

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

# 复变函数与积分变换

西安建筑科技大学理学院

苏变萍 陈东立 编

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书是教育科学“十五”国家规划课题研究成果,是依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》,结合本学科的发展趋势,在教学实践的基础上编写而成的.在编写的过程中始终遵循着:为专业课打好基础,培养学生的数学素质,提高其应用数学知识解决实际问题的能力的原则.在具体内容编写上力求做到:分析客观事物——建立概念——发展理论——应用理论解决实际问题.强调将基础知识的学习,数学思想、方法的学习、能力的培养孕育其中.强调理论的应用性及与计算机的结合.本书具有体系严谨,逻辑性强,内容组织由浅入深,理论联系实际,适应新形势要求,讲授方式灵活等特点.

本书的内容为第一篇、第二篇、数学实验三部分,第一篇为复变函数,共七章,主要内容是:复数和复变函数,导数,积分,级数,留数,保形映照及解析函数的应用.第二篇为积分变换,共二章,主要内容是:傅里叶变换,拉普拉斯变换.数学实验的主要内容为数学软件的应用和积分变换的部分程序.

本教材建议学时约

本书可作为高等院校有关专业本科教材,也可供科技、工程技术人员阅读参考.

# 前 言

《复变函数与积分变换》一书是作者研究了大量的中外相关教材资料,在教学实践的基础上,依据工科数学《复变函数与积分变换教学大纲》,结合大学教学课程体系和内容的改革要求,以培养学生数学素质为目的编写而成的.本书具有如下特点:

1. 复变函数的内容体系方面,复数,复函数,复导数,复积分,级数,留数,保形映照等概念与高等数学的函数,微分,积分,级数等概念遥相呼应,使学生通过对比易于学习和掌握有关内容且能达到对所学内容由少到多,再由多到少.在内容的展开方面,不论是复变函数部分还是积分变换部分都特别注重内容(事件)发生、发展的自然过程,强调概念的产生过程所蕴含的思想方法,注重概念、定理叙述的精确性.从而在学生获得知识的同时培养学生推理、归纳、演绎和创新能力.

2. 为了适应社会发展需要,将数学理论与实际问题拉近距离,在复变函数部分增加了解析函数对平面向量场的应用一章,使来自实际的数学理论再回到实际中去解决问题.在积分变换部分,添加了离散傅里叶变换、离散沃尔什变换、梅林变换、 $z$ 变换的简单介绍.

3. 随着计算机的发展,数学与计算机的关系越来越密切,本书数学实验部分通过数学软件和程序将抽象数学理论与计算机的结合展现在读者面前.

4. 本书的习题量较大,这给了教师选择和学生练习的余地,并且设置了一定数量的思考型题目.

5. 本书在内容的表述方式上,不像对数学系专业学生的要求那样严格,而是将数学语言在某些地方“通俗化”,做到了简单、明了、直白.

总之,本书具有体系严谨,逻辑性强,内容组织由浅入深,理论联系实际,适应新形势要求,讲授方式灵活等特点.

本书由西安建筑科技大学苏变萍主编,其中第一篇的第一、二、三、四章、第二篇及数学实验部分由苏变萍编写,第五、六、七章由西安建筑科技大学陈东立编写.全书最后由苏变萍统稿.

本书在编写过程中得到了学校、理学院、数学教研室和广大同仁的大力支持和帮助,潘鼎坤教授、徐裕生教授给予了许多重要的指导,西安建筑科技大学刘林教授仔细审阅了全部书稿.在此深表感谢.并恳切希望读者对此书提出宝贵意见和建议.

作者

2003年3月于西安

# 目 录

## 第一篇 复变函数

### 第 1 章 复数与复变函数

<b>1.1</b>	复数.....	( 2 )
1.1.1	复数及其代数运算.....	( 2 )
1.1.2	复数的几何表示.....	( 4 )
1.1.3	复数四则运算的几何意义.....	( 6 )
1.1.4	扩充复平面.....	(10)
<b>1.2</b>	复数的乘幂与方根.....	(11)
1.2.1	复数的乘幂.....	(11)
1.2.2	复数的方根.....	(11)
<b>1.3</b>	平面点集.....	(13)
1.3.1	区域.....	(13)
1.3.2	曲线.....	(14)
1.3.3	单连通域和多连通域.....	(14)
<b>1.4</b>	复变函数.....	(15)
1.4.1	复变函数的概念.....	(15)
1.4.2	复变函数的几何意义——映照.....	(16)
1.4.3	反函数与复合函数.....	(17)
<b>1.5</b>	初等函数.....	(18)
1.5.1	指数函数.....	(19)
1.5.2	对数函数.....	(19)
1.5.3	幂函数.....	(21)
1.5.4	三角函数与反三角函数.....	(22)
1.5.5	双曲函数与反双曲函数.....	(24)
<b>第 1 章</b>	<b>习题</b> .....	(25)

### 第 2 章 导 数

<b>2.1</b>	复变函数的极限.....	(31)
------------	--------------	------

2.1.1	复变函数极限的概念.....	(31)
2.1.2	复变函数极限定理.....	(32)
<b>2.2</b>	<b>复变函数的连续性.....</b>	<b>(35)</b>
2.2.1	复变函数连续的概念.....	(35)
2.2.2	复变函数连续的定理.....	(35)
<b>2.3</b>	<b>导数.....</b>	<b>(37)</b>
2.3.1	导数的概念.....	(37)
2.3.2	导数的运算法则.....	(38)
2.3.3	函数可导的充分必要条件.....	(39)
2.3.4	高阶导数.....	(42)
<b>2.4</b>	<b>解析函数.....</b>	<b>(43)</b>
2.4.1	解析函数的概念.....	(43)
2.4.2	初等函数的解析性.....	(43)
2.4.3	函数解析的充要条件.....	(44)
<b>2.5</b>	<b>调和函数.....</b>	<b>(45)</b>
2.5.1	调和函数的概念.....	(45)
2.5.2	已知实部或虚部的解析函数的表达式.....	(46)
<b>第 2 章习题</b>	<b>.....</b>	<b>(49)</b>

## 第 3 章 积 分

<b>3.1</b>	<b>复变函数积分的概念、性质、计算.....</b>	<b>(54)</b>
3.1.1	不定积分.....	(54)
3.1.2	定积分.....	(55)
3.1.3	积分值的计算.....	(57)
<b>3.2</b>	<b>柯西定理及其推广.....</b>	<b>(59)</b>
<b>3.3</b>	<b>柯西积分公式.....</b>	<b>(65)</b>
<b>3.4</b>	<b>解析函数的导数.....</b>	<b>(67)</b>
<b>第 3 章习题</b>	<b>.....</b>	<b>(69)</b>

## 第 4 章 级 数

<b>4.1</b>	<b>收敛序列与收敛级数.....</b>	<b>(76)</b>
4.1.1	收敛序列.....	(76)
4.1.2	收敛数项级数.....	(78)
4.1.3	函数项级数.....	(80)
<b>4.2</b>	<b>幂级数.....</b>	<b>(80)</b>

4.2.1	幂级数的概念.....	(80)
4.2.2	幂级数的收敛半径.....	(82)
4.2.3	幂级数和函数的性质.....	(84)
<b>4.3</b>	<b>泰勒级数.....</b>	<b>(85)</b>
<b>4.4</b>	<b>罗朗级数.....</b>	<b>(91)</b>
4.4.1	罗朗级数的概念.....	(91)
4.4.2	解析函数的罗朗展式.....	(92)
<b>第4章习题</b>	<b>.....</b>	<b>(98)</b>

## 第5章 留 数

<b>5.1</b>	<b>解析函数的孤立奇点 .....</b>	<b>(103)</b>
5.1.1	孤立奇点的定义与分类 .....	(103)
5.1.2	零点与极点的关系 .....	(105)
5.1.3	解析函数在无穷远点的性质 .....	(107)
<b>5.2</b>	<b>留数的一般理论 .....</b>	<b>(109)</b>
5.2.1	留数的定义及计算 .....	(109)
5.2.2	留数定理 .....	(112)
5.2.3	无穷远点的留数 .....	(114)
<b>5.3</b>	<b>留数对定积分计算的应用 .....</b>	<b>(117)</b>
<b>第5章习题</b>	<b>.....</b>	<b>(121)</b>

## 第6章 保形映照

<b>6.1</b>	<b>导数的几何意义及保形映照的概念 .....</b>	<b>(125)</b>
6.1.1	曲线的切向量 .....	(125)
6.1.2	导数的几何意义 .....	(125)
6.1.3	保形映照的概念 .....	(127)
<b>6.2</b>	<b>分式线性函数及其映照性质 .....</b>	<b>(127)</b>
6.2.1	分式线性函数 .....	(127)
6.2.2	分式线性函数的映照性质 .....	(130)
<b>6.3</b>	<b>分式线性函数的应用 .....</b>	<b>(133)</b>
<b>6.4</b>	<b>指数函数与幂函数所确定的映照 .....</b>	<b>(136)</b>
6.4.1	指数函数 $w = e^z$ 所确定的映照 .....	(136)
6.4.2	幂函数 $w = z^n$ 所确定的映照 .....	(139)
<b>第6章习题</b>	<b>.....</b>	<b>(142)</b>

**\* 第 7 章 解析函数对平面向量场的应用**

<b>7.1</b>	平面向量场 .....	(146)
<b>7.2</b>	平面场的复势 .....	(148)
<b>7.3</b>	应用 .....	(152)
7.3.1	对流体力学的应用 .....	(152)
7.3.2	对电学的应用 .....	(154)

**第二篇 积分变换****第 1 章 傅里叶变换**

<b>1.1</b>	傅里叶积分 .....	(158)
1.1.1	傅里叶积分的概念 .....	(158)
1.1.2	傅里叶积分的物理意义——频谱 .....	(159)
1.1.3	傅里叶积分定理 .....	(163)
<b>1.2</b>	傅里叶变换 .....	(164)
1.2.1	傅里叶变换的定义 .....	(164)
1.2.2	傅里叶变换的性质 .....	(167)
<b>1.3</b>	函数 .....	(178)
1.3.1	函数的概念 .....	(178)
1.3.2	函数的性质 .....	(181)
1.3.3	函数的傅里叶变换 .....	(185)
<b>* 1.4</b>	离散傅里叶变换和离散沃尔什变换 .....	(186)
1.4.1	离散傅里叶变换 .....	(186)
1.4.2	快速傅里叶变换 .....	(189)
1.4.3	离散沃尔什变换 .....	(193)
<b>第 1 章习题</b>	.....	(195)

**第 2 章 拉普拉斯变换**

<b>2.1</b>	拉普拉斯变换的概念 .....	(198)
2.1.1	拉普拉斯积分 .....	(198)
2.1.2	拉普拉斯变换 .....	(202)
<b>2.2</b>	拉普拉斯逆变换 .....	(205)

<b>2.3</b>	拉普拉斯变换的性质 .....	(208)
<b>2.4</b>	拉普拉斯变换的应用 .....	(224)
2.4.1	线性微分方程及微分方程组 .....	(224)
* 2.4.2	具有特殊扰动函数的微分方程 .....	(229)
* <b>2.5</b>	梅林变换和 $z$ 变换 .....	(231)
2.5.1	梅林变换 .....	(231)
2.5.2	$z$ 变换 .....	(233)
<b>第 2 章</b>	习题 .....	(236)

\* 数学实验

实验一:	Matlab 软件的应用 .....	(241)
实验二:	快速傅里叶变换、拉普拉斯逆变换的计算程序 .....	(243)
<b>附录 A</b>	区域变换表 .....	(256)
<b>附录 B</b>	傅氏变换简表 .....	(261)
<b>附录 C</b>	拉氏变换简表 .....	(265)
习题答案	.....	(270)
参考书目	.....	(282)



# 第一篇 复变函数

复数是十六世纪人们在解代数方程时引入的,在十七和十八世纪,随着微积分的发明与发展,人们研究了复变数函数(简称复变函数),得到了一些重要结果.

因为复数最初是单纯地从形式上推广而引进的,并且在十八世纪以前,由于人们对复数的有关概念了解得不够清楚,用它们进行计算得到了一些矛盾,所以复数在历史上长期不能为人们所接受,“虚数”这一名词本身恰好反映了这一点.

可是复数并不神秘,它可与有序实数对或平面向量一一对应,在某些情况下用复数表示的向量计算起来更方便.十八世纪,J. 达朗贝尔(1717—1783)与 L. 欧拉(1707—1783)等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义,澄清了复数的概念,并应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题.直到这时,人们才接受了复数.

复变函数的理论基础是在十九世纪奠定的.A.L. 柯西(1789—1857), K. 外尔斯特拉斯(1815—1897)和 G.F.B 黎曼(1826—1866)是这一时期的三位代表人物.柯西和外尔斯特拉斯分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼研究复变函数的映照性质.

本世纪,复变函数论成为数学的重要分支之一,随着它的应用领域不断扩大而发展成一门庞大的学科.这门学科不但研究本身在发展中提出的问题,而且对于自然科学其它部门(如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等)以及数学中其他分支(如微分方程、积分方程、概率论、数论等)复变函数论都有重要的应用.

# 第 1 章 复数与复变函数

高等数学和复变函数都是以变量为研究对象的数学课程.所不同的是高等数学的变量来自于实数集合,而复变函数中的变量来自于复数集合.本章将介绍复数的概念、运算、复变函数、初等函数的概念及其性质.

## 1.1 复数

### 1.1.1 复数及其代数运算

#### 1. 复数的概念

在中学我们已经学过复数.知道  $i$  是方程  $x^2 + 1 = 0$  的一个根,即  $i^2 = -1$ ,这里  $i$  称做虚数单位.

当  $x, y$  都是实数时,我们称  $z = x + iy$  为复数. $x, y$  分别称为  $z$  的实部与虚部.记作

$$x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z).$$

当  $x = 0, y \neq 0$  时,  $z = iy$  称为纯虚数;

当  $y = 0$  时,  $z = x$  被视作实数  $x$ .

两个复数的相等,当且仅当它们的实部与虚部分别相等.

一个复数等于零,当且仅当它的实部与虚部同时等于零.

称复数  $x + iy$  和  $x - iy$  互为共轭复数.复数  $z$  的共轭复数常记为  $\bar{z}$ .

#### 2. 复数的代数运算

对以上定义的复数,我们来规定其运算方法.由于实数是复数的特例,因此复数的运算法则施行于实数时,应与实数的运算结果相符.同时复数运算应能够满足实数运算的一般规律.

两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$  的运算定义如下:

复数的加法、减法:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

复数的乘法:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

以上各式的右端分别称为复数  $z_1$  与  $z_2$  的和、差、积、商。

复数运算所满足的算律:

(1) 交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

(2) 结合律

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3; \quad z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

(3) 分配律

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

算律(1)、(2)、(3)读者可自行证之。

我们注意到对复数的运算仍有以下事实:

$$(1) \quad z + 0 = z, \quad 0 \cdot z = 0;$$

$$(2) \quad z \cdot 1 = z, \quad z \cdot \frac{1}{z} = 1;$$

(3) 若  $z_1 z_2 = 0$ , 则  $z_1$  与  $z_2$  至少有一个为零, 反之亦然. 这是因为如果  $z_1 z_2 = 0$ ,  $z_2 \neq 0$

$$z_1 = z_1 z_2 \cdot \frac{1}{z_2} = (z_1 z_2) \frac{1}{z_2} = 0.$$

$$(4) \quad \frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}.$$

计算

$$\frac{1}{2 - 3i} - \frac{1}{1 + i} = \frac{1}{5 - i} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i.$$

**例 1.1** 证明:  $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$ .

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (1 + z)^2 &= (1 + z)(1 + z) \\ &= 1 + z + z + z^2 \\ &= 1 + 2z + z^2. \end{aligned}$$

共轭复数的运算性质:

$$(1) \quad \overline{\overline{z}} = z; \quad (2) \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2};$$

$$(3) \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad (4) \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

我们来证明性质(3), 其余留给读者。

证 设  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  那么

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \\ \overline{z_1 z_2} &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1), \\ \overline{z_1} \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

因而

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

例 共轭复数

$$\overline{\frac{-1+3i}{2-i}} = \frac{\overline{(-1+3i)}}{\overline{(2-i)}} = -\frac{1+3i}{2+i}.$$

例 1.2 证明:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

证 设  $z = x + iy$ . 则

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(x + iy) + (x - iy)}{2} = x = \operatorname{Re}(z);$$

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(x + iy) - (x - iy)}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).$$

### 1.1.2 复数的几何表示

#### 1. 复平面

一个复数  $z = x + iy$  本质上由一对有序实数  $(x, y)$  唯一确定. 于是能够建立全体复数和  $xy$  平面上的点之间的一一对应关系. 换句话说, 我们可以用横坐标为  $x$ , 纵坐标为  $y$  的点来表示复数  $z = x + iy$ .

由于  $x$  轴上的点对应着实数, 故  $x$  轴称为实轴;  $y$  轴上非原点的点对应着纯虚数, 故  $y$  轴称为虚轴. 这样表示复数  $z$  的平面称为复平面或 $z$  平面.

#### 2. 复数的模与幅角

在复平面上, 复数  $z$  还与从原点  $O$  到  $z = x + iy$  所引向量构成一一对应关系. 因此, 我们也可以用向量来表示复数  $z = x + iy$  (如图 1.1). 复数的模

我们称向量  $z$  的长度为复数  $z$  的模, 记作  $|z|$  (如图 1.1).

关于复数  $z$  的模  $|z|$  有:

$$(1) |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$(2) |z| = |\overline{z}|, \quad z \overline{z} = |z|^2;$$

$$(3) |z| \leq |x| + |y|, \quad |x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|;$$

$$(4) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$$

$$(6) |z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||.$$

这里  $|z_1 - z_2|$  又表示点  $z_1$  与  $z_2$  之间的距离.

(1)、(2)、(3)显然成立, 利用运算定义和性质容易得到(4). 在 1.1.3 节定理 1.1 中我们还将利用复数的其它形式更简捷地证明它.

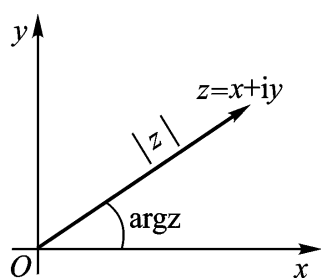


图 1.1

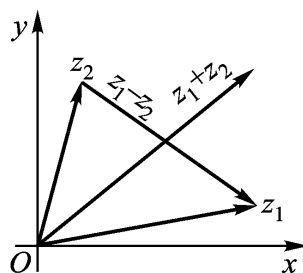


图 1.2

我们来证明不等式(5) .

$$\begin{aligned}
 \text{证 } |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
 &= z_1 \overline{z_1} + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) + z_2 \overline{z_2} \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) .
 \end{aligned}$$

但

$$\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| |z_2| ,$$

所以

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 .$$

即

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

对上式我们可以推广到有限个复数, 即

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| .$$

我们再来证明不等式(6) .

证 当  $|z_1| \geq |z_2|$  时,

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| ,$$

因而

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| .$$

当  $|z_1| < |z_2|$  时,

同理有

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| ,$$

所以

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| .$$

复数的幅角

由实轴的正向到向量  $z$  之间的夹角 称为复数  $z$  的幅角, 记作  $\operatorname{Arg} z$  (如图 1.1) .

显然  $\operatorname{Arg} z$  有无穷多个值, 其中每两个值相差  $2\pi$  的整数倍. 但  $\operatorname{Arg} z$  只

有一个值  $\theta_0$ , 满足条件  $-\pi < \theta_0$ , 称它为复数  $z$  的幅角的主值, 记作  $\arg z$ . 则

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, -\pi < \arg z \leq \pi),$$

$$\tan(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}$$

幅角主值  $\arg z$  由等式  $\tan(\arg z) = \frac{y}{x}$  右边的值,  $x$  和  $y$  的符号及  $-\pi < \arg z \leq \pi$  来确定.

当  $z = 0$  时, 我们说  $z$  的模为 0, 幅角不定.

例 1.3 求  $\operatorname{Arg}(2 - 2i)$  和  $\operatorname{Arg}(-3 + 4i)$ .

解  $\operatorname{Arg}(2 - 2i) = \arg(2 - 2i) + 2k$

$$= \arctan \frac{-2}{2} + 2k$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\operatorname{Arg}(-3 + 4i) = \arg(-3 + 4i) + 2k$$

$$= \arctan \frac{4}{-3} + 2k +$$

$$= (2k + 1)\pi - \arctan \frac{4}{3} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

### 1.1.3 复数四则运算的几何意义

由直角坐标系与极坐标系的关系:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

得到

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

这里  $\theta = \operatorname{Arg} z$ , 此式称为复数  $z$  的三角表达式.

例 1.4 求  $i, -2, 1 - 3i$  的三角表达式.

解 (a) 因为

$$|i| = 1, \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

(b) 因为

$$|-2| = 2, \operatorname{Arg}(-2) = \pi + 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$

(c) 因为

$$|1 - 3i| = 2,$$

$$\operatorname{Arg}(1 - 3i) = -\frac{\pi}{3} + 2k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以

$$1 - 3i = 2 \cos -\frac{\pi}{3} + i \sin -\frac{\pi}{3}.$$

复数的加法、减法运算的几何意义由向量的加法、减法的几何意义给出 (如图 1.2). 应用复数的三角表达式, 我们可以得到

若  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , 则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (1.1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad (1.2)$$

从而有

**定理 1.1** 两个复数乘积的模等于它们模的乘积; 两个复数乘积的幅角等于它们幅角的和.

定理的含义 (如图 1.3): 对任何两个非零复数  $z_1$ 、 $z_2$ , 下面两个等式同时成立.

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|;$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

上面关于幅角的等式应理解为集合的相等. 也就是说, 对于等式左端的任一值, 等式的右端必有一值和它相等, 反之亦然.

例 设  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$ . 那么

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k,$$

这里  $k$ ,  $k$  分别为  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

显然, 作为集合

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

**定理 1.2** 两个复数商的模等于它们模的商; 两个复数商的幅角等于被除数与除数的幅角差.

即  $z_1 \neq 0$ ,  $z_2 \neq 0$  时,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$$

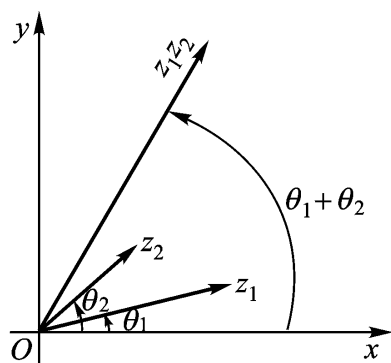


图 1.3

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 .$$

这里关于幅角的结论与定理 1.1 中的一样, 亦为集合意义下的相等.

另外, 由复数的三角表达式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

经欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ,$$

我们可以得到等式

$$z = re^{i\theta} ,$$

此式称为复数  $z$  的指数表达式.

如设  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  ( $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ) 那么,

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\theta_2}} &= \frac{1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \cos \theta_2 - i \sin \theta_2 \\ &= \cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2) = e^{i(-\theta_2)} \\ &= e^{-i\theta_2} . \end{aligned}$$

因此

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} ; \quad (1.3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} . \quad (1.4)$$

这便是定理 1.1 与 1.2 的结论.

**例 1.5** 设  $z_1 = 1 + 3i$ ,  $z_2 = -1 - i$ . 分别应用式 (1.1) 和式 (1.2), 式 (1.3) 和式 (1.4) 计算  $z_1 z_2$  和  $\frac{z_1}{z_2}$ .

**解** 因为  $|z_1| = 2$ ,  $\tan(\operatorname{Arg} z_1) = 3$ ,  $z_1$  在第 I 象限, 所以  $z_1$  的三角表达式为

$$z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} .$$

$z_1$  的指数表达式为

$$z_1 = 2e^{i\pi/3} .$$

因为  $|z_2| = \sqrt{2}$ ,  $\tan(\operatorname{Arg} z_2) = 1$ ,  $z_2$  在第 III 象限, 所以  $z_2$  的三角表达式为

$$z_2 = \sqrt{2} \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) .$$



$z_2$  的指数表达式为

$$z_2 = 2e^{-\frac{3}{4}i}.$$

由式(1.1)和式(1.2)可得:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right) \\ &= 2 \cdot 2 \cos - \frac{5}{12} + i \sin - \frac{5}{12} . \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4} + i \sin \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4} \\ &= 2 \cos \frac{13}{12} - 2 + i \sin \frac{13}{12} - 2 \\ &= 2 \cos - \frac{11}{12} + i \sin - \frac{11}{12} . \end{aligned}$$

由式(1.3)和式(1.4)可得

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 2 e^{i \left( \frac{\pi}{3} - \frac{3}{4} \right)} \\ &= 2 \cdot 2 e^{-\frac{5}{12}i} . \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{2} e^{i \left( \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4} \right)} \\ &= 2 e^{-\frac{11}{12}i} . \end{aligned}$$

根据复数三角表达式与指数表达式的关系

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= r(\cos \theta + i \sin \theta), \\ re^{i(\theta + 2k\pi)} &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)], \end{aligned}$$

显然

$$re^{i\theta} = re^{i\theta} \cdot e^{2k\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

从几何上来看(如图 1.4), 当  $\theta$  增加或减少  $2\pi$  时,  $z$  点沿圆周移动一圈回到出发点. 因此,  $z = re^{i\theta}$  与  $z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 表示的是同一个复数.

由图 1.4 我们还可以看到, 一个圆心在 origin, 半径为  $R$  的圆可表示为:  
 $|z| = R$ .

一个圆心在  $z_0$ , 半径为  $R$  的圆(如图 1.5)可以表示为:  $|z - z_0| = R$ .

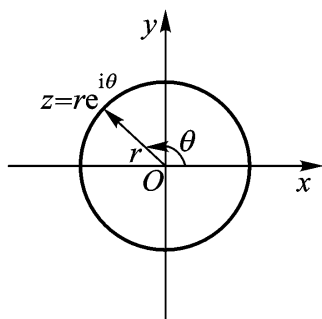


图 1.4

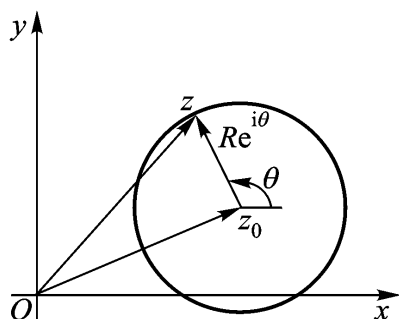


图 1.5

### 1.1.4 扩充复平面

#### 1. 复数的球面表示

取一个中心位于复平面原点处的球面, 球面与始于原点且垂直于复平面的射线相交于点  $N$ . 对复平面上任一点  $z$ , 过  $z$  和  $N$  作直线与球面相交于异于  $N$  的一点  $P$  (当点  $z$  位于圆周  $C$  所围区域内时,  $P$  在下半球面上). 反之, 对球面上任一点  $P$ , 过  $N$  和  $P$  的直线与复平面交于一点  $z$  (如图 1.6). 这就是说, 除去点  $N$  外球面上的点  $P$  与复平面上的点  $z$  为一一对应, 即复数可用球面上的点来表示.

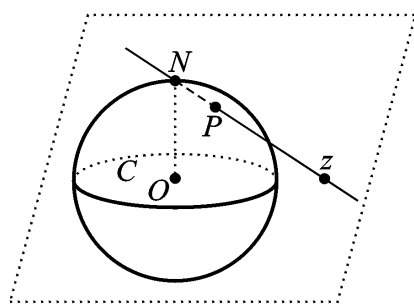


图 1.6

#### 2. 扩充复平面

对球面上的点  $N$ , 复平面上没有复数与之对应. 从图 1.6 可以看到, 当  $z$  无限远离原点时  $P$  无限逼近  $N$ . 我们规定, 无限远离原点的点称为“无穷远点”, 它与球面上的点  $N$  相对应.

不包含无穷远点在内的复平面仍称为复平面. 包含无穷远点在内的复平面称为扩充复平面. 为了使扩充复平面上的点与球面上的点一一对应, 规定“无穷远点”是唯一的. 本书中如无特别声明, 只考虑有限复数及复平面.

#### 3. 复数

扩充复平面上的无穷远点与复数中的  $\infty$  对应, 记作  $z = \infty$ . 复数  $z = \infty$  的实部、虚部、幅角均无意义, 它的模  $|z|$  规定为  $+\infty$ , 对于其它每一个复数  $z$  则有  $|z| < +\infty$ . 设  $z_1$  为不等于零的有限复数, 对于  $z = \infty$  的运算规定为:

$$\pm \infty = \pm \infty = \infty;$$

$$\cdot \infty = \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

$\pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}$  以及一均无意义.

## 1.2 复数的乘幂与方根

### 1.2.1 复数的乘幂

设  $n$  为正整数,  $z^n$  表示  $n$  个非零复数  $z$  的乘积, 按乘法法则  $z^{n+1} = z^n \cdot z$ , 可得

$$z^n = r^n e^{in}.$$

当  $n=0$  时, 我们约定  $z^0 = 1$ . 显然, 这时

$$z^n = r^n e^{in}$$

仍然成立.

当  $n$  为负整数时, 定义  $z^{-1} = \frac{1}{z}$ , 我们有

$$\begin{aligned} z^n &= (z^{-1})^{-n} = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n} e^{-in}} = \frac{1}{r^{-n}} e^{in} \\ &= r^n e^{in}. \end{aligned}$$

因此, 对任何整数  $n$ , 复数  $z$  的乘幂 有下列公式成立:

$$z^n = r^n e^{in}.$$

特别地, 当  $r=1$  时, 上述公式成为

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

即

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

此公式称为棣莫弗(De Moivre)公式.

### 1.2.2 复数的方根

我们称满足方程

$$w^n = z$$

(这里  $w \neq 0, n \geq 2$ ) 的复数  $w$  为该方程的  $n$  次方根, 记作  $\sqrt[n]{z}$ , 即  $w = \sqrt[n]{z}$ . 或者记作  $z^{\frac{1}{n}}$ , 此时  $w = z^{\frac{1}{n}}$ .

设  $z = re^{i\theta}$ ,  $w = \rho e^{i\phi}$ , 由方程  $w^n = z$  可得

$$(\rho e^{i\phi})^n = re^{i\theta}.$$

即

$$\rho^n e^{in\phi} = re^{i\theta}.$$

所以

$$\begin{aligned} z^n &= r, \\ n &= +2k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} z &= r^{\frac{1}{n}}, \\ &= \frac{+2k}{n} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} w &= r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{+2k}{n}}, \\ z^{\frac{1}{n}} &= r^{\frac{1}{n}} \cos \frac{+2k}{n} + i \sin \frac{+2k}{n} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

为方程  $w^n = z$  的全部的根, 当  $k$  取  $0, 1, 2, \dots, n-1$  时得到方程  $w^n = z$  的  $n$  个单根, 这  $n$  个单根在几何上表现为以原点为中心,  $r^{\frac{1}{n}}$  为半径的圆内接正  $n$  边形的  $n$  个顶点. 当  $k$  取其它整数值时, 得到的方程  $w^n = z$  的根必与这  $n$  个单根中的某个根重合.

方程  $w^n = 1$  ( $n=2, 3, \dots, z \neq 0$ ) 在复数范围内有  $n$  个单根

$$w = \cos \frac{2k}{n} + i \sin \frac{2k}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

从几何上来看, 若设

$$w_n = e^{i \frac{2}{n}},$$

方程  $w^n = 1$  的  $n$  个单根可记为

$$1, w_n, w_n^2, w_n^3, \dots, w_n^{n-1}.$$

它们是单位圆内接正  $n$  边形的  $n$  个顶点, 以  $n=3$  为例作图 1.7,  $n=6$  为例作图 1.8.

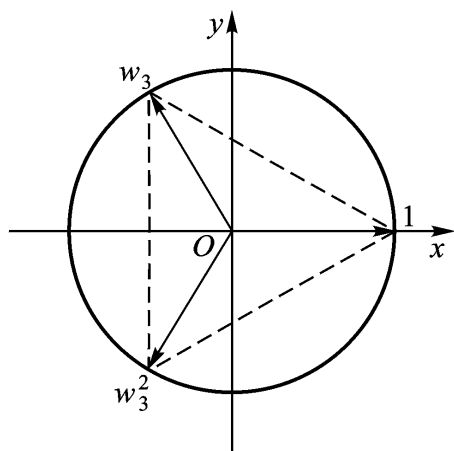


图 1.7

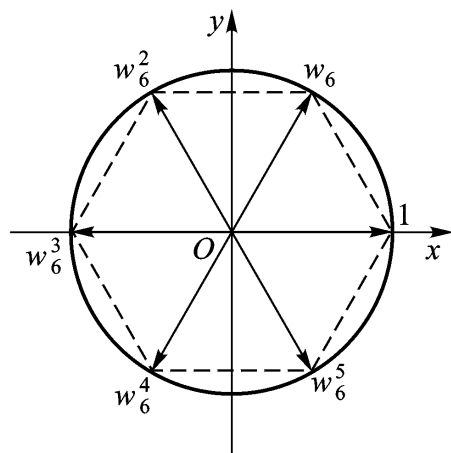


图 1.8

**例 1.6** 求  $-8i$  的三个三次方单根 .

**解** 因为

$$-8i = 8e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2k)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

所以它的三个三次方单根为

$$(-8i)^{\frac{1}{3}} = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k)} \quad (k = 0, 1, 2),$$

也就是

$$2 - i, \quad 2i, \quad -2 - i.$$

**例 1.7** 计算  $-1 - i$  .

**解** 因为

$$-1 - i = \sqrt{2} \cos \left(-\frac{3}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{3}{4}\right),$$

所以

$$-1 - i = \sqrt[4]{2} \cos \frac{-\frac{3}{4} + 2k}{2} + i \sin \frac{-\frac{3}{4} + 2k}{2} \quad (k = 0, 1).$$

即

$$\begin{aligned} w_2^0 &= \sqrt[4]{2} \cos \frac{3}{8} - i \sin \frac{3}{8}, \\ w_2^1 &= \sqrt[4]{2} \cos \frac{5}{8} + i \sin \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

## 1.3 平面点集

关于平面点集的基本概念在高等数学的下册已讲述过了 . 在此我们仅做回顾 .

### 1.3.1 区域

**邻域** 平面上以  $z_0$  为心, ( $\delta$  任意的正数) 为半径的圆:  $|z - z_0| < \delta$  内部的点的集合称为  $z_0$  的邻域或圆盘 . 而称由不等式  $0 < |z - z_0| < \delta$  所确定的点集为  $z_0$  的去心邻域 .

**内点** 设  $E$  为平面上的一个点集,  $z_0$  为  $E$  内的一点, 如果存在  $z_0$  的一个邻域, 而该邻域内所有的点都属于  $E$ , 则称  $z_0$  为  $E$  的内点 .

**开集** 如果点集  $E$  的每一个点都是内点, 则称  $E$  为开集 .

**边界点** 如果点  $z_0$  的任一邻域内既有属于  $E$  的点, 也有不属于  $E$  的点, 则称  $z_0$  为  $E$  的边界点 .

**边界** 集  $E$  的全部边界点所组成的点集, 称为集  $E$  的边界 .

**连通的** 设  $E$  是开集, 如果对于  $E$  内任何两点, 都可用折线连接起来, 且该折线上的点都属于  $E$ , 则称开集  $E$  是连通的.

**开区域** 连通的开集称为开区域或区域.

**闭区域** 开区域连同它的边界一起, 称为闭区域.

**有界集、无界集** 如果集  $E$  可以包含在 origin 的一个邻域内 (即存在一个正数  $M$ , 对任意的  $z \in E$ , 都有  $|z| < M$ ), 那么称集  $E$  为有界集. 否则称集  $E$  为无界集.

例如:

圆盘:  $|z - z_0| \leq r$  为有界闭区域.

圆环:  $r_1 < |z - z_0| < r_2$  为有界开区域.

上半平面:  $\operatorname{Im}(z) > 0$  是无界开区域.

角形域:  $0 < \arg z < \alpha$  是无界区域.

### 1.3.2 曲线

#### 1. 简单曲线、简单闭曲线.

**定义 1.1** 设  $x(t)$  及  $y(t)$  是闭区间  $[a, b]$  上连续的两个实函数, 则由方程

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad (a \leq t \leq b),$$

或由复数方程

$$z = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

(简记为  $z = z(t)$ )

所决定的点集  $C$  称为复平面 ( $z$  平面) 上的一条连续曲线. 在这个意义下,  $z(a)$  及  $z(b)$  分别称为曲线的起点和终点; 若任取  $t_1, t_2 \in [a, b]$ , 且  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1$  与  $t_2$  不同时取到端点时, 有  $z(t_1) \neq z(t_2)$ , 则称该曲线为简单曲线 (或无重点曲线);  $z(a) = z(b)$  的简单曲线称为简单闭曲线.

例如: 没有重点的线段、圆弧、抛物线的弧段等都是简单曲线. 椭圆周是简单闭曲线, 双纽线不是简单闭曲线 (有重点的曲线).

#### 2. 光滑曲线、分段光滑曲线.

**定义 1.2** 设曲线  $C$  的方程为

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

又在  $a < t < b$  上,  $x(t), y(t)$  连续且不全为零, 则称曲线  $C$  为光滑曲线. 由几段光滑曲线衔接而成的曲线称为分段光滑曲线.

例如: 摆线  $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$  ( $a > 0$ ) 的一拱为一条光滑曲线. 星形线  $x(t) = a \cos^3 t, y(t) = a \sin^3 t$  ( $a > 0$ ) 为分段光滑曲线.

### 1.3.3 单连通域和多连通域

**定义 1.3** 设  $D$  是平面上一区域, 如果在  $D$  内任作一条简单闭曲线, 而曲线所围的部分总属于  $D$ , 则称区域  $D$  为单连通区域. 不是单连通的区域称为多连通区域或复连通区域.

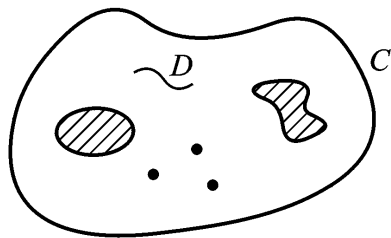


图 1.9

例如: 由单连通域, 多连通域的定义可以判断出, 区域:  $\{z \mid |z| < 1\}$  和区域:  $\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$  均为单连通区域; 区域  $\{z \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  为多连通域. 复杂一点的多连通区域如图 1.9 所示, 它可以是由曲线  $C$  所围成的区域中挖了几个洞, 去除了几个点和一条线段而形成的区域.

## 1.4 复变函数

### 1.4.1 复变函数的概念

**定义 1.4** 设  $D$  是一个给定的复数集, 如果有一法则  $f$ , 对于每一个数  $z \in D$ , 总有确定的复数  $w$  和它对应. 则称  $f$  是定义在  $D$  上的复变数函数 (简称为复变函数), 记作  $w = f(z)$ . 数集  $D$  叫做这个函数的定义域.

如果给定一个函数  $w = f(z)$  却没有指明函数的定义域, 我们约定该函数的定义域为复变数  $z$  所能取的使  $w = f(z)$  有意义的值的集合.

当取  $z_0 \in D$  时, 通过  $w = f(z)$  与之对应的值  $w_0$  称为复变函数  $w = f(z)$  在  $z_0$  处的函数值. 如果任取  $z \in D$ , 通过  $w = f(z)$  有唯一的  $w$  值与之对应, 这种函数称为单值函数. 否则称为多值函数. 在以后的讨论中, 如无特别声明, 所讨论的函数均指单值函数.

例如: 函数

$w = z^{\frac{1}{2}}$  是定义在整个复平面上的多值函数.

$w = \arg z$  是定义在除原点外整个复平面上的单值函数.

$w = \frac{1}{z}$ , 其中  $\operatorname{Im}(z) > 0$  是定义在上半平面的单值函数.

设  $w = f(z)$  是定义域为  $D$  的函数, 其中

$$z = x + iy, \quad w = u + iv,$$

则  $u, v$  随  $x, y$  而确定. 因而  $w = f(z)$  又常写成

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中  $u(x, y)$  及  $v(x, y)$  是二元实函数.

例 设  $f(z) = z^2$ , 那么

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

因此

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

例 若

$$u(x, y) = y \int_0^+ e^{-xt} dt, \quad v(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

则

$$f(z) = y \int_0^+ e^{-xt} dt + i \sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

这个函数的定义域为:  $x > 0$  且  $-1 < y < 1$ .

若  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ) 为复常数,  $n$  为非负整数, 函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

称为  $n$  次多项式函数, 它的定义域是整个复平面. 若  $Q(z)$  也为多项式函数,  $P(z) \neq Q(z)$  称为 有理函数, 它的定义域为除去  $Q(z) = 0$  的点  $z$  以外的所有点的集合.

### 1.4.2 复变函数的几何解释——映照

在高等数学中, 我们常用几何图形来表示函数. 这给研究函数的性质提供了许多直观的帮助. 现在我们取两张复平面, 分别称为  $w$  平面和  $z$  平面 (有时为了方便, 将两张平面重叠在一起), 如果在  $z$  平面上函数  $w = f(z)$  的定义域  $D$  内取一点  $z_0$ , 通过  $w = f(z)$  在  $w$  平面上有相应的点  $w_0$  与之对应, 当  $z$  取遍点集  $D$  时, 在  $w$  平面上就有相应的点集  $G$  与之对应. 因此, 从几何上来讲, 复变函数  $w = f(z)$  代表的是  $z$  平面上点集  $D$  到  $w$  平面上的点集  $G$  之间的一种 变换, 亦即一种 映照.

例如: 如图 1.10 所示函数  $w = z^2$  将  $z$  平面上的扇形区域

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < r < 2.$$

映照成  $w$  平面上的扇形区域

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r < 4.$$

如果我们将  $z$  平面与  $w$  平面重叠起来, 那么, 我们可以认为映照  $w = z + 1$ , 是将  $z$  平面上每一个点都向右移了一个单位; 映照  $w = iz$  是将  $z$  平面上作为向量的每一个点按逆时针旋转了  $\frac{\pi}{2}$  角度; 映照  $w = \bar{z}$  是将复平面上每一



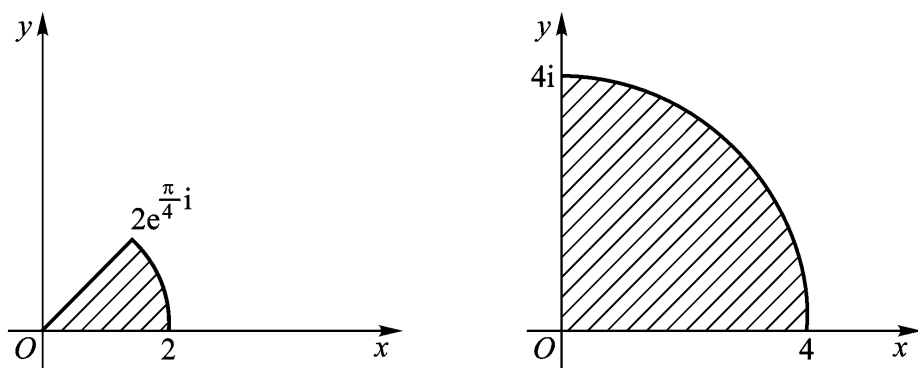


图 1.10

个点对照到它关于实轴的对称位置.

### 例 1.8 试想映照

$$w = z + \frac{1}{z}$$

将  $z$  平面上的圆周  $|z| = R$  映照成  $w$  平面上的什么图形.

解 若设  $z = Re^{i\theta}$ ,  $w = u + iv$ , 则

$$\begin{aligned} w &= Re^{i\theta} + \frac{1}{Re^{i\theta}} \\ &= R(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{R}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(R + \frac{1}{R}\right) \cos \theta + i \left(R - \frac{1}{R}\right) \sin \theta, \end{aligned}$$

因而

$$u = a \cos \theta, \quad v = b \sin \theta \quad a = R + \frac{1}{R}, \quad b = R - \frac{1}{R}.$$

显然, 当  $R > 1$  时

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1.$$

这就是说映照  $w = z + \frac{1}{z}$  将  $z$  平面上的圆周  $|z| = R$  ( $R > 1$ ), 映照成  $w$  平面上长轴为  $2a$ , 短轴为  $2b$  的椭圆线.

当  $R = 1$  时,

$$w = 2 \cos \theta.$$

这说明映照  $w = z + \frac{1}{z}$  将  $z$  平面上的单位圆映射成  $w$  平面上实轴的一段  $-2 \leq u \leq 2$ .

以上讨论如图 1.11 所示.

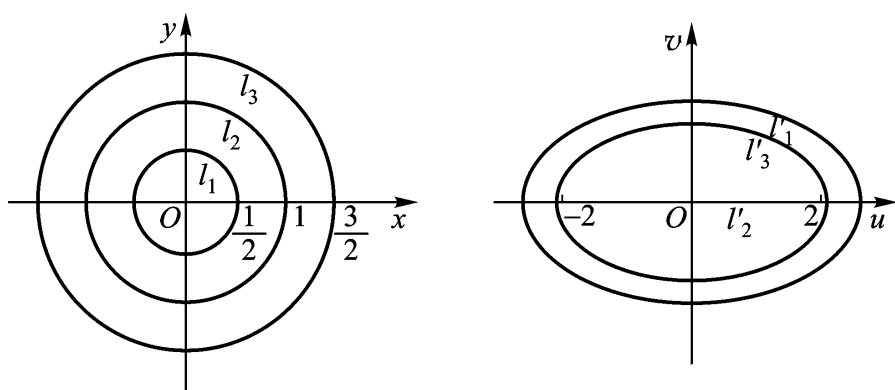


图 1.11

### 1.4.3 反函数与复合函数

#### 1. 反函数

**定义 1.5** 设  $w = f(z)$  定义在  $z$  平面的点集  $D$  上, 函数值集合  $G$  在  $w$  平面上. 则对任意  $z \in D$ , 在  $G$  内有确定的  $w$  与之对应. 反过来, 由  $G$  中任取一点  $w$ , 通过法则  $f(z) = w$ , 总有确定的  $z \in D$  与之对应. 由函数的定义知, 此时  $z$  与  $w$  之间具有了函数的对应关系, 记作  $z = f^{-1}(w)$ , 我们称新函数  $z = f^{-1}(w)$  为函数  $w = f(z)$  的反函数.

例如:  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  的反函数为  $z = -\frac{dw - b}{cw - a}$ , 其中  $a, b, c, d$  为复常数.

在下一节中我们还将看到类似于高等数学中的指数函数与对数函数互为反函数, 三角函数与它的反三角函数互为反函数.

#### 2. 复合函数

**定义 1.6** 设函数  $w = f(h)$  的定义域为  $D_1$ , 函数  $h = \varphi(z)$  的定义域为  $D_2$ , 值域  $G \subset D_1$ . 那么对任一  $z \in D_2$ , 通过  $h = \varphi(z)$  有确定的  $h \in G \subset D_1$  与之对应, 从而通过  $w = f(h)$  有确定的  $w$  值与  $z$  对应. 由函数的定义知, 此时  $w$  与  $z$  之间具有了函数的对应关系, 记作  $w = f[\varphi(z)]$ . 这个函数称为  $w = f(h)$  与  $h = \varphi(z)$  的复合函数.

例如: 函数

$$w = \frac{1}{h_1} \quad (h_1 \neq 0), \quad h_1 = h_2 + \frac{1}{z}, \quad h_2 = z,$$

( $\frac{1}{h_1}, h_2$  均为复常数) 的复合函数为

$$w = \frac{1}{z + \frac{1}{h_2}}.$$

## 1.5 初等函数

这一节我们来讨论复数域上初等函数的定义和性质.

### 1.5.1 指数函数

**定义 1.7** 我们将复变数  $z = x + iy$  的指数函数定义为:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

对于复指数函数  $e^z$ , 它具有如下性质:

(1) 当  $z = x$  时, 这个定义与实数集上定义的指数函数一致, 但当  $z = x = \frac{1}{n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) 时, 对 1.2 节  $e^{\frac{1}{n}}$  为  $e$  的  $n$  次方根集合的约定是个例外.

(2)  $|e^z| = e^x$ ,  $\text{Arg}(e^z) = y + 2k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

(3)  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ .

事实上, 设  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ , 那么

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1}) (e^{x_2} e^{iy_2}) = (e^{x_1} e^{x_2}) (e^{iy_1} e^{iy_2}),$$

因为  $x_1, x_2$  均为实数, 由 1.1 节

$$e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{i(y_1 + y_2)},$$

得

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)}.$$

又因为  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ , 故上式的右边为  $e^{z_1 + z_2}$ .

(4)  $e^{z+2ki} = e^z$ , 这里  $k$  为任一整数. 这个等式说明指数函数  $e^z$  是以  $2ki$  为周期的周期函数.

**例 1.9** 证明

$$(a) (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \text{ 为正整数}); \quad (b) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}.$$

证 (a) 因为  $(e^z)^n = \underbrace{e^z e^z \dots e^z}_n$ , 从而

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

(b) 因为  $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ , 从而

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z},$$

故

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = e^{z_1 - z_2}.$$

### 1.5.2 对数函数

**定义 1.8** 我们定义对数函数是指数函数的反函数, 即若

$$z = e^w \quad (z \neq 0, \quad w \in \mathbb{C}),$$

则称  $w$  是  $z$  的对数函数, 记为  $w = \text{Ln } z$ .

现在我们来推导  $w = \text{Ln } z$  的具体表达式.

设  $w = u + iv$ ,  $z = re^{i\theta}$ . 由  $e^w = z$  可得

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

因而

$$e^u = r, \quad v = \theta,$$

故

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \ln r + i\theta \\ &= \ln |z| + i \text{Arg } z. \end{aligned}$$

即

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

这是一个多值函数, 每给一个  $z$  有多个  $\text{Ln } z$  的值与之对应. 若令  $k=0$ , 则上式中的多值函数便成为了单值函数, 我们称这个单值函数为多值函数  $\text{Ln } z$  的主值, 记作  $\ln z$ . 即

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z;$$

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

对数函数  $\text{Ln } z$  具有如下性质:

(1) 当  $z = x > 0$  时,  $\ln z = \ln x$ ;

(2) 当  $z = x < 0$  时,  $\text{Ln } x = \ln |x| + i(2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ;

(3)  $e^{\text{Ln } z} = z$ ;  $\text{Ln } e^z = z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ;

(4)  $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2$ ;  $\text{Ln } \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2$ .

关于性质(3), 由于

$$e^{\text{Ln } z} = e^{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)} = |z| e^{i \arg z} = z \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\text{Ln } e^z = \ln |e^z| + i \arg e^z + 2k\pi i = z + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

结论显然成立.

对性质(4), 我们现在来证明

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2.$$

证 因为

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \ln(|z_1 z_2|) + i \text{Arg}(z_1 z_2),$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

而  $\ln(|z_1| |z_2|) = \ln|z_1| + \ln|z_2|$ , 因此

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

由以上证明过程可知, 性质(4)应为集合意义下的等式.

其他各性质读者可自行证之.

**例 1.10** 求  $\ln(-1)$ .

**解** 因为数  $-1$  的模为  $1$ , 辐角的主值为  $\pi$ , 所以

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi.$$

**例 1.11** 计算  $\ln i$  和  $\operatorname{Ln} i$ .

**解** 因为数  $i$  的模为  $1$ , 辐角的主值为  $\frac{\pi}{2}$ , 所以

$$\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{Ln} i = i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**例 1.12** 计算  $\ln(-3-4i)$  和  $\operatorname{Ln}(-3-4i)$ .

**解** 因为数  $-3-4i$  的模为  $5$ , 辐角的主值等于  $\arctan \frac{4}{3} - \pi$ , 所以

$$\ln(-3-4i) = \ln 5 + i(\arctan \frac{4}{3} - \pi).$$

$$\operatorname{Ln}(-3-4i) = \ln 5 + i(\arctan \frac{4}{3} - \pi) + 2k\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**例 1.13** 已知  $e^z = -1$ , 求  $z$ .

**解**  $z = \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

### 1.5.3 幂函数

**定义 1.9** 设  $a$  为复常数,  $z$  为除零以外的复变数, 我们定义一般幂函数为

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

此定义是实数域中等式  $x^\mu = e^{\mu \ln x}$  ( $x > 0$ ,  $\mu \in \mathbf{R}$ ) 在复数域中的推广.

关于幂函数  $z^a$  的性质, 现就  $a$  的如下三种特殊情形来讨论.

1° 当  $a$  是任一整数时,  $z^a$  是单值函数. 当  $a$  是正整数时, 补充定义  $0^0 = 1$ .

2° 当  $a$  是有理数  $\frac{q}{p}$  (既约分数) 时, 因

$$z^{\frac{q}{p}} = e^{\frac{q}{p} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{q}{p}(\ln|z| + i\arg z)} = e^{\frac{q}{p} \ln|z|} e^{i\frac{q}{p} \arg z},$$

故此时  $z^{\frac{q}{p}}$  能取到  $p$  个不同的值, 即当  $k=0, 1, 2, \dots, p-1$  时所对应的  $z^{\frac{q}{p}}$  值.

3° 当  $a$  是无理数或复数时, 由于

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a(\ln|z| + i\arg z)} = e^{a \ln|z|} e^{ia \arg z} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

故这时  $z^a$  有无限多个值.

例如:

$$\begin{aligned}
 z^6 &= e^{6 \ln |z| + i 6 \arg z}; \\
 z^{\frac{1}{3}} &= e^{\frac{1}{3} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{3}(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)} \\
 &= e^{\frac{1}{3}(\ln |z| + i \arg z)} e^{\frac{2}{3}k\pi i} \quad (k=0, 1, 2); \\
 z^3 &= e^{3 \operatorname{Ln} z} = e^{3(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)} \\
 &= e^{3(\ln |z| + i \arg z)} e^{2 \cdot 3k\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \\
 z^i &= e^{i \operatorname{Ln} z} = e^{i(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)} \\
 &= e^{-\arg z + i \ln |z|} e^{-2k\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

**例 1.14** 求  $(-1)^2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (-1)^2 &= e^{2 \operatorname{Ln}(-1)} = e^{2(2k+1)\pi i} \\
 &= e^{2\pi i} e^{2 \cdot 2k\pi i} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

**例 1.15** 求  $i^i$ .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad i^i &= e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi)} \\
 &= e^{-(2k + \frac{1}{2})\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}$$

#### 1.5.4 三角函数与反三角函数

##### 1. 正弦函数和余弦函数

从等式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

可以得到

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

其中  $x$  为实数. 在此我们自然地将其推广到复数域上.

**定义 1.10** 设  $z$  为任一复变数, 我们称以下两个函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

分别为正弦函数和余弦函数.

由上面的定义, 我们可以容易地推出正弦函数和余弦函数的下述性质:

- (1)  $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z;$
- (2)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$
- (3)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$
- (4)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$
- (5)  $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z;$

$$(6) \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z;$$

(7) 设  $z = x + iy$ , 那么

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{e^{-y}}{2i} - (\cos x - i \sin x) \frac{e^y}{2i} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x, \end{aligned}$$

所以(7)中第一个等式成立, 同理可得第二个等式亦成立.

$$(8) \sin(iy) = i \operatorname{sh} y, \quad \cos(iy) = \operatorname{ch} y;$$

显然, 在性质(7)中令  $z = 0 + iy$ , 便可得性质(8)

$$(9) |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y;$$

这两个等式可由性质(7)、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  得到. 据这两个等式我们可明显看出  $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$  未必成立.

$$(10) \sin z = 0 \text{ 当且仅当 } z = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$\cos z = 0 \text{ 当且仅当 } z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

让我们来证明性质(10)中第一个等式, 第二个等式可类似证之.

证 当  $z = k$  时,

$$\sin z = \frac{e^{ki} - e^{-ki}}{2i} = \frac{\cos k - \cos(-k)}{2i} = 0.$$

当  $\sin z = 0$  时, 有

$$\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = 0$$

因此

$$\sin x = 0 \text{ 且 } \operatorname{sh} y = 0,$$

即

$$x = k, \quad y = 0;$$

所以

$$z = k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

## 2. 其它三角函数

其它的四个三角函数, 我们可以通过  $\sin z$  和  $\cos z$  来定义如下:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}; \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

关于这四个函数的性质, 如

$$\tan(z + \pi) = \tan z$$

等,读者可仿照正弦函数、余弦函数性质的研究方法探讨之.

### 3. 反三角函数

复变数  $z$  的反三角函数是  $z = \sin w$ ;  $z = \cos w$ ;  $z = \tan w$  的反函数,分别记为:

$$w = \operatorname{Arcsin} z; \quad w = \operatorname{Arccos} z; \quad w = \operatorname{Arctan} z.$$

由反三角函数与直接函数的关系可得:

$$(1) \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2});$$

$$(2) \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$(3) \operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

现以(1)式为例推导之.

因为

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

所以

$$e^{2iw} - 2zi e^{iw} - 1 = 0,$$

从而

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

即

$$w = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

这里  $\sqrt{1 - z^2}$  为双值函数,  $w = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$  为多值函数.

#### 1.5.5 双曲函数与反双曲函数

将实变数双曲函数的定义推广到复变数上来,复变数的双曲正弦函数,双曲余弦函数、双曲正切函数的定义如下:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

双曲正弦函数,双曲余弦函数具有下述性质:

$$(1) \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z;$$

$$(2) \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z \text{ 是以 } 2i \text{ 为周期的周期函数};$$

$$(3) \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$$

$$(4) \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$

$$(5) \operatorname{sh}(iz) = i \sin z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z;$$



$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z.$$

双曲函数的反函数分别记为:

$$w = \operatorname{Arcsh} z; \quad w = \operatorname{Arcch} z; \quad w = \operatorname{Arcth} z.$$

仿照反三角函数表达式的推导方法有:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$$

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}.$$

## 第 1 章习题

1.1.1 证明:

$$(a) (3+i)(3-i) \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i = 2+i;$$

$$(b) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5};$$

$$(c) \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z); \quad (d) \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z).$$

1.1.2 应用复数乘法的结合律、交换律证明.

$$(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4).$$

1.1.3 证明: 若  $z_1 z_2 z_3 = 0$ , 那么  $z_1, z_2, z_3$  中至少有一个为零.

1.1.4 证明:

$$(a) \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2} \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0);$$

$$(b) \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \frac{z_1}{z_3} \cdot \frac{z_2}{z_4} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0).$$

1.1.5 证明:  $(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^{n-k} z_2^k$ , 其中  $z_1, z_2$  为任意的复数,  $n$  为正整数.

1.1.6 证明:  $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ ;  $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2} \quad (z_2 \neq 0).$

1.1.7 证明: (a)  $\overline{z+3i} = \overline{z} - 3i$ ; (b)  $\overline{iz} = -i\overline{z}$ ; (c)  $\overline{(2+i)^2} = 3-4i$ ;  
(d)  $|(2\overline{z}+5)(2-i)| = 3|2z+5|.$

1.1.8 应用数学归纳法证明: 当  $n=2, 3, \dots$  时,

$$(a) \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n};$$

$$(b) \overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \dots \overline{z_n}.$$

1.1.9 证明:  $2|z| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$

1.1.10 证明: 当  $z_2, z_3$  为非零复数时,

$$(a) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; \quad (b) \left| \frac{z_1}{z_2 z_3} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2| |z_3|}.$$

1.1.11 证明:当  $|z_3| = |z_4|$  时,下面不等式成立.

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

1.1.12 证明:当  $|z| < 1$  时  $|\operatorname{Im}(1 - \bar{z} + z^2)| < 3$ .

1.1.13 证明:若  $z$  在圆周  $|z| = 2$  上,那么

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| = \frac{1}{3}.$$

1.1.14 求在下面各种情况下  $z$  的点集.

$$(a) |2z - i| = 4; \quad (b) |z + i| = 3;$$

$$(c) \operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2.$$

1.1.15 证明:以  $z_0$  为心,  $R$  为半径的圆的方程  $|z - z_0| = R$  可以写成:

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z \bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

1.1.16 证明:双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  可以写成  $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ .

1.1.17 依据  $|z_1 - z_2|$  代表的是  $z_1$  与  $z_2$  两点间距离,说明下面方程的几何意义.

$$(a) |z - 4i| + |z + 4i| = 10; \quad (b) |z - 1| = |z + i|.$$

1.1.18 就以下各种情况,分别求  $\arg z$ .

$$(a) z = \frac{-2}{1 + 3i}; \quad (b) z = \frac{i}{-2 - 2i}; \quad (c) z = (3 - i)^6.$$

1.1.19 利用复数的三角表达式或指数表达式证明:

$$(a) (-1 + i)^7 = -8(1 + i);$$

$$(b) (1 + 3i)^{-10} = 2^{-11}(-1 + 3i).$$

1.1.20 证明

$$(a) |e^i| = 1; \quad (b) \overline{e^i} = e^{-i};$$

$$(c) e^i e^{i2} \dots e^{in} = e^{i(1+2+\dots+n)} \quad (n=2, 3, \dots).$$

1.1.21 当  $z_1 \neq 0$  时,求  $\operatorname{Arg} z$ .

$$(a) z = z_1^n \quad (n=1, 2, \dots); \quad (b) z = z_1^{-1}.$$

1.1.22 证明:若  $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(z_2) > 0$ , 那么

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

1.1.23 若  $z_1 z_2 \neq 0$ , 证明:  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2|$  当且仅当  $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 这里  $\theta_1 = \operatorname{Arg} z_1$ ,  $\theta_2 = \operatorname{Arg} z_2$ .

1.2.1 求下面各题的所有的根、单根,并说明几何意义.

$$(a) (2i)^{\frac{1}{2}}; \quad (b) (1 - 3i)^{\frac{1}{2}}; \quad (c) (-1)^{\frac{1}{3}};$$

$$(d) (-16)^{\frac{1}{4}}; \quad (e) 8^{\frac{1}{6}}; \quad (f) (-4-2+4-2i)^{\frac{1}{3}}.$$

1.2.2 (a) 令  $a$  为实数, 证明:  $a+i$  的二次方根为  $\pm A e^{i\theta/2}$ , 这里  $A = \sqrt{a^2+1}$  且  $\theta = \arg(a+i)$ .

(b) 由(a)及

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos \theta}{2}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos \theta}{2}.$$

证明:  $\pm A e^{i\theta/2} = \pm \frac{1}{2} (A + a + i(A - a))$ .

1.2.3 (a) 证明: 二次方程

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

当  $a, b, c$  为复常数时的求根公式是

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

这里  $b^2 - 4ac \neq 0$ .

(b) 试用(a)的结果求下面方程的根.

$$z^2 + 2z + (1-i) = 0.$$

1.2.4 设  $z$  为非零复数,  $n$  为负整数,  $m = -n$ , 利用  $z = re^{i\theta}$ , 证明  $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ .

1.2.5 建立恒等式

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1),$$

并导出

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin(\frac{\theta}{2})} \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

提示: 关于第一个等式可记  $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ , 并考虑  $S - zS$ . 关于第二个等式可在第一个等式中令  $z = e^{i\theta}$ .

1.3.1 指出下面点集中哪些是区域, 哪些是闭区域, 哪些是有界区域.

$$(a) |z - 2 + i| = 1; \quad (b) |2z + 3| > 4;$$

$$(c) \operatorname{Im}(z) > 1; \quad (d) \operatorname{Im}(z) = 1;$$

$$(e) |z - 4| = |z|;$$

$$(f) 2k < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{4} + 2k \quad (z \neq 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(g) 0 < |z - z_0| < r, \text{ 这里 } z_0 \text{ 为固定点, } r \text{ 为正数}.$$

1.3.2 画出以下各种情形闭区域的草图.

$$(a) -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \quad (z \neq 0); \quad (b) |\operatorname{Re}(z)| < |z|;$$

$$(c) \operatorname{Re}(1/z) = \frac{1}{2}; \quad (d) \operatorname{Re}(z^2) > 0.$$

1.3.3 设  $S$  为由  $|z| < 1$  和  $|z - 2| < 1$  两点集构成的开集, 请说明为什么  $S$  不是连通的.

1.4.1 求下列函数的定义域.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}; \quad (b) f(z) = \operatorname{Arg} \frac{1}{z};$$

$$(c) f(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}; \quad (d) f(z) = \frac{z}{z + \bar{z}}.$$

1.4.2 求函数

$$g(z) = \frac{y}{x} + \frac{i}{1 - y} \quad (z = x + iy)$$

的定义域. 并证明当  $x > 0, |y| < 1$  时,  $g(z) = f(z)$ . 这里

$$f(z) = y \int_0^+ e^{-xt} dt + i \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

1.4.3 写出函数  $f(z) = z^3 + z + 1$  的  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  形式.

1.4.4 设  $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x + 2xy)$ , 写出  $f(z)$  关于  $z$  的表达式.

1.5.1 证明下面等式成立.

$$(a) e^{\frac{2+i}{4}} = \frac{e}{2}(1+i); \quad (b) e^{z+i} = -e^z.$$

1.5.2 求  $z$  的值

$$(a) e^z = -2; \quad (b) e^z = 1 + 3i; \quad (c) e^{2z-1} = 1.$$

1.5.3 证明:  $|e^{z^2}| = e^{|z|^2}$ .

1.5.4 证明:  $|e^{-2z}| < 1$  当且仅当  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

1.5.5 证明: (a)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ ;

$$(b) e^{i\bar{z}} = \overline{e^{iz}} \text{ 当且仅当 } z = k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

1.5.6 (a) 若  $e^z$  为纯虚数,  $z$  有什么限制?

$$(b) \text{证明: 若 } e^z \text{ 为实数, 则 } \operatorname{Im}(z) = k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

1.5.7 证明:

$$(a) \ln(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}i;$$

$$(b) \operatorname{Ln}(-1 + 3i) = \ln 2 + 2\left(k + \frac{1}{3}\right)i \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

1.5.8 证明:

$$(a) \text{若 } \ln z = \ln r + i\theta \quad r > 0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}, \text{ 那么 } \ln i^2 = 2\ln i.$$

$$(b) \text{若 } \ln z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}), \text{ 那么 } \ln i^2 = 2\ln i.$$

1.5.9 证明:

$$(a) \operatorname{Ln}(i^{\frac{1}{2}}) = (k + \frac{1}{4})i = \frac{1}{2}\operatorname{Ln} i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(b) \operatorname{Ln} i^2 = 2\operatorname{Ln} i.$$

1.5.10 求方程  $\operatorname{Ln} z = \frac{1}{2}i$  的根.

1.5.11 证明:若  $\operatorname{Re}(z_1) > 0, \operatorname{Re}(z_2) > 0$ , 那么

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2.$$

1.5.12 证明:对任何非零复数  $z_1$  和  $z_2$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1).$$

1.5.13 应用  $\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$  证明:

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

1.5.14 证明:当  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时,

$$(a) (1+i)^i = e^{(-\frac{1}{4} + 2n\pi i)} e^{\frac{i}{2}\ln 2}; \quad (b) (-1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i}.$$

1.5.15 求值: (a)  $(1-i)^{4i}$ ; (b)  $\frac{e}{2}(-1-3i)^{3i}$ .

1.5.16 由  $z = e^{\operatorname{Ln} z}$  证明:  $(-1+3i)^{3/2} = \pm 2\sqrt{2}$ .

1.5.17 证明:若  $z \neq 0$ ,  $\ln z$  为实数, 那么  $|z| = e^{\ln|z|} = |z|$ .

1.5.18 令  $c, d$  和  $z (z \neq 0)$  为复数, 若所有的幂均取主值, 证明

$$(a) 1/z^c = z^{-c}; \quad (b) z^c z^d = z^{c+d};$$

1.5.19 证明:  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ .

1.5.20 证明:

$$(a) \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

$$(b) \sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$(c) \sin z + \frac{1}{2} = \cos z;$$

$$(d) \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y;$$

$$(e) 1 + \tan^2 z = \sec^2 z;$$

$$(f) 2\sin(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1;$$

$$(g) 2\cos(z_1 + z_2)\sin(z_1 - z_2) = \sin 2z_1 - \sin 2z_2.$$

1.5.21 证明:  $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ , 并进而推出  $|\sin z| \geq |\sin x|$ .

1.5.22 证明:  $|\operatorname{sh} y| \geq |\sin z| \operatorname{ch} y$ ;  $|\operatorname{sh} y| \geq |\cos z| \operatorname{ch} y$ .

1.5.23 证明:  $\cos z = 0$  当且仅当  $z = k + \frac{1}{2}\pi$ , 其中  $k$  为整数.

1.5.24 根据复数相等的概念解方程

(a)  $\sin z = \operatorname{ch} 4$ ; (b)  $\sin z = 2$ ; (c)  $\cos z = 2$ .

1.5.25 证明:  $\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$ ;  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ .

1.5.26 证明:  $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$ .

1.5.27 证明:  $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$ ;

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.$$

1.5.28 证明:  $\operatorname{sh}(z + i) = -\operatorname{sh} z$ ;  $\operatorname{th}(z + i) = \operatorname{th} z$ .

1.5.29 推导公式  $\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$ .

1.5.30 计算:

(a)  $\operatorname{Arctan}(2i)$ ; (b)  $\operatorname{Arctan}(1+i)$ ;

(c)  $\operatorname{Arcch}(-1)$ ; (d)  $\operatorname{Arcth} 0$ .

## 第 2 章 导 数

在这一章里,我们首先讨论复变函数的极限、连续、导数.关于极限和连续的有关讨论转化为两个二元实变函数组的极限与连续性的讨论,在函数可导性方面强调仅有两个二元实变函数的可微性是不充分的,还需要柯西—黎曼方程成立.接着,我们定义了复变函数理论中起着重要作用的解析函数,它是复变函数论所特有的内容,在理论上和实际中有着广泛的应用.最后,我们对解析函数与调和函数的关系加以讨论.

### 2.1 复变函数的极限

#### 2.1.1 复变函数极限的概念

由高等数学中实变函数极限的概念我们可以设想,如果复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的某去心邻域内有定义,不论  $z$  以何种方式无限逼近于  $z_0$  时,对应的函数值  $f(z)$  都无限接近于某一个确定的常数  $A$ ,那么我们就可以称  $A$  为  $f(z)$  在  $z$  趋于  $z_0$  过程中的极限.函数  $f(z)$  极限定义的“ $\epsilon - \delta$ ”语言表述如下:

**定义 2.1** 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  的某去心邻域内有定义,若对任意给定的正数  $\epsilon$  (不论它多么小),总存在正数  $\delta$  ( $\delta$  依赖于  $\epsilon$ ),使得适合不等式  $0 < |z - z_0| < \delta$  的一切  $z$ ,对应的函数值  $f(z)$  都满足不等式

$$|f(z) - A| < \epsilon,$$

那么,常数  $A$  就叫做函数  $f(z)$  当  $z \rightarrow z_0$  时的极限,记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad \text{或} \quad f(z) \rightarrow A \quad (\text{当 } z \rightarrow z_0).$$

极限的几何解释如图 2.1,当变量  $z$  落在左图圆盘内时,函数  $f(z)$  的值便落入右图的圆盘内.

**例 2.1** 证明 若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |A|.$$

证 因为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 所以

对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在正数  $\delta$  ( $\delta$  依赖于  $\epsilon$ ), 当  $z$  满足  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 不等式

$$|f(z) - A| < \epsilon$$

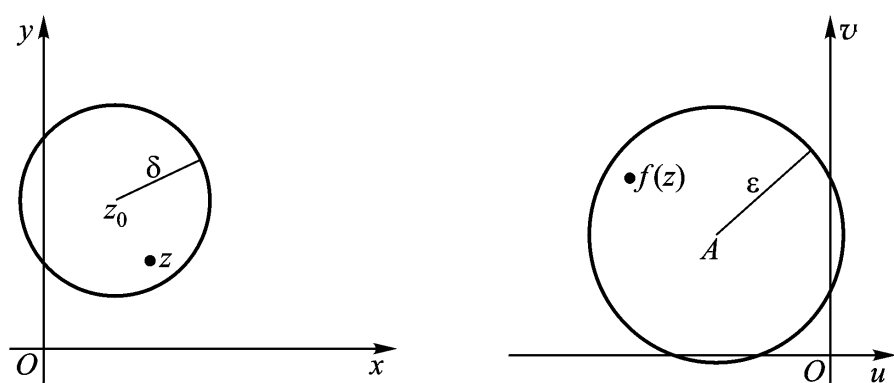


图 2.1

成立. 又因为

$$\left| |f(z)| - |A| \right| \leq |f(z) - A|,$$

故由极限的定义知:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |A|.$$

**例 2.2** 证明函数  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  在  $z = 0$  时极限不存在.

证 当  $z$  沿实轴从 0 的右方趋向于 0 时,  $e^{\frac{1}{z}}$  趋向了  $+\infty$ . 当  $z$  沿实轴从 0 的左方趋于 0 时,  $e^{\frac{1}{z}}$  趋向了 0. 也就是说  $z$  以不同的方式趋于原点时,  $f(z)$  的极限值有时存在, 有时不存在. 由复变函数极限定义即得结论.

### 2.1.2 复变函数极限定理

我们可以把一个复变量函数用两个二元实函数来表示, 那么关于函数  $f(z)$  极限的讨论自然转到了两个二元实函数上来, 下面的定理便告知我们这一切.

**定理 2.1** 设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + i y_0$ ,  $A = a + i b$ , 那么

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (2.1)$$

的充分必要条件是

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a \quad \text{且} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b. \quad (2.2)$$

**证明 必要性**

因为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , 所以对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 总存在正数  $\delta$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 有  $|f(z) - A| < \epsilon$  成立. 即当  $0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$  时,



$$|(u - a) + i(v - b)| < \epsilon.$$

也就是当  $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$  时,

$$|u - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |v - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

依二元实函数极限的定义

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = a, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = b.$$

充分性

如果式(2.2)成立, 那么当  $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$  时, 有

$$|u - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |v - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

而

$$|f(z) - A| = |(u - a) + i(v - b)| \\ = |u - a| + |v - b|.$$

故当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 有

$$|f(z) - A| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

**例 2.3** 求极限  $\lim_{z \rightarrow z_0} \cos z$ .

解 因为

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

若取  $u(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$ ,  $v(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , 则有

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = \cos x_0 \operatorname{ch} y_0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = -\sin x_0 \operatorname{sh} y_0,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \cos z &= \cos x_0 \operatorname{ch} y_0 - i \sin x_0 \operatorname{sh} y_0 \\ &= \cos z_0. \end{aligned}$$

**例 2.4** 证明函数  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$  在  $z = 0$  时极限不存在.

证 设  $z = x + iy$ , 那么

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{-2xy}{x^2 + y^2}i,$$

因此得

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-2xy}{x^2 + y^2}.$$

对二元实函数  $u(x, y)$  让  $(x, y)$  沿着  $y = kx$  ( $k$  为任意实数) 趋向于 0, 我们有

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (y=kx)}} u(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} u(x,y) = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

显然, 极限值随  $k$  值的不同而不同, 因而根据二元实变函数极限的定义知,  $u(x,y)$  在  $(x,y)$  趋向于 0 时的极限不存在. 即得结论.

**定理 2.2** 设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 那么

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = AB;$$

$$(3) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

关于定理 2.2 的证明可以通过复变函数极限的定义来实现. 但更简单的方法是由定理 2.1 和二元实变量函数极限的运算方法来推导完成.

**例 2.5** 证明  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) g(z)] = AB$ .

证 设  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad A = u_0 + iv_0,$$

$$g(z) = U(x,y) + iV(x,y), \quad B = U_0 + iV_0,$$

那么

$$f(z) g(z) = (uU - vV) + i(vU + uV).$$

$$AB = (u_0 U_0 - v_0 V_0) + i(v_0 U_0 + u_0 V_0).$$

因为在  $z \rightarrow z_0$ , 即  $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时  $u, v, U$  和  $V$  的极限存在且分别为  $u_0, v_0, U_0, V_0$ . 所以根据二元实变量函数极限运算的法则有:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (uU - vV) = u_0 U_0 - v_0 V_0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (vU + uV) = v_0 U_0 + u_0 V_0.$$

由定理 2.1 知

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) g(z)] = AB.$$

在扩充复平面上, 我们可以定义以下广义极限,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A;$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty;$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

例如  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$  的定义为

如果对任意取定的  $\epsilon > 0$ , 总存在正数  $R(\epsilon)$ , 只要  $|z| > \frac{1}{R(\epsilon)}$  时, 就有

$$|f(z) - A| < \epsilon$$

成立,则称  $A$  为  $z$  时  $f(z)$  的广义极限.

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =$  的定义为

如果对任意给定的  $M > 0$ , 总存在正数  $\delta$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 有

$$|f(z)| > M$$

成立,则称  $f(z)$  在  $z \rightarrow z_0$  时趋于  $\infty$ .

例 设函数  $f(z) = \frac{1}{z}$ , 则由定义可以证明.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

## 2.2 复变函数的连续性

### 2.2.1 复变函数连续的概念

定义 2.2 若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称函数  $f(z)$  在  $z_0$  处连续. 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处连续, 则称函数  $f(z)$  在区域  $D$  内连续.

例 2.6 由上节我们知道

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \cos z = \cos z_0,$$

所以  $\cos z$  在  $z_0$  处连续.

例 2.7 证明函数  $\sin z$  在整个复平面上连续.

证 设  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  为复平面上的任一定点. 因为  $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$  且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sin x \operatorname{ch} y = \sin x_0 \operatorname{ch} y_0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \cos x \operatorname{sh} y = \cos x_0 \operatorname{sh} y_0.$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \sin z &= \sin x_0 \operatorname{ch} y_0 + i \cos x_0 \operatorname{sh} y_0 \\ &= \sin(x_0 + iy_0) \\ &= \sin z_0. \end{aligned}$$

由于  $z_0$  是复平面上任一定点, 故  $\sin z$  在整个复平面上连续.

同理: 由  $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$  可得  $e^z$  在整个复平面上连续.

### 2.2.2 复变函数连续的定理

定理 2.3 在  $z_0$  处连续的两个函数的和、差、积、商 (分母在  $z_0$  处不等于零) 在  $z_0$  处仍连续.

这个定理的证明可由上节定理 2.2 直接推导得出结论.

**例 2.8** 讨论初等函数:  $\sec z, \csc z, \tan z, \cot z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$  的连续性.

**解** 因为

$$\begin{aligned}\sec z &= \frac{1}{\cos z}; & \csc z &= \frac{1}{\sin z}; & \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}; \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}; & \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}.\end{aligned}$$

$\sin z, \cos z, e^z, e^{-z}$  在整个复平面上连续. 由定理 2.3 知  $\sec z, \csc z, \tan z, \cot z$  在分母不为零处连续.  $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$  在整个复平面上处处连续.

**例 2.9** 讨论函数  $\arg z$  的连续性.

**解** 设  $z_0$  为复平面上任意一点, 那么

当  $z_0 = 0$  时,  $\arg z$  在  $z_0$  无定义, 故  $\arg z$  在  $z_0 = 0$  处不连续.

当  $z_0$  落在负实轴上时, 由于  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\arg z$  在  $z$  从实轴的上方趋于  $z_0$  时,  $\arg z$  趋于  $\pi$ , 在  $z$  从实轴的下方趋于  $z_0$  时,  $\arg z$  趋于  $-\pi$ . 因而此时  $\arg z$  不连续.

当  $z_0$  为其它情况时, 由于  $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg z = \arg z_0$ , 所以  $\arg z$  连续.

**例 2.10** 讨论对数函数  $\operatorname{Ln} z$  的连续性.

**解** 因为  $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 而  $\ln|z|$  在除原点以外的其它点处均连续,  $\arg z$  在除去原点和负实轴上的点外处处连续, 由定理 2.3 知  $\operatorname{Ln} z$  的各个分支和其主值函数  $\ln z$  在除去原点和负实轴以外的复平面上处处连续.

关于函数  $f(z)$  在点  $z_0$  连续的定义还可使用“ $\epsilon - \delta$ ”语言表述为:

如果对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 总存在着正数  $\delta$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时, 有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

成立, 则称函数  $f(z)$  在  $z_0$  处连续.

根据这个定义, 读者可仿照高等数学中复合函数连续性的讨论方法, 自行证明下面的定理.

**定理 2.4** 如果函数  $h = g(z)$  在  $z_0$  连续, 函数  $w = f(h)$  在  $h_0 = g(z_0)$  连续, 那么复合函数

$$w = f[g(z)]$$

在  $z_0$  处连续.

**例** 函数  $z = e^{\operatorname{Ln} z}$  (不等于整数) 可以看作由指数函数  $w = e^h$ , 对数函数  $h = \operatorname{Ln} z$  复合而成的函数. 函数  $w = e^h$  对任意的点  $h = h_0$  均连续,  $\operatorname{Ln} z$  当  $z$  不为原点和负实轴上的点时连续, 从而复合函数

$$z = e^{\operatorname{Ln} z}$$

的每一个分支在除去原点和负实轴的复平面上连续.

最后,需要指出的是与闭区间上连续实函数必有界的性质相似,复平面上有界闭区域  $R$  上连续的函数  $w = f(z)$ , 它的模  $|f(z)|$  在  $R$  上一定有界.

## 2.3 导数

### 2.3.1 导数的概念

**定义 2.3** 设  $f(z)$  在包含  $z_0$  的某区域  $D$  内有定义, 如果

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (z \in D)}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在, 那么我们说函数  $f(z)$  在  $z_0$  可导 (或可微), 并称这个极限为函数  $w = f(z)$  在  $z_0$  处的导数, 记为  $f'(z_0)$ . 即

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ (z \in D)}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

若记  $z = z_0 + \Delta z$ , 则得到  $f'(z_0)$  的另一种表达形式

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

函数  $f(z)$  的导函数  $f'(z)$  定义为

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

若记  $w = f(z)$ ,  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ ,  $f'(z) = \frac{dw}{dz}$ , 则

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

**例 2.11** 证明  $(z^n)' = nz^{n-1}$  ( $n$  为正整数).

证 因为

$$\begin{aligned} (z + \Delta z)^n &= \sum_{k=0}^n \mathbf{C}_n^k z^k (\Delta z)^{n-k} \\ &= (z)^n + \mathbf{C}_n^1 (z)^{n-1} \Delta z + \mathbf{C}_n^2 (z)^{n-2} \Delta z^2 \\ &\quad + \dots + \mathbf{C}_n^n (z)^{n-n} \Delta z^n, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (z^n)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [ (z)^{n-1} + \mathbf{C}_n^1 (z)^{n-2} \Delta z + \dots + \mathbf{C}_n^{n-1} z \Delta z^{n-2} ] \\ &= nz^{n-1}. \end{aligned}$$

**例 2.12** 讨论函数  $f(z) = |z|^2$  的可导性.

解 设  $w = f(z)$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{w}{z} &= \frac{|z + \overline{z}|^2 - |z|^2}{z} = \frac{(z + \overline{z})(\overline{z} + \overline{\overline{z}}) - z\overline{z}}{z} \\ &= \overline{z} + \overline{\overline{z}} + z \frac{\overline{z}}{z}.\end{aligned}$$

若  $z=0$ , 则在  $z \rightarrow 0$  时,  $\frac{w}{z} = \overline{z} \rightarrow 0$ , 即

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

若  $z \neq 0$ , 则在  $z = x \rightarrow 0$  时,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w}{z} = \overline{z} + z$ , 在  $z = yi \rightarrow 0$  时,

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{w}{z} = \overline{z} - z$ . 由此可以看出在  $z$  以不同的方式趋向于 0 时,  $\frac{w}{z}$  的极限

值不相等, 故由导数的定义知:

$f(z) = |z|^2$  在除原点以外的复平面上处处不可导.

这个例子说明:

1° 若记  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0$ , 可以看到虽然  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $v(x, y) = 0$  具有各阶连续偏导, 但  $f(z) = u + iv$  在非零处不可导.

2° 连续函数  $f(z) = |z|^2$  未必处处可导.

我们假设  $f(z_0)$  存在, 那么

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

这说明在某点可导的函数在该点一定连续.

### 2.3.2 导数的运算法则

由于复变函数的导数定义的形式与实变函数的情形相同, 仿照高等数学中相应定理的证明方法易得:

**定理 2.5** 如果  $f(z)$  与  $g(z)$  在区域  $D$  上可导, 那么

$$(1) [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$(2) [f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

$$(3) \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0).$$

**定理 2.6** 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  可导,  $g(h)$  在  $h_0 = f(z_0)$  处可导, 则复合函数  $g[f(z)]$  在  $z_0$  处可导, 且

$$g[f'(z_0)] = g'(h_0) f'(z_0).$$

**定理 2.7** 设  $w = f(z)$ ,  $z = f^{-1}(w)$  是两个互为反函数的单值函数, 且  $f'(z) \neq 0$ , 那么

$$f'(z) = \frac{1}{f^{-1}'(w)}.$$

**例 2.13** 计算导数.

(a)  $f(z) = (2z^2 + i)^5$ ;

(b)  $f(z) = (1 + z^2)^{4/3} z^2 \quad (z \neq 0)$ ;

(c)  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$ ;

(d)  $w = \operatorname{Ln} z$ .

**解** (a)  $f'(z) = 5(2z^2 + i)^4 \cdot 4z = 20z(2z^2 + i)^4$ ;

(b)  $f'(z) = \frac{4(1 + z^2)^3 \cdot 2z^3 - 2z(1 + z^2)^4}{z^4}$

$$= \frac{2}{z^3} (1 + z^2)^3 (3z^2 - 1);$$

(c)  $(\operatorname{Arcsin} z)' = -i \frac{1 - z^2}{iz + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (z \neq \pm 1)$ ;

(d) 因为  $w = \operatorname{Ln} z$  的主值及各分支的反函数均为  $z = e^w$ , 应用定理 2.7, 得

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = (e^w)^{-1} = z^{-1},$$

即

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0).$$

### 2.3.3 函数可导的充分必要条件

**定理 2.8** 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在定义域内一点  $z = x + iy$  可导的必要与充分条件是:  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在点  $(x, y)$  可微, 并且在该点满足柯西—黎曼方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}.$$

**证 必要性**

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z = x + iy$  有导数  $a + ib$ , 这里  $a$  及  $b$  为

$$-i \frac{1 - z^2}{iz + \sqrt{1 - z^2}}$$

实数, 根据导数定义, 有

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \underline{f'(z)} \Delta z + o(|\Delta z|) \\ &= (a + bi)(\Delta x + i \Delta y) + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \neq 0), \end{aligned}$$

而作为函数的增量

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + \\ &\quad i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] = \Delta u + i \Delta v, \end{aligned}$$

比较两式得

$$\begin{aligned} \Delta u &= a \Delta x - b \Delta y + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \neq 0), \\ \Delta v &= b \Delta x + a \Delta y + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \neq 0). \end{aligned}$$

根据二元实变量函数可微的定义和可微的必要条件有

$u(x, y), v(x, y)$  在  $(x, y)$  可微且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b.$$

充分性

设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  的二元实函数  $u(x, y), v(x, y)$  在  $(x, y)$  处可微且在该点

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

则由二元实函数可微的必要条件知

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \neq 0), \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \quad (|\Delta z| \neq 0). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \Delta u + i \Delta v \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$

又因柯西—黎曼方程成立, 所以

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + \frac{\partial v}{\partial x} (-\Delta y + \Delta x i) + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta z + i \frac{\partial v}{\partial x} \Delta z + o(|\Delta z|), \end{aligned}$$

上式两边同除  $\Delta z$ , 并令  $\Delta z \rightarrow 0$  得

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

即函数  $f(z)$  在  $z$  处可导. 定理得证.

由定理 2.8 的证明过程可得  $f(z)$  的求导公式为



$$f(z) = \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = \frac{v}{y} - i \frac{u}{y}.$$

例 考虑函数

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

设  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ , 那么柯西—黎曼方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = 2x, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x} = -2y.$$

在复平面上处处成立. 且这四个偏导数连续. 即  $u$  和  $v$  在复平面上处处可微, 由定理知  $f(z)$  在复平面上处处可导且

$$f'(z) = \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = 2z.$$

例 2.14 判定下列函数在何处可导.

$$(a) f(z) = |z|; \quad (b) f(z) = e^z.$$

解 (a) 由  $f(z) = |z| = x^2 + y^2 + i \cdot 0$  得

$$u = x^2 + y^2, \quad v = 0.$$

当  $x^2 + y^2 = 0$  时,  $u$  的偏导数不存在,  $u$  不可微.

当  $x^2 + y^2 \neq 0$  时,

$$\frac{u}{x} = 2x, \quad \frac{u}{y} = 2y; \quad \frac{v}{y} = 0, \quad \frac{v}{x} = 0.$$

由定理 2.8 知  $f(z) = |z|$  不可导.

综合以上,  $f(z) = |z|$  在整个复平面上处处不可导.

(b) 由  $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  得

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

从而

$$\frac{u}{x} = e^x \cos y = \frac{v}{y}; \quad \frac{u}{y} = -e^x \sin y = -\frac{v}{x}.$$

而上面四个偏导数在任一点  $(x, y)$  连续, 所以由定理 2.8 得  $e^z$  在整个复平面上可导, 且

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} = e^x \cos y + i e^x \sin y \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned}$$

例 2.15 证明  $(\sin z)' = \cos z$ .

证 因为

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

所以

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

又因为

$$\frac{u}{x} = \cos x \operatorname{ch} y = \frac{v}{y}; \quad \frac{u}{y} = \sin x \operatorname{sh} y = -\frac{v}{x}.$$

而  $\cos x \operatorname{ch} y, \sin x \operatorname{sh} y$  这两个二元实函数在任一点  $(x, y)$  连续, 由定理 2.8 可知:  $\sin z$  在整个复平面上可导且

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \frac{u}{x} + i \frac{v}{x} \\ &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

用同样的方法可得以下求导公式:

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\sin z; \quad (\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}; \quad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}; \\ (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z; \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

如果函数是用极坐标表达的, 即  $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ , 那么定理 2.8 的必要与充分条件为  $f(z)$  在  $(r, \theta)$  处可微, 并且方程

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{v}{\theta}, \quad \frac{v}{r} = -\frac{1}{r} \frac{u}{\theta}$$

成立. 这时

$$f'(z) = e^{-i\theta} \left( \frac{u}{r} + i \frac{v}{r} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left( \frac{v}{\theta} - i \frac{u}{\theta} \right).$$

这个结论的证明留作练习.

定理 2.8 中的柯西—黎曼方程. 它是用法国数学家 A. L. Cauchy (1789—1857) 和德国数学家 G. F. B. Riemann (1826—1866) 的名字命名的, 柯西首先发现并使用了该方程, 而该方程又成为黎曼研究复变函数的基础.

### 2.3.4 高阶导数

我们把  $w = f(z)$  的导数  $f'(z)$  叫做函数  $w = f(z)$  的一阶导数. 类似地, 二阶导数为一阶导数的导数, 三阶导数为二阶导数的导数, ..., 一般地,  $(n-1)$  阶导数的导数称为  $f(z)$  的  $n$  阶导数, 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

**例 2.16** 应用公式  $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$ , 求  $\sin^{(n)} z$ .

**解**  $(\sin z)' = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2}),$

$$(\sin z)'' = \cos(z + \frac{\pi}{2}) = \sin(z + 2 \frac{\pi}{2}),$$

$$(\sin z)''' = \cos(z + 2 \frac{\pi}{2}) = \sin(z + 3 \frac{\pi}{2}),$$

一般可得

$$\sin^{(n)} z = \sin\left(z + \frac{n}{2}\right).$$

同理可得

$$\cos^{(n)} z = \cos\left(z + \frac{n}{2}\right).$$

另外还可通过以下方法求得  $\cos^{(n)} z$  公式

$$\cos^{(n)} z = \sin^{(n+1)} z = \sin\left(z + \frac{n+1}{2}\right) = \cos\left(z + \frac{n}{2}\right).$$

关于复变函数导数的几何意义我们留待共形映射一章进行讨论.

## 2.4 解析函数

### 2.4.1 解析函数的概念

**定义 2.4** 如果函数  $f(z)$  不仅在  $z_0$  处可导, 而且在  $z_0$  的某个邻域内的任一点可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析. 如果函数  $f(z)$  在区域  $D$  内任一点解析, 则称  $f(z)$  在区域  $D$  内解析.

由定义知, 函数在区域  $D$  内解析与在区域  $D$  内可导是等价的. 但函数在一点解析与在该点可导是绝对不等价的. 前者比后者条件强的多, 函数在某点解析意味着函数在该点及其某邻域内处处可导; 而函数在某点可导, 在该点邻域内函数也可能可导, 也可能不可导.

**例 2.17** 讨论函数  $f(z) = z^2$  的解析性.

**解** 由上节讨论知  $f(z) = z^2$  在整个复平面上处处可导且  $f'(z) = 2z$ . 那么由函数在某区域上解析的定义可知, 函数  $f(z) = z^2$  在整个复平面上解析.

**例 2.18** 讨论函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

**解** 由上节讨论知函数  $f(z) = |z|^2$  除  $z=0$  处可导外, 在其它  $z \neq 0$  处均不可导. 依照解析函数的定义,  $f(z)$  在整个复平面上不解析.

### 2.4.2 初等函数的解析性

由导数的运算法则可知, 在某区域上解析的函数经过加、减、乘、除 (分母不为零) 运算得到的函数在该区域上仍解析. 两个及两个以上的解析函数经过有限次复合运算后得到的函数仍为解析函数. 解析函数的单值反函数仍为解析函数.

由第 2.3 节讨论可得:

指数函数  $e^z$  在整个复平面上解析.

三角函数  $\sin z, \cos z, \tan z, \cot z, \sec z, \csc z$  在其定义域内解析; 反三角函数的解析性要针对各反函数具体讨论.

双曲函数  $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$  在整个复平面上解析, 反双曲函数的解析性要针对各反函数具体讨论.

对数函数  $\operatorname{Ln} z$ . 由于  $\operatorname{Ln} z$  在原点和负实轴上不可导, 故  $\operatorname{Ln} z$  在原点和负实轴上不解析. 除去原点和负实轴以外,  $\operatorname{Ln} z$  处处可导, 从而  $\operatorname{Ln} z$  的主值及各个分支函数处处解析.

幂函数  $z^\alpha$ . 当  $\alpha$  为正整数和零时,  $z^\alpha$  在整个复平面上解析; 当  $\alpha$  为负整数时,  $z^\alpha$  在除原点外的复平面上解析; 由幂函数定义, 当  $\alpha$  为既约分数、无理数、复数时,  $z^\alpha$  作为指数函数与对数函数的复合函数, 在除去负半实轴和原点的复平面上解析. 不论  $\alpha$  为以上何种情况, 在解析点上统一有  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ .

如果函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 那么对任意的  $z \in D$ , 都有  $z$  的一个邻域,  $f(z)$  在该邻域内可导, 有定义. 这就意味着  $z$  是区域  $D$  的一个内点. 有时我们说函数  $f(z)$  在闭圆盘  $|z| \leq 1$  上解析, 通常理解为  $f(z)$  在包含着该圆盘的某区域内是解析的.

### 2.4.3 函数解析的充分必要条件

由函数在某点可导的充要条件我们立即可得如下结论.

**定理 2.9** 函数  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  在其定义域  $D$  内解析的必要与充分条件是:  $u(x, y)$  与  $v(x, y)$  在  $D$  内可微, 并且满足柯西—黎曼方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}.$$

**例 2.19** 讨论下列函数的解析性.

(a)  $f(z) = 2x(1-y) + i(x^2 - y^2 + 2y)$ .

(b)  $f(z) = \bar{z}$ .

(c)  $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ .

**解** (a) 设  $u = 2x(1-y)$ ,  $v = x^2 - y^2 + 2y$ . 因为

$$\frac{u}{x} = 2(1-y) = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -2x = -\frac{v}{x},$$

且这四个偏导数处处连续, 故  $f(z) = 2x(1-y) + i(x^2 - y^2 + 2y)$  在复平面上处处解析.

(b) 因为  $f(z) = \bar{z} = x - iy$ , 所以设  $u = x$ ,  $v = -y$ , 因而

$$\frac{u}{x} = 1, \quad \frac{v}{y} = -1.$$

由定理知  $f(z) = \bar{z}$  在复平面上处处不解析. 而我们又知道  $f(z) = z$  在复平面上是处处解析的. 因而解析函数在用  $\bar{z}$  替换  $z$  后的性质如何, 这便是复变函

数进一步研究的一个问题.在这里就不多述了.

(c) 因为  $f(z) = z\operatorname{Re}(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy$ , 所以设  $u = x^2$ ,  $v = xy$ . 由于

$$\frac{u}{x} = 2x, \quad \frac{v}{y} = x, \quad \frac{u}{y} = 0, \quad \frac{v}{x} = y.$$

这四个偏导数虽然处处连续.但柯西—黎曼方程仅在原点处成立, 因而函数  $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$  在复平面上原点处可导, 其它点不可导. 进而有该函数在复平面上处处不解析.

**例 2.20** 证明 若函数  $f(z)$  在复平面上某区域内任意一点可导且导数为零, 那么  $f(z)$  为该区域上的常函数.

证 设  $f(z) = u + iv$ , 那么

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0.$$

从而

$$u_x = u_y = 0, \quad v_x = v_y = 0.$$

由  $u_x = 0$  推出  $u = g(y)$ , 而  $u_y = g'(y) = 0$  故  $u = c_1$ , 同理可推得  $v = c_2$ , 这里  $c_1, c_2$  为实常数. 所以

$$f(z) = u + iv = c_1 + ic_2 = c \quad (c \text{ 为复常数}).$$

为以后叙述和研究的方便, 对函数的不解析点我们给出以下定义:

如果函数  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 那么称  $z_0$  为  $f(z)$  的奇点.

显然, 原点是函数  $f(z) = \frac{1}{z}$  的奇点, 复平面上的任一点都是函数  $f(z) = |z|^2$  的奇点.

## 2.5 调和函数

### 2.5.1 调和函数的概念

**定义 2.5** 设二元实变量函数  $h(x, y)$  在区域  $D$  内具有连续的二阶偏导数, 并且满足拉普拉斯方程

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0,$$

则称函数  $h(x, y)$  为  $D$  内的调和函数.

例如:  $h(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$ , 则

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y - \operatorname{sh} x \sin y = 0,$$

且  $\operatorname{sh} x \sin y$  连续, 故

$$h(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$$

为调和函数 .

**定理 2.10** 设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  是区域  $D$  内的解析函数, 那么  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  均为  $D$  内的调和函数 .

事实上, 因为  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 那么

$$f(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

理解这个公式:

$z$  取特例,  $z=(x,0)$  那么对  $z$  求导就等于对  $(x,0)$  求导. 用导数定义计算, 结果就是第一个等号.  $z=(0,y)$  对  $z$  求导就等于对  $y$  求导, 结果就是第二个等号. 导数跟趋近的方式无关, 所以都相等

这里我们需要借用下一章的一个结论: 在区域  $D$  内解析的函数在  $D$  内具有任意阶导数. 因而  $f(z)$  在  $D$  内可导、解析. 故有  $u, v$  在  $D$  内具有连续的二阶偏导数, 且柯西—黎曼方程成立. 即

$$\begin{aligned} v_{xy} &= v_{yx}, & u_{xy} &= u_{yx} . \\ u_{xx} &= v_{xy}, & u_{xy} &= -v_{xx}; & v_{yx} &= -u_{yy}, & v_{yy} &= u_{yx} . \end{aligned}$$

从而

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 .$$

所以二元实变量函数  $u$  和  $v$  具有连续的二阶偏导数且满足拉普拉斯方程. 即解析函数  $f(z)$  的两个二元实函数为调和函数 .

**定义 2.6** 设函数  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  都是  $D$  内的调和函数, 而且它们的一阶偏导数满足柯西—黎曼方程, 则称  $v(x, y)$  为  $u(x, y)$  的共轭调和函数 .

**例 2.21** 设

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy .$$

问  $u$  和  $v$  是调和函数吗?  $v$  是  $u$  的共轭调和函数吗?

解 因为  $u$  和  $v$  具有连续二阶偏导数, 且

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 + 0 = 0 .$$

所以  $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$  为调和函数. 又因为柯西—黎曼方程

$$\frac{u}{x} = 2x = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -2y = -\frac{v}{x}$$

成立, 所以  $v(x, y)$  为  $u(x, y)$  的共轭调和函数 .

显然, 函数  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  在区域  $D$  内解析的必要与充分条件为  $v$  是  $u$  的共轭调和函数 .

值得注意的是: 若  $v$  是  $u$  在  $D$  内的共轭调和函数. 一般地,  $v$  在  $D$  内的共轭调和函数是  $-u$ , 而不是  $u$  .

### 2.5.2 已知实部或虚部的解析函数的表达式

我们设想由 2.5.1 的内容, 在已知解析函数的实部的情况下, 能否找出它的虚部呢? 答案是肯定的. 对具体问题, 已知解析函数  $f(z)$  的实部  $u = x^2 - y^2$ , 我们来尝试推导  $f(z)$  的虚部  $v$  .

因为  $f(z)$  为解析函数, 那么

$$\frac{u}{x} = 2x = -\frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -2y = -\frac{v}{x}.$$

我们猜想  $v(x, y) = 2xy + g(x)$  且  $v_x = 2y + g'(x) = 2y$ , 这样  $v(x, y) = 2xy + c$  ( $c$  为任意实常数), 这个结果在  $c=0$  时, 与我们已知的结论

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

是解析函数是一样的.

上述方法具有普遍意义.

**例 2.22** 已知下面调和函数, 求解析函数  $f(z) = u + iv$ .

$$(a) \quad u = \operatorname{sh} x \sin y, \quad (b) \quad v = x^2 - y^2 + 2y.$$

解 (a) 因为

$$\frac{u}{x} = \operatorname{ch} x \sin y = \frac{v}{y}; \quad \frac{u}{y} = \operatorname{sh} x \cos y = -\frac{v}{x}.$$

所以

$$v = \operatorname{ch} x \sin y dy = -\operatorname{ch} x \cos y + g(x),$$

$$v_x = -\operatorname{sh} x \cos y + g'(x).$$

$$g'(x) = 0.$$

从而

$$v = -\operatorname{ch} x \cos y + c.$$

$$f(z) = \operatorname{sh} x \sin y - i \operatorname{ch} x \cos y + ic \quad (c \text{ 为实数}).$$

(b) 因为

$$\frac{v}{x} = 2x = -\frac{u}{y}; \quad \frac{v}{y} = -2y + 2 = \frac{u}{x}.$$

所以

$$u = (-2y + 2)dx = 2x(1 - y) + g(y),$$

$$u = -2x dy = -2xy + h(x).$$

对比以上两式得

$$2x + g(y) = h(x).$$

故

$$u = 2x - 2xy + c.$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 2x - 2xy + c + i(x^2 - y^2 + 2y) \\ &= iz^2 + 2z + c \quad (c \text{ 为实数}). \end{aligned}$$

下面我们介绍另外一种已知实部或虚部的解析函数的表达式的求解方法.

**定理 2.11** 设  $u(x, y)$  是单连通域  $D$  内的调和函数,  $(x_0, y_0)$  为  $D$  内任意取定的点则存在由

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + c \quad (c \text{ 为任意实数})$$

看做二院函数积分做积分即可.

确定的唯一形式的  $v(x, y)$ , 使  $f(z) = u + i v$  是  $D$  内的解析函数.

证 因为  $u(x, y)$  是  $D$  内的调和函数, 所以  $u$  在  $D$  内可微, 且

$$-\frac{1}{y} \left( -\frac{u}{y} \right) = -\frac{1}{x} \left( \frac{u}{x} \right)$$

成立, 由高等数学中相关定理知可设

$$dv(x, y) = -\frac{u}{y} dx + \frac{u}{x} dy,$$

那么

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + c \quad (c \text{ 为任意实数}).$$

由二元实函数可微的性质结论有

$$\frac{-v}{x} = -\frac{u}{y}, \quad \frac{-v}{y} = -\frac{u}{x}.$$

由定理 2.9 知  $f(z) = u + i v$  为  $D$  内的解析函数.

另外, 因为  $u$  具有连续二阶偏导, 所以

$$-\frac{1}{x} \left( -\frac{u}{y} \right) + \frac{1}{y} \left( \frac{u}{x} \right) = 0,$$

即

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

因此,  $v$  是  $u$  的共轭调和函数.

同理, 若已知解析函数  $f(z)$  的虚部为调和函数  $v(x, y)$ , 则通过

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_y dx - v_x dy + c,$$

可求得  $f(z)$  的实部.

**例 2.23** 已知调和函数  $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ , 求其共轭调和函数  $v(x, y)$ , 使  $f(z) = u + i v$  在相应的区域内解析.

解 由定理 2.11 知, 这样的  $v(x, y)$  为

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + c \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} -u_y dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} u_x dy + c \\ &= \int_{x_0}^x (3x^2 - 3y_0^2) dx + \int_{y_0}^y (-6xy) dy + c \end{aligned}$$



$$= x^3 - 3xy^2 + c.$$

所以

$$\begin{aligned} f(z) &= y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + c) \\ &= i(z^3 + c). \end{aligned}$$

**例 2.24** 已知  $f(z)$  的虚部为  $v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ , 求一解析函数  $f(z) = u + iv$ , 且  $f(0) = 0$ .

**解** 满足题设条件的

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_y dx - v_x dy + c \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} v_y dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} -v_x dy + c \\ &= \int_{x_0}^x y_0 dx + \int_{y_0}^y -x dy + c \\ &= xy + c. \end{aligned}$$

所以

$$f(z) = xy + c + i\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right).$$

由  $f(0) = 0$ , 得  $c = 0$ . 故

$$\begin{aligned} f(z) &= xy + i\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) \\ &= -\frac{i}{2}z^2. \end{aligned}$$

## 第2章习题

2.1.1 设  $z_0$  为复常数, 应用极限的定义证明:

$$(a) \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z_0); \quad (b) \lim_{z \rightarrow 0} (\overline{z}/z) = 0.$$

2.1.2 证明: 若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$  则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = A + B.$$

2.1.3 计算: (a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$ ; (b)  $\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{4z^2}{(z-1)^2}$ .

2.1.4 设  $z = z_0 + \Delta z$ , 证明  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  当且仅当  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0$ .

2.1.5 若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ , 且存在一个正数  $M$ , 对  $z_0$  某邻域内所有的数  $z$ , 都

有  $|g(z)| \leq M$ , 证明:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$ .

2.1.6 设  $z_0$  为扩充复平面上的点, 证明.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad \text{当且仅当} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

并计算  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3}$  和  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z^3-1}$  的值.

2.1.7 描述 (a)  $e^{x+iy}$  当  $x$  趋于  $-\infty$ ; (b)  $e^{2+iy}$ , 当  $y$  趋于  $\infty$  时的情形.

2.2.1 讨论函数  $f(z) = (3z^3 - 2z^2 + 12z - 8)/(z^2 + 4)$  的连续性, 对  $f(z)$  不连续的点修改或补充定义使之连续.

2.2.2 设

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } z \neq 0; \\ 0, & \text{若 } z = 0. \end{cases}$$

试证  $f(z)$  在原点不连续.

2.2.3 试证  $f(z) = \bar{z}$  在  $z$  平面上处处连续.

2.2.4 试证有理分式函数

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0} \quad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

在复平面上除使分母为零的点外处处连续.

2.3.1 应用导数定义讨论下面函数的导数存在否?

$$(a) f(z) = \operatorname{Re}(z); \quad (b) f(z) = \operatorname{Im}(z).$$

2.3.2 证明函数

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

在  $z=0$  处不可导.

2.3.3 设  $w = x^3 y(y - ix)/(x^3 + y^2)$  ( $z \neq 0$ ),  $w(0) = 0$ . 求函数在原点的导数.

2.3.4 应用求导法则证明多项式函数

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0, n \geq 1)$$

处处可导, 且  $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1}$ . 并计算  $f(z) = (1 - 4z^2)^3$  的导数.

2.3.5 设  $f(z)$  存在, 试推导  $\frac{d[f(z)]}{dz}$ .

2.3.6 推导  $\operatorname{Arcch} z$  的求导公式

2.3.7 证明: 设函数  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 且  $f(z_0) \neq 0$ , 那么可以找到  $z_0$  的一个

小邻域, 在这个邻域内  $f(z) \neq 0$ .

2.3.8 验证函数  $w = xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(ye^x \cos y + xe^x \sin y)$  满足柯西—黎曼方程.

2.3.9 讨论下面函数的可导性, 如果可导, 求出  $f'(z)$ .

$$(a) f(z) = x^2 + iy^2; \quad (b) f(z) = z \operatorname{Im}(z).$$

2.3.10 证明: 以下各函数在任一点处不可导.

$$(a) f(z) = 2x + ixy^2; \quad (b) f(z) = z - \bar{z};$$

$$(c) f(z) = e^x e^{-iy}.$$

2.3.11 证明以下各函数的  $f'(z)$ 、 $f''(z)$  存在, 并求之.

$$(a) f(z) = iz + 2; \quad (b) f(z) = e^{-x} e^{-iy};$$

$$(c) f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

2.3.12 证明定理 2.8 用极坐标表达的柯西—黎曼方程条件和求导表达式.

2.4.1 证明  $f(z) = (z^2 - 4)(z^2 + 4)$  在定义域内解析, 并求当  $z = 1, 2, i, -i, 1 + 2i$  时  $f'(z)$  的值.

2.4.2 证明函数  $f(z) = [(x^3 - y^3)/(x^2 + y^2)] + i[(x^3 + y^3)/(x^2 + y^2)]$  ( $z \neq 0$ ),  $f(0) = 0$  在原点满足柯西—黎曼方程, 但在原点不解析. (提示: 对  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$  沿不同方向求极限).

2.4.3 阐述为什么两个解析函数的复合函数仍为解析函数, 两个解析函数的线性组合函数仍为解析函数.

2.4.4 证明:

(a)  $\ln(z - i)$  在除去直线  $y = 1$  ( $x = 0$ ) 的平面上处处解析.

(b) 函数  $\frac{\ln(z + 4)}{(z^2 + i)}$  在除去点  $\pm(1 - i)/2$  和实轴上  $x = -4$  的点后的复平面上处处解析.

2.4.5 由函数解析的充要条件证明若  $w = f(z)$  为  $D$  内的解析函数, 那么  $\sin f(z)$ ,  $\cos f(z)$  在  $D$  内解析, 且

$$\frac{d \sin w}{dz} = \cos w \frac{dw}{dz}; \quad \frac{d \cos w}{dz} = -\sin w \frac{dw}{dz}.$$

2.4.6 证明:  $e^{\bar{z}}$ ,  $\sin \bar{z}$ ,  $\cos \bar{z}$  在复平面上任一点都不解析.

2.4.7 讨论下面各函数的解析性.

$$(a) f(z) = x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i;$$

$$(b) f(z) = (x - iy)/(x^2 + y^2) \quad (z \neq 0);$$

$$(c) w = (3x - 3iy)^{-1};$$

$$(d) w = (x^2 + y^2)/(3x - 3iy);$$

$$(e) w = (1 - z^4)/(1 + z^4).$$

2.4.8 (洛必达法则) 若  $f(z)$  及  $g(z)$  在点  $z_0$  解析, 且  $f(z_0) = g(z_0) = 0$ ,  $g'(z_0) \neq 0$ , 试证

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

2.4.9 若函数  $f(z)$  在区域  $D$  内解析, 且满足下列条件之一, 试证  $f(z)$  在  $D$  内必为常数.

- (a)  $\overline{f(z)}$  在  $D$  内解析;
- (b)  $|f(z)|$  在  $D$  内为常数;
- (c)  $\operatorname{Re} f(z)$  或  $\operatorname{Im} f(z)$  在  $D$  内为常数.

2.4.10 若  $f(z)$  在上半复平面内解析, 试证函数  $\overline{f(\bar{z})}$  在下半复平面内解析.

2.4.11 函数  $g(z) = re^{\frac{i}{2}} \quad (r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$  在定义域内解析, 证明: 复合函数  $g(z^2 + 1)$  在四分之一  $z$  平面  $x > 0, y > 0$  内解析. (提示:  $g(z) = z^{\frac{1}{2}}$ )

2.4.12 设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  为  $D$  内的解析函数,  $u(x, y) = c_1$ ,  $v(x, y) = c_2$  为两个曲线族, 这里  $c_1$  和  $c_2$  为任意的常数. 证明: 这两族曲线正交. (提示: 曲线正交即为两曲线交点处切线相互垂直.)

2.4.13 找出下列函数的奇点

- (a)  $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$ ;      (b)  $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ ;
- (c)  $f(z) = \frac{z^3+i}{z^3-3z+2}$ ;      (d)  $f(z) = \ln(z+1)$ ;
- (e)  $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$       (f)  $f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$ .

2.5.1 证明下面各函数满足拉普拉斯方程:

- (a)  $u = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$ ;      (b)  $u = \operatorname{Re}[\operatorname{Ln}(z-1)](z-1)$ .

2.5.2 证明下面各函数为任意区域的调和函数.

- (a)  $u = \sin x \operatorname{sh} y$ ;      (b)  $v = \cos 2x \operatorname{sh} 2y$ .

2.5.3 用  $x$  和  $y$  表示函数  $\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})$ , 并说明这个函数为什么在不包含原点的任何区域内为调和函数.

2.5.4 用两种方法证明函数  $\ln(x^2 + y^2)$  在复平面上不含原点的任何区域内均为调和函数.

2.5.5 证明若  $v$  为  $u$  的共轭调和函数, 并且  $u$  亦为  $v$  的共轭调和函数, 那么  $u$  和  $v$  必为常数.

2.5.6 证明如果  $v$  和  $V$  都是  $u$  在  $D$  内的共轭调和函数, 那么  $v$  和  $V$  仅相差一个任意常数.

2.5.7 设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  为  $D$  内的解析函数, 阐述函数

$$U(x, y) = e^{u(x, y)} \cos v(x, y), \quad V(x, y) = e^{u(x, y)} \sin v(x, y),$$

亦为  $D$  内的调和函数, 且  $V$  为  $U$  的共轭调和函数.

2.5.8 设  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  满足条件:  $f(x + i0) = e^x$ ,  $f(z)$  为解析函数且对任一点  $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ . 根据下面的叙述证明:  $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

(a) 在得到  $u_x = u$ ,  $v_x = v$  后证明存在关于  $y$  的实值函数  $U(y)$  和  $V(y)$ , 使  $u(x, y) = e^x U(y)$ ,  $v(x, y) = e^x V(y)$ .

(b) 应用  $u$  为调和函数获得方程  $U''(y) + U(y) = 0$ , 因此得  $U(y) = A \cos y + B \sin y$ . 这里  $A$  和  $B$  均为实数.

(c) 随后有相应的  $V(y) = A \sin y - B \cos y$ . 应用  $u(x, 0) + i v(x, 0) = e^x$  求出  $A$  和  $B$  得结论:  $u(x, y) = e^x \cos y$  和  $v(x, y) = e^x \sin y$ .

2.5.9 证明  $u(x, y)$  为某区域内的调和函数, 并求出它的共轭调和函数.

$$(a) u(x, y) = 2x(1 - y); \quad (b) u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2;$$

$$(c) u(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y; \quad (d) u(x, y) = y'(x^2 + y^2).$$

2.5.10 证明下面  $u$  或  $v$  为调和函数, 并求解析函数  $f(z) = u + i v$ .

$$(a) u = 3x^2 - 3xy^2; \quad (b) u = x^2 - y^2 + 2x;$$

$$(c) u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (d) u = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y;$$

$$(e) u = 2e^x \sin y; \quad (f) v = 2xy + 3x;$$

$$(g) v = \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}; \quad (h) v = \arctan \frac{y}{x}, x > 0;$$

$$(i) v = e^x (y \cos y + x \sin y) + x + y;$$

$$(j) v = \frac{y}{x^2 + y^2}, f(2) = 0.$$

## 第 3 章 积 分

积分在复变函数的研究中极其重要, 它的理论简明, 证明简练, 应用广泛. 本章将介绍复变函数积分的概念、性质、柯西定理、柯西公式等内容. 概念、性质和柯西定理可分别与高等数学中定积分的概念、性质和格林公式联系起来理解, 而柯西公式、复变函数的高阶导公式则为复变函数理论中所特有.

### 3.1 积分的概念、性质、计算

这一节我们将实数域上有关积分的概念、性质推广到复数域上.

#### 3.1.1 不定积分

##### 1. 原函数

**定义 3.1** 如果在区域  $D$  内, 可导函数  $F(z)$  的导函数为  $f(z)$ , 即对任一  $z \in D$  有

$$F'(z) = f(z)$$

那么函数  $F(z)$  就称为  $f(z)$  在区域  $D$  内的原函数.

如果  $f(z)$  在  $D$  内有原函数  $F(z)$ , 那么  $F(z) + c$ ,  $c$  为任意复常数, 也是  $f(z)$  的原函数. 如果  $G(z)$  和  $F(z)$  都为  $f(z)$  在  $D$  内的原函数, 那么  $G(z)$  和  $F(z)$  仅相差一个复常数. 若  $f(z)$  是单连通域内的连续函数, 那么  $F(z)$  一定存在.

由上章我们知道:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\arcsin z)' = \frac{1}{1 - z^2}.$$

所以  $\ln z$  为  $\frac{1}{z}$  除去原点和负半实轴的复平面上的原函数.  $\arcsin z$  为  $\frac{1}{1 - z^2}$  在  $|z| < 1$  的区域内的原函数.

##### 2. 不定积分

**定义 3.2** 区域  $D$  内  $f(z)$  的带有任意常数的原函数  $F(z) + c$  称为  $f(z)$  在  $D$  内的不定积分, 记为  $\int f(z) dz$ , 即

$$\int f(z) dz = F(z) + c$$

这里称  $f(z)$  为被积函数,  $z$  为积分变量.

例 由不定积分的定义和上章的导数公式我们有

$$(a) \quad e^z dz = e^z + c;$$

$$(b) \quad z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1);$$

$$(c) \quad \cos z dz = \sin z + c;$$

$$(d) \quad \frac{1}{1+z^2} dz = \arctan z + c;$$

$$(e) \quad \operatorname{sh} z dz = \operatorname{ch} z + c \text{ 等等.}$$

根据导数的运算法则, 不定积分具有如下性质:

$$[f(z) \pm g(z)] dz = f(z) dz \pm g(z) dz;$$

$$kf(z) dz = k f(z) dz \quad (k \text{ 为复常数}).$$

$$\text{例} \quad (3z^2 - 2z) dz = z^3 - z^2 + c.$$

### 3.1.2 定积分

在高等数学中, 定积分  $\int_a^b f(x) dx$  定义为积分和的极限. 把它放置到复平面上, 可理解为函数  $f(z)$  沿直线  $y=0$  从  $a$  到  $b$  的积分. 将直线推广到曲线,  $a$  和  $b$  引伸到复数, 我们将  $\int_a^b f(z) dz$  理解为函数  $f(z)$  沿某曲线  $C$  从复数  $a$  到复数  $b$  的积分, 它的值仍为积分和的极限. 实变量函数积分  $\int_a^b f(x) dx$  成为它的特殊情况.

**定义 3.3** 设  $f(z)$  为定义在以  $z_0$  为起点,  $z$  为终点的简单曲线  $C$  上的连续函数, 把曲线用分点  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = z$  分成  $n$  个弧段, 这里  $z_k (k=0, 1, \dots, n)$  是曲线  $C$  上按照从  $z_0$  到  $z$  的次序排列的,  $\xi_k$  是  $z_{k-1}$  到  $z_k$  的弧上的任一点 (如图 3.1). 如果不论对  $C$  的分法和对  $\xi_k$  的取法, 当分点无限增多, 而这些弧段长度的最大值趋于零时, 和式

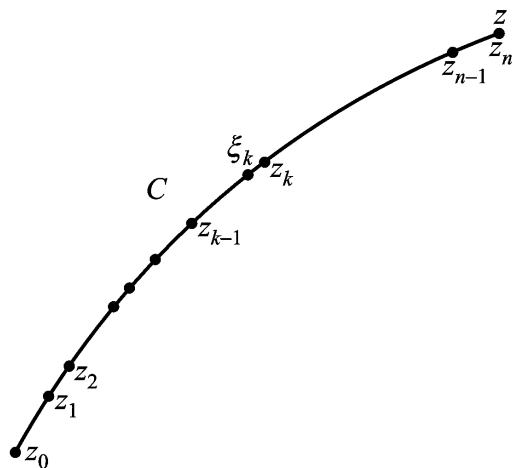


图 3.1

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

的极限唯一存在, 则称此极限为函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  从  $z_0$  到  $z$  的积分, 记作

$\int_C f(z) dz$ , 即

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) (z_k - z_{k-1}).$$

根据定义 3.3 可立即推出如下性质:

$$(1) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz,$$

其中  $k$  是一复常数.

$$(2) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz,$$

其中  $f(z)$  和  $g(z)$  在  $C$  上连续.

$$(3) \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

其中曲线  $C$  由曲线  $C_1, C_2, \dots, C_n$  连接而成.

$$(4) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz,$$

其中曲线  $C^-$  为曲线  $C$  的反方向曲线.

(5) 如果在曲线  $C$  上  $|f(z)| \leq M$ , 曲线  $C$  的长度为  $L$ , 那么

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

这个性质可由下面的不等式取极限得到.

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k) (z_k - z_{k-1}) \right| \leq M \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \leq ML.$$

**例 3.1** 设  $C$  是一条可求长的曲线, 求  $\int_C dz$  和  $\int_C z dz$ .

**解** 按定义 3.3

$$\int_C dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z - z_0$$

$$\int_C z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k (z_k - z_{k-1})$$

因为上式的结果与  $z_k$  的取法无关, 所以我们可以取  $z_k = \frac{z_k + z_{k-1}}{2}$ , 而

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k + z_{k-1}) (z_k - z_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} (z^2 - z_0^2),$$

其中  $z_0, z$  为曲线  $C$  的起点和终点.

特别地, 如果  $z_0 = z$ , 即  $C$  为闭曲线, 那么

$$\oint_C dz = \oint_C z dz = 0.$$

**例 3.2** 试证:  $\left| \int_C \frac{dz}{z^2} \right| \leq 2$ . 积分路径  $C$  是连接  $i$  到  $2+i$  的直线段.

证 在这个直线段上点  $z$  的最小模, 也就是  $z$  到原点的最近距离为 1, 从而

$$\left| \frac{1}{z^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} \leq 1,$$

而  $C$  的长度为 2, 由性质(5)得

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2} \right| \leq 2.$$

### 3.1.3 积分 $\int_C f(z) dz$ 值的计算

由函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  积分的定义易推得: 若曲线  $C$  为

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \in [a, b])$$

分段光滑,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $C$  上分段连续, 那么

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy, \quad (3.1)$$

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt. \quad (3.2)$$

(3.1)、(3.2)两式我们常用来计算积分.

**例 3.3** 计算  $I_1 = \int_{C_1} z^2 dz$ ,  $C_1$  为从  $z=0$  到  $z=2+i$  的直线段.

解 如图 3.2 所示, 直线段  $C_1$  上的点均有  $y = \frac{x}{2}$ , 所以直线段可表示为

$$z = 2y + iy \quad (0 \leq y \leq 1),$$

由公式(3.2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 (2y + iy)^2 (2 + i) dy \\ &= (2 + i)^3 \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

**例 3.4** 计算  $I_2 = \int_{C_2} z^2 dz$ ,  $C_2$  为从原点到  $z=2$ , 再从  $z=2$  到  $z=2+i$  的直线段.

**解** 如图 3.2 所示

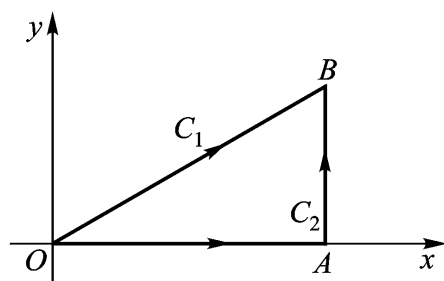


图 3.2

$$I_2 = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz,$$

而  $OA: z=x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ),  $AB: z=2+iy$  ( $0 \leq y \leq 1$ ), 所以

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (2+iy)^2 \cdot i dy \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i. \end{aligned}$$

观察  $I_1$  和  $I_2$  的值, 我们还发现  $z^2$  沿简单闭曲线  $OABO$  或  $C_2 - C_1$  的积分值为 0.

**例 3.5** 计算  $I_3 = \int_{C_3} \frac{1}{z} dz$  和  $I_4 = \int_{C_4} \frac{1}{z} dz$ . 其中  $C_3, C_4$  如图 3.3 所示, 均以  $z=-1$  为起点沿单位圆周到终点  $z=1$ .

**解** 设  $z=e^{it}$

$$I_3 = \int_{C_3} \frac{1}{z} dz = \int_0^{\pi} e^{-it} e^{it} i dt = -i,$$

$$I_4 = \int_{C_4} \frac{1}{z} dz = \int_{-\pi}^0 e^{-it} e^{it} i dt = i.$$

观察  $I_3$  和  $I_4$  的值, 有

$$\begin{aligned} \int_{C_4 - C_3} \frac{1}{z} dz &= \int_{C_4 + C_3^-} \frac{1}{z} dz = \int_{C_4} \frac{1}{z} dz + \int_{C_3^-} \frac{1}{z} dz, \\ &= 2i. \end{aligned}$$

$$\int_{C_3 - C_4} \frac{1}{z} dz = \int_{C_3 + C_4^-} \frac{1}{z} dz = \int_{C_3} \frac{1}{z} dz + \int_{C_4^-} \frac{1}{z} dz = -2i.$$

也就是说沿简单闭曲线的积分值与所走路径方向有关,关于曲线  $C$  的方向我们规定如下:

当  $C$  为光滑线段时,曲线的正方向总是指从起点到终点的方向.

当  $C$  为简单闭曲线时,  $C$  的正方向是指当曲线上的点  $P$  顺此方向沿该曲线前进时,邻近  $P$  点的曲线所围的内部始终位于  $P$  点的左方.与之相反的方向称为  $C$  的负方向.

我们约定若对简单闭曲线未声明它的方向,则认定其方向为正向.

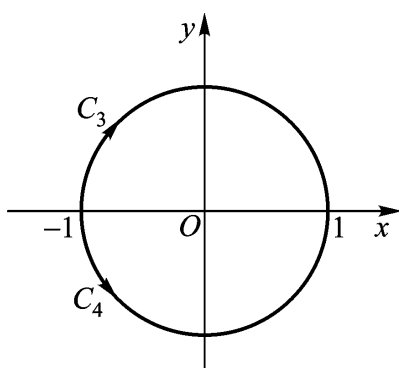


图 3.3

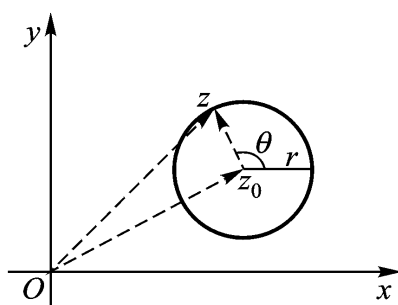


图 3.4

**例 3.6** 计算  $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}}$ , 其中  $C$  为以  $z_0$  为圆心,  $r$  为半径的正向圆周,  $n$  为整数(如图 3.4).

变成单变量积分..这样直接就可以积分了.

解  $C$  的方程可写作  $z = z_0 + re^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 因而

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} &= \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{i\theta}}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i}{r^n e^{in\theta}} d\theta \\ &= \frac{i}{r^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i \sin n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

当  $n = 0$  时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

当  $n \neq 0$  时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0.$$

我们注意到这个积分结果与  $r$  和  $z_0$  无关.

## 3.2 柯西定理及其推广

有了曲线积分的定义之后,我们会联想到高等数学中有曲线积分与路径

无关,也就是函数沿闭曲线积分为零之说,那么对于复变函数它沿闭曲线的积分是否可以为零?若可以,我们要问在什么情况下函数沿闭曲线的积分为零?

由  $\oint_C z dz = 0$  和  $\oint_C \frac{1}{z} dz = 0$  可以看出函数沿闭曲线积分为零与函数在  $|z|=1$  某区域上的解析性密切相关,1825年柯西对上述问题做了肯定的回答,给出了如下柯西定理.

**定理 3.1** 设  $C$  是一条简单正向闭曲线,  $f(z)$  在以  $C$  为边界的有界闭区域  $D$  上解析,那么

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

要证明这个定理是比较困难的.

1851年黎曼在附加假设“ $f(z)$ 在 $D$ 上连续”的条件下给出了一个如下简单的证明.

证 设  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . 由公式

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy,$$

及  $f(z)$  在  $D$  上连续,  $f(z)$  在  $D$  上解析. 导致  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在  $D$  上连续, 并且柯西—黎曼方程

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}, \quad \frac{u}{y} = -\frac{v}{x}$$

成立, 由格林公式

$$\oint_C u dx - v dy = \oint_D \left( -\frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right) dx dy = 0,$$

$$\oint_C v dx + u dy = \oint_D \left( \frac{u}{x} - \frac{v}{y} \right) dx dy = 0,$$

故

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

1900年古萨(Coursat)发表上述定理证明的新方法,这个新的证明方法较长,较复杂,但它无须将  $f(z)$  分为实部与虚部,更重要的是免去了  $f(z)$  在  $D$  上为连续函数的假设. 因此在柯西定理中不必假设  $f(z)$  在  $D$  上连续.

如果  $C$  为  $D$  内的任意一条简单闭曲线,显然  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

例 以下两等式均因被积函数在  $|z|=1$  所围区域上解析而成立

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\cos z} = 0, \quad \oint_{|z|=1} z^2 e^z dz = 0.$$

多连通域是我们经常遇到的区域, 以下我们将柯西定理的结论推广到多连通域上.

**定理 3.2** 设  $D$  为由外线路  $C_0$  及内线路  $C_1, C_2, \dots, C_n$  围成的有界多连通域 (如图 3.5),  $f(z)$  在多连通域  $D$  内及边界线  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  上解析, 那么

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

这里  $C$  为多连通域  $D$  的所有边界, 其方向是  $C_0$  按逆时针方向取,  $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$  按顺时针方向取.

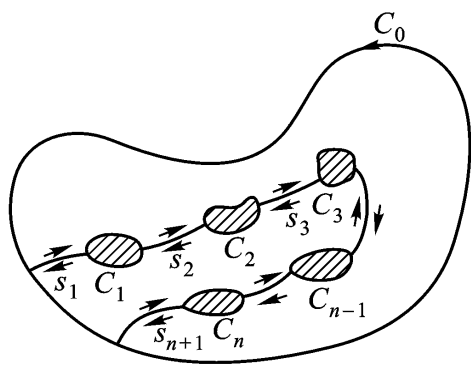


图 3.5

**证** 我们用弧  $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$  按图所示将区域  $D$  分割成两个单连通域,  $C, C''$  分别表示这两个单连通域的边界线, 那么根据柯西定理有

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad \oint_{C''} f(z) dz = 0.$$

从而

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C''} f(z) dz = 0.$$

由于沿弧  $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$  的积分在沿  $C$  和  $C''$  的积分中各出现一次, 且互为反方向, 故在上式左端的积分中它们相互抵消形成了

$$\oint_C f(z) dz + \oint_{C''} f(z) dz = \oint_C f(z) dz,$$

所以

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

于是定理得证.

定理中  $\oint_C f(z) dz = 0$  也可写成

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \left( \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \dots + \oint_{C_n} \right) f(z) dz.$$

特别地, 当  $D$  的内线路只有一条线路  $C_1$  时, 如图 3.6 所示

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

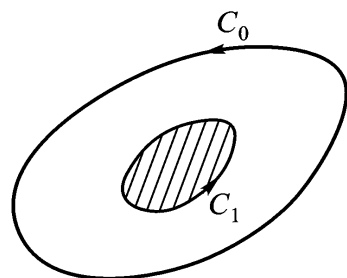


图 3.6

这就是说: 在区域上解析的函数沿闭曲线的积分, 不因闭曲线在区域内作连续

变形而改变它的值. 这个事实称为闭路变形原理.

例  $\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = 0$ ,  $C$  为如图 3.7 所示所有的边界线. 包括方向. 逆时针是正方向.

例  $\oint_{C_0} \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z}$ ,  $C_0$  和  $C_1$  为如图 3.8 所示的边界线.

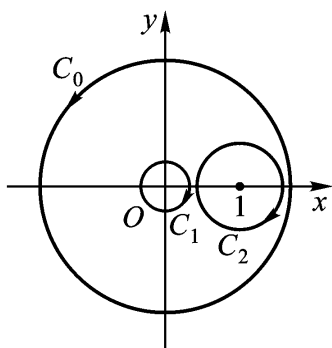


图 3.7

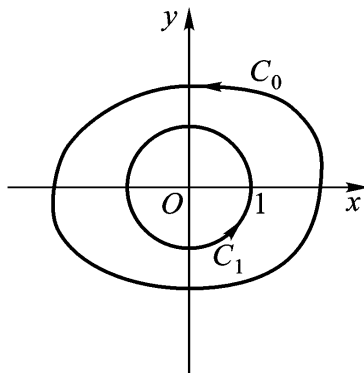


图 3.8

由柯西定理我们可以进一步得到:

**定理 3.3** 设  $f(z)$  是在单连通域  $D$  内的解析函数. 我们有

(1) 若  $C$  是  $D$  内连接两点  $z_0$  及  $z$  的任一条简单曲线, 那么沿  $C$  的积分

$$\int_C f(s) ds$$

单连通 (simply connected) 是拓扑学的概念。设  $X$  是拓扑空间, 如果  $X$  中任何一个点的回路都可以连续地收缩成这个点, 那么就称  $X$  为单连通的

的值不依赖于曲线  $C$ , 而只由  $z_0$  及  $z$  决定, 这积分也可记作

$$\int_{z_0}^z f(s) ds.$$

(2) 固定  $z_0$ , 而让  $z$  在  $D$  内任意取值, 那么上述积分所确定的函数  $F(z)$  在  $D$  内解析, 并且  $F'(z) = f(z)$ .

(3) 若  $F(z)$  为  $f(z)$  在区域  $D$  内的原函数, 那么

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

这里  $z_0, z_1$  为  $D$  内两点.

证 (1) 设  $C$  是  $D$  内连接  $z_0$  及  $z$  的另一条任意曲线, 那么  $C - C'$  便为一条封闭曲线如图 3.9, 由柯西定理知:

$$\int_{C-C'} f(s) ds = \int_C f(s) ds - \int_{C'} f(s) ds = 0,$$

即

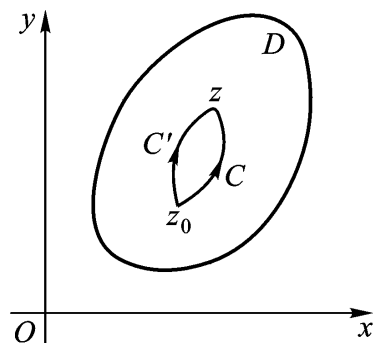


图 3.9

$$\int_C f(s) ds = \int_C f(s) ds,$$

如果我们令  $f(z) = u + iv$ , 那么由 3.1 节积分的计算公式有

$$\int_C u dx - v dy = \int_C u dx - v dy,$$

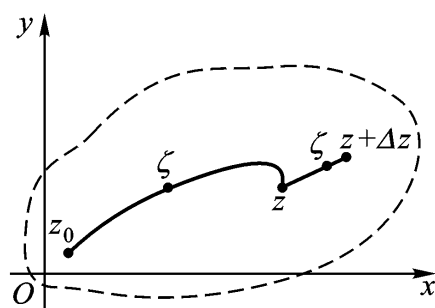
$$\int_C v dx + u dy = \int_C v dx + u dy.$$

这说明曲线积分  $\int_C u dx - v dy$  和  $\int_C v dx + u dy$  与  $D$  内的路径无关, 仅由曲线的起点和终点来决定, 也就是说积分  $\int_C f(s) ds$  与路径无关, 由  $z_0, z$  来确定.

下面我们根据导数的定义来推导定理的第二个结论.

(2) 设  $z + \Delta z$  为  $D$  的属于  $z$  的足够小的邻域内的点, 那么

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z + \Delta z} f(s) ds,$$



这里从  $z$  到  $z + \Delta z$  的积分路线可选择如图 3.10 所示线段.

图 3.10

由于

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) ds = f(z) \int_z^{z + \Delta z} ds = f(z) \cdot \Delta z,$$

所以

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(s) - f(z)] ds,$$

但  $f(z)$  在点  $z$  连续. 因此, 对任意给定的  $\epsilon > 0$  存在一个正数  $\delta$  当  $0 < |s - z| < \delta$  时,

$$|f(s) - f(z)| < \epsilon$$

成立, 此式在取  $|\Delta z| < \delta$  时仍然成立, 那么

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} |\Delta z| \epsilon = \epsilon,$$

即

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

故

$$F'(z) = f(z).$$

依照高等数学中牛顿—莱姆尼兹公式的推导方法, 易得定理的第三个结论.

(3) 因为  $F'(z) = F(z) = f(z)$ , 那么

$$F'(z) - F(z) = c.$$

我们取  $z = z_0$ , 此时  $F(z_0) = \int_{z_0}^{z_0} f(s) ds = 0$ , 从而推得  $c = F'(z_0)$ , 所以

$$\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z) - F(z_0),$$

当  $z$  取  $z_1$  时, 上式为

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

例  $F(z) = \frac{z^3}{3}$  为解析函数  $f(z) = z^2$  在整个复平面上的原函数. 因此

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3 = \frac{2}{3}(-1+i).$$

它是函数沿  $z=0$  到  $z=1+i$  的任一条简单曲线的积分, 被积函数的解析性保证了原函数的存在.

\* 例 函数  $\frac{1}{z}$  在复连通域  $R_1 < |z| < R_2$  ( $R_1 < R_2 < +\infty$ ) 内解析,  $z_0, z_1$  不取到原点, 计算积分

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z}.$$

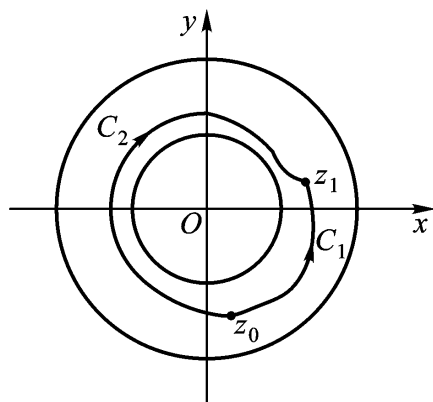


图 3.11

解 在圆环  $D: R_1 < |z| < R_2$  ( $R_1 < R_2 < +\infty$ ) 内取定两点  $z_0$  及  $z_1$ , 作连接两点  $z_0$  及  $z_1$  的简单曲线  $C_1$  及  $C_2$  (如图 3.11), 取定  $\text{Arg } z$  在  $z_0$  的值为  $\arg z_0$ . 当  $z$  沿  $C_1$  连续变动到  $z_1$  时,  $z$  的幅角从  $\arg z_0$  连续变动到  $\arg z_1$ , 于是当  $z$  沿  $C_2$  从  $z_0$  连续变动到  $z_1$  时,  $z$  的幅角从  $\arg z_0$  连续变动到  $\arg z_1 - 2\pi$ .

现在, 设  $z = re^{i\theta}$ , 则

$$dz = e^{i\theta} dr + ire^{i\theta} d\theta,$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \frac{dz}{z} &= \int_{C_1} \frac{dr}{r} + i \int_{C_1} d\theta \\ &= \ln |z_1| - \ln |z_0| + i(\arg z_1 - \arg z_0) \\ &= \ln z_1 - \ln z_0. \end{aligned}$$

同理



$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \ln |z_1| - \ln |z_0| + i(\arg z_1 - 2\pi - \arg z_0) \\ &= \ln z_1 - \ln z_0 - 2\pi i. \end{aligned}$$

如果  $z$  从  $z_0$  沿  $C_2 + C_1^-$  连续变动  $k$  周到  $z_1$  的话, 有

$$\frac{dz}{z} = \ln z_1 - \ln z_0 - 2k\pi i.$$

当  $z$  从  $z_0$  沿  $C_1 + C_2^-$  连续变动  $k$  周到  $z_1$  时,

$$\frac{dz}{z} = \ln z_1 - \ln z_0 + 2k\pi i.$$

由此, 归纳以上得

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z} = \ln z_1 - \ln z_0 \pm 2k\pi i.$$

$k$  值取决于从  $z_0$  到  $z_1$  不经过原点  $z$  所变动的圆周数.

### 3.3 柯西积分公式

现在我们来证明一个重要的结论.

**定理 3.4** 设  $f(z)$  在简单正向闭曲线  $C$  及其所围区域  $D$  内处处解析,  $z_0$  为  $D$  内任一点, 那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.3)$$

公式(3.3)称为柯西积分公式, 它是说如果函数  $f(z)$  在  $C$  及  $C$  所围的区域内解析, 那么  $f(z)$  在  $C$  内任一点  $z_0$  的值由  $f(z)/(z - z_0)$  在  $C$  上的积分值完全确定.

证 函数  $f(z)/(z - z_0)$  在曲线  $C$  及  $C$  所围成的区域内除点  $z_0$  外处处解析. 因此, 由柯西定理的推广定理知在如图 3.12 所示  $C$  及  $C_0$  所围的区域上有

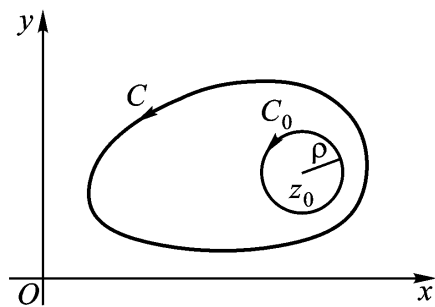


图 3.12

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

因而

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f(z)}{c_0 z - z_0} dz - f(z_0) \frac{dz}{c_0 z - z_0} \\
 &= \frac{f(z) - f(z_0)}{c_0 z - z_0} dz.
 \end{aligned}$$

又因为  $f(z)$  在  $z_0$  解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 从而对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在正数  $\delta$ , 当  $0 < |z - z_0| < \delta$  时,

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

我们取  $\delta < \epsilon$ , 那么对  $C_0$  上的点  $z$ , 仍有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f(z)}{c_0 z - z_0} dz - 2i f(z_0) \right| &= \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{c_0 z - z_0} dz \right| \\
 &< \epsilon = 2\epsilon.
 \end{aligned}$$

由于上面不等式的左端小于任意的正数, 而根据闭路变形原理, 对任两个小于  $\delta$  的  $z_1$  和  $z_2$ .

$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} dz = \frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} dz.$$

因此

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{c_0 z - z_0} dz \right|$$

的值在  $\epsilon < \delta$  时为一小于任意正数的常数, 从而它只能为零, 故

$$\frac{f(z)}{c_0 z - z_0} dz - 2i f(z_0) = 0,$$

即

$$f(z_0) = \frac{1}{2i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

此定理可推广到有界的闭的多连通域上(如图 3.5), 这时  $C$  为多连通域所有的正向边界即外边界线取逆时针, 内边界线取顺时针,  $f(z)$  为  $C$  及多连通域上的解析函数.  $z_0$  为多连通域内任一点.

例 函数  $f(z) = z/(9 - z^2)$  在  $C: |z| = 2$  及其所围的区域内处处解析.  $z_0 = -i$  为该区域内的一点, 那么

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz &= \oint_C \frac{\frac{z}{9 - z^2}}{z + i} dz \\
 &= 2\pi i \frac{-i}{9 - (-i)^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}.$$

### 3.4 解析函数的导数

现在我们来证明一个解析函数具有任意阶导数, 即它的导函数仍为解析函数.

**定理 3.5** 设  $f(z)$  在简单正向闭曲线  $C$  及其所围区域  $D$  内处处解析,  $z_0$  为  $D$  内任一点, 那么

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (3.4)$$

这里  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

**证** 因为  $f(z)$  为简单正向闭曲线  $C$  及其所围区域  $D$  内的解析函数,  $z_0$  为  $D$  内的任一点,  $z$  为  $C$  上的点, 则由柯西公式知

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

现证  $f(z)$  在  $z_0$  的导数存在且

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

因为

$$\begin{aligned} f(z_0 + z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + z)} - \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{z}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - z)(z - z_0)} dz, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - z)} dz.$$

欲证

$$\lim_{z \rightarrow 0} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - z)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

即

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} \oint_C \left[ \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - z)} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right] dz \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \oint_C z \frac{f(z)}{(z - z_0 - z)(z - z_0)^2} dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

取  $0 < |z| < d$ ,  $d$  为点  $z_0$  到  $C$  上点  $z$  的最短距离, 注意  $|z - z_0| < d$ , 而且

$$|z - z_0 - z| = ||z - z_0| - |z|| < d - |z|,$$

因此

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - z)(z - z_0)^2} dz \right| \leq \frac{|z| ML}{(d - |z|)^2}.$$

其中  $M$  为  $|f(z)|$  在  $C$  上的最大值,  $L$  为曲线  $C$  的长, 由极限定义知

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - z)(z - z_0)^2} dz = 0,$$

即

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

假设当  $n = k$  时有

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

成立, 用和上面类似的方法, 推导

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(k)}(z_0 + z) - f^{(k)}(z_0)}{z} \\ &= \frac{1}{z} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - z)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \end{aligned}$$

当  $z \rightarrow 0$  时的极限为

$$\frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz.$$

这里的推导过程稍显复杂些, 我们就不重复了.

此定理可推广到有界的闭的多连通区域上, 这时  $C$  为多连通域的所有正向边界,  $f(z)$  为  $C$  及多连通区域上的解析函数,  $z$  为区域内的任一点, 最终的结论仍为公式(3.4).

推论 如果一个函数在某点解析, 那么它的各阶导函数在该点仍解析.

当  $n = 0$  时, 式(3.4)便是上节的柯西公式.

从式(3.4)我们还可得到一个非常有用的公式

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

用它可求解积分.

例 令  $z_0$  为正向简单闭曲线  $C$  内的任一点, 当  $f(z) = 1$  时, 由公式(3.5)立即可得

$$\frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

**例 3.7** 计算积分  $\oint_C \frac{\cos z}{(z - i)^3} dz$ , 其中  $C$  是绕点  $i$  的简单正向闭曲线.

**解** 因为  $\cos z$  在复平面上处处解析, 由定理

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\cos z}{(z - i)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=i} \\ &= -2\pi i \sinh 1. \end{aligned}$$

由柯西定理我们知道如果一个函数在区域  $D$  内解析, 那么它沿该区域内任一条简单闭曲线  $C$  的积分为零. 反过来, 如果函数  $f(z)$  沿区域  $D$  内任一条简单闭曲线的积分为零. 这个函数在  $D$  内解析吗? 这个问题由下面的定理来回答.

\* 莫勒拉 (E. Morera) 定理: 如果函数  $f(z)$  在单连通区域  $D$  内连续, 并且对于  $D$  内的任一条简单闭曲线  $C$ , 我们有

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

那么  $f(z)$  在  $D$  内解析.

**证** 因为

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

所以对  $D$  内两点  $z_0$  及  $z$  积分

$$\int_{z_0}^z f(s) ds$$

与路径无关, 仅由积分上限  $z$  来决定, 设其为函数  $F(z)$ , 依照 3.2 节有关内容的证明, 我们可知  $F'(z) = f(z)$ , 这说明  $F(z)$  在  $D$  内解析, 由本节定理的推论得  $F(z)$  的导函数  $f(z)$  也为  $D$  内的解析函数.

## 第3章习题

### 3.1.1 求积分

$$\int_0^{2a} dz,$$

积分路径为从  $z=0$  到  $z=2a$  的摆线:  $x = a(1 - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

### 3.1.2 就下面各种情况求积分

$$\oint_C f(z) dz.$$

(1)  $f(z) = y - x - i3x^2$ ,  $C$  是

(a) 从  $z=0$  到  $z=1+i$  的直线段.

(b) 从  $z=0$  到  $z=i$  的直线段.

(c) 从  $z=i$  到  $z=1+i$  的直线段.

(2)  $f(z) = (z+2)/z$ ,  $C$  是

(a) 半圆周  $z = 2e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ).

(b) 半圆周  $z = 2e^{it}$  ( $\pi \leq t \leq 2\pi$ ).

(c) 圆周  $z = 2e^{it}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

(3)  $f(z) = e^z$ ,  $C$  是

(a) 从  $z=i$  到  $z=1$  的直线段.

(b) 沿坐标轴从  $z=i$  到  $z=0$  再到  $z=1$  的直线段.

(4)  $f(z) = z - 1$ ,  $C$  沿下面路径从  $z=0$  到  $z=2$ .

(a) 圆周  $z = 1 + e^{it}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).

(b)  $x$  轴上线段:  $0 \leq x \leq 2$ .

(5)  $f(z) = \begin{cases} 4y, & \text{当 } y > 0; \\ 1, & \text{当 } y < 0. \end{cases}$   $C$  是沿  $y = x^3$  从  $z = -1 - i$  到  $z = 1 + i$  的

弧段.

### 3.1.3 求值

$$\int_{|z|=1} z^m \bar{z}^n dz,$$

这里  $m, n$  为正整数.

3.1.4 证明: 如果  $C$  是以  $z=0, z=1, z=i, z=1+i$  为顶点的正方形的正向边界, 那么

$$\int_C (3z+1) dz = 0.$$

3.1.5 设  $C$  为习题 3.1.4 中的闭曲线, 计算  $\int_C e^{\bar{z}} dz$ .

3.1.6 计算积分  $\int_C \frac{1}{z} dz$ ,

这里曲线  $C$  为  $z = x + i(1-x^2)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ), 方向分别取顺时针和逆时针方向.

3.1.7 设  $C$  为  $|z|=2$  上从  $z=2$  到  $z=2i$  在第 一 象限的弧, 证明

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| = \frac{\pi}{3}.$$

3.1.8 设  $C$  为从  $z=i$  到  $z=1$  的直线段, 通过观察线段上点到原点的距离, 证明

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4 \cdot 2.$$

3.1.9 令  $C_r$  为正向圆周  $|z| = r$  ( $r > 1$ ), 证明

$$\left| \int_{C_r} \frac{\ln z}{z^2} dz \right| < 2 \frac{+\ln r}{r},$$

并且积分值当  $r$  趋于无穷时而逼近于零.

3.1.10 证明:(a) 如果  $C_0$  为正向圆周  $|z - z_0| = R$ ,  $f(z)$  在  $C_0$  上分段连续, 那么

$$\int_{C_0} f(z) dz = iR \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

(b) 设  $C$  为正向圆周  $|z| = R$ ,  $f(z)$  在  $C$  上分段连续, 那么

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z - z_0) dz.$$

3.1.11 等式  $\operatorname{Re} \int_C f(z) dz = \int_C \operatorname{Re} [f(z)] dz$  成立否? 若成立, 证之; 若不成立, 请举例说明.

3.1.12 设  $f(z)$ ,  $g(z)$  在单连通域  $D$  内解析,  $\gamma$  是  $D$  内两点, 试证

$$\int_{\gamma} f(z) g'(z) dz = [f(z) g(z)]_{\gamma} - \int_{\gamma} g(z) f'(z) dz.$$

3.1.13 计算  $\int_{|z|=1} |z-1| |dz|$ .

3.2.1 应用柯西定理证明, 当  $f(z)$  为下面各函数时,

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0.$$

$$(a) f(z) = \frac{z^2}{z-3};$$

$$(b) f(z) = ze^{-z};$$

$$(c) f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2};$$

$$(d) f(z) = \operatorname{sh} z;$$

$$(e) f(z) = \tan z;$$

$$(f) f(z) = \ln(z+2).$$

3.2.2 设  $C$  为圆周  $|z| = 4$  和顶点为  $z = \pm 1$ ,  $z = \pm i$  的正方形所围区域的正向边界, 证明当  $f(z)$  为以下各函数时,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

$$(a) f(z) = \frac{1}{3z^2 + 1};$$

$$(b) f(z) = \frac{z+2}{\sin(\frac{z}{2})};$$

$$(c) f(z) = \frac{z}{1 - e^z}.$$

3.2.3 当  $C$  为矩形  $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$  的正向边界时, 证明

$$(a) \quad \int_C \frac{dz}{z - 2 - i} = 2\pi i;$$

$$(b) \quad \int_C (z - 2 - i)^{n-1} dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

(提示: 应用例题结果和闭路变形原理).

3.2.4 试由原函数推导对任何从  $z_1$  到  $z_2$  的曲线, 有

$$\int_C z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

3.2.5 计算下列各积分, 积分路径为任意曲线.

$$(a) \quad \int_i^{i+2} e^z dz;$$

$$(b) \quad \int_0^{+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz;$$

$$(c) \quad \int_1^3 (z - 2)^3 dz;$$

$$(d) \quad \int_a^b \frac{dz}{z^2};$$

$$(e) \quad \int_a^b \frac{3z+2}{z-1} dz.$$

并说明(e), (d)积分路径为什么不能过  $z=1$  及  $z=0$ .

3.2.6 (a) 借助  $\ln z = \ln|z| + i\arg z$  ( $r > 0, 0 < \arg z < 2\pi$ ) 为  $1/z$  的原函数这一事实, 证明

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = -2\pi i.$$

积分路径为沿  $|z|=2$  的左半圆周从  $z=-2i$  到  $z=2i$ .

(b) 如果  $C$  为正向圆周  $|z|=2$ , 从(a)怎样导出

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

3.2.7 设  $f(z)$  在  $0 < |z-a| < R$  内解析, 且  $f(z)$  在  $z=a$  处连续, 证明  $f(z)$  在圆  $|z-a| < R$  内解析.

3.2.8 设函数  $f(z)$  在圆环  $0 < |z| < 1$  内解析, 且沿任何圆周  $C: |z|=R$  ( $0 < R < 1$ ) 的积分为零, 问  $f(z)$  是否必须在  $z=0$  处解析, 试举例说明.

3.2.9 (a) 证明: 当  $C$  为任何不通过原点的闭曲线时,

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = 0;$$

$$(b) \text{ 沿怎样的简单闭曲线有 } \int_C \frac{1}{z} dz = 0;$$

$$(c) \text{ 沿怎样的简单闭曲线有 } \int_C \frac{dz}{z^2 + z + 1} = 0.$$

3.2.10 设  $f(z)$  在单连通域  $B$  内处处解析, 且不为零,  $C$  为  $B$  内任一简单闭曲线, 问积分



$$\oint_C \frac{f(z)}{f'(z)} dz$$

是否为零,为什么?

3.2.11 设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内任一条简单正向闭曲线,问  $\oint_C \operatorname{Re}[f(z)] dz = \oint_C \operatorname{Im}[f(z)] dz = 0$  成立否? 如成立,证之;如不成立,请举例说明.

### 3.3.1 计算积分

(a)  $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$ ;

(b)  $\oint_{x^2+y^2=2x} \frac{\sin \frac{z}{4}}{z^2-1} dz$ ;

(c)  $\oint_C \frac{z}{(2z+1)(z-2)} dz$ ,

$$C: |z|=1; |z-2|=1; |z-1|=\frac{1}{2}; |z|=3;$$

(d)  $\oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z^2-i}$ ;

(e)  $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz \quad (a>1)$ ;

(f)  $\oint_C \frac{dz}{z^2+9}$   $C$ : 不过  $z=\pm 3i$  的任意简单正向闭曲线;

(g)  $\oint_{|z+i|=5/2} \frac{e^z}{z(z-i)} dz$ ; (h)  $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$ .

3.3.2 设  $C$  为单位圆周  $|z|=1$ , 由  $\oint_C \frac{dz}{z+2}$  之值证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0.$$

3.3.3 计算积分  $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$ , 从而证明

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = 2\pi.$$

3.3.4 设曲线  $C: x^2+y^2=3$ , 函数

$$f(z) = \oint_C \frac{3s^2-7s+1}{s-z} ds,$$

求  $f(1+i)$ .

3.3.5 设  $f(z)$  与  $g(z)$  在区域  $D$  内处处解析,  $C$  为  $D$  内任一条简单闭曲线, 它的内部全含于  $D$ , 如果  $f(z)=g(z)$  在  $C$  上所有的点处处成立, 试证在  $C$

内所有的点处  $f(z) = g(z)$  也成立.

3.3.6 通过函数  $f(z) = e^z$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1 + i$  对下述结论进行验证: 若  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内以  $a, b$  为端点的直线段, 则存在数  $\eta$  ( $|\eta| \leq 1$ ) 与点  $\zeta \in C$ , 使得

$$f(b) - f(a) = \eta(b - a)f(\zeta).$$

### 3.4.1 计算积分

$$(a) \int_{|z+i|=5} \frac{z^3 - z}{(z-4)^3} dz; \quad (b) \int_{|z|=1} \frac{ze^z}{(4z+i)^2} dz;$$

$$(c) \int_{4x^2+y^2=2y} \frac{e^z}{(1+z^2)^2} dz;$$

$$(d) \int_C \frac{\sin 2z}{z^4} dz, \quad C: x = \pm 2, y = \pm 2 \text{ 围成的正方形正向曲线};$$

$$(e) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{100}} dz; \quad (f) \int_{|z|=1} z^{-2n-1} \cos z dz;$$

$$(g) \int_{C_1+C_2} \frac{\cos z}{z^3} dz, \quad C_1: |z|=2, C_2: |z|=3;$$

$$(h) \int_{2-i}^{\frac{1}{2-i}} \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}, \quad C: \text{不过 } z = \pm ai \text{ 的简单正向闭曲线};$$

$$(i) \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-i)^4} dz; \quad (j) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)^2(z-3)^5}.$$

### 3.4.2 讨论并计算下列积分

$$(a) \int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-i)^n} \quad (r > 1);$$

$$(b) \int_{2-i}^{\frac{1}{2-i}} \frac{dz}{|z|=R (z-a)^n (z-b)^n} \\ (a, b \text{ 均不在 } |z|=R \text{ 上, } n \text{ 为正整数}).$$

### 3.4.3 证明:

$$\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^n e^{zs}}{n! s^n} ds$$

这里  $C$  是围绕原点的一条简单正向闭曲线.

3.4.4 设  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 且  $f(0) = 1$ , 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} [2 \pm (z + \frac{1}{z})] f(z) \frac{dz}{z}.$$

3.4.5 设  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 且  $|f(z)| \leq 1$ , 试证

$$|f(0)| \leq 1.$$

3.4.6 如果  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 并且

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}.$$

证明:

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e(n+1)! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(提示: 考虑  $f(z)$  在  $|z| = \frac{n}{n+1}$  上的积分).

3.4.7 设  $f(z)$  在区域  $D$  内解析,  $C$  为  $D$  内任一条正向简单闭曲线, 证明对在  $D$  内, 但不在  $C$  上的任一点  $z_0$ , 下面等式成立

$$\frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

# 第 4 章 级 数

本章讲述复数序列, 常数项级数, 复平面上的函数项级数, 幂级数和罗朗级数, 其中相当分量的内容是高等数学中级数相关内容在复数域上的推广. 这一章的主要内容是解析函数的泰勒展式和罗朗展式, 罗朗级数是复变函数特有的内容.

## 4.1 收敛序列和收敛级数

### 4.1.1 收敛序列

关于复数序列的概念与高等数学中实数序列概念相对应的有: 复数序列是指按照某一法则, 有复数  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  依次序排列所形成的一列数. 简记为  $z_n$ ,  $z_n$  称为序列的一般项.

定义 4.1 若对任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 总存在着正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 不等式

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

成立, 则称复数序列  $\{z_n\}$  收敛于复数  $z$ . 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z,$$

也称  $z$  为  $z_n$  在  $n \rightarrow \infty$  时的极限. 否则, 称  $\{z_n\}$  是发散的.

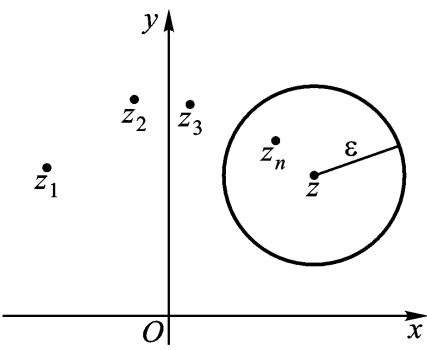


图 4.1

几何上, 收敛序列表现为当  $n$  充分大时,  $z_n$  就落在了  $z$  的以  $\varepsilon$  为半径的邻域内.  $\varepsilon$  越小,  $n$  就越大,  $z_n$  距  $z$  也就越近, 一般地,  $N$  依赖于  $\varepsilon$  (如图 4.1).

我们可以证明, 若复数序列  $\{z_n\}$  收敛于复数  $z$ , 那么  $z$  值唯一.

定理 4.1 设序列  $z_n = x_n + i y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $z = x + i y$ , 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \tag{4.1}$$

的必要与充分条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \tag{4.2}$$

同时成立.

证 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , 由定义

任意取定  $\varepsilon > 0$ , 总存在着正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| < \epsilon,$$

而

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \epsilon, \\ |y_n - y| &= |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \epsilon, \end{aligned}$$

故(4.2)式成立.

反过来, 由(4.2)式成立, 对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在着正整数  $N_1, N_2$ , 使得  $n > N_1$  时有

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

成立. 当  $n > N_2$  时有

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

成立. 因此, 若取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 当  $n > N$  有

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{和} \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

同时成立, 从而

$$|(x_n - x) + i(y_n - y)| = |x_n - x| + |y_n - y| < \epsilon.$$

所以, 当  $n > N$  时

$$|z_n - z| < \epsilon$$

成立, 即(4.1)式成立. 定理得证.

**例 4.1** 下面各数列是否收敛? 若收敛求其极限.

$$(a) \quad z_n = \frac{1 + ni}{1 - ni}; \quad (b) \quad z_n = e^{-\frac{n}{2}i};$$

$$(c) \quad z_n = \left(1 + \frac{i}{3}\right)^{-n}.$$

**解** (a) 因为

$$z_n = \frac{1 - n^2}{1 + n^2} + i \frac{2n}{1 + n^2},$$

所以

$$x_n = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}, \quad y_n = \frac{2n}{1 + n^2}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . 故由定理 4.1 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1.$$

(b) 因为

$$z_n = \cos \frac{n}{2} - i \sin \frac{n}{2},$$

而  $\cos \frac{n}{2}$  在  $n$  趋于无穷时, 极限不存在. 所以原数列发散.

(c) 因为

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos \frac{n}{6} - i \left(\frac{3}{2}\right)^n \sin \frac{n}{6}.$$

所以

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos \frac{n}{6}, \quad y_n = - \left(\frac{3}{2}\right)^n \sin \frac{n}{6}.$$

而  $\lim_n x_n = \lim_n y_n = 0$ . 故由定理 4.1 得

$$\lim_n z_n = 0.$$

### 4.1.2 收敛数项级数

定义 4.2 由给定的复数序列

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

构成的表达式

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

称为无穷级数, 简称为级数, 记作  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (4.3)$$

式(4.3)的前  $N$  项和

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_N \quad (N = 1, 2, \dots)$$

称为级数(4.3)的部分和, 它构成了一个复数序列.

定义 4.3 如果级数(4.3)的部分和序列收敛于复数  $S$ , 则称级数(4.3)

收敛,  $S$  称为级数和, 记作  $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ . 否则称级数(4.3)发散.

定理 4.2 设  $z_n = x_n + i y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $S = X + i Y$ , 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

的必要与充分条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \text{和} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

同时成立.

证 设  $S_N = \sum_{n=1}^N z_n = \sum_{n=1}^N x_n + i \sum_{n=1}^N y_n = x_N + i y_N$ , 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ , 所

以

$$\lim_N S_N = S.$$

由定理 4.1 知

$$\lim_N x_N = X \quad \text{且} \quad \lim_N y_N = Y.$$

由实数项级数收敛的定义知

$$x_n = X \quad \text{且} \quad y_n = Y.$$

以上过程可逆从而定理得证.

例 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} + \frac{i}{2^n})$  因为调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 虽然几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛, 但由定理 4.2 知原级数是发散的.

例 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  因为交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  收敛,  $p=2$  的  $p$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以原级数是收敛的.

$\therefore \left[ \frac{1}{n^2} \right]$  级别, 所以收敛. 用积分来放缩后显然.

另外, 由实数项级数收敛的必要条件知  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛的必要条件为  $\lim_n z_n = 0$ .

**定理 4.3** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  必收敛.

证 设  $z_n = x_n + i y_n (n = 1, 2, \dots)$ , 因为

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq |x_n|, |y_n|,$$

而正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 由高等数学中比较审敛法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

收敛, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

绝对收敛, 由定理 4.2 知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛.

**定义 4.4** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称原级数  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛; 非绝对收敛的收敛级数, 称为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  为正项级数, 关于它的敛散性讨论可依正项级数理论判定.

**例 4.2** 判别下列级数是否绝对收敛, 是否收敛.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$$

**解** 因为

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(6+5i)^n}{8^n} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{6+5i}{8} \right|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{61}{8}^n.$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-n} + e^n}{2^n} \right).$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n}{2}}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2}}{n}.$$

一式右边给出的是公比小于 1 的收敛的几何级数, 故级数 (a) 绝对收敛. 二式右边给出的是实常数项级数, 它的一般项在  $n$  趋向无穷大时趋于无穷, 故级数 (b) 发散. 三式右边的实部和虚部分别为收敛级数. 显然级数 (c) 为条件收敛.

### 4.1.3 函数项级数

设函数  $u_n(z)$  在复平面的区域  $D$  上有定义 ( $n=1, 2, \dots$ ), 我们称形如

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_n(z) + \dots \quad (4.4)$$

的表达式为 复变函数项级数. 记作  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ . 称级数的前  $N$  项和

$$U_N(z) = \sum_{n=1}^N u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots + u_N(z)$$

为级数 (4.4) 的 部分和. 设函数  $U(z)$  在  $D$  上有定义, 如果对于  $D$  上每一点  $z$ , 级数 (4.4) 都收敛于  $U(z)$ , 那么我们说级数 (4.4) 在  $D$  上收敛于  $U(z)$ . 或者说这级数有 和函数  $U(z)$ . 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = U(z).$$

## 4.2 幂级数

在复变函数项级数中有一类特别重要的级数, 这就是幂级数.

### 4.2.1 幂级数的概念

**定义 4.5** 形如

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.5)$$



的函数项级数称为幂级数, 记为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , 这里  $z_0, c_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 为复常数,  $z$  为  $z_0$  的邻域内的任一点.

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n (z - z_0)^n$$

称为幂级数(4.5)的部分和. 若级数(4.5)在区域  $D$  上收敛于函数  $S(z)$ , 则称  $S(z)$  为幂级数(4.5)在  $D$  上的和函数. 即

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

如果作变量替换  $\zeta = z - z_0$ , 则幂级数(4.5)便写成以下形式(仍改写为  $z$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (4.6)$$

关于幂级数我们主要讨论形式(4.6).

**定理 4.4** 若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

在  $z = z_1$  ( $z_1 \neq 0$ ) 收敛, 那么该级数对任意满足  $|z| < |z_1|$  的  $z$  都绝对收敛.

这个定理通常称为阿贝尔定理, 现证明如下:

证 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$  收敛, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_1^n = 0.$$

即存在着  $M > 0$ , 使

$$|c_n z_1^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

若记

$$\rho = \frac{|z|}{|z_1|} \quad (|z_1| > |z|),$$

则

$$|c_n z^n| = |c_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \rho^n.$$

由于几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \rho^n$  (公比  $\rho < 1$ ) 收敛. 故对任一满足  $|z| < |z_1|$  的点

$z$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$  收敛, 从而级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  绝对收敛.

如果级数(4.6)在点  $z_2$  处发散,那么对任一满足  $|z| > |z_2|$  的点  $z$  级数(4.6)都发散.否则,若  $|z| > |z_2|$ ,而级数(4.6)在  $z$  点收敛,由定理知级数(4.6)在  $z_2$  处一定收敛,导出矛盾.

对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

若  $z_1$  为其收敛点,那么对所有满足

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

的点  $z$ ,该级数都绝对收敛.同理,如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (4.7)$$

在  $z = z_1$  ( $z_1 \neq z_0$ )收敛,那么级数(4.7)在所有满足

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|$$

的点  $z$  处绝对收敛.

由定理知:对每一个收敛点  $z_1$  级数(4.6)都相应地有一个收敛区域  $|z| < |z_1|$ ,距原点最远的收敛点相应的收敛区域称为级数(4.6)的收敛圆盘,收敛圆盘的半径称为级数(4.6)的收敛半径.

### 4.2.2 幂级数的收敛半径

对于幂级数

$$1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots,$$

若固定  $z$ ,从某个  $n$  开始以后,总有  $\frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$ .于是从此  $n$  以后,有  $\left| \frac{z^n}{n^n} \right| < \frac{1}{2^n}$ ,故该级数对任意  $z$  均收敛,它的收敛半径为无穷大.

而幂级数

$$1 + z + 2^2 z^2 + \dots + n^n z^n + \dots$$

当  $z \neq 0$  时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^n z^n = 0,$$

故该级数处处发散,收敛半径为零.

关于如何求幂级数的收敛半径  $R$ .我们有如下柯西—阿达玛(Hadamard)公式.

**定理 4.5** 对幂级数(4.6)如果下列条件之一成立:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l.$$

那么该级数的收敛半径  $R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & (0 < l < +\infty); \\ 0, & (l = +\infty); \\ +\infty, & (l = 0). \end{cases}$

证 (1) 若  $\lim_n \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l$ , 则当

$$\lim_n \left| \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n} \right| = |z| l < 1,$$

即  $|z| < R$  时级数(4.6)绝对收敛. 对  $|z_1| > R$ , 若  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$  收敛的话, 则任

取  $z_2$  ( $R < |z_2| < |z_1|$ ),  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_2^n$  绝对收敛, 但此时

$$\lim_n \left| \frac{c_{n+1} z_2^{n+1}}{c_n z_2^n} \right| > 1,$$

导出矛盾. 因而级数(4.6)的收敛半径为  $R$ .

(2) 若  $\lim_n |c_n| = l$ , 则当

$$\lim_n |c_n z^n| = |z| l < 1$$

时级数(4.6)绝对收敛. 与上面的证明相似, 当  $|z| > R$  时, 级数(4.6)发散. 级数的收敛半径为  $R$ .

**例 4.3** 求下列各幂级数的收敛半径.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2};$

解  $R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n^2} = 1.$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$

解 因为  $l = \lim_n \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_n \frac{1}{(n+1)!} = 0$ , 所以  $R = +\infty$ .

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n;$

解  $R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = 0.$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n};$

解 设  $w = z - 2$ , 由于

$$R = \lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{1}{n} / \frac{1}{n+1} \right| = 1,$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的收敛半径  $R = 1$ . 原级数的收敛半径亦为 1.

$$(e) \quad 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + (z^2)^n + \dots;$$

解 因为

$$\lim_n \left| \frac{(z^2)^{n+1}}{z^{2n}} \right| = |z^2|,$$

当  $|z^2| < 1$  即  $|z| < 1$  时级数收敛, 又因为  $z = 1$  时级数发散, 则当  $|z| > 1$  时级数发散, 所以该级数的收敛半径为 1.

由(d)知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  的收敛半径为 1, 收敛圆盘  $|z| < 1$ . 当  $z = 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  为

调和级数是发散的. 当  $z = -1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  为收敛的交错级数. 所以, 在收敛圆盘边界上的点处级数可能发散, 也可能收敛.

### 4.2.3 幂级数和函数的性质

**定理 4.6** 幂级数(4.5)的和函数在它的收敛圆内是解析的, 且在收敛圆内可逐次求导, 逐次积分. 即

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \quad (|z - z_0| < R), \quad (4.8)$$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C (z - z_0)^n dz \quad (C: |z - z_0| < R), \quad (4.9)$$

或

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

证明从略.

**例** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  的收敛半径  $R = 1$ , 当  $|z| < 1$  时, 级数部分和

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z},$$

$$\lim_N S_N(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

所以

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (|z| < 1);$$

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \quad (|z| < 1);$$

$$\begin{aligned}\ln(1-z) &= - \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \\ &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^{n+1}}{n+1} - \dots \quad (|z| < 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan z &= \int_0^z \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} dz \\ &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

在高等数学中,我们将一个具有  $n+1$  阶导数的函数展为泰勒级数或麦克劳林级数.在下一节我们将解析函数(具有任意阶导数)展为泰勒级数或麦克劳林级数,也就是解析函数展为幂级数.

### 4.3 泰勒级数

**定理 4.7** 设函数  $f(z)$  在圆盘  $D: |z - z_0| < R$  内解析,则在  $D$  内(如图 4.2),

$$\begin{aligned}f(z) &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

即当  $|z - z_0| < R$  时,式(4.10)右边的级数收敛于函数  $f(z)$ .我们把式(4.10)右边的级数称为  $f(z)$  在  $z_0$  的泰勒级数.式(4.10)称为函数  $f(z)$  在  $z_0$  的泰勒级数展开式.

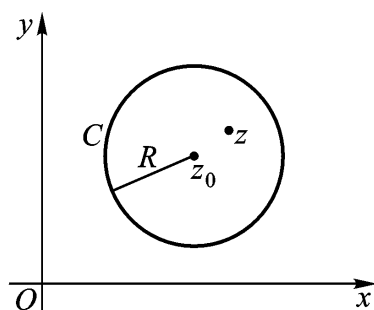


图 4.2

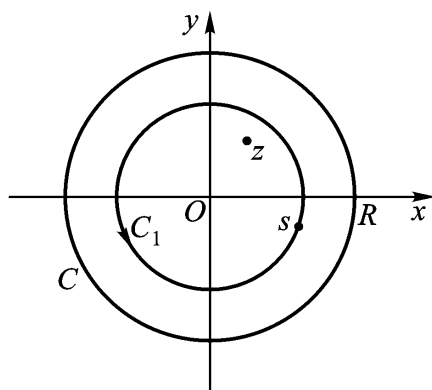


图 4.3

证 当  $z_0 = 0$  时,

设  $z$  为圆内的任一点,  $|z| = r$  ( $r < R$ ), 过  $s$  的圆为  $C_1: |s| = R_1$  ( $r <$

$R_1 < R$ ) (如图 4.3 所示). 那么  $z$  在  $C_1$  所围区域之内,  $f(z)$  在  $C_1$  及其所围区域内解析. 由柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds, \quad (4.11)$$

及

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{s} \frac{1}{1-(z/s)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} z + \frac{1}{s^3} z^2 + \dots + \frac{1}{s^N} z^{N-1} + \frac{z^N}{s^N (s-z)}. \end{aligned} \quad (N=1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

可得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^{n+1}} z^n ds + \rho_N(z)$$

其中

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z)s^N} ds,$$

由 3.4 节高阶导公式有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s^{n+1}} z^n ds = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

因而

$$\begin{aligned} f(z) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!} z^{N-1} + \rho_N(z). \end{aligned}$$

若记上式为  $f(z) = f_N(z) + \rho_N(z)$ , 由幂级数收敛的定义知级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  在圆:  $|z - z_0| < R$  内收敛于函数  $f(z)$  的必要与充分条件是

$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0$ , 故欲证之.

设  $M_1$  为  $|f(s)|$  在  $C_1$  上的最大值, 而  $|z| = r$ ,  $|s| = R_1$  ( $r < R_1$ ), 从而

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = R_1 - r,$$

则

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2} \cdot \frac{M_1}{(R_1 - r) R_1^N} \cdot 2\pi R_1 = \frac{M_1 R_1}{R_1 - r} \left(\frac{r}{R_1}\right)^N,$$

故

$$\lim_N N(z) = 0.$$

所以

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots \quad (4.13)$$

这就是说, 如果  $f(z)$  在以原点为中心,  $R$  为半径的圆内解析, 式 (4.13) 便为  $f(z)$  的幂级数展开式, 这个幂级数称为麦克劳林级数.

当  $z_0 \neq 0$  时,  $f(z)$  在以  $z_0$  为心,  $R$  为半径的圆内解析, 那么  $f(z + z_0)$  在  $|(z + z_0) - z_0| < R$  内解析, 令  $g(z) = f(z + z_0)$ ,  $g(z)$  在  $|z| < R$  内解析, 由上面结果

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (|z| < R),$$

即

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R).$$

用  $z$  代替  $z + z_0$  可得  $f(z)$  在  $z_0$  处的泰勒展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R).$$

事实上, 泰勒级数在以  $z_0$  为心,  $z_0$  到距  $z_0$  最近的  $f(z)$  的非解析点的距离为半径的圆内均收敛于  $f(z)$ .

**例 4.4** 求函数  $f(z) = e^z$  的麦克劳林展开式.

**解** 由于  $f(z) = e^z$  在整个复平面上解析,  $f^{(n)}(z) = e^z$ ,  $f^{(n)}(0) = 1$ , 那么

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (|z| < +\infty).$$

如果令  $z = x$ , 则

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < +\infty),$$

这便是实函数  $e^x$  的麦克劳林公式.

**例 4.5** 将函数  $f(z) = \sin z$  在  $z = 0$  处展为泰勒级数.

**解** 由于  $f(z) = \sin z$  在整个复平面上解析,  $\sin^{(n)} z = \sin(z + \frac{n}{2})$ ,  $\sin^{(n)} z \Big|_{z=0} = \sin(\frac{n}{2})$ . 那么

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n}{2})}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < +\infty).$$

同理可得

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty).$$

**例 4.6** 设  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  在  $|z| < 1$  的区域内解析, 将其展为  $z$  的幂级数.

**解** 因为  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$ ,  $f^{(n)}(0) = n!$ , 所以所求  $f(z)$  的幂级数展式为

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

由此我们还可以得到

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1);$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \quad (|z| < 1);$$

$$\frac{1}{z} = - \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \quad (|z+1| < 1);$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 1).$$

**例 4.7** 求  $f(z) = \operatorname{Ln}(1+z)$  在  $z=0$  处的泰勒展式.

**解**  $\operatorname{Ln}(1+z)$  的主值  $\ln(1+z)$  在  $|z| < 1$  时解析,  $\ln^{(n)}(1+z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+z)^n}$ ,  $\ln^{(n)}(1+z)|_{z=0} = (-1)^{n-1} (n-1)!$ .

从而

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} z^n \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad (|z| < 1), \end{aligned}$$

所以  $\operatorname{Ln}(1+z)$  在  $z=0$  处的泰勒展式为

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(1+z) &= 2k\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \\ &\quad (|z| < 1; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

**例 4.8** 将函数  $f(z) = (1+z)^{\alpha}$  ( $\alpha$  为复数) 的主值函数

$$f_0(z) = e^{\ln(1+z)}$$

展为  $z$  的幂级数.

**解** 由于函数  $f_0(z)$  在  $|z| < 1$  内单值解析.

对幂函数有

$$(z)^{\alpha} = z^{\alpha-1},$$



所以

$$f_0(z) = (1+z)^{-1}.$$

继续求导得

$$f_0^{(n)}(z) = (-1) \dots (-n+1)(1+z)^{-n}.$$

根据定理,  $(1+z)$  的主值函数展式为:

$$\begin{aligned} (1+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= 1 + z + \frac{(-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{(-1) \dots (-n+1)}{n!} z^n + \dots \\ &\quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

**例 4.9** 将  $\frac{e^z}{1-z}$  在  $z=0$  处展成幂级数.

**解** 因  $\frac{e^z}{1-z}$  在  $|z| < 1$  内解析, 故展开后的幂级数在  $|z| < 1$  内收敛, 而

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (|z| < +\infty),$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (|z| < 1),$$

在  $|z| < 1$  时将两式相乘得

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{1-z} &= 1 + (1 + \frac{1}{1!})z + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!})z^2 + (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})z^3 + \dots + (1 \\ &+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})z^n + \dots \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

在将  $\frac{e^z}{1-z}$  展成幂级数时, 还可用以下方法.

设  $\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , 那么

$$e^z = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

即

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n-1}) z^n.$$

比较两边同次幂的系数得:

$$c_0 = 1,$$

$$c_n = c_{n-1} + \frac{1}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

最后得  $\frac{e^z}{1-z}$  展为幂级数的同样结论.

例 4.10 将  $e^z \sin z, e^z \cos z$  分别展为  $z$  的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned} e^z (\cos z + i \sin z) &= e^z e^{iz} = e^{(1+i)z} = e^{(2e^{\frac{i}{4}})^z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n e^{\frac{n}{4}i}}{n!} z^n. \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} e^z (\cos z - i \sin z) &= e^{(2e^{-\frac{i}{4}})^z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n e^{-\frac{n}{4}i}}{n!} z^n. \end{aligned}$$

两式相加除以 2 得

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n \cos \frac{n}{4}}{n!} z^n \quad (|z| < +\infty).$$

两式相减除以  $2i$  得

$$e^z \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n \sin \frac{n}{4}}{n!} z^n \quad (|z| < +\infty).$$

例 4.11 将函数

$$f(z) = \frac{z}{z+2}$$

按  $z-1$  的幂展开, 并指明其收敛范围.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(z) &= 1 - \frac{2}{z+2} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{1 + (\frac{z-1}{3})} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{3}\right)^n \\ &= 1 - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 3). \end{aligned}$$

利用泰勒级数可以把函数展开成幂级数. 但这样的展式是否唯一, 答案是肯定的, 这便是

**定理 4.8** 若  $f(z)$  在圆盘  $|z - z_0| < R$  内解析, 那么它在该圆盘内的泰勒展式唯一.

证 设  $f(z)$  还可用其它方式展为幂级数:

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots$$

那么

$$f(z_0) = c_0.$$

由幂级数的性质定理得

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)\dots 2c_{n+1}(z-z_0) + \\ (n+2)\dots 3c_{n+2}(z-z_0)^2 + \dots$$

所以

$$f^{(n)}(z_0)/n! = c_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

这就是说  $f(z)$  在该圆盘内不会有其它幂级数展式.

## 4.4 罗朗级数

我们观察

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}(2 - \frac{1}{1+z}) \\ = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 + \dots + (-1)^{n-1}z^n + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \\ = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \frac{1}{3!}z^{-3} + \dots + \frac{1}{n!}z^{-n} + \dots \quad (0 < |z| < +\infty).$$

我们知道有些函数虽然不能表示为泰勒级数,但是却能用含有负指数幂的级数在某个圆环内表示,这种含有负指数幂的级数就是下面要讨论的罗朗级数.

### 4.4.1 罗朗级数的概念

定义 4.6 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.14)$$

的级数称为罗朗(Laurent)级数.其中  $c_n, z_0$  是复常数,  $c_n$  称为级数(4.14)的系数.

我们称级数(4.14)在点  $z$  收敛,如果级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.15)$$

和

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (4.16)$$

在点  $z$  都收敛.

级数 (4.15) 是一个幂级数, 设其收敛半径为  $R_1$ , 若  $R_1 > 0$ , 则级数 (4.15) 在  $|z - z_0| < R_1$  内绝对收敛.

对于级数 (4.16), 若设  $\xi = 1/(z - z_0)$ , 则级数 (4.16) 为

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \xi^n. \quad (4.17)$$

它是  $\xi$  的幂级数, 设其收敛半径为  $\rho$ . 若  $\rho > 0$ , 则级数 (4.17) 在  $|\xi| < \rho$  内绝对收敛, 因此级数 (4.16) 在  $R_2 = \frac{1}{\rho} < |z - z_0| < +\infty$  内绝对收敛.

若  $R_1 > R_2$ , 那么级数 (4.15) 和 (4.16) 同时在圆环  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  内收敛, 从而罗朗级数 (4.14) 在圆环内收敛. 这个圆环称为级数 (4.14) 的收敛圆环.

若  $R_1 < R_2$ , 罗朗级数 (4.14) 处处发散.

若  $R_1 = R_2$ , 罗朗级数 (4.14) 可能收敛, 也可能发散.

#### 4.4.2 解析函数的罗朗展式

依据下面定理可将圆环上的解析函数展为罗朗级数.

**定理 4.9** 设函数  $f(z)$  在圆环  $D: R_1 < |z - z_0| < R_2$  上解析, 则在  $D$  内 (如图 4.4)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (4.18)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$C$  是正向圆周  $|z - z_0| = \rho$ ,  $\rho$  是满足  $R_1 < \rho < R_2$  的任意实数.

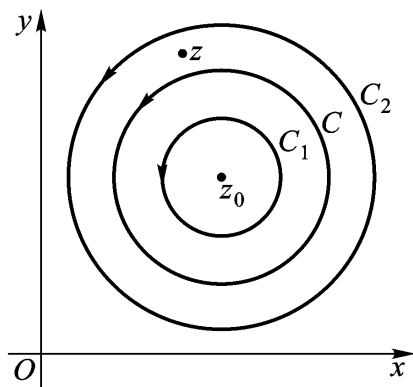


图 4.4

证 设  $C_1$  为圆周  $|z - z_0| = R_1$ ,  $C_2$  为圆周  $|z - z_0| = R_2$ . 因为  $f(z)$  在闭圆环  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  上解析, 所以由柯西公式在有界多连通域上的结

论得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds. \quad (4.19)$$

当  $|s| < C_2$  时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-z} &= \frac{1}{(s-z_0) - (z-z_0)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^{n+1}} + \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N} \cdot \frac{1}{s-z} \\ &\quad (|z-z_0| < |s-z_0|), \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{C_2} \frac{(z-z_0)^n f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \\ &\quad + \int_{C_2} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N} \frac{f(s)}{s-z} ds. \end{aligned}$$

又因为

$$\lim_N \int_{C_2} \frac{(z-z_0)^N}{(s-z_0)^N} \cdot \frac{f(s)}{s-z} ds = 0,$$

所以

$$\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds (z-z_0)^n. \quad (4.20)$$

当  $|s| < C_1$  时,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s-z} &= \frac{1}{(z-z_0)(1 - \frac{s-z_0}{z-z_0})} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{(s-z_0)^N}{(z-z_0)^N} \cdot \frac{1}{z-s} \\ &\quad (|z-z_0| > |s-z_0|), \end{aligned}$$

因而

$$-\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{C_1} \frac{(s-z_0)^n f(s)}{(z-z_0)^{n+1}} ds + \int_{C_1} \frac{(s-z_0)^N}{(z-z_0)^N} \frac{f(s)}{z-s} ds.$$

又因为

$$\lim_N \int_{C_1} \frac{(s-z_0)^N}{(z-z_0)^N} \frac{f(s)}{z-s} ds = 0,$$

所以

$$-\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds (z-z_0)^n. \quad (4.21)$$

由式(4.19)得

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2}^+ \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds (z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1}^- \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds (z-z_0)^n,$$

根据第2章闭路变形原理,用沿曲线  $C$  的积分

$$\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds,$$

代替沿曲线  $C_1, C_2$  的积分

$$\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \quad \text{和} \quad \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds,$$

便得式(4.18),定理得证.

式(4.18)称为函数  $f(z)$  在圆环  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  上的罗朗展式.

如果题目所给条件为  $f(z)$  在开圆环  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  内解析,定理结论依然成立.此时只要在圆环内再作两圆  $\Gamma_1, \Gamma_2$  (如图4.5),在  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  所围的闭圆环上重复以上过程便可.顺便指出图4.5中  $C_1, C_2$  二个半径分别为  $R_1, R_2$  的圆周亦可为任意正向闭曲线.

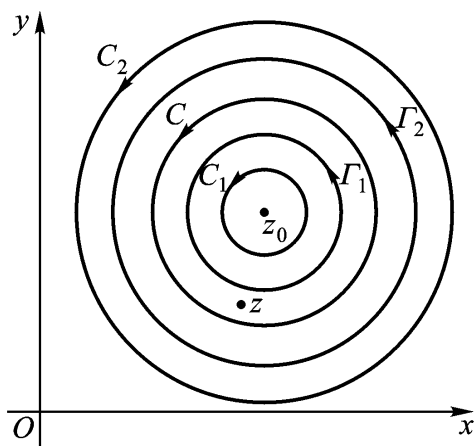


图 4.5

**例 4.12** 将函数  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$  在圆环  $0 < |z-i| < 1$  与  $1 < |z-i| < +\infty$  内展为罗朗级数.

解 (a) 在  $0 < |z-i| < 1$  内.因为

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i + z - i} = \frac{1}{i(1 + \frac{z-i}{i})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-i}{i} \right)^n \\
&= \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n, \\
\frac{1}{z^2} &= - \left( \frac{1}{z} \right)' = - \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} n i^n (z-i)^{n-1},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n i^{n+1} (z-i)^{n-2} \\
&= \sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) i^{n+3} (z-i)^n \quad (0 < |z-i| < 1).
\end{aligned}$$

(b) 在  $1 < |z-i| < +\infty$  内, 因为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{z-i+i} = \frac{1}{z-i} \frac{1}{1 + \left( \frac{i}{z-i} \right)} \\
&= \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{i}{z-i} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{3n} (z-i)^{-n-1}, \\
\frac{1}{z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) i^{3n} (z-i)^{-n-2},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) i^{3n} (z-i)^{-n-3} \\
&= \sum_{n=-3}^{\infty} (n+2) i^{n+1} (z-i)^n \quad (1 < |z-i| < +\infty).
\end{aligned}$$

**例 4.13** 求函数  $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$  在  $1 < |z| < 2$  和  $2 < |z| < +\infty$

内的罗朗展式.

解 (a) 当  $1 < |z| < 2$  时,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{2}{z^2+1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^n - \frac{2}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-1}{z^2} \right)^n,
\end{aligned}$$

所以

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n}} \quad (1 < |z| < 2).$$

(b) 当  $2 < |z| < +\infty$  时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{2}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}}, \end{aligned}$$

所以

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{z^m},$$

其中

$$c_m = \begin{cases} 2^{2n}, & m = 2n + 1; \\ 2^{2n-1} + 2(-1)^n, & m = 2n. \end{cases}$$

**例 4.14** 将函数  $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$  在点  $z = -2$ ,  $z = 0$ ,  $z = \infty$  展为罗朗级数.

解 (a) 当  $z = -2$  时, 令  $z+2 = u$ , 则

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{-1}{2u^3(1 - \frac{u}{2})} \\ &= - \frac{1}{2u^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z+2)^{n-3} \\ &= - \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} (z+2)^n \quad (0 < |z+2| < 2). \end{aligned}$$

(b) 当  $z = 0$  时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z} \left(1 + \frac{z}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{4z} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+3)(n+2) \frac{z^n}{2^{n+3}} \quad (0 < |z| < 2). \end{aligned}$$

(c) 当  $z = \infty$  时,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+2)^3} \\ &= \frac{1}{2z} \frac{1}{z+2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} (n+1)(n+2)}{z^{n+4}} \quad (2 < |z| < +\infty).
 \end{aligned}$$

**例 4.15** 将函数  $e^z + e^{\frac{1}{z}}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内展为罗朗级数.

**解** 因为  $e^z$  在复平面内的展开式为

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

而  $\frac{1}{z}$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析, 相应地有

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots,$$

所以

$$\begin{aligned}
 f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \\
 &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (0 < |z| < +\infty).
 \end{aligned}$$

**例 4.16** 求  $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$  在  $0 < |z-1| < +\infty$  内的罗朗展式.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \sin \frac{z}{z-1} &= \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cos \frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin \frac{1}{z-1} \\
 &= \sin 1 \left[ 1 - \frac{1}{2! (z-1)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)! (z-1)^{2n}} + \dots \right] + \\
 &\cos 1 \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3! (z-1)^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! (z-1)^{2n+1}} + \dots \right] \\
 &= \sin 1 + \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{\sin 1}{2! (z-1)^2} - \frac{\cos 1}{3! (z-1)^3} + \dots + \\
 &(-1)^n \frac{\sin 1}{(2n)! (z-1)^{2n}} + (-1)^n \frac{\cos 1}{(2n+1)! (z-1)^{2n+1}} + \dots.
 \end{aligned}$$

**例 4.17** 求函数  $f(z) = \frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}$  在  $0 < |z-1| < 1$  内的罗朗展式.

**解** 因为

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \quad (|z-1| < 1),$$

$$\ln(2-z) = \ln[1 - (z-1)] = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1} \quad (|z-1| < 1),$$

所以当  $0 < |z-1| < 1$  时,

$$f(z) = \frac{\ln(2-z)}{z(z-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{z-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n+1} (z-1)^{n+k} \quad (|z-1| < 1).
 \end{aligned}$$

由以上各例可以看出,在求一些初等函数的罗朗展式时,一般并不是按照定理提供的公式去求系数,主要是利用已知的幂级数展式去求所需要的罗朗展式.

**定理 4.10** 若  $f(z)$  在  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内解析,那么  $f(z)$  在该圆环内的罗朗展式唯一.

事实上,若  $f(z)$  在圆环内还有展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

两边同乘以圆环上的有界函数  $\frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}$ , 逐项积分得

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_C (z - z_0)^{n-m-1} dz$$

上式右端级数中积分  $n = m$  那一项为  $2\pi i$ , 其余各项为 0, 于是

$$\begin{aligned}
 c_m &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz. \\
 &= c_m.
 \end{aligned}$$

所以展式唯一.

## 第 4 章习题

### 4.1.1 证明数列

$$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2}$$

收敛于  $-2$ .

### 4.1.2 证明: 若 $\lim_n z_n = z$ , 那么

$$\lim_n |z_n| = |z|.$$

### 4.1.3 证明: 复数序列的极限是其对应的实数序列极限的唯一结果.

### 4.1.4 设 $\{z_n\}$ 为收敛的复数序列, 证明存在一个正数 $M$ , 对所有的 $n$ 都有 $|z_n| \leq M$ 成立.

### 4.1.5 证明:

(a) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{z_n} = \overline{z}$ ;

(b) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$ ,  $c$  为任意复常数,  $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cz$ ;

(c) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ , 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T$ .

4.1.6 考虑余项  $N(z) = \frac{z}{1-z} - \frac{z(1-z^N)}{1-z}$  ( $N=1, 2, 3, \dots$ ), 证明当  $|z| < 1$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

4.1.7 记  $z = re^{i\theta}$  ( $0 < r < 1$ ), 由公式  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$ , 借助级数收敛的充要条件, 证明当  $0 < r < 1$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

(注: 这个结论在  $r=0$  时也成立)

4.1.8 判断下列级数的敛散性

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \ln(1 + \frac{1}{n})$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+5i)^n}{n!}$ ; (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+5i}{2})^n$ .

4.2.1 设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$  ( $0 < R < +\infty$ ), 并且在收敛圆周上一点绝对收敛. 证明这个级数对于所有的点  $z$  ( $|z| < R$ ) 为绝对收敛.

4.2.2 试确定下列幂级数的收敛半径

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ; (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^n}{2^n}$ ; (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ ;  
 (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ ; (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-5)^n}{n}$ .

4.2.3 求幂级数

$$1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots + nz^{n-1} + \dots$$

的和函数.

4.2.4 证明:

(a)  $e^{\frac{(z-1)^n}{n!}} = e^z$  ( $|z| < \infty$ );

(b)  $\frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots = \frac{\sin(z^2)}{z^4}$  ( $z \neq 0$ ).

4.3.1 证明:

(a)  $\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$  ( $|z+1| < 1$ );

$$(b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z-2| < 2).$$

4.3.2 将下列函数展成  $z$  的幂级数, 并指出展式成立的范围.

$$(a) \frac{1}{az+b} \quad (a, b \text{ 为复数, 且 } b \neq 0);$$

$$(b) \int_0^z e^{z^2} dz; \quad (c) \int_0^z \frac{\sin z}{z} dz; \quad (d) \sin^2 z.$$

4.3.3 写出下列函数的幂级数展式至前三个非零项.

$$(a) f(z) = \operatorname{Arctan} z \text{ 展为 } (z - \frac{1}{4}) \text{ 的幂};$$

$$(b) f(z) = \ln(z-3) \text{ 展为 } (z-2i) \text{ 的幂};$$

$$(c) f(z) = e^{\sin z} \text{ 展为 } z \text{ 的幂};$$

$$(d) f(z) = \frac{1}{z^2 + 16} \text{ 展为 } (z-3) \text{ 的幂}.$$

4.3.4 将下列函数在指定点展成幂级数, 并指明其收敛的范围.

$$(a) \cos z \text{ 在 } z = \frac{\pi}{2}; \quad (b) \operatorname{sh} z \text{ 在 } z = i; \quad (c) \operatorname{th} z \text{ 在 } z = 0;$$

4.3.5 通过以下三种方式推导  $\operatorname{ch} z$  的麦克劳林展式.

(a) 泰勒展式定理;

$$(b) \text{ 恒等式 } \operatorname{ch} z = \cos iz;$$

$$(c) \text{ 恒等式 } \operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2.$$

4.3.6 通过以下三种方式推导  $\sec z$  关于  $z$  的幂级数的非零前三项.

(a) 泰勒展式定理;

$$(b) \text{ 设 } \sec z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \text{ 再由 } \cos z \sec z = 1 \text{ 求解系数};$$

$$(c) \text{ 由 } \sec z = 2e^{iz}/(e^{2iz} + 1) \text{ 求解}.$$

4.3.7 求出  $\sin z$  关于  $(z + \frac{\pi}{2})$  的幂级数, 并证明:

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{z + \frac{\pi}{2}} = -1.$$

4.3.8 设  $f(z)$  在  $z_0$  处解析,  $f(z_0) = 0$ , 用级数表达  $f(z)$ , 并证明:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

4.3.9 设  $f(z) = \sin z^2$ , 通过麦克劳林公式

$$\sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!} \quad (|z| < +\infty),$$

证明:  $f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots);$

$$f^{(4n)}(0) = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

4.3.10 由  $\frac{1}{z^2 \operatorname{sh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7}{360}z + \dots \quad (0 < |z| < \frac{\pi}{2}),$

证明: 当  $C$  为正向单位圆周  $|z| = 1$  时,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh} z} = -\frac{1}{3}i.$$

4.3.11 设  $f(z)$  为整个复平面上的解析函数, 它可由下式表达

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (|z| < \infty).$$

(a) 通过对复合函数  $g(z) = f[f(z)]$  求导, 将  $g(z)$  展为麦克劳林级数 (写至前四项);

(b) 应用 (a) 的结果, 推导  $\sin(\sin z)$  的幂级数.

4.3.12 设在  $|z| < R$  内, 解析函数

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

试证: 当  $0 < r < R$  时,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

(提示:  $|f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)}$ ).

4.4.1 证明:

$$(a) \ln z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \quad (|z-1| < 1);$$

$$(b) \frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{-1}{2(z-1)} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} \quad (0 < |z-1| < 2);$$

$$(c) \frac{\operatorname{sh} z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!} \quad (0 < |z| < \infty);$$

$$(d) \csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}z^3 + \dots \quad (0 < |z| < \infty);$$

$$(e) \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}z - \frac{1}{720}z^3 + \dots \quad (0 < |z| < 2\pi).$$

4.4.2 用含  $z$  的负指数幂的级数表示  $\frac{1}{1+z}$ .

4.4.3 求 (a)  $\sin z/z^3$  关于  $z$  的罗朗展式的前四个非零项;

(b)  $e^z/(1+z^2)$  关于  $(z-i)$  在  $0 < |z-i| < 1$  内的罗朗展式的前四个非零项. 问它们的负幂的最高次是多少?

4.4.4 将下列函数在指定点展成罗朗级数, 并指出其收敛范围.

$$(a) \frac{1}{(z^2+1)^2}, \quad z=i; \quad (b) z^2 e^{\frac{1}{z}}, \quad z=0 \text{ 及 } z=\infty;$$

$$(c) e^{\frac{1}{1-z}}, \quad z=1 \text{ 及 } z=\infty.$$

4.4.5 将下面函数在不同区域内展为级数.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} \quad (1 < |z| < +\infty, 0 < |z-1| < 1);$$

$$(b) \quad f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} \quad (0 < |z| < 1, 1 < |z-i| < 2);$$

$$(c) \quad f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(z+3)} \quad (|z| < 2, 2 < |z| < 3, 3 < |z| < +\infty);$$

$$(d) \quad f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)} \quad (0 < |z| < 1, \text{只要求含到 } z^2 \text{ 的项}).$$

4.4.7 求  $f(z) = \frac{z}{(2z+1)(z-2)}$  在  $z=0$  处的泰勒展式,  $z = -\frac{1}{2}$  及  $z=2$  处的罗朗展式, 并确定其收敛域.

## 第 5 章 留 数

留数理论是复变函数的重要内容之一，对复变函数理论及应用的发展起到了很大的推动作用，本章首先介绍解析函数的孤立奇点的分类，然后讲述留数的定义及其基本定理，最后介绍留数对计算某些定积分的应用。

### 5.1 解析函数的孤立奇点

#### 5.1.1 孤立奇点的定义及分类

上一章中，我们研究了一般圆环内解析函数的罗朗展式。现在讨论一种特殊情形。

设函数  $f(z)$  在  $z_0$  的某一去心邻域  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内解析而在  $z_0$  点不解析，则称  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点。在  $D$  内， $f(z)$  有罗朗展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (5.1)$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$C_r$  是正向圆周  $|z - z_0| = r (0 < r < R)$ 。

如  $0$  为  $\frac{\sin z}{z}$ ,  $\frac{\sin z}{z^2}$  及  $e^{\frac{1}{z}}$  的孤立奇点； $1, 2$  是  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$  的孤立奇点；而  $0$  是  $\ln z$  的奇点，却不是孤立奇点。事实上，若函数  $f(z)$  仅有有限个奇点，则其每一个奇点都是孤立奇点（为什么？）。

一般地，按照对函数  $f(z)$  的罗朗展式含负次幂的情况，可以把孤立奇点分类如下：

1. 若当  $n = -1, -2, -3, \dots$  时， $c_n = 0$ ，则称  $z_0$  是函数  $f(z)$  的可去奇点，或  $f(z)$  在  $z_0$  有可去奇点，此时，其罗朗展式为

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \quad (5.2)$$

明显地，若令  $f(z_0) = c_0$ ，则  $f(z)$  在整个圆盘  $|z - z_0| < R$  内解析，这也是可去奇点得名的原因。

例如

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots,$$

由可去奇点的定义知, 0 为  $\frac{\sin z}{z}$  的可去奇点.

2. 若只有有限个 (至少一个) 负整数  $n$  使得  $c_n \neq 0$ , 我们就称  $z_0$  为  $f(z)$  的极点.

若对正整数  $m$ ,  $c_{-m} \neq 0$ , 而当  $n < -m$  时,  $c_n = 0$ , 我们就说  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点.

此时, 其罗朗展式为

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + c_0 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \quad (5.3)$$

例如

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$$

由  $m$  阶极点的定义知, 0 为  $\frac{\sin z}{z^2}$  的一阶极点.

同理:  $z = 1, -1$  分别为  $\frac{1}{z^3 - z^2 - z + 1}$  的二阶、一阶极点.

3. 若  $f(z)$  的罗朗展式 (5.1) 中有无限多个  $n < 0$ , 使得  $c_n \neq 0$ , 则称  $z_0$  是  $f(z)$  的本性奇点.

例如

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} + \dots \quad (0 < |z| < +\infty),$$

则  $z = 0$  为函数  $e^{\frac{1}{z}}$  的本性奇点.

同理  $z = 1$  为  $\sin \frac{1}{1-z}$  的本性奇点.

由可去奇点、极点、本性奇点的定义, 结合式 (5.1) 易得:

**定理 5.1** 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z - z_0| < R$  ( $R > 0$ ) 内解析, 则  $z_0$  是  $f(z)$  的可去奇点、极点、本性奇点的必要与充分条件是:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$  (常数)、

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ 、 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在也不为  $\infty$ .

下面我们来分析如何判断一个极点的阶数.

由极点的定义, 若  $z_0$  为函数  $f(z)$  的  $m$  阶极点, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的某去心邻域  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内解析, 并且在  $D$  内  $f(z)$  有罗朗展式:

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} \\ + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

其中  $c_{-m} \neq 0$ , 于是在  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内,



$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_0(z - z_0)^m + \dots + c_n(z - z_0)^{n+m} + \dots] = \frac{1}{(z - z_0)^m} \phi(z), \quad (5.4)$$

由于  $\phi(z)$  为幂级数的和函数, 故  $\phi(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内解析且  $\phi(z_0) = c_{-m} \neq 0$ , 反之, 若  $f(z)$  在  $D$  内可以表示成为

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \phi(z)$$

的形式, 其中  $\phi(z)$  是在  $|z - z_0| < R$  内解析的函数, 并且  $\phi(z_0) \neq 0$ , 则  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点.

式(5.4)两边同乘以  $(z - z_0)^m$ , 得

$$(z - z_0)^m f(z) = \phi(z),$$

从而  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \phi(z_0) = c_{-m} \neq 0$ , 于是

在定理 5.1 的条件下,  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点的必要与充分条件是:

---


$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \phi(z_0) = c_{-m} \neq 0, \text{ 其中 } c_{-m} \text{ 是非零复常数.}$$


---

**例 5.1** 判定函数  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$  的孤立奇点的类型.

**解** 由定义知,  $z_1 = 1, z_2 = 2$  为  $f(z)$  的孤立奇点.

因为  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z-2)^2} = \frac{1}{1} \neq 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 2} (z-2)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z}{z-1} = 2 \neq 0$ , 所以  $z_1 = 1$  为  $f(z)$  的一阶极点,  $z_2 = 2$  为  $f(z)$  的二阶极点.

### 5.1.2 零点与极点的关系.

**定义 5.1** 设  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域内解析. 若  $f(z_0) = 0$ , 则称  $z_0$  为解析函数  $f(z)$  的零点.

设  $f(z)$  在该邻域内的泰勒展式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

那么

(1) 当  $c_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 时,  $f(z) \equiv 0$ .

(2) 当  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  不全等于零时, 总有  $c_m \neq 0$ , 而  $c_n = 0$  ( $n < m$ ), 我们说  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点. 当  $m = 1$  时, 称  $z_0$  为  $f(z)$  的简单零点.

**定理 5.2** 不恒为零的解析函数  $f(z)$  以  $z_0$  为  $m$  阶零点的必要与充分条件为

$$f(z) = (z - z_0)^m \phi(z),$$

其中  $f(z)$  在点  $z_0$  的邻域  $|z - z_0| < R$  内解析, 且  $f(z_0) = 0$ .

证 必要性. 由假设

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

只要设

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0)^{m+1} + \dots,$$

就得结果.

充分性的证明留给读者.

推论 如果  $f(z)$  在  $z_0$  解析, 那么  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶零点的必要与充分条件是

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m-1), \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

例 5.2 考察函数

$$f(z) = z - \sin z$$

在原点的性质.

解 显然  $f(z)$  在  $z=0$  解析, 且  $f(0)=0$ . 由

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) \\ &= z^3 \left( \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots \right), \end{aligned}$$

或由

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \cos z, \quad f(0) = 0, \\ f(z) &= \sin z, \quad f(0) = 0, \\ f(z) &= \cos z, \quad f(0) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

知  $z=0$  为  $f(z) = z - \sin z$  的三阶零点.

例 5.3 求  $\sin z - 1$  的全部零点, 并指出它们的阶.

解 令  $\sin z - 1 = 0$  得  $\sin z = 1$  的全部零点:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

显然

$$(\sin z - 1) \Big|_{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} = 0, \quad (\sin z - 1) \Big|_{z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \neq 0.$$

故这些零点均为二阶零点.

下面我们讨论零点与极点的关系.

首先, 设  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点, 即  $f(z) = (z - z_0)^m \phi(z)$ , 其中  $\phi(z_0) \neq 0$  且  $\phi(z)$  在  $z_0$  附近 ( $|z - z_0| < R$ ) 解析, 因为  $\phi(z_0) \neq 0$ , 则必存在  $z_0$  的

一个邻域  $U$  使得当  $z \in U$  时,  $f(z) \neq 0$ , (因为  $f(z)$  在  $z_0$  处解析从而连续),

令  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ , 则  $g(z_0) \neq 0$  且  $g(z)$  在  $U$  内解析. 于是  $\frac{1}{f(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ ,

其中  $g(z_0) \neq 0$ , 故由极点的特征,  $z_0$  为  $\frac{1}{f(z)}$  的  $m$  阶极点.

同理可得, 若  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶极点, 则  $z_0$  为  $\frac{1}{f(z)}$  的  $m$  阶零点.

**定理 5.3**  $z_0$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点的必要与充分条件是:  $z_0$  是  $\frac{1}{f(z)}$  的  $m$  阶零点.

**例 5.4** 求函数  $f(z) = \frac{1}{\cos z}$  的孤立奇点并指出其类型.

**解** 显然  $f(z)$  的奇点是满足  $\cos z = 0$  的点, 这些点是

$$z_k = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

因为  $(\cos z) \big|_{z=z_k} = -\sin z \big|_{z=z_k} = -\sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^{k+1} \neq 0$ , 所以

$z_k = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  是  $\cos z$  的一阶零点, 从而是  $\frac{1}{\cos z}$  的一阶极点.

值得注意的是, 在考察形如  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  的函数的极点时, 不能仅凭  $Q(z)$  的零点的阶数来断定整个函数极点的阶数, 还要考察  $P(z)$  在这些点的情况, 一般地, 若  $Q(z)$  的零点不是  $P(z)$  的零点, 则可由  $Q(z)$  的零点的阶数判定  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  的极点的阶数; 若  $Q(z)$  的零点也是  $P(z)$  的零点, 则不能仅凭  $Q(z)$  的零点的阶数判定  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  的极点的阶数.

例如, 函数  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$  的分母在  $z = 0$  处有二阶零点, 但同时  $z = 0$  为  $e^z - 1$  的一阶零点, 因此  $z = 0$  并不是  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$  的二阶极点. 事实上,  $\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} (z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \dots$ , 所以  $z = 0$  是  $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$  的一阶极点.

### 5.1.3 解析函数在无穷远点的性质

在前面我们定义了无穷远点, 现在我们称区域  $|z| > R \quad (R > 0)$  为无穷远点的邻域,  $R < |z| < +\infty$  为无穷远点的去心邻域.

若函数  $f(z)$  在无穷远点的某一去心邻域  $D: R < |z| < +\infty$  内解析, 则

称无穷远点为  $f(z)$  的孤立奇点.

在  $D$  内,  $f(z)$  有罗朗级数展式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (5.5)$$

令  $z = \frac{1}{w}$ , 则  $f(z) = f(\frac{1}{w})$ , 函数  $(w) = f(\frac{1}{w})$  在区域  $0 < |w| < \frac{1}{R}$  内解析, 从而  $w = 0$  是  $(w)$  的孤立奇点, 且其罗朗级数展式是

$$(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n}. \quad (5.6)$$

定义 5.2 称  $z = \infty$  为  $f(z)$  的可去奇点、 $m$  阶极点或本性奇点, 如果相应地  $w = 0$  是  $(w)$  的可去奇点、 $m$  阶极点或本性奇点.

由式(5.6)可知:

1° 如果当  $n > 0$  时,  $c_n = 0$ , 则  $w = 0$  为  $(w)$  的可去奇点, 从而  $z = \infty$  为  $f(z)$  的可去奇点.

2° 若对正整数  $m$ ,  $c_m \neq 0$ ; 而当  $n > m$  时,  $c_n = 0$ , 则  $w = 0$  是  $(w)$  的  $m$  阶极点, 于是  $z = \infty$  为  $f(z)$  的  $m$  阶极点.

3° 若存在无限多个  $n > 0$ , 使得  $c_n \neq 0$ , 则  $w = 0$  是  $(w)$  的本性奇点, 那么  $z = \infty$  是  $f(z)$  的本性奇点.

由无穷远点为  $f(z)$  的孤立奇点分类的定义及定理 5.1 不难得出如下结论:

定理 5.4 设函数  $f(z)$  在区域  $R < |z| < +\infty$  内解析, 那么  $z = \infty$  是  $f(z)$  的可去奇点、极点、本性奇点的必要与充分条件相应地是:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c$  (常数)、 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ 、 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$  不存在也不为  $\infty$ .

例 5.5 判定下列函数在  $z = \infty$  处奇点的类型.

(a)  $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$ ;

(b)  $f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$ ;

(c)  $f(z) = z^4 \sin \frac{1}{z}$ .

解 (a) 因为  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{z-1} = 1$ , 故  $z = \infty$  为函数  $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$  的可去奇点.

(b) 设  $w = \frac{1}{z}$ , 则  $(w) = f(\frac{1}{w}) = w^2(1 - e^w)$ , 而  $\lim_{w \rightarrow 0} (w)$  不存在, 因此  $w = 0$  为  $(w)$  的本性奇点, 故  $z = \infty$  为  $f(z) = \frac{1 - e^z}{z^2}$  的本性奇点, (本题中

$z=0$  为  $f(z)$  的一阶极点).

(c) 令  $z = \frac{1}{w}$ , 则  $(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^4} \sin w = \frac{\sin w}{w^4}$ . 因为  $\lim_{w \rightarrow 0} w^3 \frac{\sin w}{w^4} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\sin w}{w} = 1$ , 所以  $w=0$  是  $(w)$  的三阶极点, 从而  $z = \frac{1}{w}$  是  $f(z) = \frac{1}{z^4} \sin \frac{1}{z}$  的三阶极点.

## 5.2 留数的一般理论

### 5.2.1 留数的定义及计算

若函数  $f(z)$  在  $z_0$  点解析. 作圆  $C: |z - z_0| = r$  使  $f(z)$  在  $|z - z_0| = r$  上解析, 则由柯西定理, 积分

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

若函数  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析, 在  $z_0$  的去心邻域  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内解析, 作圆  $C: |z - z_0| = r$ , 其中  $0 < r < R$ , 那么积分  $\oint_C f(z) dz$  的值又怎样呢?

设  $f(z)$  在  $D$  内的罗朗级数展式为

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \dots, \end{aligned} \quad (5.7)$$

则有

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \dots + c_{-2} \oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^2} + c_{-1} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} \\ &\quad + c_0 \oint_C dz + c_1 \oint_C (z - z_0) dz + \dots \end{aligned}$$

由于

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ 2\pi i, & n = 1, \end{cases}$$

于是有

$$\oint_C f(z) dz = c_{-1} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i c_{-1}.$$

这是由于  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点而使积分  $\oint_C f(z) dz$  “留下”的值.

**定义 5.3** 设函数  $f(z)$  在  $0 < |z - z_0| < R$  内解析,  $z_0$  为  $f(z)$  的孤立奇点. 作圆  $C: |z - z_0| = r$ , 其中  $0 < r < R$  称

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

为函数  $f(z)$  在孤立奇点  $z_0$  的留数, 记为  $\text{Res}(f, z_0)$ , 这里积分是沿着  $C$  按正向取的. 即

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (5.8)$$

若  $f(z)$  在  $0 < |z - z_0| < R$  内的罗朗级数展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则由上述分析易知

$$\text{Res}(f, z_0) = c_{-1}, \quad (5.9)$$

即求  $\text{Res}(f, z_0)$  只须求  $c_{-1}$  即可.

当  $z_0$  为  $f(z)$  的可去奇点时, 由于  $f(z)$  的罗朗展式中不含  $(z - z_0)$  的负指数幂, 则  $c_{-1} = 0$ , 从而  $\text{Res}(f, z_0) = 0$ . 当  $z_0$  为  $f(z)$  的本性奇点时, 只能通过  $f(z)$  的罗朗展开式中求得  $c_{-1}$ , 进而求得  $\text{Res}(f, z_0)$ . 下面着重讨论极点处留数的求法.

1. 设  $z_0$  是函数  $f(z)$  的一阶极点, 则在  $z_0$  的某一去心邻域  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内,

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \phi(z),$$

其中  $\phi(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内解析且  $\phi(z_0) \neq 0$ . 显然  $f(z)$  的罗朗级数中,  $\frac{1}{z - z_0}$  的系数等于  $\phi(z_0)$ , 故有

$$\text{Res}(f, z_0) = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.10)$$

若在  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

其中  $P(z), Q(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内解析,  $P(z_0) \neq 0$ ,  $Q(z_0) = 0$  而  $Q'(z_0) \neq 0$ , 则  $z_0$  是  $f(z)$  的一阶极点(为什么?), 因而

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z) - Q(z_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \end{aligned}$$

**例 5.6** 设  $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ , 求其孤立奇点的留数.

**解**  $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$  有两个一阶极点  $z = \pm i$ . 由于  $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{e^{iz}}{2z}$ , 因此

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie}, \quad \operatorname{Res}(f, -i) = -\frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{i}{2e}.$$

2. 设  $z_0$  是  $f(z)$  的  $k$  阶极点 ( $k > 1$ ), 则在  $z_0$  的某去心邻域  $D: 0 < |z - z_0| < R$  内,

$$f(z) = \frac{(z)}{(z - z_0)^k},$$

其中  $(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内解析且  $(z_0) \neq 0$ , 因  $(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内的泰勒级数展式为

$$(z) = (z_0) + (z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{(k-1)(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + \dots,$$

则  $f(z)$  在  $0 < |z - z_0| < R$  内的罗朗展式中

$$c_{-1} = \frac{(k-1)(z_0)}{(k-1)!},$$

即有

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{(k-1)(z_0)}{(k-1)!} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(k-1)(z)}{(k-1)!}.$$

又当  $z \rightarrow z_0$  时,  $(z) = (z - z_0)^k f(z)$ , 故有

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{(k-1)} [(z - z_0)^k f(z)]}{dz^{k-1}}. \quad (5.11)$$

**例 5.7** 求函数  $f(z) = \frac{\sec z}{z^3}$  在  $z=0$  处的留数.

**解** 因为  $z=0$  为  $z^3$  的三阶零点, 且  $\sec 0 = 1 \neq 0$ , 所以  $0$  为  $f(z) = \frac{\sec z}{z^3}$  的三阶极点, 则由式(5.11)有

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left( z^3 \cdot \frac{\sec z}{z^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} (\sec z \operatorname{tg}^2 z + \sec^3 z) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**例 5.8** 求函数  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$  在  $z=i$  处的留数.

**解** 因为

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2},$$

显然,  $z=i$  为  $f(z)$  的二阶极点, 于是由式(5.11)有

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} \cdot (z-i)^2 \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2} \\ &= -\frac{3}{4e}. \end{aligned}$$

### 5.2.2 留数定理

留数定理是留数应用的基础, 也是留数理论的最重要的定理之一.

**定理 5.5** 设  $D$  是复平面上的一个有界闭区域, 若函数  $f(z)$  在  $D$  内除有限个孤立奇点  $z_1, z_2, \dots, z_n$  外处处解析, 且它在  $D$  的边界  $C$  上也解析, 则有

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n)] \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k), \end{aligned} \quad (5.12)$$

其中沿  $C$  的积分是关于区域  $D$  的正向取的.

证 以  $D$  内每一个孤立奇点  $z_k$  为心, 作圆  $\gamma_k$ , 使以  $\gamma_k$  为边界的闭圆盘包含在  $D$  内, 且  $\gamma_k$  与  $C$  不相交 ( $k=1, 2, \dots, n$ ). 由定理条件  $f(z)$  在以  $C$  及  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  为边界的闭区域  $G$  上解析, 于是由柯西定理,

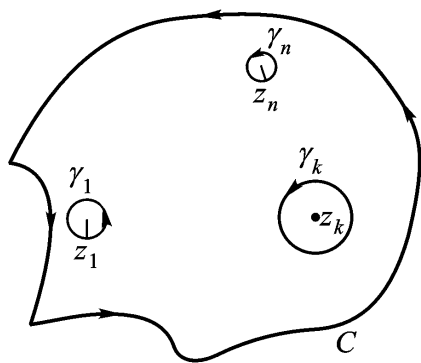


图 5.1

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k). \end{aligned}$$

**例 5.9** 计算下列积分

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2-1} dz; \quad (b) \int_{|z|=1} \tan z dz.$$

解 (a)  $f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}$  有两个一阶极点  $z_1=1, z_2=-1$  且都包含在圆



$|z|=2$  内, 则由留数定理有

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2-1} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1)],$$

而

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{ze^z}{z+1} = \frac{e}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{ze^z}{z-1} = \frac{1}{2e},$$

于是

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z^2-1} dz = 2\pi i \left( \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \right) = 2\pi i \cosh 1.$$

(b)  $f(z) = \tan z$  在单位圆  $|z|=1$  内有两个一阶极点  $z_1 = \frac{1}{2}$ ,  $z_2 = -\frac{1}{2}$ . 由留数定理,

$$\int_{|z|=1} \tan z dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, \frac{1}{2}) + \operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2})],$$

而

$$\operatorname{Res}(f, \frac{1}{2}) = \frac{\sin z}{(\cos z)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\sin z}{-\sin z} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\cos \frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = \frac{\sin z}{(\cos z)} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{\sin z}{-\sin z} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\cos \frac{1}{2}},$$

故

$$\int_{|z|=1} \tan z dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{\cos \frac{1}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} \right) = -4\pi i \frac{1}{\cos \frac{1}{2}}.$$

**例 5.10** 计算  $\int_{|z|=2} \frac{1}{1-z} dz$ .

解  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  有二个孤立奇点  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$  且都包含在圆  $|z|=2$  的内部. 由留数定理,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{1-z} dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, 0)],$$

显然,  $z_1 = 1$  为  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  的一阶极点, 而

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = -\lim_{z \rightarrow 1} ze^z = -e.$$

$z_2 = 0$  为  $f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$  的本性奇点且在  $0 < |z| < 1$  内

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-z} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\ &= (z + z^2 + z^3 + \dots) \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right) \\ &= \dots + \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) \frac{1}{z} + \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} \text{ 的系数 } c_{-1} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = e - 2. \text{ 即}$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = c_{-1} = e - 2,$$

于是

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz = 2\pi i (e - 2) = 2\pi i (e - 2).$$

### 5.2.3 无穷远点的留数

**定义 5.4** 设函数  $f(z)$  在  $R < |z| < +\infty$  ( $R > 0$ ) 内解析, 即无穷远点为  $f(z)$  的孤立奇点.  $C$  为圆周  $|z| = r$ , 其中  $r > R$ , 则称

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$$

(其中  $C^-$  指负方向) 为  $f(z)$  在  $z = \infty$  的留数, 记为  $\operatorname{Res}(f, \infty)$ , 即

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz. \quad (5.13)$$

设  $f(z)$  在  $R < |z| < +\infty$  内的罗朗级数展式为

$f(z) = \dots + c_{-m} z^{-m} + \dots + c_{-1} z^{-1} + c_0 + c_1 z + \dots$ , 则与上一段相同, 仍有

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz$$

从而有

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}.$$

令  $w = \frac{1}{z}$ , 则  $(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$  在  $0 < |w| < \frac{1}{R}$  内解析, 且其罗朗级数展式为

$$(w) = \dots + c_{-m} w^m + \dots + c_{-1} w + c_0 + c_1 w^{-1} + \dots,$$

于是有

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{w} \right) \cdot \frac{1}{w^2} &= \dots + c_{-m} w^{m-2} + \dots \\ &\quad + c_{-1} w^{-1} + c_0 w^{-2} + c_1 w^{-3} + \dots, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \operatorname{Res} \left[ \left( \frac{1}{w} \right) \cdot \frac{1}{w^2}, 0 \right] = \operatorname{Res} \left[ f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot \frac{1}{w^2}, 0 \right] \\ &= \operatorname{Res} \left[ f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0 \right]. \end{aligned}$$

故有

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = - \operatorname{Res} \left[ f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0 \right]. \quad (5.14)$$

**定理 5.6** 设函数  $f(z)$  在扩充的复平面内除有限个孤立奇点  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $\infty$  外处处解析, 则  $f(z)$  在各奇点处的留数总和为零, 即

$$\operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

**证** 作圆  $C: |z| = R$ , 使  $z_1, z_2, \dots, z_n$  包含在  $C$  内, 则由留数定理有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n)],$$

即

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n),$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z) dz = 0,$$

由无穷远点处留数的定义即得

$$\operatorname{Res}(f, z_1) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

**例 5.11** 求函数  $f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$  在  $z = \infty$  点的留数.

**解** 此函数在扩充复平面上有三个孤立奇点  $z_1 = 1, z_2 = -1, z = \infty$ . 且  $z_1 = 1, z_2 = -1$  为  $f(z)$  的一阶极点, 从而

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 1) &= \left. \frac{ze^z}{(z^2 - 1)} \right|_{z=1} = \left. \frac{ze^z}{2z} \right|_{z=1} = \frac{e}{2}, \\ \operatorname{Res}(f, -1) &= \left. \frac{ze^z}{(z^2 - 1)} \right|_{z=-1} = \left. \frac{ze^z}{2z} \right|_{z=-1} = \frac{1}{2}e^{-1}, \end{aligned}$$

则由定理 5.6 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, \infty) &= - [\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1)] \\ &= - \frac{e + e^{-1}}{2} = - \operatorname{ch} 1. \end{aligned}$$

**例 5.12** 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{z^4 - 1} dz.$$

解  $f(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$  在圆  $|z| = 2$  内有孤立奇点  $z = \pm 1, \pm i$ , 则由留数定理及定理 5.6

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{z}{z^4 - 1} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1) \\ &\quad + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)] \\ &= -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty), \end{aligned}$$

又  $f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{z}{1 - z^4}$ ,  $z = 0$  为其可去奇点, 于是

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right) = 0,$$

故

$$\int_{|z|=2} \frac{z}{z^4 - 1} dz = 0.$$

### 例 5.13 计算积分

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}.$$

解  $f(z) = \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$  在  $|z| = 2$  内有两个孤立奇点  $z_1 = -i, z_2 = 1$ , 其中  $z_1 = -i$  为  $f(z)$  的 10 阶极点,  $z_2 = 1$  为  $f(z)$  的一阶极点. 由留数定理

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} \\ = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, 1)]. \end{aligned}$$

又由定理 5.6,

$$\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}(f, 1) = -\operatorname{Res}(f, 3) - \operatorname{Res}(f, \infty),$$

而

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 3) &= \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)} \\ &= \frac{1}{2(3+i)^{10}}. \end{aligned}$$

$f(\frac{1}{z}) \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)}$ ,  $z = 0$  为其可去奇点, 于是

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right) = 0,$$

故

$$\begin{aligned} \left| z \right| = 2 \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)} &= -2i \cdot \frac{1}{2(3+i)^{10}} \\ &= -\frac{i}{(3+i)^{10}}. \end{aligned}$$

### 5.3 留数对定积分计算的应用

在高等数学以及实际问题中,常常要求出一些定积分或广义积分的值,而这些积分中被积函数的原函数,不能用初等函数表示出来,或即使可以求出原函数,计算也往往比较复杂.利用留数定理,要计算某些类型的定积分或广义积分,只须计算某些解析函数在孤立奇点的留数,从而把问题大大简化,下面通过具体例子,说明如何利用留数计算几种特殊类型的积分.

#### 例 5.14 计算积分

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{2 + \sin x}.$$

解 令  $e^{ix} = z$ , 则  $\sin x = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ ,  $dx = \frac{dz}{iz}$ , 并且当  $x$  从 0 增加到 2 时,  $z$  按正向绕圆  $C: |z| = 1$  一周.故

$$I = \int_C \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz.$$

因为  $e^{ix}$  随着  $x$  变大, 就是按照逆时针的方向跑, 所以定义图形的正方向是逆时针!!!!

函数  $f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$  有两个一阶极点:  $z_1 = -2i + 3i$ ,  $z_2 = -2i - 3i$ . 显然  $|z_1| < 1$ ,  $|z_2| > 1$ , 即  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内只有一个极点  $z_1$ . 由留数定理

$$I = \int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1),$$

而

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left. \frac{2}{(z^2 + 4iz - 1)} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{2}{2z + 4i} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{3i}.$$

于是

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{2 + \sin x} = 2\pi i \cdot \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}.$$

一般地, 应用同样的方法, 令  $\sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}$ ,  $\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}$ ,  $dx = \frac{dz}{iz}$  可计算形如

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$$

的积分, 其中  $R(x, y)$  为有理分式, 并且在单位圆周上分母不为零.

### 例 5.15 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

解 设  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ , 明显地,  $f(z)$  有两个二阶极点:  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$ , 其中  $z_1 = i$  在上半平面.

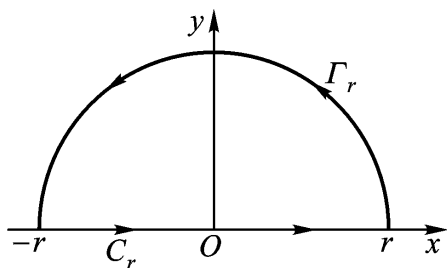


图 5.2

作以原点  $O$  为心, 半径为  $r$  的圆盘, 考察其在上半平面的部分, 设其边界为  $C_r$ . 取  $r > 1$ , 于是  $z_1 = i$  被包含在  $C_r$  的内部.  $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$  沿  $C_r$  取积分得

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right] \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中  $\int_{\Gamma_r}$  为  $C_r$  上的圆弧部分.

在  $\Gamma_r$  上,  $|z| = r$ , 从而

$$|1+z^2| = |z|^2 - 1 = r^2 - 1, \quad \left| \frac{1}{(1+z^2)^2} \right| = \frac{1}{(r^2 - 1)^2},$$

故有

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(r^2 - 1)^2} \cdot r.$$

于是

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 0.$$

在式(5.15)中令  $r \rightarrow +\infty$ , 即得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

因为  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$  为  $(-\infty, +\infty)$  上的偶函数, 所以由上述结果也可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

一般地

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z), z_k],$$

其中  $R(x)$  是  $x$  的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高二次, 并且  $R(z)$  在实轴上没有孤立奇点时积分是存在的,  $z_k$  为  $R(z)$  在上半平面的孤立奇点.

应用留数计算另一类型的积分需下面引理:

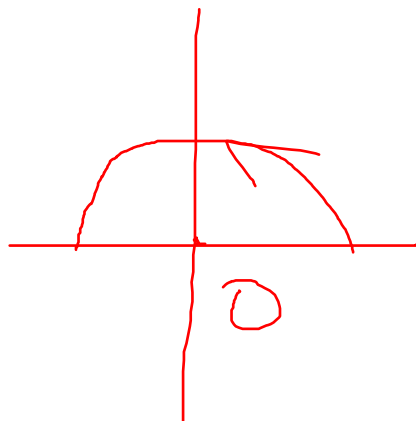
约当(Jordan)引理

设  $f(z)$  在上半平面内有有限个奇点, 在实轴上解析.  $\Gamma_r$  是以原点  $O$  为心,  $r$  为半径的上半圆周. 当  $\text{Im}(z) \rightarrow 0$  时,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0,$$

成立, 则有

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (a > 0).$$



证明从略.

例 5.16 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

解 取  $r > 0$ , 有

$$\int_0^r \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \int_0^r \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2(1+x^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx.$$

显然, 函数  $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$  在上半平面除去一阶极点  $z=i$  外处处解析, 作图 5.2 那样的区域, 取  $r > 1$ , 则由留数定理有

$$\int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \text{Res} \frac{e^{iz}}{1+z^2}, i = \frac{\pi}{e}.$$

又由上述引理(取  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ )有

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 0,$$

故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

一般地

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[R(z) e^{iaz}, z_k] \quad (a > 0),$$

其中  $R(x)$  是  $x$  的有理函数, 而分母的次数至少比分子的次数高一次, 并且  $R(z)$  在实轴上没有孤立奇点时积分是存在的,  $z_k$  为  $R(z)$  在上半平面的孤立奇点.

### 例 5.17 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解 取  $r$  使  $0 < \varepsilon < r$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx = -\frac{i}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx \right).$$

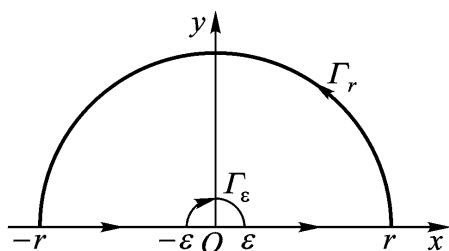


图 5.3

函数  $\frac{e^{iz}}{z}$  只是在  $z=0$  有一阶极点, 在图 5.2 上添作一个以原点  $O$  为心, 半径为  $r$  的半圆 ( $0 < \varepsilon < r$ , 如图 5.3). 于是由柯西定理有

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, \quad (5.16)$$

由引理,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ . 又  $z \rightarrow 0$  时,  $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{n-1}$ , 其等式右边的级数收敛于解析函数, 设其为  $h(z)$ . 从而

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz = -\pi i + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz,$$

因为  $h(z)$  在  $z=0$  解析, 所以在  $z=0$  的某邻域内  $h(z)$  有界, 即存在  $M$



$> 0$ , 使  $|h(z)| < M$ . 于是当  $r$  充分小时,

$$\int_{\gamma_r} h(z) dz < M \cdot 2\pi r,$$

所以

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i.$$

在式(5.16)中令  $r \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , 即得

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-r}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_r^r \frac{e^{ix}}{x} dx = -i,$$

故

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{i}{2}(-i) = \frac{\pi}{2}.$$

## 第5章习题

5.1.1 在扩充复平面上找出下列函数的孤立奇点并加以分类, 若是极点, 指出其阶数.

(a)  $\frac{2z+1}{z(z^2+1)};$

(b)  $\frac{z^3+i}{z^2-3z+2};$

(c)  $\frac{\sin z}{z^4};$

(d)  $ze^{\frac{1}{z}};$

(e)  $\frac{1-\operatorname{ch} z}{z};$

(f)  $\frac{1-e^{2z}}{z^4};$

(g)  $\frac{e^{2z}}{(1-z)^2};$

(h)  $z \cos \frac{1}{z};$

(i)  $\frac{e^z-1}{z};$

(j)  $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})};$

(k)  $\frac{z^6+1}{z(z+1)^2};$

(l)  $\frac{1}{(1+z^2)(1+e^z)}.$

5.1.2 证明: 若  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  ( $m > 1$ ) 阶极点, 那么  $z_0$  是  $f'(z)$  的  $m-1$  阶极点.

5.1.3 设  $z_0$  是函数  $f(z)$  的  $m$  阶零点, 又是  $g(z)$  的  $n$  阶零点, 试问下列函数在  $z_0$  处具有何种性质

(a)  $f(z) + g(z);$  (b)  $f(z) \cdot g(z);$  (c)  $f(z)/g(z).$

5.2.1 求下列函数在孤立奇点处的留数.

(a)  $f(z) = \frac{1}{z^2+z^4};$

(b)  $f(z) = \frac{z-\sin z}{z^3};$

$$(c) f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^2}; \quad (d) f(z) = \frac{1}{\cos z};$$

$$(e) f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}; \quad (f) f(z) = \sin \frac{z}{z+1};$$

$$(g) f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}; \quad (h) f(z) = ze^{\frac{1}{z-1}};$$

$$(i) f(z) = \frac{z^{2n}}{1+z^n} \quad (n \text{ 为正整数});$$

$$(j) f(z) = \frac{1}{(z-a)^m (z-b)^n} \quad (m, n \text{ 正整数});$$

$$(k) f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}; \quad (l) f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}.$$

5.2.2 设  $z_0$  是  $f(z)$  的  $m$  阶零点, 求  $\operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)}, z_0$ .

5.2.3 设  $z_0$  为  $f(z)$  的  $n$  阶极点, 求  $\operatorname{Res} \frac{f'(z)}{f(z)}, z_0$ .

5.2.4 求下列各函数在其孤立奇点的留数.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}; \quad (b) f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z-i)^3};$$

$$(c) f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}; \quad (d) f(z) = \cot z;$$

$$(e) f(z) = \frac{z}{z^4 + 4}; \quad (f) f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z};$$

$$(g) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}; \quad (h) f(z) = \frac{z^2}{\sin^4 z};$$

$$(i) f(z) = \frac{z^{\frac{1}{4}}}{z+i} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi).$$

5.2.5 利用留数计算下列积分.

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{1}{z^3 - z^5} dz; \quad (b) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z} dz;$$

$$(c) \int_{|z|=3} \frac{1}{(4+z^2)(z+5i)} dz; \quad (d) \int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} dz;$$

$$(e) \int_C \frac{1}{1+z^4} dz, \quad C: x^2 + y^2 = 2x;$$

$$(f) \int_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz; \quad (g) \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz;$$

$$(h) \int_{|z|=1} \frac{1 - \cos z}{z^m} dz, \quad (m \text{ 为正整数});$$

$$(i) \int_C \frac{\sin z}{z^2(z-1)} dz, \quad C \text{ 为不过 } 0 \text{ 和 } 1 \text{ 的任意简单闭曲线};$$

$$(j) \int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz;$$

$$(k) \int_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}} dz;$$

$$(l) \int_{|z|=1} e^{-\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z} dz;$$

$$(m) \int_{|z-2|=2} \frac{1}{e^2 - i} dz;$$

$$(n) \int_{|z|=n} \tan z dz \quad (n \text{ 为正整数}).$$

5.2.6 试求下列函数在无穷远点的留数.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z};$$

$$(b) f(z) = e^{\frac{1}{z}};$$

$$(c) f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1};$$

$$(d) f(z) = \frac{1}{z(z+1)^4(z-4)};$$

$$(e) f(z) = e^{z+\frac{1}{z}};$$

$$(f) f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}};$$

$$(g) f(z) = \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(z - \quad)(z - \quad)}.$$

5.2.7 利用定理计算下列各积分.

$$(a) \int_C \frac{5z}{z(z-1)} dz, \quad C: |z| = 2;$$

$$(b) \int_C \frac{z^{15}}{(z^2 + 1)^2(z^4 + 2)^3} dz, \quad C: |z| = 3;$$

$$(c) \int_C \frac{1}{(z^5 - 1)(z - 3)} dz, \quad C: |z| = 2;$$

$$(d) \int_C \frac{z^{2n}}{1 + z^n} dz, \quad (n \text{ 为正整数}), \quad C: |z| = r > 1;$$

$$(e) \int_C \frac{1}{z^2 \sin \frac{1}{z}} dz, \quad C: |z| = 1;$$

$$(f) \int_C \frac{z^5 \cos \frac{1}{z}}{z^6 + 1} dz, \quad C: |z| = 2.$$

5.3.1 计算下列积分.

$$(a) \int_0^2 \frac{1}{\frac{5}{4} + \sin} d;$$

$$(b) \int_0^2 \frac{1}{1 - 2a \cos + a^2} d \quad (0 < a < 1);$$

$$(c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 x} dx \quad (a > 0);$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + a \sin x} dx \quad (|a| < 1);$$

$$(e) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx;$$

$$(f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx;$$

$$(g) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx;$$

$$(h) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 1} dx;$$

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx;$$

$$(j) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx .$$

## 第 6 章 保形映照

本章从几何方面讨论解析函数的性质.由于复变函数  $w = f(z)$  将  $z$  平面上的点集  $D$  映照或变换为  $w$  平面上的点集  $D^* = f(D)$ .因此复变函数也称为复映照,解析函数也称为解析映照.通过解析映照常常可以把比较复杂的区域变换为比较简单的区域,从而使问题得到简化.

本章首先从解析函数的导数的几何意义引出保形映照的概念,而后着重讨论常用的分式线性函数所构成的保形映照的特性.

### 6.1 导数的几何意义及保形映照的概念

#### 6.1.1 曲线的切向量

设  $C$  为平面上的一条简单光滑曲线,参数方程为:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t$  在某个区间内),则由高等数学中已学过的知识我们知道,曲线  $C$  上对应于参数  $t$  的点的切线向量为:  $\{x'(t), y'(t)\}$ .

在复平面上,曲线  $C$  可表示为

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

从而  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  表示曲线  $C$  上对应于参数  $t$  的点的切线向量,进而  $\arg z'(t)$  表示  $C$  在  $z(t)$  处的切线与实轴的夹角.

#### 6.1.2 导数的几何意义

设  $w = f(z)$  是区域  $D$  内的解析函数,  $z_0 \in D$ ,  $w_0 = f(z_0)$  且  $f'(z_0) \neq 0$ , 考虑  $D$  内过  $z_0$  的一条简单光滑曲线  $C$ :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (t \text{ 在某个区间内}, z(t_0) = z_0).$$

显然,函数  $w = f(z)$  把简单光滑曲线  $C$  映照成过  $w_0 = f(z_0)$  的一条简单曲线  $\Gamma$ :

$$w = f(z(t)) \quad (t \text{ 在某个区间内}).$$

因为  $\frac{dw}{dt} = f'(z(t)) z'(t)$ , 可见  $\Gamma$  也是一条光滑曲线;由上一段的结论,它在  $w_0$  的切线与实轴的夹角是

$$\arg[f'(z_0) z'(t_0)] = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0),$$

于是有

$$\arg f(z_0) = \arg[f(z_0)z'(t_0)] - \arg z'(t_0).$$

故  $\arg f(z_0)$  表示: 曲线  $C$  在  $z_0$  点的切线在  $w = f(z)$  的映照下转动的角度 即曲线  $C$  在  $w = f(z)$  的映照下在  $z_0$  处的转动角. 这一数值与曲线  $C$  的形状及方向无关.

设在  $D$  内过  $z_0$  还有一条简单光滑曲线  $C_1: z = z_1(t)$ . 函数  $w = f(z)$  把它映照成为一条简单光滑曲线  $\Gamma: w = f(z_1(t))$ , 与上面一样,  $C_1$  及  $\Gamma$  在  $z_0$  及  $w_0$  处切线与实轴的夹角分别是

$$\arg z_1'(t_0) \text{ 及 } \arg[f(z_1(t_0))z_1'(t_0)] = \arg f(z_0) + \arg z_1'(t_0).$$

从而有

$$\begin{aligned} & \arg[f(z_1(t_0))z_1'(t_0)] - \arg[f(z(t_0))z'(t_0)] \\ &= \arg z_1'(t_0) - \arg z'(t_0), \end{aligned}$$

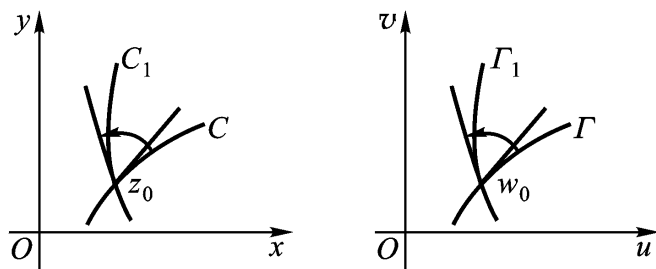


图 6.1

等式的左端为  $\Gamma$  与  $\Gamma_1$  在  $w_0$  处切线的夹角也就是  $\Gamma$  与  $\Gamma_1$  的夹角; 等式的右端为  $C$  与  $C_1$  在  $z_0$  处切线的夹角, 也就是曲线  $C$  与  $C_1$  的夹角. 因此上式说明: 用解析函数  $w = f(z)$  ( $f'(z) \neq 0$ ) 作映照时, 曲线间的夹角的大小及方向保持不变. 这一性质称为映照的保角性.

以上对解析函数导数的辐角作了几何解释, 下面再说明它的模的几何意义, 由导数的定义:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|},$$

因而  $|f'(z_0)|$  可以近似表示比值  $\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$ . 在  $w = f(z)$  所作映照下,  $|z - z_0|$  及  $|f(z) - f(z_0)|$  分别表示  $z$  平面上向量  $z - z_0$  及  $w$  平面向量  $f(z) - f(z_0)$  的长度. 当  $|z - z_0|$  较小时,  $|f'(z_0)|$  近似表示经过映照后,  $|f(z) - f(z_0)|$  关于  $|z - z_0|$  的伸缩倍数, 而且这一倍数与向量  $z - z_0$  的方向无关. 因此我们把  $|f'(z_0)|$  称为映照在点  $z_0$  的伸缩率.

### 6.1.3 保形映照的概念

现在用几何直观来说明解析映照的意义. 设  $w = f(z)$  是在  $D$  内解析的函数,  $z_0 \in D$ ,  $w_0 = f(z_0)$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ , 则  $w = f(z)$  把  $z_0$  的一小邻域内任一微小三角形映照为含  $w_0$  的一个区域内的曲边三角形. 这两个三角形对应角相等, 对应边近似地成比例. 因此这两个三角形近似地是相似形. 另外,  $w = f(z)$  还把半径充分小的圆  $|z - z_0| = r$  近似地映照成圆

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| r.$$

由以上分析, 我们称解析函数  $w = f(z)$  ( $f'(z) \neq 0$ ) 所确定的映照为保形映照, 也称为共形映照或保角映射. 这种映照的特点是把  $z$  平面上的区域变换为  $w$  平面上的区域, 在实施变换的每一点上具有保角性.

## 6.2 分式线性函数及其映照性质

### 6.2.1 分式线性函数

线性函数是复变函数论及其应用中经常用到的工具, 在保形映照的一般理论以及某些简单区域的保形映照中都要应用到它.

**定义 6.1** 形如

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (6.1)$$

的函数称为分式线性函数. 其中  $ad - bc \neq 0$ ,  $a, b, c$  及  $d$  是复常数.

由于  $ad - bc \neq 0$ , 所以  $\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$ , 从而函数 (6.1) 不恒等于常数.

函数 (6.1) 的反函数为

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (6.2)$$

因为  $(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$ , 所以函数 (6.2) 亦为分式线性函数.

显然, 当  $c = 0$  时, 函数 (6.1) 为  $z$  平面的解析函数, 函数 (6.2) 为  $w$  平面的解析函数且两个函数的导数均恒不为零. 当  $c \neq 0$  时, 函数 (6.1) 在  $z$  平面上除去  $-\frac{d}{c}$  外处处解析且导数不为零; 函数 (6.2) 在  $w$  平面上除去  $\frac{a}{c}$  外处处解析且导数不为零. 从而由分式线性函数 (6.1) 确定的映照在去掉  $z = -\frac{d}{c}$  的区域内为保形映照. 对函数 (6.2) 也有类似结论.

在扩充的复平面上, 当  $c = 0$  时, 我们视函数(6.1)及函数(6.2)分别把  $z =$  与  $w =$  映照成  $w =$  与  $z =$ ; 当  $c \neq 0$  时, 我们视函数(6.1)把  $z = -\frac{d}{c}$  映照成  $w =$ , 把  $z =$  映照成  $w = \frac{a}{c}$ . 而函数(6.2)分别把  $w = \frac{a}{c}$  与  $w =$  映照成  $z =$  与  $z = -\frac{d}{c}$ . 于是函数(6.1)与函数(6.2)在扩充  $z$  平面与扩充  $w$  平面之间确立了一一对应的映照.

若  $f(z_0) =$ , 则  $t_0 = \frac{1}{f(z_0)} = 0$ . 规定若  $t = \frac{1}{f(z)}$  把  $z = z_0$  的一个邻域保形映照为  $t = 0$  的一个邻域, 则称  $w = f(z)$  把  $z = z_0$  的一个邻域保形映照成  $w =$  的一个邻域. 对函数  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ , 取  $z_0 = -\frac{d}{c}$ , 则由  $\frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b}$  在  $z_0$  点的解析性及  $\left. \frac{1}{w} \right|_{z=z_0} = 0$ ,  $\left. \frac{1}{w} \right|_{z=z_0} \neq 0$  可知  $\frac{1}{w} = \frac{cz+d}{az+b}$  把  $z_0 = -\frac{d}{c}$  的充分小邻域保形映照为  $t = \frac{1}{w} = 0$  的一个邻域, 于是函数(6.1)在扩充  $z$  平面与扩充  $w$  平面之间建立了保形映照.

一般地, 分式线性函数(6.1)可视为由下列四种简单函数复合而得:

1°  $w = z +$ , 其中 为一复数;

2°  $w = e^i z$ , 其中 为一实数;

3°  $w = rz$ , 其中  $r$  为一正实数;

4°  $w = \frac{1}{z}$ .

实际上, 当  $c = 0$  时, 函数(6.1)可表示为

$$w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d} \left( z + \frac{b}{a} \right).$$

当  $c \neq 0$  时, 函数(6.1)可表示为

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2 \left( z + \frac{d}{c} \right)}.$$

把  $z$  平面和  $w$  平面叠合在一起, 我们讨论上述四种简单函数的映照性质.

1°  $w = z +$ .

令  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $= a + ib$ , 则有  $u = x + a$ ,  $v = y + b$ . 于是  $w = z +$  确定了一个平移.

2°  $w = e^i z$ .

因为  $e^i = \cos + i \sin$ ,  $z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z)$  所以  $w = e^i z = |z| [\cos (\arg z + ) + i \sin (\arg z + )]$ ,  $w$  的模与  $z$  的模相同, 而  $w$  的辐



角是  $z$  的辐角加  $\frac{\pi}{2}$ , 故  $w = e^{i\frac{\pi}{2}} z$  确定了一个旋转.

$$3^\circ w = rz.$$

显然  $w$  与  $z$  的辐角相同, 而模为  $z$  的模的  $r$  倍, 故  $w = rz$  确定了一个以原点为心的相似映照.

例如:  $z$  平面上以  $0, \frac{1}{2}, i, \frac{1}{2} + i$  为顶点的长方形, 经过保形映照

$$w = 2(1+i)z + (2-i),$$

变换成  $w$  平面上以  $2-i, 3, i, 1+2i$  为顶点的长方形, 其变换过程如图 6.2.

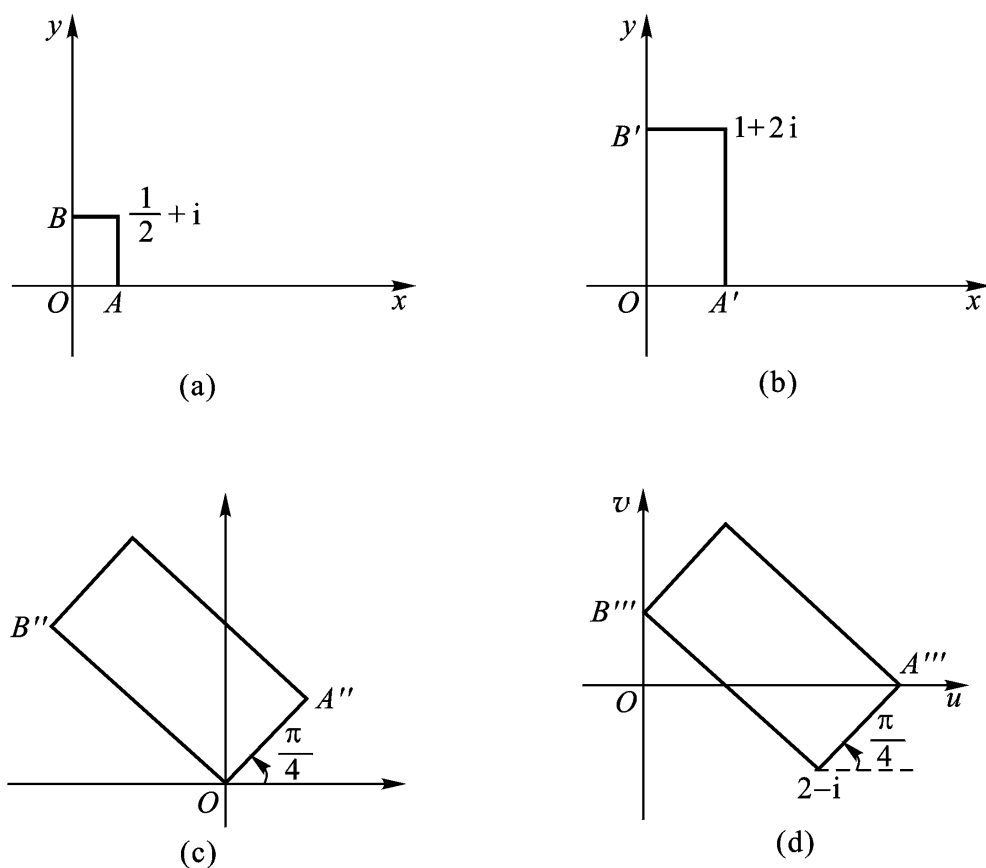


图 6.2

$$4^\circ w = \frac{1}{z}.$$

在讨论  $w = \frac{1}{z}$  的映照性质之前, 我们先引进一个定义, 设已给圆  $C: |z - z_0| = R$  ( $0 < R < +\infty$ ), 若有限点  $z_1$  及  $z_2$  在过  $z_0$  的同一射线上, 并且  $|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = R^2$ , 那么我们说  $z_1$  及  $z_2$  是关于圆  $C$  的对称点, 我们还称  $z_0$  与  $\bar{z}_0$  对称.

映照  $w = \frac{1}{z}$  可视为下列两个映照复合而成:

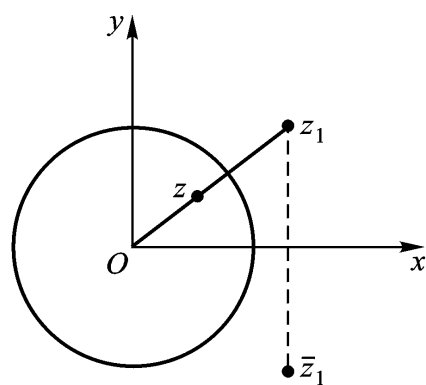


图 6.3

$$z_1 = \frac{1}{\bar{z}}, \quad w = \bar{z}.$$

显然,  $w = \bar{z}$  确定关于实轴的对称映照, 而  $z_1 = \frac{1}{\bar{z}}$  将  $z$  映照为  $z_1$ , 其辐角与  $z$  相同:  $\text{Arg } z_1 = -\text{Arg } \bar{z} = \text{Arg } z$ , 而模  $|z_1| = \left| \frac{1}{\bar{z}} \right| = \frac{1}{|z|}$ , 即有  $|z_1| |z| = 1$ , 从而  $z, z_1$  关于单位圆  $|z| = 1$  对称.

故  $w = \frac{1}{z}$  由关于单位圆对称的映照  $z_1 = \frac{1}{\bar{z}}$  和关于实轴的对称映照  $w = \bar{z}$  叠合而得.

### 6.2.2 分式线性函数的映照性质

下面我们讨论一般分式线性函数的映照性质. 约定, 把扩充复平面上任一直线看成半径为无穷大的圆.

**定理 6.1** 在扩充复平面上, 分式线性函数把圆映照成为圆. (分式线性函数的保圆性)

**证** 在上一段我们已知分式线性函数所确定的映照, 是由平移、旋转、相似映照及函数  $w = \frac{1}{z}$  所确定的映照组成的, 前三种映照显然把圆映照成为圆, 因而只须证明  $w = \frac{1}{z}$  也把圆映照成为圆.

圆的一般方程为

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \quad (6.3)$$

( $a = 0$  时蜕化为直线). 若令  $z = x + iy$ , 则有  $x^2 + y^2 = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , 代入式(6.3)中即得圆的复数表示:

$$a\frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{b}{2}(z + \bar{z}) + \frac{c}{2i}(z - \bar{z}) + d = 0, \quad (6.4)$$

其中  $a, b, c, d$  是实常数,  $\frac{1}{2}(b + ic)$  是复常数.

将  $z = \frac{1}{w}$  代入式(6.4)得

$$d\frac{1}{w} + \frac{1}{w} + \frac{1}{w} + a = 0,$$

即

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0,$$

表示  $w$  平面上的圆( $d = 0$  时, 表示一条直线), 故  $w = \frac{1}{z}$  将圆映照成圆.

设分式线性函数(6.1)把扩充  $z$  平面上的圆  $C$  映照成扩充  $w$  平面上的圆  $C'$ ,  $C$  与  $C'$  分别把扩充  $z$  平面及扩充  $w$  平面分成不相交的两部分, 从而函数

(6.1)把  $z$  平面上以  $C$  为边界的两部分,分别映照为  $w$  平面上以  $C$  为边界的两部分.那么,  $C$  的“内部”究竟映照成  $C$  的“内部”还是映照成  $C$  的“外部”呢?这可由不在圆上的任一点的映照来确定.如若圆  $C$  及  $C$  的半径都是有限的,而函数(6.1)在  $C$  的内部有极点,那么它把圆  $C$  的内部映照成为圆  $C$  的外部(因为它把极点映照为  $w$  平面上的无穷远点);反之若函数(6.1)的极点 ( $z = -\frac{d}{c}$ ) 在  $C$  的外部,那么它把圆  $C$  的内部映照成圆  $C$  的内部.

定理 6.1 说明分式线性函数把扩充  $z$  平面上的圆映照成为扩充  $w$  平面上的圆,那么在扩充  $z$  平面及扩充  $w$  平面上分别取定一圆  $C$  及  $C$ , 是否可以找到一个分式线性函数,它把  $C$  映照成  $C$ ?

定理 6.2 对于扩充  $z$  平面上任意三个不同的点  $z_1, z_2, z_3$  以及扩充  $w$  平面上任意三个不同的点  $w_1, w_2, w_3$ , 存在唯一的分式线性函数,把  $z_1, z_2, z_3$  分别映照成  $w_1, w_2, w_3$ .

证 分两种情形

1° 给定各点都是有限点

设所求分式线性函数为

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

则由

$$w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (6.5)$$

算出  $w - w_1, w - w_2, w_3 - w_1, w_3 - w_2$ , 消去  $a, b, c, d$  即得

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (6.6)$$

由式(6.6)即可解出所求的分式线性函数,又求此函数时,只要求它满足式(6.5),所以它是把  $z_1, z_2, z_3$  分别映照成  $w_1, w_2, w_3$  的唯一的分式线性函数.

2° 给定各点中含无穷远点.

不妨设  $w_3 = \infty$ , 其它点为有限点,将  $w_3 = \infty$  换成任一有限点  $w_3$ , 我们仍可得出式(6.6),再令  $w_3 = \infty$ , 即得

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

由此可解出所求函数.同理可证其它点为无穷远点的情形.

在  $z$  平面及  $w$  平面上分别取定圆  $C$  及  $C$ .在  $C$  及  $C$  上分别选不同的三点  $z_1, z_2, z_3$  及  $w_1, w_2, w_3$ .由定理 6.2, 存在唯一的分式线性函数,把  $z_1, z_2, z_3$  分别映照成  $w_1, w_2, w_3$ , 从而把圆  $C$  映照成圆  $C$ .故有以下定理.

**定理 6.3** 扩充  $z$  平面上任何一个圆, 可以用一个分式线性函数映照成扩充  $w$  平面上任何一个圆.

上一段, 我们已定义了关于圆对称的点. 分式线性函数把圆映照成圆, 那么分式线性函数是否将  $z$  平面关于圆  $C$  对称的点映照成  $w$  平面上关于圆  $C$  对称的点 ( $C$  为圆  $C$  的“像”)? 先来看对称点的一个基本性质.

**引理** 两点  $z_1$  及  $z_2$  是关于圆  $C$  的对称点的必要与充分条件是: 通过  $z_1$  及  $z_2$  的任何圆与圆  $C$  正交.

证明从略.

由此引理即可回答上面提出的问题.

**定理 6.4** 若分式线性函数把  $z$  平面上的圆  $C$  映照成  $w$  平面上的圆  $C$ , 那么它把关于圆  $C$  对称的点  $z_1$  及  $z_2$  映照成关于圆  $C$  对称的点  $w_1$  及  $w_2$ .

**证** 过  $w_1$  及  $w_2$  的任何圆是由过  $z_1$  及  $z_2$  的圆映照而得的. 由引理, 过  $z_1$  及  $z_2$  的任何圆与圆  $C$  正交, 从而由分式线性函数的保角性, 过  $w_1$  及  $w_2$  的任何圆与圆  $C$  正交, 从而  $w_1$  及  $w_2$  关于  $C$  为对称.

**例 6.1** 求把  $z$  平面上的点  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -1$  分别映照为  $w$  平面的点  $w_1 = -1$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = 1$  的分式线性函数.

**解** 由式(6.6)有

$$\frac{w+1}{w-i} \cdot \frac{1+i}{1-i} = \frac{z-1}{z-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i},$$

解得

$$w = -\frac{1}{z}.$$

此即所求的分式线性函数.

**例 6.2** 考虑如果分式线性函数

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

的映照结果为圆  $|w| = R$ , 那么映照前  $z$  平面上的图形是什么呢? 显然, 该映照把  $z_1$  及  $z_2$  映照成为关于圆  $|w| = R$  的对称点 0 及  $\infty$ , 且把扩充  $z$  平面上的曲线

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = R$$

映照成为  $|w| = R$ , 则由定理 6.1 及定理 6.2 知曲线  $C: \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = R$  表示  $z$  平面上的一个圆,  $z_1$  及  $z_2$  是关于圆  $C$  的两个对称点.

### 6.3 分式线性函数的应用

由于分式线性函数确定的映照的保圆性和保对称性,在作以圆弧或直线为边界的区域的保形映照时,分式线性函数起着很重要的作用,本节通过几个具体例子说明这一点.

**例 6.3** 求证把上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  保形映照为上半平面  $\text{Im}(w) > 0$  的分式线性映照一定可以表示为

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

其中  $a, b, c, d$  为实数且满足  $ad - bc > 0$ .

**证** 要把  $\text{Im}(z) = 0$  映照为  $w$  平面的实轴  $\text{Im}(w) = 0$ . 因而,  $z$  平面实轴上的三点  $x_1, x_2, x_3$  必与  $w$  平面实轴上的三点  $u_1, u_2, u_3$  相对应: 即欲求分式线性函数满足

$$\frac{w - u_1}{w - u_2} \cdot \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_2} = \frac{z - x_1}{z - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2},$$

解得

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

因为  $x_1, x_2, x_3$  及  $u_1, u_2, u_3$  均为实数, 所以  $a, b, c, d$  为实数. 又

$$\begin{aligned} \text{Im}(w) &= \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) = \frac{1}{2i} \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \\ &= \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im}(z). \end{aligned}$$

从而, 当  $\text{Im}(z) > 0$  时要使  $\text{Im}(w) > 0$  必须有  $ad - bc > 0$ .

故把上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  映照为上半平面  $\text{Im}(w) > 0$  的分式线性函数必具有以下形式

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

其中  $a, b, c, d$  为实数且  $ad - bc > 0$ .

**例 6.4** 试求把上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  保形映照成圆盘  $|w| < 1$  的分式线性函数.

**解** 满足要求的分式线性函数首先应把  $\text{Im}(z) = 0$  映照成  $|w| = 1$ , 其次应把上半平面  $\text{Im}(z) > 0$  内某一点  $z$  映照成  $w = 0$ . 因为分式线性函数把关于实轴  $\text{Im}(z) = 0$  对称的点映照成关于圆  $|w| = 1$  对称的点, 而  $w = 0$  与  $w =$  关于  $|w| = 1$  对称,  $z_0$  与  $\bar{z}_0$  关于  $\text{Im}(z) = 0$  对称 ( $\text{Im}(z_0) > 0$ ), 故所求函数

不仅把  $z_0$  映照成  $w = 0$ , 而且把  $\infty$  映照成  $w = \infty$ . 由例 6.2, 这种函数的形状是

$$w = \frac{z - z_0}{z - \infty},$$

其中  $\infty$  是一复常数.

又当  $z$  为实数时, 所求函数将  $\text{Im}(z) = 0$  映照成  $|w| = 1$ , 即

$$|w| = \left| \frac{z - z_0}{z - \infty} \right| = 1,$$

于是  $\infty = e^{i\theta}$ ,  $\theta$  为一实常数, 从而所求函数应为

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \infty}, \quad (6.7)$$

由于函数(6.7)把扩充  $z$  平面保形映照为扩充  $w$  平面, 所以它把  $\text{Im}(z) > 0$  保形映照成  $|w| < 1$ .

**例 6.5** 求把上半平面保形映照为单位圆的分式线性函数  $w = f(z)$ , 使  $f(i) = 0$ ,  $\arg f(i) = \frac{\pi}{2}$ .

**解** 由例 6.4, 所求分式线性函数可设为

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i},$$

则  $f(z) = e^{i\theta} \frac{(z+i) - (z-i)}{(z+i)^2} = e^{i\theta} \frac{2i}{(z+i)^2}$ , 从而

$$f(i) = e^{i\theta} \frac{2i}{-4} = \frac{1}{2} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}, \quad \arg f(i) = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

令  $\arg f(i) = \frac{\pi}{2}$ , 得  $\theta = \pi$ , 于是所求分式线性函数为

$$w = - \frac{z - i}{z + i}.$$

**例 6.6** 求把圆盘  $|z| < 1$  保形映照成圆盘  $|w| < 1$  的分式线性函数.

**解** 所求函数应把  $|z| < 1$  内一点  $z_0$  映照成  $w = 0$ , 并且把  $|z| = 1$  映照成  $|w| = 1$ . 因为  $z_0$  关于圆  $|z| = 1$  为对称的点是  $\frac{1}{\overline{z_0}}$ , 所以所求函数还应把  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  映照成  $w = \infty$  (因为  $w = 0$ ,  $w = \infty$  关于圆  $|w| = 1$  对称). 于是所求函数具有以下形状

$$w = \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\overline{z_0}}} = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z},$$

其中  $\theta$  及  $\frac{1}{\overline{z_0}}$  是复常数, 又当  $|z| = 1$  时,

$$1 - \overline{z_0} z = \overline{z} - \overline{z_0} = \overline{z(z_0 - \overline{z_0})},$$

从而

$$|w| = |z_0| \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = |z_0| = 1,$$

所以  $z_0 = e^{i\theta}$ , 其中  $\theta$  为一实数, 而所求分式线性函数为

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1). \quad (6.8)$$

**例 6.7** 求把单位圆  $|z| < 1$  保形映照为单位圆  $|w| < 1$  的分式线性函数, 使  $f(\frac{i}{2}) = 0$ ,  $\arg f(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$ .

解 由函数(6.8), 所求函数形如

$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{i}{2}z} = e^{i\theta} \frac{2z - i}{2 + iz}.$$

由  $f(\frac{i}{2}) = e^{i\theta} \frac{3}{(2 + iz)^2}$ , 得  $f(\frac{i}{2}) = \frac{4}{3}e^{i\theta}$ , 从而

$$\arg f(\frac{i}{2}) = \theta,$$

由条件  $\arg f(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$ , 得  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $e^{i\theta} = i$ , 故所求分式线性函数为

$$w = \frac{2iz + 1}{iz + 2}.$$

**例 6.8** 求将上半平面  $\operatorname{Im}(z) > 0$  保形映照为圆  $|w - w_0| < R$  的分式线性函数  $w = f(z)$ , 并使  $f(i) = w_0$ ,  $f'(i) > 0$ .

解 观察线性函数

$$w = \frac{w - w_0}{R},$$

显然, 此映照将圆  $|w - w_0| < R$  映照成单位圆  $|z| < 1$ , 又由函数(6.7), 分式线性函数

$$w = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}$$

把上半平面  $\operatorname{Im}(z) > 0$  映照为单位圆  $|z| < 1$ , 且当  $z = i$  时,  $w = 0$ . 于是函数

$$\frac{w - w_0}{R} = e^{i\theta} \frac{z - i}{z + i},$$

即

$$w = w_0 + Re^{i\theta} \frac{z - i}{z + i}$$

把上半平面  $\operatorname{Im}(z) > 0$  映照成圆  $|w - w_0| < R$ , 且把  $z = i$  映照为  $w = w_0$ .

又  $\frac{dw}{dz} = Re^i \frac{2i}{(z+i)^2}$ ;  $\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=i} = Re^i \frac{1}{2i}$ , 则由条件  $f(i) > 0$  得

$$Re^i \frac{1}{2i} = \frac{R}{2} e^{i(-\frac{\pi}{2})} > 0,$$

从而有  $-\frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\frac{R}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $e^i = i$ , 故所求线性函数为

$$w = w_0 + iR \frac{z-i}{z+i}.$$

## 6.4 指数函数与幂函数所确定的映照

### 6.4.1 指数函数 $w = e^z$ 所确定的映照

因为  $w = e^z$  在复平面内处处解析, 且  $w = e^z \neq 0$ , 所以指数函数  $w = e^z$  所确定的映照是保形映照.

由于  $w = e^z$  以  $2\pi i$  为周期, 所以我们只须讨论当  $z$  在由

$$0 < \operatorname{Im}(z) < 2$$

所定义的带形域  $B$  中变化时, 函数  $w = e^z$  的映照性质. 设  $w$  的实部及虚部分别为  $u$  及  $v$ .

设在带形区域  $B$  中,  $z$  从左向右描出一条直线  $L: \operatorname{Im}(z) = y_0$  (如图 6.4(a)), 则  $w = e^{x+iy_0}$ , 于是  $|w| = e^x$  从 0 (不包括 0) 增大到  $+\infty$ , 而  $\operatorname{Arg} w = y_0$  保持不变. 所以,  $w$  描出一条射线  $L_1: \operatorname{Arg} w = y_0$  (不包括 0, 如图 6.4(b)). 这样,  $L$  和  $L_1$  上的点一一对应.

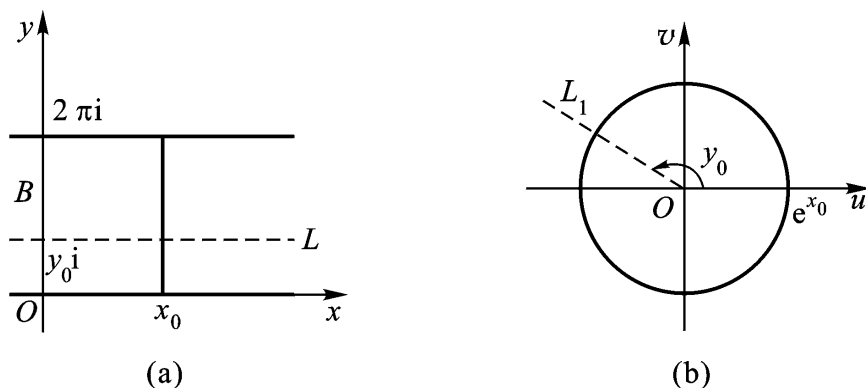


图 6.4

让  $y_0$  从 0 (不含 0) 递增到  $2\pi$  (不含  $2\pi$ ), 那么直线  $L$  扫过带形区域  $B$ , 而相应的射线  $L_1$  按反时针方向从  $w$  平面的正实轴 (不包括正实轴) 变到正实轴 (不包括正实轴). 故指数函数  $w = e^z$  确定了从带形区域  $B: 0 < \operatorname{Im}(z) < 2\pi$



到  $w$  平面除去原点和正实轴的保形映照. 明显地,  $w = e^z$  将  $0 < \operatorname{Im}(z) < 2$  保形映照为上半平面  $\operatorname{Im}(w) > 0$ ; 而把  $-\infty < \operatorname{Im}(z) < 2$  保形映照为下半平面  $\operatorname{Im}(w) < 0$ .

在带形区域  $B$  中取直线  $\operatorname{Re}(z) = x_0$ , 那么  $w = e^{x_0 + iy} = e^{x_0} (\cos y + i \sin y)$  ( $0 < y < 2$ ) 表示  $w$  平面上的以  $O$  为圆心,  $e^{x_0}$  为半径的一个圆, 除去  $u$  轴上的一点  $e^{x_0}$ . 即函数  $w = e^z$  把直线  $\operatorname{Re}(z) = x_0$  在  $B$  上的一段映照成  $w$  平面上除去  $u$  轴上的一点  $e^{x_0}$  的圆  $|w| = e^{x_0}$ . 特别地, 当  $x_0 = 0$  时,  $w = e^z$  将虚轴  $\operatorname{Re}(z) = 0$  在  $B$  上的一段映照成  $w$  平面上的单位圆  $|w| = 1$ , 除去点  $w = 1$ , 从而  $w = e^z$  把半带形域  $0 < \operatorname{Im}(z) < 2$ ,  $-\infty < \operatorname{Re}(z) < +\infty$  保形映照为单位圆  $|w| = 1$  的内部, 除去正实轴; 而把半带形区域  $0 < \operatorname{Im}(z) < 2$ ,  $0 < \operatorname{Re}(z) < +\infty$  映照成单位圆  $|w| = 1$  的外部, 除去正实轴.

用同样的方法可知, 函数  $w = e^z$  把任何带形区域  $B$ :

$$-\infty < \operatorname{Im}(z) < +\infty$$

保形映照成除去 0 及射线  $\operatorname{Arg} w = \alpha$  的  $w$  平面, 其中  $\alpha$  是任意实数; 特别, 它确定从带形  $B_{2\pi}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 到  $w$  平面除去 0 及正实轴的保形映照.

由以上分析不难看出: 映照  $w = e^z$  的特点是将扩充  $z$  平面上带形区域  $0 < \operatorname{Im}(z) < h$  ( $0 < h < 2\pi$ ) 映照成扩充  $w$  平面的角形区域  $0 < \arg w < h$ .

**例 6.9** 求将带形区域  $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$  保形映照为单位圆  $|w| < 1$  的映照.

**解** 指数函数  $w = e^z$  将带形区域  $0 < \operatorname{Im}(z) < \pi$  保形映照为上半平面  $\operatorname{Im}(w) > 0$ .

又由例 6.4, 函数  $w = e^i \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$  把上半平面  $\operatorname{Im}(w) > 0$  映照成单位圆  $|w| < 1$ . 其中  $z_0$  为一虚部大于零的复数,  $\alpha$  为任一实数. 于是所求映照为

$$w = e^i \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}} \quad (\alpha \text{ 为任意实数}).$$

**例 6.10** 求把区域  $D: |z| < 2$  且  $|z - i| > 1$ , 保形映照为上半平面  $\operatorname{Im}(w) > 0$  的映照.

**解** 显然  $D$  的边界为相切于  $z = 2i$  的圆  $C_1: |z| = 2$  和  $C_2: |z - i| = 1$ . 由于  $C_1$  与  $C_2$  在  $z = 2i$  处相切 (即在  $z = 2i$  处的夹角为 0), 则映照

$$w = \frac{1}{z - 2i}$$

将  $C_1$  和  $C_2$  映照为两平行直线  $l_1, l_2$  (因为  $z = 2i$  时  $w = \infty$ ) 又显然此映照将虚轴映照为虚轴, 而  $C_1, C_2$  都和虚轴正交, 由映照的保角性知直线  $l_1$  和

$l_2$  也必与虚轴正交, 即  $l_1, l_2$  为与实轴平行的直线, 又当  $z = 2$  时,  $w = \frac{1+i}{4}$ ;

当  $z=0$  时,  $\omega = \frac{i}{2}$ . 于是  $D_1$  为:  $\operatorname{Im}(\omega) = \frac{1}{4}$ ,  $D_2$  为  $\operatorname{Im}(\omega) = \frac{1}{2}$ . 因此  $\omega = \frac{1}{z-2i}$  把区域  $D$  映照成带形区域

$$B: \frac{1}{4} < \operatorname{Im}(\omega) < \frac{1}{2},$$

再作映照

$$\omega = 4\left(\omega - \frac{i}{4}\right),$$

把  $B$  映照成带形区域

$$G: 0 < \operatorname{Im}(\omega) < \pi,$$

指数函数  $w = e^\omega$  把  $G$  映照为上半平面  $\operatorname{Im}(w) > 0$ , 综上即得所求映照为

$$w = e^{4\left(\omega - \frac{i}{4}\right)} = -e^{\frac{4}{z-2i}}.$$

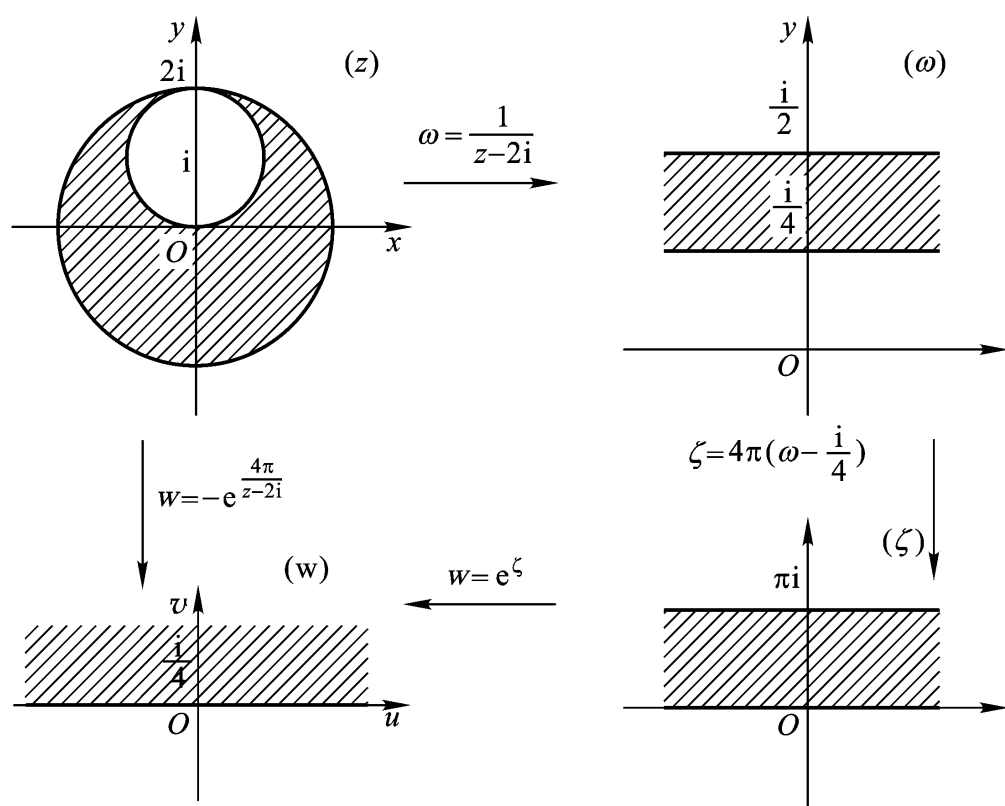


图 6.5

我们知道, 对数函数  $w = \ln z$  与指数函数  $z = e^w$  互为反函数. 因此, 当指数函数  $z = e^w$  将  $w$  平面上的带形域:  $0 < \operatorname{Im}(w) < 2\pi$  映照成带有割痕:  $|z|=0$  及  $\operatorname{Arg} z = \theta$  ( $\theta$  为任意实数) 的  $z$  平面时, 如图 6.6 所示, 对数函数  $w = \ln z$  便将图 6.6(b) 所示区域映照成图 6.6(a) 所示区域.

特别地, 当  $\theta = -\pi$  时,  $w = \ln z$  将  $z$  平面上除去原点和负实轴的区域映照成  $w$  平面上带形域:  $-\pi < \operatorname{Im}(w) < \pi$ . 当  $\theta = 0$  时,  $w = \ln z$  将  $z$  平面上除

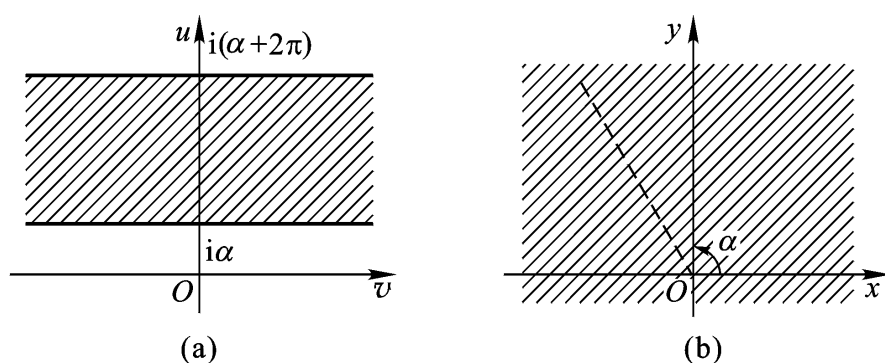


图 6.6

去原点和正实轴的区域映照成  $w$  平面上的带形域:  $0 < \text{Im}(w) < 2\pi$  .

由于对数函数  $\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 因此, 我们可以视  $\text{Ln } z$  的各分支函数构成的映照是  $w = \ln z$  这个映照经过上下平移而得的结果 .

对数函数的映照特点是将角形域映射为带形域.

#### 6.4.2 幂函数 $w = z^n$ 所确定的映照

由于幂函数  $w = z^n$  ( $n$  为大于 1 的正整数) 在复平面上处处解析且  $w = z^n$  除  $z=0$  外处处不等于零, 所以在复平面上除原点  $z=0$  外, 由幂函数  $w = z^n$  确定的映照是保形映照 .

设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ , 于是有  $|w| = r^n$ ,  $\text{Arg } w = n\theta$ , 从而  $w = z^n$  将  $z$  平面上的圆周  $|z| = r$  ( $r > 0$ ) 映照为  $w$  平面的圆周  $|w| = r^n$ , 特别地, 把单位圆周  $|z| = 1$  映照为单位圆周  $|w| = 1$  .

又由  $\text{Arg } w = n\theta$  知,  $w = z^n$  将  $z$  平面上的射线  $\theta = \theta_0$  映照成  $w$  平面的射线  $\arg w = n\theta_0$ , 特别地, 正实轴  $\theta = 0$  映照成正实轴  $\arg w = 0$ . 从而角形区域  $0 < \theta < \theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \frac{2\pi}{n}$ ) 被映照为角形区域  $0 < \arg w < n\theta_0$  如图 6.7(a) . 于是幂函数  $w = z^n$

把  $z$  平面上以原点  $z=0$  为顶点的角形域映照为  $w$  平面上以  $w=0$  为顶点张角比原张角扩大了  $n$  倍的角形区域. 特别地,  $w = z^n$  将角形域  $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$  映照为  $w$  平面的角形区域  $0 < \arg w < 2\pi$ , 即除去正实轴外的整个  $w$  平面, 而正实轴  $\theta = 0$  映为  $w$  平面正实轴的上岸  $\arg w = 0$ , 射线  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  映照为  $w$  平面正实轴的下岸  $\arg w = 2\pi$  如图 6.7(b) .

用类似的方法可以研究函数  $w = z^{\frac{1}{n}}$  ( $n$  为有理数) 所确定的映照 . 在  $n = 1$  时,  $w = z$  把以原点  $z=0$  为顶点的角形域映照为张角是原角形域张角的  $n$  倍的角形域, 位置与  $w = z^n$  的映照结果关于实轴对称 . 在  $n = \pm \frac{1}{n}$  时,  $w = z^{\pm \frac{1}{n}}$

用类似的方法可以研究函数  $w = z^{\frac{1}{n}}$  ( $n$  为有理数) 所确定的映照 . 在  $n = 1$  时,  $w = z$  把以原点  $z=0$  为顶点的角形域映照为张角是原角形域张角的  $n$  倍的角形域, 位置与  $w = z^n$  的映照结果关于实轴对称 . 在  $n = \pm \frac{1}{n}$  时,  $w = z^{\pm \frac{1}{n}}$

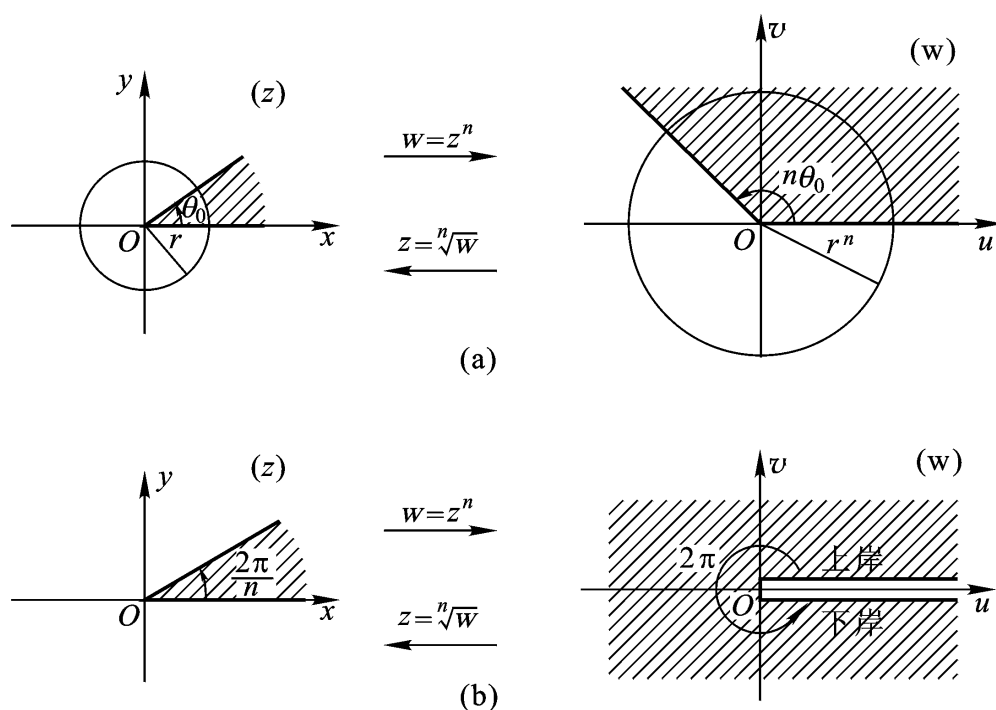


图 6.7

$= z^{\pm \frac{1}{n}}$  在除去原点和负实轴的  $z$  平面上确定的映照为共形映照, 它的主值函数和各分支函数均把以原点  $z=0$  为顶点的角形域映照为原点  $w=0$  为顶点的角形域, 但张角缩小了  $n$  倍.  $z^{-\frac{1}{n}}$  与  $z^{\frac{1}{n}}$  映照结果的区域关于实轴对称. 各分支函数的映照结果区域是主值函数映照结果区域旋转了角度  $\pm \frac{2k}{n}$ .

**例 6.11** 求把角形域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  变换为单位圆  $|w| < 1$  的映照.

**解** 由于函数  $w = z^2$  把角形域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  映照成上半平面  $\text{Im}(w) > 0$  ( $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ), 又  $w = \frac{-i}{z+i}$  把上半平面  $\text{Im}(w) > 0$  映照成单位圆  $|w| < 1$ , 于是所求映照为

$$w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}.$$

**例 6.12** 求把上半单位圆:  $|z| < 1$  且  $\text{Im}(z) > 0$  保形映照为上半平面的函数.

**解** 此区域为上半单位圆周与实轴围成的角形区域, 两线的直交点为  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 1$ . 若能先把此角形区域映照成顶点在原点的直角形区域则再由幂函数即可将其映照为上半平面, 为此须将上半单位圆周和线段  $[-1, 1]$  映照为  $w$  平面上在 origin 处相互直交的两条射线.

作分式线性函数

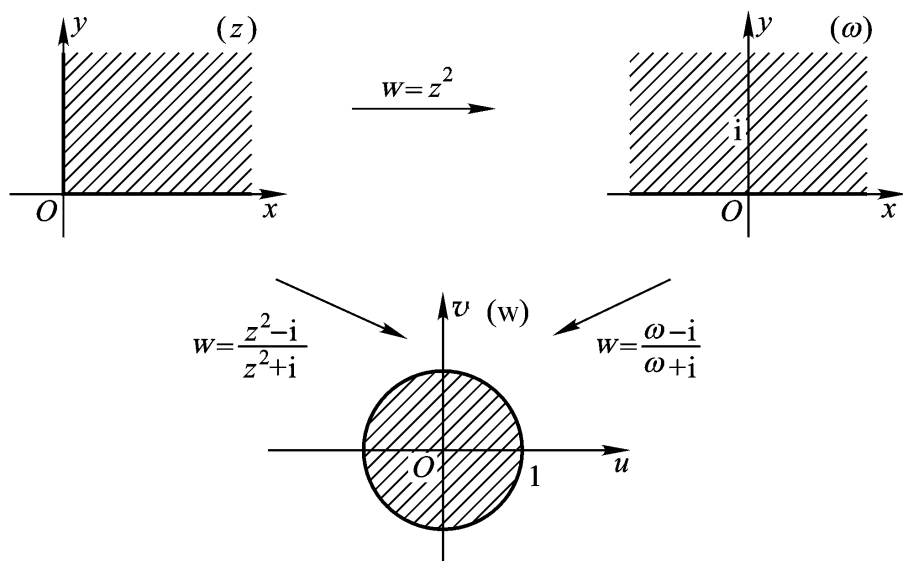


图 6.8

$$= \frac{1+z}{1-z},$$

显然它把  $z = -1$  映照为  $w = 0$ , 把  $z = 1$  映照为  $w = \infty$ , 又  $z = i$  时  $w = i$ ,  $z = 0$  时  $w = 1$ . 故  $w = \frac{1+z}{1-z}$  把上半单位圆周映照为上半虚轴而把线段  $[-1, 1]$  映照为实轴, 从而把所给上半单位圆映照为角形域  $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$  (如图 6.9). 再由幂函数  $w = \omega^2$  将角形域  $0 < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$  映照为  $0 < \arg w < \pi$  即上半平面  $\text{Im}(w) > 0$ .

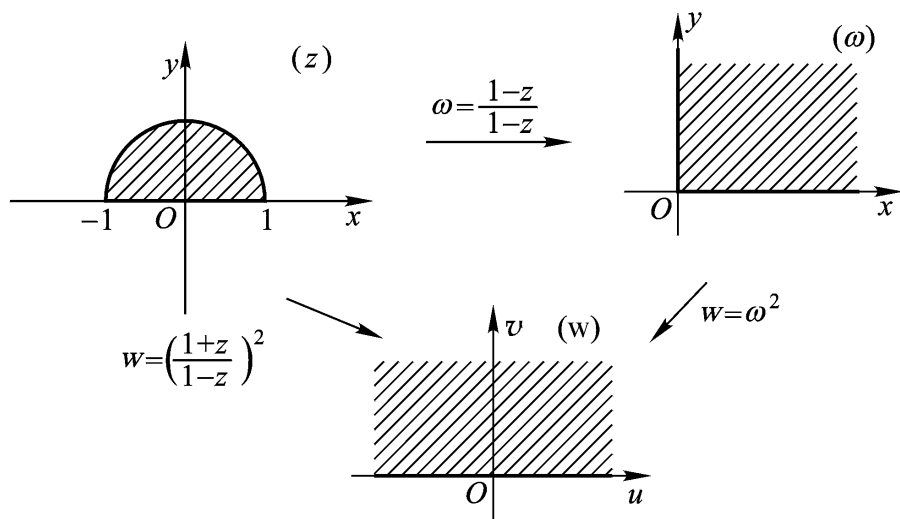


图 6.9

综上, 所求函数为

$$w = \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

**例 6.13** 求把具有割痕:  $z = t + i t (1 - t - 2)$  的扩充  $z$  平面映射成上半平面  $\text{Im}(w) > 0$  的一个映照.

**解** 具有割痕:  $z = t + i t (1 - t - 2)$  的扩充  $z$  平面也就是扩充  $z$  平面上以  $1 + i$  到  $2 + 2i$  的线段为边界的区域. 分式线性变换

$$\omega = \frac{z - 2(1 + i)}{z - (1 + i)}$$

将  $1 + i$  到  $2 + 2i$  的线段映照成负实轴  $\text{Im}(\omega) = 0$  且  $\text{Re}(\omega) \leq 0$ , 将以此线段为边界的区域映照成以负实轴为边界的区域 (这是一个角形域:  $-\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \frac{3\pi}{2}$ ). 幂函数  $\zeta = \omega^{1/2}$  所构成的映照将角形域  $-\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \frac{3\pi}{2}$  映照为右半平面  $-\frac{\pi}{2} < \arg \zeta < \frac{\pi}{2}$ , 再旋转一个角度  $\frac{\pi}{2}$ , 便得到所需的上半平面 (如图 6.10).

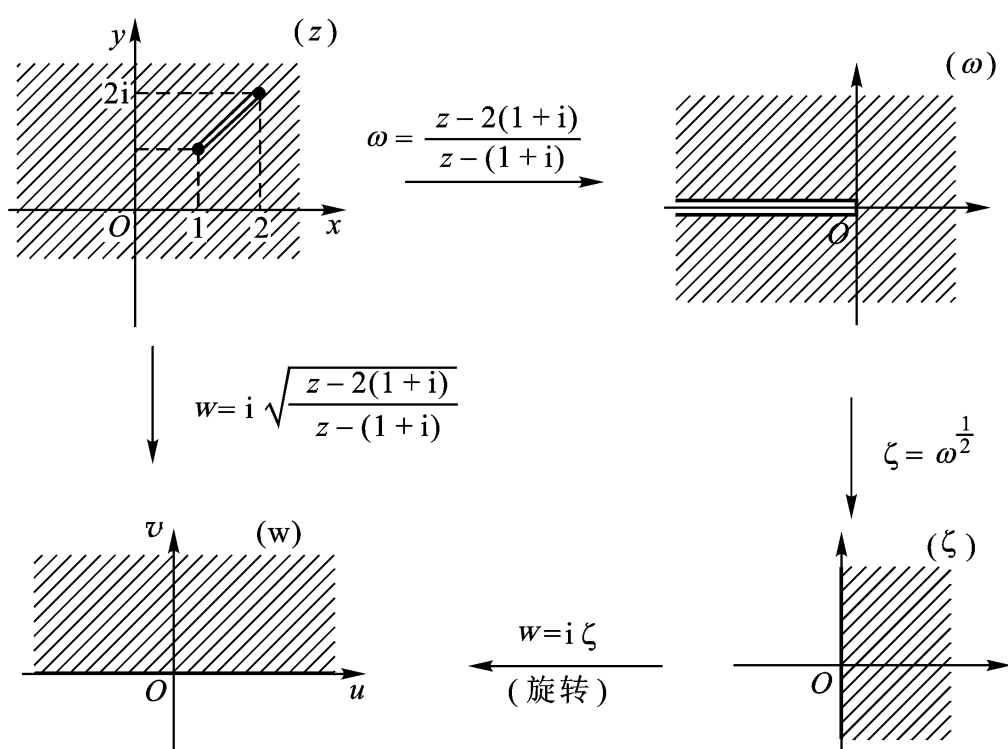


图 6.10

综上, 所求函数为

$$w = i \frac{z - 2(1 + i)}{z - (1 + i)}.$$

## 第 6 章习题

6.1.1 (a) 一个解析函数构成的映照在什么条件下具有旋转角和伸缩率的不变性.

(b) 求映照  $w = \frac{1}{z}$  和  $w = e^z$  在点  $z_0 = 1 + i$  处的伸宿率和旋转角, 并说明它们将  $z$  平面的哪一部分放大? 哪一部分缩小?

(c) 设曲线  $C_1: y = x$ ,  $C_2: x = 1$  映照  $w = z^2$ . 验证: 在  $z = 1 + i$  处映照具有保角性, 并求出其伸缩率.

(d) 证明在映照  $w = e^{iz}$  下, 相互正交的直线族  $\operatorname{Re}(z) = C_1$  与  $\operatorname{Im}(z) = C_2$  映成相互正交的直线族  $\frac{v}{u} \tan C_1$  与圆族  $u^2 + v^2 = e^{-2C_2}$ .

6.2.1 (a) 试说明每个分式线性映照在扩充复平面上都有两个固定的映照点.

(b) 把  $x$  轴映成  $u$  轴的分式线性映照  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  的系数  $a, b, c, d$  应满足什么条件?

6.2.2 求满足下列条件的分式线性函数

(a) 把  $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$  分别映照为  $w_1 = \quad, w_2 = -1, w_3 = 0$ ;

(b) 把  $z_1 = -1, z_2 = \quad, z_3 = 1$  分别映照为  $w_1 = -1, w_2 = i, w_3 = 1$ ;

(c) 把  $z_1 = -i, z_2 = 0, z_3 = i$  分别映照为  $w_1 = \quad, w_2 = -1, w_3 = 0$ ;

(d) 把  $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1 + i$  分别映照为  $w_1 = 0, w_2 = \quad, w_3 = 2 + i$ .

6.2.3 证明:  $w = \frac{1}{z}$  将  $z$  平面上区域  $x > c$  ( $c > 0$ ), 映成  $w$  平面上区域  $(u - \frac{1}{2c})^2 + v^2 < (\frac{1}{2c})^2$ .

6.2.4 试说明以下各映照的结果.

(a)  $\operatorname{Im}(z) = 0, w = e^{i \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}}$  ( $z_0$  为任意实数  $\operatorname{Im}(z_0) < 0$ );

(b)  $|z| = 1, w = \frac{i - z}{i + z}$ ;

(c)  $|z - 1| = 1, w = \frac{z - 2}{z}$ .

6.2.5 试把  $\operatorname{Im}(z) > 0$  保形映照成  $\operatorname{Im}(w) > 0$ , 并把点 (a)  $-1, 0, 1$  或 (b)  $\quad, 0, 1$  或 (c)  $\quad, 1, 0$  映照成  $0, -1, \quad$ .

6.2.6 把点  $z = 1, i, -i$  分别映照成点  $w = 1, 0, -1$  的分式线性函数, 把单位圆  $|z| < 1$  映照成  $w$  平面上的什么区域? 求出这个分式线性函数.

6.3.1 求满足所给条件且把单位圆映照成单位圆的分式线性函数  $w = f(z)$ .

(a)  $f(\frac{1}{2}) = 0, f(1) = -1$ ;

(b)  $f(\frac{1}{2}) = 0, \arg f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ;

(c)  $f(0) = 0$ ,  $\arg f(0) = -\frac{\pi}{2}$ .

6.3.2 试求将圆域  $|z| < R$  映照成圆域  $|w| < 1$  的分式线性映照.

6.3.3 求把上半平面  $\operatorname{Im}(z) > 0$  映成单位圆  $|w| < 1$  的分式线性映照  $w = f(z)$ , 并且满足条件

(a)  $f(i) = 0$ ,  $f(-1) = 1$ ;

(b)  $f(i) = 0$ ,  $\arg f(i) = 0$ ;

(c)  $f(1) = 1$ ,  $f(i) = \frac{1}{5}$ .

6.3.4 求将  $|z| < 2$  保形映照为  $\operatorname{Re}(w) > 0$  的保形映照  $w = f(z)$ , 使之满足  $f(0) = 1$ ,  $\arg f(0) = \frac{\pi}{2}$ .

6.4.1 问以下函数将扩充的  $z$  平面上的区域映成扩充复平面  $w$  上的什么区域? 并画出映射前后区域图.

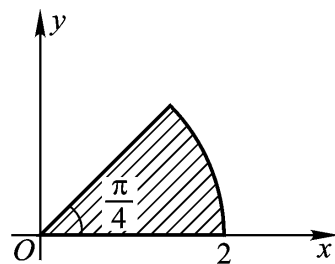
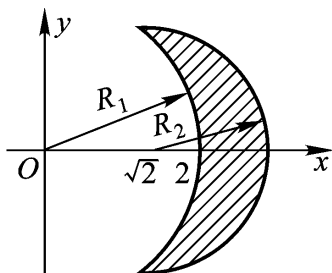
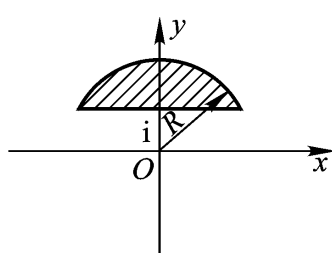
(a)  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ,  $w = z^{\frac{1}{2}}$ ;

(b)  $a < x < b$ ,  $c < y < d$ ,  $w = e^z$ ;

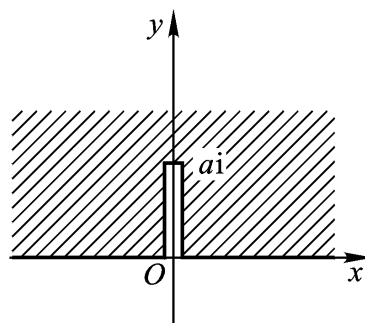
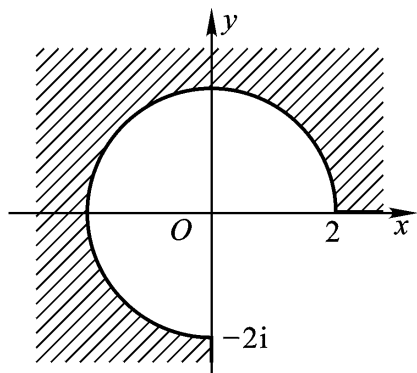
(c)  $\operatorname{Re}(z) > 0$ ,  $w = \ln z$ .

6.4.2 求将角形域 (a)  $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ ; (b)  $-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}$ ; (c)  $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$  且  $0 < |z| < 1$  分别映照为单位圆  $|w| < 1$  的保形映照.

6.4.3 试求将以下各区域映照为上半平面的共形映照.



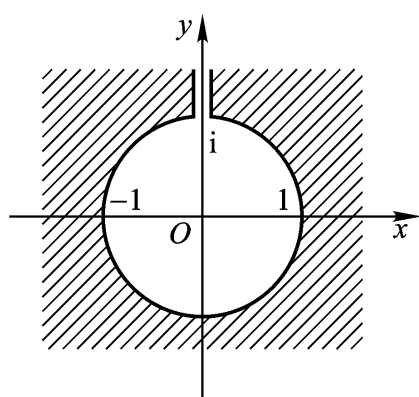
(a):  $\operatorname{Im}(z) > 1$ ,  $|z| < 2$  (b)  $|z| > 2$ ,  $|z - 2| < 2$  (c):  $|z| < 2$ ,  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$



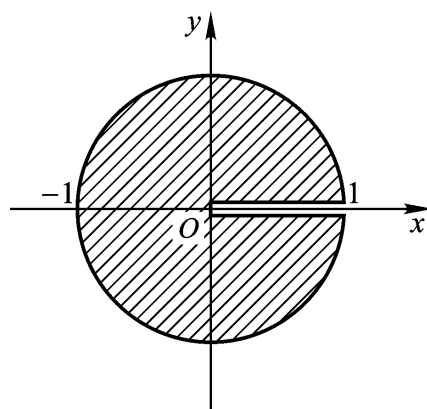
(d):  $|z| > 2$ ,  $0 < \operatorname{Arg} z < \frac{3\pi}{2}$

(e): 沿连结  $z = 0$  和  $z = ai$  的线段有割痕的上半平面

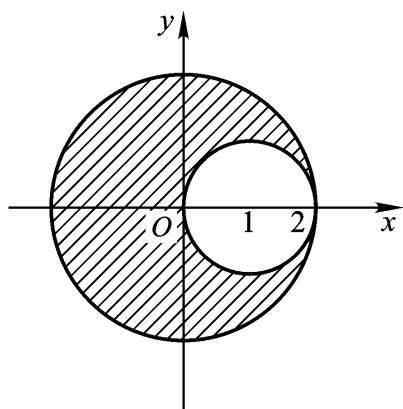




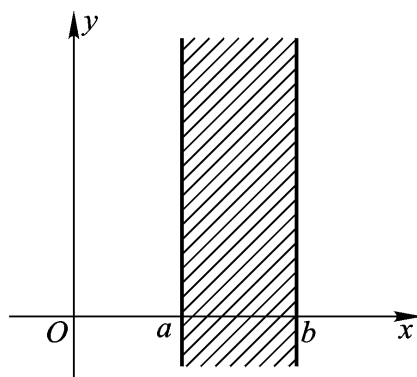
(f): 单位圆的外部, 且沿虚轴由  $i$  到  $\infty$  有割痕的区域.



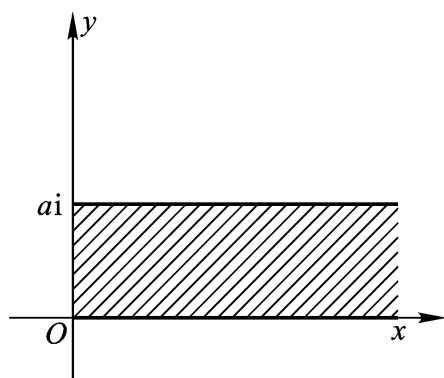
(g): 单位圆的内部, 且沿由 0 到 1 的半径有割痕的区域



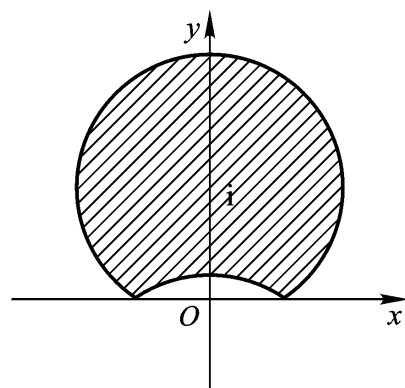
(h):  $|z| < 2, |z - 1| > 1$



(i):  $a < \operatorname{Re}(z) < b$



(j):  $\operatorname{Re}(z) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < a$



(k):  $|z + i| > 2$  且  $|z - i| < 2$

6.4.4 求将上半单位圆映照成上半平面的保形映照, 使  $z = 1, -1, 0$  分别映照成  $w = -1, 1, \infty$ .

6.4.5 求第一象限到上半平面的保形映照, 使  $z = 2i, 0, 1$  分别映照成  $w = 0, \infty, -1$ .

## \* 第 7 章 解析函数对平面向量场的应用

复变函数是一门应用性很强的数学分支,历史上,人们应用复变函数理论解决了许多实际问题.本章只讲述解析函数对平面向量场的应用.

### 7.1 平面向量场

我们首先用流速场来阐明稳定平面向量场的概念.

流体力学中我们知道,所谓不可压缩流体是指密度不因压力而改变的流体.通常液体被视为不可压缩的.当空气流速不超过音速(330m/s)的0.6—0.8倍时,也可视其为不可压缩的.

所谓流体的平面流动指在流动中,垂直于某平面的每一垂线上所有各质点的速度相同,且与指定平面平行.显然,对于平面流动,只须研究某指定平面上的流动即可.在平面流动中,若各质点的速度仅与各质点的位置有关,而不随时间变化,则称其为平面稳定流动.

在不可压缩流体的平面稳定流动中,取上述平面作为  $z$  平面,若对于  $z$  平面上某一区域  $D$  内的每一点,有一个大小和方向都不随时间变化的速度向量与它对应;则在  $D$  内确定了一个稳定平面向量场.

在区域  $D$  内任取一条简单曲线  $C$ .以  $C$  为准线,垂直于  $C$  的直线为母线,作一个高为 1 的柱面,单位时间内通过上述柱面流向它的某一侧的流量(即流体的质量),称为通过  $C$  流向它的某一侧的流量.设流体的密度为 1.由于流体是不可压缩的,所以上述流量可用所流过的流体在  $D$  上所遮盖的图形的面积来度量.通常指定流体向  $C$  的某一侧的流量为正,则流体向相反一侧的流动的流量为负.

取曲线  $C$  上的弧元素  $AB = ds$ .指定  $C$  的方向,并相应取定它的法线的方向,使沿着  $C$  按取定方向前进时,法线所取定的方向总指向  $C$  的右侧.设在点  $A$  处的速度向量为  $\mathbf{v}$ ,  $v_n$ ,  $v_t$  分别表示  $\mathbf{v}$  在法线方向和切线方向上的投影,则在单位时间内,通过元素  $ds$  流向法线所指向那一侧的流量等于

$$v_n ds. \tag{7.1}$$

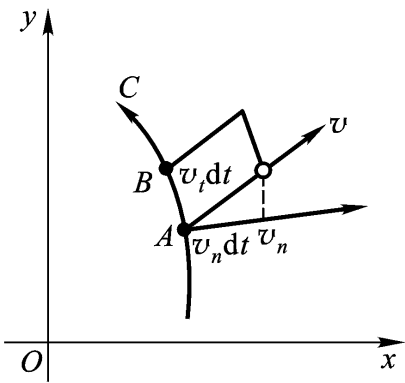


图 7.1

实际上, 这个量就等于以  $ds$  及  $\mathbf{v}$  为边的平行四边形面积. 于是单位时间内流体通过曲线  $C$  流向取定一侧的流量  $Q$  为

$$Q = \int_C v_n ds.$$

设  $\mathbf{v}$  的实部和虚部分别为  $a = a(x, y)$  及  $b = b(x, y)$ , 即  $\mathbf{v} = a + ib$ ; 表示沿  $C$  正向的切线与实轴的夹角, 则取定法线方向与实轴的夹角为  $\theta =$

$-\frac{\pi}{2}$ . 从而  $C$  上切线向量和法线向量的方向余弦分别是:  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  和  $\cos$

$= \sin \theta$ ,  $\sin \theta = -\cos \theta$ . 于是

$$v_t = \mathbf{v} \cdot \{\cos \theta, \sin \theta\} = a \cos \theta + b \sin \theta,$$

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \{\sin \theta, -\cos \theta\} = a \sin \theta - b \cos \theta.$$

故我们有

$$Q = \int_C (a \sin \theta - b \cos \theta) ds = \int_C -b dx + a dy. \quad (7.2)$$

若曲线  $C$  是闭合的, 指定反时针方向为正向, 则法线方向的正向指向曲线  $C$  的外部, 从而当流入  $C$  的内部的流体多于流出的流体时, 流量为正的; 反之, 当流入  $C$  的内部的流体少于流出的流体时, 流量是负的. 若在区域  $D$  内任何部分, 都无流体放出, 也无流体吸入, 则称  $D$  内流速场  $\mathbf{v}$  既无源又无汇. 设流速场  $\mathbf{v}$  既无源又无汇, 则对  $D$  内的任一闭曲线  $C$ , 通过  $C$  的流量应当满足

$$Q = \int_C -b dx + a dy = 0. \quad (7.3)$$

由格林公式不难推得以下结论:

设  $D$  是单连通区域,  $a, b$  在  $D$  内有连续偏导数. 则  $D$  既无源又无汇的必要与充分条件是

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial (-b)}{\partial y}. \quad (7.4)$$

前边已经定义  $v_t$  为速度向量  $\mathbf{v}$  在切线方向的投影, 且  $v_t = a \cos \theta + b \sin \theta$ , 其中  $a, b$  为  $\mathbf{v}$  的实部和虚部(也就是  $\mathbf{v}$  在  $x$  轴和  $y$  轴方向的投影),  $\theta$  为切向量与  $x$  轴的夹角. 对  $D$  内任一条简单闭曲线  $C$ , 称  $\int_C v_t ds$  为流体在单位时间内沿曲线  $C$  的环量.

若沿  $D$  内任一条简单闭曲线  $C$  的环量是零, 这个流体的流动就称为无旋的.

由环量的定义, 无旋流动的条件是: 对  $D$  内任一条简单闭曲线  $C$ ,

$$\int_C v_t ds = \int_C (a \cos \theta + b \sin \theta) ds$$

$$= \int_C a dx + b dy = 0.$$

由格林公式又不难推得下述结论:

假定  $D$  是单连通区域,  $a, b$  在  $D$  内有连续的偏导数, 则  $D$  是无旋场的必要与充分条件是

$$\frac{-a}{y} = \frac{-b}{x}.$$

以上讨论中,  $\mathbf{v}$  是定义在  $D$  上的流速场, 实际上, 对其它既有大小又有方向的物理量, 以上结论同样成立.

现考虑平面上的静电场, 取静电场所在平面为  $z$  平面, 单位电荷在平面上某点所受的力, 称为这点的电场强度. 如果在  $z$  平面上或其上某区域内每一点, 有一个大小与方向都不随时间改变的电场强度向量, 则在  $z$  平面上也给出一个稳定平面向量场, 设其所在区域为  $D$ .

现用  $\mathbf{w} = u + iv$  表示  $D$  中电场强度向量, 则对  $D$  中任一条简单闭曲线  $C$ ,

$$Q = \int_C -v dx + u dy$$

表示通过  $C$  的通量.

由静电理论, 通过  $C$  的通量与  $C$  包围的区域内的总电荷成正比, 因此  $C$  的内区域是否包含电荷取决于上述积分是否为零. 与流速场的情形一样, 我们有下列结论:

若  $D$  是单连通区域, 并且  $u$  及  $v$  在  $D$  内有连续的偏导数, 则在  $D$  内无电荷的必要与充分条件是

$$\frac{-u}{x} = \frac{(-v)}{y}.$$

对  $D$  中任一简单闭曲线  $C$ , 同样可定义沿  $C$  的环量

$$\int_C u dx + v dy.$$

其物理意义是单位正电荷沿  $C$  移动时电场力所作的功. 对静电场, 一样有以下结论:

假设  $D$  是单连通区域,  $u, v$  在  $D$  内有连续的偏导数, 则  $D$  是无旋场(即环量为零)的必要与充分条件是

$$\frac{-u}{y} = \frac{-v}{x}.$$

## 7.2 平面场的复势

设在区域  $D$  内每点给定一个不随时间改变的向量  $\mathbf{w} = u + i v$ , 即在  $D$  内给定一稳定平面向量场. 设  $C$  为  $D$  内任一条简单闭曲线, 可与流速场和静电场完全相同的方式定义通过  $C$  的流量及沿  $C$  的环量. 当流量和环量都是零时, 称平面场  $\mathbf{w}$  在  $D$  上是无源、无汇及无旋的. 静电场无源、无汇及无旋等价于场内无电荷, 且当单位正电荷沿  $D$  内任一条简单闭曲线移动时, 电场力所作的功是零.

假设平面区域  $D$  是单连通的, 且  $u$  及  $v$  在  $D$  内具有连续偏导数, 又设  $\mathbf{w}$  在  $D$  上是无源、无汇及无旋的, 则由上节的结论知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7.5)$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial (-v)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (-v)}{\partial x}.$$

由柯西—黎曼条件可知函数

$$u + i(-v) = u - i v$$

在  $D$  内解析, 且函数  $u$  及  $v$  都是  $D$  内的调和函数.

由式(7.5),  $u dx + v dy$  及  $-v dx + u dy$  分别是某两个函数  $\phi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  的全微分, 即

$$d\phi = u dx + v dy, \quad d\psi = -v dx + u dy,$$

从而有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

而且, 不计常数之差,  $\phi$ 、 $\psi$  由  $u, v$  唯一确定.

显然函数  $\phi(x, y)$  和  $\psi(x, y)$  满足柯西—黎曼条件, 因而函数

$$f(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

在  $D$  内解析,  $\phi$  及  $\psi$  在  $D$  内调和, 并且

$$f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u + i(-v),$$

从而,  $\overline{f'(z)} = u + i v$  正是给定的平面向量场  $\mathbf{w}$ .

我们称  $f(z)$  为平面向量场  $\mathbf{w}$  的复势. 调和函数  $\phi(x, y)$  及  $\psi(x, y)$  分别称为向量场  $\mathbf{w}$  的势函数和流函数.

由于  $d = udx + vdy$ , 所以称  $\phi$  是向量场  $\mathbf{w}$  的势函数, 曲线族

$$\phi(x, y) = \text{常数}$$

称为等势线, 它显然是微分方程

$$d\phi = udx + vdy = 0$$

的解, 亦即在等势线上有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v},$$

为什么称  $\psi$  是向量场  $\mathbf{w}$  的流函数呢? 我们来看, 曲线族

$$\psi(x, y) = \text{常数},$$

它显然是微分方程

$$d\psi = -vdx + udy = 0$$

的解, 即有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}.$$

这说明向量场  $\mathbf{w}$  在每一点处的方向都与曲线  $\psi(x, y) = \text{常数}$  的切线方向一致, 因此称  $\psi(x, y) = \text{常数}$  为流线, 而称  $\psi$  为流函数.

显然, 等势线与流线彼此正交.

综上所述, 若在单连通平面区域  $D$  内给定一无源、无汇且无旋的向量场, 那么, 与这一平面向量场相对应, 可在  $D$  内确定一个解析函数, 即场的复势. 反之, 给定一个在单连通区域  $D$  内的解析函数, 就确定一个无源、无汇及无旋的稳定平面场, 以已给函数作为复势.

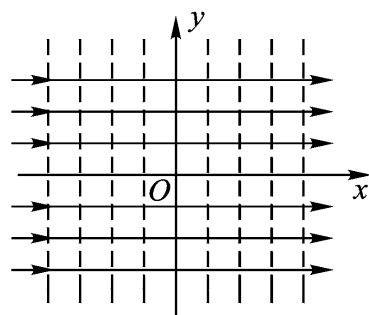


图 7.2

**例 7.1** 设一个稳定平面流场的复势是

$$f(z) = az \quad (a > 0),$$

那么在任一点的场向量是

$$f'(z) = a.$$

流函数是  $\psi(x, y) = ay$ , 所以流线是直线  $y = C_1$ .

势函数是  $\phi(x, y) = ax$ , 所以等势线是直线  $x = C_2$ .

以上  $a$  及  $C$  都是实常数. 流体以等速度  $a$  从平面左方向右方流动 (如图 7.2).

**例 7.2** 设一个稳定平面流场的复势是

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

那么在任一点  $z \neq 0$  的速度是

$$\overline{f'(z)} = -\frac{1}{z^2}.$$

流函数是  $\psi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ , 所以流线是曲线  $\frac{y}{x^2 + y^2} = C$ , 即与实轴相切于原点的一族圆  $x^2 + y + \frac{1}{2C} = \frac{1}{4C^2}$ .

势函数是  $\phi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , 所以等势线是  $\frac{x}{x^2 + y^2} = C$ , 即与虚轴相切的一族圆  $x - \frac{1}{2C} + y^2 = \frac{1}{4C^2}$ .

这时流体从  $z = 0$  的右侧流进而从左侧流出,  $z = 0$  可看作是由极相近的一个源和一个汇所合成的(如图 7.3).

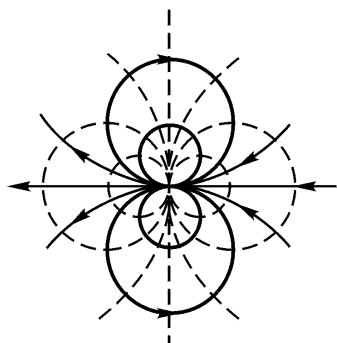


图 7.3

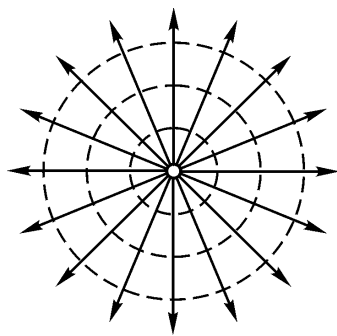


图 7.4

**例 7.3** 设一个稳定平面流场的复势是

$$f(z) = \operatorname{Ln} z.$$

那么在任一点  $z \neq 0$  的速度是

$$\overline{f'(z)} = \frac{1}{z}.$$

流函数是  $\psi(x, y) = \operatorname{Arg} z$ , 所以流线是直线  $\operatorname{Arg} z = C$ .

势函数是  $\phi(x, y) = \ln |z|$ , 所以等势线是圆  $|z| = C$ .

这时流体从  $z = 0$  向各方流向无穷远;  $z = 0$  可以看作是一个源,  $z = \infty$  可以看作是一个汇(如图 7.4).

任意作一个围绕原点的简单闭曲线  $\Gamma$ . 在单位时间内流体通过曲线  $\Gamma$  流向无穷远的流量是:

$$-v dx + u dy = \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi.$$

如果我们考虑复势

$$w = -i \operatorname{Ln} z,$$

那么它的流线及等势线恰好分别是  $w = \operatorname{Ln} z$  的等势线与流线. 这时在  $z = 0$  有一涡旋, 而在单位时间内沿任何上述曲线 的环量是  $2\pi$ . 请读者自己详细讨论这种情况.

对例 7.1 及例 7.2 也可就静电场作出解释.

## 7.3 应 用

### 7.3.1 对流体力学的应用

在本段中, 我们要应用解析函数计算飞机在飞行时空气对机翼的升力. 假定飞机以不变速度在天空飞行, 其速度不超过音速 0.6 至 0.8 倍. 为了方便, 我们把坐标系取在飞机上. 这样, 对坐标系而言, 飞机是不动的, 而空气则冲向飞机而流动. 离飞机很远处的空气的速度可以看成是不变的, 把它算作是无穷远处的速度. 设想机翼很长, 并且考虑垂直机翼的诸平行平面与机翼相交的截面(称作机翼剖面). 只要这些截面离机身及翼端较远, 就可把它们看成是全等的, 而且在它们所在的平面上, 空气流动的情形也可看成是相同的. 这样, 在上述条件下, 研究飞机飞行时围绕机翼的气流情况问题, 就化成了不可压缩流体的平面稳定流动问题. 显然这一流动是无源及无汇的, 而且根据实验, 在飞机速度满足上述条件时, 这一流动也可看作是无旋的.

在上述条件下, 取离机身及翼端较远的一个机翼剖面的所在平面作为  $z$  平面, 剖面边界是带有尖端点的一条简单闭曲线  $C$ . 这时空气可以看作沿着曲线  $C$  流动, 亦即气体质点沿着  $C$  运动, 从而  $C$  是一条流线(如图 7.5). 只要知道了曲线  $C$  的形状以及气流在无穷远点的速度(记作实数  $w_\infty$ ), 就可在曲线  $C$  的外部求出上述流动的复势  $f(z)$  以及环量. 换句话说,  $f(z)$  及 只与曲线  $C$  的形状以及气流在无穷远点的速度  $w_\infty$  有关.

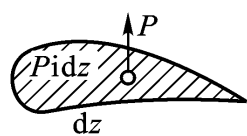


图 7.5

事实上, 应用双方单值映照解析函数, 可以把曲线  $C$  的外部单值映照成一个圆  $K$  的外部. 我们可以在圆  $K$  外部, 求出相应的无源、无汇及无旋平面稳定流动的复势. 再应用保形映照就可求出  $f(z)$  及 .

设想有一与  $z$  平面平行且距离为 1 的另一平面, 并考虑通过  $C$  上各点而与两平面垂直的直线所形成的柱面. 我们要计算气流作用于这一柱面上的压力, 简称作用在曲线  $C$  上的压力.



对于不可压缩流体的平面稳定流动, 考虑在每一点与流动平面相垂直的任一具有单位面积的矩形. 这种矩形所受到的压力的大小  $p$  由下列公式确定

$$p = A - \frac{1}{2} |w|^2, \quad (7.6)$$

这里  $w$  是在这点流动的速度向量,  $\rho$  是流体的密度,  $A$  是一个实常数.

现在考虑上述流动中的曲线  $C$ . 因为在  $C$  上, 压力的方向沿着法线向内, 所以作用在弧长元素  $ds = |dz|$  上的压力向量的模是  $p|dz|$ , 其辐角是  $dz$  的辐角加  $\frac{\pi}{2}$ , 于是所求的压力向量是

$$p dz \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = A i dz - \frac{i}{2} |w|^2 dz.$$

作用在曲线  $C$  上的压力向量  $P$  是作用在各弧长元素上的压力向量的向量和, 即

$$P = \int_C p i dz = - \frac{i}{2} \int_C |w|^2 dz.$$

由于  $C$  是一条流线, 在曲线  $C$  上每一点, 速度向量在这点的切线上. 令  $dz = e^{i\theta} ds$ , 我们有

$$w = \pm |w| e^{i\theta},$$

其中  $\pm$  号应适当取定. 又因  $w = \overline{f(z)}$ , 我们有

$$\begin{aligned} P &= - \frac{i}{2} \int_C \overline{f(z)}^2 e^{-2i\theta} dz \\ &= - \frac{i}{2} \int_C \overline{f(z)}^2 \overline{dz}, \end{aligned}$$

其中  $e^{-2i\theta} dz = e^{-i\theta} ds = \overline{dz}$ , 在上式中取共轭复数, 我们就得到下列公式:

$$P = \frac{i}{2} \int_C [f(z)]^2 dz. \quad (7.7)$$

在这里积分是按正方向取的.

现在进一步计算式 (7.7) 中积分的数值. 由于  $\lim_{z \rightarrow \infty} \overline{f(z)} = w$  (选坐标轴使在无穷远点的速度向量为正实数  $w$ ), 可见无穷远点是  $f(z)$  的可去奇异点. 于是在以原点为心的某一圆的外部,  $f(z)$  有罗朗级数展式:

$$f(z) = w + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \dots$$

因此

$$\frac{1}{2i} \int_C f(z) dz = c_{-1}.$$

用  $u$  及  $v$  表示  $w$  的实数及虚部. 因为通过  $C$  流向它外方的流量是零, 所以我们有

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u - iv) d(x + iy) \\ &= \oint_C u dx + v dy + i \oint_C u dy - v dx = \end{aligned}$$

其中  $\oint_C$  为一实数.因而在上述圆的外部,我们有

$$\begin{aligned} f(z) &= w + \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \\ [f(z)]^2 &= w^2 + \frac{w}{i} \cdot \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots, \end{aligned}$$

其中  $c_{-2}, c_{-2}, \dots$  是复常数.于是由式(7.7),

$$P = \frac{i}{2} \cdot 2i \cdot \frac{w}{i}.$$

最后我们得到茹可夫斯基升力公式:

$$P = -i w.$$

由此可见,机翼所受升力的大小是  $|w|$ ,而升力的方向与  $w$  的方向正交.如果  $w$  为正,升力的方向指向虚轴下方;如果  $w$  为负,升力的方向指向虚轴上方.

上面已经指出,如果知道了机翼截面的形状,那么给出  $w$ ,可求出  $P$  的值,从而可求出升力  $P$  的值.这样,升力的大小与机翼截面的形状有关.在航空工业中,要根据升力的大小来设计翼型,不仅要使飞机能在天空飞行,而且要符合起飞和降落快慢的要求.

### 7.3.2 对电学的应用

我们可以应用保形映照求静电场.

**例 7.4** 设有两同心金属圆柱与  $z$  平面的截线为  $|z| = r_1$  及  $|z| = r_2$  ( $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ ).设两柱间的电势差为  $2V_0$ ,求所产生的静电场.

设圆柱较长,我们只须求  $z$  平面上电场的复势,即须求一解析函数,使其虚部在  $|z| = r_1$  上取值  $-V_0$ ,在  $|z| = r_2$  上取值  $V_0$ .我们知道,多值解析函数

$$(z) = ia \operatorname{Ln} z + ib$$

的虚部在  $|z| = r$  上的值不变,这里  $a$  及  $b$  是任何实数,  $r$  是任何正数,根据已给条件决定  $a$  及  $b$ ,即得所求的复势

$$(z) = \frac{iV_0}{\ln r_2 - \ln r_1} [2 \operatorname{Ln} z - (\ln r_2 + \ln r_1)].$$

**例 7.5** 设两相离平行金属圆柱间的电势差为  $2V_0$ .求所产生的静电场.设圆柱较长,它们与  $z$  平面的截线是两个圆  $C_1$  及  $C_2$ ,其圆心为  $a_1$  及

$a_2$  设其外公切线过两圆上  $b_1$  及  $b_2$  两点. 以  $b_1$  及  $b_2$  为直径的两端作一圆  $C^*$ , 与  $a_1$  及  $a_2$  的连线交于  $z_1$  及  $z_2$  两点(如图 7.6). 由于  $a_1$  及  $a_2$  的连线以及  $C^*$  都与圆  $C_1$  及  $C_2$  直交,  $z_1$  及  $z_2$  关于圆  $C_1$  及圆  $C_2$  都是对称点.

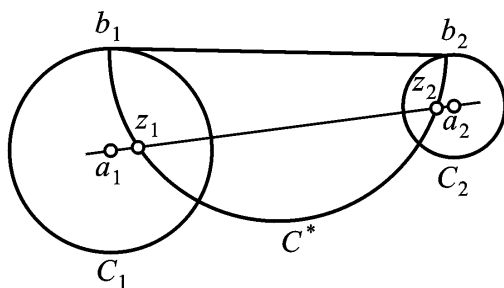


图 7.6

### 作分式线性函数

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

它把圆  $C_1$  及  $C_2$  映照成  $w$  平面上的两圆  $C_1$  及  $C_2$ , 把  $z_1$  及  $z_2$  映照成两点  $w = 0$  及  $w = \infty$ ; 由于这两点关于  $C_1$  及  $C_2$  都是对称点, 可见  $C_1$  及  $C_2$  是以  $w = 0$  为心的两同心圆. 最后应用例 7.4 中的结果, 就可得到所求的复势.

**例 7.6** 设有两金属平板与  $z$  平面垂直, 且与这平面的截线如图 7.7. 设两截线的端点之间的距离为  $2a$  ( $a > 0$ ), 电势差为  $2V_0$ . 求所产生的静电场.

由于构成电容器的金属板较大, 可设所得截线为射线  $x = a, y = 0$  及  $x = -a, y = 0$ . 现求平面静电场的复势, 即求在上两射线割开的平面内解析、且其虚部在左、右两射线的上沿及下沿分别为  $-V_0$  及  $V_0$  的函数  $w = F(z)$ . 因此  $w = F(z)$  把割开的平面双方单值保形映照成  $w$  平面上的带形  $-V_0 < \text{Im}(w) < V_0$ , 而使左、右两割线分别与  $\text{Im}(w) = -V_0$ ,  $\text{Im}(w) = V_0$  相对应.

在  $z$  平面上的已给两射线, 可以看作连接  $-a$  及  $a$  并且通过  $\infty$  的“圆弧”. 分式线性函数

$$w = \frac{z + a}{z - a}$$

把这“圆弧”映照成  $w$  平面上连接 0 及  $\infty$  的“圆弧”即正实轴, 而把已给区域映照成  $w$  平面上除去正实轴而得的区域(如图 7.7(b)).

函数  $\zeta = \frac{1+w}{1-w}$  把  $w$  平面上这一区域映照成上半  $\zeta$  平面. 为了得到所求的边界对应关系, 作分式线性函数

$$\zeta_1 = k \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

( $k$  为任一正的常数), 把上半  $\zeta$  平面映照成上半  $\zeta_1$  平面, 并且把  $A, F$  及  $D$ ,

$C$  映照成  $0$  及  $\infty$  .

最后作映照

$$w = \frac{2V_0}{\pi} \ln \xi + \text{常数},$$

就得到所求带形 .

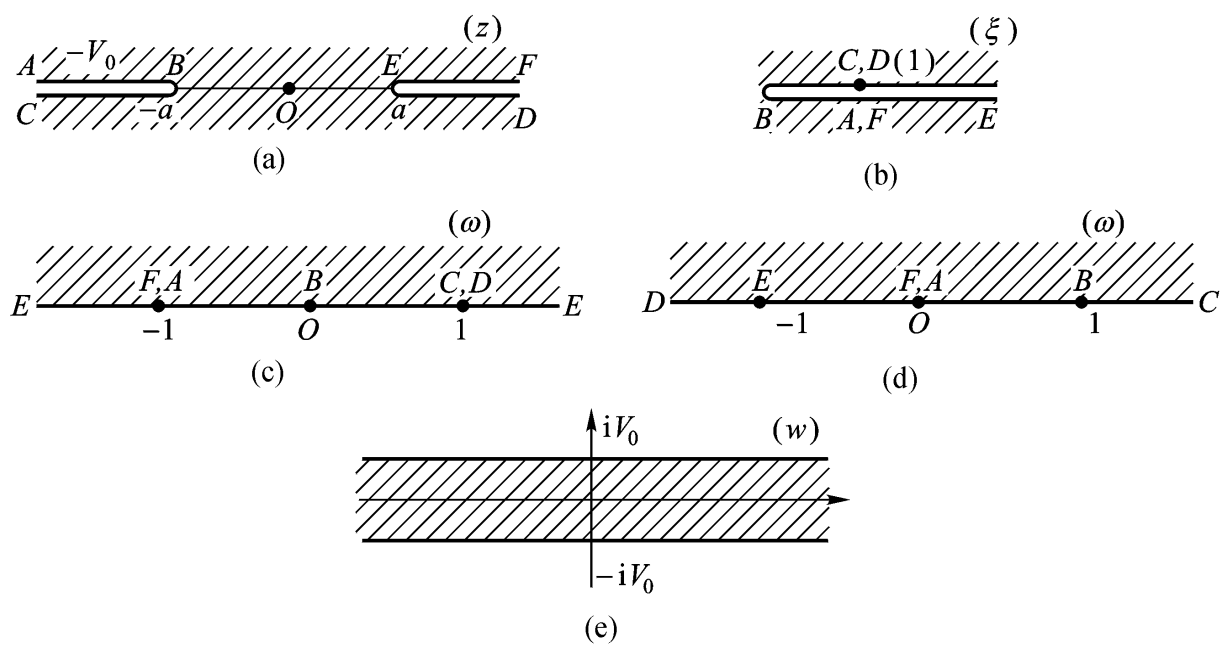


图 7.7

## 第二篇 积分变换

在自然科学和工程技术中,为把较复杂的运算简单化,人们常常采用所谓变换的方法来达到目的.如十七世纪,航海和天文学积累了大批观察数据,需要对它们进行大量的乘除运算.在当时,这是非常繁重的工作,为了克服这个困难,1614年纳皮尔(Napier)发明了对数,对数有性质: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ,  $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$ .它将乘除运算转化为加减运算.随后人们造出了以e为底和以10为底的对数表,通过两次查表,便完成了这艰巨的任务.十八世纪,微积分学中,人们通过微分、积分运算求解物体的运动方程.到了十九世纪英国著名的无线电工程师海维赛德(Heaviside)为了求解电工学、物理学领域中的线性微分方程,逐步形成了一种所谓的符号法.后来就演变成了今天的积分变换法.即通过积分运算把一个函数变成另一个函数.同时,将函数的微积分运算转化为代数运算,把复杂,耗时的运算简单、快速完成.如  $f(t)$  为某具有实变量的实值函数,经过积分变换  $F$  得到与  $f(t)$  一一对应的具有实(或复)变量的函数  $F(\cdot)$ .反之,  $F(\cdot)$  经过积分变换  $F^{-1}$  得到一一对应的  $f(t)$ .而  $F[f(t)] = i F(\cdot)$ ,  $F[\int_{-\infty}^t f(t)dt] = \frac{1}{i} F(\cdot)$ , 故将  $f(t)$  的微积分运算经过积分变换转化为  $F(\cdot)$  的代数运算,再由  $F(\cdot)$  的运算结果经积分逆变换便得到  $f(t)$  的微积分运算结果.本篇着重介绍两种最常用的积分变换:傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换.这两种积分变换不仅在数学的许多分支中,而且在其它学科如振动力学,电工学,无线电技术领域都有着广泛的应用,它们已成为这些学科领域中不可缺少的运算工具.

# 第 1 章 傅里叶变换

傅里叶变换的实质就是傅里叶积分运算, 而关于傅里叶积分与后面的拉普拉斯积分的研究最初仅是从数学的观点出发的, 后来这两种运算被应用于不同的领域中. 实践表明, 在应用的可能性方面它们远远地超过了级数. 本章将介绍傅里叶积分, 傅里叶变换及其性质, 函数的傅里叶变换等内容.

## 1.1 傅里叶积分

### 1.1.1 傅里叶积分的概念

概念的引入 现在我们将复变函数中的罗朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

加以推广. 首先, 用一任意递增非负数列  $n$  来代替整指数列  $n$ , 这时  $z^n$  为多值函数, 再作置换  $z = e^{-s}$ , 这样  $z^n = e^{-s n}$  仍为单值函数. 接着我们再作进一步推广; 将非负离散状变量  $n$  换作  $(-\infty, +\infty)$  上的连续变量  $t$ , 并因此将依赖于  $n$  的数列  $c_n$  换作依赖于  $t$  的函数  $f^*(t)$ , 同时将和式换作积分, 这样便产生了积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt$ , 进而得到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i t} dt,$$

这里  $f(t) = f^*(t) e^{-i t}$ ,  $s = \sigma + i$ .

定义 1.1 我们称广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i t} dt \tag{1.1}$$

为傅里叶积分. 其中积分变量  $t$  取实值且从  $-\infty$  到  $+\infty$ ,  $\sigma$  为实值参数.

例 1.1 求函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \sin 2x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的傅里叶积分.

解 由式(1.1),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} e^{-(i+1)x} \sin 2x dx \\
 &= \frac{2}{5 - i^2 + 2i}.
 \end{aligned}$$

**例 1.2** 求三角脉冲函数

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} \frac{2E}{\tau} \left(x + \frac{\tau}{2}\right), & -\frac{\tau}{2} < x < 0; \\ \frac{2E}{\tau} \left(x - \frac{\tau}{2}\right), & 0 < x < \frac{\tau}{2}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

的傅里叶积分, 其中  $E, \tau > 0$ , 见图 1.1.

**解** 由于三角脉冲函数是偶函数, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2E}{\tau} \left(x - \frac{\tau}{2}\right) \cos \omega x dx \\
 &= \frac{8E}{\tau^2} \sin^2 \frac{\omega \tau}{4}.
 \end{aligned}$$

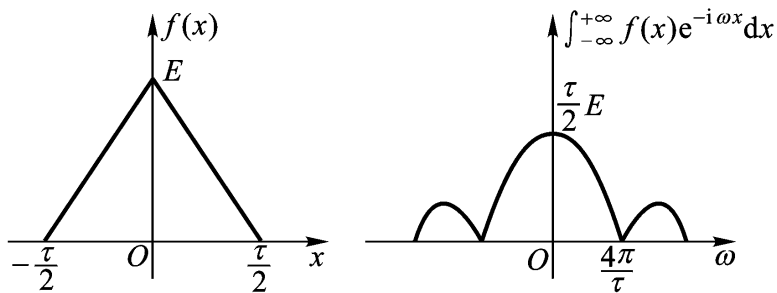


图 1.1

### 1.1.2 傅里叶积分的物理意义——频谱

#### 1. 非正弦周期函数的频谱序列

在高等数学中我们知道满足狄利克雷条件且以  $T$  为周期的函数  $f_T(t)$  具有傅里叶级数的复数表达式:

$$\underline{f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t}}, \quad (1.2)$$

其中傅里叶系数

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\frac{2n}{T}t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.3)$$

从物理的观点来看, 式(1.2)说明  $f_T(t)$  可表为频率为  $\frac{2n}{T}$  的诸振动的叠加. 若将系数  $c_n$  写作  $c_n = r_n e^{i\varphi_n}$ , 则式(1.2)右边级数的第  $n$  项为  $r_n e^{i(\frac{2n}{T}t + \varphi_n)}$ . 对比  $f_T(t)$  的余弦表达式  $f_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n| \cos(\frac{2n}{T}t + \varphi_n)$  可以看出, 频率为  $\frac{2n}{T}$  的第  $n$  次振动具有振幅  $2r_n$  和相位  $\varphi_n$ . 所有出现的诸振动的振幅和相位的全体在物理上称为由  $f_T(t)$  所描写的自然现象的频谱, 可见这个频谱由  $c_n$  确定. 而  $\bar{c}_n = c_{-n}$ , 即  $|c_n| = |c_{-n}|$ ,  $\varphi_n = \arg c_n = -\arg c_{-n} = -\varphi_{-n}$ . 所以对  $f_T(t)$  的频谱分析只讨论  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  足够了. 借助公式(1.3)我们从  $f_T(t)$  得到  $c_n$ , 从公式(1.2)我们又将  $f_T(t)$  用频率为  $\frac{2n}{T}$  的诸振动构造出来.

由于  $c_n$  的下标  $n$  取离散值, 所反映诸振动振幅随频率变化的图形便呈现出不连续的状态, 故这类频谱又称为离散谱.

### 例 1.3 求周期性矩形脉冲函数

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{2}; \\ E, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}; \\ 0, & \frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

的频谱序列.

解 经计算可得

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt = \frac{E}{T} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-i\frac{2n}{T}t} dt \\ &= \frac{E}{n} \sin \frac{n}{T} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

故反映频率为  $\frac{2n}{T}$  的第  $n$  次振动的振幅  $2r_n$  和相位  $\varphi_n$  分别为

$$2r_n = \left| \frac{2E}{n} \sin \frac{n}{T} \right|, \\ \varphi_n = 0 \text{ 或 } \pi.$$



$|c_n|$  随频率  $\frac{2n}{T}$  的变化如图 1.2 所示.

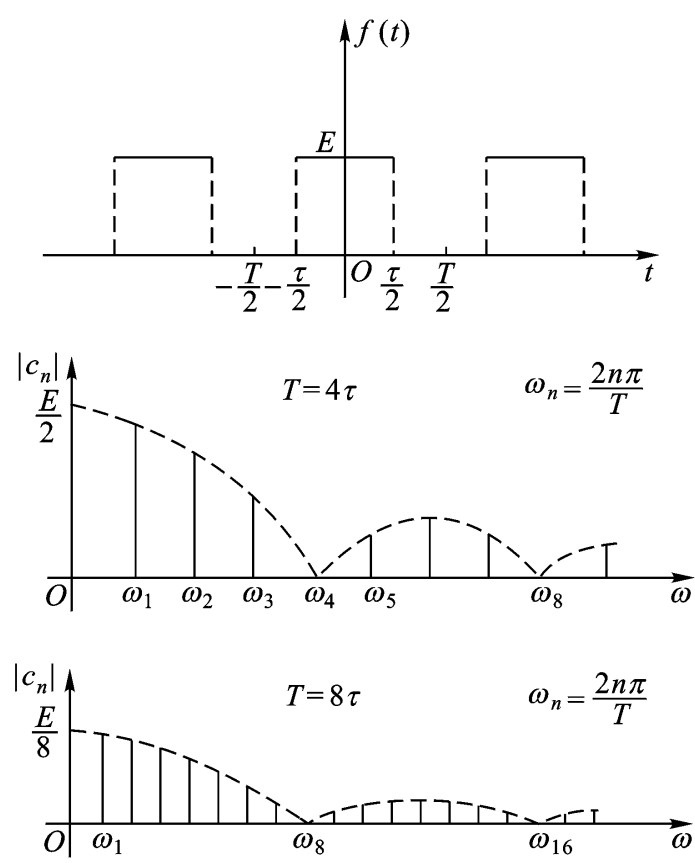


图 1.2

2.非周期函数的频谱函数

对定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的非周期函数  $f(t)$ , 我们可视其周期为  $T$ , 现将式(1.3)代入式(1.2), 再令  $T \rightarrow +\infty$  便有

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t)$$

$\omega = \frac{2n\pi}{T}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\frac{2n}{T}t} dt \cdot e^{i\frac{2n}{T}t} \frac{2}{T}$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

若记

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{1.4}$$

则

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{1.5}$$

这里式(1.4)与(1.3), 式(1.5)与(1.2)相对应. 因此我们可以这样讲, 由  $f(t)$

通过公式(1.4)获得频谱函数  $F(\omega)$ , 借助频谱函数又可将  $f(t)$  作为角频率为  $\omega$  的诸振动  $\frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  的迭加依形式(1.5)给出.

频谱函数  $F(\omega)$  的模  $|F(\omega)|$  通常称作  $f(t)$  的振幅频谱 (简称为频谱), 这个频谱的图形呈连续状态, 故这类频谱又称为连续谱.

#### 例 1.4 求指数衰减函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

( $\beta > 0$ ) 的频谱函数  $F(\omega)$ , 并作出频谱  $|F(\omega)|$  的图形.

解 由(1.4)式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta + i\omega)t} dt = \frac{1}{\beta + i\omega},$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}.$$

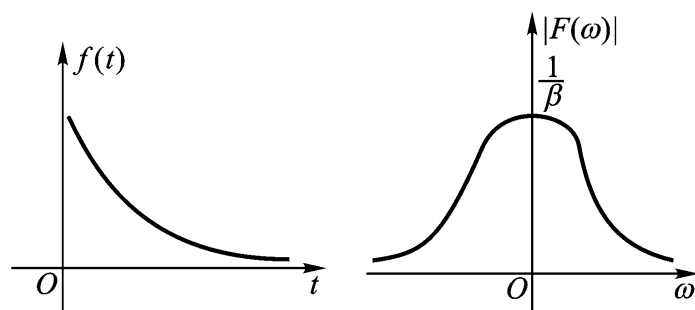


图 1.3

### 3. 傅里叶积分的物理意义

对非周期函数  $f(t)$ , 我们在视其周期为  $+\infty$  的情况下得到了频谱函数  $F(\omega)$ . 如若在  $F(\omega)$  的表达式中将  $f(t)$  换作以  $T$  为周期的周期函数  $f(t)$ , 那么

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{k-\frac{T}{2}}^{k+\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

对比频谱序列  $c_n$  的表达式(1.3), 我们就会发现  $F(\omega)$  恰好反映的是前述频谱序列的和, 这就是说, 此时的  $F(\omega)$  从另一个角度对自然现象的频谱给予了揭示, 因而, 只要傅里叶积分收敛, 不论  $f(t)$  是周期函数还是非周期函数, 我们都将得到其频谱函数  $F(\omega)$ .

### 1.1.3 傅里叶积分定理

**定理 1.1** 若函数  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足以下条件:

- (1)  $f(t)$  在任一有限区间上连续或只有有限个第一类间断点,
- (2)  $f(t)$  在任一有限区间上至多只有有限个极值点,
- (3)  $f(t)$  绝对可积 (即积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  收敛),

则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

一定存在. 且当  $t$  为  $f(t)$  的连续点时, 有傅里叶积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} d\omega.$$

当  $t$  为  $f(t)$  的间断点时, 上式  $f(t)$  换作  $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$ .

证明从略.

这个定理的条件是充分条件, 也就是说当函数  $f(t)$  满足定理条件时, 傅里叶积分一定存在. 当  $f(t)$  不满足定理条件时, 傅里叶积分未必不存在. 显然前述例 1.1, 1.2, 1.4 均满足此定理条件.

**例 1.5** 求矩形单脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

的傅里叶积分, 傅里叶积分公式.

**解** 此函数显然满足傅里叶积分定理条件. 故傅里叶积分

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \end{aligned}$$

傅里叶积分公式

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2E}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{2E}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2} \cos \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

由傅里叶积分定理我们还可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cos \omega t}{\omega} d\omega &= \frac{1}{2}, \quad |t| < \frac{1}{2}; \\ &= \frac{1}{4}, \quad |t| = \frac{1}{2}; \\ &= 0, \quad \text{其它}. \end{aligned}$$

## 1.2 傅里叶变换

### 1.2.1 傅里叶变换的定义

我们知道当函数  $f(t)$  的傅里叶积分收敛时, 它便定义了一个函数  $F(\omega)$ . 换句话说, 对于函数  $f(t)$  通过傅里叶积分有一个函数  $F(\omega)$  与之对应. 这种对应可想象为将函数  $f(t)$  转变为函数  $F(\omega)$  的一种变换, 在这种意义下我们有:

**定义 1.2** 设  $f(t)$  为定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的实值(或复值)函数, 其傅里叶积分收敛. 由积分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.6)$$

建立的从  $f(t)$  到  $F(\omega)$  的对应称作傅里叶变换(简称傅氏变换), 用字母  $F$  表达, 即

$$F(\omega) = F[f(t)]. \quad (1.7)$$

积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.8)$$

建立的从  $F(\omega)$  到  $f(t)$  的对应称作傅里叶逆变换(简称傅氏逆变换), 用字母  $F^{-1}$  表达, 即

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)]. \quad (1.9)$$

式(1.7)的含义是说对函数  $f(t)$  施加了  $F$  变换便可得到函数  $F(\omega)$ . 这种变换亦可理解为一种映照, 故  $f(t)$  称作  $F$  变换的像原函数,  $F(\omega)$  称作  $F$  变换的像函数. 像原函数与像函数构成了一组傅氏变换对.

#### 例 1.6 求钟形脉冲函数

$$f(t) = E e^{-t^2} \quad (E > 0)$$

的傅氏变换.

$$\text{解} \quad F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{i}{2}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4}} dt.$$

若令  $z = t + \frac{i}{2}$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t+\frac{i}{2}\right)^2} dt = \int_{-\infty+\frac{i}{2}}^{+\infty+\frac{i}{2}} e^{-z^2} dz.$$

欲求之, 作图 1.4 所示闭路曲线  $ABCD$ .

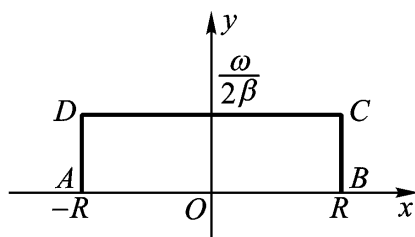


图 1.4

因为  $e^{-z^2}$  在整个复平面上处处解析, 由柯西定理知对任意正实数  $R$ ,

$$\oint_{ABCD} e^{-z^2} dz = \left( \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right) e^{-z^2} dz = 0$$

故

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{ABCD} e^{-z^2} dz = 0.$$

又因为

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{AB} e^{-z^2} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{R+\frac{i}{2}}^{R+\frac{i}{2}+\frac{\omega}{2\beta}} e^{-z^2} dz \right| &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{-(R+iy)^2} dy \right| \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{2} e^{-R^2} = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R+\frac{i}{2}}^{R+\frac{i}{2}+\frac{\omega}{2\beta}} e^{-z^2} dz = 0.$$

同理

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R+\frac{i}{2}}^{-R+\frac{i}{2}+\frac{\omega}{2\beta}} e^{-z^2} dz = 0.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{R+\frac{1}{2}-i}^{R+\frac{1}{2}+i} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.10)$$

于是

$$F(\omega) = E e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (1.11)$$

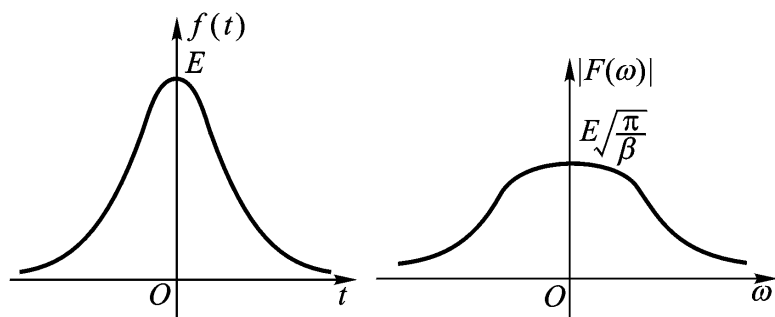


图 1.5

### 例 1.7 求高斯分布函数

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的傅氏变换, 其中  $\sigma > 0$ , 见图 1.6.

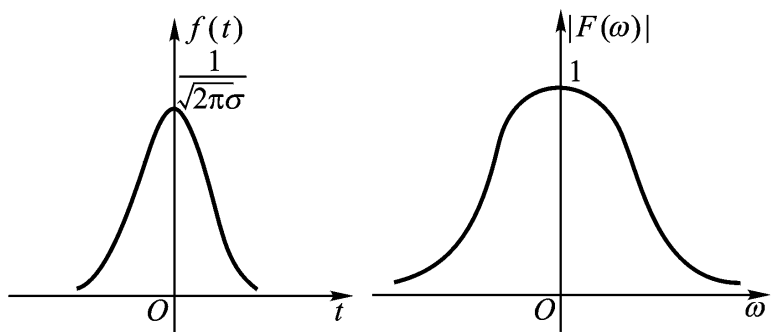


图 1.6

解  $F(\omega) = F[f(t)]$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma} + i\omega)^2} \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} d(\frac{t}{\sigma} + i\omega) \end{aligned}$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad (u = \frac{t}{\sqrt{2}} + i).$$

应用例 1.6 求式(1.10)的方法得

$$F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

### 例 1.8 解积分方程

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x dx = \begin{cases} 1 - \omega, & 0 \leq \omega \leq 1; \\ 0, & 1 < \omega. \end{cases}$$

解 给函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上补充定义, 使  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上成为偶函数, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = e^{i\omega x} d \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i(x-x')\omega} dx' dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega(x-x')) dx' dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(x) (\cos \omega x \cos \omega x' + \sin \omega x \sin \omega x') dx' dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \cos \omega x' dx' dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^{+\infty} \cos \omega x \left[ \int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x' dx' \right] dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^1 (1 - \omega) \cos \omega x dx \\ &= \frac{2(1 - \cos \omega x)}{\omega^2} \quad (\omega > 0). \end{aligned}$$

例 1.9 验证傅里叶核  $f(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$  与  $F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  构成傅氏变换对.

解 因为

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_0 t}{t},$$

所以  $f(t)$  与  $F(\omega)$  构成傅氏变换对.

### 1.2.2 傅里叶变换的性质

以下为叙述方便, 假设要求进行傅氏变换的函数均满足傅里叶积分定理条件, 且记

$$F(\quad) = F[f(t)], \quad G(\quad) = F[g(t)].$$

**1. 线性性质**

$$F[f(t) + g(t)] = F[f(t)] + F[g(t)], \quad (1.12)$$

$$F^{-1}[F(\quad) + G(\quad)] = F^{-1}[F(\quad)] + F^{-1}[G(\quad)], \quad (1.13)$$

其中  $\quad$ ,  $\quad$  是常数.

此性质的证明可由傅氏变换, 傅氏逆变换的定义直接推出.

**例 1.10 求函数**

$$F(\quad) = \frac{1}{(3 + i)(4 + 3i)}$$

的傅氏逆变换.

解 因为

$$\frac{1}{(3 + i)(4 + 3i)} = \frac{1/5}{\frac{4}{3} + i} - \frac{1/5}{3 + i}$$

由上节例 1.4 知

$$F^{-1} \frac{1}{\frac{4}{3} + i} = \begin{cases} e^{-\frac{4}{3}t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$F^{-1} \frac{1}{3 + i} = \begin{cases} e^{-3t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

故由式(1.13)得:

$$F^{-1}[F(\quad)] = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{4}{3}t} - \frac{1}{5}e^{-3t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

**2. 位移性质**

$$F[f(t - t_0)] = e^{-i t_0} F[f(t)], \quad (1.14)$$

$$F^{-1}[F(\quad - \quad_0)] = e^{i \cdot_0 t} F^{-1}[F(\quad)], \quad (1.15)$$

其中  $t_0$  和  $\quad_0$  是实常数.

$$\begin{aligned} \text{证 } F^{-1}[F(\quad - \quad_0)] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\quad - \quad_0) e^{i \cdot t} d\quad \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\quad - \quad_0) e^{i(\quad - \quad_0)t} e^{i \cdot_0 t} d(\quad - \quad_0) \\ &= e^{i \cdot_0 t} F^{-1}[F(\quad)]. \end{aligned}$$

式(1.14)可类似证之.

**例 1.11 求函数**

$$F(\quad) = \frac{1}{+ i(\quad + \quad_0)} \quad (\quad > 0, \quad_0 \text{ 为实常数})$$



的傅氏逆变换 .

解 因为

$$F(\quad - \quad 0) = \frac{1}{+i}$$

$$F^{-1}[F(\quad - \quad 0)] = e^{i \cdot 0 \cdot t} F^{-1}[F(\quad)] = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

故

$$F^{-1}[F(\quad)] = \begin{cases} e^{-(+i \cdot 0)t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

例 1.12 证明

$$F[f(t) \sin \omega t] = \frac{i}{2}[F(\quad + \quad \omega) - F(\quad - \quad \omega)].$$

证 因为

$$\begin{aligned} f(t) \sin \omega t &= f(t) \frac{1}{2i}(e^{i \omega t} - e^{-i \omega t}) \\ &= \frac{1}{2i} f(t) e^{i \omega t} - \frac{1}{2i} f(t) e^{-i \omega t} \end{aligned}$$

由式(1.15)

$$\begin{aligned} F(\quad - \quad \omega) &= F\{e^{i \omega t} F^{-1}[F(\quad)]\} = F[f(t) e^{i \omega t}] \\ F(\quad + \quad \omega) &= F[f(t) e^{-i \omega t}] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} F[f(t) \sin \omega t] &= \frac{1}{2i}\{F[f(t) e^{i \omega t}] - F[f(t) e^{-i \omega t}]\} \\ &= \frac{i}{2}[F(\quad + \quad \omega) - F(\quad - \quad \omega)]. \end{aligned}$$

### 3. 微分性质

设函数  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续或只有有限个可去间断点,

(1) 当  $|t| \rightarrow +\infty$  时,  $f^{(n)}(t) \rightarrow 0$ , 则

$$F[f^{(n)}(t)] = (i)^n F[f(t)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.16)$$

(2) 若  $\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n f(t)| dt$  收敛, 则

$$F^{-1}[F^{(n)}(\quad)] = (-i)^n F^{-1}[F(\quad)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.17)$$

以下用数学归纳法证明公式(1.17), 公式(1.16)可类似证之.

证 当  $n = 1$  时, 由定义

$$F(\quad) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i \omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{d e^{-i t}}{d t} d t \\
 &= (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) e^{-i t} d t \\
 &= (-i) F[t f(t)],
 \end{aligned}$$

故

$$F^{-1}[F^{(k)}(t)] = (-i)^k t^k f(t) = (-i)^k F^{-1}[F(t)].$$

设当  $n = k$  时,

$$F^{-1}[F^{(k)}(t)] = (-i)^k F^{-1}[F(t)],$$

则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned}
 F^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{d t} [F^{(k)}(t)] \\
 &= F\{(-i t) F^{-1}[F^{(k)}(t)]\} \\
 &= F\{(-i t)^{k+1} F^{-1}[F(t)]\}.
 \end{aligned}$$

从而

$$F^{-1}[F^{(k+1)}(t)] = (-i)^{k+1} F^{-1}[F(t)].$$

所以

$$F^{-1}[F^{(n)}(t)] = (-i)^n F^{-1}[F(t)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

在求  $F(t)$  的过程中, 我们交换了积分和微分运算的次序. 应该指出, 这种交换是需要一定条件的, 今后证明中碰到类似的问题时, 总假定这两种运算次序是可交换的.

**例 1.13** 求函数

$$f(t) = \begin{cases} Et^n, & |t| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

的傅氏变换.

解 设  $f_1(t) = \begin{cases} E, & |t| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$  则

$$\begin{aligned}
 F[f_1(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i t} d t \\
 &= E \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i t} d t \\
 &= 2E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t d t \\
 &= \frac{2E}{i} \sin \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

由式(1.17)知

$$F_1^{(n)}(\omega) = F[( - i)^n t^n f_1(t)] = ( - i)^n F[t^n f_1(t)],$$

而

$$f(t) = t^n f_1(t),$$

所以

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F[f(t)] = F[t^n f_1(t)] = ( - i)^{-n} F_1^{(n)}(\omega) \\ &= (i)^n \left( \frac{2E}{2} \sin \frac{\omega}{2} \right)^{(n)} \\ &= (i)^n \sum_{k=0}^n C_n^k \left( \frac{2E}{2} \right)^{(n-k)} \left( \sin \frac{\omega}{2} \right)^{(k)}. \end{aligned}$$

类似地,可求出函数

$$f(t) = \begin{cases} t^n e^{-t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

( $n > 0$ )的傅氏变换为

$$F(\omega) = \frac{n!}{(\omega + i)^{n+1}}.$$

#### 4. 积分性质

若当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $\int_{-\infty}^t f(t) dt = 0$ , 则

$$F \int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{i} F[f(t)]. \quad (1.18)$$

证 因为

$$\int_{-\infty}^t f(t) dt = f(t),$$

所以由式(1.16)得

$$F[f(t)] = (i)^{-1} F \int_{-\infty}^t f(t) dt,$$

即

$$F \int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{i} F[f(t)].$$

例 1.14 求具有电动势  $f(t)$  的 LRC 电路的电流, 其中  $L$  是电感,  $R$  是电阻,  $C$  是电容,  $f(t)$  是电动势 (如图 1.7).

解 设  $I(t)$  表示电路在  $t$  时刻的电流, 根据基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律  $I(t)$  适合如下的积分微分方程:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t Idt = f(t).$$

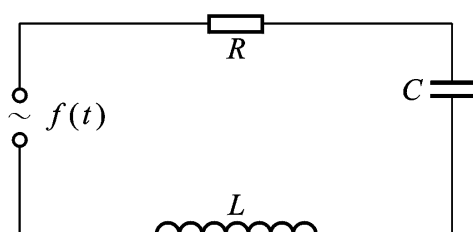


图 1.7

对等式两边同时关于  $t$  求导得

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = f(t).$$

对二阶微分方程两端取傅氏变换得

$$\begin{aligned} L(i\omega)^2 F[I(t)] + R(i\omega) F[I(t)] + \frac{1}{C} F[I(t)] \\ = i\omega F[f(t)]. \end{aligned}$$

故

$$I(\omega) = F^{-1} \frac{i\omega F[f(t)]}{L(i\omega)^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}}.$$

### 例 1.15 求积分微分方程

$$ax'(\omega) + bx(\omega) + c \int_0^\omega x(t) dt = h(\omega)$$

的解, 这里  $a, b, c$  为常数,  $h(\omega)$  为已知实函数.

解 设  $X(\omega) = F[x(\omega)]$ ,  $H(\omega) = F[h(\omega)]$ , 对方程两边同时施以傅氏变换得

$$a\omega F[x(\omega)] + bF[x(\omega)] + cF\left[\int_0^\omega x(t) dt\right] = F[h(\omega)].$$

应用式(1.16), (1.18)有

$$a\omega F[x(\omega)] + bF[x(\omega)] + \frac{c}{i} F[x(\omega)] = H(\omega).$$

故

$$\begin{aligned} F[x(\omega)] &= \frac{H(\omega)}{a\omega + b + \frac{c}{i}}, \\ x(\omega) &= F^{-1} \frac{H(\omega)}{a\omega + b + \frac{c}{i}}. \end{aligned}$$

## 5. 对称性与相似性

$$(1) \text{ 对称性 } F[f(t)] = 2\pi f(-\omega). \quad (1.19)$$

$$(2) \text{ 相似性 } F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \neq 0). \quad (1.20)$$

证 (1) 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

所以

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

故

$$F[f(t)] = 2\pi f(-\omega).$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} F[f(at)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\frac{\omega}{a} at} d(at) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), & a > 0; \\ -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), & a < 0. \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

故公式(1.20)成立.

**例 1.16** 求  $F\left[\frac{2\sin t}{t}\right]$ .

解 当  $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$  时,  $F[f(t)] = \frac{2\sin \omega}{\omega}$ , 则由式(1.19),

$$F\left[\frac{2\sin t}{t}\right] = 2\pi f(-\omega) = \begin{cases} 2\pi, & |\omega| \leq 1; \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

**例 1.17** 设  $f(t)$  为指数衰减函数, 则由式(1.20)有:

$$\begin{aligned} F[f(at)] &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ &= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\frac{\omega}{a} + i\gamma} \\ &= \frac{a}{|a|(\frac{\omega}{a} + i\gamma)} \quad (\gamma \text{ 为衰减函数的参数}). \end{aligned}$$

**6. 卷积与卷积定理**

**定义 1.3** 若给定两个函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 则由积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

确定的  $t$  的函数称为函数  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积, 记作  $f_1(t) * f_2(t)$ , 即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.21)$$

卷积运算满足交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t). \quad (1.22)$$

满足对加法的分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t). \quad (1.23)$$

公式(1.23)请读者自行证之, 现证公式(1.22).

证 由定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

作变量替换  $\tau = t - \tau$ , 那么

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau \\ &= f_2(t) * f_1(t). \end{aligned}$$

**例 1.18** 设函数

$$f_1(t) = f_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

求  $f_1(t) * f_2(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-1}^1 f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t-1}^{t+1} f_2(\tau) d\tau \quad (\tau = t - \tau) \\ &= \int_{t-1}^{t+1} 0 d\tau, \quad |t| \geq 2; \\ &= \int_{t-1}^1 d\tau, \quad 0 < t < 2; \\ &= \int_{-1}^{t+1} d\tau, \quad -2 < t \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 0, \quad |t| \geq 2; \\
 & = 2 - t, \quad 0 < t < 2; \\
 & 2 + t, \quad -2 < t < 0.
 \end{aligned}$$

**定理 1.2** (卷积定理)

若  $F_1(\omega) = F[f_1(t)]$ ,  $F_2(\omega) = F[f_2(t)]$ , 则

$$(1) F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega). \quad (1.24)$$

$$(2) F^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2 f_1(t) f_2(t). \quad (1.25)$$

现证公式(1.24), 公式(1.25)可仿照证之.

$$\begin{aligned}
 \text{证 } F[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f_1(\tau) e^{-i\omega \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d(t - \tau) \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega) f_1(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\
 &= F_1(\omega) F_2(\omega).
 \end{aligned}$$

**例 1.19** 求单位阶跃函数  $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$  指数衰减函数

$$f_2(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0) \text{ 的傅氏变换的卷积 } F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

**解** 由式(1.25)知

$$\begin{aligned}
 F_1(\omega) * F_2(\omega) &= F[2 f_1(t) f_2(t)] \\
 &= F[2 u(t) f_2(t)] = 2 F[f_2(t)] \\
 &= \frac{2}{\lambda + i\omega}.
 \end{aligned}$$

如若我们不用式(1.25), 我们就得先求出  $F_1(\omega) = \frac{1}{i\omega}$ ,  $F_2(\omega) = \frac{1}{\lambda + i\omega}$ , 再通过积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega')} d\omega',$$

求得  $F_1(\omega) * F_2(\omega)$ , 此过程对较复杂的  $F_1(\omega)$ ,  $F_2(\omega)$  积分便不太容易了.

**例 1.20** 解积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(u)}{(x - u)^2 + a^2} du = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad (0 < a < b).$$

**解** 因为

$$+ \frac{y(u)}{(x-u)^2 + a^2} du = y(x) * \frac{1}{x^2 + a^2},$$

所以

$$\begin{aligned} F[y(x) * \frac{1}{x^2 + a^2}] &= F[y(x)] \cdot F \frac{1}{x^2 + a^2} \\ &= F \frac{1}{x^2 + b^2}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} F \frac{1}{x^2 + a^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} e^{-i x} dx \\ &= 2i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{-i z}}{z^2 + a^2}, ai \right], \quad < 0; \\ &= 2i \operatorname{Res} \left[ \frac{e^{i z}}{z^2 + a^2}, ai \right], \quad > 0. \\ &= \frac{1}{a} e^{-a} | | . \end{aligned}$$

同理可得

$$F \frac{1}{x^2 + b^2} = \frac{1}{b} e^{-b} | | ,$$

故

$$\begin{aligned} F[y(x)] &= \frac{a}{b} e^{-(b-a)} | | , \\ y(x) &= F^{-1} \frac{a}{b} e^{-(b-a)} | | \\ &= \frac{a}{b} \frac{b-a}{b-a} F^{-1} \frac{1}{b-a} e^{-(b-a)} | | \\ &= \frac{a}{b} \frac{b-a}{x^2 + (b-a)^2}. \end{aligned}$$

### 7\* 功率定理

**定理 1.3** 若  $f_1(t), f_2(t)$  为实函数  $F_1(\omega) = F[f_1(t)], F_2(\omega) = F[f_2(t)], F_1(\omega), F_2(\omega)$  为  $F_1(\omega), F_2(\omega)$  的共轭函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

证  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) e^{i \omega t} d\omega dt$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{i\omega t} dt d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) \overline{e^{-i\omega t}} dt d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} dt d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega.
 \end{aligned}$$

同理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) d\omega.$$

在许多物理问题中, 这个公式的每一边都表示能量或者功率, 故该定理称作功率定理.

特别地, 当  $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ,  $F[f(t)] = F(\omega)$  时, 我们有瑞利定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

这个定理的第一次使用是在瑞利的黑体辐射的论文中. 在这里左、右两边的积分均可看作系统的总能量, 被积函数为能量密度函数. 当左边的积分取遍所有的坐标值时, 右边的积分就取遍所有的频谱分量.

### 8\* 自相关定理

自相关函数. 我们称积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt$$

为函数  $f(t)$  的自相关函数, 记作  $R(\tau)$ , 即

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt.$$

**定理1.4** (自相关定理) 若  $F(\omega) = F[f(t)]$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt = F^{-1}[|F(\omega)|^2].$$

证 由位移性质得

$$F[f(t + \tau)] = e^{i\omega\tau} F[f(t)],$$

由功率定理得

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)} e^{i\omega\tau} F(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega \\
 &= F^{-1}[|F(\omega)|^2].
 \end{aligned}$$

作为卷积定理的特殊情况,自相关定理在通讯中可解释为:信号的自相关函数是它的功率频谱的傅里叶变换.

傅里叶变换性质一览表

性 质	$f(t)$	$F(\omega)$
相 似	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
线 性	$f(t) + g(t)$	$F(\omega) + G(\omega)$
位 移	$f(t - t_0)$	$e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
	$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
微 分	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n F(\omega)$
	$(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
积 分	$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{1}{i} F(\omega)$
卷 积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

## 1.3 函数及其傅里叶变换

函数是一个极为重要的函数,它的概念中所包含的思想在数学领域中流行了一个多世纪.利用 函数可使傅里叶分析中的许多论证变得极为简捷,可表示许多函数的傅里叶变换. 函数不是一般意义下的函数,而是一个广义函数,它在物理学中有着广泛的应用.

### 1.3.1 函数的概念

#### 1.概念的引入

例 1.21 在原来电流为零的电路中,在时间  $t = 0$  时刻进入一单位电量的脉冲,现在需要确定电路上的电流  $I(t)$ .

解 设  $q(t)$  表示电路中的电荷函数,则

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

而

$$I(t) = q'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t},$$

故

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

此外, 电路在  $t=0$  以后到任意时刻 的总电量

$$q = \int_0^+ I(t) dt = 1,$$

亦有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt = 1.$$

**例 1.22** 对某静止的单位质量物体施以瞬时外力  $F(t)$ , 使其速度  $v(t)$  突然增加一个单位. 现在对外力  $F(t)$  给以表达.

解 由牛顿第二运动定律知:

$$F(t) = ma(t) = m \frac{dv}{dt} = m \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t},$$

故

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

而物体在  $t=0$  的瞬间动量的增量为

$$\int_{0^-}^{0^+} F(t) dt = v(0^+) - v(0^-) = 1,$$

亦有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 1.$$

**例 1.23** 在  $x$  轴上除去点  $x = x_0$  外的其它各点处, 都没有物质分布, 而在点  $x = x_0$  处集中分布一单位质量的物质. 试确定  $x$  轴上各点处物质的分布密度  $\rho(x)$ .

解 设区间  $[x, x + \Delta x]$  上物质的质量  $\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x)$ ,  $m(x)$  为  $x$  轴上任意一点到  $x$  处物质的总质量, 那么

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} \\ &= \begin{cases} 0, & x \neq x_0; \\ \infty, & x = x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

另一方面, 我们不难得出

$$m(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1.$$

以上三个例子提供给我们的三个具有共同特征的函数  $I(t)$ ,  $F(t)$ ,

$\delta(x)$ , 在普通函数的定义下是找不到这样的函数的. 为此海维赛德引入了符号函数  $\delta(x)$ . 其后狄拉克(Dirac)又在量子力学中引入了现在广泛使用的符号函数  $\delta(x)$ .

## 2. 函数的定义

函数可以用不同方式来定义, 工程上常用的定义是:

**定义 1.4** 满足以下两个条件

$$(1) \quad \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \infty, & t = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

的函数称为  $\delta$  函数.

现在看来例 1.21, 1.22 仅是给  $\delta$  函数赋予了不同的物理意义而已. 例 1.23 中  $x_0 = 0$  时, 可由下面定义的函数赋以相应的物理意义.

**定义 1.5** 满足以下两个条件

$$(1) \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ \infty, & t = t_0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

的函数称为  $\delta(t - t_0)$  函数.

再来观察例 1.21, 1.22, 1.23 中函数  $I(t)$ ,  $F(t)$ ,  $\delta(x)$  的共同特点, 我们发现在自变量非常小的变化范围内, 函数的值非常大, 且不论自变量的范围取多少, 总有这范围上函数的积分恒为 1. 据此, 作如图 1.8 所示宽为  $\tau$ , 振幅为  $\frac{1}{\tau}$  的矩形脉冲, 当保持矩形脉冲面积  $\cdot \frac{1}{\tau} = 1$  不变, 而使脉宽  $\tau$  趋于零时, 脉冲的振幅  $\frac{1}{\tau}$  必趋于无穷大. 所以,  $\tau$  趋于零的矩形脉冲极限为  $\delta$  函数,  $\delta$  函数又称脉冲函数.

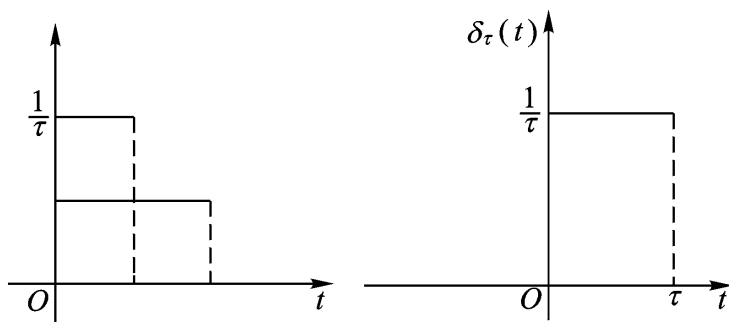


图 1.8

用数学语言可将 函数定义如下:

**定义 1.6** 函数序列

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq t \leq n; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当  $n$  趋向于零时的极限  $f(t)$  称为 函数, 即

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t).$$

这里由于

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{1}{n} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

因此它与定义 1.4 是等价的. 在上式我们交换了积分运算和极限运算的顺序.

一般地, 当一个积分的被积函数中含有因子  $f_n(t)$  时, 在运算中, 我们常用  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  来代替  $f_n(t)$ , 并且须先求积分, 再求  $n \rightarrow \infty$  的极限, 否则运算就没有意义了. 类似地, 我们还可选用一系列的三角脉冲, 将 函数定义为其极限, 这里就不详述了.

与定义 1.5 相对应, 我们有

**定义 1.7** 函数序列

$$f_n(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & t_0 \leq t \leq t_0 + n; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当  $n$  趋向于零时的极限  $f(t - t_0)$  称为  $(t - t_0)$  函数, 即

$$f(t - t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t - t_0).$$

函数的概念所包含的数学思想是指: 对函数在自变量某值的非常狭小的“领域”内取得非常大的函数值中的“领域”不做精确细节的苛求, 注重的是函数的积分值.

直观上, 函数用一个长度为 1 的有向线段来表示(如图 1.9)它表明只在  $t = t_0$  ( $t_0$  可以为 0) 处有一脉冲, 其冲击强度为 1 (即  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) dt = 1$ ), 在  $t \neq t_0$  处函数值为零.

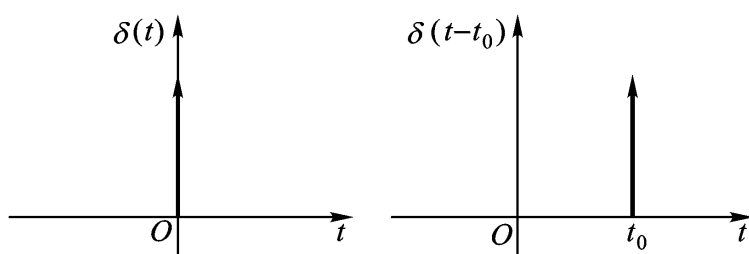


图 1.9

### 1.3.2 函数的性质

#### 1. 筛选性质

对任意的连续函数  $f(t)$ , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0); \quad (1.26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0). \quad (1.27)$$

事实上, 因为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \frac{1}{t} f(t) dt \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) \quad (0 < \epsilon < 1), \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

同理可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

#### 例 1.24 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t - t_0) dt = f(-t_0).$$

证 设  $t = t - t_0$ , 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + t_0) f(t) dt.$$

由式(1.27)知等式成立.

从公式(1.26)和(1.27)中我们可以看到, 等式左边的积分值是选择了函数  $f(t)$  的单个值. 因此, 该命题称作脉冲函数的选择性质, 亦即筛选性质. 至

于  $\delta(t)$  作为哪一种脉冲序列的极限则是无关紧要的, 这一点正是  $\delta(t)$  函数的实用之处.

## 2. 函数为偶函数

$$\delta(-t) = \delta(t). \quad (1.28)$$

事实上,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(-t) dt \\ &= f(0). \end{aligned}$$

这里用到变量替换  $-t = \tau$ , 将所得结果与式(1.26)比较即可得出结论.

将  $\delta(t)$  函数数学定义中所采用的矩形脉冲换作如下形式

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

即可理解该性质.

例 1.25 证明:

$$\delta(t) * f(t) = f(t) * \delta(t) = f(t).$$

证 利用筛选性质

$$\begin{aligned} \delta(t) * f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) f(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-\tau) f(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (t-\tau = -\tau) \\ &= f(t), \\ f(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-t) f(\tau) d\tau \\ &= f(t), \end{aligned}$$

所以

$$\delta(t) * f(t) = f(t) * \delta(t) = f(t).$$

## 3. 相似性质

设  $a$  为实常数, 则

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (a \neq 0). \quad (1.29)$$

事实上, 设  $t = at$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) f(t) dt, \quad a > 0; \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) f(t) dt, \quad a < 0. \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f\left(\frac{t}{a}\right) dt \\
 &= \frac{1}{|a|} f(0).
 \end{aligned}$$

另一方面

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|a|} f(t) dt = \frac{f(0)}{|a|}.$$

从而

$$f(at) = \frac{1}{|a|} f(t).$$

这说明, 如果将  $t$  的尺度扩大  $a$  倍, 那么冲击脉冲的冲击强度将相应地缩小  $|a|$  倍.

#### 4. 函数是单位阶跃函数的导数

$$\delta(t) = u'(t), \quad (1.30)$$

这里

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

称为单位阶跃函数.

事实上,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau &= \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\
 &= u(t).
 \end{aligned}$$

故当  $t \geq 0$  时,

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t).$$

上式两边对  $t$  求导得

$$\delta(t) = u'(t).$$

当  $t=0$  时, 由式

$$\delta(0) = \lim_{0^-} \frac{u(\tau) - u(0)}{\tau - 0} = \dots,$$

及  $\delta(t)$  函数的定义 1.6 有

$$\delta(t) = u'(t).$$

这说明广义函数与普通函数之间存在相互转化这一事实.



### 1.3.3 函数的傅里叶变换

因为

$$F[1(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1,$$

$$F[1(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t} \Big|_{t=t_0} = e^{-i\omega t_0}.$$

所以

$$1(t) \stackrel{F}{F^{-1}} 1, \quad 1(t - t_0) \stackrel{F}{F^{-1}} e^{-i\omega t_0}.$$

即

$1(t)$  和  $1$ ,  $1(t - t_0)$  和  $e^{-i\omega t_0}$  分别构成了傅氏变换对.

**例 1.26** 证明 (a)  $f(t) = 1$  和  $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$  是一组傅氏变换对. (b)  $f(t) = e^{i\omega_0 t}$  和  $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$  是一组傅氏变换对.

证 (a) 因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1,$$

故  $f(t) = 1$  和  $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega)$  构成一组傅氏变换对.

(b) 因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = e^{i\omega t} \Big|_{\omega=\omega_0} = e^{i\omega_0 t},$$

故  $f(t) = e^{i\omega_0 t}$  和  $F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$  构成一组傅氏变换对.

结论(a)和(b)说明:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega). \quad (1.31)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (1.32)$$

显然, 这两个积分在普通积分意义下是不存在的, 这里的积分被赋予了函数的意义.

**例 1.27** 求余弦函数  $f(x) = \cos \omega_0 x$  的傅氏变换.

解 由

$$\cos \omega_0 x = \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2}$$

及傅氏变换定义, 有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F[f(x)] = F[\cos \omega_0 x] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2} e^{-i\omega x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-i(\omega - \omega_0)x} + e^{-i(\omega + \omega_0)x}] dx \\
 &= \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= F[f(x)] = F[\sin \omega_0 x] \\
 &= i\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].
 \end{aligned}$$

**例 1.28** 证明单位阶跃函数  $u(t)$  在  $t = 0$  时的傅氏变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{i} + \pi \delta(\omega).$$

证 因为

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{i} + \pi \delta(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin \omega t d\omega + \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

而

$$\int_0^{+\infty} \sin \omega t d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -\frac{1}{2}, & t < 0. \end{cases}$$

因此, 当  $t = 0$  时

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

即在  $t = 0$  时, 单位阶跃函数  $u(t)$  和  $F(\omega) = \frac{1}{i} + \pi \delta(\omega)$  构成一组傅氏变换对.

## \* 1.4 离散傅里叶变换和离散沃尔什变换

### 1.4.1 离散傅里叶变换

#### 1. 离散傅里叶变换的定义

在 1.2 节, 我们定义了傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.33)$$

及傅里叶逆变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.34)$$

若实值函数  $f(t)$  在区间  $(-\infty, a)$  和  $(b, +\infty)$  上的取值均为 0, 这时的傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.35)$$

称为有限傅里叶变换.

若  $f(t)$  的取值仅在一些离散值上给定 (这在实际中是完全可能的, 这也是我们对抽样值的一种有意识的选择). 我们常常认为其潜在的连续变量的函数实际是存在的. 因此, 我们

定义 1.8  $f(n)$  的离散傅里叶变换  $F(k)$  由下式给出

$$F(k) = N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i (k/N)n}, \quad (1.36)$$

用符号  $DFT$  表达, 即

$$F(k) = DFT[f(n)].$$

$f(n)$  的离散傅里叶逆变换由下式给出

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{2\pi i (k/N)n}, \quad (1.37)$$

用符号  $IDFT$  表达, 即

$$f(n) = IDFT[F(k)].$$

数量  $\frac{2\pi}{N}$  类似于式 (1.33) 中的  $\omega$ , 选用字母  $k$ , 是为了与式 (1.33) 中的  $t$ , 有所区别.

要看清由  $F(k)$  如何重新得到  $f(n)$ , 要用到下面的结果:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i (k/N)(n-m)} = \begin{cases} N, & k=m; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (1.38)$$

通常, 对自变量取值为  $0, 1, 2, \dots, N-1$  的函数  $f(n)$  及其离散傅里叶变换  $F(k)$  均以  $N$  为周期延拓成定义在整数集上的函数, 即令

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n \pm N) = f(n \pm 2N) = \dots, \\ F(k) &= F(k \pm N) = F(k \pm 2N) = \dots. \end{aligned} \quad (1.39)$$

这一段最后, 我们给出当  $N=2, 4, 8$  时的几个最基本的函数  $f(n)$  的离散傅里叶变换的例子, 并以  $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$  表示一个自变量取值为  $0, 1, \dots, N-$

$l$  的函数,  $a_k$  是这个函数在自变量取值为  $k$  时的函数值.

$$N = 2$$

$$\begin{aligned} \{1 \ 0\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{2}\{1 \ 1\}, \quad \{1 \ 1\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{2}\{2 \ 0\}, \\ \{0 \ 1\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{2}\{1 \ -1\}, \quad \{1 \ -1\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{2}\{0 \ 2\}. \end{aligned}$$

$$N = 4$$

$$\begin{aligned} \{1 \ 0 \ 0 \ 0\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ 1 \ 1 \ 1\}, \quad \{0 \ 1 \ 0 \ 0\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ -i \ -1 \ i\}, \\ \{0 \ 0 \ 1 \ 0\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ -1 \ 1 \ -1\}, \quad \{0 \ 0 \ 0 \ 1\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ i \ -1 \ -i\}, \\ \{1 \ 1 \ 0 \ 0\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\}, \\ \{0 \ 0 \ 1 \ 1\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{2 \ -1 + i \ 0 \ -1 - i\}, \\ \{1 \ 1 \ 1 \ 1\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{4 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ \{1 \ 1 \ 0 \ -1\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ 1 - 2i \ 1 \ 1 + 2i\}. \end{aligned}$$

$$N = 8$$

$$\begin{aligned} \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{8}\{8 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}, \\ \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} &\stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{8}\{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}. \end{aligned}$$

## 2. 离散傅里叶变换的性质

### (1) 线性性质

$$f_1(n) + f_2(n) \stackrel{DFT}{\rightarrow} F_1(n) + F_2(n),$$

其中  $c$ ,  $d$  为任意常数.

### (2) 反转性质

$$f(-n) \stackrel{DFT}{\rightarrow} F^*(-n^*). \quad (1)$$

### (3) 位移性质

$$\begin{aligned} f(n - T) &\stackrel{DFT}{\rightarrow} e^{-j2\pi T(n/N)} F(n), \\ e^{j2\pi n T/N} f(n) &\stackrel{DFT}{\rightarrow} F(n - T). \end{aligned}$$

例  $\{1 \ 0 \ 0 \ 0\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ 1 \ 1 \ 1\},$

$$\{0 \ 1 \ 0 \ 0\} \stackrel{DFT}{\rightarrow} \frac{1}{4}\{1 \ -i \ (-i)^2 \ (-i)^3\},$$

$$\{0 \ 0 \ 1 \ 0\} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{4} \{1 \ (-i)^2 \ (-i)^4 \ (-i)^6\}.$$

#### (4) 卷积及卷积定理

**定义 1.9** 两个序列  $f_1(\cdot)$  和  $f_2(\cdot)$  的循环卷积定义为

$$f_1(\cdot) * f_2(\cdot) = \sum_{n=0}^{N-1} f_1(\cdot) f_2(\cdot - n).$$

**定理 1.5** (卷积定理):

$$f_1(\cdot) * f_2(\cdot) \xrightarrow{DFT} N F_1(\cdot) F_2(\cdot).$$

**例** 设  $f_1(\cdot) = f_2(\cdot) = \{1 \ 1 \ 0 \ 0\}$ , 那么

$$f_1(\cdot) * f_2(\cdot) = \{1 \ 2 \ 1 \ 0\} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{4} \{4 \ -2i \ 0 \ 2i\}.$$

而

$$\{1 \ 1 \ 0 \ 0\} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{4} \{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\},$$

由卷积定理知

$$\begin{aligned} f_1(\cdot) * f_2(\cdot) &\xrightarrow{DFT} 4 \times \frac{1}{4} \{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\} \times \frac{1}{4} \{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\} \\ &= \frac{1}{4} \{4 \ -2i \ 0 \ 2i\}. \end{aligned}$$

#### (5) 定理 1.6 (乘积定理)

$$f_1(\cdot) f_2(\cdot) \xrightarrow{DFT} \sum_{n=0}^{N-1} F_1(\cdot) F_2(\cdot - n).$$

**例**

$$f_1 = f_2 = f_1 f_2 = \{1 \ 1 \ 0 \ 0\} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{4} \{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\}.$$

#### (6) 定理 1.7 (广义巴塞伐尔—瑞利定理)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |f(\cdot)|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |F(\cdot)|^2.$$

**例**

$$\{1 \ 1 \ 0 \ 0\} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{4} \{2 \ 1 - i \ 0 \ 1 + i\}.$$

我们看到  $f^2 = 2$  和  $N \sum |F|^2 = 4 \times 0.5 = 2$ .

限于篇幅, 以上性质在此不证明了, 感兴趣的读者可自行证之.

### 1.4.2 快速傅里叶变换

在 1965 年, 一种计算离散傅里叶变换的方法突然轰动于世了(J.W. 库勒 (J.W. Cooley) 和 J.W. 图基 (J.W. Tukey), Math, Comput, Vol 19, April 1965,

pp.297 - 301), 这种方法在由于繁冗的计算而妨碍着继续前进的许多领域里引起了革命性的变革. 详细的资料是一组论文集, 它发表在 IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AW - 2, June 1967. 另一份资料是 G. D. 伯格兰德(G. D. Bergland)编写的, Spectrun, Vol. 6, July 1969, pp. 41—52.

理解这种快速傅里叶变换(FFT)有多种方法, 使许多人感兴趣的一种方法是做变换矩阵的分解. 按照定义, 我们可以把 DFT 的关系式(对  $N = 8$ )写成矩阵乘积的形式.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 F(0) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f(0) \\
 F(1) & 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & f(1) \\
 F(2) & 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} & f(2) \\
 F(3) & 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} & f(3) \\
 F(4) & = & 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & \times & f(4) \\
 F(5) & & 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} & f(5) \\
 F(6) & & 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} & f(6) \\
 F(7) & & 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} & f(7)
 \end{array} \quad (1.40)$$

其中  $W = \exp(-i2\pi/N)$ . 量  $W$  是 1 的  $N$  次根, 这是由于  $W^N = \exp(-i2\pi) = 1$ ,  $W$  是模为 1 而幅角为  $(-1/N)$  周角的复数.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 F(0) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F(2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F(4) & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 F(5) & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\
 F(6) & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 F(7) & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & f(0) \\
 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 & f(1) \\
 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 & f(2) \\
 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 & f(3) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \times & 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & \times & f(4) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 & f(5) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 & f(6) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W^7 & f(7)
 \end{array} \quad (1.41)$$

这个因子分解使得每个因子的每一行只保留两个非零元素. 在 (1.40) 中一共有  $N^2$  个乘法, 可是如果我们使用 (1.41), 由于每个因子只有  $2N$  个乘

法, 以及从  $2^M = N$  知其因子的个数是  $M$ , 如果我们不计第一个因子, 这是由于第一个因子只表示一个排列, 所以其乘法总数是  $2 N \log_2 N$ . 对因子的仔细分析还表明其中许多乘法仍是多余的, 因此要计算节省乘法的精确次数就要仔细地注意每个细节. 实际上, 无须分析这些细节, 仅从新方法中乘法次数的数量级是  $2 N \log_2 N$ , 而原方法中是  $N^2$  这一点即可看出, 当  $N$  很大时, 新方法比原方法优越得多. 在平面图形的数字化中, 例如照片的图形,  $N$  都会很大.

下面是理解快速傅里叶变换的另一个方法.  $N$  个元素的序列可以分成两个  $N/2$  个元素的短序列, 其方法就是把原序列中位于偶数位置的元素拿来作第一个序列, 而把位于奇数位置的元素拿来作第二序列. 例如, 序列  $\{8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\}$  可以分成  $\{8\ 6\ 4\ 2\}$  和  $\{7\ 5\ 3\ 1\}$ . 这两个序列的每一个都有自己的  $DFT$ , 如何从这两个  $DFT$  得到原来长序列的  $DFT$  呢? 其答案可以由下面写法得出.

$$\{8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\} = \{8\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0\ 2\ 0\} + \{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\}.$$

我们看到描述  $DFT$  可以由使用伸长和位移定理 (见参考书目 13, 426 页) 来获得. 从伸长定理我们知道, 如果

$$\{8\ 6\ 4\ 2\} = \{A\ B\ C\ D\},$$

$$\text{那么} \quad \{8\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0\ 2\ 0\} = \{A\ B\ C\ D\ A\ B\ C\ D\}. \quad (1.42)$$

该现象类似于周期函数的傅里叶级数的系数. 同样地, 如果

$$\{7\ 5\ 3\ 1\} = \{P\ Q\ R\ S\},$$

那么  $\{7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0\} = \{P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S\}$ . 现在, 我们应用位移定理就会发现

$$\{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\ 1\} = \{P\ WQ\ W^2 R\ W^3 S\ W^4 P\ W^5 Q\ W^6 R\ W^7 S\}. \quad (1.43)$$

用  $W$  去乘就意味着在复平面上作  $N$  分之一周的旋转, 这就是使位移的作用是沿着元素  $\{P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S\}$  的序列逐渐增加相位延迟. (1.42) 和 (1.43) 相加之后就给出长序列的  $DFT$ . 于是,  $N$  等于 8 的变换被分成两个  $N=4$  的变换. 由于按 (1.40) 作  $DFT$  的乘法次数是  $N^2$ , 所以该分解具有表示节约乘法百分之五十的可能性. 要想进一步看清如何进行这个分解, 我们来参看图 1.10. 在左面从已给的序列开始, 我们重新把它排成两个短序列  $\{8\ 6\ 4\ 2\}$ 、 $\{7\ 5\ 3\ 1\}$ , 并且形成输入到其输出分别是  $N=4$  的  $\{A\ B\ C\ D\}$  和  $\{P\ Q\ R\ S\}$  的两个变换中. 实线说明传送到输出节点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  进一步再传送到  $\{A\ B\ C\ D\ A\ B\ C\ D\}$ . 虚线则是标上所需的因子, 使成为  $P$ 、 $WQ$ 、 $W^2 R$  等等, 然后再传送到如 (1.43) 所表明 的结点, 并在 (1.42) 和 (1.43) 的同一输出结点处作加法. 图 1.11 则进一步说明, 把每一关于四个元素的变换简化为两个关于两个元素的变换, 而图 1.12 则说明简化为乘法和加法的整个过程.

从图 1.10, 1.11, 1.12 中可见, 8 个元素的  $DFT$  计算共分三个层次, 每一

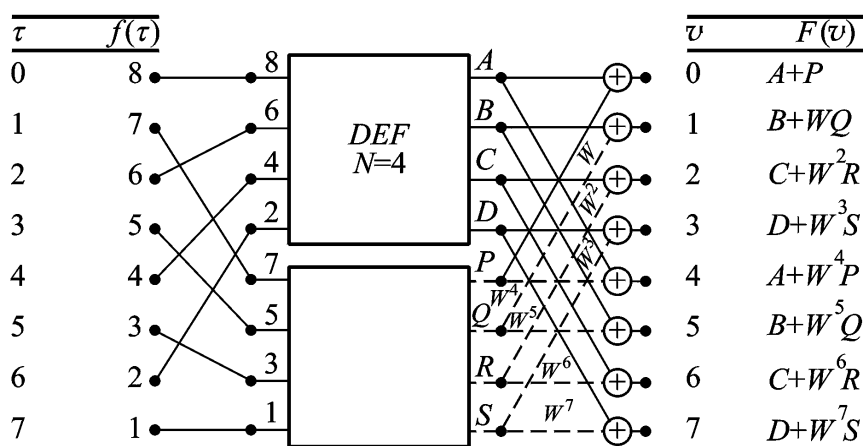


图 1.10 八个元素的  $DFT$  简化为两个四个元素的  $DFT$

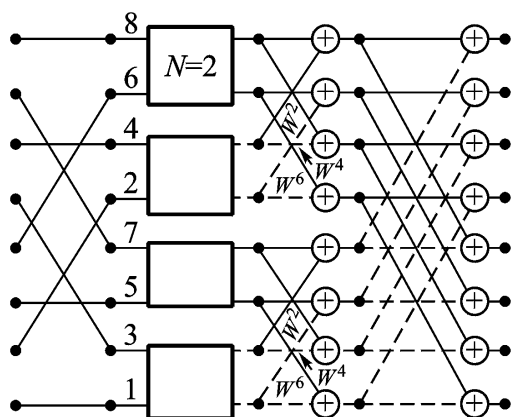


图 1.11 简化成四个关于二个元素的  $DFT$

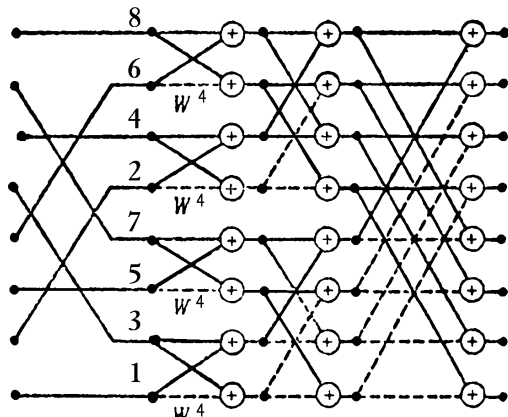


图 1.12 八个元素的  $DFT$  简化为  $3 \times 6$  个乘法和  $3 \times 8$  个加法. 在以上三个图中, 实际表示与 1 相乘, 虚线表示与有关的因子相乘. [从 W.T. 科兰 (W.T. Cochran) et al., IEEE Trans, AU-IS(1967), p - p 45 修改得到]

层次的基本运算都是由四个形似蝴蝶的运算组成.

最后, 让我们把整个步骤总结如下. 首先是把给定的序列重新排成  $\{ 8 \ 6 \ 4 \ 2 \ 7 \ 5 \ 3 \ 1 \}$ , 这个运算精确地对应于使用 (1.41) 的第一个矩阵所作的乘法, 并且有时不大严格地称为二进制倒置. 然后, 按照重新排好的数据对的线性组合计算出八个新数, 而这正是 (1.41) 中第二个矩阵所指出的. 这些数在图 1.12 加法器里输出. 与此十分类似的步骤还有两个, 故知这类蝶形运算一共是三层 (或者一般地是  $M$  个,  $N = 2^M$ ), 当然, 并不是所有的 48 个乘法都有意义, 其中有 32 个是乘以 1 和 7 个乘以  $W^4$ , 亦即是简单地改变符号. 此外, 乘以  $W^2$  和  $W^6$  也是比较好作的.



于是,我们就看到图 1.12 是式(1.41)中四个矩阵乘法的详细表述,并且通过对图 1.12 的结构分析可以作为逐步推广到阶数更高的情形的基础.

如果元素的个数不能无限平分(亦即  $N$  不能写成  $2^M$  的形态),快速算法可以更专门的去配合.例如,如果  $N$  被 3 可以除尽,那么最终可能简化为三个元素的变换,可是这种算法并不怎么快.

### 1.4.3 离散沃尔什变换

#### 1.离散沃尔什变换的定义

定义 1.10 离散序列

$$x(n) = \{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$$

的沃尔什变换  $X(K)$  由下式给出

$$X(K) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \text{Wal}(K, n) \quad (K = 0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (1.44)$$

用符号  $DWT$  表达,即

$$X(K) = DWT[x(n)]$$

$x(n)$  的沃尔什逆变换由下式给出

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} X(K) \text{Wal}(K, n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (1.45)$$

用符号  $IDWT$  表达,即

$$x(n) = IDWT[X(K)],$$

这里  $\text{Wal}(K, n)$  是离散的沃尔什函数,它的定义式为

$$\text{Wal}(K, n) = (-1)^{\sum_{r=0}^{p-1} n_{p-1-r} K_{p-1-r}},$$

其中  $n_{p-1-r}$  为  $n$  的第  $p-1-r$  位二进制码,  $K_{p-1-r}$  为  $K$  的第  $p-1-r$  位二进制码.

例 设有限长时间序列  $x(n) = \{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1\}$ , 试求  $DWT[x(n)]$  及  $IDWT[X(K)]$ .

解 由式(1.44)得

$X(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	0
$X(1)$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0
$X(2)$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
$X(3)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$X(4)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0
$X(5)$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	0
$X(6)$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
$X(7)$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

$$= [\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

由式(1.45)得

$$\begin{aligned} \begin{matrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{matrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T. \end{aligned}$$

## 2. 离散沃尔什变换的性质

### (1) 线性性质

$$x_1(n) + x_2(n) \xrightarrow{DWT} X_1(K) + X_2(K),$$

其中,  $c_1, c_2$  为任意常数

### (2) 并元位移性质

$$x(n-l) \xrightarrow{DWT} \text{Wal}(K, l) \cdot X(K).$$

$x(n-l)$  表示将时间序列  $x(n)$  作  $l$  位并元移位所得序列.

例 当  $N=8, l=3$  时, 原序列  $x(n)$  为

$$\{x(0) \quad x(1) \quad x(2) \quad x(3) \quad x(4) \quad x(5) \quad x(6) \quad x(7)\}.$$

并元移 3 位的序列  $x(n-3)$  为

$$\{x(0+3) \quad x(1+3) \quad x(2+3) \quad x(3+3) \quad x(4+3) \quad x(5+3) \\ x(6+3) \quad x(7+3)\}$$

$$= \{x(3) \quad x(2) \quad x(1) \quad x(0) \quad x(7) \quad x(6) \quad x(5) \quad x(4)\}.$$

### (3) 卷积及卷积定理

**定义 1.11** 两个序列  $x(n), y(n)$  的并元时间卷积定义为

$$z_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m).$$

**定理 1.8** (并元时间卷积定理)

$$DWT[z_{xy}(n)] = X(K) \cdot Y(K).$$

**定理 1.9** (帕什瓦尔定理)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \sum_{K=0}^{N-1} X^2(K).$$

限于篇幅, 以上性质就不证明了, 感兴趣的读者可自行证之.

## 第 1 章习题

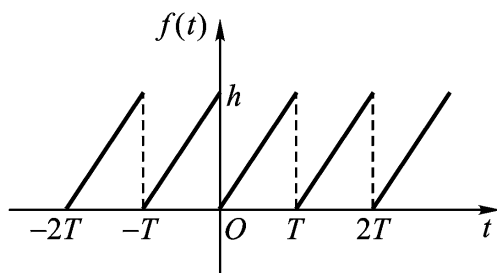
1.1.1 求下列函数的傅氏积分:

$$(a) f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & t^2 < 1; \\ 0, & t^2 > 1. \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0; \\ 1, & 0 < t < 1; \\ 0, & 1 < t < +\infty. \end{cases}$$

$$(c) f(t) = e^{-\frac{(t)^2}{a}}.$$

1.1.2 求作如图所示的锯齿形波关于  $|c_n|$  的变化图.



第 1.1.2 题

1.1.3 证明: 若  $f(t)$  满足傅氏积分定理的条件, 当  $f(t)$  为奇函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

其中

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt;$$

当  $f(t)$  为偶函数时, 则有

$$f(t) = \int_0^{+\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

其中

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

1.2.1 求下列函数的傅氏变换, 并推证下列积分结果:

$$(a) f(t) = e^{-|t|} (\gamma > 0), \text{ 证明 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\gamma}{2} t}{2} dt = \frac{1}{2} e^{-|\gamma|}.$$

$$(b) f(t) = e^{-|t|} \cos t, \text{ 证明 } \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 2}{t^4 + 4} \cos t \, dt = \frac{1}{2} e^{-|t|} \cos t.$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

$$\text{证明: } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1 - \frac{t^2}{2}} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin t, & |t| \leq 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

1.2.2 求下列函数的傅氏逆变换:

$$(a) F(\omega) = \frac{2}{(3 + i\omega)(5 + i\omega)};$$

$$(b) F(\omega) = \frac{\omega^2 + 10}{(5 + i\omega)(9 + i\omega^2)}.$$

1.2.3 已知某函数的傅氏变换为  $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$ , 求该函数  $f(t)$ .

1.2.4 若  $F(\omega) = F[f(t)]$ , 证明(翻转性质):

$$F(-\omega) = F[f(-t)].$$

1.2.5 若  $F(\omega) = F[f(t)]$ , 证明:

$$F[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

1.2.6 证明:

$$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} f_1(t) * f_2(t) = f_1(t) * \frac{d}{dt} f_2(t).$$

1.2.7 证明: 若  $F[e^{i\omega t}] = F(\omega)$ , 其中  $f(t)$  为一实函数, 则

$$F[\cos \omega(t)] = \frac{1}{2} [F(\omega) + \overline{F(-\omega)}],$$

$$F[\sin \omega(t)] = \frac{1}{2i} [F(\omega) - \overline{F(-\omega)}],$$

其中  $\overline{F(-\omega)}$  为  $F(-\omega)$  的共轭函数.

1.2.8 已知  $F[f(t)] = F(\omega)$ , 求下列函数的傅氏变换:

$$(a) tf(t); \quad (b) (1-t)f(1-t);$$

$$(c) tf(2t); \quad (d) (t-2)f(t-2);$$

$$(e) f(2t-5); \quad (f) t \frac{df(t)}{dt}.$$

1.2.9 求下列函数的傅氏变换:

$$(a) f(t) = te^{-at}u(t) \quad (a > 0); \quad (b) f(t) = \frac{a^2}{a^2 + 4t^2}.$$

1.2.10 利用傅氏变换求解下列积分方程:

$$(a) \int_0^{+\infty} g(\tau) \sin t \, d\tau = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1; \\ 2, & 1 < t < 2; \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

$$(b) \int_0^+ g(\tau) \cos \tau \, d\tau = \frac{\sin t}{t}.$$

$$1.2.11 \quad \text{若 } f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求  $f_1(t) * f_2(t)$ .

1.2.12 利用瑞利定理  $\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ , 求下列积分的值:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx;$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx;$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx;$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} dx.$$

1.3.1 求下列函数的傅氏变换:

$$(a) u(t) \sin bt;$$

$$(b) u(t) \cos bt$$

$$(c) e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot u(t);$$

$$(d) e^{i\omega_0 t} u(t - t_0);$$

$$(e) \sin^3 t;$$

$$(f) \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

1.3.2 设  $f_1(t) = e^t \cos t$ ,  $f_2(t) = (t+1) + (t-1)$ , 求  $f_1(t) * f_2(t)$ .

# 第 2 章 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换的实质仍然是积分运算 .但因它对像原函数的要求比起傅里叶变换要弱的多,故对某些问题,它比傅里叶变换的适用面要广 .本章将介绍拉普拉斯变换的定义,性质及应用等内容 .

## 2.1 拉普拉斯变换的概念

### 2.1.1 拉普拉斯积分

#### 1 . 拉普拉斯积分的概念

类似于傅里叶积分的引入方法,我们通过对幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

进行如下推广:将变量  $z$  换作  $e^{-s}$ , 指数  $n$  换作从 0 到  $+\infty$  的连续变量  $t$  .随  $n$  变动的系数  $c_n$  换作函数  $f^*(t)$  .和式换作积分 .便得到了被称作拉普拉斯 (Laplace) 积分的含复参变量  $s$  的广义积分

$$\int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt. \tag{2.1}$$

由于幂级数的收敛域是一个圆盘,该圆盘经过映照  $z = e^{-s}$  变为复平面上的右半平面 .可以预见,在右半平面上拉普拉斯积分是收敛的(这一结果随后将被证实) .

收敛的拉普拉斯积分在右半平面上同时定义了一个函数  $F(s)$ , 这个函数我们称其为复频函数,  $s$  称为复频率 .显然,  $F(s)$  事实上是函数  $f^*(t) e^{-t\text{Re}(s)}$  的频谱函数,由此可见拉普拉斯积分的物理意义 .

#### 例 2.1 求单位阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

的拉普拉斯积分 .

解 积分

$$\int_0^b e^{-st} dt = \frac{1}{s} (1 - e^{-sb})$$

在  $b \rightarrow +\infty$  时,当且仅当  $\text{Re}(s) > 0$  才有极限,因此

$$\int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

**例 2.2 求指数函数**

$$f^*(t) = e^t$$

的拉普拉斯积分(其中  $s$  为任意复数)。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} e^t e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-1)t} dt \\ &= \frac{1}{s-1} \quad (\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(1)). \end{aligned}$$

**例 2.3 求正弦函数**

$$f^*(t) = \sin kt$$

的复频函数(其中  $k$  为任意复数)。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \sin kte^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} (e^{ikt} - e^{-ikt}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik} \right) \\ & \quad (\operatorname{Re}(s-ik) > 0 \text{ 且 } \operatorname{Re}(s+ik) > 0) \\ &= \frac{k}{s^2 + k^2} \\ & \quad (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)| \text{ 对实的 } k \text{ 这表示 } \operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

**2. 拉普拉斯积分存在定理**

拉普拉斯积分也和傅里叶积分一样,对某些函数积分收敛,如例 2.1, 2.2, 2.3 中的函数  $u(t)$ ,  $e^t$ ,  $\sin kt$  对另外一些函数如  $e^{t^2}$ ,  $te^{t^2}$  积分发散.关于这个问题,我们给出如下的拉普拉斯积分存在定理。

**定理 2.1** 若函数  $f^*(t)$  在区间  $[0, +\infty)$  上满足下列条件:

- (1)  $f^*(t)$  在任一有限区间上分段连续;
- (2) 存在着常数  $M > 0$ ,  $c_0 > 0$ , 使得

$$|f^*(t)| < Me^{c_0 t},$$

则在半平面  $\operatorname{Re}(s) > c_0$  上, 积分

$$\int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt$$

存在, 由此积分所确定的函数  $F(s)$  解析。

**证** 由条件(2)可知, 存在常数  $M > 0$  及  $c_0 > 0$  使得

$$|f^*(t)| < Me^{c_0 t} \quad (t \geq 0),$$

于是, 当  $\operatorname{Re}(s) = c > c_0$  时,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-st} dt \right| &= \int_0^{+\infty} |f^*(t)e^{-st}| dt \\ &< M \int_0^{+\infty} |e^{-(s-c_0)t}| dt \\ &= M \int_0^{+\infty} e^{-(c-c_0)t} dt \\ &= \frac{M}{c-c_0}. \end{aligned}$$

所以积分

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-st} dt$$

在  $\operatorname{Re}(s) > c_0$  时收敛, 即该积分存在.

又因为

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |tf^*(t)e^{-st}| dt &= M \int_0^{+\infty} te^{-(c-c_0)t} dt \\ &= \frac{M}{(c-c_0)^2} \quad (\operatorname{Re}(s) = c > c_0), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} f^*(t)e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} f^*(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} -tf^*(t)e^{-st} dt. \end{aligned}$$

所以函数  $F(s)$  在半平面  $\operatorname{Re}(s) > c_0$  上可导, 解析.

由拉普拉斯积分存在定理我们可以看到:

(1) 工程技术中遇到的大部分函数都满足定理条件.

(2) 一个在  $[0, +\infty)$  上分段连续的函数, 经过拉普拉斯积分运算, 得到了一个在半平面  $\operatorname{Re}(s) > c_0$  上的解析函数.

(3) 定理的条件是充分的, 而不是必要条件. 即在不满足定理条件的前提下, 拉普拉斯积分仍可能存在. 如函数  $t^{-\frac{1}{2}}$  在  $t=0$  处不满足定理的条件(1),

但下面的例子将告诉我们它的拉普拉斯积分为  $\frac{1}{s}$ .

**例 2.4** 求幂函数  $f^*(t) = t^m$  (常数  $m > -1$ ) 的拉普拉斯积分.



解 由于  $s$  为右半平面内的任一复数, 设  $s = re^i$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ),  $z = st$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt &= \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^{m+1}} \int_0^{+\infty} z^m e^{-z} dz \end{aligned}$$

上式右边的积分路线为从原点出发, 沿直线  $BA$  至无穷远点(见图 2.1)

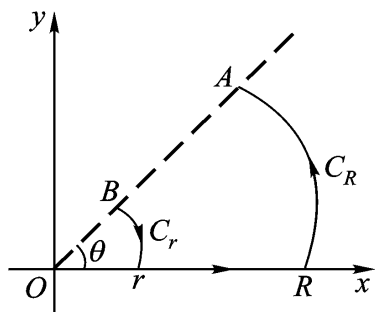


图 2.1

由于  $z^m e^{-z}$  在除原点外的复平面上解析, 故由柯西定理知

$$\left( \int_{AB} + \int_{C_r} + \int_{rR} + \int_{C_R} \right) z^m e^{-z} dz = 0,$$

即

$$\int_B^A z^m e^{-z} dz = \left( \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} \right) z^m e^{-z} dz. \quad (2.2)$$

因为

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} z^m e^{-z} dz \right| &\leq \int_{C_R} |z^m e^{-z}| ds \\ &= \int_{C_R} |z|^m |e^{-z}| ds \\ &= \int_{C_R} R^m e^{-R \cos \theta} ds \\ &= R^{m+1} e^{-R \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\theta \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

同理可得

$$\left| \int_{C_r} z^m e^{-z} dz \right| \leq \int_{C_r} r^{m+1} e^{-r \cos \theta} d\theta \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0^+).$$

在式(2.2)两边同时令  $R \rightarrow +\infty$ ,  $r \rightarrow 0^+$  得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} z^m e^{-z} dz &= \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx \\ &= (m+1). \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt = \frac{(m+1)}{s^{m+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0).$$

特别地, 当  $m$  为非负整数时, 由于

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx &= m \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = \dots \\ &= m!, \\ \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} dt &= \frac{m!}{s^{m+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned}$$

当  $m = -\frac{1}{2}$  时, 由于

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx &= \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du \quad (u = \sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\pi}, \\ \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-st} dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{s}. \end{aligned}$$

### 2.1.2 拉普拉斯变换

**定义 2.1** 设  $f(t)$  为定义在  $[0, +\infty)$  上的实值(或复值)函数, 其拉普拉斯积分收敛. 由积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (s \text{ 为复参量}) \quad (2.3)$$

建立的从  $f(t)$  到  $F(s)$  的对应称作拉普拉斯变换(简称拉氏变换)用字母  $L$  表达, 即

$$F(s) = L[f(t)]. \quad (2.4)$$

式(2.4)的含义是说对函数  $f(t)$  施加了  $L$  变换得到了函数  $F(s)$ . 这种变换亦可理解为一种映照, 故  $f(t)$  称作  $L$  变换的像原函数,  $F(s)$  称作  $L$  变换的像函数.

#### 例 2.5 求函数

$$f(t) = \operatorname{ch} kt$$

的拉普拉斯变换(其中  $k$  为任意复数).

解 因为

$$\operatorname{ch} kt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} L[\operatorname{ch} kt] &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - k^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(k)|). \end{aligned}$$

采用同样的方法我们还可得到

$$L[\operatorname{sh} kt] = \frac{k}{s^2 - k^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)|).$$

$$L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)|, \text{对实的 } k \text{ 这表示 } \operatorname{Re}(s) > 0).$$

由例 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 我们可得拉普拉斯变换公式:

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0);$$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a));$$

$$\begin{aligned} L[\sin kt] &= \frac{k}{s^2 + k^2} \\ &(\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)|, \text{对实的 } k \text{ 这表示 } \operatorname{Re}(s) > 0); \end{aligned}$$

$$L[t^m] = \frac{(m+1)}{s^{m+1}} \quad (m > -1, \operatorname{Re}(s) > 0).$$

**例 2.6** 求 函数的拉普拉斯变换.

**解** 在具体求解运算之前, 我们先把拉普拉斯变换中积分下限的问题加以澄清.

若函数  $f(t)$  满足拉普拉斯积分存在定理的条件, 在  $t=0$  处有界, 此时积分

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

中的下限取  $0^+$  或  $0^-$  不会影响其结果, 但当  $f(t)$  在  $t=0$  处为 函数, 或包含了 函数时, 拉氏积分的下限就必须明确指出是  $0^+$  还是  $0^-$ , 因为

$$L_+[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

称为  $0^+$  系统, 在电路上  $0^+$  表示换路后初始时刻;

$$L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

称为  $0^-$  系统, 在电路上  $0^-$  表示换路前终止时刻;

$$L_-[f(t)] = \int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt + L_+[f(t)].$$

可以发现, 当  $f(t)$  在  $t=0$  附近有界时, 则

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt = 0,$$

即

$$L_- [f(t)] = L_+ [f(t)].$$

当  $f(t)$  在  $t=0$  处包含一个  $\delta$  函数时

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t) e^{-st} dt = 0,$$

即

$$L_- [f(t)] = L_+ [f(t)].$$

为此, 将进行拉氏变换的函数  $f(t)$ , 当  $t=0$  时的定义扩大到当  $t>0$  及  $t=0$  的任意一个邻域内. 这样拉氏变换的定义  $L[f(t)] = \int_0^+ f(t) e^{-st} dt$  应  
 为  $L_- [f(t)] = \int_{0^-}^+ f(t) e^{-st} dt$ . 为书写简便起见, 该定义仍写为原来的形式.

根据上面的陈述及  $\delta$  函数的筛选性质易得

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \int_{0^-}^+ \delta(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^+ \delta(t) e^{-st} dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

如果脉冲出现在  $t=t_0$  时刻 ( $t_0>0$ ), 有

$$\begin{aligned} L[\delta(t-t_0)] &= \int_{0^-}^+ \delta(t-t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^+ \delta(t-t_0) e^{-st} dt \\ &= e^{-st_0}. \end{aligned}$$

### 例 2.7 求函数

$$f(t) = e^{-t} \delta(t) - e^{-t} u(t) \quad (t > 0)$$

的拉氏变换.

解  $L[f(t)] = L_- [f(t)]$

$$\begin{aligned} &= \int_{0^-}^+ [e^{-t} \delta(t) - e^{-t} u(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^+ e^{-(s+1)t} \delta(t) dt - \int_0^+ e^{-(s+1)t} dt \\ &= 1 - \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{s}{s + \dots} \quad (\operatorname{Re}(s) > -\dots).$$

最后,关于拉氏变换再做一点注明,拉氏变换中的像原函数在  $t < 0$  时,一律定义为  $f(t) = 0$ .这是因为拉氏变换只以区间  $0 \leq t < +\infty$  为基础,从数学观点来看,不论  $f(t)$  在  $(-\infty, 0)$  上有无定义,拉氏变换都一样.

## 2.2 拉普拉斯逆变换

由第1章傅里叶变换的产生过程我们知道

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt \quad (s = \dots + i \dots) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i \dots t} dt \quad (f(t) = e^{-i \dots t} f^*(t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

傅里叶逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{i \dots t} ds. \quad (2.6)$$

又由本章1.1节拉普拉斯变换产生的过程我们知道拉氏变换就是拉普拉斯积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt. \quad (2.7)$$

对比(2.5)、(2.7)两式,我们发现:拉氏变换是傅氏变换的特殊情况,即当  $t < 0$  时  $f^*(t) = 0$ .一并考虑  $f(t) = f^*(t) e^{-i \dots t}$ ,  $s = \dots + i \dots$ , 则由式(2.6)得

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{st} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_0^{+\infty} f^*(t) e^{-st} dt e^{st} ds. \end{aligned} \quad (2.8)$$

由此,我们考虑用式(2.8)来定义拉普拉斯逆变换.对比拉氏变换的定义,也为书写方便.像原函数我们仍用  $f(t)$  表示,下面给出拉普拉斯逆变换的定义:

**定义 2.2** 若  $F(s) = L[f(t)]$ , 则积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (\dots \text{为 } s \text{ 的实部}) \quad (\dots \text{与 } s \text{ 的实部}) \quad (2.9)$$

建立的从  $F(s)$  到  $f(t)$  的对应称作拉普拉斯逆变换(简称拉氏逆变换).用字母  $L^{-1}$  表达,即

$$f(t) = L^{-1}[F(s)].$$

它与拉氏变换构成了一个拉氏变换对.

由傅里叶积分存在定理,拉普拉斯积分存在定理我们很容易得到:

**定理 2.2** 若  $f(t)$  满足拉普拉斯积分存在定理的条件,  $F(s) = L[f(t)]$ . 那么, 在  $f(t)$  的连续点处有反演公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{st} ds.$$

在  $f(t)$  的间断点处, 上式右端收敛于  $\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$ , 其中  $\operatorname{Re}(s) = c_0$ .

要由式(2.9)求拉氏逆变换, 就要计算式(2.9)右边的复变函数的积分, 这通常是较困难的, 但当  $F(s)$  满足一定的条件时, 可以用留数方法来求之.

**定理 2.3** 若  $s_1, s_2, \dots, s_n$  是函数  $F(s)$  的所有奇点(适当选取  $c_0$  使这些奇点全在  $\operatorname{Re}(s) < c_0$  的范围内), 且当  $|s| \rightarrow \infty$  时,  $F(s) \rightarrow 0$ , 则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k],$$

即

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k] \quad (t > 0). \quad (2.10)$$

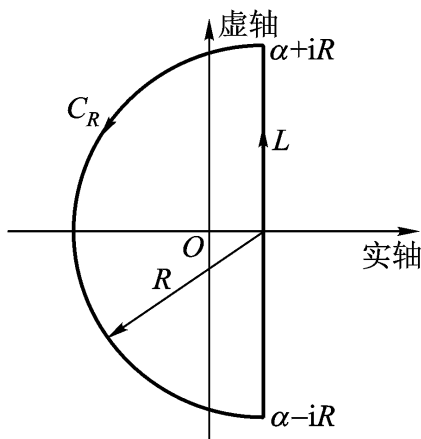


图 2.2

**证** 作如图 2.2 所示闭曲线  $C = L + C_R$ ,  $C_R$  在  $\operatorname{Re}(s) < c_0$  的区域内是半径为  $R$  的圆弧, 当  $R$  充分大后, 可以使  $F(s)$  的所有奇点包含在闭曲线  $C$  围成的区域内. 同时,  $e^{st}$  在整个复平面上解析, 所以  $F(s)e^{st}$  的奇点就是  $F(s)$  的奇点, 根据留数定理可得

$$\oint_C F(s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k],$$

即

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-iR}^{+iR} F(s) e^{st} ds + \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

对上式,取  $R \rightarrow +\infty$  时的极限,并根据推广的约当引理.当  $t > 0$  时,有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 0,$$

从而

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty-i\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k],$$

故

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}, s_k].$$

即使  $F(s)$  在  $\text{Re}(s) < 0$  的半平面内有可列个奇点,式(2.10)在一定条件下也是成立的.

**例 2.8** 求  $L^{-1} \frac{se^{-2s}}{s^2 + 16}$ .

**解** 由定理

$$L^{-1} \frac{se^{-2s}}{s^2 + 16} = \sum_{k=1}^n \text{Res} \frac{se^{-2s}}{s^2 + 16} e^{st}, s_k.$$

而  $s_1 = 4i, s_2 = -4i$  为函数  $\frac{se^{-2s}}{s^2 + 16}$  的两个一阶极点,

$$\text{Res} \frac{se^{(t-2)s}}{s^2 + 16}, 4i = \left. \frac{e^{(t-2)s}}{2} \right|_{s=4i} = \frac{1}{2} e^{4(t-2)i},$$

$$\text{Res} \frac{se^{(t-2)s}}{s^2 + 16}, -4i = \left. \frac{e^{(t-2)s}}{2} \right|_{s=-4i} = \frac{1}{2} e^{-4(t-2)i}.$$

故

$$\begin{aligned} L^{-1} \frac{se^{-2s}}{s^2 + 16} &= \frac{1}{2} e^{4(t-2)i} + e^{-4(t-2)i} \\ &= \cos 4(t-2) \quad (t > 2). \end{aligned}$$

**例 2.9** 求函数

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

的拉氏逆变换.

**解** 因为  $s=0$  为二阶极点,  $s = \pm i$  为一阶极点,

$$\text{Res} \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 1)}, 0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} e^{st}$$

推广的约当引理 若  $F(s)$  在  $\text{Re}(s) < 0$  内  
(1) 有有限个奇点, (2)  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ , 则当  $t > 0$  时,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 0,$$

,  $C_R$  如图 2.2 所示.

$$= \frac{t}{2},$$

$$\operatorname{Res} \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 2)}, i = \left. \frac{e^{st}}{4s^3 + 2s^2} \right|_{s=i} = -\frac{e^{i t}}{2i^2},$$

$$\operatorname{Res} \frac{e^{st}}{s^2(s^2 + 2)}, -i = \frac{e^{-i t}}{2i^2}.$$

所以

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i t} - e^{i t}}{2i} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{\sin t}{2}. \end{aligned}$$

一般地, 若函数  $F(s)$  是有理函数:  $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ , 其中  $A(s)$ ,  $B(s)$  是不可约的多项式,  $B(s)$  的次数是  $n$ ,  $A(s)$  的次数小于  $B(s)$  的次数, 在这种情况下  $F(s)$  满足定理的条件, 可采用式 (2.10) 求  $F(s)$  的逆变换.

## 2.3 拉普拉斯变换的性质

前两节我们利用拉普拉斯变换的定义, 拉普拉斯逆变换的定理求得一些较简单的函数的拉氏变换, 拉氏逆变换. 但仅用这些来求各种函数的变换就显得不太方便, 有的甚至求不出来. 本节的性质及现成的拉普拉斯变换表, 将在求像函数或像原函数时提供帮助.

以下我们来讨论拉普拉斯变换的性质, 为叙述方便, 假设所要求进行拉氏变换的函数的拉氏变换均存在, 且记

$$L[f(t)] = F(s), \quad L[g(t)] = G(s).$$

### 1. 线性性质

$$L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]; \quad (2.11)$$

$$L^{-1}[F(s) + G(s)] = L^{-1}[F(s)] + L^{-1}[G(s)], \quad (2.12)$$

其中,  $a, b$  是常数.

此性质的证明可由拉氏变换, 拉氏逆变换的定义直接导出.

### 例 2.10 求函数

$$f(t) = \sin kt + \cos kt + e^{kt}$$

的拉氏变换.

解 由式 (2.11) 及拉氏变换表知

$$L[f(t)] = L[\sin kt] + L[\cos kt] + L[e^{kt}]$$



$$= \frac{s+k}{s^2+k^2} + \frac{1}{s-k} \quad (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(k)|).$$

**例 2.11 求函数**

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$$

的拉氏逆变换.

解 因为

$$F(s) = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right),$$

所以,由式(2.12)及拉氏变换表知

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{a-b} L^{-1} \left[ \frac{1}{s-a} \right] - \frac{1}{a-b} L^{-1} \left[ \frac{1}{s-b} \right] \\ &= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\ &\quad [\operatorname{Re}(s) > \max(\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b))]. \end{aligned}$$

**例 2.12 求函数**

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$$

的拉氏逆变换.

解 因为

$$F(s) = \frac{1}{b^2-a^2} \left( \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2} \right),$$

所以由式(2.12)及拉氏变换表知

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{b^2-a^2} L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+a^2} \right] - \frac{1}{b^2-a^2} L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+b^2} \right] \\ &= \frac{1}{b^2-a^2} (\cos at - \cos bt) \\ &\quad [\operatorname{Re}(s) > \max(|\operatorname{Re}(ia)|, |\operatorname{Re}(ib)|)]. \end{aligned}$$

通过例 2.11, 2.12 我们发现, 当  $F(s)$  为真分式有理函数时,  $F(s)$  可分解为部分分式之和. 针对每个部分分式, 我们可以通过拉氏变换的性质和查表求出其拉氏逆变换, 最后再根据式(2.12)求得  $F(s)$  的逆变换. 这种方法我们称为求像原函数的部分分式法.

**2. 微分性质****(1) 像原函数的微分性质**

$$L[f(t)] = sF(s) - f(0); \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &\quad (\operatorname{Re}(s) > \alpha_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

## (2) 像函数的微分性质

$$F(s) = L[-tf(t)] \quad (\operatorname{Re}(s) > c_0); \quad (2.15)$$

$$F^{(n)}(s) = L[(-t)^n f(t)] \quad (\operatorname{Re}(s) > c_0). \quad (2.16)$$

证 (1) 根据拉氏变换的定义, 有

$$L[f(t)] = \int_0^+ f(t)e^{-st} dt.$$

对等式右边利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} \int_0^+ f(t)e^{-st} dt &= f(t)e^{-st} \Big|_0^+ + s \int_0^+ f(t)e^{-st} dt \\ &= sL[f(t)] - f(0). \end{aligned}$$

所以

$$L[f(t)] = sF(s) - f(0).$$

若利用式(2.13)两次, 则可得

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L\{[f(t)]\} \\ &= sL[f(t)] - f(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f(0). \end{aligned}$$

以此类推, 便可得

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (\operatorname{Re}(s) > c_0).$$

特别地, 当  $f(t)$  含有脉冲函数  $\delta(t)$  时

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-).$$

(2) 由于  $F(s)$  在  $\operatorname{Re}(s) > c_0$  内解析, 因而

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^+ f(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^+ \frac{d}{ds} [f(t)e^{-st}] dt \\ &= \int_0^+ -tf(t)e^{-st} dt \\ &= L[-tf(t)], \end{aligned}$$

用同样的方法可求得

$$F(s) = L[(-t)^2 f(t)],$$

...

$$F^{(n)}(s) = L[(-t)^n f(t)].$$

利用式(2.13)和(2.14), 我们可以把关于  $f(t)$  的微分运算转化为对  $F(s)$  的代数运算. 利用式(2.15)和(2.16), 我们可以把求像函数的导数的问题转化为

求像原函数乘以 $(-t)^n$ 的拉氏变换,亦可反过来求解问题.

**例 2.13** 求函数

$$f(t) = \sin kt$$

的拉氏变换.

解 因为

$$\begin{aligned} (\sin kt)' &= -k^2 \sin kt, \\ L[f(t)] &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} -k^2 L[\sin kt] &= s^2 L[\sin kt] - k, \\ L[\sin kt] &= \frac{k}{s^2 + k^2} \\ (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)|, k \text{ 为实数时 } \operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned}$$

**例 2.14** 求函数

$$f(t) = t^2 \cos kt$$

的拉氏变换.

解 因为

$$L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2},$$

由式(2.16)得

$$\begin{aligned} L[t^2 \cos kt] &= L[(-t)^2 \cos kt] \\ &= \left( \frac{s}{s^2 + k^2} \right)' \\ &= \frac{2s^3 - 6sk^2}{(s^2 + k^2)^3} \\ (\operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Re}(ik)|, k \text{ 为实数时 } \operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned}$$

**例 2.15** 求函数

$$F(s) = \ln \frac{s+1}{s-1}$$

的拉氏逆变换.

解 由式(2.15)得

$$L^{-1}[F(s)] = -tf(t).$$

而

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1},$$

所以

$$f(t) = -\frac{1}{t} L^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \right].$$

查拉氏变换表得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t}(e^t - e^{-t}) \\ &= \frac{2}{t} \operatorname{sh} t \quad (\operatorname{Re}(s) > 1). \end{aligned}$$

### 3. 积分性质

#### (1) 像原函数的积分性质

$$L \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s} F(s). \quad (2.17)$$

$$L \int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s^n} F(s). \quad (2.18)$$

$n$ 次

#### (2) 像函数的积分性质

$$L \frac{f(t)}{t} = \int_s F(s) ds. \quad (2.19)$$

$$L \frac{f(t)}{t^n} = \int_s ds \int_s ds \dots \int_s F(s) ds. \quad (2.20)$$

$n$ 次

证 (1) 设  $h(t) = \int_0^t f(t) dt$ , 则

$$h'(t) = f(t), \quad h(0) = 0.$$

由微分性质式(2.13)得

$$L[h'(t)] = sL[h(t)] - h(0),$$

即

$$L \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s} F(s).$$

重复应用式(2.17), 可得

$$L \int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt = \frac{1}{s^n} F(s).$$

$n$ 次

由此, 我们可以把关于像原函数的积分运算转化为对像函数的代数运算.

(2) 设  $G(s) = \int_s F(s) ds$ , 则

$$G'(s) = -F(s).$$

由微分性质公式(2.15)得

$$L^{-1}[G'(s)] = -tL^{-1}[G(s)],$$

从而

$$G(s) = L \frac{-L^{-1}[F(s)]}{-t},$$

即

$$\int_s F(s) ds = L \frac{f(t)}{t}.$$

当  $s=0$  时, 有

$$\int_0^+ \frac{f(t)}{t} dt = \int_0 F(s) ds.$$

重复利用式(2.19), 可得

$$L \frac{f(t)}{t^n} = \int_s ds \int_s ds \dots \int_s F(s) ds.$$

$n$ 次

**例 2.16** 求函数

$$f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$$

的拉氏变换.

解 由式(2.17)得

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L \int_0^t \sin \tau d\tau \\ &= \frac{1}{s} L \sin t, \end{aligned}$$

又由式(2.19)得

$$\begin{aligned} L \frac{\sin t}{t} &= \int_s L(\sin t) ds \\ &= \int_s \frac{1}{s^2 + 1} ds \\ &= \frac{1}{2} - \arctan s. \end{aligned}$$

故

$$L \int_0^t \sin \tau d\tau = \frac{1}{s} \left( \frac{1}{2} - \arctan s \right).$$

顺便可得

$$\begin{aligned} \int_0^+ \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0 \frac{1}{s^2 + 1} ds \\ &= \arctan s \Big|_0 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

这与我们熟知的结果一致.

**例 2.17** 计算积分

$$+ \int_0^+ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

解 因为

$$\int_0^+ \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^+ F(s) ds,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^+ \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_0^+ L[e^{-at} - e^{-bt}] ds \\ &= \int_0^+ \left( \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) ds \\ &= \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

#### 4. 延迟性质

若  $t < 0$  时  $f(t) = 0$ , 则对任一非负实数  $t_0$  有

$$L[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s), \quad (2.21)$$

或 
$$L^{-1}[e^{-st_0} F(s)] = f(t - t_0).$$

证 因为

$$\begin{aligned} L[f(t - t_0)] &= \int_0^+ f(t - t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^+ f(t - t_0) e^{-st} dt \quad (t < 0 \text{ 时 } f(t) = 0) \\ &= e^{-st_0} \int_{t_0}^+ f(t - t_0) e^{-s(t-t_0)} d(t - t_0) \\ &= e^{-st_0} \int_0^+ f(u) e^{-su} du \quad (u = t - t_0) \\ &= e^{-st_0} F(s), \end{aligned}$$

故等式成立.

函数  $f(t - t_0)$  与  $f(t)$  相比,  $f(t)$  是从  $t = 0$  开始有非零数值, 而  $f(t - t_0)$  是从  $t = t_0$  开始才有非零数值, 即向后延迟了一个时间  $t_0$ . 从它们的图像来讲,  $f(t - t_0)$  的图像是由  $f(t)$  的图像沿  $t$  轴向右移距离  $t_0$  而得. 这个性质表明, 时间函数延迟  $t_0$  的拉氏变换等于它的像函数乘以指数因子  $e^{-st_0}$ .

#### 例 2.18 求函数

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0; \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

的拉氏变换.

解 由于

$$L[u(t)] = \frac{1}{s},$$

故由延迟性质得

$$L[u(t - t_0)] = \frac{1}{s} e^{-st_0}.$$

**例 2.19** 求如图 2.3 所示阶梯函数  $f(t)$  的拉氏变换.

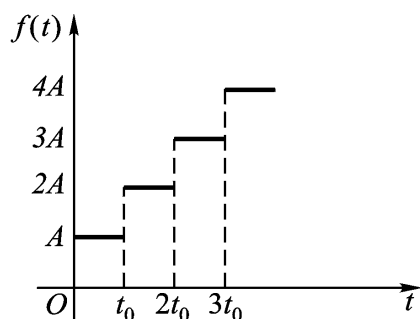


图 2.3

**解** 利用单位阶跃函数, 可将这个函数表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= Au(t) + Au(t - t_0) + Au(t - 2t_0) + \dots \\ &= A[u(t) + u(t - t_0) + u(t - 2t_0) + \dots]. \end{aligned}$$

再由线性性质和延迟性质可得

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= A\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-st_0} + \frac{1}{s}e^{-2st_0} + \dots\right) \\ &= \frac{A}{s}(1 + e^{-st_0} + e^{-2st_0} + \dots) \\ &= \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-st_0}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned}$$

应用延迟性质, 我们还可以求周期函数的拉氏变换, 即

设  $f_T(t)$  ( $t > 0$ ) 是以  $T$  为周期的周期函数, 如果

$$f_T(t) = f(t), \quad 0 \leq t < T,$$

则

$$L[f_T(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt. \quad (2.22)$$

事实上在第  $k+1$  个周期内

$$f_T(t) = f(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T,$$

不妨设在  $t = T$  上有  $f(t) = 0$ , 应用延迟性质得

$$L[f(t - kT)] = e^{-skT} L[f(t)],$$

因此

$$\begin{aligned}
 L[f_T(t)] &= L \sum_{k=0}^{\infty} f(t - kT) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} L[f(t - kT)] \\
 &= L[f(t)] \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.
 \end{aligned}$$

**例 2.20** 求全波整流函数  $f(t) = |\sin t| (t > 0)$  的拉氏变换 (如图 2.4)

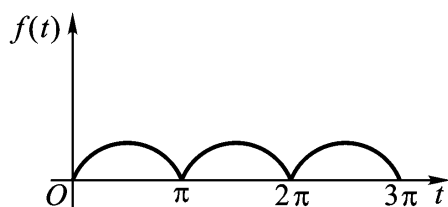


图 2.4

**解** 由式(2.22)知

$$\begin{aligned}
 L[|\sin t|] &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \frac{e^{-st}}{s^2 + 1} (-s \sin t - \cos t) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-s}} \frac{1 + e^{-s}}{s^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{s^2 + 1} \operatorname{cth} \frac{s}{2}.
 \end{aligned}$$

**例 2.21** 求函数

$$F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 16}$$

的拉氏逆变换.

**解** 因为

$$L^{-1} \frac{s}{s^2 + 16} = \cos 4t \quad (\operatorname{Re}(s) > 0),$$

$$F(s) = e^{-2s} \frac{s}{s^2 + 16},$$

由式(2.21)知



$$L^{-1}[F(s)] = \begin{cases} \cos 4(t-2), & t \geq 2; \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

### 5. 位移性质

$$F(s-a) = L[e^{at}f(t)], \quad (2.23)$$

或

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t).$$

证 由拉氏变换的定义知

$$\begin{aligned} L[e^{at}f(t)] &= \int_0^+ e^{at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^+ f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= F(s-a) \quad (\operatorname{Re}(s-a) > 0). \end{aligned}$$

这性质表明, 一个函数乘以指数函数  $e^{at}$  后的拉氏变换等于其像函数作位移  $a$ .

#### 例 2.22 求函数

$$f(t) = \int_0^t te^{at} \sin at \, dt$$

的拉氏变换.

解 由积分性质知

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= L\left[\int_0^t te^{at} \sin at \, dt\right] \\ &= \frac{1}{s} L[te^{at} \sin at], \end{aligned}$$

由微分性质知

$$\begin{aligned} L[t \sin at] &= -\{L[\sin at]\}' \\ &= -\frac{a}{s^2 + a^2} \\ &= \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \end{aligned}$$

由位移性质知

$$L[te^{at} \sin at] = \frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2 + a^2]^2},$$

故

$$L\left[\int_0^t te^{at} \sin at \, dt\right] = \frac{2as - 2a^2}{s(s^2 - 2as + 2a^2)^2}.$$

#### 例 2.23 求函数

$$F(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^2 + 3^2}$$

的拉氏逆变换 .

解 因为

$$F(s) = \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2},$$

由位移性质知

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1} \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+3^2} \\ &= e^{-2t} L^{-1} \frac{2s+1}{s^2+3^2} \\ &= e^{-2t} \left( 2L^{-1} \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{1}{3} L^{-1} \frac{3}{s^2+3^2} \right), \end{aligned}$$

查拉氏变换表得

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-2t} (2\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t).$$

#### \* 6 相似性质

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0). \quad (2.24)$$

事实上, 令  $u = at$  可得

$$\begin{aligned} L[f(at)] &= \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} f(u) e^{-\frac{s}{a}u} du \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0). \end{aligned}$$

#### 例 2.24 求函数

$$u(5t-2) = \begin{cases} 1, & t \geq \frac{2}{5}; \\ 0, & t < \frac{2}{5} \end{cases}$$

的拉氏变换 .

解 依相似性质有

$$L[u(5t-2)] = \frac{1}{5} L[u(t-2)] \Big|_{\frac{s}{5}}$$

依延迟性质有

$$\begin{aligned} L[u(t-2)] &= e^{-2s} L[u(t)] \\ &= \frac{1}{s} e^{-2s}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} L[u(5t-2)] &= \frac{1}{5s} e^{-\frac{2}{5}s} \bigg|_{\frac{s}{5}} \\ &= \frac{1}{s} e^{-\frac{2}{5}s}. \end{aligned}$$

在实际中常常希望改变时间的比例尺, 或者将一个给定的时间函数标准化后再求它的拉氏变换, 这时就要用到这个性质.

### 7. 卷积与卷积定理

**定义 2.3** 若给定的两个函数  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  在  $t < 0$  时均为零, 则积分

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2.25)$$

称为函数  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积, 记作  $f_1(t) * f_2(t)$ . 即

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

实际上, 这个卷积的定义就是上章卷积定义在  $t < 0$  时  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  的特殊情形.

卷积满足交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

满足对加法的分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t).$$

以上性质, 请读者自行证之.

**例 2.25** 设函数

$$f_1(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

求  $f_1(t) * f_2(t)$ .

**解** 依卷积定义, 有

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^t \sin(t-\tau) d\tau \\ &= -\cos(t-\tau) \bigg|_0^t - \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau \\ &= t + \sin(t-\tau) \bigg|_0^t \\ &= t - \sin t. \end{aligned}$$

**定理 2.4 (卷积定理)**

若  $F_1(s) = L[f_1(t)]$ ,  $F_2(s) = L[f_2(t)]$ , 则

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s), \quad (2.26)$$

或

$$L^{-1}[F_1(s) F_2(s)] = f_1(t) * f_2(t).$$

证  $t < 0$  时,  $f_1(t) = f_2(t) = 0$ , 则

$$F_1(s) F_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su} f_2(u) du$$

若作变量替换  $u = t - \tau$  引入变量  $\tau$ , 那么

$$F_1(s) F_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s(t-\tau)} f_2(t-\tau) d\tau dt.$$

由于上式右端绝对可积, 故可交换积分次序, 即

$$F_1(s) F_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt.$$

而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} F_1(s) F_2(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= L[f_1(t) * f_2(t)]. \end{aligned}$$

应用此定理, 我们可以将复杂的卷积运算表达的积分改变成简单的代数乘法运算. 故卷积定理常被用来将一些难于计算出的积分关系十分简单地加以证明.

例如在半无限长棒热传导理论中占有重要地位的函数

$$(x, t) = \frac{x}{2} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-x^2/4t},$$

有

$$L[(x, t)] = e^{-xs} \quad (x > 0).$$

而

$$e^{-x_1 s} e^{-x_2 s} = e^{-(x_1 + x_2)s} \quad (x_1 > 0, x_2 > 0),$$

因此, 由定理得

$$(x_1, t) * (x_2, t) = (x_1 + x_2, t).$$

这一关系若用显示写出, 则相当复杂, 若要通过直接计算加以证明, 那不是一二页篇幅所能完成的, 但利用上面的卷积定理却简单得几乎让人不敢相信.

不难推证, 若  $L[f_k(t)] = F_k(s) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$ , 则

$$L[f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_n(t)] = F_1(s) F_2(s) \dots F_n(s).$$

**例 2.26** 求函数

$$F(s) = \frac{1}{s^2(1+s^2)}$$

的拉氏逆变换.

解 因为

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2+1}, \quad L^{-1} \frac{1}{s^2} = t, \quad L^{-1} \frac{1}{s^2+1} = \sin t.$$

由卷积定理知

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2+1} \\ &= t * \sin t \\ &= t - \sin t. \end{aligned}$$

**例 2.27** 求函数

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$$

的拉氏逆变换.

解 因为

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2+3^2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+3^2},$$

由位移性质知

$$L^{-1} \frac{3}{(s+2)^2+3^2} = e^{-2t} \sin 3t.$$

故由卷积定理得

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{9} (e^{-2t} \sin 3t) * (e^{-2t} \sin 3t) \\ &= \frac{1}{9} \int_0^t e^{-2\tau} \sin 3\tau \cdot e^{-2(t-\tau)} \sin(3t-3\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \sin 3\tau \sin(3t-3\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{18} e^{-2t} \int_0^t [\cos(6\tau-3t) - \cos 3t] d\tau \\ &= \frac{1}{18} e^{-2t} \left[ \frac{\sin(6\tau-3t)}{6} - \cos 3t \right]_0^t \\ &= \frac{1}{54} e^{-2t} (\sin 3t - 3t \cos 3t). \end{aligned}$$

**例 2.28** 求积分方程

$$y(t) = at + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$$

的解.

解 因为

$$\int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau = y(t) * \sin t,$$

对积分方程两边同时实施拉氏变换得

$$L[y(t)] = aL[t] + L[y(t) * \sin t].$$

由卷积定理知

$$L[y(t)] = \frac{a}{s^2} + L[y(t)] \cdot L[\sin t],$$

故

$$\begin{aligned} L[y(t)] &= \frac{a}{s^2} + \frac{L[y(t)]}{s^2 + 1} \\ y(t) &= L^{-1} \left[ \frac{a}{s^4} + \frac{a}{s^2} \right] \\ &= a t + \frac{1}{6} t^3. \end{aligned}$$

### \* 8. 初值定理与终值定理

**初值与终值** 我们称  $f(0)$  和  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  为  $f(t)$  的初值,  $f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  为  $f(t)$  的终值(假定两个极限存在).

**定理 2.5 (初值定理)** 若  $f(t)$  的拉氏变换存在, 则

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0). \quad (2.27)$$

**定理 2.6 (终值定理)** 若  $f(t)$  的拉氏变换存在, 且  $sF(s)$  的一切奇点都在左半平面 ( $\operatorname{Re}(s) < 0$ ), 则

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(+\infty).$$

**证** 考虑关系式

$$sF(s) = s \int_0^+ e^{-st} f(t) dt = \int_0^+ e^{-st} \frac{df}{dt} dt + f(0).$$

令  $s \rightarrow \infty$  得

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^+ e^{-st} \frac{df}{dt} dt + f(0) \\ &= \int_0^+ \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt + f(0) \\ &= f(0). \end{aligned}$$

在关系式中, 令  $s \rightarrow 0$  得

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^+ e^{-st} \frac{df}{dt} dt + f(0)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} e^{-st} \frac{df}{dt} dt + f(0) \\ &= \int_0^+ \frac{df}{dt} dt + f(0) \\ &= f(t) \Big|_0^+ + f(0) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty) . \end{aligned}$$

因此, 倘若允许交换积分与极限的运算顺序, 我们就证明了这两个定理. 在前一定理中, 通常总是许可这样做的; 在后一定理中, 仅在满足定理中所叙述的特定条件下才许可这样做.

例如

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{1}{2}} \quad (s > 0),$$

则

$$sF(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{2}} .$$

由于它的奇点  $s = \pm i$  位于虚轴  $\text{Re}(s) = 0$  上, 因此不满足终值定理的条件, 即使极限  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  存在, 终值定理也不能用. 然而初值定理仍然可以用.

在实际应用中, 有时我们只关心函数  $f(t)$  在  $t = 0$  附近或  $t$  相当大时的情况, 它们可能是某个系统的动态响应的初始情况或稳定状态情况. 这时我们并不需要用逆变换求出  $f(t)$  的表达式, 而可以直接由  $F(s)$  来确定这些值.

终值定理的一个有趣的实际应用是飞机自动着陆系统. 这类系统, 通常也称作终值控制系统, 它要求某指定变量的终值为零. 如图 2.5, 当时间  $t$  变大 (接近着陆时刻) 时, 与关心飞机对理想着陆路径的偏离相比较, 我们更加关心的终值为零.

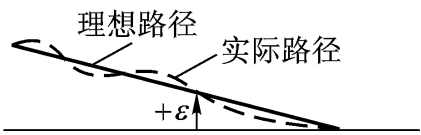


图 2.5 终值控制系统

拉普拉斯变换性质一览表

性 质	$f(t)$	$F(s)$
相 似	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$
线 性	$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)$
位 移	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$

延 迟	$f(t - t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
微 分	$f(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots f^{(n-1)}(0)$
	$-tf(t)$	$F(s)$
	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
积 分	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
	$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt$ n次	$\frac{1}{s^n} F(s)$
	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$
	$\frac{f(t)}{t^n}$	$\int_s^\infty \dots \int_s^\infty F(s) ds$ n次
卷 积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$

注:在使用性质时,注意性质成立的条件.

## 2.4 拉普拉斯变换的应用

我们知道,有很多物理系统,如电路系统、自动控制系统、振动系统等的研究,可以归结为求常系数线性微分方程的初值问题.由于拉氏变换提供了求解初值问题的一种简便方法,所以拉氏变换在各种线性系统理论分析中的应用十分广泛.这一节,我们介绍利用拉氏变换求解线性微分方程及微分方程组的方法,以及拉氏变换在线性控制系统中的应用.

### 2.4.1 线性微分方程及微分方程组

解线性微分方程及微分方程组的基本思想如下:

微分方程 + 初始条件  $\xrightarrow{L \text{ 变换}}$  代数方程

原解  $\xrightarrow{L^{-1} \text{ 变换}}$  像解

#### 1. 解常系数线性微分方程

初值问题

例 2.29 求  $y'' + 3y' + 3y + y = 1$  满足初始条件  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$  的特解.

解 设  $L[y(t)] = Y(s)$ , 对方程两边取拉氏变换, 根据拉氏变换的微分



性质并考虑到初始条件, 可得像方程

$$s^3 Y(s) + 3s^2 Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s},$$

于是

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s(s+1)^3} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}, \end{aligned}$$

取逆变换, 得

$$y(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t}.$$

**例 2.30** 求  $y' + y = u(t-b)$  ( $b > 0$ ) 满足初始条件  $y(0) = y_0$  的特解.

**解** 对方程两边取拉氏变换得像方程

$$sY(s) - y_0 + Y(s) = \frac{1}{s} e^{-bs}.$$

于是

$$Y(s) = \frac{e^{-bs}}{s(s+1)} + \frac{y_0}{s+1},$$

取逆变换, 得

$$\begin{aligned} y(t) &= [1 - e^{-(t-b)}] u(t-b) + y_0 e^{-t} \\ &= y_0 e^{-t}, \quad 0 < t < b; \\ &= 1 + (y_0 - e^b) e^{-t}, \quad t > b. \end{aligned}$$

**例 2.31** 如图 2.6 所示的电路中, 当  $t=0$  时, 开关 K 闭合, 接入信号源  $e(t) = E_0 \sin t$ , 电感起始电流等于零, 求  $I(t)$ .

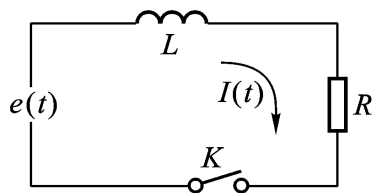


图 2.6

**解** 根据基尔霍夫定律, 有

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = E_0 \sin t,$$

且初始条件为  $I(0) = 0$ .

设  $L[I(t)] = I(s)$ , 对方程两边取拉氏变换, 得像方程

$$LsI(s) + RI(s) = E_0 \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s},$$

于是

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E_0}{(Ls + R)(s^2 + \frac{R}{L}s)} \\ &= \frac{E_0}{L} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s}. \end{aligned}$$

取逆变换, 并根据卷积定理, 可得

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{E_0}{L} (e^{-\frac{R}{L}t} * \sin \frac{R}{L}t) \\ &= \frac{E_0}{L} \int_0^t \sin \frac{R}{L}(t-\tau) e^{-\frac{R}{L}\tau} d\tau \\ &= \frac{E_0}{R^2 + L^2} (R \sin \frac{R}{L}t - L \cos \frac{R}{L}t) + \frac{E_0 L}{R^2 + L^2} e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned}$$

所得结果的第一部分代表一个稳定的(幅度不变的)振荡, 第二部分则随时间而衰减.

**例 2.32** 质量为  $m$  的物体挂在弹簧系数为  $k$  的弹簧的一端(如图 2.7), 作用在物体上的外力为  $F_x(t)$ . 若物体自静止平衡位置  $x=0$  处开始运动, 求该物体的运动规律  $x(t)$ .

解 根据牛顿定律, 有

$$mx''(t) = F_x(t) - kx(t)$$

其中  $-kx(t)$  由虎克(Hooke)定律所得, 是弹性恢复力. 且  $x(0) = x'(0) = 0$ . 设  $L[x(t)] = X(s)$ ,  $L[F_x(t)] = F(s)$ , 对方程两边取拉氏变换, 并考虑初始条件, 则

$$ms^2 X(s) + kX(s) = F(s),$$

若记  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , 则有

$$X(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{F(s)}{s^2 + \omega_0^2},$$

根据卷积定理, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{m} L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} * L^{-1}[F(s)] \right] \\ &= \frac{1}{m} \int_0^t F_x(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

边值问题

**例 2.33** 求  $y'' - 2y' + y = 0$  满足  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$  的特解.

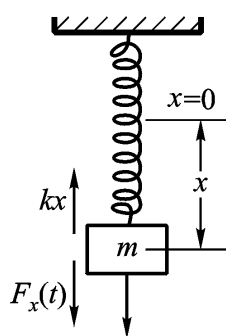


图 2.7

解 像方程为

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2sY(s) + 2y(0) + Y(s) = 0,$$

于是

$$Y(s) = \frac{y(0)}{(s-1)^2},$$

取逆变换, 得

$$y(t) = y(0)te^t,$$

用  $t=1$  代入上式可得

$$2 = y(1) = y(0)e,$$

即

$$y(0) = 2e^{-1},$$

所以

$$y(t) = 2te^{t-1}.$$

以上各例如果用求解常微分方程的古典方法去做, 就会发现运算太繁琐了, 对较特别的方程(如非齐次项具有跳跃点时), 求解起来就不是繁琐而是困难了. 应用拉氏变换, 我们将微分的运算转化为代数运算, 并将初始条件和边界条件一并考虑, 借助拉氏变换表, 求解微分方程变得异常简便.

## 2. 解常系数线性微分方程组

例 2.34 求

$$x + y + z = 1,$$

$$x + y + z = 0,$$

$$y + 4z = 0$$

满足  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  的解.

解 设  $L[x(t)] = X(s)$ ,  $L[y(t)] = Y(s)$ ,  $L[z(t)] = Z(s)$  对方程组中每个方程两边取拉氏变换, 得像方程组:

$$sX(s) + Y(s) + sZ(s) = \frac{1}{s},$$

$$X(s) + sY(s) + Z(s) = 0,$$

$$Y(s) + 4sZ(s) = 0.$$

解此方程组得

$$X(s) = \frac{4s^2 - 1}{4s^2(s^2 - 1)}, \quad Y(s) = -\frac{1}{s(s^2 - 1)},$$

$$Z(s) = \frac{1}{4s^2(s^2 - 1)}.$$

对每一像函数取逆变换, 可得

$$\begin{aligned}
 x(t) &= L^{-1} \frac{4s^2 - 1}{4s^2(s^2 - 1)} = \frac{1}{4} L^{-1} \frac{3}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2} \\
 &= \frac{1}{4} (3\text{sh } t + t), \\
 y(t) &= L^{-1} \left[ -\frac{1}{s(s^2 - 1)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 - 1} \right] \\
 &= 1 - \text{ch } t, \\
 z(t) &= L^{-1} \frac{1}{4s^2(s^2 - 1)} = \frac{1}{4} L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2} \right] \\
 &= \frac{1}{4} (\text{sh } t - t).
 \end{aligned}$$

例 2.35 求方程组

$$\begin{aligned}
 y' - x + x' - y &= e^t - 2, \\
 2y' - x - 2y + x' &= -t
 \end{aligned}$$

满足初始条件

$$\begin{aligned}
 y(0) &= y'(0) = 0, \\
 x(0) &= x'(0) = 0
 \end{aligned}$$

的解.

解 设  $L[x(t)] = X(s)$ ,  $L[y(t)] = Y(s)$ . 对方程组中每个方程两边取拉氏变换, 并考虑初始条件, 得

$$\begin{aligned}
 s^2 Y(s) - s^2 X(s) + sX(s) - Y(s) &= \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s}, \\
 2s^2 Y(s) - s^2 X(s) - 2sY(s) + X(s) &= -\frac{1}{s^2},
 \end{aligned}$$

整理、化简并求解, 得

$$X(s) = \frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}, \quad Y(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}.$$

对每一个像函数求逆变换, 有

$$\begin{aligned}
 y(t) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \right] \\
 &= 1 + te^t - e^t,
 \end{aligned}$$

因为  $X(s)$  具有两个二阶极点:  $s=0, 1$ , 所以

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \frac{2s-1}{(s-1)^2} e^{st} + \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \frac{2s-1}{s^2} e^{st} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} te^{st} \frac{2s-1}{(s-1)^2} - \frac{2s}{(s-1)^3} e^{st} \\
 &\quad + \lim_{s \rightarrow 1} te^{st} \frac{2s-1}{s^2} + \frac{2(1-s)}{s^3} e^{st}
 \end{aligned}$$

$$= -t + te^t.$$

例 2.34、2.35 向我们展示了求解常系数线性微分方程组的方法.容易看出,如若我们只求某个未知函数,而不必知道其余的未知函数时,将省去许多运算,但一般说来,用经典求解方法却不能做到.

### \* 3. 解变系数线性微分方程

应用拉普拉斯变换也可以求解某些变系数线性微分方程.

#### 例 2.36 求方程

$$tx + (1 - n)x + x = 0 \quad (t > 0, n = 0)$$

满足初始条件  $x(0) = x'(0) = 0$  的解.

解 由微分性质知

$$\begin{aligned} L[tx] &= -\frac{d}{ds}L[x] \\ &= -\frac{d}{ds}[s^2 X(s) - sx(0) - x'(0)] \\ &= -2sX(s) - s^2 X(s). \end{aligned}$$

对所给方程两边取拉氏变换,得

$$s^2 X(s) + [(1 + n)s - 1]X(s) = 0.$$

解此可分离变量方程,有

$$X(s) = \frac{c}{s^{n+1}} e^{-\frac{1}{s}}.$$

将  $X(s)$  展为收敛的幂级数,逐项取拉氏逆变换得

$$x(t) = ct^{n+2} J_n(2\sqrt{t}).$$

其中  $J_n$  是  $n$  阶第一类贝塞尔函数.解中含有任意常数  $c$ , 是因为  $t=0$  是原微分方程的奇点,在这点上  $x(t)$  的系数为 0,所以在奇点处破坏了解的唯一性.

### \* 2.4.2 具有特殊扰动函数的微分方程

对很多系统的研究,可以归结为对常系数线性微分方程

$$y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1 y'(t) + c_0 y(t) = f(t) \quad (2.28)$$

的解的研究.其中  $f(t)$  称为系统的扰动函数,这个名称源于力学上的外力  $F(t)$ , 它使自然的运动受到了干扰.在其它领域中,人们把  $f(t)$  想象为输入系统中的某种函数,而随后就从系统中输出了  $y(t)$ .于是,  $f(t)$  就成为了输入

$n$  阶第一类贝塞尔函数定义为

$$J_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} m! (n+m+1)!} t^{n+2m} \quad (n=0).$$

函数,称为激励. $y(t)$ 成了输出函数,称为响应.

### 1.传递因子

对代表着某系统的方程(2.28),我们有

**定理 2.7** 若系统的初值为零(即  $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ ),那么系统的输入函数,输出函数之间具有关系

$$y(t) = q(t) * f(t), \quad (2.29)$$

其中  $q(t)$  称为脉冲响应函数.

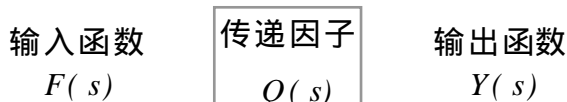
证明从略.

这是线性系统理论中最基本的结论之一.在此定理下,对像函数方程

$$Y(s) = Q(s) F(s), \quad (2.30)$$

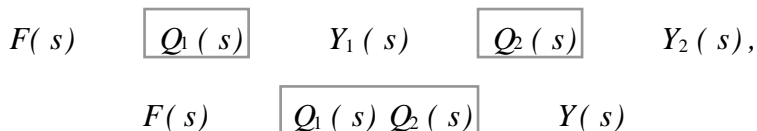
我们也称  $F(s)$  为输入函数,  $Y(s)$  为输出函数,因子  $Q(s)$  给出了  $Y(s)$  和  $F(s)$  间的联系,称为传递因子.它表达了系统本身的特性,而与输入函数及系统的初始状态无关.当  $f(t) = \delta(t)$  时,  $Y(s) = Q(s)$ , 从而  $y(t) = q(t)$ , 这就是  $q(t)$  称为脉冲响应函数的原因.

关系(2.30)可由下列框图来表示



在已知输入函数,输出函数的情况下,我们可以求出传递因子.

当有多个系统依次串联或依别的什么方式联接着而使得一个系统的输出函数成为另一个系统的输入函数时,框图就显得特别实用.例如由下图



给出的接法表示:

$$Y_1(s) = Q_1(s) F(s), \quad Y_2(s) = Q_2(s) Y_1(s),$$

因而

$$Y_2(s) = Q_1(s) Q_2(s) F(s).$$

这表明两个串联的系统等价于一个以  $Q_1(s) Q_2(s)$  为传递因子的单独系统.

另一方面,我们从框图上一目了然地可以看到情况——反向联接

$$F(s) = Y_2(s) Q_1^{-1}(s) Q_2^{-1}(s).$$

### 2.具有特殊扰动函数的微分方程的解

下面我们对某些物理学和工程上都很重要的函数  $f(t)$ , 给出其对应的输出函数  $y(t)$ .

$$(1) f(t) = u(t)$$

此时

$$Y(s) = \frac{1}{s} Q(s),$$

$$y(t) = L^{-1} \frac{1}{s} Q(s) .$$

(2)  $f(t) = \sin t$

用复振动  $f^*(t) = e^{it}$ , 替代实振动  $f(t) = \sin t$ , 因为对指数的演算较简单, 如要得到对应于实振动  $\cos t$  或  $\sin t$  的输出函数, 只要将最后结果分成实部和虚部就行了. 此时

$$Y(s) = \frac{1}{s - i} Q(s),$$

$$y(t) = L^{-1} \frac{1}{s - i} Q(s) ,$$

对应于  $f(t)$  的输出函数

$$y(t) = \operatorname{Im} L^{-1} \frac{1}{s - i} Q(s) .$$

(3)  $f(t) = (t)$

由前面的叙述可知

$$Y(s) = Q(s),$$

$$y(t) = q(t) .$$

## \* 2.5 梅林变换和 $z$ 变换

关于拉普拉斯变换, 我们也可像傅里叶变换那样, 定义其有限拉氏变换, 离散拉氏变换, 从实际应用角度考虑, 在此我们介绍两种由拉普拉斯变换导出的常用积分变换.

### 2.5.1 梅林变换

#### 1. 梅林变换的定义

定义 2.4 广义积分

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx$$

称为梅林变换, 记作  $F_M(s)$ , 即

$$F_M(s) = \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx . \quad (2.31)$$

用符号  $MLT$  表达, 即

$$MLT[f(x)] = F_M(s) .$$

$f(x)$  的梅林逆变换由下式给出

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i}^{+\infty+i} F_M(s) x^{-s} ds, \quad (x \text{ 为 } s \text{ 的实部}) \quad (2.32)$$

若令  $x = e^{-t}$ , 则

$$x^{s-1} = e^{-t(s-1)}, \quad dx = -e^{-t} dt.$$

从而

$$F_M(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}) e^{-st} dt. \quad (2.33)$$

式(2.33)表达的是  $t$  的函数的双边拉普拉斯变换, 它和  $x$  的函数的梅林变换是一样的. 当我们把时间  $t$  的函数另行看作  $e^{-t}$  的函数时, 我们就把所有正的时间变化范围压缩到  $e^{-t}$  在 1 到 0 之间的变化范围.

例 由定义 2.4 知

当  $f(x) = (x-a)$  时,

$$\begin{aligned} F_M(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (x-a) x^{s-1} dx \\ &= a^{s-1}. \end{aligned}$$

当  $f(x) = u(x-a)$  时,

$$\begin{aligned} F_M(s) &= \int_a^{+\infty} x^{s-1} dx \\ &= -\frac{a^s}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) < 0). \end{aligned}$$

当  $f(x) = e^{-ax}$  时,

$$\begin{aligned} F_M(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} x^{s-1} dx \\ &= a^{-s} \Gamma(s) \quad (\operatorname{Re}(a) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned}$$

## 2. 梅林变换的性质

### (1) 线性性质

$$f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow{MLT} F_{1M}(s) + F_{2M}(s),$$

其中  $c$  为任意常数.

### (2) 相似性质

$$\begin{aligned} f(ax) &\xrightarrow{MLT} a^{-s} F_M(s) \quad (a > 0); \\ f(x^a) &\xrightarrow{MLT} a^{-1} F_M\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0). \end{aligned}$$

### (3) 位移性质



$$x^a f(x) \xrightarrow{MLT} F_M(s+a).$$

(4) 微分性质

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{MLT} (-1)^n (s-n)\dots(s-1) F_M(s-n).$$

(5) 积分性质

$$\int_0^+ f\left(\frac{x}{u}\right) g(u) du \xrightarrow{MLT} F_M(s) G_M(s).$$

关于这些性质的证明读者可根据定义自行完成. 由于双边拉氏变换我们未曾作过介绍, 而拉氏变换又与傅氏变换紧密相连. 因此, 读者可借助于傅氏变换理解这些性质.

例 因为

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad e^{-ax} \xrightarrow{MLT} a^{-s} \quad (\operatorname{Re}(a) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0),$$

所以, 由性质(1)

$$\begin{aligned} \sin x &\xrightarrow{MLT} \frac{1}{2i} (-i)^{-s} - (i)^{(-s)} \quad (s) \\ &= \frac{1}{2i} (i)^s - (i)^{-s} \quad (s) \\ &= \frac{1}{2i} e^{\frac{1}{2}is} - e^{-\frac{1}{2}is} \quad (s) \\ &= (s) \sin \frac{1}{2}s \quad (|\operatorname{Re}(s)| < 1), \end{aligned}$$

由性质(2)

$$\sin kx \xrightarrow{MLT} k^{-s} \quad (s) \sin \frac{1}{2}s \quad (k > 0, |\operatorname{Re}(s)| < 1).$$

由性质(3)

$$x^n \sin kx \xrightarrow{MLT} k^{-(s+n)} \quad (s+n) \sin \frac{1}{2}(s+n) \quad (k > 0, |\operatorname{Re}(s)| < 1).$$

由性质(4)

$$\sin^{(n)} x \xrightarrow{MLT} (-1)^n (s-n)\dots(s-1) (s-n) \sin \frac{1}{2}(s-n) \quad (|\operatorname{Re}(s)| < 1).$$

## 2.5.2 z 变换

### 1. z 变换的定义

定义 2.5 离散的函数序列  $f(n) (n=0, 1, 2, \dots)$  的  $z$  变换  $F(z)$  由下式给出

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, \quad (2.34)$$

其中  $z$  是复变量.

用符号  $z$  表达, 即

$$F(z) = z[f(n)].$$

$f(n)$  的  $z$  变换的逆变换由下式给出

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad (2.35)$$

其中  $C$  为一环绕原点并完全位于  $F(z)$  收敛域内的逆时针方向的闭曲线.

公式(2.35)由式(2.34)两边同乘以  $z^{k-1}$ , 再积分得到.

例 由定义 2.5 有

当  $f(n) = \delta(n)$  时,

$$\begin{aligned} z[\delta(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} \\ &= [1 \times z^{-n}]_{n=0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

当  $f(n) = u(n)$  时,

$$\begin{aligned} z[u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1). \end{aligned}$$

当  $f(n) = a^n$  ( $a \neq 0$ ) 时,

$$\begin{aligned} z[a^n] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|). \end{aligned}$$

当  $f(n) = n$  时,

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} -n z^{-n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -z \frac{1}{z-1} \\
 &= \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1).
 \end{aligned}$$

## 2. z 变换的性质

### (1) 线性性质

$$z[f_1(n) + f_2(n)] = F_1(z) + F_2(z),$$

其中  $c_1, c_2$  为任意常数.

### (2) 相似性质

$$z[a^{-n}f(n)] = F(az) \quad (a > 0).$$

### (3) 延点性质

$$z[f(n-a)] = z^{-a}F(z) \quad (a \geq 0).$$

### (4) 微分性质

$$z[nf(n)] = zF'(z).$$

$$z[(1-n)f(n-1)] = F(z).$$

### (5) 卷积与卷积定理

**定义 2.6** 两个离散序列  $f_1(n), f_2(n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$  的卷积定义为

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{k=0}^n f_1(k) f_2(n-k).$$

**定理 2.8 (卷积定理)**

$$z[f_1(n) * f_2(n)] = F_1(z) F_2(z).$$

以上性质的证明均来自于定义, 非常简单, 限于篇幅, 请读者自行证之.

**例** 求齐次方程

$$f(n+2) + 3f(n+1) + 2f(n) = 0$$

当  $f(0)=0, f(1)=1$  时的解.

**解** 设  $z[f(n)] = F(z)$ , 对方程两边取  $z$  变换, 得

$$z^2 F(z) - z + 3zF(z) + 2F(z) = 0,$$

即

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} \quad (|z| > 2).$$

由上例知,  $F(z)$  的逆变换为

$$f(n) = (-1)^n - (-2)^n,$$

即为所求齐次方程的解.

最后我们要说的是: 如果在双边拉普拉斯积分

$$+ \int_0^{\infty} f(t) e^{st} dt$$

中, 令  $x = e^{-t}$  就导出了梅林变换, 而令  $z = e^{-s}$  就导出了  $z$  变换. 下面把这三种变换和它们的逆变换一并列出供参考比较:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{+i} F(s) e^{st} ds;$$

$$F_M(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i}^{+i} F_M(s) x^{-s} ds;$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, \quad f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz.$$

## 第2章习题

2.1.1 由定义分别直接计算下列各函数的拉氏变换:

(a)  $f(t) = \cos t (t) - \sin tu(t)$ .

(b)  $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < 3; \\ 0, & t = 0, \text{ 或 } t > 3. \end{cases}$

(c)  $f(t) = \begin{cases} -1, & 2 < t < 4; \\ 0, & t < 2 \text{ 或 } t > 4. \end{cases}$

2.2.1 利用留数, 求下列函数的拉氏逆变换:

(a)  $\frac{1}{s^3(s-a)}$ ; (b)  $\frac{s+c}{(s+a)(s+b)^2}$ ;

(c)  $\frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$ .

2.3.1 利用拉氏变换的性质及拉氏变换表求下列函数的拉氏变换:

(a)  $\cos t \cos t$ ; (b)  $u(t-1) - u(t-2)$ ;

(c)  $3^3 t + e^{2t}$ ; (d)  $e^{2t} + 5 (t)$ .

2.3.2 设  $L[f(t)] = F(s)$ , 证明:

(a)  $L^{-1}[F(bs)] = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) \quad (b > 0)$ ;

(b)  $L[f(at-b)u(at-b)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s} \quad (a > 0, b > 0)$ ,

并由此性质计算  $L[\sin(t-\tau)u(t-\tau)] \quad (\tau > 0, \tau < 0)$ .

2.3.3 求下列函数的拉氏变换:

(a)  $\sin(t-2)$ ; (b)  $\sin(t-2)u(t-2)$ ;

(c)  $\sin tu(t-2)$ ; (d)  $e^{2t}u(t-2)$ ;

$$(e) (t-1)[u(t-1) - u(t-2)].$$

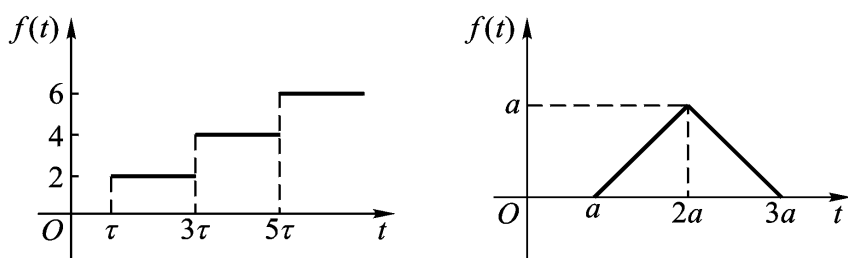
2.3.4 利用延迟性质, 求下列函数的拉氏逆变换:

$$(a) \frac{e^{-5s+1}}{s};$$

$$(b) \frac{e^{-2s}}{s^2 - 4};$$

$$(c) \frac{2s^2 e^{-s} - (s+1)e^{-2s}}{s^3}.$$

2.3.5 用单位阶跃函数把下列各图所示的函数表示出来, 并求其拉氏变换.



第 2.3.5 题

2.3.6 利用拉氏变换的性质, 求下列函数的拉氏变换:

$$(a) (t-1)^2 e^t;$$

$$(b) e^{-(t+\pi)} \cos t;$$

$$(c) e^{-\frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right) (a > 0);$$

$$(d) t e^{-at} \sin t;$$

$$(e) \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t};$$

$$(f) \frac{1 - \cos t}{t^2};$$

$$(g) \frac{e^{3t}}{t};$$

$$(h) u(1 - e^{-t});$$

$$(i) \frac{d^2}{dt^2} (e^{-t} \sin t);$$

$$(j) t \int_0^t e^{-3t} \sin 2t dt;$$

$$(k) \int_0^t t e^{-3t} \sin 2t dt;$$

$$(l) \int_0^t \frac{e^t - \cos 2t}{t} dt.$$

2.3.7 计算下列积分:

$$(a) \int_0^+ e^{-3t} \cos 2t dt;$$

$$(b) \int_0^+ t e^{-2t} dt$$

$$(c) \int_0^+ \frac{e^{-2t} \operatorname{sh} t \sin t}{t} dt;$$

$$(d) \int_0^+ \frac{e^{-t} \sin^2 t}{t} dt;$$

$$(e) \int_0^+ t^3 e^{-t} \sin t dt;$$

$$(f) \int_0^+ \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

2.3.8 利用拉氏变换的性质, 求下列函数的拉氏逆变换:

$$(a) \frac{2s+3}{s^2+9};$$

$$(b) \frac{1}{(s+2)^4};$$

$$(c) \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} (a^2 \neq b^2);$$

$$(d) \frac{s+2}{(s^2+4s+5)^2};$$

$$(e) \frac{7}{s+3};$$

$$(f) \frac{s - se^{-s}}{s^2 + \frac{1}{2}}.$$

2.3.9 求下列各函数的初值和终值;

$$(a) \frac{s+6}{(s+2)(s+5)};$$

$$(b) \frac{10(s+2)}{s(s+5)};$$

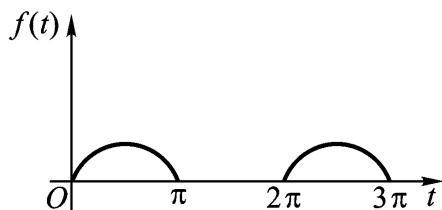
$$(c) \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)};$$

$$(d) \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}.$$

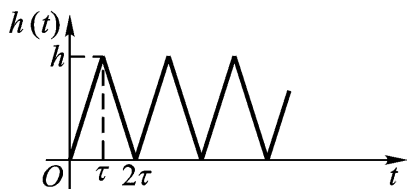
2.3.10 求下列周期函数的拉氏变换:

(a) 周期为 2 的半波整流正弦波函数;

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 2k \leq t < (2k+1); \\ 0, & (2k+1) \leq t < (2k+2), \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$



(b) 周期为 2, 齿高为 h 的三角冲击波函数 h(t).



2.3.11 求下列函数的拉氏逆变换:

$$(a) \frac{s}{s+2};$$

$$(b) \frac{1}{s(s^2 - a^2)};$$

$$(c) \frac{s^2 + 4s + 4}{(s^2 + 4s + 13)^2};$$

$$(d) \frac{s}{s^4 + 5s^2 + 4}.$$

2.3.12 求下列函数的卷积:

$$(a) e^{at} * (1 - at);$$

$$(b) t^m * t^n \quad (m, n \text{ 为整数});$$

$$(c) \sin t * \cos t;$$

$$(d) t * \operatorname{sh} t;$$

$$(e) u(t-a) * f(t);$$

$$(f) (t-a) * f(t).$$

2.3.13 利用卷积定理, 求下列各函数的拉氏逆变换:

$$(a) \frac{a}{(a^2 + s^2)s};$$

$$(b) \frac{s}{(s-a)^2(s-b)};$$

$$(c) \frac{1}{(s^2 + a^2)^3}.$$

2.3.14 利用卷积定理, 证明:

$$(a) \quad L \int_0^t f(t) dt = \frac{F(s)}{s};$$

$$(b) \quad L^{-1} \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{t}{2a} \sin at.$$

2.4.1 求下列常微分方程的解:

$$(a) \quad y' - y = e^{2t} + t, \quad y(0) = 0;$$

$$(b) \quad y' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2;$$

$$(c) \quad y'' + 3y' + 2y = u(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$(d) \quad y'' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

$$(e) \quad y'' + 3y' + 3y + y = 6e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

$$(f) \quad y^{(4)} + 2y'' - 2y' - y = (t),$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0;$$

$$(g) \quad y^{(4)} + 2y'' + y = t \cos t,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = \frac{1}{4}.$$

2.4.2 求下列常微分方程组的解:

$$(a) \quad x'' + 2x' + b \int_0^t y dt = -2u(t),$$

$$x' + y + y = 0,$$

$$x(0) = -5, \quad y(0) = 6;$$

$$x'' - x - 2y = e^t,$$

$$(b) \quad x'' - y - 2y = t^2,$$

$$x(0) = -\frac{3}{2}, \quad x'(0) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{2};$$

$$(2x'' - x' + 9x) - (y' + y + 3y) = 0,$$

$$(c) \quad (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0,$$

$$x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$x'' - x + y + z = 0,$$

$$(d) \quad x' + y'' - y + z = 0,$$

$$x + y + z'' - z = 0,$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = z(0) = x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.$$

2.4.3 解下列微分积分方程:

$$(a) \quad y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = e^{-t};$$

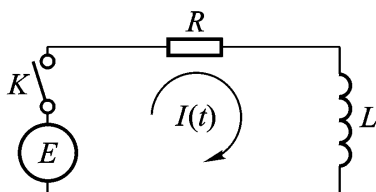
$$(b) \quad y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0;$$

$$(c) \quad y(t) = at + \int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$(d) \quad 1 - 2\sin t - y(t) - \int_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau) d\tau = 0.$$

2.4.4 设在原点处质量为  $m$  的一质点, 在  $t = 0$  时在  $x$  方向上受到冲击力  $k(t)$  的作用, 其中  $k$  为常数, 假定质点的初速度为零, 求其运动规律.

2.4.5 设有如图所示的  $RL$  串联电路, 在  $t = t_0$  时接入直流电源  $E$ , 求电路中的电流  $I(t)$ .



第 2.4.5 题

2.4.6 利用拉普拉斯变换求解下列边值问题.

$$y'' - y = 0,$$

$$(a) \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1;$$

$$x''(t) + x(t) = 10\sin 2t,$$

$$(b) \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

\* 2.4.7 求变系数微分方程:  $ty' + 2(t-1)y + (t-2) = 0$ , 满足初始条件  $y(0) = 0$  的解.

\* 2.4.8 某系统的传递函数  $G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$ . 求当输入函数  $f(t) = A\sin t$  时系统的输出函数  $y(t)$ .



# 数 学 实 验

## 实验一: Matlab 软件的应用

### 1.微分的计算

例 1 设  $f(z) = \frac{e^z}{(1+z)\sin z}$ , 求  $f'(z)$

解 在 Matlab 命令窗口中输入

```
syms z % 定义符号变量 z
```

```
f = (exp(z)/ ((1+z) * sin(z))); % 定义函数
```

```
diff(f)
```

结果为

```
ans =
```

```
exp(z)/ (1+z)/ sin(z) - exp(z)/ (1+z)^2/ sin(z) -  
exp(z)/ (1+z)/ sin(z)^2 * cos(z)
```

用 pretty 化简得:

$$\frac{\exp(z)}{(1+z)\sin(z)} - \frac{\exp(z)}{(1+z)^2\sin(z)} - \frac{\exp(z)\cos(z)}{(1+z)\sin(z)^2}$$

### 2.积分的计算

例 2 计算积分  $\int_a^b \frac{3z+2}{z-1} dz$

解 在 Matlab 命令窗口中输入

```
syms z a b
```

```
int((3 * z + 2)/(z - 1), z, a, b)
```

结果为

```
ans =
```

```
3 * b + 5 * log(b - 1) - 3 * a - 5 * log(a - 1) .
```

### 3.函数的泰勒(Taylor)级数展开

例 3 将  $f(z) = \operatorname{tg}(z)$  在  $z_0 = \frac{\pi}{4}$  处展开为泰勒级数 .

解 在 Matlab 命令窗口中输入

```
syms z
```

```
taylor(tan(z), pi/4)
```

结果为

ans =

$$1 + 2 * z - 1/2 * \pi + 2 * (z - 1/4 * \pi)^2 + 8/3 * (z - 1/4 * \pi)^3 + 10/3 * (z - 1/4 * \pi)^4 + 64/15 * (z - 1/4 * \pi)^5 .$$

#### 4. 留数的计算

在 Matlab 中, 留数的计算可由函数 residue 实现 .

格式为:  $[r, p, k] = \text{residue}(B, A)$ , B 和 A 分别为分子、分母按降幂排列的多项式系数矩阵 .

**例 4** 求函数  $f(z) = \frac{z}{(2z+1)(z-2)}$  在奇点处的留数 .

**解** 在 Matlab 命令窗口中输入

```
[r,p,k] = residue([1,0],[2,-3,-2])
```

结果为

r =

0.4000

0.1000

p =

2.0000

- 0.5000

k

[ ]

所以  $\text{Res}[f(z), 2] = 0.4$ ,  $\text{Res}[f(z), -0.5] = 0.1$  .

#### 5. 映射

**例 5** 求将单位圆  $|z| = 1$  映照成上半平面  $\text{Im}(w) \geq 0$  的分式线性函数

$$w = \frac{az + b}{cz + d} .$$

**解** 在圆周上任取三点  $z_1, z_2, z_3$ , 在  $w$  平面的实轴上取三点  $w_1, w_2,$

$w_3$  ( $w_3 = \infty$ ) 分别与  $z_1, z_2, z_3$  对应 . 由公式  $\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$  . 化简

得:  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ , 其中  $A = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ ,  $a = Aw_1 - w_2$ ,  $b = z_1 w_2 - Aw_1 z_2$ ,  $c = A - 1$ ,  $d = z_1 - Az_2$  .

取  $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = 1$ , 及  $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$  进行计算 .

在 Matlab 命令窗口中输入

```
syms z1 z2 z3 w1 w2 w z
```

```
z1 = i; z2 = -1; z3 = 1; w1 = 0; w2 = 1; w3 = inf;
```

```
A = (z3 - z1)/(z3 - z2)
```

```

A =
    0.5000 - 0.5000i
a = A * w1 - w2
a =
    - 1
b = z1 * w2 - A * w1 * z2
b =
    0 + 1.0000i
c = A - 1
c
    - 0.5000 - 0.5000i
d = z1 - A * z2
d =
    0.5000 + 0.5000i
w = (a * z + b) / (c * z + d)
w =
    (- z + i) / ((- 1/ 2 - 1/ 2 * i) * z + 1/ 2 + 1/ 2 * i)
z = 0;
w =
    1.0000 + 1.0000i .

```

## 实验二 快速傅立叶变换、拉普拉斯逆变换的计算程序

### 1. 快速傅里叶变换(FFT)的计算

#### (1) 实验目的 .

利用快速傅里叶变换 *FFT* 算法计算离散傅里叶变换 *DFT* .

#### (2) 算法概要

当抽样数  $N = 2^r$  时, *FFT* 算法就是将  $N \times N$  矩阵因子分解为  $r$  个  $N \times N$  矩阵的乘积, 然后逐次运算, 最后将分解后所得变换的系数矩阵进行整序 .

#### (3) 程序框图

开始

nu = 4, 为蝶形运算层次数

n2, 为蝶形运算两项距离

进行 nu 层蝶形运算  
k 为蝶形运算前一项下标  
kn2 为蝶形运算后一项下标

将乱序序列整序

输出 FFT 结果

结 束

#### (4) 变量说明

xreal(n) 进行 DFT 的函数的实部, 结束后为变换的实部 .

ximag(n) 进行 DFT 的函数的虚部, 结束后为变换的虚部 .

n 样点数

nu  $n = 2^{nu}$

ibitr(j, nu) 是一个用于位序颠倒的专用函数程序

#### (5) 程序用法

本程序是对某一时间函数的抽样进行变换, 仅输入实部, 虚部由程序运行时设置为零. 若对某复变函数进行变换, 可输入样点值的虚部和实部 .

#### (6) 实验程序

```
#include < math .h >
#include < stdio .h >
#include < stdlib .h >
main()
{
    float xreal[16] = {2.2, 4.5, 6.7, 8.5, 10.2, 12.3, 14.5, 16.2, 19.3, 21.2, 25.2, 29.4,
                      36.4, 39.2, 45.2, 50.1};
    float ximag[16] = {0, }, treal, timag, arg, c, s;
    int ibitr(int, int);
    int n = 16, nu = 4;
    int p, n2, nu1, l, i, j, k, kn2;
    n2 = 2;
    nu1 = nu;
    for(l = 0; l < nu; l++)
    {
        nu1 = nu1 - 1;
```

```

n2 = n2/ 2;
k = 0;
while( k + n2 < n)
{
for( i = 0; i < n2; i + + )
{
j = k > > nu1;
p = ibitr( j, nu );
arg = 6.28315 * p/ n;
c = cos( arg );
s = sin( arg );
kn2 = k + n2;
trear = xreal[ kn2 ] * c - ximag[ kn2 ] * s;
timag = ximag[ kn2 ] * c + xreal[ kn2 ] * s;
xreal[ kn2 ] = xreal[ k ] - trear;
ximag[ kn2 ] = ximag[ k ] - timag;
xreal[ k ] = xreal[ k ] + trear;
ximag[ k ] = ximag[ k ] + timag;
k = k + 1;
}
k = k + n2;
}
}

for( k = 0; k < n; k + + )
{
i = ibitr( k, nu );
if( i > k )
{
trear = xreal[ k ];
timag = ximag[ k ];
xreal[ k ] = xreal[ i ];
ximag[ k ] = ximag[ i ];
xreal[ i ] = trear;
ximag[ i ] = timag;
}
}

printf( \ n xreal = );
for( i = 0; i < n; i + + )
{
printf( % 7.1f , xreal[ i ] );
if( i % 8 == 0 )
printf( \ n );
}

```

```

    }
    printf( \ n ximag = );
    for(i = 0; i < n; i++)
    {
        printf( %7.1f , ximag[i]);
        if(i % 8 == 0)
            printf( \ n );
    }
}

int ibitr(int j, int nu)
{
    int b, j1, i, j2;
    j1 = j;
    b = 0;
    for(i = 1; i <= nu; i++)
    {
        j2 = j1 / 2;
        b = b * 2 + (j1 - 2 * j2);
        j1 = j2;
    }
    return(b);
}

```

### FFT 计算结果

xreal = 341.1

```

    9.7    - 23.3    - 24.7    - 23.5    - 26.8    - 26.9
- 26.7    - 21.7
    - 26.7    - 26.9    - 26.8    - 23.5    - 24.7    - 23.3    9.7
ximag = 0.0
    - 124.5    - 66.1    - 37.0    - 27.0    - 19.9    - 10.5    - 2.5    0.0
    2.5    10.5    19.9    27.0    37.0    66.1    124.5

```

## 2 拉普拉斯逆变换的计算(求部分分式展开的系数)

### (1) 实验目的

本程序是一个用部分分式法求拉氏逆变换时,求极点和部分分式展开系数的计算机程序.

### (2) 方法

该程序适用于  $F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$  的有理真分式,且我们仅限于讨论一阶、二阶

极点的部分分式展开系数的计算.本程序用劈因子法求  $F(s)$  的零点和极点,用求导和递推的方法求部分分式展开系数.

### (3) 程序说明

求  $F(s)$  的零点,极点由函数 *root* 完成.极点的阶数由函数 *rep* 完成.求部分分式展开系数由函数 *rek* 完成.求部分分式展开系数由多项式求导、多项式求值及求各展开系数几部分组成.多项式求导由函数 *qd* 完成.用 *d1* 数组存放多项式  $B(s)$  的一阶导数的各项系数,用 *d2* 数组存放其二阶导数的各项系数,多项式求值由函数 *pol* 完成.

### (4) 程序用法

程序要求输入多项式  $A(s)$ 、 $B(s)$  的次数和系数.输入方法为先输入  $A(s)$  的次数,再由  $s$  零次、一次、二次等逐个输入其系数.每输入一个数字都回车确认.然后,重复以上过程输入  $B(s)$  的次数和系数.输入完成后回车即得输出结果.

### (5) 实验程序, 例题及其运行结果

#### 例题

$$(a) \frac{3 + s^2}{10 + 9s + 4s^2 + s^3} \quad (b) \frac{100 + 70s + 10s^2}{3s + 4s^2 + s^3}$$

$$(c) \frac{-1.5 + 2.5s + s^2}{2 + 5s + 4s^2 + s^3}$$

程序及运行结果如下:

```
#include < STDIO .H >
#include < CONIO .H >
struct cmplx/ * 复数创建 */
{
    float re;
    float im;
}
struct cmplx cmp(a,b)
float a,b;
{
    struct cmplx c;
    c.re = a;
    c.im = b;
    return(c);
}
struct cmplx add(a,b)/ * 复数加运算 */
struct cmplx a,b;
{
    struct cmplx c;
```

```
        c.re = a.re + b.re;
        c.im = a.im + b.im;
        return(c);
    }
struct cmplx sub(a,b)/ * 复数减运算 */
struct cmplx a,b;
{
    struct cmplx c;
    c.re = a.re - b.re;
    c.im = a.im - b.im;
    return(c);
}
struct cmplx mul(a,b)/ * 复数乘运算 */
struct cmplx a,b;
{
    struct cmplx c;
    c.re = a.re * b.re - a.im * b.im;
    c.im = a.re * b.im + a.im * b.re;
    return(c);
}
struct cmplx div(a,b)/ * 复数除运算 */
struct cmplx a,b;
{
    struct cmplx c;
    float d;
    d = b.re * b.re + b.im * b.im;
    c.re = (a.re * b.re + a.im * b.im) / d;
    c.im = (a.re * b.im - a.im * b.re) / d;
    return(c);
}
float absf(a)/ * 符点数求绝对值运算 */
float a;
{
    float b;
    if(a > 0.0) b = a;
    else b = -a;
    return(b);
}
float sqrtf(a)/ * 符点数求开方运算 */
float a;
{
    float b = 0.0, c = 0.0;
```



```

while((a - c) > 0.001)
{
    b = b + 0.01
    c = b * b;
}
return(b);
}

float dl[10], d2[10];
int d[10];    /* 是否有重根标志 */
float a[10], b[10]; /* 存放分子分母多项式 */
int, nn, mm;   /* 分子分母多项式系数 */
struct cmplx pa[10], pb[10]; /* 零点极点值 */
struct cmplx kk[10][2]; /* 系数值 */
int na, nb;    /* 分子分母多项式次数 */
void root(n, b, p) /* 计算零极点 */
int n;
float b[10];
struct cmplx p[10];
{
    float a[10], c[10], d[10], e[10];
    double iter, q1, q1a, q2a, g11, g22, g12, g21, det, dq1, dq2, disc, discr;
    int m, mp, i, mi1, mi2, mi, mm;
    m = n;
    mp = m + 1;
    iter = 0.0;
    for(i = 1; i <= mp; i++)
        a[i] = b[i];
loop20;
    if(abs(a[1]) > 0.000001) goto loop40;
    for(i = 1; i <= m; i++)
        a[i] = a[i + 1];
    p[m] = cmp(0.0, 0.0);
    m = m - 1;
    if(m == 0) return;
    mp = m + 1;
    goto loop20;
loop40:
    if(m < 2) goto loop160;
    else if (m == 2) goto loop150;
        else goto loop50;
loop50;
    iter = 0.0;

```

```
    q1 = a[1] / a[3];
    q2 = a[2] / a[3];
loop60:
    iter = iter + 1;
    c[mp] = a[mp];
    d[mp] = 0.0;
    e[mp] = 0.0;
    c[m] = a[m] - q2 * c[mp];
    d[m] = - c[mp];
    e[m] = 0.0;
if(m < 4) goto loop80;
mm = m - 3;
for(i = 1; i <= mm; i++)
{
    mi = m - i;
    mi1 = mi + 1;
    mi2 = mi + 2;
    c[mi] = a[mi] - q2 * c[mi1] - q1 * c[mi2];
    d[mi] = - c[mi] - q2 * d[mi1] - q1 * d[mi2];
    e[mi] = - c[mi2] - q2 * e[mi1] - q1 * e[mi2];
}
loop80:
    q1a = a[1] - q1 * c[3];
    q2a = a[2] - q1 * c[4] - q2 * c[3];
    g11 = - c[3] - q1 * d[4] - q2 * d[3];
    g12 = - c[4] - q1 * e[4] - q2 * e[3];
    g21 = - q1 * d[3];
    g22 = - c[3] - q1 * e[3];
    det = g11 * g22 - g12 * g21;
    dq1 = (- g11 * q1a + g21 * q2a) / det;
    dq2 = (g12 * q1a - g22 * q2a) / det;
    q1 = q1 + dq1;
    q2 = q2 + dq2;
    if(absf(dq2) < 0.0000001) goto loop100;
loop90:
    if(iter > 30) goto loop170;
    goto loop60;
loop100:
    if(absf(dq1) > 0.0000001) goto loop90;
loop110:
    disc = q2 * q2 - 4 * q1;
    if(disc < 0.0) goto loop120;
```

```

    discr = sqrtf(disc);
    p[m] = cmp(( - q2 + discr)/ 2, 0.0);
    p[m - 1] = cmp( - q2 - discr)/ 2, 0.0;
    m = m - 2;
    goto loop130;
loop120:
    discr = sqrtf( - disc);
    p[m] = cmp( - q2/ 2, discr/ 2);
    p[m - 1] = cmp( - q2/ 2, - discr/ 2);
    m = m - 2
loop130:
    if(m == 0) return;
    mp = m + 1;
    for(i = 1; i <= mp; i++)
        a[i] = c[i + 2];
    if(m < 2) goto loop160;
    else if(m == 2) goto loop150;
        else goto loop50;
loop150:
    q1 = a[m - 1] / a[m + 1];
    q2 = a[m] / a[m + 1];
    goto loop110;
loop160:
    p[1] = cmp( - a[1] / a[2], 0.0);
    return;
loop170:
    printf("无解! \n");
}
void qd(ab, nn) /* 对分母多项式求导 */
float ab[10];
int nn;
{
    int i, l;
    for(i = 1; i <= nn + 1; i++)
    {
        d1[i] = ab[i] * (i - 1);
        d2[i] = d1[i] * (i - 2);
    }
    for(i = 1; i <= nn; i++)
    {
        d1[i] = d1[i + 1];
        d2[i] = d2[i + 2];
    }
}

```

```

    }
}
void rep()/ * 比较重根 */

{
int i, j, l;
for(i = 1; i <= 10; i++)
d[i] = 1;
for(i = 1; i <= nb - 1; i++)
{
    for(j = i + 1; j < nb; j++)
    {
        if( absf(pb[i].re - pb[j].re) < 0.00001) &&
            (absf(pb[i].im - pb[j].im) < 0.00001))
        {
            d[i] = 2;
            nb = nb - 1;
            for(l = j; l <= nb; l++)
            {
                pb[l].re = pb[l + 1].re;
                pb[l].im = pb[l + 1].im;
            }
        }
    }
}

struct cmplx pol(e, c, i)/ * 求多项式值 */
struct cmplx e;
float c[10];
int i;
{
    struct cmplx al;
    int ie, l;
    struct cmplx temp;
    struct cmplx st;
    al = cmp(c[1], 0.0);
    temp = cmp(e.re, e.im);
    for(ie = 2; ie <= i; ie++)
    {
        st = mul(e, cmp(c[ie], 0.0));
        al = add(al, st);
        e = mul(e, temp);
    }
}

```

```

    }
    return(al);
}
void rek() /* 求部分分式展开式 */
{
    struct cmplx cn, dn, a1, a2, a3;
    int i, j, k;
    for(k = 1; k <= nb; k++)
    {
        a1 = pol(pb[k], a, nn);
        if(d[k] == 1)
        {
            a2 = pol(pb[k], d1, mm - 1);
            kk[k][1] = div(a1, a2);
        }
        else
        {
            a3 = pol(pb[k], d2, mm - 2);
            kk[k][1] = mul(cmp(2.0, 0.0), div(a1, a3));
            cn = cmp(0.0, 0.0);
            for(i = 1; i = nn - 1; i++)
            {
                cn = add(cn, div(cmp(1.0, 0.0),
                    sub(pb[k], pa[i]))));
            }
            dn = cmp(0.0, 0.0);
            for(j = 1; j <= nb; j++)
            if(j != k)
            dn = add(dn, div(cmp((float)d[j], 0.0), sub(pb[k], pb[j])));
            kk[k][2] = mul(kk[k][1], sub(cn, dn));
        }
    }
}

main()
{
    int i, j;
    scanf("%d", &na); /* 输入分子多项式次数 */
    for(i = 1; i <= na + 1; i++) /* 按升幂次序输入分子多项式系数 */
        scanf("%f", &a[i]);
    scanf("%d", &nb); /* 输入分母多项式次数 */
    for(i = 1; i <= nb + 1; i++) /* 按升幂次序输入分母多项式系数 */
        scanf("%f", &b[i]);
}

```

```

nn = na + 1;
mm = nb + 1;
qd(b,nb) ;/ * 对分母多项式求导 */
root(nb,b,pb) ;/ * 计算极点 */
root(na,a,pa) ;/ * 计算零点 */
rep() ;/ * 比较重根 */
rek() ;/ * 求部分分式展开式 */
for(i = 1 ; i <= nb ; i + + )
{
    id(d[i]) = 1)
    {
        printf( 一阶极点为 : pd[ % d ] = % 6.2f + j % 6.2f \ n , i , pb[i] .re , pb[i] .im ) ;
        printf( 系数为 : % 6.2f + j % 6.2f \ n , kk[i] [1] .re , kk[i] [1] .im ) ;
    }
else
{
    printf( 二阶极点为 : pb[ % d ] = % 6.2f + j % 6.2f \ n , i , pb[i] .re , pb[i] .im ) ;
    printf( 系数为 : % 6.2f + j % 6.2f \ n , kk[i] [1] .re , kk[i] [1] .im ) ;
    printf( 系数为 : % 6.2f + j % 6.2f \ n , kk[i] [2] .re , kk[i] [2] .im ) ;
}
}
}
}

```

输入文件 ST31 .DAT

```

2
3 0 1
3
1 0 9 4 1

```

输出文件 ST31 .OUT

```

一阶极点为 : pb[ 1 ] = - 2.00 + j0.00
    系数为          1.40 + j0.00
一阶极点为 : pb[ 2 ] = - 1.00 + j - 2.00
    系数为 :          - 0.20 + j0.40
一阶极点为 : pb[ 3 ] = - 1.00 + j2.00
    系数为 :          - 0.20 + j - 0.40

```

输入文件 ST32 .DAT

```

2
100 70 10
3
0 3 4 1

```

输出文件 ST32 .OUT

一阶极点为:  $pb[1] = -3.00 + j0.00$   
系数为  $-3.33 + j - 0.00$   
一阶极点为:  $pb[2] = -1.00 + j0.00$   
系数为:  $-20.00 + j0.00$   
一阶极点为:  $pb[3] = 0.00 + j0.00$   
系数为:  $33.33 + j0.00$

输入文件 ST33 .DAT

2  
- 1.5 2.5 1  
3  
2 5 4 1

输出文件 ST32 .OUT

一阶极点为:  $pb[1] = -2.00 + j0.00$   
系数为  $-2.50 + j - 0.00$   
二阶极点为:  $pb[2] = -1.00 + j0.00$   
一次项系数为:  $-3.00 + j - 0.00$   
一次项系数为:  $3.50 + j0.00$

# 附录 A 区域变换表

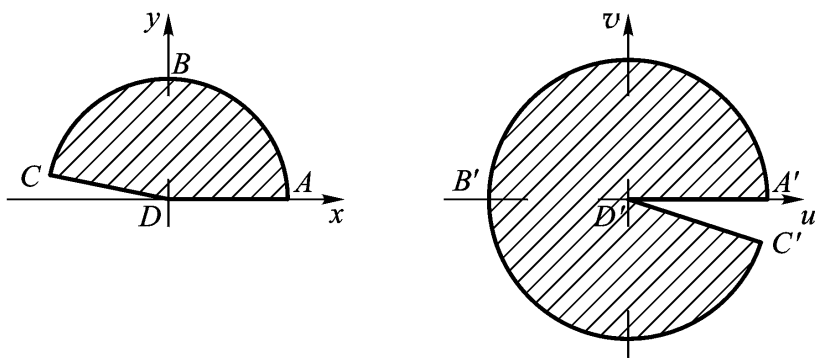


图 1 .  $w = z^2$

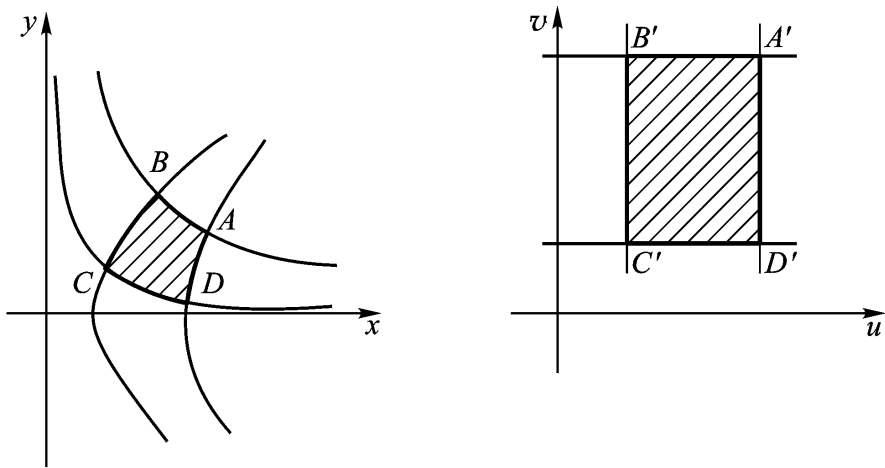


图 2 .  $w = z^2$

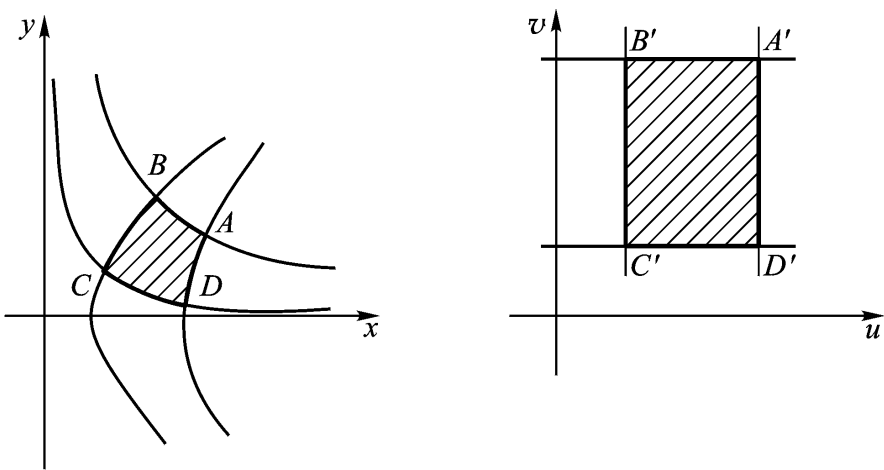
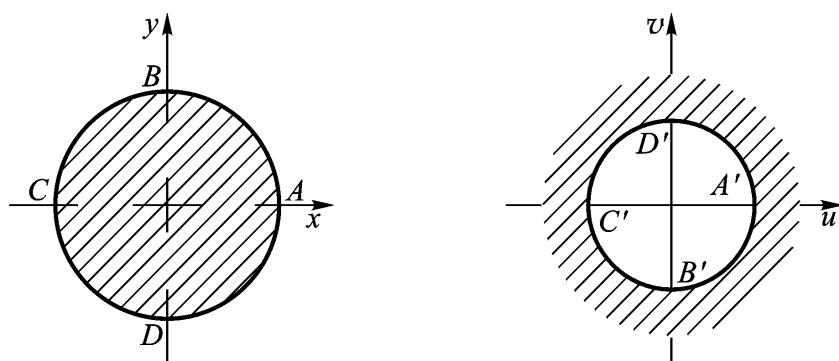
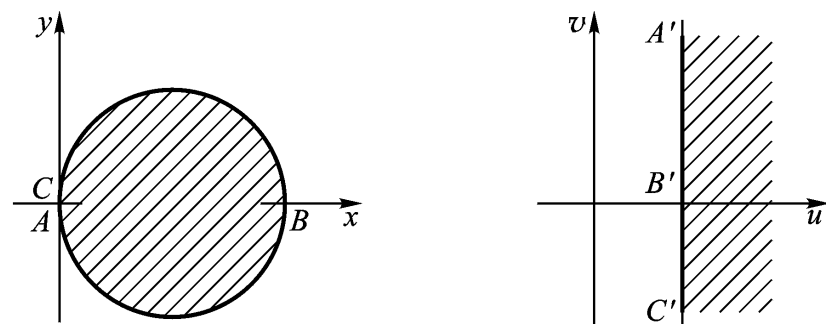
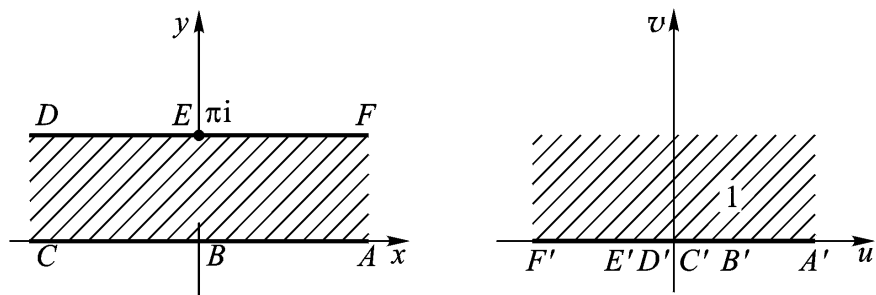
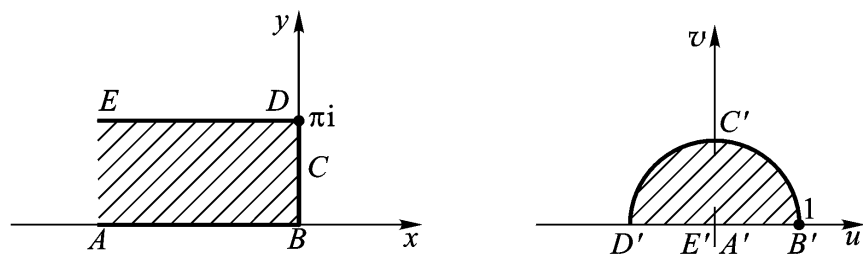
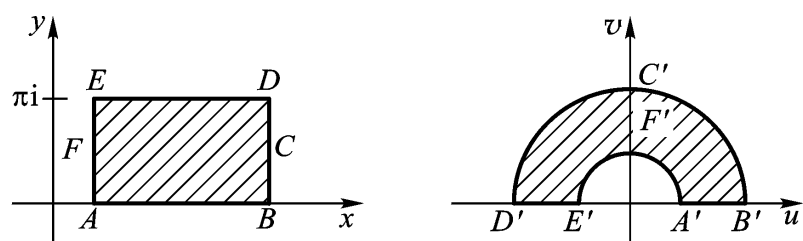


图 3 .  $w = z^2$  ;  $A B$  在  $^2 = - 4 c^2 ( u - c^2 )$  上



图 4 .  $w = \frac{1}{z}$ 图 5 .  $w = \frac{1}{z}$ 图 6 .  $w = \exp z$ 图 7 .  $w = \exp z$ 图 8 .  $w = \exp z$

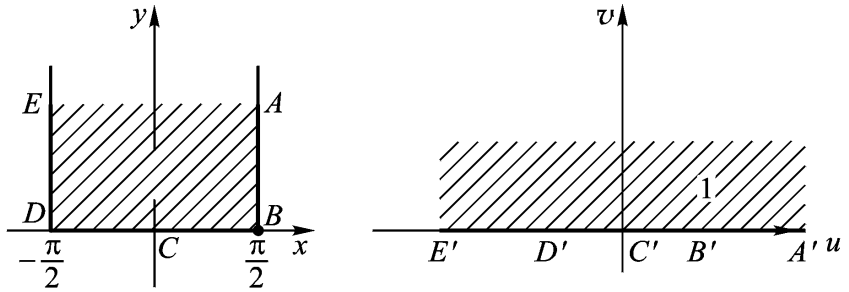


图 9 .  $w = \sin z$

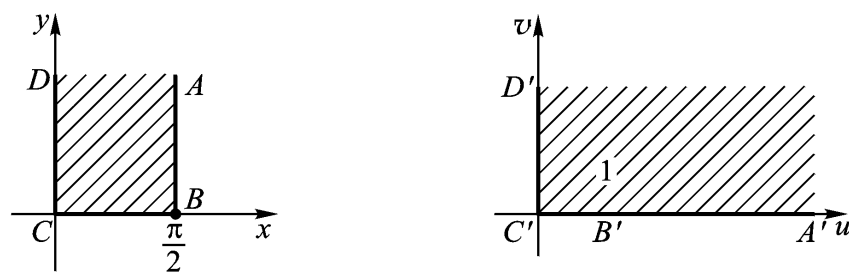


图 10 .  $w = \sin z$

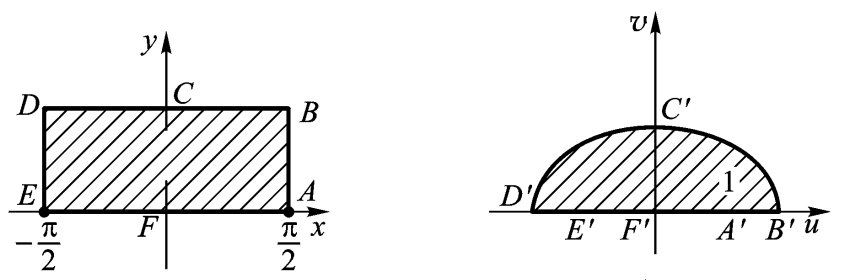


图 11 .  $w = \sin z$ ;  $BCD$  在  $y = b (b > 0)$  上,  $BCD$  在  $\frac{2}{\cos h^2 b} + \frac{2}{\sin h^2 b} = 1$  上

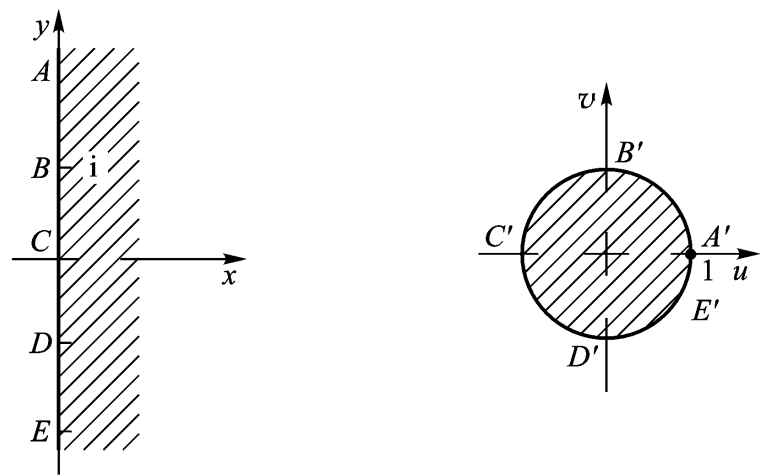


图 12 .  $w = \frac{z-1}{z+1}$

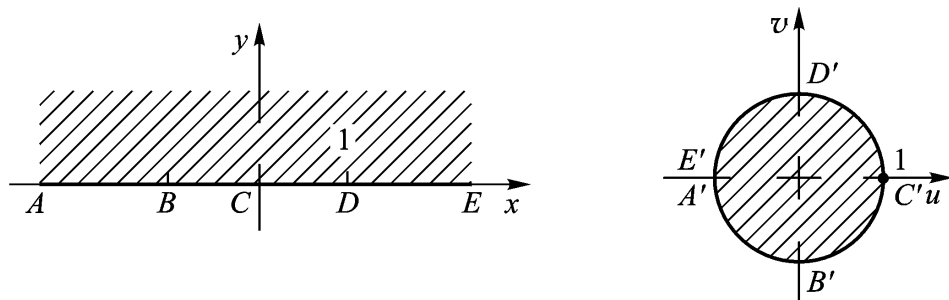
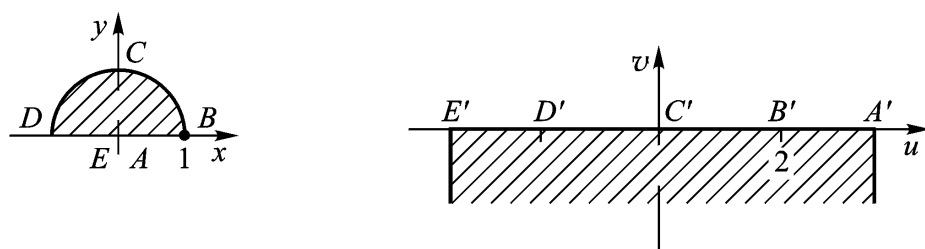
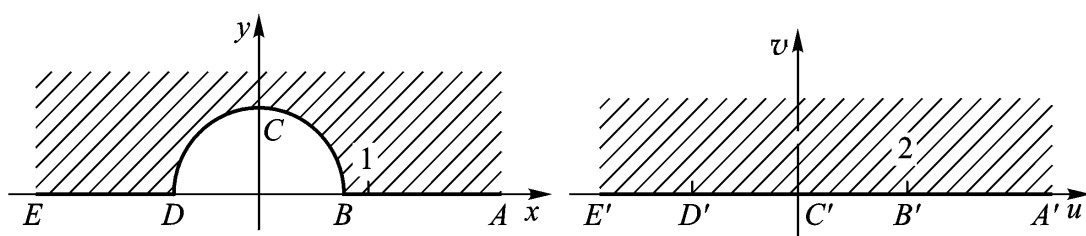
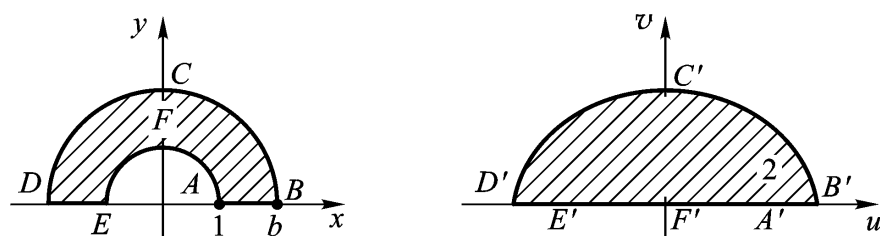
图 13 .  $w = \frac{i - z}{i + z}$ 图 14 .  $w = z + \frac{1}{z}$ 图 15 .  $w = z + \frac{1}{z}$ 图 16 .  $w = z + \frac{1}{z}$ ;  $B C D$  在  $\frac{2}{(b + 1/b)^2} + \frac{2}{(b - 1/b)^2} = 1$  上图 17 .  $w = \ln \frac{z - 1}{z + 1}$ ;  $z = -\coth \frac{w}{2}$

图 18 .  $w = \ln \frac{z-1}{z+1}$ ;  $ABC$  在  $x^2 + (y + \cot h)^2 = \csc^2 h$  ( $0 < h < \frac{\pi}{2}$ ) 上

图 19 .  $w = \frac{z-a}{az-1}$ ;  $a = \frac{1+x_1x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2)}{x_1+x_2}$

$R_0 = \frac{1-x_1x_2 + (1-x_1^2)(1-x_2^2)}{x_1-x_2}$  (当  $-1 < x_2 < x_1 < 1$  时  $a > 1$  且  $R_0 > 1$ )

图 20 .  $w = \frac{z-a}{az-1}$ ;  $a = \frac{1+x_1x_2 + (x_1^2-1)(x_2^2-1)}{x_1+x_2}$

$R_0 = \frac{x_1x_2-1 - (x_1^2-1)(x_2^2-1)}{x_1-x_2}$  (当  $1 < x_2 < x_1$  时  $x_2 < a < x_1$ ) 且  $0 < R_0 < 1$ )

附录 B 傅氏变换简表

	f( t )		F( )	
	函 数	图 象	频 谱	图 象
1	矩形单脉冲 $f( t ) = \begin{cases} E, &   t   \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$		$2 E \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega}$	
2	指数衰减函数 $f( t ) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$ ( $\lambda > 0$ )		$\frac{1}{\lambda + j\omega}$	
3	单位函数 $f( t ) = u( t )$		$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta( \omega )$	
4	三角形脉冲 $f( t ) = \begin{cases} \frac{2A}{\tau}(\frac{\tau}{2} + t), & -\frac{\tau}{2} \leq t < 0; \\ \frac{2A}{\tau}(\frac{\tau}{2} - t), & 0 \leq t < \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{4A}{\omega^2}(1 - \cos \frac{\omega \tau}{2})$	
5	钟形脉冲 $f( t ) = Ae^{-\lambda t^2}$ ( $\lambda > 0$ )		$\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} Ae^{-\frac{\omega^2}{4\lambda}}$	
6	傅里叶核 $f( t ) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$		$F( \omega ) = \begin{cases} 1, &   \omega   < \omega_0; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	

续前表

	$f(t)$		$F(\omega)$	
	函 数	图 象	频 谱	图 象
7	高斯分布函数 $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$		$e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}$	
8	矩形射频脉冲 $E \cos \omega_0 t,$ $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, &  t  \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$		$\frac{E}{2} \frac{\sin(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}}{(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}}{(\omega + \omega_0)\frac{T}{2}}$	
9	单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t)$		1	
10	周期性脉冲函数 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ ( $T$ 为脉冲函数的周期)		$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T})$	
11	$f(t) = \cos \omega_0 t$		$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
12	$f(t) = \sin \omega_0 t$		$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	同上图

续前表

	$f(t)$	$F(\omega)$
13	$u(t - c)$	$\frac{1}{j}e^{-j\omega c} + \delta(\omega)$
14	$u(t) \cdot t$	$-\frac{1}{2} + j\delta(\omega)$
15	$u(t) \cdot t^n$	$\frac{n!}{(j)^{n+1}} + j^n \delta^{(n)}(\omega)$
16	$u(t) \sin at$	$\frac{a}{a^2 - \omega^2} + \frac{1}{2j} [ \delta(\omega - a) - \delta(\omega + a) ]$
17	$u(t) \cos at$	$\frac{j}{a^2 - \omega^2} + \frac{1}{2} [ \delta(\omega - a) + \delta(\omega + a) ]$
18	$u(t)e^{iat}$	$\frac{1}{j(\omega - a)} + \delta(\omega - a)$
19	$u(t - c)e^{iat}$	$\frac{1}{j(\omega - a)}e^{-j(\omega - a)c} + \delta(\omega - a)$
20	$u(t)e^{iat}t^n$	$\frac{n!}{[j(\omega - a)]^{n+1}} + j^n \delta^{(n)}(\omega - a)$
21	$e^{at} \Big _t^{\infty}, \operatorname{Re}(a) < 0$	$\frac{-2a}{2 + a^2}$
22	$\delta(t - c)$	$e^{-j\omega c}$
23	$\delta(t)$	$1$
24	$\delta^{(n)}(t)$	$(j)^n$
25	$\delta^{(n)}(t - c)$	$(j)^n e^{-j\omega c}$
26	$1$	$2\pi \delta(\omega)$
27	$t$	$2\pi j \delta'(\omega)$
28	$t^n$	$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$
29	$e^{iat}$	$2\pi \delta(\omega - a)$
30	$t^n e^{iat}$	$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega - a)$
31	$\frac{1}{a^2 + t^2}, \operatorname{Re}(a) < 0$	$-\frac{1}{a}e^{at} \Big _t^{\infty}$
32	$\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}, \operatorname{Re}(a) < 0$	$\frac{j}{2a}e^{at} \Big _t^{\infty}$
33	$\frac{e^{ibt}}{a^2 + t^2}, \operatorname{Re}(a) < 0, b \text{ 为实数}$	$-\frac{1}{a}e^{at} \Big _t^{\infty} - b \Big _t^{\infty}$

续前表

	$f(t)$	$F(\omega)$
34	$\frac{\cos bt}{a^2 + t^2}, \operatorname{Re}(a) < 0, b \text{ 为实数}$	$-\frac{1}{2a} [e^{a -\omega-b } + e^{a -\omega+b }]$
35	$\frac{\sin bt}{a^2 + t^2}, \operatorname{Re}(a) < 0, b \text{ 为实数}$	$-\frac{1}{2ai} [e^{a -\omega-b } - e^{a -\omega+b }]$
36	$\frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh}^2 t}, -\infty < a < \infty$	$\frac{\sin a}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} + \cos a}$
37	$\frac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{ch}^2 t}, -\infty < a < \infty$	$2i \frac{\sin \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{a}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} + \cos a}$
38	$\frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{ch}^2 t}, -\infty < a < \infty$	$2 \frac{\cos \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{a}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} + \cos a}$
39	$\frac{1}{\operatorname{ch} at}$	$\frac{1}{a \operatorname{ch} \frac{a}{2}}$
40	$\sin at^2$	$\frac{1}{a} \cos \frac{\omega^2}{4a} + \frac{1}{4}$
41	$\cos at^2$	$\frac{1}{a} \cos \frac{\omega^2}{4a} - \frac{1}{4}$
42	$\frac{1}{t} \sin at$	$\begin{cases} \frac{1}{2}, &  \omega  < a \\ 0, &  \omega  > a \end{cases}$
43	$\frac{1}{t^2} \sin^2 at$	$\begin{cases} a - \frac{ \omega }{2}, &  \omega  < 2a \\ 0, &  \omega  > 2a \end{cases}$
44	$\frac{\sin at}{ t }$	$i \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{ \omega  + a} - \frac{1}{ \omega  - a} \right]$
45	$\frac{\cos at}{ t }$	$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{ \omega  + a} + \frac{1}{ \omega  - a} \right]$
46	$\frac{1}{ t }$	$\frac{2}{ \omega }$
47	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{i}$
48	$e^{-at^2}, \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
49	$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
50	$\frac{1}{ t }$	$\frac{2}{ \omega }$



附录 C 拉氏变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
3	$t^m (m > -1)$	$\frac{(m+1)}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at} (m > -1)$	$\frac{(m+1)}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\text{sh } at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\text{ch } at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11	$t \text{ sh } at$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
12	$t \text{ ch } at$	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$
13	$t^m \sin at (m > -1)$	$\frac{(m+1)}{2i(s^2+a^2)^{m+1}} \cdot [(s+ia)^{m+1} - (s-ia)^{m+1}]$
14	$t^m \cos at (m > -1)$	$\frac{(m+1)}{2(s^2+a^2)^{m+1}} \cdot [(s+ia)^{m+1} + (s-ia)^{m+1}]$
15	$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
16	$e^{-bt} \cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
17	$e^{-bt} \sin(at+c)$	$\frac{(s+b)\sin c + a\cos c}{(a+b)^2+a^2}$
18	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}$
19	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}$

续前表

	$f(t)$	$F(s)$
20	$\sin at \sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2 + (a+b)^2][s^2 + (a-b)^2]}$
21	$e^{at} - e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$
22	$ae^{at} - be^{bt}$	$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
23	$\frac{1}{a}\sin at - \frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2 - a^2}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
24	$\cos at - \cos bt$	$\frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
25	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$
26	$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$
27	$\frac{1}{a^4}(\cos at - 1) + \frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2 + a^2)}$
28	$\frac{1}{a^4}(\operatorname{ch} at - 1) - \frac{1}{2a^2}t^2$	$\frac{1}{s^3(s^2 - a^2)}$
29	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$
30	$\frac{1}{2a}(\sin at + at \cos at)$	$\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}$
31	$\frac{1}{a^4}(1 - \cos at) - \frac{1}{2a^3}t \sin at$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)^2}$
32	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
33	$t - 1 - \frac{a}{2}t^2 e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^3}$
34	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
35	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
36	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}$ $+ \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
37	$\frac{ae^{-at}}{(c-a)(a-b)} + \frac{be^{-bt}}{(a-b)(b-c)}$ $+ \frac{ce^{-ct}}{(b-c)(c-a)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
38	$\frac{a^2e^{-at}}{(c-a)(b-a)} + \frac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}$ $+ \frac{c^2e^{-ct}}{(b-c)(a-c)}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

续前表

	$f(t)$	$F(s)$
39	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}[1 - (a-b)t]}{(a-b)^2}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
40	$\frac{[a-b(a-b)t]e^{-bt} - ae^{-at}}{(a-b)^2}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
41	$e^{-at} - e^{\frac{at}{2}} \cos \frac{3at}{2} - 3\sin \frac{3at}{2}$	$\frac{3a^2}{s^3 + a^3}$
42	$\sin at \operatorname{ch} at - \cos at \operatorname{sh} at$	$\frac{4a^3}{s^4 + 4a^4}$
43	$\frac{1}{2a^2} \sin at \operatorname{sh} at$	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$
44	$\frac{1}{2a^3} (\operatorname{sh} at - \sin at)$	$\frac{1}{s^4 - a^4}$
45	$\frac{1}{2a^2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$	$\frac{s}{s^4 - a^4}$
46	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{s}$
47	$2 - \frac{t}{2}$	$\frac{1}{s-s}$
48	$-\frac{1}{t} e^{at} (1 + 2at)$	$\frac{s}{(s-a)s-a}$
49	$\frac{1}{2t^3} (e^{bt} - e^{at})$	$s-a-s-b$
50	$\frac{1}{t} \cos 2at$	$\frac{1}{s} e^{-\frac{a}{s}}$
51	$\frac{1}{t} \operatorname{ch} 2at$	$\frac{1}{s} e^{\frac{a}{s}}$
52	$\frac{1}{t} \sin 2at$	$\frac{1}{ss} e^{-\frac{a}{s}}$
53	$\frac{1}{t} \operatorname{sh} 2at$	$\frac{1}{ss} e^{\frac{a}{s}}$
54	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s-a}{s-b}$
55	$\frac{2}{t} \operatorname{sh} at$	$\ln \frac{s+a}{s-a} = 2\operatorname{Arth} \frac{a}{s}$
56	$\frac{2}{t} (1 - \cos at)$	$\ln \frac{s^2 + a^2}{s^2}$
57	$\frac{2}{t} (1 - \operatorname{ch} at)$	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2}$
58	$\frac{1}{t} \sin at$	$\arctan \frac{a}{s}$
59	$\frac{1}{t} (\operatorname{ch} at - \cos bt)$	$\ln \frac{s^2 + b^2}{s^2 - a^2}$

续前表

	$f(t)$	$F(s)$
60	$\frac{1}{t}\sin(2at)$	$\operatorname{erf}\frac{a}{s}$
61	$\frac{1}{t}e^{-2at}$	$\frac{1}{s}e^{\frac{a^2}{s^2}}\operatorname{erfc}\frac{a}{s}$
62	$\operatorname{erfc}\frac{a}{2t}$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a^2}{s}}$
63	$\operatorname{erf}\frac{t}{2a}$	$\frac{1}{s}e^{\frac{a^2s^2}{4}}\operatorname{erfc}(as)$
64	$\frac{1}{t}e^{-2at}$	$\frac{1}{s}e^{\frac{a^2}{s^2}}\operatorname{erfc}\frac{a}{s}$
65	$\frac{1}{(t+a)}$	$\frac{1}{s}e^{as}\operatorname{erfc}as$
66	$\frac{1}{a}\operatorname{erf}at$	$\frac{1}{s(s+a)}$
67	$\frac{1}{a}e^{at}\operatorname{erf}at$	$\frac{1}{s(s-a)}$
68	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
69	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
70	$t^m u(t) \quad (m > -1)$	$\frac{1}{s^{m+1}} \quad (m+1)$
71	$(t)$	1
72	$(^{(n)}(t))$	$s^n$
73	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{1}{s}$
74	$J_0(at)$	$\frac{1}{s^2+a^2}$
75	$I_0(at)$	$\frac{1}{s^2-a^2}$
76	$J_0(2at)$	$\frac{1}{s}e^{-\frac{a^2}{s}}$
77	$e^{-bt}I_0(at)$	$\frac{1}{(s+b)^2-a^2}$
78	$tJ_0(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$
79	$tI_0(at)$	$\frac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$
80	$J_0(a-t(t+2b))$	$\frac{1}{s^2+a^2}e^{b(s-\frac{s^2+a^2}{s})}$

式中  $a, b, c$  为不相等的常数 .

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ 称为误差函数}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \text{ 称为余误差函数 .}$$

$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ ,  $J_n$  称为第一类  $n$  阶贝塞尔 (Bessl) 函数,  $I_n$  称为第一类  $n$  阶变形的贝塞尔函数, 或称为虚宗量的贝塞尔函数 .

# 习题答案

## 第一篇

### 第 1 章

- 1.1.14 (a) 以  $\frac{i}{2}$  为圆心, 2 为半径的圆周 .  
(b) 以  $-i$  为圆心, 3 为半径的闭圆盘 .  
(c) 直线  $x = 2$  .
- 1.1.17 (a) 表示焦点为  $(0, \pm 4)$ , 长轴为 5, 短轴为 3 的椭圆 .  
(b) 、 象限角平分线 .
- 1.1.18 (a)  $2/3$ ; (b)  $-3/4$ ; (c) .
- 1.1.21 (a)  $n \operatorname{Arg} z_1$ ; (b)  $-\operatorname{Arg} z_1$  .
- 1.2.1 (a)  $2e^{(\frac{1}{4} + k)i}$  ( $k = 0, 1$ );  
(b)  $2e^{(-\frac{1}{6} + k)i}$  ( $k = 0, 1$ );  
(c)  $e^{\frac{2k+1}{3}i}$  ( $k = 0, 1, 2$ );  
(d)  $2e^{\frac{2k+1}{4}i}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ );  
(e)  $2e^{\frac{k}{3}i}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ );  
(f)  $2e^{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}k)i}$  ( $k = 0, 1, 2$ );
- 1.2.3 (b)  $z = -1 + e^{(\frac{1}{4} + k)i}$  ( $k = 0, 1$ ) .
- 1.3.1 (a) 有界闭区域, (b)、(c) 无界开区域, (e)、(f) 无界闭区域, (g) 有界开区域 .
- 1.4.1 (a)  $z = \pm i$ ; (b)  $z = 0$ ; (c)  $|z| = 1$ ; (d)  $\operatorname{Re}(z) = 0$  .
- 1.4.3  $f(z) = x^3 - 3xy^2 + x + 1 + i(y + 3x^2y - y^3)$  .
- 1.4.4  $f(z) = z^2 + 2iz$  .
- 1.5.2 (a)  $z = \ln 2 + (2k+1)i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
(b)  $z = \ln 2 + (\frac{1}{3} + 2k)i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );  
(c)  $z = \frac{1}{2} + ki$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) .
- 1.5.10  $z = i$  .
- 1.5.15 (a)  $e^{-8k} \cdot e^{2i \ln 2}$ ; (b)  $-e^{(2-6k)^2}$  .
- 1.5.24 (a)  $z = (2k + \frac{1}{2}) \pm 4i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$$(b) z = (2k + \frac{1}{2}) - i \ln(2 + 1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(c) z = 2k - i \ln(2 + 3) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$1.5.30 \quad (a) (k + \frac{1}{2}) + \frac{i}{2} \ln 3; \quad (b) (k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{i}{4} \ln 5;$$

$$(c) (2k + 1)i; \quad (d) ki.$$

## 第2章

$$2.1.3 \quad (a) 0; \quad (b) 8i.$$

$$2.1.6 \quad , 0.$$

$$2.1.7 \quad (a) \text{当 } x \text{ 趋于 } - \text{ 时, } e^{x+iy} \text{ 趋于原点.}$$

$$(b) \text{当 } y \text{ 趋于 } \text{ 时, } e^{2+iy} \text{ 始终沿圆周 } |w| = e^2 \text{ 移动.}$$

$$2.2.1 \quad z = \pm 2i \text{ 时, } f(z) \text{ 不连续, 补充定义 } f(\pm 2i) = \pm 6i - 2.$$

$$2.3.1 \quad (a), (b) \text{ 导数均不存在.}$$

$$2.3.3 \quad 0.$$

$$2.3.4 \quad -24z(1 - 4z^2)^2.$$

$$2.3.7 \quad \frac{1}{z^2 - 1}.$$

$$2.3.9 \quad (a) y = x \text{ 时 } f(z) = 2x; \quad (b) f(0) = 0.$$

$$2.3.11 \quad (a) f(z) = i, \quad f'(z) = 0;$$

$$(b) f(z) = -e^{-z}, \quad f'(z) = e^{-z};$$

$$(c) f(z) = -\sin z, \quad f'(z) = -\cos z.$$

$$2.4.1 \quad f(1) = 4; \quad f(2) = 32; \quad f(i) = -4i;$$

$$f(-i) = 4i; \quad f(1+2i) = -44 - 8i.$$

2.4.7 函数(a)在整个复平面上处处解析;函数(b)、(d)在  $z \neq 0$  时处处解析;函数(c)在整个复平面上处处不解析;函数(e)在除去点  $z(z^4 + 1 = 0)$  外的复平面上处处解析.

$$2.4.13 \quad (a) z = 0, \pm i; \quad (b) z = 0; \quad (c) z = -2, 1;$$

$$(d) z = x(x - 1); \quad (e) z = 1; \quad (f) z = (k)^{\frac{1}{2}} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$2.5.9 \quad (a) v = x^2 + 2y - y^2 + c; \quad (b) v = 2y - 3x^2y + y^3 + c;$$

$$(c) v = -\operatorname{ch} x \cos y + c; \quad (d) v = \frac{x}{x^2 + y^2} + c.$$

$$2.5.10 \quad (a) z^3 + ci; \quad (b) z^2 + 2z + ci;$$

$$(c) \frac{1}{z} + ci; \quad (d) \frac{1}{z} + 2iz + ci;$$

$$(e) -2ie^z + ci; \quad (f) z^2 + 3iz + c;$$

$$(g) \frac{1}{z+1} + c; \quad (h) \ln z + c;$$

$$(i) ze^z + (1+i)z + c; \quad (j) \frac{1}{2} - \frac{1}{z}.$$

## 第3章

3.1.1  $2 - a$ .3.1.2 (1)  $1 - i; \frac{i}{2}; \frac{1}{2} - i$ . (4)  $0; 0$ .(2)  $-4 + 2i; 4 + 2i; 4i$ . (5)  $2 + 3i$ .(3)  $1 + e; 1 + e$ .3.1.3 当  $m = n - 1$  时, 积分值为  $2i$ , 当  $m \neq n - 1$  时, 积分值为  $0$ .3.1.5  $4(e - 1)$ .3.1.6  $i; -i$ .3.1.13  $8$ .3.2.5 (a)  $(1 + i)^n$ ; (b)  $2\cosh 1$ ;(c)  $0$ ; (d)  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ ;(e)  $3(b - a) + 5 \operatorname{Ln} \frac{b-1}{a-1}$ .3.2.8 未必. 因为  $f(z) = \frac{1}{z}$  沿  $|z| = r$  的积分为  $0$ . 但  $f(z)$  在  $z = 0$  处不解析.3.2.9 (b)  $C$  为不包含原点的简单闭曲线; (c)  $C$  为包含  $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$  或  $z_{1,2}$  全不被包含的曲线.3.2.10  $0$ .

3.2.11 不成立

3.3.1 (a)  $2ie^2$ ; (b)  $\frac{2}{2}i$ ; (c)  $\frac{1}{5}i, \frac{4}{5}i, 0, i$ ;(d)  $e^{\frac{1}{4}i}$ ; (e)  $\frac{1}{2}i$ .(f) 当  $C$  不包含  $\pm 3i$  时, 值为  $0$ .当  $C$  包含  $3i$ , 不包含  $-3i$  时, 值为  $\frac{1}{3}$ .当  $C$  包含  $-3i$ , 不包含  $3i$  时, 值为  $-\frac{1}{3}$ .当  $C$  包含  $\pm 3i$  时, 值为  $0$ ;(g)  $2(e^i - 1)$ ; (h)  $0$ .3.3.2 (a)  $\frac{2}{2}i$ ; (b)  $\frac{2}{2}i$ ; (c)  $2i$ .3.3.4  $f(1+i) = -2(6+i)$ .3.4.1 (a)  $24i$ ; (b)  $\frac{(-4i)(1-i)}{32 \cdot 2}$ ; (c)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ;(d)  $-\frac{8}{3}i$ ; (e)  $\frac{2i}{99!}$ ; (f)  $\frac{(-1)^n 2^n i}{(2n)!}$ ; (g)  $0$ ;(h) 当  $C$  不包含  $\pm ai$  时, 值为  $0$ .



当  $C$  包含  $ai$ , 不包含  $-ai$  时, 值为  $-\frac{i}{4a^3}$ .

当  $C$  包含  $-ai$ , 不包含  $ai$  时, 值为  $\frac{i}{4a^3}$ .

当  $C$  包含  $\pm ai$  时, 值为 0;

$$(i) (2 - e^i) i - \frac{5}{3} e^i; \quad (j) -2 \left( \frac{11}{3^6} + \frac{1}{2^6} \right) i.$$

3.4.2 (a)  $r < 1$  时值为 0;  $r > 1$ ,  $n = 1$  时值为  $2i$ ;  $r > 1$ ,  $n \neq 1$  时值为 0.

(b) 当曲线不包含  $a, b$  时, 值为 0; 当曲线包含  $b$ , 不包含  $a$  时, 值为  $\frac{1}{(b-a)^n}$ ; 当曲线包含  $a$ , 不包含  $b$  时, 值为  $-\frac{1}{(b-a)^n}$ ; 当曲线包含  $a, b$  时, 值为 0.

3.4.4  $2 \pm f(0)$

## 第 4 章

4.1.8 (a) 级数条件收敛

(b) 级数绝对收敛

(c) 级数发散.

4.2.2 (a) 1; (b) 2; (c) ; (d) 1; (e) 1.

$$4.2.3 \frac{1}{(1-z)^2}.$$

$$4.3.2 (a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{b} \frac{1}{b} z^n \quad (|z| < \left| \frac{a}{b} \right|);$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (|z| < +\infty);$$

$$(c) z - \frac{z^3}{3 \times 3!} + \frac{z^5}{5 \times 5!} - \frac{z^7}{7 \times 7!} + \frac{z^9}{9 \times 9!} - \dots \quad (|z| < +\infty);$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < +\infty).$$

$$4.3.3 (a) -\frac{i}{2} \ln \frac{4+i}{4-i} + \frac{16}{17} z - \frac{1}{4} - \frac{64}{289} z^2 + \dots \quad (|z+i| < |z-i|);$$

$$(b) \ln(-3+2i) - \frac{z-2i}{3-2i} - \frac{(z-2i)^2}{2(3-2i)^2} + \dots \quad (|z-2i| < 1);$$

$$(c) 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots \quad (|z| < +\infty);$$

$$(d) \frac{1}{25} - \frac{6}{(25)^2} (z-3) - \frac{11}{(25)^3} (z-3)^2 + \dots \quad (|z-3| < 5).$$

$$4.3.4 (a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z - \frac{1}{2} \quad (|z| < +\infty);$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2n+1)!} (z-i)^{2n+1} \quad (|z| < +\infty);$$

$$(c) z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 - \dots \quad (|z| < +\infty).$$

$$4.3.5 \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad (|z| < +\infty).$$

$$4.3.6 \quad \sec z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{5}{4!} z^4 + \dots \quad (|z| < +\infty).$$

$$4.3.7 \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z+i)^{2n+1} \quad (|z-i| < +\infty).$$

$$4.3.11 \quad (a) g(z) = z + 2a_2 z^2 + 2(a_2^2 + a_3) z^3 + \dots \quad (|z| < +\infty);$$

$$(b) \sin(\sin z) = z - \frac{1}{3} z^3 + \dots \quad (|z| < +\infty).$$

$$4.4.2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-(n+1)} \quad (|z| > 1).$$

$$4.4.3 \quad \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots \quad (0 < |z| < +\infty);$$

$$\frac{e^z}{1+z} = \frac{e}{2i}$$

$$\frac{1}{z-i} = 1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{4} + \frac{i}{2} (z-i) + \dots - \frac{1}{12} + \frac{i}{8} (z-i)^2 + \dots$$

$$4.4.4 \quad (a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(z-i)^{n-2}}{(2i)^{n+2}} \quad (0 < |z-i| < 2);$$

$$(b) \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{1}{z^n} \quad (0 < |z| < +\infty);$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z-1)^{-n} \quad (0 < |z-1| < +\infty),$$

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

$$4.4.5 \quad (a) - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < +\infty),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z-1)^{n-2} \quad (0 < |z-1| < 1);$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1} \quad (0 < |z| < 1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(z-i)^{n-1}}{2^{n+1}} \quad (1 < |z-i| < 2);$$

$$(c) - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{15} - \frac{1}{10} \frac{1}{2^n} z^n \quad (|z| < 2),$$

$$\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \quad (2 < |z| < 3),$$

$$\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n + 4 \cdot (-3)^n z^{-(n+1)} \quad (3 < |z| < +\infty);$$

$$(d) f(z) = \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} - \frac{5}{6} z^2 + \dots \quad (0 < |z| < 1).$$

$$4.4.6 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} (-2)^n - \frac{1}{2^n} z^n \quad (|z| < \frac{1}{2}),$$

$$\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad \left( \frac{1}{2} < |z| < 2 \right),$$

$$\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n - \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{1}{z^n} \quad (2 < |z| < +\infty).$$

## 第5章

5.1.1 (a)  $z=0, \pm i$  一阶极点;  $z=\infty$ , 可去奇点.

(b)  $z=1, 2$ , 一阶极点;  $z=\infty$ , 一阶极点.

(c)  $z=0$ , 三阶极点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

(d)  $z=0$ , 本性奇点;  $z=\infty$ , 一阶极点.

(e)  $z=0$ , 可去奇点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

(f)  $z=0$ , 三阶极点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

(g)  $z=1$ , 二阶极点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

(h)  $z=0$ , 本性奇点;  $z=\infty$ , 一阶极点.

(i)  $z=0$ , 可去奇点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

(j)  $z = \frac{1}{k}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 一阶极点;  $z = \infty$ , 一阶极点;  
 $z=0$ , 本性奇点.

(k)  $z=0$ , 一阶极点;  $z=-1$ , 二阶极点;  $z=\infty$ , 三阶极点.

(l)  $z = \pm i, (2k+1)i$ , 一阶极点;  $z=\infty$ , 本性奇点.

5.1.3 (a) 当  $m \neq n$  时,  $z_0$  为函数的  $\min\{m, n\}$  阶零点. 当  $m = n$  时,  $z_0$  为函数的大于等于  $m$  阶零点.

(b)  $z_0$  为  $m+n$  阶零点.

(c) 当  $m > n$  时,  $z_0$  为  $m-n$  阶零点. 当  $m < n$  时,  $z_0$  为 0 阶零点.

5.2.1 (a)  $\text{Res}[f, 0] = 0$ ,  $\text{Res}[f, i] = \frac{i}{2}$ ,  $\text{Res}[f, -i] = -\frac{i}{2}$ ;

(b)  $\text{Res}[f, 0] = 0$ ;

(c)  $\text{Res}[f; 0] = -2$ ;

(d)  $\text{Res}[f; k + \frac{1}{2}] = (-1)^{k+1}$ ;

(e)  $\text{Res}[f, 1] = \frac{5}{6}$ ;

(f)  $\text{Res}[f, -1] = -\cos 1$ ;

(g)  $\text{Res}[f, 0] = \frac{1}{6}$ ,  $\text{Res}[f, k] = \frac{(-1)^k}{(k!)^2}$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ );

(h)  $\text{Res}[f, 1] = \frac{3}{2}$ ;

(i)  $\text{Res}[f, z_k] = -\frac{1}{n} e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ );

(j)  $\text{Res}[f, \infty] = \frac{(-1)^{m-1} (m+n-2)!}{(n-1)! (m-1)! (-1)^{n+m-1}}$ ;

$$\operatorname{Res}[f, J] = \frac{(-1)^{m-1} (m+n-2)!}{(n-1)! (m-1)! (-)^{n+m-1}};$$

$$(k) \operatorname{Res}[f, i] = \frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}[f, -1] = -\frac{i}{2};$$

$$(l) \operatorname{Res}[f, 0] = 0, \quad \operatorname{Res}[f, 1] = 1.$$

$$5.2.2 \quad m.$$

$$5.2.3 \quad -n.$$

$$5.2.4 \quad (a) \hat{=} \frac{i}{6}; \quad (b) 3i; \quad (c) -\frac{1}{2}, \frac{1}{2k i} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(d) 1; \quad (e) -i/8; \quad (f) 0; \quad (g) \frac{1}{24}; \quad (h) 0; \quad (i) (-i)^{\frac{1}{4}}.$$

$$5.2.5 \quad (a) 0; \quad (b) 0; \quad (c) \frac{2i}{21}; \quad (d) 4e^2 i;$$

$$(e) -\frac{2}{2} i; \quad (f) 2 i; \quad (g) \frac{1}{e}; \quad (j) -\frac{2i}{e}; \quad (k) 0;$$

$$(h) (-1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{2i}{(m-1)!} \quad m \text{ 为整数且 } m \geq 3;$$

$$0, \quad \text{其它};$$

(i) 当 0, 1 都不在 C 内时, 积分为 0;

当 0 在 C 内, 1 在 C 外时, 积分为  $-2i$ ;

当 1 在 C 内, 0 在 C 外时, 积分为  $2i \sin 1$ ;

当 0, 1 都在 C 内时, 积分为  $2i(-1 + \sin 1)$ .

$$(l) 2i; \quad (m) 2i(e^{-\frac{3}{2}} + e^{-\frac{7}{2}}); \quad (n) -4ni.$$

$$5.2.6 \quad (a) -1; \quad (b) -1; \quad (c) -\sin 1; \quad (d) 0;$$

$$(e) \frac{-1}{k! (k+1)!}; \quad (f) = -\frac{1}{6}; \quad (g) = (-1)^k.$$

$$5.2.7 \quad (a) 10i; \quad (b) 2i; \quad (c) -\frac{i}{121}; \quad (d) 0, \quad n \neq 1; \quad 2i, \quad n = 1;$$

$$(e) 2i; \quad (f) 2i.$$

$$5.3.1 \quad (a) \frac{8}{3}; \quad (b) \frac{2}{1-a^2}; \quad (c) \frac{1}{2-a(a+1)}; \quad (d) \frac{2}{1-a^2};$$

$$(e) \frac{1}{4}; \quad (f) \frac{2}{2}; \quad (g) \frac{1}{2e}; \quad (h) (\cos 1 - \sin 1);$$

$$(i) \frac{1}{2}(1 - e^{-1}); \quad (j) \frac{1}{48e^3}(3e^2 - 1).$$

## 第 6 章

$$6.1.1 \quad (a) f(z) = 0;$$

(b)  $w = \frac{1}{z}$  的旋转角  $\frac{1}{2}$ , 伸缩率  $\frac{1}{2}$ . 将  $|z| < 1$  部分放大,  $|z| > 1$  部分缩小.

$w = e^z$  的旋转角 1, 伸缩率 e, 将  $\operatorname{Re}(z) > 0$  放大,  $\operatorname{Re}(z) < 0$  缩小. (c)  $2/2$ .

$$6.2.1 \quad (a) z = -\frac{d}{c}, \quad z = \dots; \quad (b) \text{均为实数}.$$

$$6.2.2 \quad (a) w = \frac{i(1+z)}{1-z}; \quad (b) w = \frac{(z+1)i - (z-1)}{(z+1)i + (z-1)};$$

$$(c) w = \frac{z-i}{z+i}; \quad (d) w = \frac{z+1}{z-i}.$$

$$6.2.4 \quad (a) |w| = 1; \quad (b) \operatorname{Re}(w) = 0; \quad (c) \operatorname{Re}(w) = 0.$$

$$6.2.5 \quad (a) w = -\frac{z+1}{z-1}; \quad (b) w = \frac{1}{1-z}; \quad (c) w = -\frac{1}{z}.$$

$$6.2.6 \quad w = \frac{(1+i)(z-i)}{(1+z)+3i(1-z)}, \text{ 把 } |z| < 1 \text{ 映照成 } \operatorname{Im}(w) < 0.$$

$$6.3.1 \quad (a) w = \frac{2z-1}{z-2}; \quad (b) w = i \frac{2z-1}{2-z}; \quad (c) w = -iz.$$

$$6.3.2 \quad w = e^{i \frac{z-R}{R-\bar{z}}}, \quad |z| < R.$$

$$6.3.3 \quad (a) w = -i \frac{z-i}{z+i}; \quad (b) w = i \frac{z-i}{z+i}; \quad (c) w = \frac{3z + (5-2i)}{(5-2i)z + 3}.$$

$$6.3.4 \quad w = -\frac{z-2i}{z+2i}.$$

$$6.4.2 \quad (a) w = \frac{z^3-i}{z^3+i}; \quad (b) w = \frac{z^3-1}{z^3+1}; \quad (c) w = \frac{(z^2+1)^2 - i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + i(z^2-1)^2}.$$

$$6.4.3 \quad (a) w = -\frac{z+3-i}{z-3-i}^3; \quad (b) w = \frac{z-2(1-i)}{z-2(1+i)}^4;$$

$$(c) w = \frac{z^4+16}{z^4-16}^2; \quad (d) w = -\frac{z^{2/3}+2^{2/3}}{z^{2/3}-2^{2/3}}^2$$

$$(e) w = z^2 + a^2; \quad (f) w = 1 - \frac{z-i}{z+i}^2;$$

$$(g) w = \frac{z+1}{z-1}^2; \quad (h) w = e^{2i \frac{z}{z-2}};$$

$$(i) w = e^{\frac{i}{b-a}(z-a)}; \quad (j) w = \frac{e^{\bar{a}z} - 1}{e^{-\bar{a}z} + 1}^2;$$

$$(k) w = -i \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^2.$$

$$6.4.4 \quad w = -\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$6.4.5 \quad w = -\frac{z^2+2}{3z^2}$$

## 第二篇

## 第 1 章

$$1.1.1 \quad (a) \frac{4(\sin \frac{t}{3} - \cos \frac{t}{3})}{3};$$

$$(b) \frac{2(1 - \cos t)}{i} \quad (|t| \leq 0, 1);$$

$$(c) -\frac{a}{2} e^{-a(\frac{t}{2})^2};$$

$$1.1.2 \quad c_n = \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2}, \quad c_0 = \frac{h}{2}, \quad c_n = \frac{hi}{2n}, \quad |c_n| = \frac{h}{2n}.$$

$$1.2.1 \quad (a) F(\omega) = \frac{2}{2 + \omega^2};$$

$$(b) F(\omega) = \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4};$$

$$(c) F(\omega) = \frac{-2i \sin \frac{\omega}{2}}{1 - \omega^2}.$$

$$1.2.2 \quad (a) f(t) = \begin{cases} e^{-3t} - e^{-5t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} \frac{15}{16}e^{-5t} + \frac{1}{12}e^{-3t}, & t \geq 0; \\ \frac{1}{48}e^{3t}, & t < 0. \end{cases}$$

$$0, \quad |t| > 1;$$

$$1.2.3 \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| < 1; \\ \frac{1}{4}, & |t| = 1. \end{cases}$$

$$1.2.8 \quad (a) F(\omega) = i F(\omega);$$

$$(b) F(\omega) = -ie^{i\omega} \frac{dF(\omega)}{d\omega};$$

$$(c) F(\omega) = \frac{i}{4} F(\frac{\omega}{2});$$

$$(d) F(\omega) = -\frac{i}{4} F(\omega - \frac{\omega}{2}) - F(\omega - \frac{\omega}{2});$$

$$(e) F(\omega) = \frac{1}{2} e^{-\frac{5}{2}i\omega} F(\frac{\omega}{2});$$

$$(f) F(\omega) = -F(\omega) - F(\omega).$$

$$1.2.9 \quad (a) F(\omega) = \frac{1}{(a + i\omega)^2};$$

$$(b) F(s) = -\frac{a}{2} e^{\frac{a}{2}} \left| 1 - e^{-\frac{a}{2}} \right| \quad (\operatorname{Re}(a) > 0).$$

$$1.2.10 \quad (a) g(s) = \frac{2(1 + \cos \frac{a}{2}) - 2 \cos \frac{a}{2}}{(s^2 + 1)^2} \quad (a > 0);$$

$$(b) g(s) = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ 1, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1. \end{cases}$$

$$0, \quad t < 0;$$

$$1.2.11 \quad f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t}), & 0 < t < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}e^{-t}(1 + e^{-t}), & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$1.2.12 \quad (a) \frac{1}{2}; \quad (b) \frac{1}{2}; \quad (c) \frac{1}{2}; \quad (d) \frac{1}{2}.$$

$$1.3.1 \quad (a) F(s) = \frac{b}{b^2 - s^2} + \frac{1}{2i} [f(s - b) - f(s + b)];$$

$$(b) F(s) = \frac{i}{b^2 - s^2} + \frac{1}{2} [f(s - b) + f(s + b)];$$

$$(c) F(s) = \frac{a + i}{s^2_0 + (a + i)^2};$$

$$(d) F(s) = e^{-i(\omega_0 - \omega)t_0} \left[ \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + f(\omega - \omega_0) \right];$$

$$(e) F(s) = \frac{1}{4} i [f(s - 3) - 3f(s - 1) + 3f(s + 1) - f(s + 3)];$$

$$(f) F(s) = \frac{2}{i};$$

$$(g) F(s) = \cos a + \cos \frac{a}{2}.$$

$$1.3.2 \quad e^{t+1} \cos(t+1) + e^{t-1} \cos(t-1)$$

## 第2章

$$2.1.1 \quad (a) \frac{s^2}{s^2 + 1}; \quad (b) \frac{1 + e^{-s}}{1 + s^2}; \quad (c) \frac{1}{s} (e^{-4s} - 4e^{-2s} + 3).$$

$$2.2.1 \quad (a) \frac{1}{a^3} (e^{at} - \frac{a^2 t^2}{2} - at - 1);$$

$$(b) \frac{c - a}{(b - a)^2} e^{at} + \left[ \frac{c - b}{a - b} t + \frac{a - c}{(a - b)^2} \right] e^{-bt};$$

$$(c) t^2 + 5t + 8 + (3t - 8)e^t$$

$$2.3.1 \quad (a) \frac{s}{2} \left[ \frac{1}{s^2 + (\frac{a}{2})^2} + \frac{1}{s^2 + (\frac{b}{2})^2} \right]; \quad (b) \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s};$$

$$(c) \frac{3}{s^{\frac{4}{3}}} - \left( \frac{4}{3} \right) + \frac{4}{s - 2}; \quad (d) \frac{1}{s - 2} + 5.$$

$$2.3.2 \quad \frac{1}{s^2 + 1} e^{-s}.$$

$$2.3.3 \quad (a) \frac{\cos 2 - s \sin 2}{s^2 + 1}; \quad (b) \frac{e^{-2s}}{s^2 + 1}; \quad (c) \frac{\cos 2 + s \sin 2}{s^2 + 1} e^{-2s};$$

$$(d) \frac{e^{2(2-s)}}{s-2}; \quad (e) \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1+s}{s^2} e^{-2s}.$$

$$2.3.4 \quad (a) e u(t-5); \quad (b) \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2(t-2);$$

$$(c) 2u(t-1) - (t-2)u(t-2) - \frac{1}{2}(t-2)^2 u(t-2).$$

$$2.3.5 \quad (a) \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} s}; \quad (b) \frac{1}{s^2} (e^{-as} - 2e^{-2as} + e^{-3as}).$$

$$2.3.6 \quad (a) \frac{s^2 - 4s + 5}{(s-1)^3}; \quad (b) \frac{(s+1)e^{-s}}{(s+1)^2 + 1}; \quad (c) aF(1+as);$$

$$(d) \frac{2s}{I(s+1)^2 + 2J^2}; \quad (e) \frac{1}{2} - \arctan \frac{s+3}{2};$$

$$(f) \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \ln(1 + \frac{1}{s^2}) - \arctan s;$$

$$(g) \frac{1}{s-3}; \quad (h) \frac{1}{s}; \quad (i) \frac{-2(s+1)}{s^2 + 2s + 2};$$

$$(j) \frac{2(3s^2 + 12s + 13)}{(s^3 + 6s^2 + 13s)^2}; \quad (k) \frac{4(s+3)}{s[(s+3)^2 + 4J^2];}$$

$$(l) \frac{1}{s} \ln \frac{s^2 + 4}{s-1}.$$

$$2.3.7 \quad (a) \frac{3}{13}; \quad (b) \frac{1}{4}; \quad (c) \frac{1}{8};$$

$$(d) \frac{1}{4} \ln 5; \quad (e) 0; \quad (f) \frac{1}{2}.$$

$$2.3.8 \quad (a) 2 \cos 3t + \sin 3t; \quad (b) \frac{t^3}{6e^{2t}};$$

$$(c) \frac{1}{b^2 - a^2} (\cos at - \cos bt); \quad (d) \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin t;$$

$$(e) \frac{7}{t} e^{-3t}; \quad (f) \cos t - \cos(t-1) u(t-1).$$

$$2.3.9 \quad (a) 1, 0; \quad (b) 10, 4; \quad (c) 0, 0; \quad (d) 2, 1.$$

$$2.3.10 \quad (a) \frac{1}{(1+s^2)(1-e^{-s})}; \quad (b) \frac{h}{s^2} \operatorname{th} \frac{s}{2}.$$

$$2.3.11 \quad (a) (t) - 2e^{-2t}; \quad (b) \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1);$$

$$(c) \frac{e^{-2t}}{6} (\sin 3t + 3t \cos 3t); \quad (d) \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t).$$

$$2.3.12 \quad (a) t; \quad (b) \frac{m!n!}{(m+n+1)!} t^{m+n+1}; \quad (c) \frac{t}{2} \sin t;$$

$$(d) \operatorname{sh} t - 1; \quad (e) \begin{cases} 0, & t < a, \\ \int_0^t f(t-\tau) d\tau, & t \geq a \geq 0; \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 0, & t < a; \\ f(t-a), & t \geq a. \end{cases}$$

$$2.3.13 \quad (a) \frac{1}{a} (1 - \cos at);$$



$$(b) \frac{at(a-b)-b}{(a-b)^2} e^{at} + \frac{b}{(a-b)^2} e^{bt};$$

$$(c) \frac{3}{8a^5} (\sin at - at \cos at) - \frac{1}{8a^3} t^2 \sin at.$$

$$2.4.1 \quad (a) e^{2t} - t - u(t);$$

$$(b) -2\sin t - \cos 2t;$$

$$(c) \left[ \frac{1}{2} + (1-e)e^{-t} + \left( \frac{e^2}{2} - 1 \right) e^{-2t} \right] u(t-1);$$

$$(d) t - \sin t; \quad (e) t^3 e^{-t};$$

$$(f) \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{8} (1+2t+2t^2) e^{-t};$$

$$(g) -\frac{t^3}{24} \cos t + \frac{t^2}{8} \sin t + \frac{t}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t.$$

$$2.4.2 \quad (a) x(t) = 2u(t) - 4e^t - 3e^{-4t},$$

$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{2}{s-1} + \frac{4}{s+4} \right] = 2e^t + 4e^{-4t};$$

$$(b) x(t) = -\frac{2}{3} e^t + 2t, \quad y(t) = -\frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2};$$

$$(c) x(t) = \frac{2}{3} \cos 2t + \frac{1}{3} \sin 2t + \frac{1}{3} e^t,$$

$$y(t) = -\frac{2}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \sin 2t + \frac{2}{3} e^t;$$

$$(d) x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{ch} 2t + \frac{1}{3} \cos t,$$

$$y(t) = z(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \operatorname{ch} 2t.$$

$$2.4.3 \quad (a) y(t) = (1-t)e^{-t}; \quad (b) y(t) = \sin t;$$

$$(c) y(t) = a(t + \frac{t^3}{6}); \quad (d) y(t) = 2 - \cos t - 3\sin t.$$

$$2.4.4 \quad x(t) = \frac{k}{m} t.$$

$$2.4.5 \quad I(t) = \frac{E}{R} [1 - e^{\frac{R}{L}(t-t_0)}].$$

$$2.4.6 \quad (a) y(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 2}; \quad (b) x(t) = \sin t - \frac{10}{3} \sin 2t.$$

$$* 2.4.7 \quad y(t) = y(0)e^{-t} + ct^3 e^{-t}.$$

$$* 2.4.8 \quad \frac{Ak}{1+T^2} \sin[t - \arctan(T)] + \frac{AkT}{T^2+1} e^{-\frac{t}{T}}.$$

## 主要参考书

1. Ruel V Churchill and James Ward Brown . Complex Variables and Applications . Fourth Edition .New York: McGraw - Hill Book Company , 1984
2. A F Beardon .Complex Analysis . Chichester New York Brisbane Toronto: John Wiley & Sons, 1979
3. 格·列·伦兹与列·埃·艾尔斯哥尔兹 .复变函数与运算微积分初步 .熊振翔等译 .北京:人民教育出版社, 1960 .
4. 西安交通大学数学教研室 .复变函数 .第 4 版 .北京:高等教育出版社, 1996
5. 余家荣 .复变函数 .第 3 版 .北京:人民教育出版社, 2000
6. 渡部隆一, 宫崎浩等 .复变函数 .王远达译 .沈阳:辽宁人民出版社, 1981
7. 史济怀, 刘太顺 .复变函数 .合肥:中国科学技术大学出版社, 1998
8. M .A .拉甫伦捷夫与 B .A .沙巴特 .复变函数论方法 .上下册 .施祥林等译 .北京:高等教育出版社, 1956, 1957
9. [俄]A .N .马库雪维奇 .解析函数论简明教程 .第 3 版 .阎昌龄, 吴望一译 .北京:高等教育出版社, 1992
10. 南京工学院数学教研室 .积分变换 .北京:高等教育出版社, 1978
11. 上海交通大学应用数学系 .积分变换 .上海:上海交通大学出版社, 1988
12. 熊大国 .积分变换 .北京:北京理工大学出版社 1990
13. 罗纳德 N·布拉斯维尔 .傅里叶变换及其应用 .杨燕昌等译, 北京:人民邮电出版社, 1986
14. C J 沙万特 琼 .拉普拉斯变换原理 .西安:陕西科技出版社, 1984 .
15. 王沫然 .MATLAB6.0 与科学计算 .北京:电子工业出版社 2001