计算机考研系列书课包

玩转数据结构

主讲人 刘财政

第九讲 数组

本讲内容

考点一: 数组定义

考点二: 数组的地址计算 ★★★

考点三: 特殊矩阵的压缩存储 ★★★★

启航教育

考点一：

数组定义

启航教育

考点一：数组定义

从逻辑结构上看，一维数组A是n（$n>1$）个相同类型数据元素a_1、a_2、…、a_n构成的有限序列，其逻辑表示为：

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

其中，a_i（$1 \le i \le n$）表示数组A的第i个元素。

考点一：数组定义

一个m行n列的二维数组A可以看作是每个数据元素都是相同类型的一维数组的一维数组。

$$
A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}
\Rightarrow A=[A_1, A_2, \ldots, A_m]
$$

$$A_1=[a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}]$$

$$A_2=[a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}]$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_m=[a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n}]$$

- 由此看出，多维数组是线性表的推广。

考点一：数组定义

数组有什么特点呢？

（1）元素本身可以具有某种结构，属于同一数据类型；

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=(A_1，A_2，\ldots，A_n)$

其中：

$A_j=(a_{1j}，a_{2i}，\ldots，a_{mj})\ (1\le j\le n)$

$A=(A_1，A_2，\ldots，A_m)$

其中：

$A_i=(a_{i1}，a_{i2}，\ldots，a_{in})\ (1\le i\le m)$

考点一：数组定义

数组有什么特点呢？

（1）元素本身可以具有某种结构，属于同一数据类型；

（2）数组是一个具有固定格式和数量的数据集合。

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & x & & \phantom{a_{1n}} \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

在数组上一般不能执行插入或删除某个数组元素的操作

考点一：数组定义

考点二：

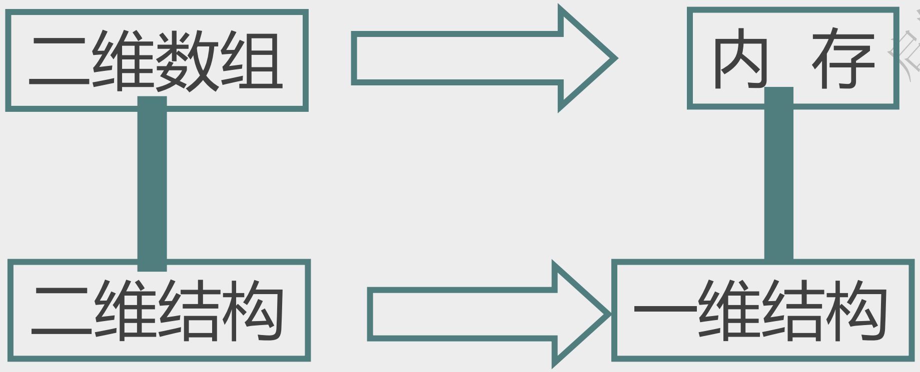
数组的地址计算

考点二：数组的地址计算

数组特别适合采用顺序存储结构 ⇨ 将数组所有元素存储在一块地址连续的内存单元中。

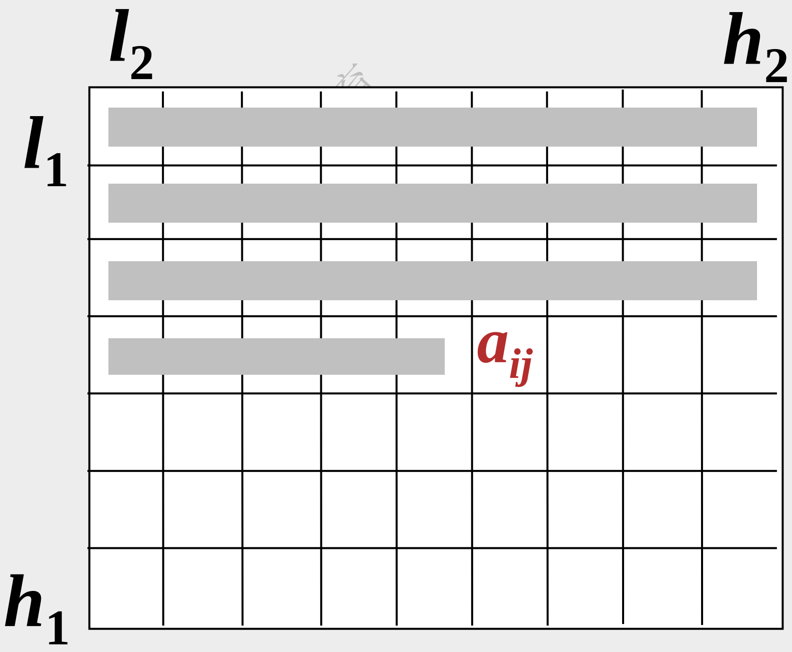
- 数组不能采用链式存储结构吗？
- 为什么数组一般采用顺序存储结构？

数组没有插入和删除操作，所以，不用预留空间，适合采用顺序存储



考点二：数组的地址计算

按行优先：先存储行号较小的元素，行号相同者先存储列号较小的元素



a_{ij}前面的元素个数

=整行数×每行元素个数+本行中a_{ij}前面的元素个数

$=(i-l_1)\times(h_2-l_2+1)+(j-l_2)$

第l_1行　　　　第l_1+1行

$a_{l_1l_2}$	$\cdots$	$a_{l_1h_2}$	$a_{(l_1+1)l_2}$	$\cdots$	$a_{(l_1+1)h_2}$	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	$a_{h_1h_2}$

考点二：数组的地址计算

同理可推出在以列序为主序的计算机系统中有）：

$$LOC(a_{i,j})=LOC(a_{1,1})+[(j-1)\times m+(i-1)]\times L$$

二维数组采用顺序存储结构时，也具有随机存取特性。

是指给定序号（i,j），可以在O(1)的时间内找到相应的元素值。

考点三：

特殊矩阵的压缩存储

考点三：特殊矩阵的压缩存储

什么是特殊矩阵?

特殊矩阵：矩阵中很多值相同的元素并且它们的分布有一定的规律

特殊矩阵如何压缩存储?

为值相同的元素分配一个存储空间

特殊矩阵压缩存储后有什么要求吗?

保证随机存取，即在$O(1)$时间内寻址

考点三：特殊矩阵的压缩存储

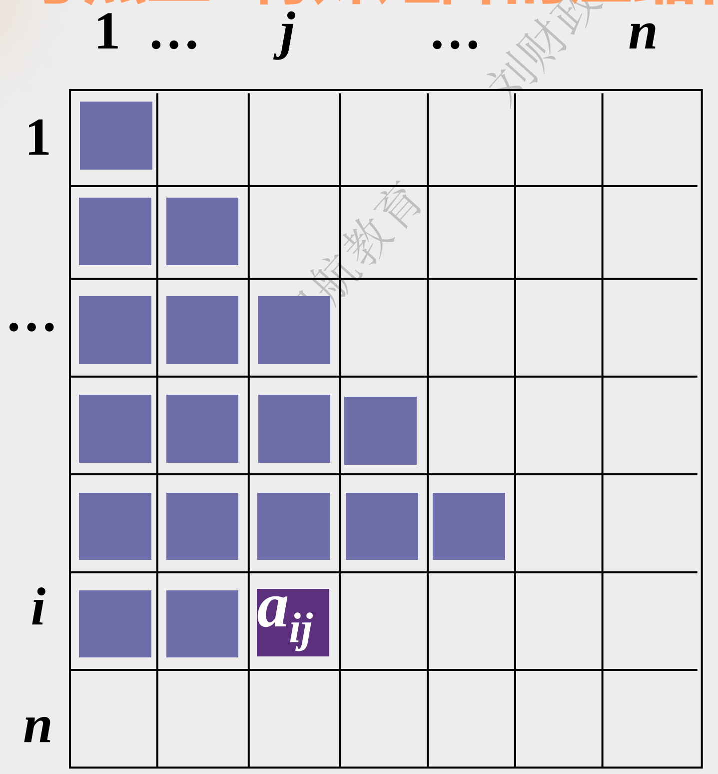
对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

对称矩阵特点：$a_{ij}=a_{ji}$

如何压缩存储对称矩阵呢? ⇨ 只存储下三角部分的元素

考点三：特殊矩阵的压缩存储



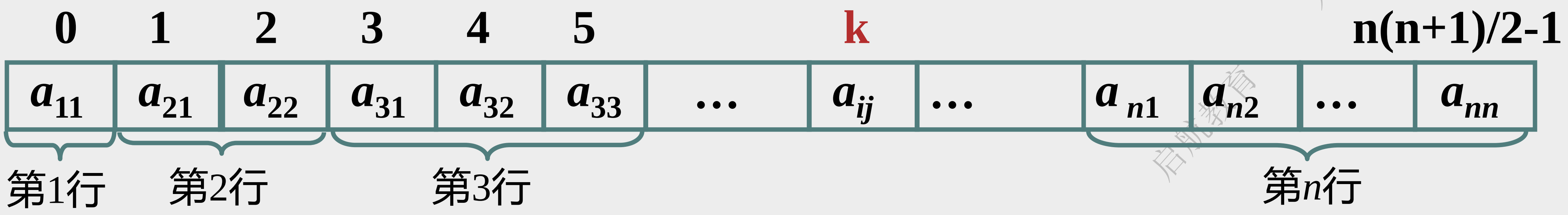
a_{ij} 在一维数组中的序号

$= i\times(i+1)/2+j$

∵一维数组下标从 0 开始

∴a_{ij} 在一维数组中的下标

$k = i\times(i+1)/2+j-1$



考点三：特殊矩阵的压缩存储

对称矩阵压缩存储后的寻址方法

对于下三角中的元素a_{ij}（$i \geq j$）：$k = i \times (i+1)/2 + j - 1$

对于上三角中的元素a_{ij}（$i < j$），因为$a_{ij} = a_{ji}$，则 $k = j \times (j+1)/2 + i - 1$

0	1	2	3	4	5		k					n(n+1)/2-1
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{ij}	…	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}
第1行	第2行		第3行						第n行			

考点三：特殊矩阵的压缩存储

三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & c & c & c & c \\ 6 & 2 & c & c & c \\ 4 & 8 & 1 & c & c \\ 7 & 4 & 6 & 0 & c \\ 8 & 2 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) 下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ c & 2 & 9 & 4 & 6 \\ c & c & 1 & 5 & 7 \\ c & c & c & 0 & 8 \\ c & c & c & c & 7 \end{pmatrix}$$

(b) 上三角矩阵

如何压缩存储三角矩阵呢? ⇨ 下（上）三角部分的元素；相同的常数只存储一个

考点三: 特殊矩阵的压缩存储

下三角矩阵的压缩存储

0	1	2	3	4	5		k						n(n+1)/2
a_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	…	a_{ij}	…	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	c
第1行	第2行		第3行						第n行				

下三角矩阵压缩存储后的寻址方法

对于下三角中的元素a_{ij}（$i \geq j$）：$k = i \times (i+1)/2 + j - 1$

对于上三角中的元素a_{ij}（$i < j$）：$k = n \times (n+1)/2$

考点三：特殊矩阵的压缩存储

考点三：特殊矩阵的压缩存储

对角矩阵

对角矩阵：所有非零元素都集中在以主对角线为中心的带状区域中，所有其他元素都为零

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

如何压缩存储对角矩阵呢？

⇩

只存储非零元素

考点三: 特殊矩阵的压缩存储

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 在一维数组中的序号

$=2+3(i-2)+(j-i+2)$

$=2i+j-2$

∵一维数组下标从 0 开始

∴元素 a_{ij} 在一维数组中的下标

$=2i+j-3$

$$\underbrace{\overset{0}{a_{11}}\ \ \overset{1}{a_{12}}}_{\text{第1行}}\ \ \underbrace{\overset{2}{a_{21}}\ \ \overset{3}{a_{22}}\ \ \overset{4}{a_{23}}}_{\text{第2行}}\ \ \underbrace{\overset{5}{a_{32}}\ \ \overset{6}{a_{33}}\ \ \overset{7}{a_{34}}}_{\text{第3行}}\ \ \overset{8}{a_{43}}\ \ \overset{9}{a_{44}}\ \ \overset{10}{a_{45}}\ \ \overset{11}{a_{54}}\ \ \overset{12}{a_{55}}$$

考点三：特殊矩阵的压缩存储

稀疏矩阵

什么是稀疏矩阵？

稀疏矩阵：矩阵中有很多零元素

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0&7\\0&0&1&0\\2&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

稀疏矩阵如何压缩存储？

只存储非零元素，零元素不分配存储空间

如何只存储非零元素？

三元组：（行号，列号，非零元素值）

考点三：特殊矩阵的压缩存储

三元组表：将稀疏矩阵的非零元素对应的三元组所构成的集合，按行优先的顺序排列成一个线性表

如何存储三元组表？

```
typedef int DataType;
typedef struct
{
    int row, col;
    DataType item;
} Element;
```

((1, 1, 3), (1, 4, 7), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (5, 4, 8))

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

三元组：（行号，列号，非零元素值）

启航教育

考点三：特殊矩阵的压缩存储

三元组顺序表需要预留存储单元吗？

$$((1,1,3),(1,4,7),(2,3,1),(3,1,2),(5,4,8))$$

稀疏矩阵的修改操作

⇩

三元组表的插入/删除操作

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

考点三：特殊矩阵的压缩存储

	row	col	item
0	1	1	3
1	1	4	7
2	2	3	1
3	3	1	2
4	5	4	8
	空闲	空闲	空闲
MaxTerm−1			
	5（非零元个数）		
	5（矩阵的行数）		
	6（矩阵的列数）		

是否对应惟一的稀疏矩阵?

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

考点三: 特殊矩阵的压缩存储

三元组顺序表不适合什么情况?

稀疏矩阵的加法、乘法等操作，非零元素的个数及位置都会发生变化，则在三元组顺序表中就要进行插入和删除操作，顺序存储就十分不便

<table>
<tr><td>row</td><td>col</td><td>item</td></tr>
<tr><td colspan="2">down</td><td>right</td></tr>
</table>

```
typedef struct OrthNode
{
    Element data;
    struct OrthNode *right, *down;
} OrthNode;
```

【牛刀小试】

1．对稀疏矩阵进行压缩存储是为了(　)。

A．方便运算　B．方便存储　C．提高运算速度　D．减少存储空间

D【**解析**】本题考查对矩阵压缩存储的目的。特殊矩阵是指具有许多相同元素或零元素，并且这些相同元素或零元素的分布有一定规律性的矩阵。最常见的特殊矩阵有对称矩阵、上(下)三角矩阵、对角矩阵等。而稀疏矩阵则指矩阵元素个数s相对于矩阵中非零元素个数t来说非常大，即s>>t的矩阵。至于稀疏到什么程度才能算稀疏矩阵，有的课本把稀疏E<0.05的矩阵称为稀疏矩阵。稀疏矩阵要是按照一般存储方式来存储十分浪费存储空间，稀疏矩阵的压缩存储正是为了节省存储空间。

2．稀疏矩阵一般的压缩存储方式有两种，即(　)。

A．二维数组和三维数组　　B．三元组和散列

C．三元组和十字链表　　D．散列和十字链表

C【**解析**】本题考查稀疏矩阵常见的两种压缩存储方式。一般来说，稀疏矩阵非零元素的分布是没有规律的。因此，在存储非零元素的同时，需要存储适当的辅助信息。稀疏矩阵的常见压缩存储方式有三元组和十字链表两种方式。

3．在数组A中，每个元素的长度为3个字节，行下标i从1到8，列下标j从1到10，从首地址SA开始连续存放在存储器内，该数组按行存放，元素A[8][5]的起始地址为(　)。

A．SA+141　B．SA+144　C．SA+222　D．SA+225

C【**解析**】本题考查特殊矩阵压缩存储的地址计算方法，很多题目都考查。本题的数组行下标和列下标均从1开始，按照行优先存储。由于任意元素a_{ij}前面有i-1行，每行n个元素，假设每个元素占用L个存储单元，可计算a_{ij}的起始地址为

$$LOC(a_{ij})=LOC(a_{11})+[(i-1)\times n+(j-1)]\times L$$

本题中，n=10，L=3，可计算

$$LOC(a_{85})=LOC(a_{11})+[(8-1)\times 10+(5-1)]\times 3=SA+(70+4)\times 3=SA+222$$

4．设二维数组A［1..m，1..n]按行存储在数组B中，则二维数组元素A［i][j]在一维数组B中的下标为(　)。

A．n(i-1)+j　　B．n(i-1)+j-1　　C．i(j-1)　　D．jm+i-1

A【**解析**】矩阵行下标和列下标均从1开始，按照行优先存储，由于任一元素a_{ij}前面有i-1行，每行n个元素，则

$$LOC(a_{ij})=LOC(a_{11})+[(i-1)\times n+j]\times L$$

本题中，相当于L=1，$LOC(a_{11})=0$，故

$$LOC(a_{ij})=LOC(a_{11})+[(i-1)\times n+j]\times 1=n(i-1)+j$$

启航教育

5．已知二维数组A的每个元素是由6个字符组成的串，其行下标i=0，1，…，8，列下标j=1，2，3，…，10。若A按行序为主序存储，元素A[8][5]的起始地址与当A按列序为主序存储时的元素(　)的起始地址相同。(设每个字符占一个字节)

A．A[8][5]　　B．A[3][10]　　C．A[5][8]　　D．A[0][9]

B【**解析**】依题意，每个元素有6个字符，每个字符占用1个字节，所以每个元素占用6个字节。数组A的行下标i=0～8，列下标j=1～10。设数组A的起始地址为SA，若A按行序为主序存储，元素A [8][5]前面有0～7共8行，每行10个共80个元素，加上该元素位置的前1～4列的4个元素共84个元素，那么元素A[8][5]的起始地址为

$$A[8][5]=SA+[8\times10+(5-1)]\times6=SA+504$$

当以列为主序存储数组A的元素时，我们分别计算4个选项元素的起始地址。

A选项，A[8][5]以列为主序存储时的起始地址为

$$A[8][5]=SA+(4\times9+8)\times6=SA+264$$

B选项，A[3][10]以列为主序存储时的起始地址为

$$A[3][10]=SA+(9\times9+3)\times6=SA+504$$

C选项，A[5][8]以列为主序存储时的起始地址为

$$A[5][8]=SA+(7\times9+5)\times6=SA+408$$

D选项，A[0][9]以列为主序存储时的起始地址为

$$A[0][9]=SA+(8\times9+0)\times6=SA+432$$

6．设有一个对称矩阵A，采用压缩存储方式，以行序为主序存储，以A[1][1]为第一个元素，其存储地址为1，每个元素占一个地址空间，则A[8][5]的地址为(　)。

A．23　　B．33　　C．18　　D．40

B 【 **解析** 】在n阶矩阵A中，若元素满足性质A[i][j]=A[j][i]，则称矩阵A为对称矩阵。对称矩阵中的元素关于主对角线对称，故只需要存储矩阵的上三角矩阵或下三角矩阵，这样可以节约大约一半的空间。为了便于访问矩阵A中的元素，必须在A[i][j]和一维数组S[k]之间建立一个对应关系。

若 A[i][j]在下三角矩阵中($i \geq j$)，则有 $k=\frac{(i-1)\times i}{2}+(j-1)$；若 A[i][j]在上三角矩阵中($i<j$)，则有 $k=\frac{(j-1)\times j}{2}+(i-1)$。

本题中，$i=8$，$j=5$，所以 $i>j$，故 $k=8\times(8-1)/2+(5-1)=32$。

7．将一个A[1..100，1..100]的三对角矩阵，按行优先存入一维数组B[298]中，A中元素$a_{66,65}$在数组B中的位置k(该元素下标)为(   )(假设B[0]的位置是1)。

A．194　B．195　C．197　D．198

B【**解析**】对角矩阵即所有非零元素集中在以主对角线为中心的带状区域，除了主对角线和相邻两侧的若干条对角线上的元素，其余元素均为0。三对角矩阵即非零元素出现在对角线以及对角线相邻两侧的各一条对角线上。设行下标是i，列下标是j，对于这种矩阵，若按行优先方式来存储，则除了第1行和第n行有两个非零元素，其余行都有3个非零元素，因此共需存储元素3n-2个。元素a_{ij}的存储地址为

$$LOC(A[i][j])=LOC(B[0])+[3\times(i-2)+2+(j-i+1)]\times L$$
$$=LOC(B[0])+(2i+j-3)\times L$$

由以上公式可计算得A[66][65]在B数组中的位置k(该元素下标)为

$$LOC(A[66][65])=1+(2\times66+65-3)\times1=195$$

8．一个n×n的三角矩阵$A=(a_{ij})$如下。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

将三角矩阵中元素$a_{ij}(i\le j)$按行序为主序的顺序存储在一维数组B[1..n(n+1) / 2]中，则a_{ij}在B中的位置是(　)。

A．(i-1)(2n+i) / 2+i-j+1　　B．(i-1)(2n-i+2) / 2+j-i+1

C．(i-1)(2n-i)/2+j-1　　D．(i-1)(2n-i+2) / 2+j-i

D【**解析**】注意上三角矩阵的压缩存储，元素a_{ij}前面共有i-1行，每行非零元素个数分别为n，n-1，…，n-(i-2)个，在第i行a_{ij}前共有j-i个元素，因此a_{ij}在B中的位置为

$$LOC(A[i][j])=LOC(B[0])+[n+(n-1)+\cdots+(n-i+2)+j-i]\times L$$
$$=\frac{(i-1)(2n-i+2)}{2}+j-i$$

【真题实战】

1、有一个100阶的三对角矩阵M，其元素$m_{i,j}$(1<=i<=100，1<=j<=100)按行优先次序压缩存入下标从0开始的一维数组IV中。元素$m_{30,30}$在N中的下标是______。

A. 86　　B. 87　　C. 88　　D. 89

B【解析】画出三对角矩阵，观察规律，第一行有2个元素，剩下的在m30,30之前的28行中每行都有3个元素，而m30，30之前仅有一个元素，m30,29，所以m30,30在数组N中的下标是：2+28*3+2-1=87。

2.设有一个12*12的对称矩阵M，将其上三角部分的元素$M_{i,j}$(1<=i<=j<=12)按行优先存入C语言的一维数组N中，元素$M_{6,6}$在N中的下标是

A.50　　B.51　　C.55　　D.66

A【解析】数组N的下标从0开始，第一个元素 $m_{1,1}$对应存入n0。，矩阵 M的第一行有12个元素，第二行有11个，第三行有10个，第四行有9个，第五行有8个，所以 $m_{6,6}$是第 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 1 = 51 个元素，下标应为50, 故选 A。

3、将一个 10 * 10 对称矩阵 M 的上三角部分的元素素m_{ij} (1≤i≤j≤10) 按列优先存入 C 语言的一维数组 N 中，元素$m_{7,2}$在 N 中的下标是：

A、15　　B、16　　C、22　　D、23

C 【解下】上三角矩阵按列优先存储，先存储仅1个元素的第一列，再存储有2个元素的第二列，以此类推。$m_{7,2}$ 位于左下角，对应右上角的元素为$m_{2,7}$, 在$m_{2,7}$之前存有，第1 列： 1

第2 列： 2

……

第6 列： 6

第7 列： 1

前面共存有1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 = 22 个元素（数组下标范围为0~21), 注意数组下标从0 开始，故$m_{2,7}$在数组N 中的下标为22, 即$m_{7,2}$ 在数组N 中的下标为22 。

启航教育

谢谢大家