חישוביות וקוגניציה – תרגיל 2

להגשה עד: 18/11/2019

שימו לב: שאלה 1 היא שאלה אנליטית ושאלה 2 היא שאלת תכנות. לשימושכם, אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון מופיע בעמוד השני

שאלה 1

נתונות הדוגמאות הבאות וסיווגן:

- $\mathbf{x}^1 = (2,2)$, $y^1 = 1$
- $\mathbf{x}^2 = (1,3)$, $y^1 = 1$
- $\mathbf{x}^3 = (-1,0)$, $y^1 = -1$
- $\mathbf{x}^4 = (-1,2)$, $y^1 = -1$

סעיף א'

התחילו מוקטור משקולות $\mathbf{w} = [1,1]$. הציגו את הדוגמאות הנתונות לפי הסדר, ועדכנו את המשקולות בהתאם לכלל הלמידה של הפרספטרון עד להתכנסות (כלומר, עד שהפרספטרון מסווג נכונה את כל ארבעת הדוגמאות). ציירו באופן סכמטי את הנקודות, וקטור המשקולות, והישר המפריד בתנאי ההתחלה ולאחר ההתכנסות.

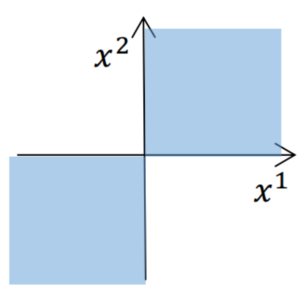
סעיף ב'

נתון פרספטרון בינארי עם סף $y = \operatorname{sgn}(w_1x_1 + w_2x_2 + b)$. מצאו ערכי w ו b עבור הכללים הבאים והסבירו:

1. $y = 1$ אמ"מ $2x_1 + x_2 > 0$
2. $y = 1$ אמ"מ $x_1 < 3x_2 + 4$

סעיף ג'

בנו רשת של פרספטרונים שתממש את הפונקציה NXOR (ראו גם בציור): $y = 1$ אמ"מ ($x_1 > 0$ וגם $x_2 > 0$) <u>או</u> ($x_1 < 0$ וגם $x_2 < 0$)



שאלה 2

1. כתבו פונקציה שמקבלת אוסף של P נקודות במרחב N־מימדי (מטריצה של $N \times P$, במקרה שלנו $N = 2$) ואת התיוג המתאים להן (וקטור באורך P), ומוצאת פרספטרון מתאים על פי אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון.
2. הגרילו $P = 1000$ נקודות דו־מימדיות, כאשר כל קואורדינטה מתפלגת בהתפלגות אחידה (רציפה) בין -10 ל 10. נקודות עבורן $x_1 > x_2$ יתויגו $y = 1$ ונקודות עבורן $x_1 < x_2$ יתויגו $y = -1$. הציגו את הנקודות כאשר הנקודות המתויגות ב 1 יוצגו בכחול והנקודות המתויגות ב -1 יוצגו באדום.
3. השתמשו בפונקציה שכתבתם בסעיף 1 כדי למצוא מסווג לנקודות שהגרלתם בסעיף 2. הציגו גרף עם הנקודות, וקטור המשקולות, והישר המפריד. <u>הערה</u>: ניתן לאתחל את האלגוריתם עם תנאי ההתחלה $\mathbf{w} = [1, 1]$.
4. נגדיר את הגודל שיבטא את השגיאה של $\mathbf{w}$ אליו הפרספטרון התכנס ביחס לפתרון האופטימלי $\mathbf{w}^*$ (מהו $\mathbf{w}^*$ במקרה שלנו?) כערך מוחלט של הזווית (במעלות) בין $\mathbf{w}$ ל $\mathbf{w}^*$. נרצה לבדוק כיצד השגיאה הממוצעת משתנה כפונקציה של מספר הדוגמאות מהן למדנו. לצורך כך, עבור כל ערך של $P = 25, 35, 55, 100, 150, 200, 500$ הריצו $M = 100$ סימולציות (בכל סימולציה הגרילו את הנקודות מחדש) וחשבו את השגיאה הממוצעת על פני M הסימולציות. הציגו גרף של השגיאה הממוצעת כפונקציה של P.

<u>תזכורת</u>: קוסינוס הזווית בין שני וקטורים $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ הוא $\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$. במטלב, הפונקציה acosd היא הפונקציה ההופכית לקוסינוס שמחזירה ערכים במעלות.

אלגוריתם הלמידה של הפרספטרון – תזכורת

קלט: נקודות $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^P$ והסיווג לכל נקודה $y^1, \ldots, y^P$ ($y^\mu \in \{-1, 1\}$)

אתחול: אתחל את $\mathbf{w}$ לוקטור כלשהו

איטרציות:

1. עבור על כל הנקודות בסדר מסוים קבוע
2. לכל נקודה, אם המסווג טועה לגביה עדכן את וקטור המשקולות באופן הבא: $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + y^\mu \mathbf{x}^\mu$
3. עצור כאשר כל הנקודות מסווגות נכונה, כלומר לא היה שינוי בערך של $\mathbf{w}$ בכל האיטרציה האחרונה

<u>הערה</u>: במידה ומאתחלים את $\mathbf{w}$ להיות וקטור האפס, הדוגמא הראשונה שמציגים תמיד תחשב כמסווגת בטעות.