^2}{2}$,所以该图为 $\frac{p}{2}$ 正则图。且该图没有三角形,则由 6.3 节习题 10 可证得结论

7. 建议搜索图兰定理,该定理有很多证明方法

8. 对格子黑白染色,每个骨牌会覆盖一个黑格子和一个白格子,删去两个白格子后黑格子和白格子数量不等,无法用骨牌覆盖

9. 反证,若 G^c 中有 u, v 使得 $d(u,v) \ge 3$,则 $\forall x \in G$ ux, vx 都不在 G^c 中,则 ux, vx 在 G 中,则对于 $x, y \in G$,有路 $xuvy$ 长度为 3,与 G 直径大于 3 矛盾。

10. (a) 显然每个顶点有 k 条边,边数为 $k2^{k-1}$
    (b) 这是自然的
    (c) 使得,假设存在一个奇数长度的圈 C,设其长度为 $2n+1$,则某个顶点 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 改变了奇数次变回自身,这是不可能的。所以这是一个偶图

2.5 欧拉图

1. 占位

2.6 哈密顿图

1. 占位

2.7 图的邻接矩阵

1. 占位

2.8 带权图与最短路问题

1. 占位