ASSIGNATURA: Mètodes Matemàtics de la Física II
DEPARTAMENT: Física Fonamental
DATA EXAMEN FINAL 18 - gener - 2011

**1.** *(2 punts)* A l'espaitemps bidimensional de Minkowski considerem el canvi d'unes coordenades lorentzianes $\{t, x\}$, per a les quals $g = dt \otimes dt - dx \otimes dx$, a unes noves coordenades $\{t', x'\}$, donades per la transformació lineal no homogènia

$$t' = \frac{4}{5}t - \frac{4}{5}, \quad x' = -\frac{3}{5}t + x - \frac{2}{5}$$

1. Determineu les quatre matrius $(a^{i'}_{i}), (a^{i}_{i'}), (a_{i}^{i'}), (a_{i'}^{i})$ que relacionen les bases i les components holònomes als espais tangent i cotangent de cada punt de l'espaitemps.
2. Doneu de manera explícita els quatre canvis de bases holònoma associats a l'esmentada parella de sistemes de coordenades.
3. Canvieu de base els camps vectorials constants $v = 5\partial_t + 3\partial_x$, $\quad w = 4\partial_{t'} + 2\partial_{x'}$, i les 1-formes diferencials, també constants, $\alpha = dt + dx$, $\quad \beta = 5dt' + dx'$.
4. Doneu les expressions 2-covariant i 2-contravariant de la mètrica de Minkowski en el sistema de coordenades $\{t', x'\}$, tant en forma matricial com la seva expressió tensorial completa.
5. Fent ús de resultats anteriors verifiqueu, calculant en tots dos sistemes de coordenades, la invariància del producte escalar $\alpha \cdot \beta$, i de la contracció $\alpha(w)$.

En tots els casos s'aconsella precedir els càlculs amb la corresponent expressió teòrica, que es considera coneguda i/o present al formulari.

**2.** *(1.5 punts)* Utilitzeu la transformada de Laplace per resoldre l'equació

$$\ddot{u}(t) + 2k\dot{u}(t) + \omega_0^2 = 0$$

amb les condicions inicials $u(0) = u_0$, $\quad \dot{u}(0) = v_0$.

**3.** *(1 punt)* Si definim la transformada de Fourier $\hat{f}(k)$ de la funció $f(x)$ com

$$F[f(x)] = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi kx) dx$$

1. Calculeu la transformada de Fourier de la funció

$$f(x) = \left(\frac{1}{a} - \frac{|x|}{a^2}\right) \quad x \in [-a, a]; \qquad f(x) = 0, \quad |x| > a; \quad a > 0$$

2. Quin és el seu valor per $k = 0$? És $\hat{f}$ contínua en aquest punt?

**4.** *(3 punts)* Donat el següent problema de valors propis:

$$y'' + \lambda y = 0$$

amb les condicions de contorn definides per les relacions $y(0) = y'(0)$, $\quad y(\pi) = y'(\pi)$, es demana

1. És un problema de Sturm-Liouville?. Raoneu la resposta.
2. Trobeu el conjunt de tots els valors propis i les corresponents funcions pròpies.

5. *(2.5 punts)* L'equació diferencial que descriu les petites oscil·lacions d'una corda homogènia i flexible suspesa d'un punt fixe $P$ (vegeu la figura) sotmesa a l'acció de la gravetat és:

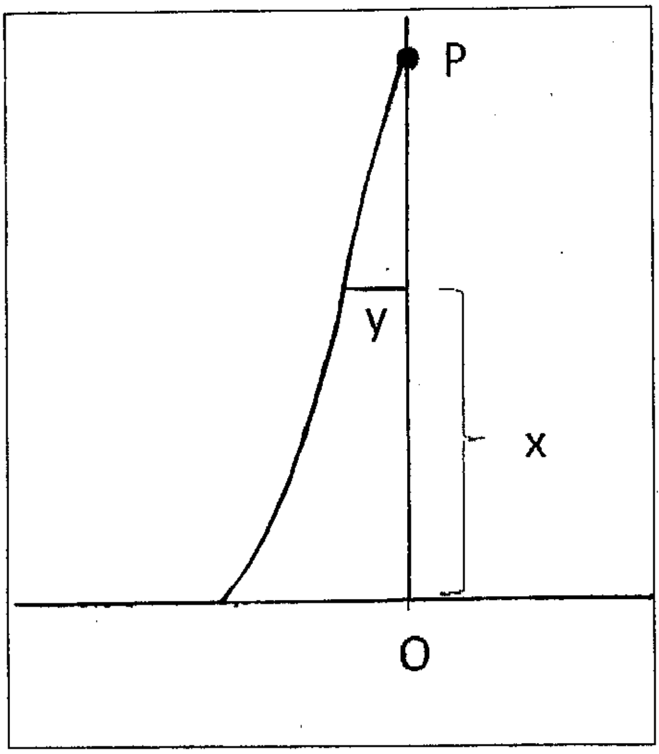
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial y}{\partial x})$$

on $y(x)$ és el desplaçament lateral de la corda respecte de la vertical $OP$ i $g$ és el valor de l'acceleració de la gravetat.

Trobeu els modes normals de vibració. És a dir, les solucions de la forma

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t + \phi).$$

Per fer-ho, determineu les funcions $X(x)$ i els valors $\omega$ compatibles amb les condicions físiques del problema.



Problema 1 Minkowski bidimensional $g = dt\otimes dt - dx\otimes dx$ ; $\begin{cases} t' = \frac{4}{5}t - \frac{4}{5} \\ x' = -\frac{3}{5}t + x - \frac{2}{5} \end{cases}$

canvi coordenades : $\{t,x\} \longrightarrow \{t',x'\}$

(1) $(a^{i'}{}_i) \equiv \dfrac{\partial(t',x')}{\partial(t,x)} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}$

transposta $(a_i{}^{i'}) = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

inversa $(a^i{}_{i'}) \equiv \dfrac{\partial(t,x)}{\partial(t',x')} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$

inversa transposta $(a_{i'}{}^i) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) Lectura dels canvis de base per "columnes"

$\partial_t = \frac{4}{5}\partial_{t'} - \frac{3}{5}\partial_{x'}$ $\quad \partial_x = \partial_{x'}$ $\quad e_i = a^{i'}{}_i e_{i'}$

$dt' = \frac{4}{5}dt$ $\quad dx' = -\frac{3}{5}dt + dx$ $\quad e^{i'} = a_i{}^{i'} e^i$

$\partial_{t'} = \frac{5}{4}\partial_t + \frac{3}{4}\partial_x$ $\quad \partial_{x'} = \partial_x$ $\quad e_{i'} = a^i{}_{i'} e_i$

$dt = \frac{5}{4}dt'$ $\quad dx = \frac{3}{4}dt' + dx'$ $\quad e^i = a_{i'}{}^i e^{i'}$

(3) (Teoria/formulari) (càlcul) (enunciat) (resultat) (Teoria/formulari)

$v^{i'} = a^{i'}{}_i v^i$ $\quad \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v = 5\partial_t + 3\partial_x = 4\partial_{t'}$

$w^i = a^i{}_{i'} w^{i'}$ $\quad \begin{pmatrix} 5/4 & 0 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad w = 4\partial_{t'} + 2\partial_{x'} = 5\partial_t + 5\partial_x$

$\alpha_{i'} = a_{i'}{}^i \alpha_i$ $\quad \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = dt + dx = 2dt' + dx'$

$\beta_i = a_i{}^{i'}\beta_{i'}$ $\quad \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = 5dt' + dx' = \frac{17}{5}dt + dx$

(4) mètrica 2-covariant $g_2 = dt\otimes dt - dx\otimes dx = dt'\otimes dt' - dx'\otimes dx' - \frac{3}{4}(dt'\otimes dx' + dx'\otimes dt')$

també

matricialment $g_{i'j'} = a_{i'}{}^i g_{ij} a^j{}_{j'} \rightsquigarrow (g_{i'j'}) = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/4 & 0 \\ 3/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5/4 & 0 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix}$

2-contravariant : Per inversió de la matriu $(g_{i'j'})$ o també per càlcul directe, o per substitució de les bases

$g^2 = \partial_t\otimes\partial_t - \partial_x\otimes\partial_x = \frac{16}{25}(\partial_{t'}\otimes\partial_{t'} - \partial_{x'}\otimes\partial_{x'}) - \frac{12}{25}(\partial_{t'}\otimes\partial_{x'} + \partial_{x'}\otimes\partial_{t'})$ ; $(g^{i'j'}) = \begin{pmatrix} 16/25 & -\frac{12}{25} \\ -12/25 & -16/25 \end{pmatrix}$

$g^{i'j'} = a^{i'}{}_i g^{ij} a_j{}^{j'} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ -3/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ //

(5) $\alpha\cdot\beta = \alpha_i g^{ij}\beta_j = (1,1)\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17/5 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)\begin{pmatrix} 17/5 \\ -1 \end{pmatrix} = 12/5$ //

$= \alpha_{i'} g^{i'j'}\beta_{j'} = (2,1)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{4}{25} = \frac{4}{25}(2,1)\begin{pmatrix} 17 \\ -19 \end{pmatrix} = 4\cdot\frac{15}{25}$

Producte escalar de 2-covectors o formes amb la mètrica 2-contr.

$\alpha(w) = \alpha_i w^i = (1,1)\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 10$

$= \alpha_{i'} w^{i'} = (2,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$

contracció tensorial forma-vector, independent de la mètrica.

## Problema 2

$$\ddot{u}(t) + 2\chi\,\dot{u}(t) + \omega_0^2 = 0 \qquad\qquad u(0) = u_0$$

$$\dot{u}(0) = v_0$$

$$\ddot{u}(t) \longrightarrow s^2\hat{u}(s) - s u_0 - v_0$$

$$\dot{u}(t) \longrightarrow s\,\hat{u}(s) - u_0$$

$$\omega_0^2 \longrightarrow \omega_0^2/s$$

$$(s^2 + 2\chi s)\,\hat{u}(s) - (s+2\chi)u_0 + \frac{\omega_0^2}{s} - v_0 = 0$$

$$s(s+2\chi)\,\hat{u}(s) = (s+2\chi)u_0 - \frac{\omega_0^2}{s} + v_0$$

$$\hat{u}(s) = \frac{u_0}{s} - \frac{\omega_0^2}{s^2(s+2\chi)} + \frac{v_0}{s(s+2\chi)}$$

$$\hat{u}(s) = \frac{1}{s}\left[u_0 + \frac{v_0}{2\chi} + \left(\frac{\omega_0}{2\chi}\right)^2\right] - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\omega_0^2}{2\chi}\right) -$$

$$- \frac{1}{s+2\chi}\left[\left(\frac{\omega_0}{2\chi}\right)^2 + \frac{v_0}{2\chi}\right]$$

$$u(t) = \left[u_0 + \frac{v_0}{2\chi} + \left(\frac{\omega_0}{2\chi}\right)^2\right] - \left(\frac{\omega_0^2}{2\chi}\right)t -$$

$$- \left[\left(\frac{\omega_0}{2\chi}\right)^2 + \frac{v_0}{2\chi}\right] e^{-2\chi t}$$

③ $\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi kx)\, dx$ (a)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a} - \frac{|x|}{a^2}\right) & x \in [-a, a] \\ 0 & |x| > a \,;\quad a > 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-a}^{+a} \underbrace{\left(\frac{1}{a} - \frac{|x|}{|a^2|}\right)}_{\text{función par}} \big(\underbrace{\cos 2\pi kx}_{\text{f. par}} + i \underbrace{\operatorname{sen} 2\pi kx}_{\text{f. impar}}\big)\, dx =$$

$$= 2 \int_0^a \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}\right) \cos 2\pi kx\, dx$$

Como

$\int \cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen} bx}{b}$ y $\int x \cos bx\, dx = \frac{\cos bx}{b^2} + \frac{x \operatorname{sen} bx}{b}$

$(b = 2\pi k)$ Ojo $b \neq 0$ !!

tendremos que

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{a}\left[\frac{\operatorname{sen} 2\pi k x}{2\pi k}\right]_0^a - \frac{2}{a^2}\left[\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} + \frac{x \operatorname{sen} 2\pi kx}{2\pi k}\right]_0^a = \cancel{\frac{2}{a}\frac{\operatorname{sen}(2\pi ka)}{2\pi k}} -$$

$$- \frac{2}{a^2}\left[\frac{\cos(2\pi ka)}{(2\pi k)^2} - \frac{1}{(2\pi k)^2} + \cancel{\frac{a \operatorname{sen}(2\pi ka)}{2\pi k}}\right] =$$

$$= \frac{1 - \cos(2\pi ka)}{2\pi^2 a^2 k^2} \,;$$ Todo esto es válido para $k \neq 0$ !!

Para $k=0$ (b)

$$\hat{f}(0) = 2\int_0^a \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2\left[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}\right]_0^a = 1$$

Para ver si $\hat{f}(k)$ es continua en $k=0$, tenemos que ver si

$$\lim_{k\to 0} \hat{f}(k) = \hat{f}(0)$$

$$\lim_{k\to 0} \hat{f}(k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sustituyendo} \\ \text{directamente}}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{aplicamos L'Hopital}}{=} \lim_{k\to 0} \underbrace{\frac{2\pi a \operatorname{sen} 2\pi a k}{4\pi^2 k a^2}}_{\frac{\cancel{2\pi a}}{\cancel{2\pi a}} \frac{\operatorname{sen} 2\pi a k}{2\pi a k} \to 1} = 1$$

El último apartado también se puede ver utilizando el desarrollo de Taylor alrededor de $k=0$ para el coseno

$$\hat{f}(k) \underset{k\sim 0}{\approx} \frac{\cancel{1} - \left[\cancel{1} - \frac{(2\pi k a)^2}{2!} + \dots\right]}{2\pi^2 a^2 k^2} \approx 1 + \dots$$

términos que $\to 0$ cuando $k\to 0$!!

Problema 4

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$$

Siguin $f$ i $g$ dues funcions que satisfan les condicions de contorn del problema

$$(f, \mathcal{L} g) = \int_0^\pi f \frac{d^2}{dx^2} g \, dx = f \frac{dg}{dx}\Big|_0^\pi - g \frac{df}{dx}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi g \frac{d^2 f}{dx^2} dx =$$

$$= \underbrace{f(\pi) g'(\pi) - f'(\pi) g(\pi)}_{0} + \underbrace{f'(0) g(0) - f(0) g'(0)}_{0} + (g, \mathcal{L} f)$$

és un problema hermític, per tant és un problema de Sturm-Liouville

---

$$y \sim e^{rx} \longrightarrow r^2 + \lambda = 0 \longrightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$y = A e^{i\sqrt{\lambda} x} + B e^{-i\sqrt{\lambda} x}$$

$$y' = i\sqrt{\lambda} A e^{i\sqrt{\lambda} x} - i\sqrt{\lambda} B e^{-i\sqrt{\lambda} x}$$

condicions de contorn $\begin{cases} A(1+i\sqrt{\lambda}) + B(1-i\sqrt{\lambda}) = 0 \\ A(1+i\sqrt{\lambda}) e^{i\sqrt{\lambda}\pi} + B(1-i\sqrt{\lambda}) e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$

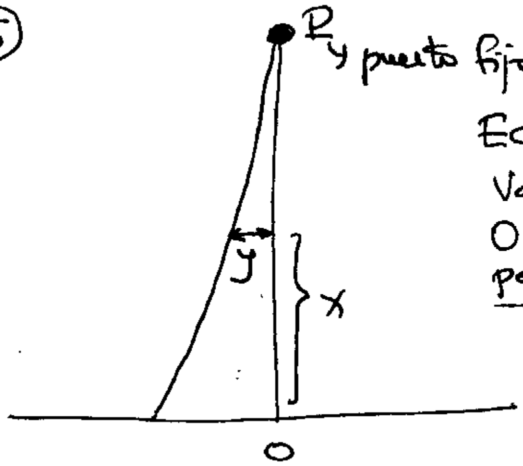
determinant dels coeficients $\longrightarrow (1+\lambda) \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$

valors de $\lambda$ : $-1$, $n^2$ ; $\sqrt{\lambda} = n$ , $\sqrt{\lambda} = i$

per $\sqrt{\lambda} = i$ : $y \sim e^x$

per $\sqrt{\lambda} = n$ : $y \sim \sin(nx) - n\cos(nx)$

(5)




Llamemos $l = \overline{OP}$ (i)

punto fijo!!

Ec. dif. Válida para Oscilaciones pequeñas $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)$ (*)

Para encontrar los modos normales de vibración buscamos las soluciones de la forma

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t+\phi) \quad (**)$$

que son solución de (*) y que son compatibles con las condiciones físicas del problema. Para determinar $X(x)$ y $\omega$, sustituimos (**) en la ecuación del movimiento (*):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x)\left(-\omega^2\cos(\omega t+\phi)\right) = g\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial}{\partial x}X(x)\cos(\omega t+\phi)\right)$$

$$= g\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dX}{dx}\right)\left[\cos(\omega t+\phi)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 X(x) = g\,\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dX}{dx}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x\,\frac{dX}{dx}\right) + \frac{\omega^2}{g}X = 0\,,$$ Ec. tipo Sturm-Liouville!!

$$x\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dX}{dx} + \frac{\omega^2}{g}X = 0\,,$$ Haciendo el cambio $x \to \tau$: $x = \frac{1}{4}g\tau^2$

$\to dx = \frac{1}{4}g\,2\tau\,d\tau \Rightarrow \dfrac{d\tau}{dx} = \dfrac{2}{g\tau}$

tenemos:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dx} = \frac{2}{g\tau}\,\frac{d}{d\tau}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot\frac{d\tau}{dx} =$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2}{g\tau}\,\frac{d}{d\tau}\right)\cdot\left(\frac{2}{g\tau}\right) = \left(\frac{2}{g\tau}\right)\left[\frac{2}{g\tau}\,\frac{d^2}{d\tau^2} - \frac{2}{g\tau^2}\,\frac{d}{d\tau}\right]$$

$$\frac{1}{\cancel{4}} g\tau^2 \frac{\cancel{2}}{g\tau}\left[\frac{\cancel{2}}{g\tau}\,\frac{d^2X(\tau)}{d\tau^2} - \frac{\cancel{2}}{g\tau^2}\,\frac{dX(\tau)}{d\tau}\right] +$$

$$+\ \frac{2}{g\tau}\,\frac{dX(\tau)}{d\tau} + \frac{\omega^2}{g}X(\tau) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g}\,\frac{d^2X(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{g\tau}\,\frac{dX(\tau)}{d\tau} + \frac{\omega^2}{g}X(\tau) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2X(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\tau}\,\frac{dX(\tau)}{d\tau} + \omega^2 X(\tau) = 0}$$

---

La ecuación dif de Bessel de orden $\nu$ $(\nu \geq 0)$:

$$x^2\frac{dy}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0$$

$$y(x) = A J_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda x)$$

---

En nuestro caso $\nu = 0$, $\lambda^2 = \omega^2$ y las soluciones son

$$X(\tau) = A J_0(\omega\tau) + B Y_0(\omega\tau)$$

condiciones físicas del problema

$\tau = 2\sqrt{\frac{x}{g}}$

( - en P cuerda fija!! $y(l,t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$
$\Rightarrow X(l) = 0$!

.- Pequeñas oscilaciones (no pueden ser "$\infty$")
En $x = 0 \Rightarrow \tau = 0$, $Y_0(\omega\tau) \to -\infty$!!
No puede ser $\Rightarrow B = 0$ !! )

La otra condición nos da $A J_0\left(\omega 2\sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$ sol trivial
$\Rightarrow J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right) = 0$

Si llamamos $\alpha_i$ a los ceros de $J_0$, es decir
a las soluciones de la ecuación

$$J_0(\alpha) = 0$$

tenemos que $2\omega\sqrt{\frac{l}{g}} = \alpha_1, \alpha_2 \dots\dots$ y $\omega_i = \frac{\alpha_i}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$

y las modos normales serán de la forma (iii)

$$y_i = C_i J_0\left(\alpha_i \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

$$i = 1, 2 \ldots\ldots$$

Nota:
Para det. las $C_i$ y $\phi_i$ necesitaríamos las condiciones iniciales $y(x;0)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_x (x;0)$ para imponerlas en la solución general de (*)

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0\left(\alpha_i \sqrt{\frac{x}{\ell}}\right) \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

---