MATEMATIKA DISKRIT

GRAHA ILMU

Edisi
2

MATEMATIKA DISKRIT

Samuel Wibisono

MATEMATIKA DISKRIT

Oleh : Samuel Wibisono

Editor : Asrining Rizky Rachmawati

Edisi Kedua
Cetakan Pertama, 2008

GRAHA ILMU
Candi Gebang Permai Blok R/6
Yogyakarta 55511
Telp. : 0274-882262; 0274-4462135
Fax. : 0274-4462136
E-mail : info@grahailmu.co.id

Wibisono, Samuel

MATEMATIKA DISKRIT/Samuel Wibisono

- Edisi Kedua – Yogyakarta; Graha Ilmu, 2008
xii + 196 hlm, 1 Jil. : 23 cm.

ISBN: 978-979-756-413-1

1. Matematika I. Judul

KATA PENGANTAR

Memasuki era globalisasi, mempersiapkan sumber daya manusia yang profesional dalam bidangnya merupakan prasyarat utama untuk dapat survive dalam pasar global yang penuh tantangan dan persaingan.

Dengan latar belakang tersebut di atas dan banyaknya keluhan pembaca tentang: “Apa manfaat belajar matematika buat mereka? atau Apa hubungan matematika yang mereka pelajari dengan jurusan yang mereka ambil?”, penulis menyadari bahwa sasaran dalam proses pembelajaran mata kuliah ini harus dipertajam, sehingga mampu mendukung terciptanya sarjana-sarjana baru dalam bidang teknik informatika, sistem informatika, manajemen informatika, maupun teknik komputer, yang handal dan mempunyai daya saing yang tinggi karena telah dibekali dengan logika dan konsep dasar matematika diskrit, sehingga mampu menyelesaikan segala persoalan yang dihadapi, melalui rancangan usulan penyelesaian problem atau kasus.

Hasil proses pembelajaran yang penulis harapkan setelah pembaca membaca buku ini, adalah:

- Pembaca mengenal konsep dasar logika dan matematika diskrit dengan baik.
- Pembaca memahami konsep dasar logika dan matematika diskrit sehingga mampu menggunakannya untuk menyelesaikan permasalahan yang sesuai.
- Pembaca dapat merancang, menganalisa dan mensintesa beberapa kasus aplikasi dalam berbagai bidang, khususnya TI dan komputer.

Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terimakasih kepada Pimpinan dan Staf Universitas Bina Nusantara dan Universitas Indonesia Esa Unggul, di mana penulis diberi kesempatan mengampu mata kuliah Matematika Diskrit ini, rasa terima kasih juga penulis sampaikan kepada Penerbit Graha Ilmu yang telah memberikan kepercayaan, sehingga buku edisi 2 ini dapat diterbitkan.

Terakhir, kami sampaikan rasa terima kasih kepada rekan-rekan dosen pengampu mata kuliah Matematika Diskrit utamanya Dr. Frans Susilo SJ. yang berkenan memberikan kritik dan saran yang membangun guna penyempurnaan buku ini, kritik dan saran yang membangun dari rekan-rekan masih kami tunggu untuk edisi mendatang.

Demikian semoga bermanfaat.

Jakarta, Agustus 2008

Samuel Wibisono

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR **v**
DAFTAR ISI **vii**
BAB 1 LOGIKA PROPOSISI **1**
1.1. Pernyataan 1
1.2. Pernyataan Gabungan 2
1.2.1 Konjungsi 2
1.2.2 Disjungsi 4
1.2.3 Negasi 6
1.2.4 Jointdenial (Not OR/ NOR) 7
1.2.5 Not And (NAND) 7
1.2.6 Exclusive or (exor) 8
1.2.7 Exclusive NOR (ExNOR) 9
1.3 Tautologi dan kontradiksi 10
1.3.1 Tautologi 10
1.3.2 Kontradiksi 10
1.4 Kesetaraan Logis 11
1.5 Aljabar Proposisi 12
1.6 Implikasi dan Biimplikasi 14
1.6.1 Implikasi 14

	1.6.2	Biimplikasi	18
1.7	Argumentasi		18
	1.7.1.	Kebenaran/Validitas Argumen	19
	1.7.2	Bentuk-bentuk Dasar Menarik	21
1.8.	Kuantor Pernyataan		25
	1.8.1	Macam-macam Kuantor	26
	1.8.2	Negasi Kauntor	27
BAB 2	**TEORI HIMPUNAN**		**31**
2.1	Himpunan		31
	2.1.1	Kardinalitas	32
	2.1.2	Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga	33
	2.1.3	Kesamaan Dua Himpunan dan Subhimpunan	34
	2.1.4	Macam-macam Himpunan	36
2.2	Operasi Himpunan		36
	2.2.1	Union/Gabungan dari 2 himpunan	36
	2.2.2	Intersection/Irisan dari 2 Himpunan	37
	2.2.3	Relative Acomplement/Selisih Antara 2 Himpunan	37
	2.2.4	Komplemen dari Himpunan	37
	2.2.5	Symmetic Difference/Beda Setangkup	38
2.3	Diagram Venn		38
2.4	Hukum-hukum Aljabar Himpunan		39
2.5	Perhitungan Himpunan Gabungan		41
	2.5.1.	Gabungan dari 2 Himpunan	41
	2.5.2	Gabungan dari 3 Himpunan	42
BAB 3	**TEORI HIMPUNAN FUZZY**		**49**
3.1.	Fungsi keanggotaan		49
3.2	Operasi himpunan fuzzy		51
	3.2.1	Komplemen	51
	3.2.2	Gabungan/Union Himpunan Fuzzy	52

	3.2.3 Irisan/Itersection Himpunan Fuzzy	53
	3.2.4 Pemotongan/Cut Himpunan Fuzzy	54
	3.2.5 Pendukung (Support) Himpunan Fuzzy	57
	3.2.6 Scalar Cardinality	59
3.3	Kesamaan dan Himpunan Bagian	60
BAB 4	**LOGIKA FUZZY**	**67**
4.1	Pengantar	67
4.2.	Logika dengan Nilai Kebenaran Beragam	68
4.3	Soal-soal	72
BAB 5	**RELASI KLASIK**	**75**
5.1	Pendahuluan	75
5.2	Pemaparan Relasi	77
	5.2.1 Pemaparan Koordinat	77
	5.2.2 Pemaparan Matrik	78
	5.2.3 Pemetaan	78
	5.2.4 Graph Berarah	79
5.3	Operasi dalam Relasi binary	80
	5.3.1 Inverse Relasi (R–1)	80
	5.3.2 Komposisi Relasi	81
5.4	Ekivalen, Kompatibel dan Ordering Relasi	82
	5.4.1 Relasi Ekivalen	82
	5.4.2 Relasi Kompatibel	85
	5.4.3 Poset (Partially Orderet Set)	86
BAB 6	**FUNGSI**	**93**
6.1	Definisi Fungsi	93
6.2	Macam-macam Fungsi	94
	6.2.1 Fungsi satu-satu	94
	6.2.2 Fungsi pada	95
	6.2.3 Fungsi konstan	96
	6.2.4 Fungsi Invers	96
6.3	Komposisi Fungsi	98
6.4	Fungsi Karakteristik	99

BAB7 ALJABAR BOOLE 103

7.1 Aplikasi Aljabar Boole dalam Jaringan Switching 103
7.2 Aplikasi Aljabar Boole pada Rangkaian Logik (Gate) 107
7.3 Aplikasi Aljabar Boole dalam Operasi Kelipatan Persekutuan Kecil (KPK) dan Faktor Persekutuan Besar (FPB) 111
7.4 Minimal dnf (Disjunctive Normal Form) 113
7.4.1 Dengan Teori Include dan Konsensus 113
7.4.2 Peta Karnaugh 116

BAB 8 TEORI GRAPH 125

8.1 Pendahuluan 125
8.2 Macam-macam Graph 127
8.3 Koneksitas 132
8.4 Berkaitan dengan Jarak 134
8.5 Derajat/Degree suatu titik 136
8.6 Titik Potong Graph (Cut Point) 137
8.7 Ukuran secara grafikal 138
8.8 Matrik Graph 139
8.9 Labeled Digraph 141
8.10 Derajat Titik pada Diagraph 144
8.11 Graph Bidang (Planar Graph) 145
8.12 Pewarna Peta 147
8.13 Pohon/Tree 159
8.13.1 Spanning Tree 161
8.13.2 Pohon Berakar (Rooted Tree) 163
8.13.3 Pohom Berurut Berakar (Orderd Rootes Tree) 167

BAB 9 MESIN MATEMATIK 175

9.1 Pendahuluan 175
9.2 Finite Automata (FA) 177

9.2.1 Menggambarkan FA dengan Digraph 178
9.2.2 Menggambarkan FA dengan Difinisi Formal 5-Tuple 180
9.2.3 Menggambarkan FA dengan Tabel State 181
9.2.5 Non-Deterministik Finite Automata (NFA) 181
9.2.6 Finite State Transducers 189
DAFTAR PUSTAKA 193
TENTANG PENULIS 195

-oo0oo-

1

LOGIKA PROPOSISI

1.1. Pernyataan

Logika proposisi sering juga disebut logika matematika ataupun logika deduktif.

Logika proposisi berisi pernyataan-pernyataan (dapat tunggal maupun gabungan).

Pernyataan adalah kalimat deklarasi yang dinyatakan dengan huruf-huruf kecil, misalnya:

$$p, q, r, s$$

Pernyataan mempunyai sifat dasar yaitu dapat bernilai benar (pernyataan benar) atau bernilai salah (pernyataan salah), tetapi tidak mungkin memiliki sifat kedua-duanya.

Kebenaran atau kesalahan sebuah pernyataan dinamakan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut.

Contoh:

1. Bilangan biner digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang benar.

2. Sistem analog lebih akurat daripada sistem digital adalah pernyataan yang salah.
3. Astaga, mahal sekali harga notebook itu adalah kalimat keheranan, bukan pernyataan.
4. Siang tadi notebook Ira jatuh dari meja adalah bukan pernyataan karena dapat bernilai benar maupun bernilai salah.
5. Corezdeo lebih bagus kinerjanya dan lebih mahal dari pentium IV generasi sebelumnya adalah pernyataan yang benar.

Kalimat-kalimat yang tidak termasuk pernyataan, adalah:

- Kalimat perintah
- Kalimat pertanyaan
- Kalimat keheranan
- Kalimat harapan
- Kalimat ……walaupun…..

1.2 Pernyataan Gabungan

Beberapa pernyataan dapat digabung dengan kata penghubung dan, atau, tidak/bukan, serta variatifnya, yang selanjutnya disebut pernyataan gabungan atau pernyataan majemuk atau *compound statement*.

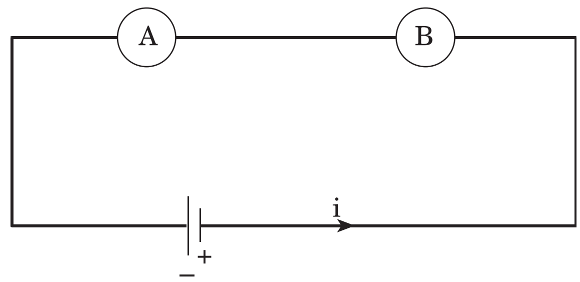
Macam-macam pernyataan gabungan.

1.2.1 Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **dan** Notasi-notasi konjungsi:

$$p \wedge q\ ,\ p \times q,\ p.q,\ pq$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah konjungsi? Konjungsi dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik seri:



Bila lampu B dan lampu A hidup maka arus listrik dapat mengalir dari kutup positip menuju kutup negatip sebuah baterai, akibatnya kedua lampu A dan B menyala/hidup.Bila lampu B mati dan lampu A hidup atau sebaliknya, maka arus listrik tidak dapat mengalir menuju kutub negatip baterai, akibatnya kedua lampu A dan B tidak menyala/mati. Demikian juga bila lampu A dan B mati. Dengan demikian dapat di simpulkan bahwa konjungsi benar bila keduanya hidup, selain itu salah.

Tabel Kebenaran Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	−

atau

p	$\wedge$	q
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	−	−

dimana + berarti benar dan - berarti salah

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \wedge q$ adalah konjungsi yang benar karena p benar, q benar.

$q \times r$ adalah konjungsi yang salah karena q benar, r salah.

$r \,.\, s$ adalah konjungsi yang salah karena r salah, s salah.

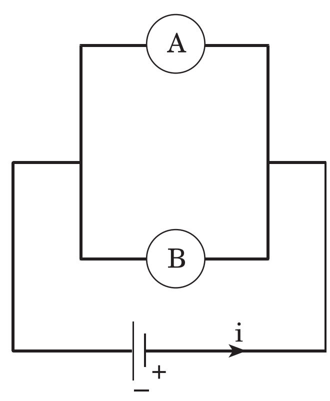
1.2.2 Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan gabungan dari dua pernyataan dengan kata penghubung **atau**.

Notasi-notasi disjungsi:

$$p \vee q,\ p + q$$

Bagaimana menentukan benar atau salah sebuah disjungsi? Disjungsi dapat dianalogikan dengan sebuah rangkaian listrik yang pararel:



Bila lampu A dan lampu B hidup maka arus listrik i dapat bergerak/mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai, akibatnya lampu A dan B menyala.

Bila lampu A hidup dan lampu B mati (atau sebaliknya), maka arus listrik i masih dapat mengalir dari kutup positip ke kutup negatip sebuah baterai. Akibatnya lampu yang hidup akan menyala dan yang mati tidak menyala.

Bila lampu A dan B mati, maka arus listrik i tidak dapat mengalir ke kutup negatip.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa disjungsi salah bila kedua lampu mati, selain itu benar.

Tabel Kebenaran Disjungsi

p	q	$p \vee q$
+	+	+
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\vee$	q
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Catatan:

Simbol tabel kebenaran yang biasa digunakan :

Benar = T, B, +, 1
Salah = F, S, –, 0

Contoh:

p = keyboard adalah alat yang dapat digunakan untuk input data kedalam komputer adalah pernyataan benar.

q = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah.

r = Procesor alat yang berfungsi sebagai otak dari sebuah komputer adalah pernyataan benar.

s = Windows XP adalah sistematika menulis buku adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \vee q$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, q salah.

$p \vee r$ adalah disjungsi yang benar karena p benar, r benar.

$q \vee s$ adalah disjungsi yang salah karena q salah, s salah.

1.2.3 Negasi

Negasi adalah sebuah pernyataan yang meniadakan pernyataan yang ada, dapat di bentuk dengan menulis "adalah salah bahwa…" atau dengan menyisipkan kata " tidak" dalam sebuah pernyataan.

Notasi-notasi negasi:

$$\sim p, p', \overline{p}$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

Maka

~ p = Adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Jadi kebenaran sebuah negasi adalah lawan dari kebenaran pernyataannya.

Tabel kebenaran negasi:

p	~p
+	–
–	+

1.2.4 Jointdenial (Not OR/ NOR)

Jointdenial adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan disjungsi.

Notasi NOR:

$$p \downarrow q, \text{p nor q}, \sim (p \vee q)$$

Karena jointdenial adalah negasi dari or, maka tabel kebenaran NOR adalah sebagai berikut:

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$
+	+	+	−
+	−	+	−
−	+	+	−
−	−	−	+

atau

~	(p	$\vee$	q)
−	+	+	+
−	+	+	−
−	−	+	+
+	−	−	−

1.2.5 Not And (NAND)

NAND adalah pernyataan gabungan yang dihasilkan dari menegasikan konjungsi.

Notasi NAND:

$$\sim (p \wedge q), (p \wedge q)'$$

Karena NAND negasi dari konjungsi, maka tabel kebenaran NAND adalah sebagai berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
+	+	+	−
+	−	−	+
−	+	−	+
−	−	−	+

atau

~	(p	$\wedge$	q)
−	+	+	+
+	+	−	−
+	−	−	+
+	−	−	−

1.2.6 Exclusive or (exor)

Exor adalah pernyataan gabungan dimana salah satu p atau q (tidak kedua-duanya) adalah benar

Notasi exor:

$$p \veebar q$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/ kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam system digital adalah pernyataan yang salah.

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

$p \veebar q$ adalah exor yang salah karena p benar, q benar.
$p \veebar r$ adalah exor yang benar karena p benar, r salah.
$s \veebar q$ adalah exor yang benar karena q benar, s salah.
$r \veebar s$ adalah exor yang salah karena r salah, s salah.

dengan demikian tabel kebenaran exor dapat ditulis sebagai berikut:

p	q	$p \veebar q$
+	+	–
+	–	+
–	+	+
–	–	–

atau

p	$\veebar$	q
+	–	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

1.2.7 Exclusive NOR (ExNOR)

EXNOR adalah pernyataan gabungan **ingkaran** dari EXOR di mana nilai kebenarannya benar bila kedua pernyataannya benar atau salah.

Notasi EXNOR:

$$\sim (p \veebar q)$$

Contoh:

p = sistem analog adalah suatu sistem dimana tanda fisik/kuantitas, dapat berbeda secara terus-menerus melebihi jarak tertentu. adalah pernyataan benar

q = sistem digital adalah suatu sistem dimana tanda fisik/kuantitas, hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan adalah pernyataan yang benar.

r = sistem bilangan desimal adalah sistem bilangan yang digunakan dalam sistem digital adalah pernyataan yang salah

s = aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan salah.

Maka:

p EXNOR q, adalah pernyataan yang benar
p EXNOR r, adalah pernyataan yang salah
s EXNOR q, adalah pernyataan yang salah
r EXNOR s, adalah pernyataan yang benar

Dengan demikian tabel kebenaran EXNOR:

p	q	$\sim (p \veebar q)$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.3 TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Proposisi dipandang dari nilai kebenarannya dapat digolongkan menjadi 2 yaitu

1.3.1 Tautologi

Tautologi adalah proposisi yang selalu benar apapun pernyataannya.

Notasi tautologi:

$$p \vee \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \vee \sim p$ adalah proposisi yang benar

Tabel kebenaran tautologi:

p	~ q	p∨ ~ p
+	–	+
–	+	+

atau

p	∨	~ p
+	+	–
–	+	+

1.3.2 Kontradiksi

Kontradiksi adalah proposisi yang selalu salah apapun pernyataannya

Notasi kontradiksi:

$$p \wedge \sim p$$

Contoh:

p = Harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan salah

~p = adalah salah bahwa harddisk adalah alat yang menentukan kecepatan kerja komputer adalah pernyataan benar.

Maka

$p \wedge \sim p$ adalah proposisi yang salah

Tabel kebenaran kontradiksi:

p	~ p	p∧ ~ p
+	–	–
–	+	–

1.4 Kesetaraan Logis

Dua buah pernyataan yang berbeda dikatakan setara bila nilai kebenarannya sama

Contoh:

1. Tidak benar, bahwa aljabar linear adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.
2. Aljabar Boole adalah alat matematika dasar untuk disain logika adalah pernyataan benar.

Kedua pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran yang sama. Jadi kedua pernyataan di atas setara/ekivalen.

Akibatnya dua proposisi $P(p, q, r, ...)$ dan $Q(p, q, r, ...)$ dapat dikatakan setara jika memiliki tabel kebenaran yang sama. Dua buah proposisi yang setara dapat dinyatakan dengan $P(p, q, r, ...) \equiv Q(p, q, r, ...)$.

Contoh:

Selidiki apakah kedua proposisi di bawah setara:

1. Tidak benar, bahwa sistem bilangan biner digunakan dalam sistem digital atau sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.
2. Sistem bilangan biner tidak digunakan dalam sistem digital dan tidak benar bahwa sistem digital hanya dapat mengasumsikan nilai yang berlainan.

Kedua proposisi di atas dapat dituliskan dengan notasi sbb:

1. $\sim (p \vee q)$
2. $\sim p \wedge \sim q$

sehingga tabel kebenarannya sebagai berikut:

p	q	~p	~q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$
+	+	–	–	+	–	–
+	–	–	+	+	–	–
–	+	+	–	+	–	–
–	–	+	+	–	+	+

Jadi, kedua proposisi tersebut setara atau $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

1.5 ALJABAR PROPOSISI

Aljabar proposisi merupakan penerapan hukum-hukum aljabar dalam logika proposisi.

Hukum-hukum tersebut adalah:

1. Idempoten

   $p \vee p \equiv p$

   $p \wedge p \equiv p$

2. Asosiatif

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

3. Komutatif

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

4. Distribusi

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

5. Identitas

$p \vee f \equiv p$ $\quad$ $p \wedge f \equiv f$

$p \vee t \equiv t$ $\quad$ $p \wedge t \equiv p$

6. Komplemen

$p \vee \sim p = t$ $\quad$ $\sim t = f$

$p \wedge \sim p = f$ $\quad$ $\sim f = t$

7. Involution

$\sim p(\sim p) \equiv p$

8. De Morgan's

$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee q$

$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

9. Absorbsi

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

10. Implikasi

$p \rightarrow q = \sim p \vee q$

11. Biimplikasi

$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

12. Kontraposisi

$p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$

Salah satu manfaat hukum-hukum aljabar proposisi adalah untuk menyederhanakan pernyataan gabungan.

Contoh:

Sederhanakan proposisi di bawah (buktikan hukum. Absorbsi):

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &\equiv (p \vee f) \wedge (p \vee q) \\ &\equiv p \vee (f \wedge q) \\ &\equiv p \vee f \\ &\equiv p \end{aligned}$$

1.6 IMPLIKASI DAN BIIMPLIKASI

1.6.1 Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut: jika memakai Microsoft Word maka Windows adalah sistem operasinya.

Microsoft Word merupakan syarat cukup bagi Windows, sedangkan Windows merupakan syarat perlu bagi Microsoft Word, artinya Microsoft Word tidak dapat digunakan tanpa windows tetapi Windows dapat digunakan tanpa Microsoft Word.

Contoh pernyataan di atas disebut pernyataan bersyarat atau conditional statement.

Notasi implikasi:

$p \rightarrow q$

dibaca: jika p maka q

1.6.1.1 Kebenaran implikasi

1. Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi benar, karena keduanya buatan Microsoft.

Mengacu pada implikasi di atas maka:

2. Jika Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya adalah pernyataan salah, karena sistem operasi Microsoft Word adalah Windows
3. Jika bukan Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah pernyataan benar karena aplikasi under Windows tidak hanya Microsoft Word
4. Jika bukan Microsoft word maka bukan windows sistem operasi-nya adalah pernyataan benar, karena aplikasi selain Microsoft Word, sistem operasinya bisa jadi bukan Windows.

Tabel kebenaran implikasi sebagai berikut:

p	q	$p \to q$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Contoh:

Misalkan pernyataan p adalah benar, q adalah salah dan r adalah benar, tentukan kebenaran proposisi berikut:

$$(p \vee q) \to \overline{r}$$

Jawab:

Proposisi di atas dapat diubah menjadi

$$(t \vee f) \to f$$
$$t \to f$$
$$f$$

Jadi proposisi di atas salah

Bukti dengan tabel :

p	$\vee$	q	$\rightarrow$	$\bar{r}$	r
+		+		−	+
+		+		+	−
+	+	−	Δ	−	+
+		−		+	−

1.6.1.2 Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika implikasi: $p \rightarrow q$

Maka: Konversnya : $q \rightarrow p$

Inversnya : $\sim p \rightarrow \sim q$

Kontrapositipnya : $\sim q \rightarrow \sim p$

Contoh:

Jika Microsoft Word maka Windows sistem operasinya adalah implikasi yang benar, berdasarkan implikasi di atas maka:

Konversennya : Jika Windows sistem operasinya maka Microsoft Word aplikatifnya.

Inversenya : Jika bukan Microsoft Word maka bukan Windows sistem operasinya

Kontrapositipnya : Jika bukan windows sistem operasinya maka bukan Microsoft Word aplikatifnya

Tabel kebenaran

p	q	~ p	~ q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$
+	+	−	−	+	+	+	+
+	−	−	+	−	−	+	+
−	+	+	−	+	+	−	−
−	−	+	+	+	+	+	+

setara setara

Jadi dapat disimpulkan bahwa proposisi yang saling kontra-positif mempunyai nilai kebenaran yang sama (*ekuivalen*).

Berdasarkan sifat tersebut maka kita dapat membuktikan suatu dalil dalam bentuk implikasi melalui nilai kebenaran kontra-positipnya.

Contoh:

Buktikan bahwa:

Jika x^2 bilangan genap, maka x juga bilangan genap

dapat ditulis : x^2 = genap $\rightarrow$ x = genap

Jawab:

Kontrapositif dari implikasi di atas adalah:

Jika x bukan bilangan genap maka x^2 juga bukan bilangan genap.

dapat ditulis :

Jika x = ganjil maka x^2 = ganjil

Setiap bilangan bulat bukan genap adalah ganjil, sehingga x ganjil ditulis $x = 2k + 1$, k bilangan bulat, akibatnya:

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Karena	k	bilangan bulat maka:
	k^2	juga bilangan bulat
	$2k$	juga bilangan genap
	$2k^2 + 2k$	juga bilangan genap

sehingga x^2 = bilangan ganjil, karena bilangan genap ditambah 1 sama dengan bilangan ganjil.

Jadi kontrapositipnya benar akibatnya implikasinya juga benar.

1.6.2 *Biimplikasi*

Perhatikan pernyataan berikut:

> Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows

Pernyataan tersebut disebut biimplikasi atau biconditional statement.

Notasi biimplikasi : $p \leftrightarrow q$

dibaca: p jika dan hanya jika q

1.6.2.1. *Kebenaran Biimplikasi*

1. Microsoft Word jika dan hanya jika ingin membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Berdasarkan biimplikasi diatas, maka:

2. Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
3. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan salah
4. Bukan Microsoft Word jika dan hanya jika tidak membuat dokumen dengan sistem operasi Windows adalah pernyataan benar

Tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \leftrightarrow q$
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

1.7 ARGUMENTASI

Argumentasi adalah kumpulan pernyataan-pernyataan atau kumpulan premis-premis atau kumpulan dasar pendapat serta kesimpulan (konklusi)

Notasi:

$$\begin{array}{l} P(p,q,\cdots) \\ Q(p,q,\cdots) \\ \vdots \\ \therefore C(p,q,\cdots) \end{array}$$

P, Q, …	masing-masing disebut dasar pendapat atau premis
{P, Q, … }	bersama-sama disebut hipotesa
C	adalah conclusion/kesimpulan

Contoh:

Jika rajin belajar maka lulus ujian
tidak lulus ujian

$\therefore$ tidak rajin belajar

1.7.1. Kebenaran/Validitas Argumen

Validitas argument tergantung dari nilai kebenaran masing-masing premis dan kesimpulannya.

Suatu argument dikatakan valid bila masing-masing premisnya benar dan kesimpulannya juga benar.

Contoh 1:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner

Jika memakai sistem bilangan biner maka sistem yang dibangun digital

---

$\therefore$ Jika merancang gerbang logika maka sistem yang dibangun digital

Argumen tersebut dapat dituliskan dengan notasi sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Sekarang perhatikan tabel kebenaran:

p	q	r	p→q	q → r	p→r
+	+	+	+	+	+
+	+	–	+	–	–
+	–	+	–	+	+
+	–	–	–	+	–
–	+	+	+	+	+
–	+	–	+	-	+
–	–	+	+	+	+
–	–	–	+	+	+

Keterangan :

Lingkari tabel premis 1 dan tabel premis 2 yang keduanya sama dengan benar. Kemudian tandai tabel kesimpulan dengan Δ. (Kesimpulan yang sejajar dengan premis 1 dan 2 yang telah dilingkari). Perhatikan tanda yang ada di dalam Δ, ternyata semua bernilai benar.

Kesimpulan:

Argumen tersebut di atas valid, karena dengan premis yang benar semua kesimpulannya juga benar semua.

Contoh 2:

Jika merancang gerbang logika maka memakai sistem bilangan biner
Memakai sistem bilangan biner

$\therefore$ Merancang gerbang logika

Argumen di atas dapat dituliskan dengan notasi

$p \rightarrow q$ disebut premis 1
q disebut premis 2

$\therefore p$ disebut kesimpulan

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan nilai kebenaran argumen di atas.

p	q	$p \rightarrow q$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Kesimpulan:

Argumen di atas tidak valid karena dengan premis-premis benar, kesimpulannya bisa benar, bisa salah.

1.7.2 Bentuk-bentuk Dasar Menarik Kesimpulan

1. Conjunction

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q\quad\quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

2. Addition

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

3. Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

4. Constructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore q \vee s \end{array}$$

5. Hypothetical syllogism

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

6. Simplification

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

7. Disjunctive syllogism

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$$

8. Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\qquad \sim q} \\ \therefore \quad \sim p \end{array}$$

9. Destructive Dilemma

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \therefore \quad \sim p \vee \sim r \end{array}$$

10. Absorption

$$\begin{array}{l} \quad p \to q \\ \hline \therefore p \to (p \wedge q) \end{array}$$

Contoh pemanfaatan:

Buatlah kesimpulan dari argumen di bawah sehingga argumen tersebut valid

1. Jika hasilnya akurat maka sistemnya digital
2. Jika sistem digital maka rancangan jaringannya kombinasi
3. Jika sistem digital maka menggunakan dua nilai tanda bilangan biner
4. Hasil akurat

$\therefore$?

Jawab:

$$\begin{array}{ll} \text{Premis 1 :} & p \to q \\ \text{Premis 2 :} & q \to r \\ \text{Premis 3 :} & q \to s \\ \text{Premis 4 :} & p \\ \hline & \therefore ? \end{array}$$

Dengan Hypothetical Syllogism

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore p \to s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \to s \\ p \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan Modus Ponen

$$\begin{array}{l} p \to r \\ p \\ \hline \therefore r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \to s \\ p \\ \hline \therefore s \end{array}$$

Sehingga argumentasi dapat ditulis ulang

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore ? \end{array}$$

Dengan conjuntion kesimpulannya dapat ditulis $r \wedge s$, sehingga argumentasi menjadi

$$\begin{array}{l} r \\ s \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

adalah valid

Bukti dengan tabel kebenaran

p	q	r	s	$p \to q$	$q \to r$	$q \to s$	$r \wedge s$
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	–	+	+	–	–
+	+	–	+	+	–	+	–
+	+	–	–	+	–	–	–
+	–	+	+	–	+	+	+
+	–	+	–	–	+	+	–
+	–	–	+	–	+	+	–
+	–	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	+	+	+	+
–	+	+	–	+	+	–	–
–	+	–	+	+	–	+	–
–	+	–	–	+	–	–	–
–	–	+	+	+	+	+	+
–	–	+	–	+	+	+	–
–	–	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	+	+	+	–
4				1	2	3	$\therefore$

$\therefore$ argumen di atas valid

1.8 Kuantor Pernyataan

Misalkan P(x) adalah pernyataan yang menyangkut variabel x dan q adalah sebuah himpunan, maka P adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$ berlaku P(x) adalah sebuah proposisi.

Contoh:

Misalkan P(x) adalah pernyataan dengan x adalah sebuah bilangan genap bulat.

Misalkan D = himpunan bilangan bulat positip

Maka fungsi proposisi P(x) dapat ditulis:

Jika x = 1 maka proposisinya
1 adalah bilangan bulat genap (f)

Jika x = 2 maka proposisinya
2 adalah bilangan bulat genap (t)
dan seterusnya.

Jadi dapat kita lihat ada sejumlah (kuantitas) proposisis yang benar. Untuk menyatakan kuantitas suatu objek dalam proposisi tersebut digunakan notasi-notasi yang disebut kuantor.

1.8.1 Macam-macam Kuantor

Macam-macam kuantor yang sering digunakan dalam proposisi:

1. Untuk setiap x, P(x)
   disebut kuantor universal
   simbol yang digunakan $\forall$
2. Untuk beberapa (paling sedikit satu) $x, P(x)$
   disebut kuantor existensial
   simbol yang digunakan $\exists$

Contoh

Misalkan x himpunan warga negara Indonesia, P predikat membayar pajak, R predikat membeli printer,

Maka

1. $\forall x P(x)$, artinya: Semua warga negara membayar pajak
2. $\exists x R(x) P(x)$, artinya: Ada beberapa warga negara pembeli printer membayar pajak
3. $\forall x R(x) \rightarrow P(x)$, artinya: Setiap warga negara jika membeli printer maka membayar pajak

4. $\exists x R(x) \wedge \overline{P}(x)$, artinya: Ada warga negara membeli printer dan tidak membayar pajak

1.8.2 Negasi Kuantor

$$\sim \forall x = \exists x$$
$$\sim \exists x = \forall x$$

maka :

$$\sim (\forall x P(x)) = \exists x \overline{P(x)}$$
$$\sim (\exists x P(x)) = \forall x \overline{P(x)}$$
$$\sim (\forall x P(x) \to Q(x)) = \exists x \overline{(P(x) \to Q(x))}$$
$$= \exists x P(x) \wedge \overline{Q(x)}$$
$$\sim (\exists x P(x) \to Q(x)) = \forall x \overline{(P(x) \to Q(x))}$$
$$= \forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)}$$

Soal - soal :

1. Tuliskan tabel kebenaran dari proposisi di bawah:
   (a) $\overline{p} \wedge (p \vee q)$
   (b) $\sim (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)$
   (c) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
   (d) $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \leftrightarrow q)$
   (e) $\sim (p \underline{\vee} q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
   (f) $(p \wedge \sim (\sim p \vee q)) \vee (p \wedge q)$
   (g) $\sim ((\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge q)$
2. Sederhanakanlah proposisi di bawah:
   (a) $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
   (b) $(p \wedge \sim (p \vee \sim q)) \vee q \wedge (q \vee p)$

(c) $((p \vee q) \wedge \sim p) \vee \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

(d) $(p \vee (\sim q \rightarrow p)) \vee ((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim p))$

(e) $(p \wedge (q \rightarrow \sim r)) \vee ((\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q)$

3. Buktikanlah bahwa proposisi $P \equiv Q$
   (a) $P \equiv p \vee \sim p$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (b) $P \equiv p \rightarrow (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

   (c) $P \equiv (p \wedge q)$

   $Q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

   (d) $P \equiv (p \vee q)$

   $Q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

4. Dengan kontrapositif buktikanlah kebenaran implikasi di bawah:
   (a) Jika hasil kali 2 bilangan adalah ganjil, maka kedua bilangan tersebut adalah ganjil
   (b) Jika x bukan bilangan bulat kalipatan 3, maka x^2 juga bukan bilangan bulat kelipatan 3

5. Selidiki validitas argumentasi di bawah :
   (a) 1. Jika microsoft word maka windows sistem operasinya
   2. Jika bukan product microsoft maka bukan windows sistem operasinya
   3. Linux

   $\therefore$ bukan microsoft word

   (b) Buat kesimpulan yang valid dari argumentasi di bawah:

1. Jika memakai sistem digital maka hasilnya akurat dan jika merancang gerbang logika harus menguasai Aljabar Boole
2. Sistim digital atau gerbang logika
3. Tidak akurat atau bukan Aljabar Boole
4. Tidak akurat

$\therefore$?

(c) 1. MsOffice mudah dipakai maka banyak pembeli dan mudah dicari
2. Karena mudah dicari dan banyak pembeli maka dibajak
3. Karena dibajak maka negara dirugikan
4. Negara tidak dirugikan

$\therefore$ bukan microsoft Office

(d)
$$\begin{aligned} & p \to r \\ & p \to q \\ \therefore\ & p \to (r \wedge q) \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} & p \to (r \vee q) \\ & r \to \overline{q} \\ \therefore\ & p \to r \end{aligned}$$

6. Tentukan nilai kebenaran pernyataan di bawah, bila domain pembicaraannya himpunan bilangan real:

(a) $\forall x \forall y\ P(x^2 < y+1)$

$\forall x \exists y\ P(x^2 < y+1)$

$\exists x \forall y\ P(x^2 < y+1)$

$\exists x \exists y\ P(x^2 < y+1)$

(b) $\forall x \forall y \, P\Big((x < y) \rightarrow \big(x^2 < y^2\big)\Big)$

$\forall x \exists y \, P\Big((x < y) \rightarrow \big(x^2 < y^2\big)\Big)$

$\exists x \forall y \, P\Big((x < y) \rightarrow \big(x^2 < y^2\big)\Big)$

$\exists x \exists y \, P\Big((x < y) \rightarrow \big(x^2 < y^2\big)\Big)$

-oo0oo-

2

TEORI HIMPUNAN

2.1 HIMPUNAN

Salah satu kemampuan yang kita kuasai setelah kita mempelajari logika proposisi adalah kemampuan untuk membedakan. Membedakan apakah tautologi, kontradiksi atau bentuk proposisi yang lain, membedakan apakah proposisi bernilai benar atau salah, membedakan apakah kuantor universal atau existential.

Untuk dapat menguasai teori himpunan, kemampuan untuk membedakan sangat diperlukan, karena himpunan merupakan kumpulan benda atau objek yang didefinisikan secara jelas. Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan benda-benda yang berbeda tetapi dalam satu segi dapat ditanggapi sebagai suatu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen himpunan.

Notasi:

Himpunan : A, B, C, ...

Anggota himpunan : a, b, c, ...

Contoh:

Kita definisikan himpunan software under windows, maka kita menulis

A = {MsWord, MsExcel, Ms PowerPoint, ...}

atau

B = {x | x software under windows}

Cara menuliskan himpunan A disebut menulis secara tabulasi
Cara menuliskan himpunan B disebut menulis secara deskripsi.

Masing-masing objek dalam himpunan A disebut anggota atau elemen himpunan, dituliskan

$x \in A$ artinya x anggota himpunan A
$x \notin A$ artinya x bukan anggota himpunan A

2.1.1 Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh.

$B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

T = {perkutut,kutilang,kenari,dara,beo}, maka $|T| = 5$

$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

2.1.2 Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

Himpunan berhingga adalah himpunan dimana jumlah anggota-nya berhingga artinya bila kita menghitung elemen-elemen yang berbeda dari himpunan ini, maka proses berhitungnya dapat selesai.

Bila tidak demikian maka himpunan tak berhingga.

A = himpunan software anti virus
A = {x|x software anti virus}
A = (Norton, McAfee, Panda, KaperSky, Norman)

Contoh:

B = himpunan bilangan asli
B = (x|x bilangan asli}
B = {1, 2, 3,......}

maka A berhingga

2.1.3 Kesamaan Dua Himpunan dan Subhimpunan

Dua himpunan A dan B dikatakan sama dengan jika dan hanya jika keduanya bersama-sama memiliki anggota yang sama.

Contoh:

A = {WordPad, MsWord, WordPerfect, WS}
B = {WordPerfect, WS, MsWord, WordPad}

Maka

A = B

Dua himpunan A dan B dengan elemen-elemen yang berbeda dikatakan setara jika dan hanya jika jumlah anggota himpunan A sama dengan jumlah anggota himpunan B.

Contoh:

A = {MsExcel, Lotus 123}
B = {Mouse, Keyboard}

Maka

A~B

Himpunan A dikatakan sub himpunan B jika dan hanya jika semua elemen-elemen A adalah anggota himpunan B.

Contoh:

A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
B = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP}

Maka

$A \subset B$

Bila tidak demikian dikatakan bukan sub himpunan.

Contoh:

A = {WinXP, Linux, Unix}
B = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP}
C = {monitor, printer, scanner}

Maka

$A \not\subset B$, A bukan sub himpunan B
$C \not\subset B$, C bukan sub himpunan B

2.1.4 Macam-macam Himpunan

2.1.4.1 Himpunan Kosong/Entry Set

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut dengan himpunan kosong.

Notasi: $\varnothing, \{\ \}$

Contoh:

A = himpunan software aplikasi yang bisa dipakai dengan semua sistem operasi

$A = \varnothing = \{\ \}$

2.1.4.2 Singleton Set

Singleton set adalah himpunan yang hanya memiliki 1 anggota

Contoh:

A = himpunan devices yang berfungsi sebagai input devices sekaligus output devices

A = {touch screen}

2.1.4.3 Himpunan Semesta/Universal Set

Dalam setiap membicarakan himpunan, maka semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu yang disebut himpunan semesta.

Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda.

Notasi: U

Contoh:

U = Semesta pembicaraan, yaitu sistem operasi produksi Microsoft

U = {Win 3.1, ..., WinXP, ...}

2.1.4.4 Himpunan Kuasa

Dari sebuah himpunan, kita dapat membuat subhimpunan subhimpunannya.

Himpunan dari semua subhimpunan yang dapat dibuat dari sebuah himpunan disebut himpunan kuasa.

Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan A adalah

2^x, x adalah banyak elemen A

Notasi: 2^A

Contoh:

A = {mouse, keyboard}

B = {monitor, printer, scanner}

Maka

$$2^{A} = \{A, \{mouse\}, \{keyboard\}, \varnothing\}$$

$$2^{B} = \{B, \{monitor\}, \{printer\}, \{scanner\}, \{monitor, printer\}, \{monitor, scanner\}, \{printer, scanner\}, \varnothing\}$$

2.2 OPERASI HIMPUNAN

2.2.1 Union/Gabungan dari 2 himpunan

Gabungan 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya semua anggota A atau B atau keduanya.

Notasi:

$A \cup B$

$A + B$

Contoh:

A = {mouse, keyboard}

B = {monitor, printer, scanner}

C = {mouse, keyboard, CPU, monitor}

Maka

$A \cup B = \{mouse, keyboard, monitor, printer, scanner\}$

$A \cup C = C$

$B \cup C = \{monitor, printer, scanner, mouse, keyboard, CPU\}$

2.2.2 Intersection/Irisan dari 2 Himpunan

Irisan dari 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya dimiliki bersama oleh himpunan A dan B.

Notasi: $A \cap B$

Contoh:

A = {mouse, keyboared, touch screen}
B = {monitor, touch screen, printer, scanner}

Maka

$A \cap B = \{\text{ tauch screen}\}$

2.2.3. Relative Complement/Selisih Antara 2 Himpunan

Selisih antara himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya hanya menjadi anggota himpunan A tetapi tidak termasuk anggota himpunan B.

Notasi:

$A - B$

Contoh:

A = {SQL server, MySQL, MsAcces}

B = {MySQL, MsAcces, Oracle}

Maka:

$A - B = \{\text{SQL server}\}$

2.2.4 Komplemen dari Himpunan

Komplemen dari sebuah himpunan A adalah himpunan yang anggotanya bukan anggota A.

Dengan kata lain komplemen A adalah himpunan yang anggotanya merupakan hasil dari U – A.

Notasi:

A', A^c

Contoh:

U = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP, ...}
A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
A' = {Win98, Win98SE, WinME, Win2000, WinXP, ...}

2.2.5 Symmetic Difference/Beda Setangkup

Beda setangkup 2 himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B tetapi bukan merupakan anggota kedua himpunan secara bersamaan.

Notasi:

$A \oplus B$

Contoh:

A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}
B = {Win95, Win97, Win98, Win98SE, WinME, Win2000}

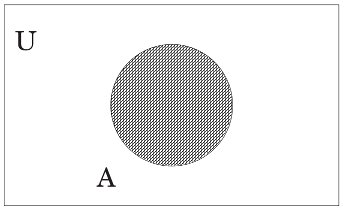
Maka

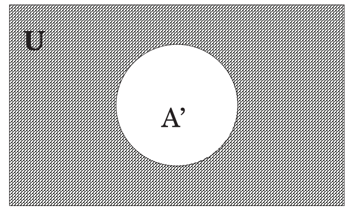
$A \oplus B$ = {Win3.1, Win3.11, Win98, Win98SE, WinME, Win2000}

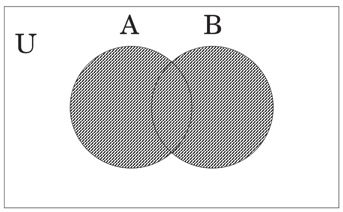
2.3 DIAGRAM VENN

Diagram venn adalah suatu cara untuk menggambarkan hubungan antara himpunan-himpunan. Dalam diagram venn himpunan biasanya dinyatakan dengan suatu daerah bidang yang dibatasi oleh sebuah lingkaran.

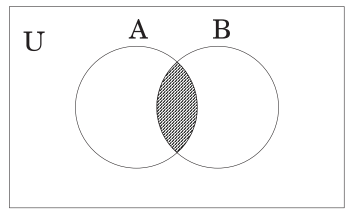
Contoh:



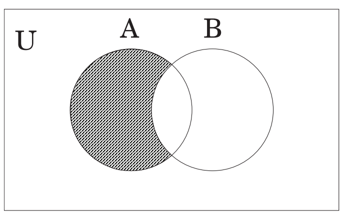




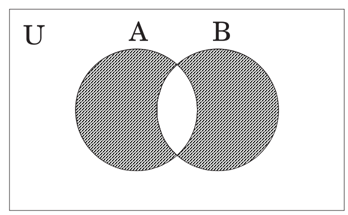
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$

2.4 HUKUM-HUKUM ALJABAR HIMPUNAN

Hukum-hukum aljabar yang berlaku pada proposisi, berlaku juga bagi himpunan, yaitu:

1. Hukum Idempoten

   $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

2. Hukum Asosiatif

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Hukum komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

4. Hukum Distribusi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

5. Hukum Identitas

$A \cup \varnothing = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

$A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

6. Hukum Involution

$$(A^C)^C = A$$

7. Hukum Komplemen

$A \cup A^C = U$ $\qquad$ $U^C = \varnothing$

$A \cap A^C = \varnothing$ $\qquad$ $\varnothing^C = U$

8. Hukum DeMorgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

9. Hukum penyerapan (absorpsi):

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Contoh

Sederhanakan

$$A \cup (A \cap B)$$

Jawab

$$
\begin{aligned}
A \cup (A \cap B) &= (A \cap U) \cup (A \cap B) \\
&= A \cap (U \cup B) \\
&= A \cap U \\
&= A
\end{aligned}
$$

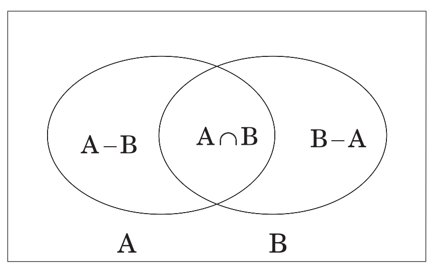
2.5 PERHITUNGAN HIMPUNAN GABUNGAN

Satu hal yang penting dalam matematika diskrit adalah proses menghitung, seperti bagaimana kita menghitung jumlah anggota dari sebuah himpunan.

Berikut adalah proses penghitungan jumlah anggota dari himpunan gabungan.

2.5.1. Gabungan dari 2 Himpunan

Jumlah angota dari 2 himpunan yang digabungkan dapat dicari sebagai berikut:



$$N_A = N_{A-B} + N_{A \cap B}$$
$$N_B = N_{B-A} + N_{A \cap B}$$
$$N_A + N_B = N_{A-B} + N_{B-A} + 2N_{A \cap B} \qquad (1)$$
$$N_{A \cup B} = N_{A-B} + N_{B-A} + N_{A \cap B} \qquad (2)$$

Substitusi (2) ke (1)

$$N_A + N_B = N_{A\cup B} + N_{A\cap B}$$

Sehingga

$$N_{A\cup B} = N_A + N_B - N_{A\cap B} \qquad (3)$$

2.5.2 Gabungan dari 3 Himpunan

Jumlah anggota dari 3 himpunan yang digabungkan dapat dicari sebagai berikut:

$$(A\cup B\cup C) = A\cup(B\cup C), \text{ asosiatif}$$

Substitusikan rumus (3), maka

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_{B\cup C} - N_{A\cap(B\cup C)}$$

Substitusikan rumus (3), ke $N_{B\cup C}$

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_B + N_C - N_{B\cap C} - N_{A\cap(B\cup C)} \qquad (4)$$

Hukum distribusi :

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C),$$

Hukum distribusi dan rumus (3) dapat dipakai pada suku $N_{A\cap(B\cup C)}$, karena

$$\begin{aligned} N_{A\cap(B\cup C)} &= N_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} \\ &= N_{A\cap B} + N_{A\cap C} - N_{(A\cap B)\cap(A\cap C)} \\ &= N_{A\cap B} + N_{A\cap C} - N_{A\cap B\cap C} \end{aligned}$$

Substitusikan ke persamaan (4) diperoleh:

$$N_{A\cup B\cup C} = N_A + N_B + N_C - N_{B\cap C} - N_{A\cap B} - N_{A\cap C} + N_{A\cap B\cap C} \qquad (5)$$

SOAL-SOAL

1. Tuliskan dalam bentuk deskripsi

   A = {Adobe Photoshop, Macromedia Fireworks, PrintShopPro,GIMP, ...}

   B = {SQL Server, MySQL, Ms Access, Oracle, SAP DB, PostGre SQL, ...}

   C = {PHP, ASP, Cold Fusion, ...}

   D = {Windows, Linux, Unix, MacOS, OS/2, ...}

   E = {disket, CD-R, Hardisk, ...}

   F = {mouse, keyboard, touch screen, ...}

2. Misalkan semesta pembicaraan adalah sistem operasi produksi Microsoft dan himpunan-himpunan lainnya dinyatakan oleh:

   A = {Win3.1, Win3.11, Win95, Win97}

   B = {Win97, Win98, Win98SE, WinME}

   C = {WinME, Win2000, WinXP, ...}

   Carilah:

   a. $(A \cup B) - B$
   b. $(A \cap B) \cup C'$
   c. $(A \oplus B) - C$
   d. $(B - C) \oplus A$
   e. $(A \cap B) \cup (A \cap C)'$
   f. $(A - B) \cap C'$
   g. 2^A
   h. 2^B
   i. $N_{A \cup B}$
   j. $N_{A \cap B}$

3. Dari 1200 mahasiswa TI diketahui

   582 menguasai Linux
   627 menguasai Windows
   543 menguasai Unix
   227 menguasai Linux dan Windows
   307 menguasai Linux dan Unix
   250 menguasai Windows dan Unix
   222 orang menguasai ketiganya.

   Berapa orang yang tidak menguasai ketiga jenis sistem operasi di atas?

   Berapa orang yang hanya menguasai Linux tetapi tidak menguasai Windows dan Unix?

4. Dari 37 orang programmer yang mengikuti wawancara untuk sebuah pekerjaan diketahui

   25 menguasai Pascal
   28 menguasai C++
   2 tidak menguasai keduannya

   Berapa orang yang menguasai keduannya?

5. Hasil survey mengenai input data dari kelas Akuntansi Komputasi diketahui

   32 orang suka memakai mouse
   20 orang suka memakai touch screen
   45 orang suka memakai keyboard
   15 orang suka mouse dan keyboard
   7 orang suka mouse dan touch screen
   10 orang suka keyboard dan touch screen
   5 orang suka memakai ketiganya

   Berapa jumlah mahasiswa yang disurvei?

   Berapa jumlah mahasiswa yang hanya suka memakai satu jenis input devices?

Berapa jumlah mahasiswa yang suka memakai keyboard dan mouse tetapi tidak suka memakai touch screen?

6. Dalam suatu kelas x semua ikut belajar pengunaan software Maple dan Matlab.
   Kalau dihitung yang belajar Maple ada 20 mahasiswa, 25% di antaranya juga belajar Matlab. Apabila diketahui perbandingan jumlah mahasiswa yang belajar Maple dan Matlab adalah 5 : 4, maka berapa jumlah mahasiswa di kelas x tersebut? Berapa jumlah mahasiswa yang hanya belajar Maple?
7. Dalam kelas x perbandingan jumlah mahasiswa yang ikut belajar penggunaan software Java, C, dan Pascal adalah 5:4:3.
   Kalau dihitung yang belajar:
   - Java ada 50 mahasiswa; 10% di antaranya juga belajar C dan Pascal sekaligus; 20% di antaranya belajar C dan 20% lagi belajar Pascal.
   - Pascal dan C tetapi tidak belajar Java 10 orang.
     Berapa jumlah mahasiswa kelas x?
     Berapa jumlah mahasiswa yang hanya belajar Pascal tetapi tidak belajar Java maupun C?
     Gambarkan dengan diagram venn!
8. Misalkan A himpunan mahasiswa tahun pertama, B himpunan mahasiswa tahun ke dua, C himpunan mahasiswa jurusan Matematika, D himpunan mahasiswa jurusan Teknik Informatika, E himpunan mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit, F himpunan mahasiswa yang nonton pertandingan tinju pada hari Senin malam, G himpunan mahasiswa yang belajar sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam.

Nyatakan pernyataan bereikut dalam notasi teori Himpunan :

a. Semua mahasiswa tahun ke dua jurusan Teknik Informatika mengambil kuliah matematika Diskrit.
b. Hanya mereka yang mengambil kuliah Matematika Diskrit atau yang nonton pertandingan tinju atau yang belajar sampai lewat tengah malam pada hari Senin malam.
c. Mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit tidak ada yang nonton pertandingan tinju pada hari senin malam.
d. Semua mahasiswa tahun ke dua yang bukan dari jurusan Matematika ataupun jurusan Teknik Informatika pergi nonton pertandingan tinju.

9. Diantara 100 mahasiswa, 32 orang mempelajari Matematika, 20 orang mempelajari Fisika, 45 orang mempelajari Biologi, 15 orang mempelajari Matematika dan Biologi, 7 orang mempelajari Matematika dan Fisika, 10. Orang mempelajari Fisika dan Biologi, 30 orang tidak mempelajari satupun diantara ketiga bidang tersebut.
   a. Hitung banyaknya mahasiswa yang mempelejari ke 3 bidang tersebut
   b. Hitung banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari satu dari ke tiga bidang tersebut.
10. Survey 25 mobil baru yang dijual memiliki (A) AC, (R) Radio, (W) Power Window dengan penyebaran sebagai berikut : 15 (A), 12 (R), 11 (W), 5 (A & W), 9 (A & R), 4 (R & W), 3 (A&R&W).

    Jumlah mobil yang :
    a. Hanya ber Power Window
    b. Hanya ber AC

c. Hanya ber Radio
d. Hanya ber R dan W tetapi tidak ber A.
e. Hanya ber A dan R tetapi tidak ber W.
f. Tidak memakai ketiga-tiganya.

-oo0oo-