第 2 章　多变量最优化

许多最优化问题要求同时考虑一组相互独立的变量．本章我们讨论一类最简单的多变量最优化问题．大多数学生在多元微积分中已熟悉了有关的方法．本章我们还要介绍借助计算机代数系统来处理一些较复杂的代数计算问题．

2.1　无约束最优化

最简单的多变量最优化问题是在一个比较好的区域上求一个可微的多元函数的最大值或最小值．我们在后面会看到，当求最优值的区域形式比较复杂时，问题就会变得复杂．

例 2.1　一家彩电制造商计划推出两种新产品：一种 19 英寸[⊖]液晶平板电视机，制造商建议零售价(MSRP)为 339 美元；另一种 21 英寸液晶平板电视机，零售价为 399 美元．公司付出的成本为 19 英寸彩电每台 195 美元，21 英寸彩电每台 225 美元，还要加上 400 000美元的固定成本．在竞争的销售市场中，每年售出的彩电数量会影响彩电的平均售价．据估计，对每种类型的彩电，每多售出一台，平均销售价格会下降 1 美分．而且 19 英寸彩电的销售会影响 21 英寸彩电的销售，反之亦然．据估计，每售出一台 21 英寸彩电，19 英寸彩电的平均售价会下降 0.3 美分，而每售出一台 19 英寸彩电，21 英寸彩电的平均售价会下降 0.4 美分．问题是：每种彩电应该各生产多少台？

21

我们仍采用上一章介绍的处理数学建模问题的五步方法来解决这个问题．第一步是提出问题．我们首先列出一张变量表，然后写出这些变量间的关系和所做的其他假设，如要求取值非负．最后，采用我们引入的符号，将问题用数学公式表达．第一步的结果归纳在图 2-1 中．

第二步是选择一个建模方法．这个问题我们视为无约束的多变量最优化问题．这类问题通常在多元微积分的入门课程中都有介绍．我们只在这里给出模型的要点和一般的求解过程，细节和数学证明读者可以参考任何一本微积分的入门教科书．

给定定义在 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S 上的函数 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$．我们要求 f 在集合 S 上的最大值或最小值．一个定理给出：若 f 在 S 的某个内点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 达到极大值或极小值，设 f 在这点可微，则在这个点上 $\nabla f=0$．也就是说，在极值点有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\cdots,x_n) &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n) &= 0\end{aligned} \tag{2-1}$$

⊖　1 英寸 = 0.025 4m.

变量：	s = 19 英寸彩电的售出数量（每年）
	t = 21 英寸彩电的售出数量（每年）
	p = 19 英寸彩电的销售价格（美元）
	q = 21 英寸彩电的销售价格（美元）
	C = 生产彩电的成本（美元/年）
	R = 彩电销售的收入（美元/年）
	P = 彩电销售的利润（美元/年）
假设：	$p = 339 - 0.01s - 0.003t$
	$q = 399 - 0.004s - 0.01t$
	$R = ps + qt$
	$C = 400\,000 + 195s + 225t$
	$P = R - C$
	$s \geqslant 0$
	$t \geqslant 0$
目标：	求 P 的最大值

图 2-1　彩电问题的第一步的结果

据此我们可以在求极大或极小点时，不考虑那些在 S 内部使 f 的某一个偏导数不为 0 的点．因此，要求极大或极小点，我们就要求解方程组(2-1)给出的 n 个未知数、n 个方程的联立方程组．然后我们还要检查 S 的边界上的点，以及那些一个或多个偏导数没有定义的点． 22

第三步是根据第二步中选择的标准形式推导模型的公式．

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= ps + qt - (400\,000 + 195s + 225t) \\ &= (339 - 0.01s - 0.003t)s \\ &\quad + (399 - 0.004s - 0.01t)t \\ &\quad - (400\,000 + 195s + 225t) \end{aligned}$$

我们令 $y = P$ 作为求最大值的目标变量，$x_1 = s$，$x_2 = t$ 作为决策变量．我们的问题现在化为在区域

$$S = \{(x_1, x_2) : x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\} \tag{2-2}$$

上对

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2) \\ &= (339 - 0.01x_1 - 0.003x_2)x_1 \\ &\quad + (399 - 0.004x_1 - 0.01x_2)x_2 \\ &\quad - (400\,000 + 195x_1 + 225x_2) \end{aligned} \tag{2-3}$$

求最大值．

第四步是利用第二步给出的标准解决方法来求解这个问题．问题是对(2-3)式中定义的函数 f 在(2-2)式定义的区域 S 上求最大值．图 2-2 给出了函数 f 的三维图像．图像显示 f 在 S 的内部达到最大值．图 2-3 给出了 f 的水平集图．从中我们可以估计出 f 的最大值出现在

$x_1=5\ 000$，$x_2=7\ 000$ 附近．函数 f 是一个抛物面，其最高点为令 $\nabla f=0$ 得到的方程组(2-1)的唯一解．计算得出，在点

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{554\ 000}{117} \approx 4\ 735 \\ x_2 &= \frac{824\ 000}{117} \approx 7\ 043 \end{aligned} \tag{2-4}$$

处有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 144-0.02x_1-0.007x_2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 174-0.007x_1-0.02x_2=0 \end{aligned} \tag{2-5}$$

23

(2-4)式给出的点(x_1，x_2)为 f 在整个实平面上的整体最大值点，从而也是 f 在(2-2)式定义的区域 S 上的最大值点．将(2-4)式代回到(2-3)式中，可得到 f 的最大值：

$$y=\frac{21\ 592\ 000}{39} \approx 553\ 641 \tag{2-6}$$

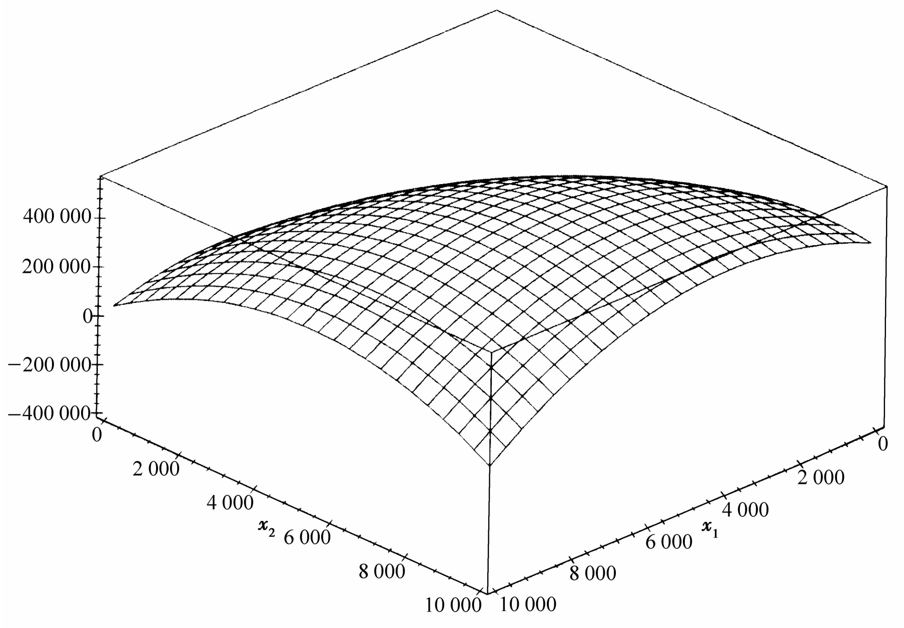

图 2-2　彩电问题的利润 $y=f(x_1, x_2)$ 关于 19 英寸彩电的生产量 x_1 和 21 英寸彩电的生产量 x_2 的三维图像

这个问题中第四步的计算有点繁琐．这种情况下，应当采用计算机代数系统来进行所需的计算．计算机代数系统可以求导数、求积分、解方程组、化简代数表达式．大多数软件还可以进行矩阵计算、画图、求解某些微分方程组．几个比较好的计算机代数系统(如Maple、 Mathematica、Derive 等）对大型计算机和个人计算机都适用，而且许多系统还提供价格相当低的学生版本．图 2-2 和图 2-3 中的图像就是利用计算机代数系统 Maple 画出的．计算机代数系统就是我们在五步方法的归纳图 1-3 中提到的“适当的技术”的一个例子．图 2-4 给出了利用计算机代数系统 Mathematica 求解当前模型的结果．

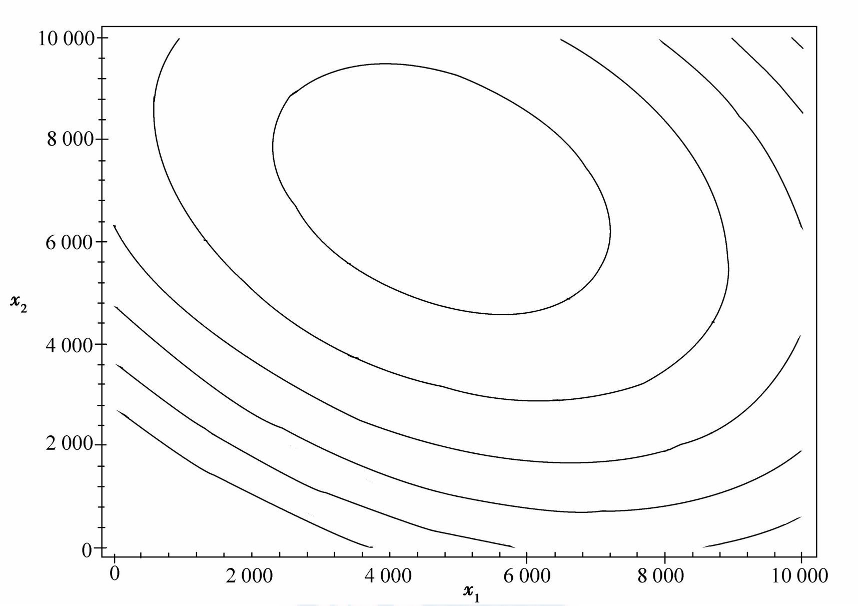

图 2-3　彩电问题中的利润函数 $y=f(x_1, x_2)$ 关于 19 英寸彩电的生产量 x_1 和 21 英寸彩电的生产量 x_2 的水平集图

利用计算机代数系统求解一个这样的问题有几项优点．它可以提高效率，结果更准确．掌握了这一技术，可以使你获得较大的自由来专注于那些更大问题的求解任务，而不必陷于繁琐的计算中．我们还会在灵敏性分析的计算中展示计算机代数系统的应用，那里的计算要更复杂．

最后的步骤五是用通俗易懂的语言回答问题．简单地说，这家公司可以通过生产 4 735 台 19 英寸彩电和 7 043 台 21 英寸彩电来获得最大利润，每年获得的净利润为 553 641 美元．每台 19 英寸彩电的平均售价为 270.52 美元，每台 21 英寸彩电的平均售价为 309.63 美元．生产的总支出为 2 908 000 美元，相应的利润率为 19%．这些结果显示了这是有利可图的，因此建议这家公司应该实行推出新产品的计划．

上面得出的结论是以图 2-1 中所做的假设为基础的．在向公司报告结论之前，应该对我们关于彩电市场和生产过程所做的假设进行灵敏性分析，以保证结果具有稳健性．我们主要关心的是决策变量 x_1 和 x_2 的值，因为公司要据此来确定生产量．

我们对 19 英寸彩电的价格弹性系数 a 的灵敏性进行分析．在模型中我们假设 $a=0.01$ 美元/台．将其代入前面的公式中，我们得到

```
In[1]:   y = (339 - x1/100 - 3x2/1000) x1 +
             (399 - 4x1/1000 - x2/100)x2 -
             (400000 + 195x1 + 225x2)

Out[1]   (-x1/100 - 3x2/1000 + 339) x1 - 195x1 + (-x1/250 - x2/100 + 399)
         x2 - 225x2 - 400000

In[2]:   dydx1 = D[y, x1]

Out[2]   -x1/50 - 7x2/1000 + 144

In[3]:   dydx2 = D[y, x2]

Out[3]   -7x1/1000 - x2/50 + 174

In[4]:   s = Solve[(dydx1 == 0, dydx2 == 0), (x1, x2)]

Out[4]   {{x1 → 554000/117, x2 → 824000/117}}

In[5]:   N[s]

Out[5]   {{x1 → 4735.04, x2 → 7042.74}}

In[6]:   y /. s

Out[6]   {21592000/39}

In[7]:   N[%]

Out[7]   {553641.}
```

图 2-4 利用计算机代数系统 Mathematica 求出的彩电问题的最优解

$$
\begin{aligned}
y &= f(x_1, x_2) \\
&= (339 - a x_1 - 0.003 x_2) x_1 \\
&\quad + (399 - 0.004 x_1 - 0.01 x_2) x_2 \\
&\quad - (400\,000 + 195 x_1 + 225 x_2)
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

求偏导数并令它们为零，可得

24~26

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 144 - 2a x_1 - 0.007 x_2 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= 174 - 0.007 x_1 - 0.02 x_2 = 0
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

同前面类似，解出 x_1，x_2，有

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1\,662\,000}{40\,000a - 49} \\
x_2 &= 8\,700 - \frac{581\,700}{40\,000a - 49}
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

图 2-5 和图 2-6 画出了 x_1 和 x_2 关于 a 的曲线图.

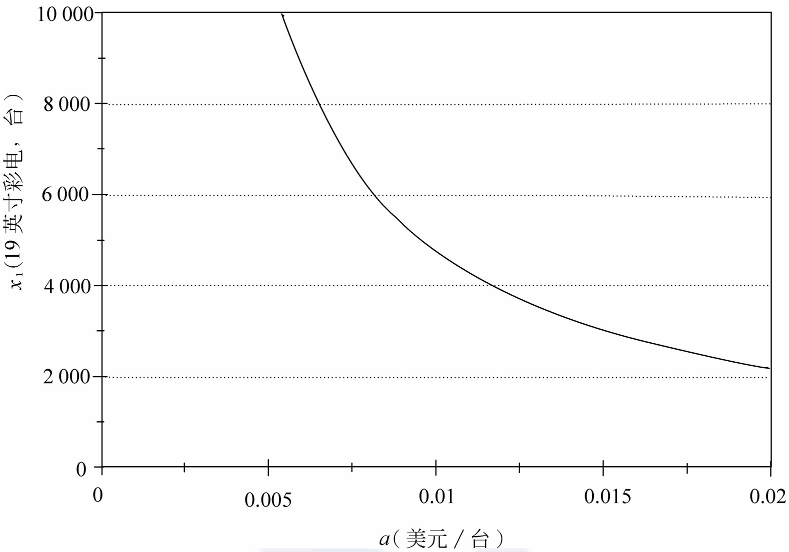

图 2-5 彩电问题中 19 英寸彩电的最优生产量 x_1 关于价格弹性系数 a 的曲线图

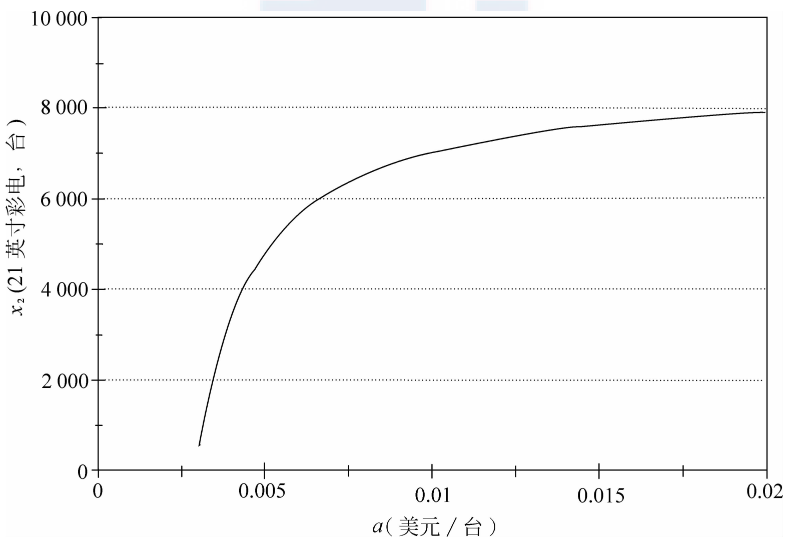

图 2-6 彩电问题中 21 英寸彩电的最优生产量 x_2 关于价格弹性系数 a 的曲线图

图中显示，19 英寸彩电的价格弹性系数 a 的提高，会导致 19 英寸彩电的最优生产量 x_1 的下降，及 21 英寸彩电的最优生产量 x_2 的提高．而且，还显示 x_1 比 x_2 对于 a 更敏感．这些看起来都是合理的．为得到这些灵敏性的具体数值，我们计算在 $a=0.01$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a} &= \frac{-66\ 480\ 000\ 000}{(40\ 000a-49)^2}\\ &= \frac{-22\ 160\ 000\ 000}{41\ 067}\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
S(x_1,a) &= \left(\frac{-22\ 160\ 000\ 000}{41\ 067}\right)\left(\frac{0.01}{554\ 000/117}\right) \\
&= -\frac{400}{351} \approx -1.1
\end{aligned}
$$

类似地可计算出

$$
S(x_2,a) = \frac{9\ 695}{36\ 153} \approx 0.27
$$

如果 19 英寸彩电的价格弹性系数提高 10%，则我们应该将 19 英寸彩电的生产量缩小 11%，21 英寸彩电的生产量扩大 2.7%.

下面我们来讨论 y 对于 a 的灵敏性. 19 英寸彩电的价格弹性系数的变化会对利润造成什么影响？为得到 y 关于 a 的表达式，我们将(2-9)式代入到(2-7)式中，得到

$$
\begin{aligned}
y = &\left[339 - a\left(\frac{1\ 662\ 000}{40\ 000a - 49}\right) - 0.003\left(8\ 700 - \frac{581\ 700}{40\ 000a - 49}\right)\right]\left(\frac{1\ 662\ 000}{40\ 000a - 49}\right) \\
&+ \left[339 - 0.004\left(\frac{1\ 662\ 000}{40\ 000a - 49}\right) - 0.01\left(8\ 700 - \frac{581\ 700}{40\ 000a - 49}\right)\right] \\
&\times \left(8\ 700 - \frac{581\ 700}{40\ 000a - 49}\right) - \left[400\ 000 + 195\left(\frac{16\ 620\ 000}{40\ 000a - 49}\right) + 225\right. \\
&\left.\times \left(8\ 700 - \frac{581\ 700}{40\ 000a - 49}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2-10}
$$

27~28 图 2-7 画出了 y 关于 a 的曲线图. 图中显示，19 英寸彩电的价格弹性系数 a 的提高，会导致利润的下降.

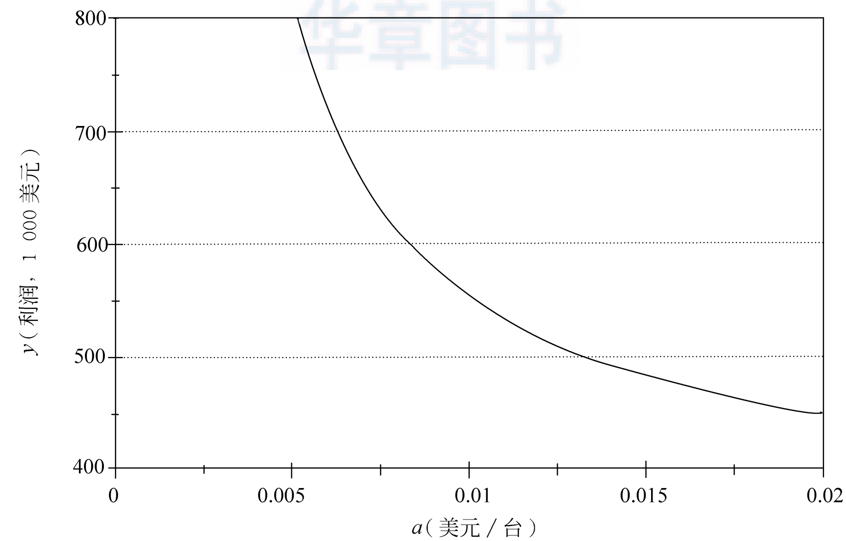

图 2-7 彩电问题中最优利润 y 关于价格弹性系数 a 的曲线图

为计算 $S(y, a)$，我们要求出 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}a$ 的公式．一种方法是直接对(2-10)式的单变量函数求导，这里可以借助于某个计算机代数系统．另一种计算上更有效的方法是利用多变量函数的链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial y}{\partial a} \tag{2-11}$$

由于在极值点 $\partial y/\partial x_1$ 与 $\partial y/\partial x_2$ 都为零，因此有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial y}{\partial a}=-x_1^2$$

由(2-7)式可直接得到

$$\begin{aligned}S(y,a)&=-\left(\frac{554\ 000}{117}\right)^2\frac{0.01}{(21\ 592\ 000/39)}\\&=-\frac{383\ 645}{947\ 349}\approx-0.40\end{aligned}$$

因此，19 英寸彩电的价格弹性系数提高 10%，会使利润下降 4%．

(2-11)式中的

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a}=0$$

29

有其实际意义．导数 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}a$ 中的这一部分代表了最优生产量 x_1 和 x_2 的变化对利润的影响．其和为零说明了生产量的微小变化(至少在线性近似时)对利润没有影响．从几何上看，由于 $y=f(x_1, x_2)$ 在极值点是平的，所以 x_1 和 x_2 的微小变化对 y 几乎没有什么影响．由于 19 英寸彩电的价格弹性系数提高 10% 而导致的最优利润的下降几乎全部是由售价的改变引起的，因此我们的模型给出的生产量几乎是最优的．例如，设 $a=0.01$，但实际的价格弹性系数比它高出了 10%．我们用(2-4)式来确定生产量，这意味着与由(2-9)式给出的 $a=0.011$ 的最优解相比，我们会多生产 10% 的 19 英寸彩电，而少生产约 3% 的 21 英寸彩电．而且，利润也会比最优值低 4%．但如果我们仍采用该模型的结果，实际会损失什么呢？仍按(2-4)式取 $a=0.011$ 确定生产量，会得到利润值为 531 219 美元．而最优利润为533 514 美元(在(2-9)式中令 $a=0.011$ 并代入到(2-7)式中)．因此，采用我们模型的结果，虽然现在的生产量与最优的生产量有相当的差距，但获得的利润仅仅比可能的最优利润损失了 0.43%．在这一意义下，我们的模型显示了非常好的稳健性．进一步地，许多类似的问题都可以得出类似的结论，这主要是因为在临界点处有 $\nabla f=0$.

前面所做的灵敏性分析的计算都可以借助于计算机代数系统完成．事实上，只要有可用的系统，这是首选的方法．图 2-8 给出了利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(x_1, a)$的过程，其他灵敏性的计算也是类似的．

对其他弹性系数的灵敏性分析可以用同样方式进行．虽然细节有所不同，但函数 f 的形式使得每一个弹性系数对 y 的影响在本质上具有相同的模式．特别地，即使对价格弹性系数的估计存在一些小误差，我们的模型也可以给出对生产量的很好的决策(几乎是最优

```
> y:=(339-a*x1-3*x2/1000)*x1
>   +(399-4*x1/1000-x2/100)*x2-(400000+195*x1+225*x2);
```

$$y := \left(339 - a\,x1 - \frac{3}{1000}x2\right) x1 + \left(399 - \frac{1}{250}x1 - \frac{1}{100}x2\right) x2 - 400000 - 195\,x1 - 225\,x2$$

```
> dydx1:=diff(y,x1);
```

$$dydx1 := -2a\,x1 + 144 - \frac{7}{1000}\,x2$$

```
> dydx2:=diff(y,x2);
```

$$dydx2 := -\frac{7}{1000}x1 - \frac{1}{50}\,x2 + 174$$

```
> s:=solve({dydx1=0, dydx2 = 0}, {x1,x2});
```

$$s := \left\{x1 = \frac{1662000}{40000\,a - 49},\ x2 = 48000\,\frac{7250\,a - 21}{40000\,a - 49}\right\}$$

```
> assign(s);
> dx1da:=diff(x1,a);
```

$$dx1da := -\frac{66480000000}{(40000\,a - 49)^2}$$

```
> assign(a=1/100);
> x1;
```

$$\frac{554000}{117}$$

```
> sx1a:=dx1da*(a/x1);
```

$$sx1a := \frac{-400}{351}$$

```
> evalf(sx1a);
```

$$-1.139601140$$

图 2-8　彩电问题中利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(x_1,\ a)$

的)，对这一点我们有高度的自信．

我们只简单地讨论一下一般的稳健性问题．我们的模型建立在线性价格结构的基础上，这显然只是一种近似．但在实际应用中，我们会按如下过程进行：首先对新产品的市场情况做出有根据的推测，并制定出合理的平均销售价格．然后根据过去类似情况下的经验或有限的市场调查估计出各个弹性系数．我们应该能对销售水平在某一范围内变化时估计出合理的弹性系数值，这个范围应该包括最优值．于是我们实际上只是对一个非线性函数在一个相当小的区域上进行线性近似．这类近似通常都会有良好的稳健性．这就是微积分的基本思想．

2.2　拉格朗日乘子

本节我们开始讨论具有较复杂结构的最优化问题．我们在上一节的开始就提到，当寻求最优解的集合变得复杂时，多变量最优化问题的求解就会复杂化．在实际问题中，由于存在着对独立变量的限制条件，使我们不得不考虑这些更复杂的模型．

例 2.2　再来考虑上一节中提出的彩电问题(例 2.1)．在那里我们假设公司每年有能力

生产任何数量的彩电．现在我们根据允许的生产能力引入限制条件．公司考虑投产这两种新产品是由于计划停止黑白电视机的生产，这样装配厂就有了额外的生产能力．这些额外的生产能力可以用来提高那些现有产品的产量，但公司认为新产品会带来更高的利润．据估计，现有的生产能力允许每年生产 10 000 台电视(约每周 200 台)．公司有充足的 19 英寸、21 英寸液晶平板及其他标准配件．但现在生产电视所需要的电路板供给不足．此外，19 英寸彩电需要的电路板与 21 英寸彩电的不同，这是由于其内部结构造成的．只有进行较大的重新设计才能改变这一点，但公司现在不准备做这项工作．电路板的供应商每年可以提供 8 000 块 21 英寸彩电的电路板和 5 000 块 19 英寸彩电的电路板．考虑到所有这些情况，彩电公司应该怎样确定其生产量？ 30~31

我们仍采用五步方法．第一步的结果显示在图 2-9 中．唯一的改变是对决策变量 s 和 t 所加的一些额外限制．第二步是选择建模方法．

变量：s = 19 英寸彩电的售出数量(每年)
t = 21 英寸彩电的售出数量(每年)
p = 19 英寸彩电的销售价格(美元)
q = 21 英寸彩电的销售价格(美元)
C = 生产彩电的成本(美元/年)
R = 彩电销售的收入(美元/年)
P = 彩电销售的利润(美元/年)

假设：$p = 339 - 0.01s - 0.003t$
$q = 399 - 0.004s - 0.01t$
$R = ps + qt$
$C = 400\,000 + 195s + 225t$
$P = R - C$
$s \leqslant 5\,000$
$t \leqslant 8\,000$
$s + t \leqslant 10\,000$
$s \geqslant 0$
$t \geqslant 0$

目标：求 P 的最大值

图 2-9　有约束的彩电问题的第一步的结果

这个问题的模型为有约束的多变量最优化问题，我们利用拉格朗日乘子法来求解．

给定一个函数 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 及一组约束．这里我们假设这些约束可以用 k 个等式表示： 32

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\cdots,x_n) &= c_1 \\ g_2(x_1,\cdots,x_n) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_k(x_1,\cdots,x_n) &= c_k \end{aligned}$$

我们在后面会介绍如何处理不等式约束．我们的目标是在集合

$$S = \{(x_1,\cdots,x_n): g_i(x_1,\cdots,x_n) = c_i,\quad i = 1,\cdots,k\}$$

上对

$$y = f(x_1,\cdots,x_n)$$

求最大值．一个定理保证了在极值点 $x \in S$，一定有

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_k \nabla g_k$$

这里 λ_1，…，λ_k 称为拉格朗日乘子．定理假设 ∇g_1，…，∇g_k 是线性无关向量（[Edwards，1973]，p. 113）．为了求出 f 在集合 S 上的极大或极小值点，我们要一起求解关于变量 x_1，…，x_n 和 λ_1，…，λ_k 的 n 个拉格朗日乘子方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}\\ &\vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n}\end{aligned}$$

及 k 个约束方程：

$$\begin{aligned}g_1(x_1,\cdots,x_n) &= c_1\\ &\vdots\\ g_k(x_1,\cdots,x_n) &= c_k\end{aligned}$$

这里我们还要检查那些不满足梯度向量 ∇g_1，…，∇g_k 线性无关的异常点．

33 拉格朗日乘子法以梯度向量的几何解释为基础．假设只有一个约束函数

$$g(x_1,\cdots,x_n) = c$$

则拉格朗日乘子方程变为

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

集合 $g=c$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n-1$ 维曲面．对任意点 $x \in S$，梯度向量 $\nabla g(x)$ 在这点与 S 垂直．而梯度向量 ∇f 总是指向 f 增加最快的方向．在局部极大或极小值点，f 增加最快的方向也应该与 S 垂直，于是在这一点，∇f 与 ∇g 指向同一个方向，即 $\nabla f = \lambda \nabla g$.

在有多个约束的情况下，几何的原理是类似的．现在 S 为 k 个曲面 $g_1=c_1$，…，$g_k=c_k$ 的交集．每一个曲面都是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n-1$ 维子集，从而它们的交集为 $n-k$ 维子集．在极值点，∇f 一定与 S 垂直，因而它一定在由 k 个向量 ∇g_1，…，∇g_k 张成的线性空间中．线性无关的假设保证了这 k 个向量 ∇g_1，…，∇g_k 确实可以生成一个 k 维线性空间．（在单个约束的情况下，线性无关即为 $\nabla g \neq 0$.）

例 2.3　在集合 $x^2+y^2+z^2=3$ 上求 $x+2y+3z$ 的最大值点．

这是一个有约束的多变量最优化问题．我们定义目标函数为

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

约束函数为

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

计算出

$$\nabla f = (1,2,3)$$
$$\nabla g = (2x,2y,2z)$$

在极值点，有 $\nabla f = \lambda \nabla g$，即

$$1 = 2x\lambda$$
$$2 = 2y\lambda$$
$$3 = 2z\lambda$$

34

这里给出了有四个未知数的三个方程．将 x，y，z 用 λ 表示，有

$$x = 1/2\lambda$$
$$y = 1/\lambda$$
$$z = 3/2\lambda$$

利用 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$，可得到一个关于 λ 的二次方程，共有两个实根．由根 $\lambda = \sqrt{42}/6$ 求得

$$x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{42}}{14}$$
$$y = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$
$$z = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3\sqrt{42}}{14}$$

从而

$$a = \left(\frac{\sqrt{42}}{14},\frac{\sqrt{42}}{7},\frac{3\sqrt{42}}{14}\right)$$

为一个可能的极值点．由另一个根 $\lambda = -\sqrt{42}/6$ 得到另一个可能的极值点 $b = -a$. 因为在约束集合 $g = 3$ 上，处处都有 $\nabla g \neq 0$，因此只有 a 和 b 两点为可能的极值点．由于 f 为有界闭集 $g = 3$ 上的连续函数，因此 f 一定可以在这个集合上达到最大值和最小值．由于

$$f(a) = \sqrt{42}, \quad f(b) = -\sqrt{42}$$

因而 a 为最大值点，b 为最小值点．从几何上考虑这个例子．约束集合 S 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

定义，这是$\mathbb{R}^3$中以原点为球心，$\sqrt{3}$为半径的球面．目标函数

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

的水平集为$\mathbb{R}^3$中的平面族．点 a 和 b 为球面 S 上仅有的两个点，在此处水平集中的平面与球面 S 相切．在极大点 a，梯度向量 ∇f 与 ∇g 的方向一致．在极小点 b，梯度向量 ∇f 与 ∇g 的方向相反．

例 2.4　在集合 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 与 $x = 1$ 上求 $x + 2y + 3z$ 的最大值点．

目标函数为　35

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z$$

于是

$$\nabla f = (1,2,3)$$

约束函数为

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$g_2(x,y,z) = x$$

计算出

$$\nabla g_1 = (2x,2y,2z)$$
$$\nabla g_2 = (1,0,0)$$

拉格朗日乘子的公式为 $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$，即

$$1 = 2x\lambda_1 + \lambda_2$$
$$2 = 2y\lambda_1$$
$$3 = 2z\lambda_1$$

将 x，y，z 用 λ_1，λ_2 表示，有

$$x = \frac{1-\lambda_2}{2\lambda_1}$$
$$y = \frac{2}{2\lambda_1}$$
$$z = \frac{3}{2\lambda_1}$$

代入到约束方程 $x=1$ 中，得到 $\lambda_2 = 1-2\lambda_1$. 将它们都代入到另一个方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

中，得到一个关于 λ_1 的二次方程，解出 $\lambda_1 = \pm\sqrt{26}/4$. 代回到 x，y，z 的公式中，得到如下两个解：

$$c = \left(1, \frac{2\sqrt{26}}{13}, \frac{3\sqrt{26}}{13}\right)$$
$$d = \left(1, \frac{-2\sqrt{26}}{13}, \frac{-3\sqrt{26}}{13}\right)$$

因为在约束集合上，梯度向量 ∇g_1 与 ∇g_2 处处都是线性无关的，因此只有 c 和 d 两点为可能的最大值点．由于 f 一定能在有界闭集上达到最大值，因此我们只需计算每个可能的极值点的 f 值来找出最大值点．最大值为

$$f(c) = 1 + \sqrt{26}$$

而点 d 为局部极小值点．这个例子中的约束集合 S 为$\mathbb{R}^3$ 中由球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 和平面 $x=1$ 相交得出的圆．像上一个例子一样，函数 f 的水平集为$\mathbb{R}^3$ 中的平面族. 在 c 和 d 点平面与圆 S 相切．

36

不等式约束可以通过拉格朗日乘子法和无约束问题的求解方法的组合来解决．在例 2.4 中，用不等式约束 $x \geq 1$ 来代替原约束 $x=1$. 我们将集合

$$S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=3, x\geqslant 1\}$$

看成两个子集的并．在第一个子集

$$S_1=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=3, x=1\}$$

上，通过我们前面的分析，其最大值发生在点

$$c=\left(1,\sqrt{\frac{8}{13}},1.5\sqrt{\frac{8}{13}}\right)$$

我们可以计算出在这一点

$$f(x,y,z)=1+6.5\sqrt{\frac{8}{13}}=6.01$$

再考虑另一个子集

$$S_2=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=3, x>1\}$$

由例 2.3 中的分析，我们可以知道在这个集合上的任何一处都没有 f 的局部极大值点．因此，f 在 S_1 上的最大值即为 f 在集合 S 上的最大值．如果我们考虑 f 在集合

$$S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=3, x\leqslant 1\}$$

上的最大值，仍由例 2.3 中的分析，可知最大值会在点 37

$$a=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{6}{7}}$$

处达到．

现在仍回到本节开始讨论的问题．我们可以继续进行求解过程的第三步．将修改后的彩电问题作为有约束的多变量最优化问题来处理．我们要对关于两个决策变量 $x_1=s$，$x_2=t$ 的函数 $y=P$(利润)求最大值．目标函数与以前一样，

$$\begin{aligned} y &= f(x_1,x_2)\\ &= (339-0.01x_1-0.003x_2)x_1+(399-0.004x_1-0.01x_2)x_2\\ &\quad -(400\,000+195x_1+225x_2) \end{aligned}$$

我们要对 f 在满足如下约束的 x_1，x_2 的集合 S 上求最大值：

$$\begin{aligned} x_1 &\leqslant 5\,000\\ x_2 &\leqslant 8\,000\\ x_1+x_2 &\leqslant 10\,000\\ x_1 &\geqslant 0\\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

这一集合称为可行域，这是因为它是所有可能的生产量构成的集合．图 2-10 画出了这个问题的可行域．

我们用拉格朗日乘子法在集合 S 上对 $y=f(x_1,x_2)$ 求最大值．计算出

$$\nabla f=(144-0.02x_1-0.007x_2, 174-0.007x_1-0.02x_2)$$

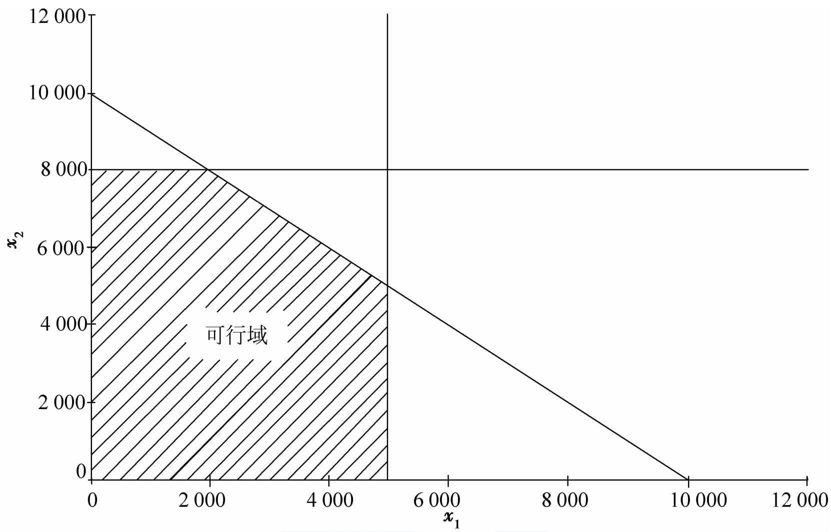

图 2-10　有约束的彩电问题中 19 英寸彩电的所有可能生产量 x_1 及 21 英寸彩电的所有可能生产量 x_2 的可行域图

因为在 S 的内部有 $\nabla f \neq 0$，所以最大值一定在边界达到．首先考虑在约束直线

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 10\ 000$$

上的一段边界．这时 $\nabla g = (1, 1)$，从而拉格朗日乘子方程为

$$\begin{aligned} 144 - 0.02x_1 - 0.007x_2 &= \lambda \\ 174 - 0.007x_1 - 0.02x_2 &= \lambda \end{aligned} \tag{2-12}$$

与约束方程

$$x_1 + x_2 = 10\ 000$$

一起求解，得到

$$x_1 = \frac{50\ 000}{13} \approx 3\ 846$$

$$x_2 = \frac{80\ 000}{13} \approx 6\ 154$$

$$\lambda = 24$$

代入到目标函数(2-2)式中，得到在极大点 $y = 532\ 308$.

图 2-11 给出了用 Maple 画出的可行域及 f 的水平集图像．

水平集 $f = C$ 当 $C = 0$，100 000，…，500 000 时为一族逐渐缩小的同心环，这些环与可行域相交，水平集 $f = 532\ 308$ 为最小的环．这个集合刚刚接触到可行域 S，且与直线 $x_1 + x_2 = 10\ 000$在极值点相切．由图上可明显看出，利用拉格朗日乘子法在约束直线 $x_1 + x_2 = 10\ 000$ 上找到的临界点就是 f 在整个可行域上的最大值．

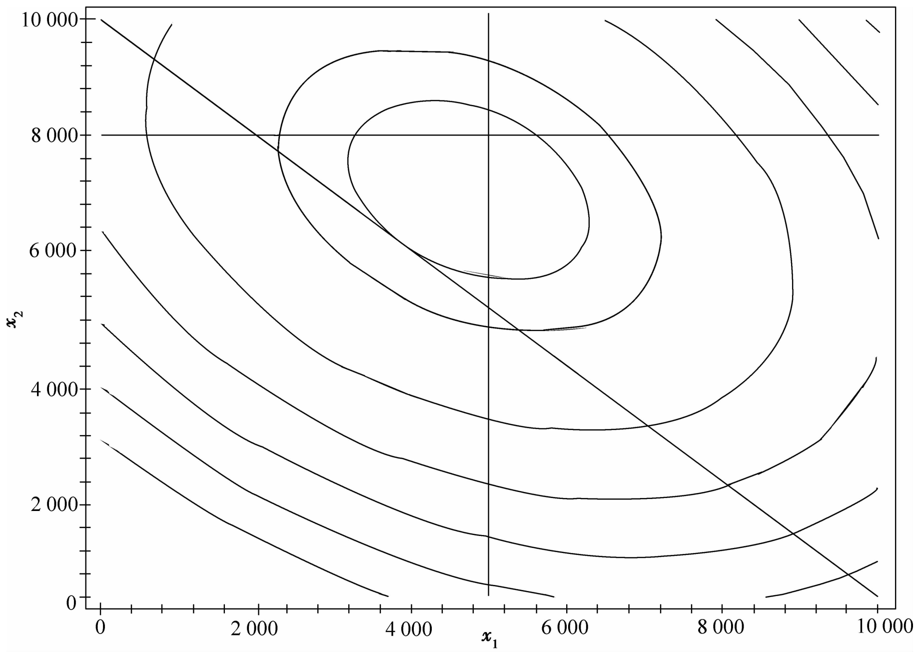

图 2-11　有约束的彩电问题中关于 19 英寸彩电的生产量 x_1 和 21 英寸彩电的生产量 x_2 的利润函数 $y=f(x_1, x_2)$ 的水平集图，以及所有可能的生产量的集合

这个点确实是最大值点的代数证明较为麻烦．通过比较 f 在这个临界点和这一线段的两个端点(5 000, 5 000)，(2 000, 8 000)处的值，可以说明这个临界点是这条线段上的极大值点．然后我们在剩余的其他线段上对 f 求极大值，并比较这些结果．比如，f 在落在 x_1 轴的线段上的极大值发生在 $x_1=5\,000$ 处．为得到这一结论，对约束 $g(x_1, x_2)=x_2=0$ 应用拉格朗日乘子法．这里 $\nabla g=(0, 1)$，从而拉格朗日乘子方程为

$$144-0.02x_1-0.007x_2=0$$

$$174-0.007x_1-0.02x_2=\lambda$$

与约束方程 $x_2=0$ 一起求解，得到 $x_1=7\,200$，$x_2=0$，$\lambda=123.6$. 这点在可行域之外，从而此线段上的极大或极小值一定发生在端点(0，0)，(5 000，0)上．由于 f 的值在第二个点比较大，因此第一个点为极小值点，第二个点为极大值点．这里也可以将约束 $x_2=0$ 代入到 f 中，在此线段上求解一个一维极值问题．由于 f 的最大值出现在斜的线段上，这样我们就找到了 f 在 S 上的最大值．这里第四步中的一些计算比较麻烦，在这种情况下，采用计算机代数系统来完成求导和解方程组的计算比较简便．图 2-12 给出了利用计算机代数系统 Mathematica 来完成在直线约束 $x_1+x_2=10\,000$ 下的第四步的计算结果．

用通俗的语言说，公司为获得最大利润应生产 3 846 台 19 英寸彩电和 6 154 台 21 英寸彩电，从而每年的总生产量为 10 000 台，这样的生产量用掉了所有额外的生产能力．能够

```
In[1]:    y = (339 - x1/100 - 3x2/1000) x1 +
              (399 - 4x1/1000 - x2/100)x2 -
              (400000 + 195x1 + 225x2)
```

Out[1]　$\left(-\frac{x1}{100}-\frac{3x2}{1000}+339\right)x1 - 195x1 + \left(-\frac{x1}{250}-\frac{x2}{100}+399\right)x2 - 225x2 - 400000$

```
In[2]:    dydx1 = D[y, x1]
```

Out[2]　$-\frac{x1}{50}-\frac{7x2}{1000}+144$

```
In[3]:    dydx2 = D[y, x2]
```

Out[3]　$-\frac{7x1}{1000}-\frac{x2}{50}+174$

```
In[4]:    s = Solve[(dydx1 == lambda, dydx2 == lambda,
            x1 + x2 == 10000), (x1, x2, lambda)]
```

Out[4]　$\left\{\left\{x1\to\frac{50000}{13},\ x2\to\frac{80000}{13},\ lambda\to 24\right\}\right\}$

```
In[5]:    N[%]
Out[5]    {{x1 → 3846.15, x2 → 6153.85, lambda → 24.}}
In[6]:    y/.%
Out[6]    {532308.}
```

图 2-12　利用计算机代数系统 Mathematica 求有约束的彩电问题的最优解

供应的电路板的资源限制不是关键的．这样可以得到预计每年532 308 美元的利润．

2.3　灵敏性分析与影子价格

我们在本节讨论拉格朗日乘子法中的灵敏性分析的一些特殊方法．这里我们会看到乘子本身是有实际意义的．

在报告我们对例 2.2 的分析结果之前，进行灵敏性分析是非常重要的．在 2.1 节的最后，我们讨论了无约束模型的价格弹性系数的灵敏性．这一过程对现在的有约束模型也是类似的．我们考察某一特定参数的灵敏性时，在模型中将此参数设为变量，使模型略为一般化．假设我们仍讨论 19 英寸彩电的价格弹性系数 a 的灵敏性．仍将目标函数写成(2-7)式的形式，有

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

这里 $\partial f/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_2$ 由(2-8)式给出．现在拉格朗日乘子方程为

38~41

$$\begin{aligned} 144 - 2ax_1 - 0.007x_2 &= \lambda \\ 174 - 0.007x_1 - 0.02x_2 &= \lambda \end{aligned} \tag{2-13}$$

与约束方程

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 10\ 000$$

一起求解，得到

$$x_1 = \frac{50\ 000}{1\ 000a + 3}$$

$$x_2 = 10\ 000 - \frac{50\ 000}{1\ 000a + 3}$$
$$\lambda = \frac{650}{1\ 000a + 3} - 26 \tag{2-14}$$

计算出

$$\frac{dx_1}{da} = \frac{-50\ 000\ 000}{(1\ 000a + 3)^2}$$
$$\frac{dx_2}{da} = \frac{-dx_1}{da} \tag{2-15}$$

从而在点 $x_1 = 3\ 846$，$x_2 = 6\ 154$，$a = 0.01$，有

$$S(x_1, a) = \frac{dx_1}{da} \cdot \frac{a}{x_1} = -0.77$$

$$S(x_2, a) = \frac{dx_2}{da} \cdot \frac{a}{x_2} = 0.48$$

图 2-13 和图 2-14 画出了 x_1，x_2 关于 a 的曲线图．如果 19 英寸彩电的价格弹性系数增大，我们要将一部分 19 英寸彩电的生产量转为生产 21 英寸彩电．如果这一系数减小，我们则要多生产一些 19 英寸彩电，少生产一些 21 英寸彩电．

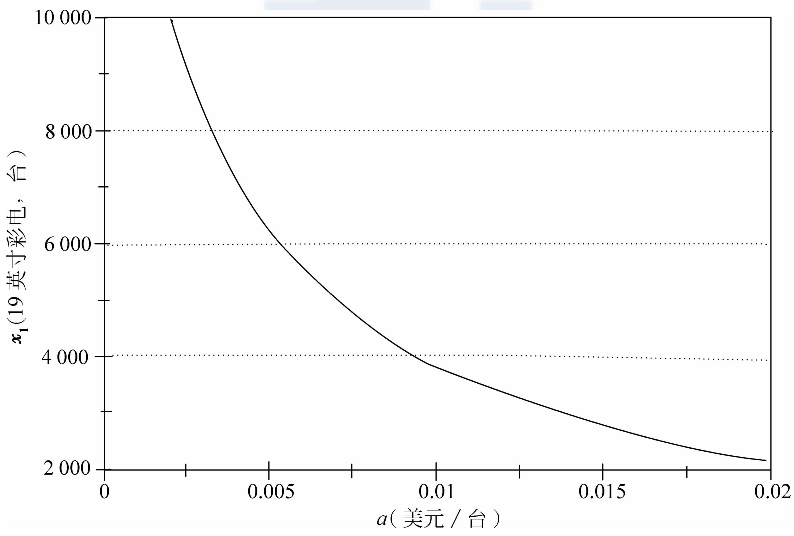

图 2-13　有约束的彩电问题中 19 英寸彩电的最优生产量 x_1 关于价格弹性系数 a 的曲线图

在任一种情况下，只要(2-14)式给出的点(x_1，x_2)落在其他约束直线之间($0.007 \leqslant a \leqslant 0.022$)，总是可以生产总量为 10 000 台的彩电．

现在我们来讨论最优利润 y 对 19 英寸彩电的价格弹性系数 a 的灵敏性．为得到 y 关于

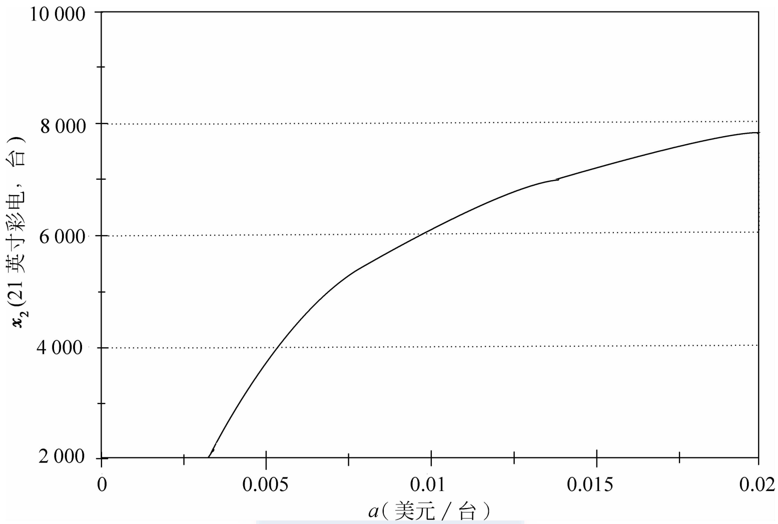

图 2-14 有约束的彩电问题中 21 英寸彩电的最优生产量 x_2 关于价格弹性系数 a 的曲线图

a 的表达式，我们将(2-14)式代入到(2-3)式中，得到

$$\begin{aligned} y = &\left[339 - a\left(\frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right) - 0.003\left(10\ 000 - \frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right)\right]\left(\frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right) \\ &+ \left[399 - 0.004\left(\frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right) - 0.01\left(10\ 000 - \frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right)\right] \\ &\times\left(10\ 000 - \frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right) - \left[400\ 000 + 195\left(\frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right) + 225\right. \\ &\left.\times\left(10\ 000 - \frac{50\ 000}{1\ 000a+3}\right)\right] \end{aligned}$$

42~43 图 2-15 为 y 关于 a 的曲线图.

为得到 y 关于 a 的灵敏性的定量结果，我们要对上式求单变量函数的导数. 这可以借助于计算机代数系统来完成. 另一种计算上更有效的方法是在(2-11)式中用多变量函数求导的链式法则. 对任意 a，梯度向量 ∇f 与约束直线 $g=10\ 000$ 垂直. 由于

$$x(a) = (x_1(a), x_2(a))$$

为曲线 $g=10\ 000$ 上的一个点，因此速度向量

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a}\right)$$

与此曲线相切. 这样 ∇f 就与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}a$ 相垂直，即点积

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} &= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a}, \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a}\right) \\ &= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}a} = 0 \end{aligned}$$

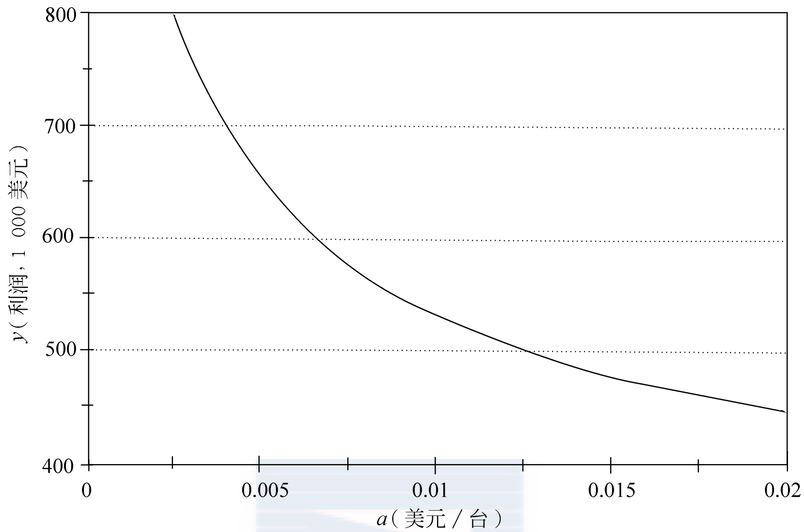

图 2-15　有约束的彩电问题中最优利润 y 关于价格弹性系数 a 的曲线图

因此可以与 2.1 节类似地得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial y}{\partial a}=-x^2$$

44

现在我们可以很容易地计算

$$\begin{aligned}S(y,a)&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\cdot\frac{a}{y}\\&=-(3\,846)^2\frac{0.01}{532\,308}\\&=-0.28\end{aligned}$$

同无约束问题一样，价格弹性系数的增加会导致利润的减少．同样，与无约束问题相同，几乎所有的利润损失都是由 19 英寸彩电的销售价格的降低所导致的．如果 $a=0.011$，即使用 $x_1=3\,846$，$x_2=6\,154$ 来代替由(2-13)式求出的新的最优解，我们也不会有太多的利润损失．梯度向量 ∇f 指向目标函数值即利润增加最快的方向．现在我们不在最优点处，但从最优值点到点(3 846，6 154)的方向与 ∇f 垂直，从而我们可以预期 f 在这点的值与最优值相差不大．因此，即使 a 有些小改变，我们的模型也可以给出非常接近最优值的解．

我们指出，对这个问题，使用计算机代数系统来完成需要的计算也是很有帮助的．图 2-16 给出了利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(x_2, a)$ 的过程，其他灵敏性的计算也可以类似进行．

我们现在来考虑最优生产量 x_1，x_2 和相应的利润 y 关于每年可利用的生产能力 $c=10\,000$(台)的灵敏性．为完成这一工作，我们要在原始的问题中，将约束 $g=10\,000$ 改写

```
> y:=(339-a*x1-3*x2/1000)*x1
>   +(399-4*x1/1000-x2/100)*x2-(400000+195*x1+225*x2);
```

$$y := \left(339 - a x1 - \frac{3}{1000} x2\right) x1 + \left(399 - \frac{1}{250} x1 - \frac{1}{100} x2\right) x2 - 400000 - 195 x1 - 225 x2$$

```
> dydx1:=diff(y,x1);
```

$$dydx1 := -2 a x1 + 144 - \frac{7}{1000} x2$$

```
> dydx2:=diff(y,x2);
```

$$dydx2 := -\frac{7}{1000} x1 - \frac{1}{50} x2 + 174$$

```
> s:=solve({dydx1=lambda, dydx2 = lambda, x1+x2=10000},
  {x1, x2, lambda});
```

$$s := \left\{x1 = \frac{50000}{1000\,a + 3},\ x2 = 20000\frac{5000\,a - 1}{1000\,a + 3},\ \lambda = -52\frac{500\,a - 11}{1000\,a + 3}\right\}$$

```
> assign(s);
> dx2da:=diff(x2,a);
```

$$dx2da := -\frac{10000000}{1000\,a + 3} - 20000000\frac{500\,a - 1}{(1000\,a + 3)^2}$$

```
> assign(a=1/100);
> sx2a:=dx2da*(a/x2);
```

$$sx2a := \frac{25}{52}$$

```
> evalf(sx2a);
```

$$.4807692308$$

图 2-16 有约束的彩电问题中利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(x_2, a)$

为更一般的形式 $g = c$. 现在的可行域与图 2-10 中所画的是类似的，只是那条斜的约束直线移动了一些(但仍平行于直线 $x_1 + x_2 = 10\,000$). 对在10 000附近的 c 值，最大值仍出现在约束直线

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = c \tag{2-16}$$

上满足 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 的点处. 由于 ∇f 和 ∇g 都与原问题相同，没有任何改变，我们得到同一个拉格朗日乘子方程(2-12)式. 现在要与新的约束方程(2-16)式一起求解，得到

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{13c - 30\,000}{26} \\ x_2 &= \frac{13c + 30\,000}{26} \\ \lambda &= \frac{3(106\,000 - 9c)}{2\,000} \end{aligned} \tag{2-17}$$

现在有

$$\frac{dx_1}{dc} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{dx_2}{dc} = \frac{1}{2} \qquad (2\text{-}18)$$

(2-18)式有一个简单的几何解释．由于 ∇f 指向 f 的值增加最快的方向，当我们移动(2-16)式中的约束直线时，新的极值点(x_1，x_2)近似地应该在 ∇f 与(2-16)式的直线相交的位置．这样我们有 45~46

$$S(x_1, c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\ 000}{3\ 846} \approx 1.3$$

$$S(x_2, c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\ 000}{6\ 154} \approx 0.8$$

为得到 y 关于 c 的灵敏性，我们计算出

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dc} &= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dc} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dc} \\ &= (24)\left(\frac{1}{2}\right) + (24)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 24\end{aligned}$$

这是拉格朗日乘子 λ 的值．这时

$$S(y, c) = (24)\left(\frac{10\ 000}{532\ 308}\right) \approx 0.45$$

dy/dc 的几何解释是这样的：我们有 $\nabla f = \lambda\ \nabla g$，当 c 增加时，在几何上为沿着 ∇f 的方向向外移动．在这个方向上移动时，f 的增加速度是 g 的增加速度的 λ 倍．

导数 $dy/dc = 24$ 有着很重要的实际意义．每增加一个单位的生产能力 $\Delta c = 1$，会带来的利润增加额为 $\Delta y = 24$ 美元．这称为影子价格．它代表了对这个公司来说某种资源(生产能力)的价值．如果公司有意提高自己的生产能力(这是最关键的约束)，它会愿意付出每单位不超过 24 美元的价格来增加生产能力．另一方面，如果有某种新产品，它可以获得每单位超过 24 美元的利润，公司就会考虑将用于 19 英寸和 21 英寸液晶平板彩电的生产能力转而投产这种新产品．也只有超过 24 美元，转产才是值得的．

这个问题中的灵敏性计算也可以使用计算机代数系统来完成．图 2-17 给出了利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(y, c)$ 的过程．

其他灵敏性的计算也可以类似进行．如果你有幸可以使用某个计算机代数系统，你也可以利用它来完成你自己的工作．实际问题经常会涉及冗长的计算，使用计算机代数系统的方便快捷可以使你更有成效．而且比起手算，它也要有意思得多．

在这个问题中，由于其他的约束条件($x_1 \leq 5\ 000$，$x_2 \leq 8\ 000$)都不是关键约束，最优利润 y 及生产量 x_1，x_2 对这些约束的系数当然一点都不敏感．x_1 或 x_2 的上界的一个小变化会

```
> y:=(339-x1/100-3*x2/1000)*x1
>   +(399-4*x1/1000-x2/100)*x2-(400000+195*x1+225*x2);
```

$$y := \left(339 - \frac{1}{100}x1 - \frac{3}{1000}x2\right)x1 + \left(399 - \frac{1}{250}x1 - \frac{1}{100}x2\right)x2 - 400000 - 195x1 - 225x2$$

```
> dydx1:=diff(y,x1);
```

$$dydx1 := -\frac{1}{50}x1 + 144 - \frac{7}{1000}x2$$

```
> dydx2:=diff(y,x2);
```

$$dydx2 := -\frac{7}{1000}x1 - \frac{1}{50}x2 + 174$$

```
> s:=solve({dydx1=lambda, dydx2 = lambda, x1+x2=c},
  {x1, x2, lambda});
```

$$s := \left\{\lambda = -\frac{27}{2000}c + 159,\ x1 = \frac{1}{2}c - \frac{15000}{13},\ x2 = \frac{1}{2}c + \frac{15000}{13}\right\}$$

```
> assign(s);
> dydc:=diff(y,c);
```

$$dydc := -\frac{27}{2000}c + 159$$

```
> assign(c=10000);
> dydc;
```

$$24$$

```
> syc:=dydc*(c/y);
```

$$syc := \frac{78}{173}$$

```
> evalf(syc);
```

$$.4508670520$$

图 2-17　有约束的彩电问题中利用计算机代数系统 Maple 计算灵敏性 $S(y, c)$

改变可行域，但最优解仍为(3 846，6 154)．因此，这些资源的影子价格为零．既然不需要，公司就不会愿意付出额外费用来提高电视的电路板的数量．除非 19 英寸彩电的电路板的数量减少到低于 3 846 或 21 英寸彩电的电路板的数量减少到低于 6 154，这种情况都不会改变．在下一个例子中，我们会考虑这一问题．

例 2.5　设在有约束的彩电问题中(例 2.2)，可用的 19 英寸彩电的电路板只有每年 3 000块．这时最优的生产计划是什么？

在这种情况下，在 $x_1 + x_2 = 10\,000$ 上使 $f(x_1, x_2)$ 达最大值的原最优点落在了可行域之外．f 在可行域上的最大值点为(3 000，7 000)．这是约束线

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 10\,000$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_1 = 3\,000$$

的交点．在此点，我们有

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$$

可以很容易地计算出在点(3 000，7 000)，

$$\nabla f = (35,13)$$
$$\nabla g_1 = (1,1)$$
$$\nabla g_2 = (1,0)$$

47~48

于是 $\lambda_1 = 13$，$\lambda_2 = 22$. 当然$\mathbb{R}^2$ 中的任何一个向量都可以写成(1，1)和(1，0)的线性组合. 计算拉格朗日乘子的这个点，虽然满足双重约束，但仍代表了关键约束(生产能力和 19 英寸彩电的电路板)的影子价格. 换句话说，额外增加一单位的生产能力可多获利 13 美元，额外增加一单位的 19 英寸的电路板可多获利 22 美元.

为了方便读者阅读，我们在这里给出拉格朗日乘子代表影子价格的一个证明. 给定一个函数 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$，在由一个或多个如下形式的约束方程定义的集合上求 f 的最优值：

$$\begin{aligned} g_1(x_1,\cdots,x_n) &= c_1 \\ g_2(x_1,\cdots,x_n) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_k(x_1,\cdots,x_n) &= c_k \end{aligned}$$

假设最优值发生在点 x_0 处，在此点拉格朗日乘子定理的条件都是满足的. 因此在 x_0，有

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_k \nabla g_k \tag{2-19}$$

因为约束方程可以按任何顺序来写，所以只要证明 λ_1 是相应于第一个约束的影子价格就足够了. 设 $x(t)$ 为集合 $g_1 = t$，$g_2 = c_2$，$\cdots$，$g_k = c_k$ 上的最优值点，因为 $g_1(x(t)) = t$，我们有

$$\nabla g(x(t)) \cdot x'(t) = 1$$

特别地，有 $\nabla g(x_0) \cdot x'(c_1) = 1$. 由于对 $i = 2, \cdots, k$，有 $g_i(x(t)) = c_i$，即对任意 t 都是常数，从而有

$$\nabla g_i(x(t)) \cdot x'(t) = 0$$

特别地，有 $\nabla g_i(x_0) \cdot x'(c_1) = 0$. 影子价格为在点 $t = c_1$ 的

$$\frac{\mathrm{d}(f(x(t)))}{\mathrm{d}t} = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t)$$

由于(2-19)式在点 x_0 成立，我们就得到了所要证明的

$$\nabla f(x_0) \cdot x'(c_1) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) \cdot x'(c_1) = \lambda_1$$

49

2.4 习题

1. 生态学家用下面的模型来反映两个竞争的种群的数量增长过程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \alpha_1 xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \alpha_2 xy$$

其中变量 x，y 为每个种群的数量．参数 r_i 为每个种群的内禀增长率；K_i 为没有竞争时环境资源可容许的最大可生存的种群数量；α_i 为竞争的影响．通过对蓝鲸和长须鲸的数量的研究，这些参数的值如下(时间 t 以年为单位)：

	蓝　鲸	长　须　鲸
r	0.05	0.08
K	150 000	400 000
α	10^{-8}	10^{-8}

(a)采用五步方法和无约束最优化模型确定使每年新出生鲸鱼的数量最多的种群数量 x，y.

(b)讨论最优种群数量关于内禀增长率 r_1，r_2 的灵敏性．

(c)讨论最优种群数量关于环境承载能力 K_1，K_2 的灵敏性．

(d)设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$，这时如果出现某一种群灭绝的情况，是否还会是最优解？

2. 仍考虑习题 1 中的鲸鱼问题，但现在讨论鲸鱼的总数．如果两种鲸鱼的数量 x，y 是非负的，我们就称其是可行的．如果两种鲸鱼的增长率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 是非负的，我们就称鲸鱼的种群数量是可持续的．

(a)采用五步方法和有约束的最优化模型求使鲸鱼总数 $x+y$ 达最大值的种群数量，要求满足种群数量是可行的和可持续的条件．

(b)讨论最优种群数量 x，y 关于内禀增长率 r_1，r_2 的灵敏性．

50 (c)讨论最优种群数量 x，y 关于环境承载能力 K_1，K_2 的灵敏性．

(d)设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$，讨论最优种群数量 x，y 关于竞争强度 α 的灵敏性．如果出现某一种群灭绝的情况，该种群数量是否还会是最优解？

3. 仍考虑习题 1 中的鲸鱼问题，但现在从经济方面讨论捕猎的问题．

(a)捕获一头蓝鲸的价值为 12 000 美元，捕获一头长须鲸的价值为蓝鲸的一半．设有控制的捕猎可以使 x，y 维持一个理想的水平，求使总收入达极大的种群数量 x，y.(一旦种群数量达到了理想水平，通过使捕猎率与增长率相等，可以使种群数量保持一个常值.)要求采用五步方法和无约束的最优化模型．

(b)讨论最优种群数量 x，y 关于参数 r_1，r_2 的灵敏性．

(c)讨论收入(按美元/年)关于参数 r_1，r_2 的灵敏性．

(d)设 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$，讨论 x，y 关于 α 的灵敏性．什么情况下使某一种群灭绝时在经济上可达最优？

4. 在习题 1 中，假设国际捕鲸协会(IWC)颁布了法令，不能使鲸鱼的数量低于最大可生存的种群数量 K 的一半，否则将无法维持其种群数量．

(a) 采用拉格朗日乘子法求在这些约束下使可持续收入达极大的最优种群数量.

(b) 讨论最优种群数量 x，y 和可持续收入关于约束系数的灵敏性.

(c) IWC 认为最小种群数量的规定按限额捕捞的方式更容易完成. 请给出一个与 $K/2$ 的规定等价的限额(即每年可以捕猎的蓝鲸和长须鲸的最大数量).

(d) 捕鲸者抱怨 IWC 的限额使他们花费的资金太多，他们请求放宽限制. 试分析提高限额对捕鲸者的年收入和鲸鱼的种群数量的可能的影响.

5. 考虑例 2.1 中无约束的彩电问题. 由于公司的装配厂在海外，所以美国政府要对每台电视征收 25 美元的关税.

(a) 将关税考虑进去，求最优生产量. 这笔关税会使公司有多少花费？在这笔花费中，有多少是直接付给政府，又有多少是销售额的损失？ 51

(b) 为了避免关税，公司是否应该将生产企业重新定址在美国本土上？假设海外的工厂可以按每年 200 000 美元的价格出租给另一家制造公司，在美国国内建设一个新工厂并使其运转起来每年需要花费 550 000 美元. 这里建筑费用按新厂的预期使用年限分期偿还.

(c) 征收关税的目的是为了促使制造公司在美国国内建厂. 能够使公司愿意在国内重新建厂的最低关税额是多少？

(d) 将关税定得足够高，使公司要重建工厂. 讨论生产量和利润关于关税的灵敏性，说明实际关税额的重要性.

6. 一家个人计算机的制造厂商现在每个月售出 10 000 台基本机型的计算机. 生产成本为 700 美元/台，批发价格为 950 美元/台. 在上一个季度中，制造厂商在几个作为试验的市场将价格降低了 100 美元，其结果是销售额提高了 50%. 公司在全国为其产品做广告的费用为每个月 50 000 美元. 广告代理商宣称若将广告预算每个月提高 10 000 美元，会使每个月的销售额增加 200 台. 管理部门同意考虑提高广告预算到最高不超过 100 000美元/月.

(a) 利用五步方法求使利润达最高的价格和广告预算. 使用有约束的最优化模型和拉格朗日乘子法求解.

(b) 讨论决策变量(价格和广告费)关于价格弹性系数(数据 50%)的灵敏性.

(c) 讨论决策变量关于广告商估计的每增加 10 000 美元/月的广告费，可多销售 200 台这一数据的灵敏性.

(d) (a) 中求出的乘子的值是多少？它的实际意义是什么？你如何利用这一信息来说服最高管理层提高广告费用的最高限额？

7. 某家地方日报最近被一家大型媒体集团收购. 报纸现在的售价为 1.5 美元/周，发行量为 80 000 家订户. 报纸广告的价格为 250 美元/页，现在售出 350 页/周(即 50 页/天). 新的管理方正在寻求提高利润的方法. 据估计，报纸的订阅价格提高 10 美分/周，会导致订户数下降 5 000. 报纸广告价格提高 100 美元/页，会导致每周约 50 页广告的损失. 52
广告的损失又会影响发行量，因为人们买报纸的一个原因就是为了看广告. 据估计，每

周损失 50 页广告会使发行量减少 1 000.

(a)利用五步方法和无约束的最优化模型求使利润最大的报纸订阅价格和广告价格.

(b)对你在(a)中求出的结果讨论关于价格提高 10 美分导致销售量下降 5 000 这一假设的灵敏性.

(c)对你在(a)中求出的结果讨论关于广告价格提高 100 美元/页会导致广告损失 50 页/周这一假设的灵敏性.

(d)现在在报纸上登广告的广告商可以选择直接将广告邮寄给它的客户. 直接邮寄的花费相当于 500 美元/页的报纸广告费用. 这一情况会如何影响你在(a)中得出的结论?

8. 仍考虑习题 7 中的报纸问题. 现在假设广告商可以选择直接将广告邮寄给它的客户. 由于这一点, 管理方决定广告价位的提高不超出 400 美元/页的价格.

(a)采用五步方法和有约束的最优化模型求使利润最大的每周报纸订阅价格和广告价格. 利用拉格朗日乘子法求解.

(b)讨论你的决策变量(订阅价格和广告价格)关于价格提高 10 美分会导致销售量下降 5 000这一假设的灵敏性.

(c)讨论你的两个决策变量关于广告价格提高 100 美元/页会导致广告损失 50 页/周这一假设的灵敏性.

(d)(a)中求出的拉格朗日乘子的值是多少? 从利润关于 400 美元/页这一假设的灵敏性的角度解释这一数据的意义.

9. 仍考虑习题 7 中的报纸问题. 但现在考虑报纸的经营开支. 现在每周的经营开支包括 80 000美元付给编辑部门(新闻、特写、编辑), 30 000 美元付给销售部门(广告),
53 30 000美元付给发行部门, 60 000 美元为固定消耗(抵押、公用事业股票、运转). 新的管理方正在考虑削减编辑部门的开支. 据估计, 报纸在最低 40 000 美元的编辑预算的条件下可以维持运转. 减少编辑预算可以节约经费, 但会影响报纸的质量. 根据在其他市场的经验, 每减少 10% 的编辑预算, 会损失 2% 的订户和 1% 的广告. 管理方也在考虑提高销售的预算. 最近, 在一个类似的市场上另一家报纸的管理者将其广告销售预算提高了 20%, 结果多获得了 15% 的广告. 销售预算可以提高到最多 50 000 美元/周, 但总的经营开支不能超过现在的 200 000 美元/周的水平.

(a)设订阅价格保持 1.5 美元/周, 广告的价格为 250 美元/页. 采用五步方法和有约束的最优化模型求使利润最大的编辑和销售预算. 利用拉格朗日乘子法求解.

(b)计算每一个约束的影子价格, 解释它们的含义.

(c)画出这个问题的可行域. 在图上指出最优解的位置. 在最优解处, 哪一个约束是关键约束? 它与影子价格的联系是什么?

(d)假设编辑预算的削减在市场上产生了相当强烈的负面作用. 设减少 10% 的编辑预算会导致报纸损失 p% 的广告和 $2p$% 的订户. 确定最小的 p 值使得如果不减少编辑预算, 报纸的盈利情况反而要好些.

10. 一个运输公司每天有 100 吨的航空运输能力. 公司每吨收空运费 250 美元. 除了重量的

限制外，由于飞机货舱的容积有限，公司每天只能运 50 000 立方英尺[㊀]的货物．每天要运输的货物数量如下：

货　物	重量(吨)	体积(立方英尺/吨)
1	30	550
2	40	800
3	50	400

(a)采用五步方法和有约束的最优化模型求使利润最大的每天航空运输的各种货物的吨数．利用拉格朗日乘子法求解． 54

(b)计算每个约束的影子价格，解释它们的含义．

(c)公司有能力对它的一些旧的飞机进行改装来增大货运区域的空间．每架飞机的改造要花费 200 000 美元，但可以增加 2 000 立方英尺的容积．重量限制仍保持不变．假设飞机每年飞行 250 天，这些旧飞机剩余的使用寿命约为 5 年．在这种情况下，是否值得进行改装？有多少架飞机时才值得改装？

2.5　进一步阅读文献

1. Beightler, C., Phillips, D. and Wilde, D. (1979) *Foundations of Optimization.* 2nd ed., Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

2. Courant, R. (1937) *Differential and Integral Calculus.* vol. II, Wiley, New York.

3. Edwards, C. (1973) *Advanced Calculus of Several Variables.* Academic Press, New York.

4. Hundhausen, J., and Walsh, R. *The Gradient and Some of Its Applications.* UMAP module 431.

5. Hundhausen, J., and Walsh, R. *Unconstrained Optimization.* UMAP module 522.

6. Nievergelt, Y. *Price Elasticity of Demand: Gambling, Heroin, Marijuana, Whiskey, Prostitution, and Fish.* UMAP module 674.

7. Nevison, C. *Lagrange Multipliers: Applications to Economics.* UMAP module 270.

8. Peressini, A. *Lagrange Multipliers and the Design of Multistage Rockets.* UMAP module 517. 55~56

㊀ 1 立方英尺 = 0.028 m^3.